



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA HIDRÁULICA E AMBIENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**RENATA SHIRLEY DE ANDRADE ARAÚJO**

**METODOLOGIAS BASEADAS NO MÍNIMO RESIDUO PARA ESCOLHA DO  
PARÂMETRO DE FORMA UTILIZADO EM RBF'S APLICADAS NO MÉTODO  
ASSIMÉTRICO LIVRE DE MALHAS (MESHLESS)**

**FORTALEZA, CE**

**2016**

RENATA SHIRLEY DE ANDRADE ARAÚJO

**METODOLOGIAS BASEADAS NO MÍNIMO RESÍDUO PARA ESCOLHA DO  
PARÂMETRO DE FORMA UTILIZADO EM RBF'S APLICADAS NO MÉTODO  
ASSIMÉTRICO LIVRE DE MALHAS (MESHLESS)**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Engenharia Civil. Área de concentração: Recursos Hídricos.

Orientador: Prof. Marco Aurélio Holanda de Castro, Ph.D.

FORTALEZA, CE

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- A691m Araujo, Renata Shirley de Andrade.  
Metodologias baseadas no mínimo resíduo para escolha do parâmetro de forma utilizado em RBF'S aplicadas no método assimétrico livre de malhas (MESHLESS) / Renata Shirley de Andrade Araújo. – 2016.  
208 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Recursos Hídricos, Fortaleza, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. Marco Aurélio Holanda de Castro.
1. Parâmetro de Forma. 2. Resíduos. 3. Meshless. I. Título.

CDD 627

---

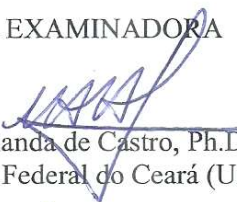
RENATA SHIRLEY DE ANDRADE ARAÚJO


**METODOLOGIAS BASEADAS NO MÍNIMO RESIDUO PARA ESCOLHA DO  
PARÂMETRO DE FORMA UTILIZADO EM RBF'S APLICADAS NO MÉTODO  
ASSIMÉTRICO LIVRE DE MALHAS (MESHLESS)**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Engenharia Civil. Área de concentração: Recursos Hídricos.


Aprovada em: 29/06/2016.


BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Marco Aurélio Holanda de Castro, Ph.D. (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
Prof. Dr. John Kennedy de Araújo (Membro)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
Prof. Dr.ª Ticiania Marinho de Carvalho Studart (Membro)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
Prof. Dr. Carlos Ernando da Silva (Membro)  
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

  
Prof. Dr. Emerson Mariano da Silva (Membro)  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus e ao pequeno Arthur.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre presente na minha vida, proporcionando oportunidades de aprendizado, de saberes, de trabalho e amizades imprescindíveis ao longo do caminho.

Ao meu querido companheiro, amigo e amado esposo Alessandro de Araújo Bezerra, por todo apoio, carinho e esforço para que eu (ou nós) alcançasse meus objetivos ao longo desses anos que estamos juntos, meu amor, muito obrigado.

Aos meus pais, Francisco Pacífico Valdivino e Maria Odete de Andrade Valdivino, por toda dedicação e educação, que me permitiu crescer e tornar-me uma pessoa de bem e, conseqüentemente, a profissional e a mulher que sou hoje. Obrigada pelo exemplo de pessoa e família.

À Stela Maria de Araújo e às minhas irmãs, Roberta de Andrade Valdivino e Natália de Araújo Loiola por estarem presentes durante toda essa trajetória de aulas e de trabalhos.

Ao meu professor e orientador, Marco Aurélio Holanda de Castro, pelo conhecimento que ajudou a construir, pela confiança nos meus projetos e conselhos que ajudaram no crescimento intelectual e profissional.

Aos professores do Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental – DEHA pelo conhecimento transmitido ao longo das disciplinas.

Aos colaboradores do DEHA Shirley, Erivelton e Edineuza pelo auxílio institucional.

Aos colegas do Departamento de Recursos Hídricos, Geotecnia e Saneamento Ambiental – DRHGSA da Universidade Federal do Piauí – UFPI pelo apoio e pela torcida.

À direção do Centro de Tecnologia da UFPI, pelo incentivo e apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos membros da banca pelo tempo e pelas contribuições ao examinar este trabalho.

*“Quem trabalha buscando o reconhecimento dos outros vive em frustração, mas quem busca conhecimento pela sua essência é livre, enriquece-se como ser humano e é capaz de transformar uma sociedade. ” (A Autora)*

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal a busca de um parâmetro de forma ideal  $c$  da metodologia numérica livre de malha, Meshless. Para tanto, dividiu-se o trabalho em duas etapas de aplicação: ambiente unidimensional e bidimensional. Para cada etapa, foram desenvolvidas duas rotinas computacionais para o cálculo numérico, dentro da plataforma Scilab 5.3.3. Fez-se uso de um formato geral que representasse equações diferenciais parciais, implementou-se o método Meshless de Colocação Assimétrico utilizando Funções de Base Radial – RBF. Foram usadas as RBFs: Multiquádrica e a Multiquádrica Inversa. Para encontrar o  $c$ , foi proposta uma metodologia baseada no resíduo total (domínio e contorno) dividida em dois métodos, os quais variam em função do modo de cálculo do resíduo do contorno. Na primeira etapa, foram adotadas três equações, com suas respectivas soluções analíticas, para aplicação do modelo. Na segunda etapa, a equação de Laplace (modelo bidimensional) foi aplicada em dois casos hipotéticos, utilizados para comparar os resultados numéricos obtidos pelo modelo com as soluções exatas e em um caso real para simular a variação da carga hidráulica de uma pequena região dentro da Bacia Sedimentar do Araripe, situada no Estado do Ceará-Brasil. Os resultados obtidos para o modelo unidimensional mostram uma boa convergência entre as soluções numéricas e analíticas. Seguindo a linha anterior, os resultados apresentados para o modelo bidimensional indicam que existe um bom potencial para aplicação do método 2, sendo o  $c$  ótimo obtido pelo modelo, em algumas situações, igual ao parâmetro de forma ideal obtido com o auxílio da solução exata. Os resultados obtidos na aplicação do caso real geraram resultados bastante favoráveis a utilização do modelo, uma vez que os resultados indicaram erros percentuais em torno de 5%. Observou-se que a quantidade de pontos da malha e as condições de contorno podem influenciar no resultado.

**Palavras-chave:** Parâmetro de Forma, Resíduos, Meshless.



## ABSTRACT

The main objective of this research is to propose a new methodology to determine the shape parameter  $c$  in the Meshless numerical method using examples in one and two dimensional. For each dimension, it was developed two computers codes using Scilab 5.3.3. It was used a general format that represents various kinds of partial differential equations. The Meshless method chosen was the Asymmetric Method using Multiquadric RBF's and Inverse Multiquadric RBF's. It was proposed to minimize the residues of the domain and the boundary in order to find the better  $c$  parameter. It was used two methods: Method 1 uses both domain and contour residues while Method 2 uses both residues too, but contour residues is calculated like it was domain residue. For 1-dimension, three equations with yours exacts solutions were used. For 2-dimensions, the Laplace equation was used to compare the numerical results from model in three cases: For Cases 1 and 2 (hypothetic cases), the exact solution was known, therefore it was possible to compare the analytical solution with the solution achieved by using the residue methodology proposed. Case 3 is a real scenario for which the methodology was applied to simulate the hydraulic head situation in a small region in the Araripe Sedimentary Basin, situated in the state of Ceará-Brazil. For 1-dimension cases, method 2 had great numerical results when they were compared with the analytic solution. Although, in 2-dimension problems, method 1 had good numerical results, it was the best one, most cases the obtained shape parameter was the same as the best one obtained with the exact solution. In the real case application, the results indicate good potential for methodology. The percentage of errors was about 5%. The quantity of nodes and contour condition influence the numerical results.

**Keywords:** Shape Parameter, Residues, Meshless.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1- Solução de problema de valor inicial.....	29
Figura 2.2- Solução de problema de valor de contorno.....	30
Figura 2.3- Tipos de solução de EDO em relação a sua linearidade.....	30
Figura 2.4- Classificação em relação à função $G$ .....	31
Figura 2.5- Classificação em função do termo $B^2 - 4AC$ .....	32
Figura 2.6- Exemplos de classificação das condições de contorno.....	34
Figura 2.7- Descrição das forças na deflexão de uma corda.....	35
Figura 2.8- Fluxo de calor em uma barra.....	39
Figura 2.9- Corpo cúbico representado no espaço tridimensional para fluxo de calor.....	42
Figura 2.10- Malha unidimensional.....	46
Figura 2.11- Soluções Aproximadas e Real de $f'(xi)$ .....	48
Figura 2.12- Região quadrangular (à esquerda antes da discretização e à direita após a discretização).....	49
Figura 2.13- Região quadrangular discretização por MEF (à esquerda) e por Meshless (à direita).....	54
Figura 2.14- Região do domínio de discretização em nós ou partículas $j$ .....	57
Figura 3.1- Etapas de cálculo para encontrar $c$ ótimo.....	71
Figura 3.2- Descrição das condições de contorno.....	75
Figura 3.3- Região de trabalho e condições de contorno: Caso I-2D.....	78
Figura 3.4- Região de trabalho e condições de contorno: Caso II-2D.....	79
Figura 3.5- Mapa de locação da Bacia.....	80
Figura 3.6- Distribuição dos Poços de Trabalho.....	81
Figura 4.1- Soluções numérica e exata para 10 pontos – Caso I – 1D.....	84
Figura 4.2- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos – Caso I – 1D.....	85
Figura 4.3- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 10 pontos – Caso I – 1D.....	87
Figura 4.4- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso I – 1D.....	88
Figura 4.5- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso I – 1D.....	89
Figura 4.6- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso I – 1D.....	91
Figura 4.7- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso I – 1D.....	92
Figura 4.8- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso I – 1D.....	93

Figura 4.9- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - Simulação 3 - Caso I – 1D.....	95
Figura 4.10- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso II – 1D.....	97
Figura 4.11- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso II – 1D.....	98
Figura 4.12- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso II – 1D. ....	100
Figura 4.13- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso II – 1D.....	101
Figura 4.14- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso II – 1D. ....	102
Figura 4.15- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para pontos - Caso II – 1D.....	104
Figura 4.16- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso II – 1D.....	105
Figura 4.17- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso II – 1D. ....	106
Figura 4.18- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II – 1D. ....	108
Figura 4.19- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso III – 1D.....	110
Figura 4.20- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos – Caso III – 1D.....	111
Figura 4.21- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III – 1D. ....	113
Figura 4.22- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso III – 1D.....	114
Figura 4.23- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso III – 1D. ....	115
Figura 4.24- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 15 pontos - Caso III – 1D. ....	117
Figura 4.25- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso III – 1D.....	118
Figura 4.26- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso III – 1D. ....	119
Figura 4.27- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III – 1D. ....	121
Figura 4.28- Soluções numérica e exata para 10 pontos – Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	123
Figura 4.29- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	124
Figura 4.30- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	126
Figura 4.31- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.....	127
Figura 4.32- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	128
Figura 4.33- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 nós. Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	130

Figura 4.34- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.....	131
Figura 4.35- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	132
Figura 4.36- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	134
Figura 4.37- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa. ....	136
Figura 4.38- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.....	137
Figura 4.39- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.....	139
Figura 4.40- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa. ....	140
Figura 4.41- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.....	141
Figura 4.42- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa. ....	143
Figura 4.43- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa. ....	144
Figura 4.44- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.....	145
Figura 4.45- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa. ....	147
Figura 4.46- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.....	149
Figura 4.47- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa. ...	150
Figura 4.48- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa. ....	152
Figura 4.49- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.....	153
Figura 4.50- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa. ...	154
Figura 4.51- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa. ....	156
Figura 4.52- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.....	157
Figura 4.53- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa. ...	158
Figura 4.54- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa. ....	160
Figura 4.55- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 9 pontos – Caso I - 2D.....	162
Figura 4.56- Gráficos dos resíduos para 9 pontos – Caso I – 2D.....	164
Figura 4.57- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 9 pontos no Caso I – 2D. ....	165
Figura 4.58- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha	

tracejada) para 25 pontos – Caso I - 2D.....	166
Figura 4.59- Gráficos dos resíduos para 25 pontos – Caso I – 2D.....	167
Figura 4.60- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 25 pontos no Caso I – 2D.....	169
Figura 4.61- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 36 pontos – Caso I – 2D.....	171
Figura 4.62- Gráficos dos resíduos para 36 pontos – Caso I -2D.....	172
Figura 4.63- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 36 pontos – Caso I – 2D.....	174
Figura 4.64- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 9 pontos – Caso II – 2D.....	177
Figura 4.65- Gráficos dos resíduos para 9 pontos – Caso II – 2D.....	178
Figura 4.66- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 9 pontos no Caso II – 2D.....	180
Figura 4.67- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 25 pontos – Caso II – 2D.....	181
Figura 4.68- Gráficos dos resíduos para 25 pontos – Caso II – 2D.....	182
Figura 4.69- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 25 pontos no Caso II – 2D.....	184
Figura 4.70- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 36 pontos – Caso II – 2D.....	186
Figura 4.71- Gráficos dos resíduos para 36 pontos – Caso II – 2D.....	187
Figura 4.72- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 36 pontos no Caso II – 2D.....	189
Figura 4.73- Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 9 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).....	192
Figura 4.74- Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 25 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).....	194
Figura 4.75- Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 36 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).....	195
Figura 4.76- Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 100 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).....	196
Figura 4.77- Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 400 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).....	197

Figura 4.78- Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 625 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito). ..... 198

## LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Lista de EDP's importantes.....	32
Quadro 2.2 – Lista com alguns Métodos Meshless. ....	55
Quadro 4.1 – Resumos dos Resultados Caso I – 1D. ....	96
Quadro 4.2 – Resumos dos Resultados Caso II – 1D. ....	109
Quadro 4.3 – Resumos dos Resultados Caso III – 1D.....	122
Quadro 4.4 – Resumos dos Resultados Caso I – 1D: MQ Inversa.....	135
Quadro 4.5 – Resumos dos Resultados Caso II – 1D: MQ Inversa.....	148
Quadro 4.6 – Resumos dos Resultados Caso III – 1D: MQ Inversa. ....	161
Quadro 4.7 – Resumos dos Resultados Caso I – 2D: MQ. ....	176
Quadro 4.8 – Resumos dos Resultados Caso II – 2D: MQ.....	191

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Características Gerais – Caso III.....	82
Tabela 4.1 – Resultados Simulação 1 – Caso I – 1D. ....	86
Tabela 4.2 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 10 pontos – Caso I – 1D. .....	87
Tabela 4.3 – Resultados Simulação 2 – Caso I – 1D. ....	90
Tabela 4.4 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso I – 1D. .....	91
Tabela 4.5 – Resultados Simulação 3 – Caso I – 1D. ....	94
Tabela 4.6 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - Simulação 3 - Caso I – 1D.	95
Tabela 4.7 – Resultados Simulação 1 – Caso II – 2D.....	99
Tabela 4.8 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso II – 1D. .....	100
Tabela 4.9 – Resultados Simulação 2 – Caso II – 1D.....	103
Tabela 4.10 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 15 pontos - Caso II – 1D.	104
Tabela 4.11 – Resultados Simulação 3 – Caso II – 1D. ....	107
Tabela 4.12 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II – 1D. .....	108
Tabela 4.13 – Resultados Simulação 1 – Caso III - 1D. ....	112
Tabela 4.14 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III – 1D.....	113
Tabela 4.15 – Resultados Simulação 2 – Caso III – 1D.....	116
Tabela 4.16 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 15 pontos - Caso III – 1D.	117
Tabela 4.17 – Resultados Simulação 3 – Caso III. ....	120
Tabela 4.18 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III – 1D.....	121
Tabela 4.19 – Resultados Simulação 1 – Caso I – 1D: MQ Inversa.....	125
Tabela 4.20 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.....	126
Tabela 4.21 – Resultados Simulação 2 - Caso I – 1D: MQ Inversa. ....	129
Tabela 4.22 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.....	130
Tabela 4.23 – Resultados Simulação 3 – Caso I – 1D: MQ Inversa.....	133



Tabela 4.24 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.....	134
Tabela 4.25 – Resultados Simulação 1 – Caso II - 1D: MQ Inversa.....	138
Tabela 4.26 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.....	139
Tabela 4.27 – Resultados Simulação 2 – Caso II - 1D: MQ Inversa.....	142
Tabela 4.28 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.....	143
Tabela 4.29 – Resultados Simulação 3 – Caso II – 1D: MQ Inversa.....	146
Tabela 4.30 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.....	147
Tabela 4.31 – Resultados Simulação 1 – Caso III - 1D: MQ Inversa.....	151
Tabela 4.32 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.....	152
Tabela 4.33 – Resultados Simulação 2 – Caso III – 1D: MQ Inversa.....	155
Tabela 4.34 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.....	156
Tabela 4.35 – Resultados Simulação 3 – Caso III – 1D: MQ Inversa.....	159
Tabela 4.36 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.....	160
Tabela 4.37 – Resultados Simulação 1 – Caso I – 2D.....	163
Tabela 4.38 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 1: Caso I – 2D.....	165
Tabela 4.39 – Resultados Simulação 2 – Caso I – 2D.....	168
Tabela 4.40 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 2: Caso I – 2D.....	170
Tabela 4.41 – Resultados Simulação 3 – Caso I – 2D.....	173
Tabela 4.42 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 3: Caso I – 2D.....	175
Tabela 4.43 – Resultados Simulação 1 – Caso II – 2D.....	179
Tabela 4.44 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 1: Caso II – 2D.....	180
Tabela 4.45 – Resultados Simulação 2 – Caso II – 2D.....	183
Tabela 4.46 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 2: Caso II –	

2D.....	185
Tabela 4.47 – Resultados Simulação 3 – Caso II – 2D.....	188
Tabela 4.48 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 3: Caso II – 2D.....	190

## LISTA DE VARIÁVEIS

$x, y$	Coordenadas do eixo
$p$	Grandeza qualquer utilizada para representar uma equação
$a_n$	Coefficiente qualquer para representar ED
$n$	Ordem da EDO
$t$	Tempo
$\theta$	Ângulo
$g$	Aceleração da gravidade
$L$	Comprimento
$A$	Coefficientes dos termos da EDP
$B$	Coefficientes dos termos da EDP
$C$	Coefficientes dos termos da EDP
$D$	Coefficientes dos termos da EDP
$E$	Coefficientes dos termos da EDP
$F$	Coefficientes dos termos da EDP
$G$	Coefficientes dos termos da EDP
$u()$	Valor de uma função qualquer
$a$	Constante positiva
$f(x, y)$	Valor de uma função no domínio
$g(x, y)$	Valor de uma função no contorno
$\rho^*$	Massa por unidade de comprimento
$T$	Variável para tensão
$\alpha$	Aceleração
$\dot{E}_A$	Taxa de energia acumulada
$\dot{E}_E$	Taxa de entrada de energia térmica ou mecânica
$\dot{E}_S$	Taxa de saída de energia térmica ou mecânica
$\dot{E}_G; G'$	Taxa de energia térmica gerada
$C'$	Calor específico
$k$	Condutividade térmica
$m$	Massa
$\rho$	Massa específica ou densidade ou densidade volumétrica
$Q$	Quantidade de calor

$A'$	Área da seção transversal
$\dot{q}_i$	Fluxo de calor
$h$	Dimensão de espaço
$O(h)$	Erro de truncamento
$I[y]$	Funcional
$V$	Volume
$N$	Número de nós, pontos ou partículas presentes no domínio
$W$	Função de forma
$\varpi_j$	Função peso
$\phi_j$	Função de base radial
$\lambda_j$	Coefficiente desconhecido a determinar
$c$	Parâmetro de forma
$k'$	Quantidade de pontos medidos
$N_D$	Número de nós no domínio
$N_C$	Número de nós no contorno
$\vec{y}$	Vetor dependente dos valores da função no domínio e no contorno
$d$	Distância média entre os nós
$RES_D$	Resíduos do domínio
$RES_C$	Resíduos do contorno
$RES_T$	Resíduos do total
$H$	Carga Hidráulica
$K_j$	Condutividade hidráulica na direção $j$
$F'$	Fonte de recarga ou extração
$S_S$	Coefficiente de armazenamento específico

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>24</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>26</b>
<b>2.1</b>	<b>Equações Diferenciais .....</b>	<b>26</b>
<b>2.1.1</b>	<b><i>Definições Iniciais e Classificação.....</i></b>	<b>26</b>
<b>2.1.2</b>	<b><i>Solução de uma Equação Diferencial.....</i></b>	<b>28</b>
<b>2.1.3</b>	<b><i>Equações Diferenciais Ordinárias.....</i></b>	<b>29</b>
<b>2.1.3.1</b>	<b><i>Problemas de Valor Inicial e de Valor do Contorno .....</i></b>	<b>29</b>
<b>2.1.3.2</b>	<b><i>Características das Soluções.....</i></b>	<b>30</b>
<b>2.1.4</b>	<b><i>Equações Diferenciais Parciais.....</i></b>	<b>31</b>
<b>2.1.4.1</b>	<b><i>Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem.....</i></b>	<b>31</b>
<b>2.1.4.2</b>	<b><i>Condições Particulares .....</i></b>	<b>33</b>
<b>2.1.4.3</b>	<b><i>Equação Unidimensional da Onda.....</i></b>	<b>34</b>
<b>2.1.4.4</b>	<b><i>Equação Unidimensional do Calor.....</i></b>	<b>38</b>
<b>2.1.4.5</b>	<b><i>Equação de Laplace.....</i></b>	<b>42</b>
<b>2.1.4.6</b>	<b><i>Equação de Poisson .....</i></b>	<b>44</b>
<b>2.2</b>	<b>Métodos Numéricos .....</b>	<b>45</b>
<b>2.2.1</b>	<b><i>Método das Diferenças Finitas - MDF.....</i></b>	<b>45</b>
<b>2.2.2</b>	<b><i>Método dos Elementos Finitos - MEF.....</i></b>	<b>49</b>
<b>2.2.3</b>	<b><i>Métodos Numéricos Livres de Malha: MESHLESS.....</i></b>	<b>53</b>
<b>2.2.3.1</b>	<b><i>Método Smooth Particle Hydrodynamics – SPH.....</i></b>	<b>56</b>
<b>2.2.3.2</b>	<b><i>Método de Colocação: MQ - Method .....</i></b>	<b>58</b>
<b>2.2.3.3</b>	<b><i>Método de Colocação Assimétrico Utilizando RBF .....</i></b>	<b>61</b>
<b>2.2.3.4</b>	<b><i>Parâmetro de forma ‘c’ .....</i></b>	<b>63</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>65</b>
<b>3.1</b>	<b>Método Livre de Malha Utilizado .....</b>	<b>65</b>
<b>3.2</b>	<b>Otimização do Parâmetro de Forma c .....</b>	<b>66</b>
<b>3.2.1</b>	<b><i>Metodologia dos Resíduos - RES.....</i></b>	<b>66</b>
<b>3.2.1.1</b>	<b><i>Método 01:.....</i></b>	<b>69</b>
<b>3.2.1.2</b>	<b><i>Método 02:.....</i></b>	<b>69</b>
<b>3.2.2</b>	<b><i>Metodologia dos Resíduos – Unidimensional (1D).....</i></b>	<b>69</b>
<b>3.2.3</b>	<b><i>Algoritmo para Determinação de c.....</i></b>	<b>70</b>

<b>3.3</b>	<b>Construção das Plataformas de Cálculo .....</b>	<b>73</b>
3.3.1	<i>Plataforma de Cálculo Modelos Unidimensionais - 1D .....</i>	73
3.3.2	<i>Plataforma de Cálculo Modelos Bidimensionais - 2D.....</i>	74
<b>3.4</b>	<b>Casos de Aplicação dos Modelos .....</b>	<b>76</b>
3.4.1	<i>Casos de Aplicação Unidimensionais (1D).....</i>	76
3.4.1.1	<i>Caso I – 1D:.....</i>	76
3.4.1.2	<i>Caso II – 1D: .....</i>	76
3.4.1.3	<i>Caso III – 1D: .....</i>	77
3.4.2	<i>Casos de Aplicação Bidimensionais (2D).....</i>	78
3.4.2.1	<i>Caso I – 2D:.....</i>	78
3.4.2.2	<i>Caso II – 2D: .....</i>	79
3.4.2.3	<i>Caso III – 2D: Aplicação Real.....</i>	80
3.4.2.4	<i>Equação Governante dos Casos Bidimensionais .....</i>	82
<b>4</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>84</b>
<b>4.1</b>	<b>Aplicação Unidimensionais.....</b>	<b>84</b>
4.1.1	<i>Caso I - 1D: Multiquádrica .....</i>	84
4.1.1.1	<i>Simulação 1 – 10 nós ou pontos: .....</i>	84
4.1.1.2	<i>Simulação 2 – 15 nós ou pontos: .....</i>	88
4.1.1.3	<i>Simulação 3 – 20 nós ou pontos: .....</i>	92
4.1.2	<i>Caso II - 1D: Multiquádrica.....</i>	97
4.1.2.1	<i>Simulação 1 – 10 nós ou pontos: .....</i>	97
4.1.2.2	<i>Simulação 2 – 15 nós ou pontos: .....</i>	101
4.1.2.3	<i>Simulação 3 – 20 nós ou pontos: .....</i>	105
4.1.3	<i>Caso III - 1D: Multiquádrica .....</i>	110
4.1.3.1	<i>Simulação 1 – 10 nós ou pontos: .....</i>	110
4.1.3.2	<i>Simulação 2 – 15 nós ou pontos: .....</i>	114
4.1.3.3	<i>Simulação 3 – 20 nós ou pontos: .....</i>	118
4.1.4	<i>Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa .....</i>	123
4.1.4.1	<i>Simulação 1 – 10 nós ou pontos: .....</i>	123
4.1.4.2	<i>Simulação 2 – 15 nós ou pontos: .....</i>	127
4.1.4.3	<i>Simulação 3 – 20 nós ou pontos: .....</i>	131
4.1.5	<i>Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa.....</i>	136
4.1.5.1	<i>Simulação 1 – 10 nós ou pontos: .....</i>	136
4.1.5.2	<i>Simulação 2 – 15 nós ou pontos: .....</i>	140

4.1.5.3	<i>Simulação 3 – 20 nós ou pontos:</i>	144
<b>4.1.6</b>	<b><i>Caso III - 1D: Multiquádrica Inversa</i></b>	<b>149</b>
4.1.6.1	<i>Simulação 1 – 10 nós ou pontos:</i>	149
4.1.6.2	<i>Simulação 2 – 15 nós ou pontos:</i>	153
4.1.6.3	<i>Simulação 3 – 20 nós ou pontos:</i>	157
<b>4.2</b>	<b>Aplicações Bidimensionais</b>	<b>162</b>
<b>4.2.1</b>	<b><i>Caso I - 2D: Multiquádrica</i></b>	<b>162</b>
4.2.1.1	<i>Simulação 1 – 9 nós ou pontos:</i>	162
4.2.1.2	<i>Simulação 2 – 25 nós ou pontos:</i>	166
4.2.1.3	<i>Simulação 3 – 36 nós ou pontos:</i>	171
<b>4.2.2</b>	<b><i>Caso II - 2D: Multiquádrica</i></b>	<b>177</b>
4.2.2.1	<i>Simulação 1 – 9 nós ou pontos:</i>	177
4.2.2.2	<i>Simulação 2 – 25 nós ou pontos:</i>	181
4.2.2.3	<i>Simulação 3 – 36 nós ou pontos:</i>	186
<b>4.2.3</b>	<b><i>Caso III - 2D: Multiquádrica – Caso Real</i></b>	<b>192</b>
4.2.3.1	<i>Simulação 1 – 9 nós ou pontos:</i>	192
4.2.3.2	<i>Simulação 2 – 25 nós ou pontos:</i>	193
4.2.3.3	<i>Simulação 3 – 36 nós ou pontos:</i>	195
4.2.3.4	<i>Simulação 4 – 100 nós ou pontos:</i>	195
4.2.3.5	<i>Simulação 5 – 400 nós ou pontos:</i>	196
4.2.3.6	<i>Simulação 6 – 625 nós ou pontos:</i>	197
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>199</b>
<b>6</b>	<b>RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>203</b>
<b>7</b>	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>204</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo das ciências exatas, como a matemática e a física, foi fundamental para elaboração de diversas teorias que regem a dinâmica de vários fenômenos existentes na natureza. A partir da análise realizada por meio da observação e da aplicação experimental dessas formulações, foi possível o desenvolvimento de diversas invenções que causaram, de modo geral, um grande impacto no modo de vida no âmbito da sociedade moderna.

No cálculo, *a priori*, as equações podem possuir dois tipos de soluções: as analíticas e as numéricas. As soluções analíticas são únicas, enquanto existem inúmeras soluções numéricas, também chamadas de soluções aproximadas, por isso exigem um melhor entendimento dos processos matemáticos utilizados para obtê-las.

A complexidade dos problemas existentes nas diversas áreas da engenharia, normalmente, está conectada a solução de equações diferenciais com o uso de solução numérica. Uma solução numérica depende, principalmente, de qual método foi aplicado para obter a solução.

Ao longo das décadas, vários métodos numéricos foram desenvolvidos para possibilitar a aplicação desses tipos de equações e permitir a solução de vários problemas na engenharia. Esses métodos são baseados na discretização do domínio do problema. É importante ressaltar que, para cada método utilizado, haverá uma solução distinta. Ou seja, os resultados obtidos não são necessariamente iguais, mas de grandezas próximas.

Equações diferenciais parciais podem ser representadas por operadores lineares. Quando se trabalha com a solução exata, existe uma relação de igualdade entre os operadores, que representam o domínio e o contorno, com os respectivos valores da função no domínio e no contorno. No entanto, utilizando uma solução numérica, a igualdade se desfaz. Isso gera uma diferença, que será chamada de resíduo. É intuitivo concluir que, quanto menor o resíduo gerado, mais próxima a solução encontrada está da solução ideal.

Uma nova linha voltada para o desenvolvimento de soluções numéricas, a qual vem sendo pesquisada desde a década de 70, destaca-se de outros métodos numéricos pela ausência de malhas ou elementos fazendo a conectividade entre os nós da região de trabalho. As metodologias que seguem essa característica são conhecidas como métodos numéricos livres de malha ou Meshless.



Existem vários tipos de métodos livres de malhas e entre os métodos conhecidos, o Método Meshless de Colocação Assimétrico, proposto pelo pesquisador E. J. Kansa nos anos 90, destaca-se pela facilidade de implementação e pela boa convergência de resultados, como pode ser visto nos trabalhos de Kansa (1990a e 1990b). Entretanto, esse método utiliza Funções de Base Radial ou *Radial Basis Function* – RBF's na sua função de aproximação, e algumas RBF's são dependentes do valor de uma determinada constante denominada de Parâmetro de Forma. Ou seja, para encontrar uma boa solução, é necessário que o parâmetro de forma utilizado seja adequado.

Dessa maneira, a principal problemática envolvida na utilização de RBF's está relacionada a precisão de suas soluções, uma vez que elas são altamente dependentes da escolha do parâmetro de forma.

Este trabalho visa a encontrar valores ótimos para o parâmetro de forma  $c$  do Método Meshless de Colocação Assimétrico pelo desenvolvimento de uma metodologia baseada no princípio dos resíduos gerados.

A originalidade está apresentada no desenvolvimento de dois métodos baseados na metodologia dos resíduos proposta, para buscar o melhor valor de  $c$  a ser aplicado no método livre de malha proposto por Kansa.

Além disso, convém ressaltar que, segundo Menescal (2008), no Brasil as metodologias livres de malha são limitadas aos trabalhos nas áreas da estrutura e da física. Entretanto, dada suas vantagens é importante verificar sua aplicabilidade em outras áreas, como alternativa de trabalho para regiões em que o uso de malhas possa representar prejuízos.

Para verificar a eficiência da metodologia, os valores encontrados para o parâmetro de forma são aplicados em casos hipotéticos, unidimensionais e bidimensionais, os quais possuem solução exata. Além disso, esses resultados são comparados com outros métodos utilizados para obtenção de  $c$ , as metodologias de Fasshauer (2002) e de Hardy (1978).

Finalmente, para fins de uma aplicação prática a metodologia é aplicada em um caso real de fluxo subterrâneo, utilizando uma pequena região da Bacia Sedimentar do Araripe.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRAFIA

### 2.1 Equações Diferenciais

#### 2.1.1 Definições Iniciais e Classificação

É possível representar cada mecanismo mecânico ou forma física de um objeto inerte por uma equação ou modelo matemático. Problemas relacionados à mecânica dos fluidos, cálculo de estruturas de concreto ou a própria mecânica clássica envolvem um conhecimento sobre equações diferenciais.

De maneira geral, uma equação que possui, pelo menos, uma derivada na sua composição é denominada Equação Diferencial. Para Zill e Cullen (2009), uma equação diferencial possui uma ou mais derivadas de variáveis dependentes relacionadas a uma ou mais variáveis independentes.

Estas equações podem ser classificadas quanto: ao tipo, à ordem e à linearidade, de acordo com Boyce e Diprima (2001); Pinchover e Rubinstein (2005) e Zill e Cullen (2009), tem-se:

#### a) Classificação quanto ao Tipo:

Pode-se subdividir em dois grupos principais: Ordinárias ou Parciais. Caso a equação apresente apenas derivadas ordinárias de suas variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, a equação é denominada Equação Diferencial Ordinária. Ver equações 1 e 2:

$$\frac{dx}{dy} + 2x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy} = 0 \quad (2)$$

Se a equação possuir derivadas parciais de suas variáveis dependentes em relação a pelo menos duas variáveis independentes, a equação é chamada de Equação Diferencial Parcial. Ver equações 3 e 4:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

- b) Classificação quanto à Ordem: está relacionada ao expoente de maior valor da derivada de uma equação. Por exemplo, observando as equações 1 e 3, o expoente de maior valor é igual a 1, portanto, essas equações são ditas, respectivamente, equação diferencial ordinária de primeira ordem e equação diferencial parcial de primeira ordem. Por consequência, as equações 2 e 4 são chamadas, respectivamente, equação diferencial ordinária de segunda ordem e equação diferencial parcial de segunda ordem;
- c) Classificação quanto à Linearidade: consiste em qualificar como Linear ou Não-Linear. Uma equação diferencial é dita linear, quando obedece a seguinte relação expressa em 5.

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (5)$$

Ou seja, o expoente da variável  $y$  é igual a 1 e cada coeficiente depende apenas da variável independente  $x$ . As equações 6 e 7 são exemplos de equações lineares. Já as equações 8 e 9 são equações não-lineares.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (6)$$

$$y + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \quad (9)$$

### 2.1.2 Solução de uma Equação Diferencial

Encontrar a solução para uma equação diferencial (ED) envolve a busca por uma função  $f(x)$  que satisfaça a ED em seus termos num determinado intervalo, instituindo uma relação de identidade da substituição de  $f(x)$  na ED.

A equação 10 mostra a representação geral para uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$ .

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad (10)$$

Para que  $f(x)$  seja uma solução da equação 10, a função a ser substituída deve atender a seguinte relação expressa pela equação 11.

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)) = 0 \quad (11)$$

Em outras palavras,  $f(x)$  é solução, quando ao substituir  $y$  e  $y^n$  na equação por, respectivamente,  $f(x)$  e  $f^n(x)$ , a equação diferencial ficar reduzida a uma identidade. (FONG; KEE; KALONI, 2003; ZILL; CULLEN, 2009).

Apesar da simplicidade do conceito, solucionar uma equação diferencial, às vezes, não é uma tarefa fácil e isso ocorre por alguns motivos, como:

- Possuir infinitas soluções;
- Não possuir uma solução.

Quando se deseja resolver uma equação, o raciocínio inicial é levado para a incidência de um único valor ou função como resposta para o problema. Observando uma simples equação de 2º grau, é possível verificar a existência de duas soluções. Para as equações diferenciais, em algumas situações ou na maioria delas, o processo é semelhante, pois elas podem ter uma família de soluções possíveis, uma vez que se pode trabalhar com inúmeros tipos e combinações de funções.

O outro aspecto apresentado decorre do fato causado devido à complexidade das equações, em que o uso de artifícios algébricos conhecidos não são suficientes para encontrar a solução, por isso surge a necessidade do uso de metodologias numéricas como caminho para resolver o problema.

### 2.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias

#### 2.1.3.1 Problemas de Valor Inicial e de Valor do Contorno

Normalmente, quando se refere às equações diferenciais, dois tipos de problemas relacionados a essas equações surgem, são eles:

- Problema de valor inicial;
- Problema de valor do contorno.

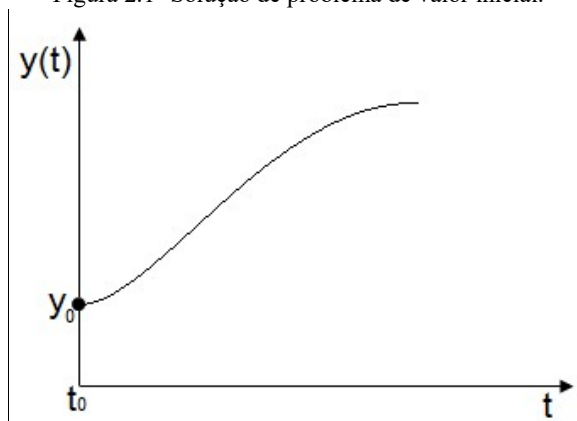
Para o caso das equações diferenciais ordinárias (EDO), não é diferente. Ambos os tipos estão ligados às condições particulares que especificam a EDO. O primeiro, também conhecido do inglês como *Initial-Value*, caracteriza-se por possuir as condições particulares a partir do mesmo valor (ou ponto) dado a variável independente. Por exemplo, a variação do ângulo na movimentação de um pêndulo simples, extraído de Burden e Faires (2010), em que para a equação 12:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (12)$$

A posição inicial é definida no instante  $t_0$  como,  $\theta(t_0) = \theta_0$  e a velocidade nesta posição é dada por,  $\theta'(t_0) = \theta'$ , a isso se dá o nome de problema de valor inicial. Onde  $g$  é aceleração da gravidade e  $L$  o comprimento do pêndulo.

A figura 2.1 mostra o gráfico da solução de uma EDO de valor inicial, cuja condição particular é dada por  $y(t_0) = y_0$ , com o domínio aberto.

Figura 2.1- Solução de problema de valor inicial.

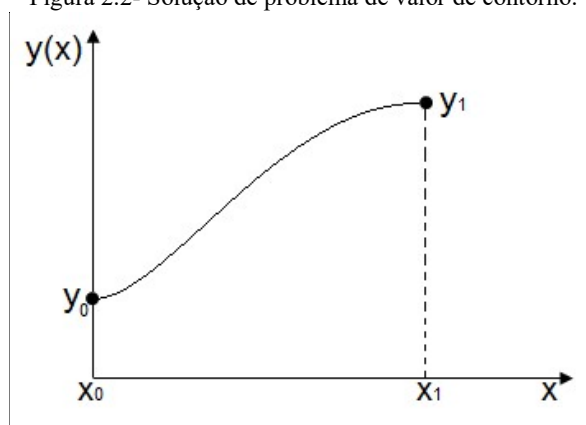


Fonte: Modificado de Hoffman (2001).

O segundo tipo, conhecido do inglês “*Boundary-Value*”, destaca-se por suas condições particulares estarem delimitando o espaço ou o contorno de atuação em que aquela relação expressa pela equação apresentada é válida, ou seja, elas funcionam como fronteiras do problema.

Hoffman (2001) afirma que nos casos de problemas de valor de contorno, as condições de contorno que limitam a variável dependente são especificadas por dois valores da variável independente, ou seja, tem-se um valor inicial e um valor final para a variável. A figura 2.2 mostra o gráfico genérico de uma solução para uma EDO de valor de contorno, cujas condições particulares são:  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$ .

Figura 2.2- Solução de problema de valor de contorno.



Fonte: Modificado de Hoffman (2001).

### 2.1.3.2 Características das Soluções

De uma forma mais geral, já foi comentado sobre as soluções existentes para uma equação diferencial. Quando se fala em solução de uma EDO existe uma particularidade relacionada à linearidade da equação, apontada por Chapra e Canale (2006). Ocorre que o fato de uma EDO ser linear ou não, poderá implicar se ela terá uma solução analítica ou se será necessário à aplicação de um método de aproximação, conforme a figura 2.3.

Figura 2.3- Tipos de solução de EDO em relação a sua linearidade.

<b>EDO:</b>	<b>Pode ser resolvida:</b>
✓ <b>Linear</b>	→ <b>Analiticamente</b>
✓ <b>Não-Linear</b>	→ <b>Numericamente</b>

Fonte: Elaborada pela autora.

## 2.1.4 Equações Diferenciais Parciais

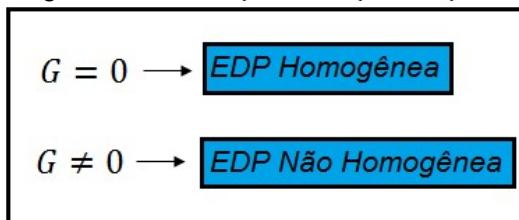
### 2.1.4.1 Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem

Outros tipos de equações ditas diferenciais com importância em vários campos da física e da engenharia são as equações diferenciais parciais (EDP's). As equações diferenciais podem ser classificadas quanto a sua ordem e quanto a sua linearidade, geralmente, as EDP's de segunda ordem e linear são frequentemente utilizadas em diversas aplicações. Uma EDP linear de 2ª ordem com variáveis independentes tem a seguinte forma geral mostrada na equação 13:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (13)$$

Onde A, B, C, D, E, F e G são coeficientes dos termos da equação, esses termos correspondem a funções de x e y. E tomando o coeficiente G pode-se classificar a equação em homogênea e não homogênea, conforme a figura 2.4:

Figura 2.4- Classificação em relação à função G.



Fonte: Elaborada pela autora.

Apesar do conceito simplificado, classificar uma equação em função da sua homogeneidade, geralmente, está ligado a possibilidades de cálculo para sua (ou suas) solução. De acordo com Chow (2003), uma solução geral para uma equação linear não homogênea pode ser obtida por meio da adição de uma solução particular de uma equação não homogênea a uma solução geral de uma equação homogênea.

Para caracterizar, uma solução geral possui as constantes arbitrárias de integração. Quando são obtidos e substituídos os valores dessas constantes, tem-se uma solução particular.

Existe também outra classificação para EDP's desenvolvida em função dos coeficientes da segunda derivada da equação 13. Conforme Gerald e Wheatley (1989), essa

classificação varia em função do valor dado ao termo  $B^2 - 4AC$ . A figura 2.5 ilustra tal classificação de acordo com os autores.

Figura 2.5- Classificação em função do termo  $B^2 - 4AC$ .

$B^2 - 4AC < 0$	→	<i>Equação Elíptica</i>
$B^2 - 4AC = 0$	→	<i>Equação Parabólica</i>
$B^2 - 4AC > 0$	→	<i>Equação Hiperbólica</i>

Fonte: Elaborada pela autora.

Alguns exemplos de importantes equações diferenciais parciais de 2º ordem estão relacionados no quadro 2.1:

Quadro 2.1 – Lista de EDP's importantes.

Equação	Definição
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	<i>Equação Unidimensional da Onda</i>
$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	<i>Equação Unidimensional do Calor</i>
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	<i>Equação Bidimensional de Laplace</i>
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$	<i>Equação Bidimensional de Poisson</i>
Onde: a é uma constante positiva e t é o tempo.	

Fonte: Kreyszig (2011).

De acordo com a classificação proposta na figura 2.5, nota-se que a equação unidimensional da onda é Hiperbólica, a equação unidimensional do calor é Parabólica e as equações bidimensionais de Laplace e Poisson são Elípticas.



É sempre bom observar que essa classificação não é um elemento aleatório, apenas para fins de uma divisão grupal, de acordo com Zill e Cullen (2009), a importância dessa classificação está na sua aplicação prática, uma vez que as equações possuem condições particulares, sejam iniciais ou de contorno, as quais são elementos determinantes para o desenvolvimento da solução por meio da aplicação da metodologia apropriada. A escolha do método a ser adotado está baseada no fato da equação ser elíptica, parabólica ou hiperbólica.

#### *2.1.4.2 Condições Particulares*

Da mesma forma que as equações diferenciais ordinárias podem estar sujeitas a certas condições específicas que irão influenciar na sua solução, as equações diferenciais parciais também estão sujeitas a condições iniciais e a condições de contorno. As condições de contorno podem ser divididas em três tipos importantes:

- a) Condições de Dirichlet;
- b) Condições de Neumann;
- c) Condição de Robin.

Conforme Stavroulakis e Tersian (2004), as condições de Dirichlet ou Condições de Contorno de 1ª Tipo são representadas por valores para a função  $u$  para cada ponto do contorno. As condições de Neumann ou Condição de Contorno de 2ª Tipo são representadas por valores para a derivada normal de  $u$  para cada ponto do contorno. Já a condição de Robin ou Condição de Contorno de 3ª Tipo ou Condição Mista, como o próprio nome sugere, representa uma condição, cuja composição é dada pelos valores para combinação linear de  $u$  e de sua derivada normal para cada ponto do contorno.

A figura 2.6 ilustra, de maneira genérica, exemplos dos três tipos de condições de contorno apresentadas. Onde  $\frac{\partial u}{\partial n}$  representa a derivada normal de  $u$  e  $b$  é uma constante.

Figura 2.6- Exemplos de classificação das condições de contorno.

$u \rightarrow \text{Condição de Dirichlet}$ $\frac{\partial u}{\partial n} \rightarrow \text{Condição de Neumann}$ $\frac{\partial u}{\partial n} + bu \rightarrow \text{Condição de Robin}$
---

Fonte: Kreyszig (2011).

#### 2.1.4.3 Equação Unidimensional da Onda

A equação 14, mostrada a seguir, também conhecida como equação da onda pode representar vários aspectos físicos ligados às oscilações nos diferentes meios.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (14)$$

A função  $u$ , neste caso, pode descrever o deslocamento transversal causado pela vibração de uma corda ou uma membrana (por exemplo, as cordas de um violão ou de um piano) vibrações longitudinais de uma viga ou, ainda, a propagação de uma onda eletromagnética. A variável  $a$  representa a velocidade de propagação da onda, em termos quantitativos (BOAS, 1983; SODRÉ, 2003; CHOW, 2003).

O estudo das consequências devidas ao aparecimento de oscilações é tema presente em várias pesquisas visando o melhor aproveitamento de recursos e aumento de segurança.

Nos trabalhos de Torii (2012), Andrade (2009) e Valência (2007) destacam a importância do controle de vibrações em estruturas civis, uma vez que o excesso desses movimentos costuma contribuir para o aumento de tensões e deformações, que provocam fadigas. Estas, por sua vez, antecipam a ocorrência de falhas, diminuindo a vida útil da estrutura.

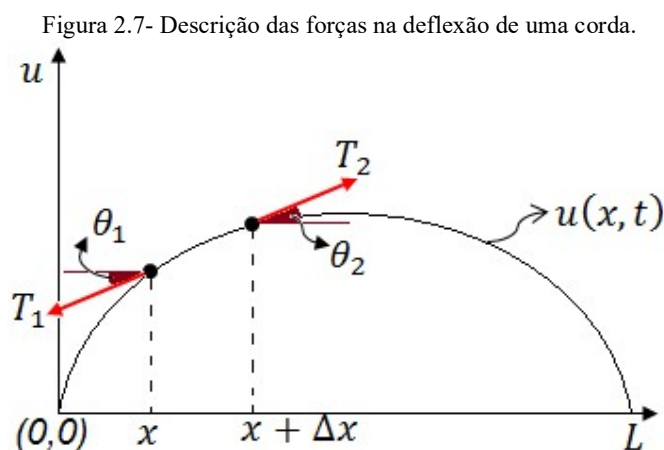
Um modo de encontrar a equação 14, conforme Zill e Cullen (2009) e Sodré (2003) consiste em trabalhar o exemplo da vibração de uma corda, previamente esticada até o comprimento  $L$ , fixa nos extremos. No instante  $t = 0$ , a corda é deslocada da sua posição original e solta novamente, entrando num movimento oscilatório.

O objetivo é encontrar a sua deflexão, ou seja, a função  $u(x, t)$  para um ponto na direção  $x$  para qualquer  $t > 0$ . Evidentemente, encontrar a equação que descreva esse fenômeno físico poderia vir a tornar-se um problema complexo, por isso são realizadas algumas hipóteses, de modo a simplificar a questão.

De acordo com Kreyszig (2011), Quadros e Bortoli (2009), devem ser feitas as seguintes considerações simplificadoras:

- A corda deve ser perfeitamente elástica;
- Não oferecer resistência ao movimento, ou seja, não existem forças externas atuando sobre a corda;
- A corda é homogênea, ou seja, a massa por unidade de comprimento ( $\rho^*$ ) da corda é constante;
- A tensão aplicada inicialmente na corda possui grande magnitude que é possível desprezar a força gravitacional;
- O movimento de cada uma das partículas da corda é realizado estritamente na vertical, ou seja, as componentes das tensões no plano horizontal são constantes;
- O ângulo de inclinação em todos os pontos é pequeno.

Observando a figura 2.7 e assumindo as condicionantes descritas:



Fonte: Modificado de Kreyszig (2011).

As tensões são constantes na horizontal.  $T_{1x}$  e  $T_{2x}$  são as componentes horizontais, respectivamente, da tensão no ponto 1 ( $T_1$ ) e da tensão no ponto 2 ( $T_2$ ), então é possível identifica-las como uma tensão ( $T$ ) genérica, conforme equação 15.

$$T_{1x} = T_{2x} = T \quad (15)$$

De acordo com os ângulos de inclinação dados na figura 2.7, as componentes são dadas por:

$$T_{1x} = T_1 \cos \theta_1 \quad (16)$$

$$T_{2x} = T_2 \cos \theta_2 \quad (17)$$

Aplicando 2ª Lei de Newton nas forças verticais, tem-se a equação 18, onde  $m$  corresponde à massa da porção da corda analisada e  $\alpha$  é a aceleração.

$$T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 = m\alpha \quad (18)$$

Tomando o fato de a corda ser homogênea, em que:

$$\rho^* = \frac{m}{\text{comprimento}} \quad (19)$$

Sabendo que o comprimento da porção analisada é:

$$\begin{aligned} \text{Comprimento} &= x + \Delta x - x \therefore \\ \text{Comprimento} &= \Delta x \end{aligned} \quad (20)$$

A aceleração é descrita como:

$$\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (21)$$

Substituindo os termos encontrados nas equações 19, 20 e 21 na equação 18:

$$T_2 \text{sen} \theta_2 - T_1 \text{sen} \theta_1 = \rho^* \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (22)$$

Dividindo os termos da equação 22 pelos termos apresentados nas equações 15, 16 e 17:

$$\frac{T_2 \text{sen} \theta_2}{T_2 \text{cos} \theta_2} - \frac{T_1 \text{sen} \theta_1}{T_1 \text{cos} \theta_1} = \frac{\rho^* \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}{T} \therefore$$

$$T(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = \rho^* \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (23)$$

Sabe-se que a tangente de um ângulo pode ser escrita pela derivada da função que representa, entretanto como a função aqui trabalhada também depende da variável tempo, então as tangentes de  $\theta_1$  e de  $\theta_2$  serão dadas em termos de suas derivadas parciais em relação aos pontos 1 e 2 definidos na figura 2.7, assim a equação 23 se torna:

$$T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \rho^* \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (24)$$

Rearranjando os termos da equação 24 e fazendo  $\Delta x$  tender a zero:

$$\frac{\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right]}{\Delta x} = \frac{\rho^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}{T} \therefore$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho^*} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (25)$$

A equação 25 é a equação unidimensional da onda, em que o termo  $\frac{T}{\rho^*}$  é expresso pela constante  $a^2$ .

#### 2.1.4.4 Equação Unidimensional do Calor

A equação 26, mostrada a seguir, é conhecida como Equação do Calor ou Equação da Difusão. Conforme Hoffman (2001), Evans (1997), Kreyszig (2011), Zill e Cullen (2009), o nome difusão está relacionado à equação, uma vez que, por meio da sua utilização, é possível quantificar uma evolução no tempo de grandezas como a temperatura e concentrações de substâncias químicas.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \quad (26)$$

Onde a constante  $a$ , neste caso, é denominada Difusividade Térmica e  $\nabla^2 u$  é chamada de Laplaciano da função  $u$ , que pode variar em função da quantidade de dimensões envolvidas:

a) Laplaciano Tridimensional:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

b) Laplaciano Bidimensional:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Tomando a equação 26, e analisando em sua essência mais simples, em apenas uma direção, a equação obtida a partir desse formato particular da equação da difusão corresponde a Equação Unidimensional do Calor (equação 27).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (27)$$

Para entender como se chega à equação 27, inicialmente é necessário lembrar o conceito de balanço energético mostrado no primeiro princípio da termodinâmica.

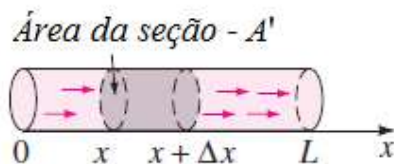
Segundo Incropera et al. (2008), a taxa de energia acumulada num volume de controle estudado ( $\dot{E}_A$ ) é igual a taxa de entrada de energia térmica ou mecânica ( $\dot{E}_E$ ), menos a taxa de saída de energia térmica ou mecânica ( $\dot{E}_S$ ), somada a taxa de energia térmica gerada no interior do volume de controle ( $\dot{E}_G$ ).

A fim de dar continuidade ao processo, é necessário fazer algumas considerações para simplificar o processo. Conforme Kreyszig (2011), Zill e Cullen (2009), as hipóteses simplificadoras são:

- O calor específico  $C'$  e a condutividade térmica do material  $k$  são constantes;
- O corpo do material possui densidade volumétrica  $\rho$  é constante;
- O fluxo de calor ocorre apenas na direção  $x$ ;
- O calor não é gerado nem perdido.

Tomando como base para dedução, o elemento mostrado na figura 2.8, que mostra uma corda de seção circular com comprimento  $L$ .

Figura 2.8- Fluxo de calor em uma barra.



Fonte: Zill e Cullen (2009).

Da definição de balanço de energia, é possível afirmar que:

$$\dot{E}_A = \dot{E}_E - \dot{E}_S + \dot{E}_G \quad (28)$$

Como o calor não é gerado nem perdido,  $\dot{E}_G = 0$ . O termo  $\dot{E}_A$  representa a taxa de variação de energia dentro do corpo e pode ser representado como:

$$\dot{E}_A = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (29)$$

Em que  $Q$  representa a quantidade de calor do elemento e  $t$  o tempo.

Q advém de uma formulação empírica dada para expressar a quantidade de calor em um corpo de massa  $m$  e de temperatura  $u$ . Essa formulação é mostrada na equação 30.

$$Q = C'mu \quad (30)$$

Como a densidade volumétrica é constante, então a massa pode ser representada pelo produto da densidade e do volume. Pela figura 2.8, é possível afirmar que o volume de trabalho pode ser expresso pelo produto entre a área da seção transversal e o deslocamento total do fluxo de calor ao longo do eixo  $x$ , que corresponde ao termo  $\Delta x$  da figura citada. Desse modo, a equação 30 se torna:

$$Q = C'\rho A'\Delta x u \quad (31)$$

Substituindo a equação 31 na equação 29:

$$\dot{E}_A = C'\rho A'\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \quad (32)$$

As taxas de entrada e de saída podem ser obtidas por meio do auxílio de outra formulação empírica conhecida como Lei de Fourier para condução, equação 33, aplicada nos pontos de entrada e saída do volume de controle.

$$\dot{E}_i = \dot{q}_i = -kA' \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \quad (33)$$

Onde  $\dot{q}_i$  é o fluxo de calor. Convém lembrar que como o fluxo de calor flui de uma região de maior temperatura para outra de menor temperatura, como consequência, para expressar um fluxo positivo, é necessário a indicação do sinal (-) negativo mostrado na equação 33.

Assim os fluxos, na entrada onde  $i = x$  e na saída onde  $i = x + \Delta x$ , são expressos pelas equações 34 e 35, respectivamente.



$$\dot{E}_E = -kA' \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad (34)$$

$$\dot{E}_S = -kA' \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \quad (35)$$

Substituindo os termos das equações 32, 34 e 35 na equação 28, o novo balanço de energia é dado por:

$$-kA' \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x - \left( -kA' \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right) + 0 = C'\rho A' \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \quad (36)$$

Dividindo todos os termos da equação 36 por  $kA'$  e rearranjando seus elementos:

$$\frac{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \frac{C'\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (37)$$

Fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{C'\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (38)$$

Rearranjando, novamente, os termos da equação 38:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{C'\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (39)$$

A equação 39 é a equação unidimensional do calor, em que o termo  $\frac{k}{C'\rho} = a^2$ , a qual é conhecida como difusividade térmica.

### 2.1.4.5 Equação de Laplace

Finalmente, tem-se a equação de Laplace descrita na equação 40, no formato tridimensional, e na equação 41, na forma bidimensional.

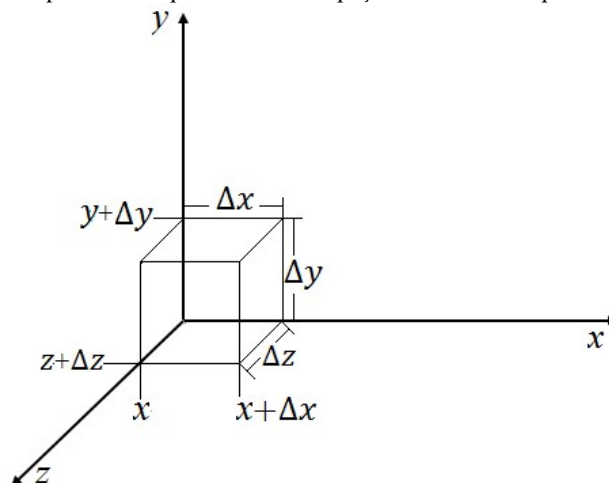
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (41)$$

A equação de Laplace pode ser considerada como uma EDP importante, suas aplicações expandem-se pelos campos da condução de calor, gravitação, eletricidade, magnetismo e hidrodinâmica. (KASNER; DE CICCIO, 1945).

Uma maneira de encontrar uma das aplicações da equação de Laplace é considerando o fluxo de calor ao longo de um corpo cúbico, com dimensões  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , conforme figura 2.9:

Figura 2.9- Corpo cúbico representado no espaço tridimensional para fluxo de calor.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os princípios utilizados são semelhantes aos descritos no tópico anterior para equação unidimensional da onda, entretanto o fluxo agora é tridimensional e o fluxo de calor no corpo é constante.

Uma vez que a taxa de calor gerado ou perdido  $\dot{E}_G = 0$  e o fluxo constante  $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$  de modo que o somatório total nas três dimensões é nulo  $\dot{E}_A = 0$ , a equação 28 para o balanço de energia fica reduzida a:

$$\dot{E}_E - \dot{E}_S = 0 \quad (42)$$

Pela Lei de Fourier para condução aplicada na entrada e saída do corpo, equação 33, as taxas de entrada considerando as dimensões x, y e z são:

$$\dot{q}_{Ex} = -k\Delta y\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x$$

$$\dot{q}_{Ey} = -k\Delta x\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_y$$

$$\dot{q}_{Ez} = -k\Delta x\Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_z$$

De modo que a taxa líquida de entrada em todas as direções de trabalho é dada por:

$$\dot{E}_E = -k\Delta y\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x - k\Delta x\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_y - k\Delta x\Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_z \quad (43)$$

Analogamente, as taxas de saída nas dimensões x, y e z são expressas por:

$$\dot{q}_{Ex} = -k\Delta y\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

$$\dot{q}_{Ey} = -k\Delta x\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+\Delta y}$$

$$\dot{q}_{Ez} = -k\Delta x\Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z+\Delta z}$$

A taxa líquida de saída em todas as direções de trabalho é:

$$\dot{E}_S = -k\Delta y\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - k\Delta x\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - k\Delta x\Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z+\Delta z} \quad (44)$$

Substituindo as expressões das equações 43 e 44 na equação 42, obtêm-se:

$$-k\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x - k\Delta x\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y - k\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_z + k\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} + k\Delta x\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} + k\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z+\Delta z} = 0$$

Dividindo todos os termos da expressão acima pelo produto  $\Delta x\Delta y\Delta z$ , sabendo que a condutividade térmica  $k$  é constante e rearranjando os termos, tem-se:

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y}{\Delta y} + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z+\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_z}{\Delta z} = 0$$

Tomando os limites dos termos envolvidos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (45)$$

A equação 45 corresponde à equação tridimensional de Laplace.

#### 2.1.4.6 Equação de Poisson

Finalmente, a equação de Poisson descrita na equação 46, no formato bidimensional, pode ser interpretada como uma extensão da equação de Laplace.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G' \quad (46)$$

Nesse caso,  $\dot{E}_G$  deixa de ser nulo e passa a existir como um elemento de fonte ou sumidouro para o fenômeno físico analisado, para esse estudo  $\dot{E}_G = G'$  elencado na equação 46.

De modo semelhante à equação de Laplace, a equação de Poisson é geralmente útil na descrição de campos estáveis como potencial termodinâmico ou eletrostático, a uma transferência de calor constante, mais adicionada de um termo de origem. (WANG; YAN; YAN, 2011).

## 2.2 Métodos Numéricos

Como pôde ser observado, é muito comum a utilização de equações diferenciais para representar situações reais nos campos da engenharia, no entanto, os processos para encontrar as soluções associadas a esse tipo de equação, na maioria dos casos, são bastante complexos. Isso torna difícil ou impossível encontrar a solução exata do problema, implicando na utilização de metodologias de aproximação, a fim de encontrar uma possível solução (numérica) para o problema.

Existem vários métodos numéricos disponíveis, em que a escolha pode variar dependendo do tipo de fenômeno físico analisado, bem como da região de trabalho e das ferramentas disponíveis.

A disponibilidade dessas ferramentas é de certo modo recente, e ampliou-se com o advento e universalização do uso dos computadores. Existem metodologias mais antigas e comumente utilizadas, como: o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos. E métodos mais “jovens” que surgem como alternativas para superar determinadas limitações ou para facilitar o entendimento e a programação de algoritmos, como os métodos livre de malhas.

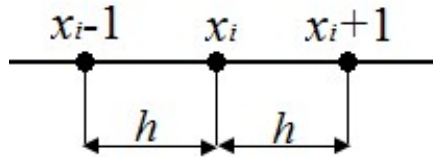
### 2.2.1 Método das Diferenças Finitas - MDF

Provavelmente a metodologia numérica mais simples, tanto em relação a sua compreensão quanto em função de sua aplicabilidade. Dessa maneira, não causaria estranhamento algum a escolha desse método para utilização em diversos trabalhos. As pesquisas de Romero e Fejoli (2015) e Rocha *et al.* (2012) que fazem uso da discretização via diferenças finitas são bons exemplos da contextualização do método.

De acordo com Monerat *et al.* (2010), o método das diferenças finitas consiste em encontrar uma solução para determinada equação diferencial, seja ordinária ou parcial, utilizando para esse fim um sistema de equações algébricas, onde se deseja descobrir os valores da função em cada um dos pontos uniformemente espaçados obtidos via discretização.

As derivadas podem ser aproximadas por diferenças finitas, essas aproximações são obtidas a partir do desenvolvimento da Série de Taylor para a função. Considere a malha no espaço unidimensional da função  $f(x)$  conforme mostra a figura 2.10:

Figura 2.10- Malha unidimensional.



Fonte: Elaborada pela autora.

Expandindo  $f(x)$  em série de Taylor para a região à direita de  $x_i$ :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_i)h^3}{3!} + \dots \quad (47)$$

Aplicando a série, agora, para região à esquerda de  $x_i$ :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} - \frac{f'''(x_i)h^3}{3!} + \dots \quad (48)$$

Atentando que os termos  $f'(x_i)$ ,  $f''(x_i)$  e  $f'''(x_i)$  correspondem às derivadas de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente.

Considerando, na expressão mostrada na equação 47, seus termos até a derivada primeira, configura a expressão da equação 49:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (49)$$

A equação 49 é denominada diferença ou diferenciação ascendente. Realizando a mesma análise para a série da equação 48:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \quad (50)$$

A equação 50 é conhecida como diferença ou diferenciação descendente. O termo  $O(h)$  presente nas equações corresponde a uma estimativa do erro causado pelo truncamento da série de Taylor nas equações de aproximação.

Conforme Gilat e Subramaniam (2008), o erro de truncamento, para ambos os casos apresentados anteriormente, pode ser definido como:

Para Diferença Ascendente:

$$O(h) = -\frac{f''(\xi)}{2!}h \quad (51)$$

Para Diferença Descendente:

$$O(h) = \frac{f''(\xi)}{2!}h \quad (52)$$

Onde  $\xi$  corresponde a um valor de  $x$  entre os pontos que limitam  $h$ . Entretanto o valor de  $O(h)$  não pode ser mensurado, uma vez que  $f''(\xi)$  é desconhecido.

Observando as equações 47 e 51, bem como, as equações 48 e 52, é possível notar que o termo  $O(h)$  corresponderia à inclusão a partir do termo  $\frac{f''(x_i)h^2}{2!}$  nos procedimentos de dedução das equações 49 e 50. Atentando ao fato da substituição de  $x_i$  por  $\xi$  no novo termo.

Tomando a equação 47 e subtraindo a equação 48, ainda para uma aproximação da primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (53)$$

A aproximação mostrada na equação 53 é chamada de diferença ou diferenciação central. Na expressão é possível observar que o erro de truncamento possui ordem 2. Quadros e Bortoli (2009) afirmam que a ordem influencia diversos problemas de engenharia, sendo ordem 1 considerada pouco, ordem 2 suficiente e ordens superiores seriam excessivas.

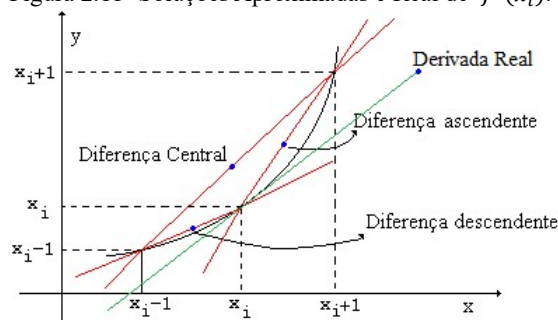
Para obter melhores resultados das aproximações ante a real solução, uma forma seria aumentar a quantidade de pontos da malha, ou seja, diminuir o valor de  $h$ . Entretanto, conforme Pinchover e Rubinstein (2005), uma vez que o tamanho da malha aumente, o custo computacional (associado ao tempo), bem como a capacidade de memória exigida também

seriam maiores. Tal custo poderia inviabilizar a utilização do método, pelo menos, em termos atuais.

Foram apresentados três tipos de equações para aproximações por diferenças finitas para derivada primeira, aproximação por diferença ascendente, aproximação por diferença descendente e aproximação por diferença central. A mesma lógica mostrada pode ser aplicada para o desenvolvimento de outras equações para derivadas de ordem superior.

Como observado anteriormente, pela ordem do erro de truncamento, a equação que forneceria uma melhor aproximação em relação à derivada real seria a aproximação por diferenças centrais. A figura 2.11 ilustra as diferenças entre as inclinações das retas relativas às três soluções aproximadas e a derivada real. Nela é possível visualizar que a reta que mais se assemelha ao dado efetivo é a linha gerada por diferença central.

Figura 2.11- Soluções Aproximadas e Real de  $f'(x_i)$ .



Fonte: Modificado Quadros e Bortoli (2009).

Além da ordem do erro, outros fatores podem interferir no grau de aproximação das soluções, como a quantidade de termos da série de Taylor e a quantidade de pontos de trabalho utilizados para encontrar as equações.

Por exemplo, a equação 49 para aproximação ascendente foi desenvolvida utilizando dois pontos em torno de  $x_i$  ( $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$ ), a ordem para o erro de truncamento foi igual a 1. De acordo com Gilat e Subramaniam (2008), para a mesma aproximação, se fosse desenvolvida utilizando três pontos,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  e  $x_{i+2}$ , a ordem do erro seria igual a 2. Dessa maneira, é possível afirmar que a equação gerada por essa última metodologia seria mais precisa que a primeira.

É possível então afirmar que existem diferentes equações de aproximação por diferenças finitas, sendo necessário definir o grau de precisão com o qual é desejável trabalhar, tendo em vista a capacidade computacional disponível.



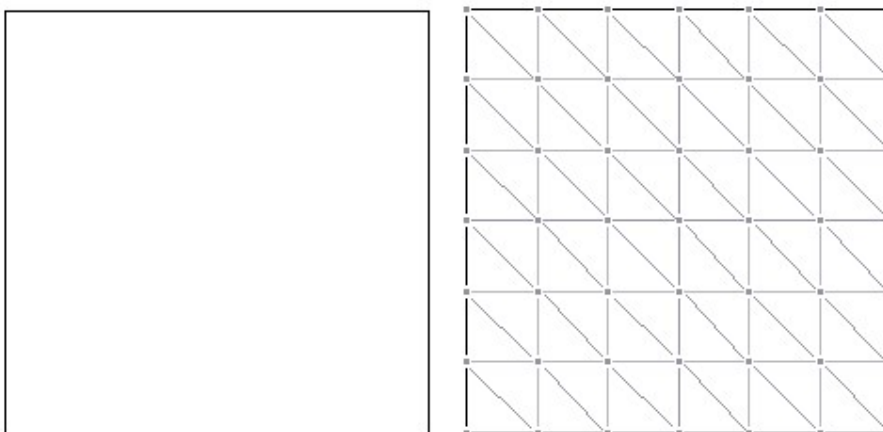
### 2.2.2 Método dos Elementos Finitos - MEF

Outra metodologia importante utilizada para discretização é conhecida como Método dos Elementos Finitos. A aplicabilidade desse método se estende por diferentes áreas do campo científico, partindo da engenharia (utilizada principalmente em análises e modelos estruturais) até áreas da saúde como a ortodontia (cargas e tensões aplicadas nos dentes), por exemplo.

Como o próprio nome sugere, o método se baseia na discretização através de pequenos elementos. Segundo Lotti et al. (2006), cada elemento gerado mantém as características e propriedades do domínio original.

Nesse sentido, basicamente o meio, com o qual se deseja trabalhar, é subdividido em pequenos elementos, conforme mostra a figura 2.12. Na imagem é possível observar que a região quadrangular foi discretizada em unidades menores formadas por vários elementos triangulares.

Figura 2.12- Região quadrangular (à esquerda antes da discretização e à direita após a discretização).



Fonte: Elaborada pela autora.

Um questionamento adequado talvez se pautar na discussão da necessidade dessa subdivisão. Para propor uma possível explicação, é preciso lembrar algumas variáveis importantes nos projetos de grandes estruturas, normalmente se deseja conhecer as tensões e deformações, as quais a estrutura estará submetida.

Tomado o caso da ação fluida num sólido, como exemplo, um fluido, em condições normais, geralmente é tratado como “meio contínuo”, para trabalhar com esses tipos de materiais é preciso encontrar uma porção em que as suas características permaneçam constantes ou sofram o mínimo de variações.

Fluidos, devido às ações das forças e da interação entre suas moléculas, não possuem um formato estrutural definido, moldando-se ao recipiente que o contém, mas não convém medir as relações individuais de cada molécula, mas as relações e comportamentos causados por um conjunto de moléculas (mostrando um efeito macro). Como definir o tamanho desse conjunto faz parte da definição da hipótese do “contínuo”.

Existe uma vasta variedade de fluidos com as mais diversas aplicações, seja na engenharia, quanto na indústria. Dada a complexidade da própria natureza do fluido, a análise desse tipo de elemento seria onerosa e, por vezes, inviável sem o avanço de técnicas computacionais. Resumidamente, trata-se da tentativa de simplificar um problema de maior complexidade, apresentando uma abordagem matematicamente mais simples.

Conforme Azevedo (2003), anteriormente a existência dos métodos dos elementos finitos, meio contínuos eram discretizados por meio das técnicas das diferenças finitas que poderiam resultar na resolução de grandes sistemas de equações lineares. Com a utilização de máquinas computacionais, o método dos elementos finitos passou a ser uma ferramenta constantemente utilizada para modelagem de diversas estruturas com vários tipos de geometria e materiais envolvidos.

Na figura 2.12, a estrutura foi dividida em vários pequenos triângulos, no entanto, dependendo da geometria analisada é possível a subdivisão em outros tipos de formas como: quadrilátero, tetraedros e hexaedros, por exemplo.

Entre alguns autores existem divergências em relação ao tipo de geometria do elemento finito mais utilizado atualmente. Para De Oliveira (2011), a preferência por elementos finitos triangulares é devida ao fato do arranjo ajustável nos variados tipos de estruturas.

Entretanto, de acordo com Azevedo (2003), os elementos finitos triangulares e tetraédricos foram mais utilizados nos estudos e aplicações iniciais do método, agora a preferência é dada aos quadriláteros e aos hexaedros. Lotti *et al.* (2006) concordam parcialmente, quando informam que elementos tetraédricos e hexaédricos são os mais comuns.

Como as características e princípios originais são mantidos, é possível afirmar que o conceito básico do método dos elementos finitos pauta em descrever um determinado

domínio como um conjunto formado por vários subdomínios, acrescentando que a equação, que norteia o fenômeno envolvido, pode ter sua solução aproximada por qualquer um dos métodos variacionais conhecidos.

Para facilitar a compreensão do método, uma pequena introdução a respeito de alguns aspectos será apresentada. De acordo com Reddy (2006), é possível obter uma aproximação para uma variável,  $u$ , dependente do problema e de valor desconhecido, usando o princípio de que qualquer função contínua pode ser representada por uma combinação linear de funções conhecidas  $u_i$  e parâmetros  $c_i$ , conforme mostra a equação 54:

$$u \approx u_h = \sum c_i u_i \quad (54)$$

Onde,  $u_h$  é descrito para cada elemento.

O termo  $u_i$  também é conhecido como: funções de base ou função de interpolação, as quais podem ser polinomiais ou trigonométricas, que atendam as condições de contorno.

Gerald e Wheatley (1989) estabelecem uma rotina simplificada para aplicação do método. Essa rotina está descrita nos itens mostrados a seguir:

a) Encontrar o funcional associado ao problema:

A grande maioria das formulações que regem os fenômenos físicos é representada por equações diferenciais. Segundo Azevedo (2003), a aplicação do método dos elementos finitos necessita da existência de uma equação no formato integral.

Dessa maneira, ao encontrar o funcional associado à equação diferencial governante, utiliza-se de um artifício para transformação de formatos e aplicação do método.

Um funcional está associado a uma classe especial de funções e, geralmente, é chamado de função de funções. A equação 55 mostra uma representação genérica para descrever um funcional.

$$I[y] = \int_a^b F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx \quad (55)$$

Onde,  $I[y]$  corresponde ao funcional.

b) Dividir em elementos:

Consiste em subdividir a área de atuação do problema em pequenas regiões obedecendo ao formato geométrico para o elemento escolhido (triângulo, tetraedro, etc.). Uma maior quantidade de elementos proporcionará uma maior precisão.

c) Relações de interpolação:

Consiste em especificar as relações de interpolação dos valores da função nos nós ou vértices, a fim de propor valores para função em pontos no interior do elemento. Admite-se que o valor dessas relações são zero em pontos fora do elemento, para que o efeito obtido seja localizado, ou seja, apenas pelo elemento. O somatório dessas relações com respeito a cada nó do elemento é utilizado como uma aproximação da solução do problema.

d) Substituir no funcional e minimizá-lo:

Consiste em tomar a expressão dada pelo somatório gerado no item anterior, substituir no funcional da equação que rege o fenômeno e minimizá-lo, para isso, é necessário fazer com que a primeira derivada de  $I[y]$  seja zero e aplicar um dos métodos variacionais conhecidos.

Como pode ser observado, os métodos variacionais são importantes na aplicação dos métodos dos elementos finitos. Os métodos variacionais mais conhecidos são:

O método de Rayleigh-Ritz;

O método dos Resíduos Ponderados;

O método dos Mínimos Quadrados.

### 2.2.3 Métodos Numéricos Livres de Malha: MESHLESS

Os métodos numéricos tradicionalmente conhecidos, como o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos, são amplamente aplicados em pesquisas ligadas à modelagem computacional, ambos os métodos necessitam de nós e elementos para discretizar a malha de trabalho.

A busca por novas alternativas que possibilitem melhorar o desempenho dos resultados é constante, visto que cada metodologia possui suas limitações como: A uniformidade da malha e complexidade das equações das diferenças influencia o trabalho com o MDF (FERNANDO; HU, 2011); A quantidade de elementos utilizados no MEF interfere no tempo computacional e na precisão do modelo (SUCH *et al.*, 2015) (MIDDLETON; JONES; WILSON, 1990). Além disso, para Alencar e Wendland (2013), a grande quantidade de pontos discretizados no MDF e MEF interfere no tempo computacional.

O Meshless é por definição uma metodologia livre de malhas. Por apresentar apenas nós, excluindo a necessidade de elementos ou células, conforme Liu e Liu (2003) e Kansa (1990a), não há problemas de conectividade.

O Meshless surge como uma nova alternativa de trabalho para regiões em que o uso de malhas dificulta a sua representatividade. Por exemplo, cenários em que as malhas podem representar prejuízos, quando sobrepõem a superfície trabalhada, visto que é possível representar melhor uma superfície curva, minimizando o erro associado a uma aproximação por retas ou, ainda, é possível utilizar um número reduzido de pontos para representar superfícies irregulares. De acordo com Kansa (1990a), um modelo numérico associado ao meshless, utilizando como função de aproximação uma função de base radial multiquádrica, requer um menor número de nós que no MEF e no MDF.

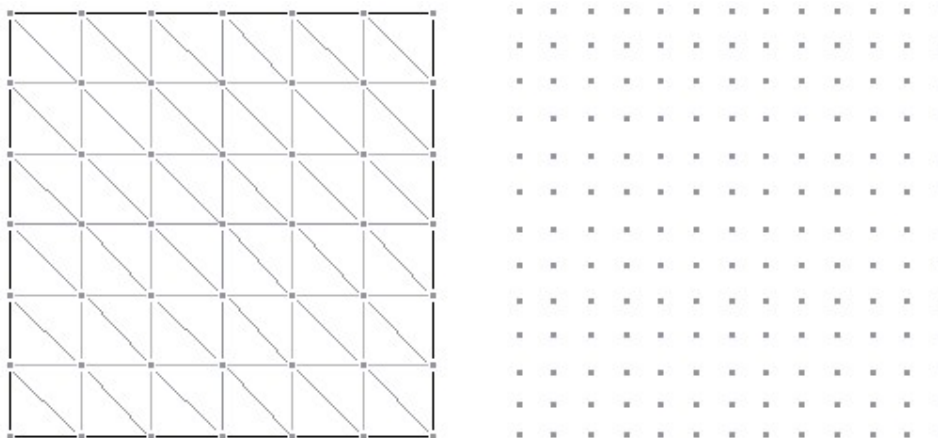
Li e Liu (2002) apresentam outras vantagens dos métodos livres de malha como:

- Devido à ausência de malha, é mais fácil aplicar a metodologia do meshless utilizando programas de desenho assistido por computador, um CAD (em inglês: “*Computer Aided Design*”), que o MEF;
- É útil para modelar fraturas ou grandes deformações devido à facilidade na distribuição dos nós;

- A precisão pode ser controlada de modo mais prático, pois é possível acrescentar mais nós de maneira simples em regiões onde é necessário maior refinamento;
- A discretização do método permite uma descrição eficiente da geometria do objeto modelado.

A figura 2.13 apresenta um quadrilátero qualquer discretizado via elementos finitos e via meshless:

Figura 2.13- Região quadrangular discretização por MEF (à esquerda) e por Meshless (à direita).



Fonte: Elaborada pela autora.

Várias metodologias livres de malhas foram desenvolvidas nas últimas décadas desde o primeiro trabalho conhecido como “*Smooth Particle Hydrodynamics - SPH*” publicado por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977).

De acordo com Liu e Liu (2003), apesar de possuir algumas características semelhantes, essas metodologias diferem na formulação da função de aproximação e do processo de implementação. O quadro 2.2 apresenta alguns métodos livres de malha, conhecidos como meshless ou meshfree, a metodologia na qual o método foi baseado e os seus pesquisadores.

Quadro 2.2 – Lista com alguns Métodos Meshless.

<b>Método</b>	<b>Metodologia de Aproximação</b>	<b>Pesquisadores</b>
<b>Smooth Particle Hydrodynamics - SPH</b>	<i>Representação Integral</i>	<i>Lucy (1977); Gingold e Monaghan (1977)</i>
<b>Multiquadric - MQ Method</b>	<i>Método de Colocação; Função de Base Radial (Radial Basis Function – RBF)</i>	<i>Hardy (1990)</i>
<b>Finite Point Method</b>	<i>Diferenças Finitas</i>	<i>Liszka e Orkisz. (1980); Onate et al.(1996).</i>
<b>Método Meshless de Colocação Assimétrico</b>	<i>Método de Colocação; RBF</i>	<i>Kansa (1990)</i>
<b>Diffuse Elemento Method - DEM</b>	<i>Mínimos Quadrados Móveis (MLS) e Método de Galerkin</i>	<i>Nayroles et al. (1992)</i>
<b>Particle in Cell Method</b>	<i>Elementos Finitos</i>	<i>Sulsky et al. (1992)</i>
<b>Element-Free Galerkin – EFG - Method</b>	<i>DEM</i>	<i>Belytschko et al. (1994)</i>
<b>Reproducing Kernel Particle Method - RKPM</b>	<i>SPH</i>	<i>Liu et at. (1995)</i>
<b>Partition of Unity Method - PUM</b>	<i>MLS</i>	<i>Babuska and Melenk (1995 e 1996)</i>
<b>HP-Cloud Method</b>	<i>MLS, Partição de Unidade</i>	<i>Duarte e Oden (1996)</i>
<b>Free Mesh Method</b>	<i>Método de Galerkin</i>	<i>Yagawa and Yamada (1996)</i>
<b>Meshless Local Petrov-Galerkin – MLPG - Method</b>	<i>MLS, Método de Petrov-Galerkin</i>	<i>Atluri e Zhu (1998 e 1999); Atluri e Shen (2002)</i>
<b>Point Interpolation Method – PIM</b>	<i>RBF, Funções Polinomiais, Método de Galerkin e Método de Galerkin</i>	<i>Liu e Gu (1999 e 2001); Gu e Liu (2001); Liu (2002); Wang e Liu (2000, 2001 e 2002)</i>
<b>Meshfree Weak-Strong Form - MWS</b>	<i>MLS, PIM, Radial PIM</i>	<i>Liu e Gu (2002 e 2003)</i>

Fonte: Modificado de Chen, Lee e Eskandarian (2006); Hardy (1990); Liu e Liu (2003); Lin e Atluri (2001); Pan, Zhang e Lu (2005); Guedes (2006).

Como é possível notar no quadro acima existem vários métodos meshless. Dessas metodologias, será descrito o método Smooth Particle Hydrodynamics – SPH, uma vez que foi o primeiro trabalho desenvolvido e os métodos Meshless de Colocação (MQ-Method e Assimétrico) utilizando RBF, visto que são as metodologias utilizadas no desenvolvimento dessa pesquisa.

### 2.2.3.1 Método Smooth Particle Hydrodynamics – SPH

O SPH foi o método livre de malha pioneiro, desenvolvido em 1977 pelos pesquisadores Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977). De acordo com Liu e Liu (2003), o SPH foi desenvolvido para resolver problemas envolvendo astrofísica no espaço, em partículas, cujo movimento é semelhante ao fluxo de fluidos, ou seja, onde as equações que governam o fluxo hidrodinâmico podem ser aplicadas no modelo.

A proposta do método é que cada partícula carrega informações e características geradas pelas equações governantes. Assim, da mesma maneira que as equações de conservação são aplicadas a cada elemento contido nos fluidos e esses elementos carregam suas características independente de uma malha, essa seria a ideia central do método SPH.

A formulação do SPH, de acordo com Chen, Lee e Eskandarian (2006); Guedes (2006) e Liu e Liu (2003), está baseada na função de aproximação, mostrada na equação 56, para a função  $u(x)$ , um campo físico qualquer em um domínio  $\Omega$ .

$$u^h(x) = \int u(x^*)W(x - x^*, h)dx^* \quad (56)$$

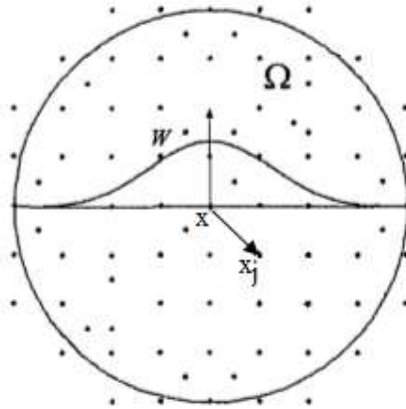
Em que  $u^h(x)$  é a aproximação para  $u(x)$ ;  $W(x - x^*, h)$  é a função peso ou função de ponderação (ver figura 2.14);  $h$  é um tamanho associado ao volume de aplicação.

Sendo  $dx^*$  um volume infinitesimal do local de situação de uma partícula  $j$  e aplicando a propriedade física da densidade ( $\rho$ ), então a massa de cada partícula  $j$  (onde  $j = 1, 2, \dots, N$ ) e  $N$  corresponde ao número de partículas presentes no domínio, é dada pela equação 57:

$$m_j = \rho_j \Delta V_j \quad (57)$$



Figura 2.14- Região do domínio de discretização em nós ou partículas  $j$ .



Fonte: Modificado de Liu e Liu (2003); Xiong *et al.* (2011).

De acordo com o método SPH, aplicando a integral ao longo do volume da partícula, a equação 56 é reescrita como:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N u(x_j)W(x - x_j, h)\Delta V_j \quad (58)$$

Fazendo  $\varpi_j(x) = W(x - x_j, h)\Delta V_j$ , então:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N \varpi_j(x)u(x_j) \quad (59)$$

Essa é a equação de aproximação para cada partícula ou nó do domínio. Onde  $\varpi_j$  é uma função de forma da aproximação.

O método SPH, como qualquer outra metodologia, vem sofrendo constantes adaptações, servindo como base para o desenvolvimento de novos códigos ou rotinas de aplicação, como: no trabalho de Susa (2010), que analisou vários métodos de fluxos radioativos para verificar quais possuíam uma boa convergência; no trabalho de Xiong *et al.*(2011) que usou o SPH para resolver equações para simular dois sistemas fluidos: a sedimentação de sólidos suspensos em líquidos e no processo da formação de bolhas; no trabalho de Liu *et al.* (2015) que utilizou o SPH para analisar os efeitos das “tidal bores”,

conhecidas no Brasil como “pororoca” em canais, estudando os perfis de superfície e o campo de velocidade.

### 2.2.3.2 Método de Colocação: MQ - Method

Essa metodologia surgiu a partir do trabalho inicial chamado “*Multiquadric - MQ Method*”. Conforme Hardy (1990), essa metodologia foi desenvolvida em 1968 por R. L. Hardy, o objetivo era encontrar um método para representar a topografia de superfícies irregulares a partir da interpolação de poucos dados dispersos e desordenados, uma vez que séries trigonométricas e polinomiais não satisfazem adequadamente a caracterização, quando se tem esse tipo de dados.

Conforme Kansa (1990a),  $U$  é uma grandeza física que é conhecida em um número limitado de pontos. A ideia do método da interpolação é, a partir dessa informação, encontrar aproximações precisas em outros pontos desconhecidos dentro do domínio. Dessa forma a função de interpolação ou função de aproximação  $u$  deve se aproximar de  $U$  obedecendo a seguinte relação:

$$u(x_j) = U(x_j) \quad (60)$$

Onde  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Para um melhor entendimento, os métodos baseados na interpolação de dados dispersos (em termos unidimensionais) podem ser descritos como:

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi_j \quad (61)$$

Onde  $\phi_j$  é chamada de função base ou função de base radial (RBF sigla em inglês) e  $\lambda_j$  é um coeficiente desconhecido a determinar que está associado ao número de nós e sua localização.

A função de aproximação  $u(x)$  depende da escolha de  $\phi_j$ , que em geral depende das distâncias entre os pontos do domínio. De acordo com Kansa e Carlson (1992), uma RBF é representada pela seguinte notação,  $\phi_j = \|x - x_j\|$ , onde  $\|\cdot\|$  corresponde a Norma Euclidiana.

Hardy (1978) mostra as seguintes funções de base radial para interpolação de dados:

a) Multiquádrica ou Multiquádrica Direta:

$$\phi_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + c^2} \quad (62)$$

$$\phi_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2} \quad (63)$$

Onde  $c$  é denominado parâmetro de forma. As equações 62 e 63 representam a RBF multiquádrica em termos unidimensionais e bidimensionais, respectivamente.

b) Multiquádrica Inversa

$$\phi_j = \left( \sqrt{(x - x_j)^2 + c^2} \right)^{-1} \quad (64)$$

$$\phi_j = \left( \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2} \right)^{-1} \quad (65)$$

Existem algumas referências na literatura que utilizam o termo “Multiquadrática”, Hardy (1990) faz referência a esse termo “*Multiquadratic*”, mas escolhe a adoção do termo “*Multiquadric*” ou “Multiquádrica” para fazer referência ao método.

Além das RBFs multiquádricas, existem outros tipos de funções de base radial. As RBFs mais comuns na literatura, conforme Franke (1982); Franke e Schaback (1998), são as Gaussianas e as Thin plate spline, apresentadas a seguir:

c) Gaussianas:

$$\phi_j = e^{-c(x-x_j)^2} \quad (66)$$

d) Thin plate spline:

$$\phi_j = (x - x_j)^2 \ln|x - x_j| \quad (67)$$

Ao longo dos seus 20 anos iniciais (1968 a 1988), o método MQ foi utilizado em diversos campos de aplicação como: Topografia, cartografia, geodesia, geofísica, sensoriamento remoto, fotogrametria, modelos digitais de terreno, geografia, hidrologia e hidrodinâmica. (HARDY, 1990).

O método de Hardy (1990), forma simplificada, pode ser apresentado do seguinte modo. Tomando certa quantidade de pontos medidos em  $k'$ , onde  $k' = 1, 2, \dots, n$ . Desse modo, a grandeza  $u(x)$  passa a  $u(x_{k'})$  que é conhecida dentro dos pontos em  $k'$ . Aplicando a equação 61:

$$u(x_{k'}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi_{k',j} \quad (68)$$

Em termos da RBF multiquádrica (unidimensional) mostrada na equação 62, a equação 68 fica:

$$u(x_{k'}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x_{k'} - x_j)^2 + c^2} \quad (69)$$

Em notação matricial, é possível escrever a equação 68 como:

$$[u(x_{k'})] = [\lambda_j][\phi_{k',j}] \quad (70)$$

Isolando a matriz dos coeficientes a determinar:

$$[\lambda_j] = [\phi_{k',j}]^{-1}[u(x_{k'})] \quad (71)$$

Substituindo a equação 71 na equação 68, é possível estimar o valor da função  $u(x)$  para qualquer ponto (p) conforme a equação 72:

$$[u(x_p)] = [\phi_{p,j}][\phi_{k',j}]^{-1}[u(x_{k'})] \quad (72)$$

Franke (1982) realizou um estudo para avaliação de métodos de interpolação de dados dispersos e escassos. Entre os 29 métodos analisados, estava a metodologia MQ (direta e inversa) proposta por Hardy. A pesquisa testou as seguintes características dos métodos:

- A precisão;
- O tempo relacionado ao esforço computacional requerido para os cálculos;
- A sensibilidade do parâmetro utilizado, a fim de saber como a sua variação afeta os resultados;
- O tamanho das matrizes de armazenamento;
- Facilidade para implementação computacional.

De acordo com o trabalho de Franke (1982), os resultados obtidos utilizando o método MQ-direto foram bons e bem consistentes, apresentando, por vezes, os resultados de maior precisão entre todos os métodos testados. O autor ainda destaca que o MQ-inverso também apresenta resultados tão bons quanto o MQ-direto.

### 2.2.3.3 Método de Colocação Assimétrico Utilizando RBF

O método de colocação assimétrico, também conhecido como método de Kansa ou apenas método assimétrico, foi desenvolvido por Kansa (1990a e 1990b) a partir do trabalho de Hardy utilizando as funções multiquádricas para aplicar em problemas envolvendo equações diferenciais parciais.

Para melhor compreensão do método, convém considerar que uma equação diferencial parcial pode ser escrita na seguinte representação, segundo Kansa (1999); Franke e Schaback (1998) e Vrankar *et al.* (2010):

$$Lu(x) = f(x), \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^z \quad (73)$$

$$Bu(x) = g(x), \text{ em } \partial\Omega \quad (74)$$

Em que  $L$  e  $B$  são operadores lineares.  $L$  é o operador interior, ou seja, está relacionado com o domínio, representado por  $\Omega$ .  $z$  é a dimensão espacial de representação.  $B$  é o operador do contorno, ou seja, é a ele que especifica as condições de contorno, sejam do tipo: Direchlet, Neuman ou de Robin. Na equação 74,  $\partial\Omega$  denota o contorno do  $\Omega$ .

A descrição do método de Kansa apresentada a seguir baseou-se nas pesquisas de Kansa (1990a e 1990b); Kansa (1999); Franke e Schaback (1998); Rodrigues, Roque e Ferreira (2012); Roque (2007) e Vrankar *et al.* (2010);

O método Assimétrico de Kansa propõe que a função de aproximação utilizada para interpolação de dados, equação 61, seja usado para solucionar problemas envolvendo EDP's. Desse modo, tomando as condições impostas pelas equações 73 e 74 e aplicando o valor de  $u(x)$  dado pela equação 61 são encontrados os seguintes conjuntos de equações:

a) No domínio  $\Omega$ :

$$L \left[ \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi_j(x_i) \right] = f(x_i), \text{ para } i = 1, \dots, N_D \quad (75)$$

b) No contorno  $\partial\Omega$ :

$$B \left[ \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi_j(x_i) \right] = g(x_i), \text{ para } i = N_D + 1, \dots, N_D + N_C \quad (76)$$

Onde  $N_D$  e  $N_C$  correspondem, respectivamente, aos nós no domínio e no contorno. E  $N_D + N_C = N$ .

Utilizando o procedimento de colocação é possível escrever as equações 75 e 76 em um sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} L\phi \\ B\phi \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (77)$$

Para melhor entendimento da formulação do operador  $L$  da função  $\phi$ , toma-se a formulação genérica mostrada na equação 13 no início desse trabalho:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (13)$$

O operador  $[L\phi]$  para a equação 13 é:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi = G \quad (78)$$

Fazendo:

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \vec{y} \text{ e } \begin{bmatrix} L\phi \\ B\phi \end{bmatrix} = A$$

Tem-se:

$$A\lambda = \vec{y} \quad (79)$$

Onde  $\vec{y}$  é um vetor dependente dos valores da função no contorno e no domínio.

Aplicando a matriz inversa de  $A$  na equação 79:

$$\lambda = \vec{y}A^{-1} \quad (80)$$

Pela equação 80 é possível obter  $\lambda$ , um escalar escrito na forma  $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$ , e substituindo na equação 61, encontra-se a solução aproximada para todos os termos de  $N$ .

#### 2.2.3.4 Parâmetro de forma 'c'

Desde o primeiro trabalho sobre as multiquádricas de Hardy, a escolha adequada do parâmetro de forma  $c$  influencia diretamente nos resultados apresentados pela aplicação do método. As variações aplicadas ao valor de  $c$  podem aproximar ou distanciar os resultados obtidos da solução ideal, por exemplo, para uma dada equação qualquer que possua solução exata, o valor de  $c$  pode aproximar ou afastar a solução obtida através do método da solução exata.

Hardy (1978) sugeriu a equação 81 como alternativa para estimar um valor para o parâmetro de forma  $c$ . De acordo com o autor, essa equação não fornece um valor ótimo ou ideal, mas ainda assim é uma alternativa que pode ser utilizada.

$$c = 0.665d^2 \tag{81}$$

Onde  $d$  corresponde a distância média entre os nós.

Já Fasshauer (2002) utilizou a equação 82 para fazer uma estimativa do valor de  $c$ .

$$c = \frac{2}{\sqrt{N}} \tag{82}$$

Ambas as equações podem gerar valores a serem utilizados ou podem servir como estimativa inicial da ordem de grandeza do parâmetro de forma a ser aplicado.



### 3 METODOLOGIA

A metodologia de trabalho desta pesquisa foi dividida em etapas para que houvesse uma melhor abordagem. As etapas são descritas a seguir:

- Metodologia livre de malha a ser aplicada;
- Desenvolvimento das metodologias para cálculo do parâmetro de forma ótimo;
- Construção da plataforma de cálculo para modelos unidimensionais (1D);
- Aplicação do modelo 1D em equações possuidoras de solução analíticas para verificar o comportamento do modelo numérico;
- Comparação da solução numérica 1D encontrada com as metodologias de otimização do  $c$  propostas neste trabalho com a solução numérica aplicando outras metodologias para o cálculo de  $c$ ;
- Construção da plataforma para modelos bidimensionais (2D);
- Aplicação do modelo 2D em exemplos fictícios, possuidores de solução analíticas;
- Comparação da solução numérica 2D encontrada com as metodologias de otimização do  $c$  propostas neste trabalho com a solução numérica aplicando outras metodologias para o cálculo de  $c$ ;
- Aplicação do modelo bidimensional em um caso real de uma pequena faixa de poços presentes na Bacia Sedimentar do Araripe.

#### 3.1 Método Livre de Malha Utilizado

O método numérico utilizado para desenvolvimento do trabalho foi a metodologia livre de malha proposta por Kansa, o Método de colocação assimétrico. A função de aproximação utilizada no método é descrita pela equação 68. Conforme foi descrito anteriormente, essa equação é baseada de acordo com a função de base radial utilizada.

As RBFs utilizadas no trabalho variam de acordo com o espaço de trabalho. Para o modelo unidimensional (1D), foram usadas as RBFs: Multiquádrica ou Multiquádrica Direta e a Multiquádrica Inversa, respectivamente, representadas pelas equações 62 e 64. Já

para o modelo bidimensional (2D), por ser mais complexo, foi utilizada apenas a RBF Multiquádrica, representada pela equação 63.

### 3.2 Otimização do Parâmetro de Forma $c$

As funções de base radial multiquádrica e multiquádrica inversa são dependentes do parâmetro de forma  $c$ . Esse é um elemento que influencia diretamente na solução gerada por meio dessa metodologia.

De acordo com Menescal (2008), a aplicação de metodologias livres de malha possui como restrição encontrar o parâmetro de forma adequado para encontrar a solução aproximada. Desse modo, ressalta-se a importância de desenvolver um processo de cálculo para encontrar um valor de  $c$  que retorne uma melhor solução por meio de aplicação direta. A metodologia desenvolvida para otimização do parâmetro de forma está baseada no cálculo dos resíduos totais gerados.

#### 3.2.1 Metodologia dos Resíduos - RES

Para caracterizar a metodologia proposta, os resíduos calculados e utilizados na metodologia dos resíduos foram divididos em três categorias, são elas:

- Resíduos do Domínio ( $RES_D$ );
- Resíduos do Contorno ( $RES_C$ );
- Resíduos Totais ( $RES_T$ ).

Para facilitar a compreensão do que vem a ser cada um dos três tipos de resíduos mostrados acima, toma-se a equação 83 mostrada a seguir, como uma equação diferencial parcial simplificada apresentada em um formato genérico e bidimensional:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial y} + Eu(x) + Fu(y) + Gx + Hy = I \quad (83)$$

Rearranjando os termos da equação 83, tem-se:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial y} + Eu(x) + Fu(y) = I - Gx - Hy \quad (84)$$

Em que no domínio o lado esquerdo da igualdade da equação 84 corresponde ao termo  $L[u(x, y)]$  e o lado direito é  $f(x, y)$ . Como mostrado a seguir:

$$L[u(x, y)] = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial y} + Eu(x) + Fu(y)$$

$$f(x, y) = I - Gx - Hy$$

Enquanto no contorno, o lado esquerdo da igualdade corresponde ao termo  $B[u(x, y)]$  e o lado direito é dado por  $g(x, y)$ .

$$B[u(x, y)] = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial y} + Eu(x) + Fu(y)$$

$$g(x, y) = I - Gx - Hy$$

Para qualquer expressão, quando se trabalha com a solução exata, ocorrem os seguintes fatos:

No domínio:

$$L[u(x, y)] = f(x, y)$$

No contorno:

$$B[u(x, y)] = g(x, y)$$

No entanto, uma solução numérica é uma aproximação, de maneira que as igualdades propostas anteriormente são desfeitas, pois existirá uma diferença entre o valor encontrado pelo método numérico e o valor real. Essa diferença é o que se chama por Resíduo. Dada a definição de resíduo, então, o resíduo no domínio da função pode ser escrito como sendo a expressão dada pela equação 85:

$$L[u(x, y)] - f(x, y) = RES_D \quad (85)$$

Aplicando o princípio anterior, mas utilizando contorno da função, tem-se a equação 86:

$$B[u(x, y)] - g(x, y) = RES_C \quad (86)$$

As expressões acima são utilizadas nos nós, ou seja, cada nó irá gerar um resíduo baseado na equação 85, no caso domínio, ou na equação 86, em caso de contorno. Aplicando a solução, apresentada na equação 68, nas equações 85 e 86, conduzem-se as expressões:

a) Cálculo do Resíduo do Domínio:

$$L \left[ \sum_{j=1}^{N_D} \lambda_j \phi_{k',j} \right] - f(x, y) = RES_D \quad (87)$$

Onde:

$$L[\phi_{k',j}] = A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C \frac{\partial \phi}{\partial x} + D \frac{\partial \phi}{\partial y} + E(x) + F\phi(y)$$

b) Cálculo do Resíduo do Contorno:

$$B \left[ \sum_{j=1}^{N_C} \lambda_j \phi_{k',j} \right] - g(x, y) = RES_C \quad (88)$$

Os elementos da equação 88 podem ser particularizados de acordo com o tipo de condição de contorno do problema, caso a condição de contorno seja do tipo essencial ou Dirichlet:

$$B[\phi_{k',j}] = \phi_{k',j}$$

Ou caso a condição de contorno seja natural ou Neumann:

$$B[\phi_{k',j}] = \frac{d\phi}{dr_j}$$

A partir das condições apresentadas, dois métodos foram desenvolvidos para o cálculo dos resíduos totais, ambos estão fundamentados na equação 89, em que o  $RES_T$  é igual à soma dos resíduos de domínio e de contorno.

$$RES_T = RES_D + RES_C \quad (89)$$

### 3.2.1.1 Método 01:

Neste método, o  $RES_T$  é calculado utilizando a equação 89. Os pontos de domínio e de contorno são calculados conforme procedimentos adotados nas equações 87 e 88, respectivamente.

### 3.2.1.2 Método 02:

Estudos preliminares revelaram que a ordem de grandeza do resíduo do contorno possuía uma ordem de grandeza muito diferente do resíduo do domínio. Além disso, o resíduo do domínio oscilava bastante em relação ao parâmetro de forma utilizado. Com o objetivo de analisar qual a influência dessa conclusão nos valores do parâmetro de forma, desenvolveu-se o método 1, em que o  $RES_C$  é inserido na modelagem atuando como domínio. Desse modo, utilizou-se a equação 87 para o cálculo dos resíduos dos nós do domínio e do contorno.

O valor encontrado para o  $RES_T$  utilizando esse método, não sofre intervenção dos valores reais da função no contorno. Assim, o valor dos resíduos estaria dependente apenas dos resultados numéricos obtidos pela metodologia, sem qualquer influência de valores analíticos ou medidos.

## 3.2.2 Metodologia dos Resíduos – Unidimensional (1D)

Todo o procedimento para a metodologia dos resíduos apresentado até agora foi voltado para trabalhos em duas dimensões 2D. Para trabalhos unidimensionais, o procedimento é o mesmo exceto pela mudança no formato da equação genérica mostrada na equação 90 a seguir:

$$A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + Cu(x) + Dsen(Ex) + Fcos(Gx) + Hx^3 + Ix^2 + Jx = Z \quad (90)$$

Ou seja, no domínio o termo  $L[u(x)]$  e  $f(x)$  passam a ser dados por:

$$L[u(x)] = A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + Cu(x)$$

$$f(x) = Z - Ds (Ex) - F\cos(Gx) - Hx^3 - Ix^2 - J$$

Enquanto no contorno, o termo  $B[u(x)]$  e  $g(x)$  são dados por:

$$B[u(x)] = A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + Cu(x)$$

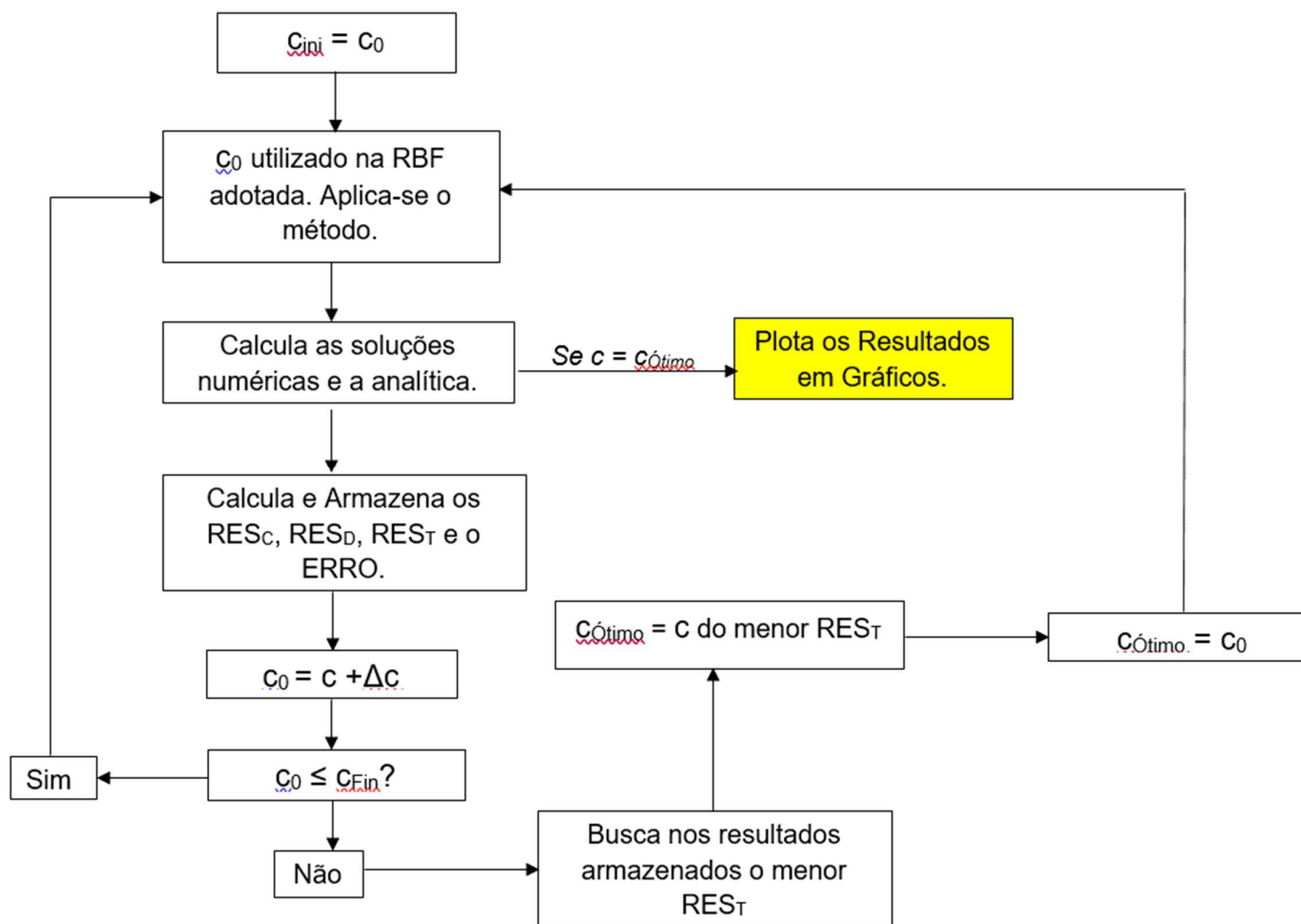
$$g(x) = Z - D\text{sen}(Ex) - F\cos(Gx) - Hx^3 - Ix^2 - Jx$$

Com exceção dessas alterações mostradas, toda a metodologia apresentada anteriormente continua igual.

### 3.2.3 Algoritmo para Determinação de $c$

A metodologia dos resíduos é a estrutura principal desenvolvida para encontrar o melhor valor de  $c$  a ser aplicado na RBF utilizada na equação 68. Propõe-se mostrar que o  $c$  ótimo corresponde ao valor de  $c$  que possui o menor resíduo total, aplicando essa proposta aos métodos 01 e 02 utilizados para o cálculo do  $RES_T$ .

A figura 3.1 apresenta um esquema básico do processo de cálculo para otimização do parâmetro de forma.

Figura 3.1- Etapas de cálculo para encontrar  $c$  ótimo.

Fonte: Elaborado pela autora.

O valor inicial de  $c$  ( $c_{ini}$ ) para o cálculo é 0.1, a partir daí, inicia-se a aplicação da metodologia, então, usando esse valor de  $c$ , é calculada uma solução numérica, o módulo da diferença desta com a solução exata corresponde ao erro encontrado. Aplica-se a metodologia dos resíduos armazenando os valores de resíduo (do contorno, do domínio e o total) e erro para o valor de  $c$  dessa etapa. A partir disso,  $c_{ini}$  varia em 0.1, uniformemente, até o limite de 10 que corresponde ao valor padrão para  $c$  final ( $c_{Fin}$ ), o qual finalizará essa etapa inicial. É importante ressaltar, que todos os valores padrões ( $c_{ini}$ ,  $c_{Fin}$  e  $\Delta c$ ) podem ser alterados.

Após essa etapa, calculados os resíduos para cada valor de  $c$ , verifica-se qual é o parâmetro de forma detentor do menor resíduo total, menor resíduo do domínio, menor resíduo do contorno e menor erro, sendo utilizado como parâmetro de forma ótimo o  $c$  do menor resíduo total. Para melhor análise, através desse procedimento, são calculados quatro valores de  $c$  ótimo para cada uma das classes abaixo:

- Resíduo total: que possui o valor de  $c$  efetivamente utilizado no cálculo da solução numérica;
- Resíduo do domínio: o valor de  $c$  ótimo encontrado para esse resíduo é chamado de  $C$  domínio;
- Resíduo do contorno: o valor de  $c$  ótimo calculado para esse resíduo é chamado de  $C$  contorno;
- Erro mínimo: o valor de  $c$  encontrado aqui serve como parâmetro de comparação com os demais valores de  $c$  calculados nos itens anteriores.

Para melhor interpretação do método, é importante comparar cada um dos três resíduos com o erro associado a solução exata, verificando a influência de cada um no resultado final. A fundamentação proposta é que o  $c$  ótimo do resíduo total se aproxime do  $c$  ótimo calculado para o erro mínimo, gerando a melhor solução numérica possível com a utilização do método, ou seja, gera a solução numérica mais próxima da solução exata, funcionando como uma ferramenta para validação do modelo.

A metodologia de otimização de  $c$  descrita nesta seção é a mesma independentemente do método (01 ou 02) utilizado para o cálculo dos resíduos.

Os resultados encontrados com os valores de  $c$  obtidos através da metodologia dos resíduos apresentada serão comparadas com os métodos para obtenção de  $c$  propostos por Hardy (1978) e Fasshauer (2002).



### 3.3 Construção das Plataformas de Cálculo

Ao longo desta pesquisa foram desenvolvidas quatro plataformas de cálculo distribuídas da seguinte forma: Plataforma de cálculo modelos 1D utilizando o método 01 para otimização do  $c$ ; Plataforma de cálculo modelos 1D utilizando o método 02 para otimização do  $c$ ; Plataforma de cálculo modelos 2D utilizando o método 01 e Plataforma de cálculo modelos 2D utilizando o método 02. Todas as rotinas citadas foram desenvolvidas utilizando como ferramenta de programação o software Scilab 5.3.3.

#### 3.3.1 Plataforma de Cálculo Modelos Unidimensionais - 1D

Nesta seção serão apresentadas as características pertinentes à Plataforma de cálculo 1D. O aspecto geral do programa é o mesmo para ambos os métodos de otimização de  $c$  e, como a diferença entre os métodos já foi esclarecida na seção anterior, dispensa-se a necessidade de mencioná-la nesta seção novamente.

A plataforma necessita de dados de entrada fornecidos pelo usuário para que seja possível a identificação correta da equação de trabalho, das condições de contorno, bem como, de outros aspectos envolvidos na descrição do modelo como: a magnitude de discretização e os dados para otimização do parâmetro de forma.

Os dados de entrada que deverão ser informados pelo usuário são:

- Número de pontos pertencentes ao domínio da função;
- Limites, inferior e superior, do domínio;
- Informar o tipo da condição de contorno: Dirichlet ou Neumann;
- Se deseja (ou não) otimizar o parâmetro de forma;
- Qual RBF será utilizada: multiquádrica ou multiquádrica inversa.

Como a plataforma é destinada a modelos 1D, são permitidas apenas duas condições de contorno. Com respeito ao parâmetro de forma, foi permitido a opção por otimizá-lo ou inserir o valor desejável para  $c$ . Isso permite que outras metodologias para cálculo de  $c$  sejam utilizadas na plataforma.

A equação deverá ser caracterizada por meio da informação dos valores das variáveis, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e Z presentes na equação 90.

Por exemplo, dada a equação abaixo, as indicações das constantes presentes na equação 90 serão expressas conforme mostrado a seguir:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 4u(x) = 4x$$

$$A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + Cu(x) + Dsen(Ex) + Fcos(Gx) + Hx^3 + Ix^2 + Jx = Z \quad (90)$$

Pela equação 90, tem-se:

$$A = 1; B = 0; C = -4; D = E = F = G = H = I = 0; J = -4; Z = 0$$

Esses são os valores das constantes a serem inseridos na plataforma para indicar a equação utilizada. Deve ser observado que o sinal da constante  $J$  indica que, na equação exemplo, ele está no outro lado da igualdade, quando comparado à equação 90.

### 3.3.2 Plataforma de Cálculo Modelos Bidimensionais - 2D

Nesta seção serão apresentadas as características pertinentes à Plataforma de cálculo 2D. Da mesma forma que a plataforma 1D, o aspecto geral do programa é o mesmo para ambos os métodos de otimização de  $c$ .

Essa plataforma necessita de dados de entrada fornecidos pelo usuário para que seja possível a identificação correta da equação de trabalho, das condições de contorno, bem como, de outros aspectos envolvidos na descrição do modelo como: a magnitude de discretização e os dados para otimização do parâmetro de forma.

Os dados de entrada que deverão ser informados pelo usuário são:

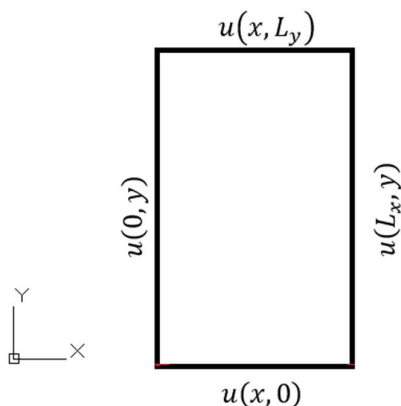
- Número de pontos nas direções  $x$  e  $y$ ;
- Comprimento total na direção  $x$ ;
- Comprimento total na direção  $y$ ;
- Condição de contorno  $u(0, y)$ ;
- Condição de contorno  $u(L_x, y)$ ;
- Condição de contorno  $u(x, 0)$ ;

- Condição de contorno  $u(x, L_y)$ ;
- Se deseja (ou não) otimizar o parâmetro de forma;

Do mesmo modo que a plataforma 1D, foi permitido a opção para otimizar (ou não) o parâmetro de forma  $c$  ou inserir o valor desejável para  $c$ . Permitindo que outras metodologias para cálculo de  $c$  sejam utilizadas na plataforma.

A equação deverá ser caracterizada por meio da informação dos valores das variáveis, A, B, C, D, E, F, G, H e I presentes na equação 83. A figura 3.2 mostrada a seguir faz uma melhor descrição das condições de contorno apresentadas.

Figura 3.2- Descrição das condições de contorno.



Fonte: Elaborado pela autora.

As variáveis  $x$  e  $y$  representam os pontos que irão sofrer variações ao longo dos seus comprimentos totais.  $L_x$  e  $L_y$  são pontos fixos que caracterizam os limites finais dos comprimentos de  $x$  e  $y$ .

### 3.4 Casos de Aplicação dos Modelos

Nesta seção serão apresentados os casos de estudos nos quais foram aplicadas as plataformas de cálculo desenvolvidas. Os casos foram divididos da seguinte maneira: aplicações unidimensionais (1D), aplicação bidimensionais (2D): aplicação hipotética e aplicação em um caso real.

#### 3.4.1 Casos de Aplicação Unidimensionais (1D)

A plataforma de cálculo destinada a modelos unidimensionais foi aplicada em três casos hipotéticos, todos possuidores de solução analítica.

##### 3.4.1.1 Caso I – 1D:

O primeiro caso é dado pela equação 91 a seguir:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x^2 = 0 \quad (91)$$

Em que as condições de contorno são dadas por:

$$u(0) = 0 \quad e \quad u(1) = 0$$

O domínio é  $0 \leq x \leq 1$ , e a solução analítica é dada por:

$$u(x) = -\frac{\text{sen}x(-1 + 2\cos 1)}{\text{sen}1} + 2\cos x - 2 + x^2 \quad (92)$$

##### 3.4.1.2 Caso II – 1D:

O segundo caso é dado pela equação 93:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - 4u(x) - 4x = 0 \quad (93)$$

Em que as condições de contorno são dadas por:

$$u(0) = 0 \quad e \quad u(1) = 0$$

O domínio é  $0 \leq x \leq 1$ , e a solução analítica é dada por:

$$u(x) = \frac{e^{2x}}{(e^2 - e^{-2})} - \frac{e^{-2x}}{(e^2 - e^{-2})} - x \quad (94)$$

### 3.4.1.3 Caso III – 1D:

O terceiro caso é dado pela equação 95:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - 2u(x) - x = 0 \quad (95)$$

Em que as condições de contorno são dadas por:

$$u(0) = 0 \quad e \quad u'(5) = 0$$

O domínio é  $0 \leq x \leq 5$ , e a solução analítica é dada por:

$$u(x) = \frac{1}{4} \frac{e^{\sqrt{2}x\sqrt{2}}}{e^{5\sqrt{2}} + e^{-5\sqrt{2}}} - \frac{1}{4} \frac{e^{-\sqrt{2}x\sqrt{2}}}{e^{5\sqrt{2}} + e^{-5\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}x \quad (96)$$

### 3.4.2 Casos de Aplicação Bidimensionais (2D)

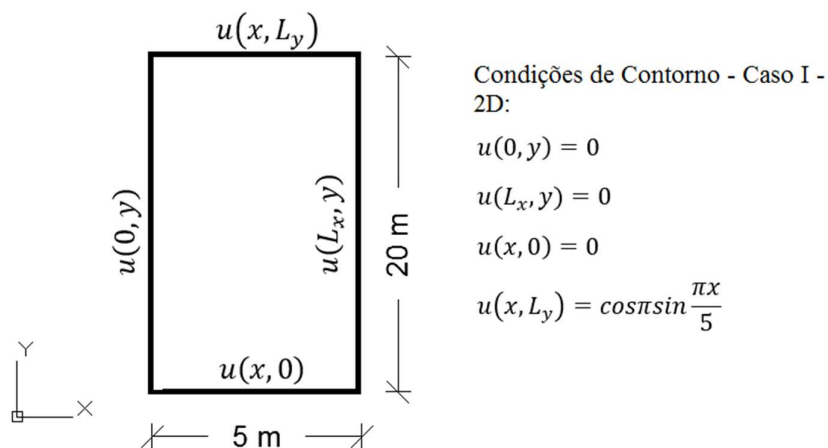
Os casos desta seção são ligados a aquíferos subterrâneos. Todos possuem a mesma equação governante, a qual será apresentada posteriormente. Para os casos em estudo foram feitas as seguintes considerações para os aquíferos: uma formação praticamente incompressível, ou seja, o tipo de fluxo é permanente, o meio saturado e solo em situação de isotropia. Essas particularidades foram utilizadas para determinação da equação governante envolvida no modelo.

Serão utilizados dois casos hipotéticos, ambos são possuidores de solução exata, cuja aplicação está direcionada para validação do modelo proposto, que irá ser aplicado no caso real.

#### 3.4.2.1 Caso I – 2D:

O primeiro caso apresentado é hipotético. Esse caso de estudo consiste em uma região retangular de 5m de largura e 20m de comprimento. O domínio varia entre os pontos (0,0) e (5, 20). As condições de contorno do problema estão dispostas conforme mostra a figura 3.3.

Figura 3.3- Região de trabalho e condições de contorno: Caso I-2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

É importante esclarecer novamente que esse caso, com suas respectivas condições de contorno, possui solução exata para a equação governante que atua no problema. Isso permite uma comparação dessas soluções com os resultados de carga hidráulica obtidos pelo modelo numérico proposto.

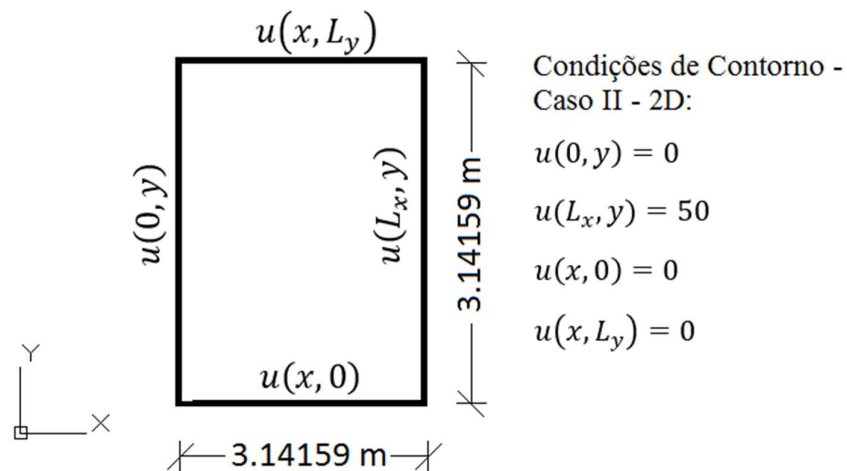
E a solução analítica desse problema é dada por:

$$u(x, y) = \cos \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{5} \sin \frac{n\pi x}{5}}{\sinh n4\pi} \quad (97)$$

#### 3.4.2.2 Caso II – 2D:

O segundo caso hipotético, cuja região de trabalho é um polígono quadrangular de dimensões 3.14159m x 3.14159m (largura e comprimento). O domínio varia entre os pontos (0,0) e (3.14159, 3.14159). As condições de contorno são dispostas conforme a figura 3.4.

Figura 3.4- Região de trabalho e condições de contorno: Caso II-2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

A solução analítica desse problema é dada por:

$$u(x, y) = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n \sinh n\pi} \sinh nx \sin ny \quad (98)$$

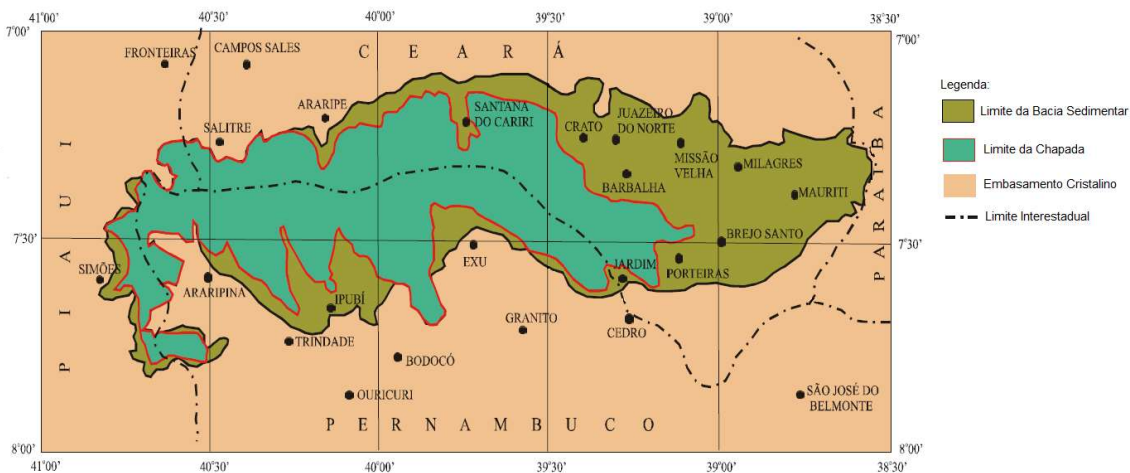
### 3.4.2.3 Caso III – 2D: Aplicação Real

O terceiro caso corresponde a uma aplicação do modelo em uma pequena área dentro da Bacia Sedimentar do Araripe para verificar o comportamento da carga hidráulica na região. A escolha da Bacia Sedimentar do Araripe deveu-se a dois critérios:

- Quantidade de dados disponíveis para realização do trabalho;
- A importância do recurso subterrâneo para o abastecimento da região.

Segundo Veríssimo e Aguiar (2005), a Bacia Sedimentar do Araripe possui uma área de aproximadamente 11 000km<sup>2</sup>, engloba parte dos Estados do Ceará, Pernambuco e Piauí, é constituída pela Chapada do Araripe e por planícies que rodeiam a chapada com desníveis que chegam a 400m. A figura 3.5 apresenta um mapa de localização da Bacia.

Figura 3.5- Mapa de localização da Bacia.



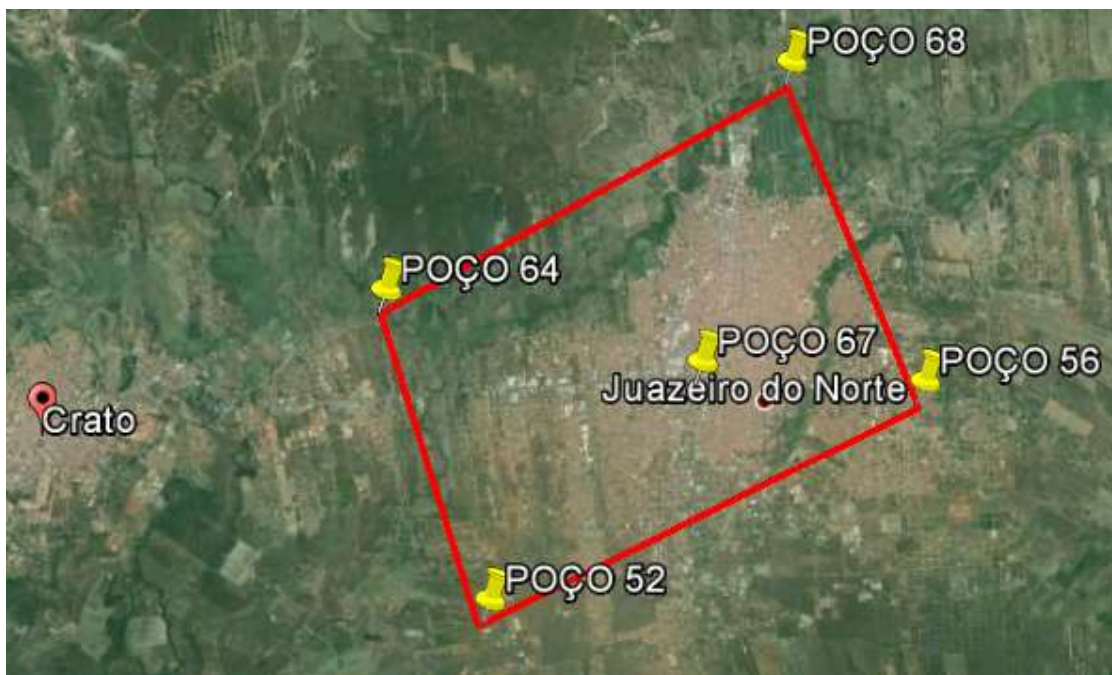
Fonte: Modificado de Veríssimo e Aguiar, 2005.



O estudo concentrou-se no Cariri cearense, mais precisamente entre os municípios de Juazeiro do Norte e Crato. Segundo Veríssimo (1999), a região do Cariri possui os melhores aquíferos do Estado do Ceará, devido a sua capacidade e a boa qualidade, a maioria dos municípios da região é abastecida pela água dos poços ou de fontes da região. De acordo com o Serviço Geológico do Brasil - CPRM (1998), toda a população urbana de Juazeiro do Norte é abastecida com águas provenientes de poços (21 tubulares e 1 amazonas), os dados são da Companhia de Água e Esgoto do Ceará – CAGECE. Isso confirma a importância da região estudada nesse caso.

A zona de trabalho do caso III, ilustrada na figura 3.6, é composta pelos poços 52, 56, 64, 67 e 68 (COGERH, 2014), delimitada pelo quadrilátero vermelho em destaque, com uma área de aproximadamente 35 km<sup>2</sup>. Os poços foram devidamente alocados com suas respectivas coordenadas com o auxílio da plataforma GoogleEarth com o objetivo de exemplificar a distribuição espacial dos poços.

Figura 3.6- Distribuição dos Poços de Trabalho.



Fonte: Elaborado pela autora com o auxílio do GoogleEarth.

A identificação desses poços foi obtida por meio do boletim de monitoramento dos poços com datalogger no Cariri – CE realizado pela Companhia de Gestão dos Recursos Hídricos – COGERH entre janeiro e dezembro de 2013. A tabela 3.1 apresenta algumas características dos cinco poços apresentados.

Tabela 3.1 – Características Gerais – Caso III.

<b>Dados dos Poços</b>		
<b>Poço nº</b>	<b>Cota do Terreno (m)</b>	<b>Carga Hidráulica (m)</b>
52	455	412.00
56	417	389.40
64	410	404.60
67	445	384.57
68	388	377.81

Fonte: Modificado COGERH (2014).

Com as informações de cada poço, foi realizada uma linearização dos valores de carga hidráulica ao longo do perímetro destacado na figura 3.6, entre os poços 52, 56, 64 e 68, com o objetivo de definir as condições de contorno desse caso para serem utilizadas durante a aplicação do modelo numérico. As condições de contorno aplicadas são relacionadas abaixo:

- Condição de contorno  $u(0, y) = -0.0015053y + 412$ ;
- Condição de contorno  $u(L_x, y) = -0.0023576y + 389.4$ ;
- Condição de contorno  $u(x, 0) = -0.0030955x + 412$ ;
- Condição de contorno  $u(x, L_y) = -0.0036694x + 404.6$ ;

O poço 67 foi utilizado como referência para comparação dos resultados obtidos pelo modelo numérico.

#### 3.4.2.4 Equação Governante dos Casos Bidimensionais

Os três casos apresentados anteriormente possuem como equação governante a equação de fluxo no subterrâneo, a qual será melhor detalhada a seguir.

Baseada na Lei de Darcy e na Lei da Conservação de Massa, a equação fundamental para fluxo em aquíferos tridimensionais é representada pela equação 99:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) + F' = S_s \frac{\partial H}{\partial t} \quad (99)$$

Em que o  $K_j$  é a condutividade hidráulica na direção  $j$  do fluxo expressa em (m/s);  $H$  representa a carga hidráulica (m);  $F'$  é um termo que pode estar associado a uma fonte de recarga ou extração (1/s);  $S_S$  é o coeficiente de armazenamento específico e  $t$  é o tempo (s).

Para o desenvolvimento nos três casos, admitiu-se que não existe recarga ou extração, desse modo  $F' = 0$ . Como o regime considerado é permanente e o meio é saturado, então a equação 99 se reduzir à:

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (100)$$

Considerando a isotropia no aquífero, ou seja, a condutividade hidráulica é constante em todas as direções ( $K_x = K_y = K_z$ ) e um fluxo bidimensional, a equação (100) transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (101)$$

A equação 101 é conhecida como Equação de Laplace, a qual será a equação governante envolvida no modelo.

Assim, a plataforma de cálculo bidimensional foi aplicada à equação 101 para, baseado nas condições de contorno impostas, calcular as cargas hidráulicas na área dos três casos apresentados.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Aplicação Unidimensionais

Inicialmente serão apresentados os resultados obtidos para as aplicações unidimensionais. Para esses casos foram utilizados os métodos 01 e 02 para calcular o parâmetro de forma ótimo. Em seguida, serão aplicadas as equações 81 e 82, utilizadas para encontrar o valor de  $c$ , e serão comparados com os resultados obtidos pelo método 01 e 02.

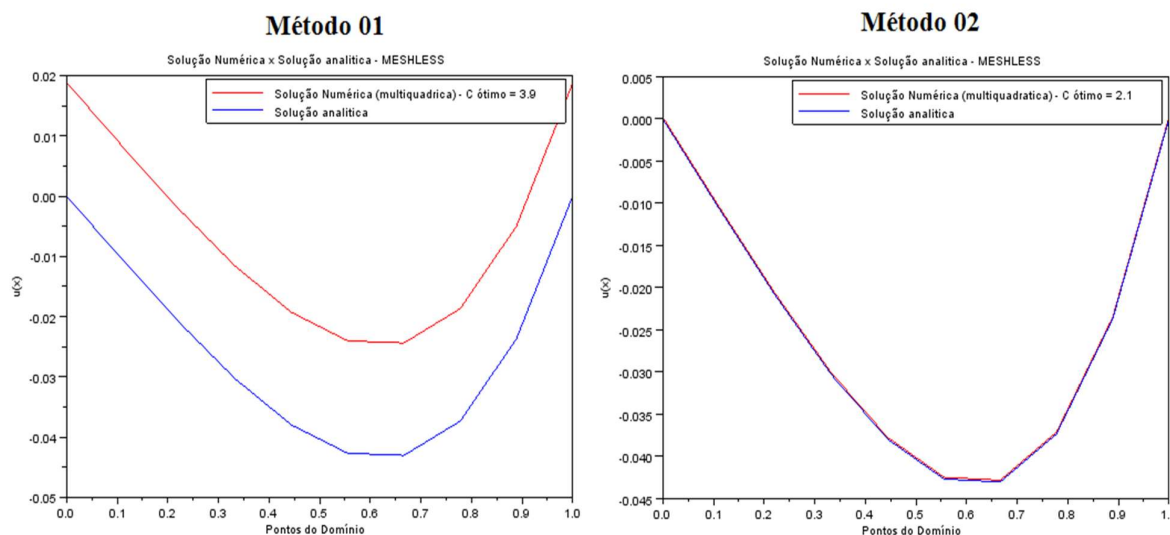
As aplicações unidimensionais foram divididas em três cenários: o primeiro de 10 pontos discretizados, o segundo com 15 pontos discretizados e o terceiro com 20 pontos discretizados. Os resultados permitirão a escolha do melhor método, 01 ou 02.

#### 4.1.1 Caso I - 1D: Multiquádrica

##### 4.1.1.1 Simulação 1 – 10 nós ou pontos:

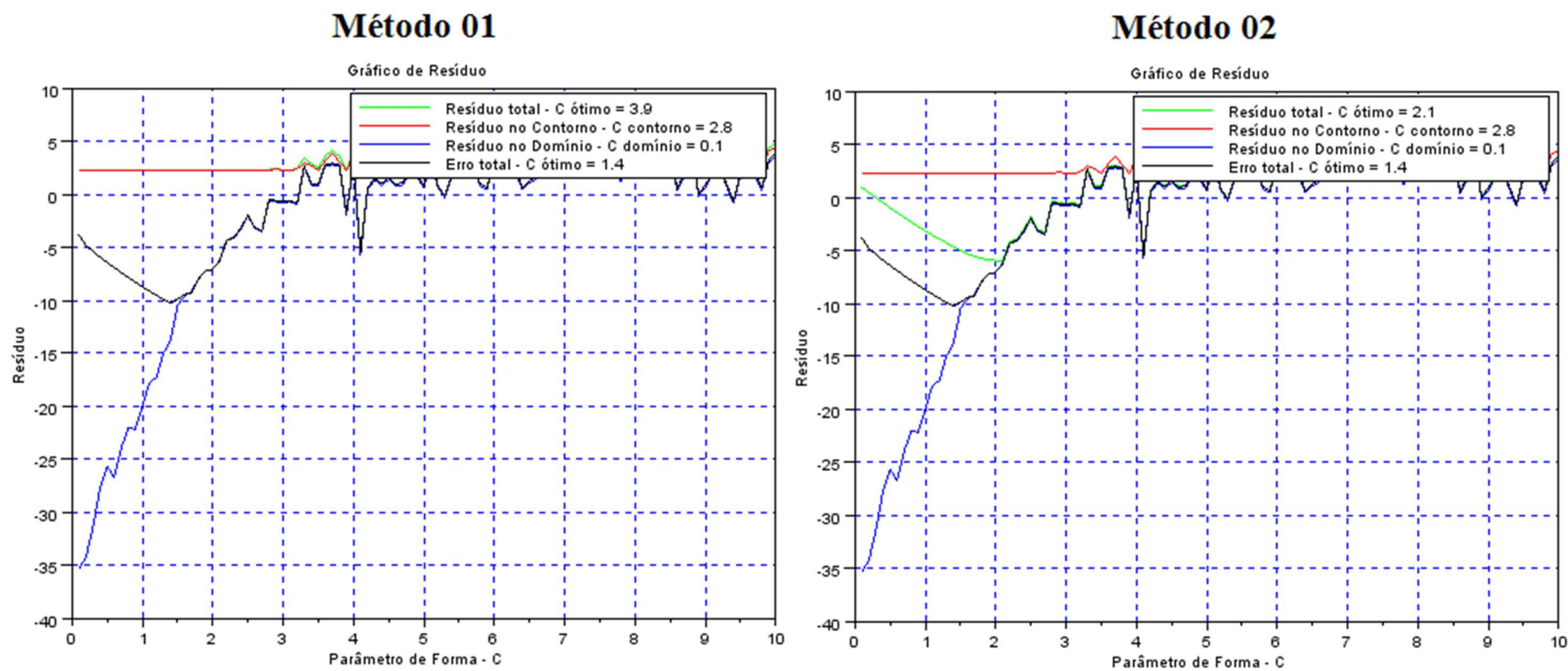
Os resultados obtidos pelos métodos 01 e 02 nessa simulação são apresentados nas figuras 4.1 e 4.2. Na primeira é possível comparar os resultados numéricos com a solução exata do problema. Enquanto na figura 4.2 estão apresentados os gráficos referentes aos resíduos gerados pelos métodos 01 e 02, e o  $c$  ótimo obtido em cada método.

Figura 4.1- Soluções numérica e exata para 10 pontos – Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4.2- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos – Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pela figura 4.1, é possível afirmar que o método 01 não apresentou resultados satisfatórios, pois a curva gerada pela solução numérica desse método está distante e acima dos reais valores que geram a curva da solução analítica. O  $c$  ótimo calculado nesse método foi igual a 3.9. De acordo com a figura 4.2, o menor erro seria para um valor de  $c$  igual 1.4 (ver linha preta em ambos os gráficos de resíduos), tal valor foi encontrado com o auxílio da solução analítica.

Entretanto o método 02 apresentou convergência entre as curvas das duas soluções (numérica e analítica), uma vez que suas curvas estão sobrepostas. O  $c$  otimizado encontrado com o auxílio desse método foi no valor de 2.1. Embora, não seja o valor ideal de 1.4, o  $c$  ótimo desse caso está mais próximo dos menores valores de erro, conforme é possível observar na figura 4.2. A tabela 4.1 mostra os valores calculados para as soluções numérica e analítica, bem como a diferença entre as duas soluções.

Tabela 4.1 – Resultados Simulação 1 – Caso I – 1D.

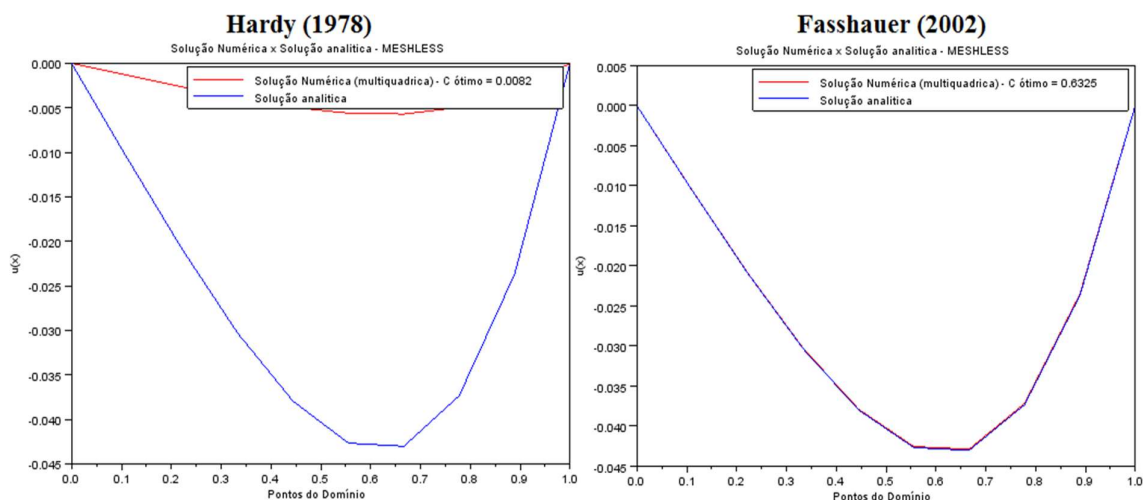
<b>Caso I - 1D: Multiquádrica - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0189	0.0002	0.0189	0.0002
-0.0106	0.0082	-0.0104	0.0188	0.0002
-0.0209	-0.0022	-0.0207	0.0187	0.0002
-0.0303	-0.0116	-0.0301	0.0187	0.0002
-0.0380	-0.0193	-0.0377	0.0187	0.0003
-0.0427	-0.0240	-0.0425	0.0187	0.0002
-0.0430	-0.0244	-0.0428	0.0186	0.0002
-0.0373	-0.0187	-0.0371	0.0186	0.0002
-0.0237	-0.0050	-0.0235	0.0187	0.0002
0.0000	0.0187	0.0002	0.0187	0.0002
<b>Erro médio</b>			0.0187	0.0002

Fonte: Elaborado pela autora.

Pela tabela é possível verificar que o erro médio obtido pelo método 02 é bem inferior ao erro médio obtido pelo método 01. Dessa maneira, é possível afirmar que para essa simulação, o método 02 se coloca como melhor alternativa para escolha do parâmetro de forma ótimo.

Utilizando os valores de  $c$ , calculados pelas equações 81 e 82, respectivamente, método Hardy (1978) e Fasshauer (2002). A equação proposta para o caso I – 1D apresentou a seguinte solução conforme mostra a figura 4.3.

Figura 4.3- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 10 pontos – Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Como é possível observar na figura, a aproximação utilizando o  $c$  de Fasshauer (2002) é melhor que a de Hardy (1978). A tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos para o parâmetro de forma de Hardy  $c = 0.0082$  e para o de Fasshauer  $c = 0.6325$ .

Tabela 4.2 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 10 pontos – Caso I – 1D.

<b>Caso I - 1D: Multiquádrica - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0189	0.0000
-0.0106	-0.0013	-0.0106	0.0093	0.0000
-0.0209	-0.0027	-0.0208	0.0182	0.0001
-0.0303	-0.0039	-0.0302	0.0264	0.0001
-0.0380	-0.0049	-0.0378	0.0331	0.0002
-0.0427	-0.0056	-0.0425	0.0371	0.0002
-0.0430	-0.0057	-0.0429	0.0373	0.0001
-0.0373	-0.0050	-0.0372	0.0323	0.0001
-0.0237	-0.0031	-0.0235	0.0206	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0233	0.0001

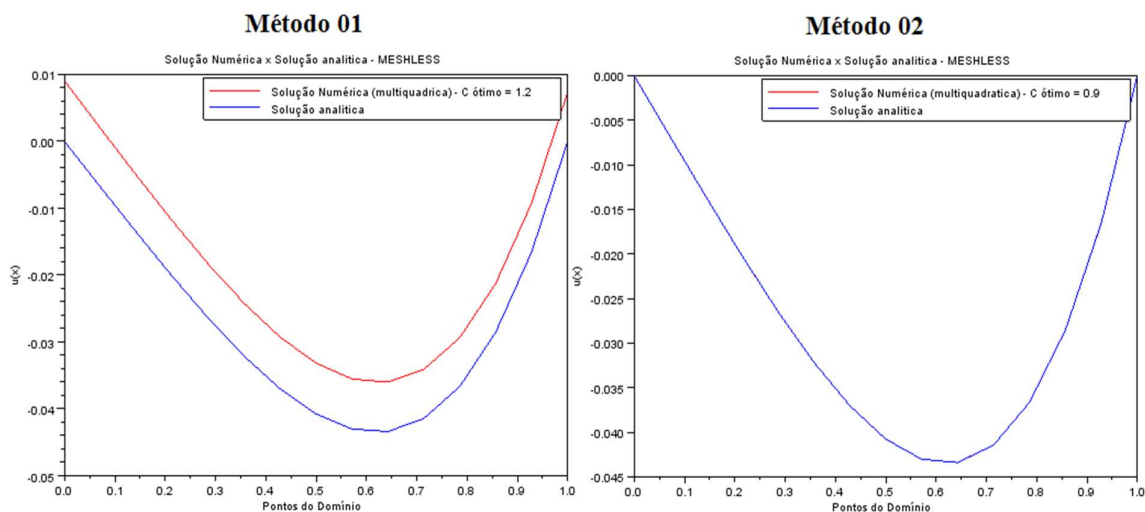
Fonte: Elaborado pela autora.

O erro médio para a solução de Fasshauer é 0.0001 menor que os 0.0002 da solução proposta pelo método 02. Isso mostra que para esta simulação a solução de Fasshauer é um pouco melhor.

#### 4.1.1.2 Simulação 2 – 15 nós ou pontos:

Os resultados das soluções numéricas geradas pelos métodos 01 e 02 e sua convergência em relação a solução analítica podem ser verificados na figura 4.4 a seguir:

Figura 4.4- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

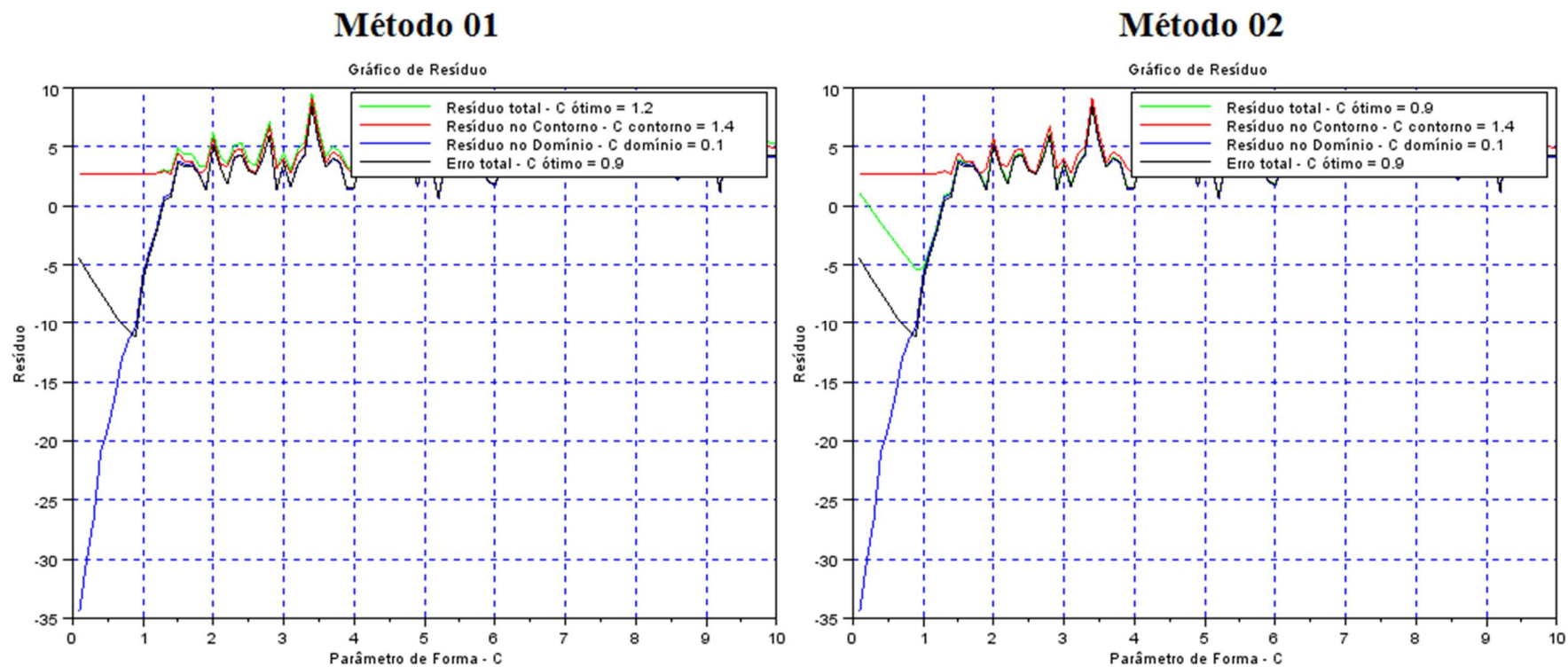
O aumento da quantidade de pontos fez com que ambas as soluções convergissem em relação à solução analítica. Entretanto, a solução gerada pelo método 01 ainda está distante da curva da solução analítica. O  $c$  ótimo obtido pelo método 01 tem valor de 1.2. Enquanto o  $c$  otimizado pelo método 02 possui valor igual a 0.9.

Pela figura 4.5 é possível observar que o valor ideal para  $c$  é igual a 0.9, o qual é o parâmetro de forma calculado pelo método 02, ou seja, para essa simulação a solução encontrada pelo método 02 possui o melhor resultado possível com a utilização do Meshless. Isso pode ser verificado na figura 4.5, em que as curvas das soluções numéricas e analíticas transformaram-se em uma única curva de resultados.

Dessa forma, novamente, o método 02 se sobressaiu em relação ao método 01. A tabela 4.3 apresenta os resultados para ambos os métodos nesta simulação.



Figura 4.5- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.3 – Resultados Simulação 2 – Caso I – 1D.

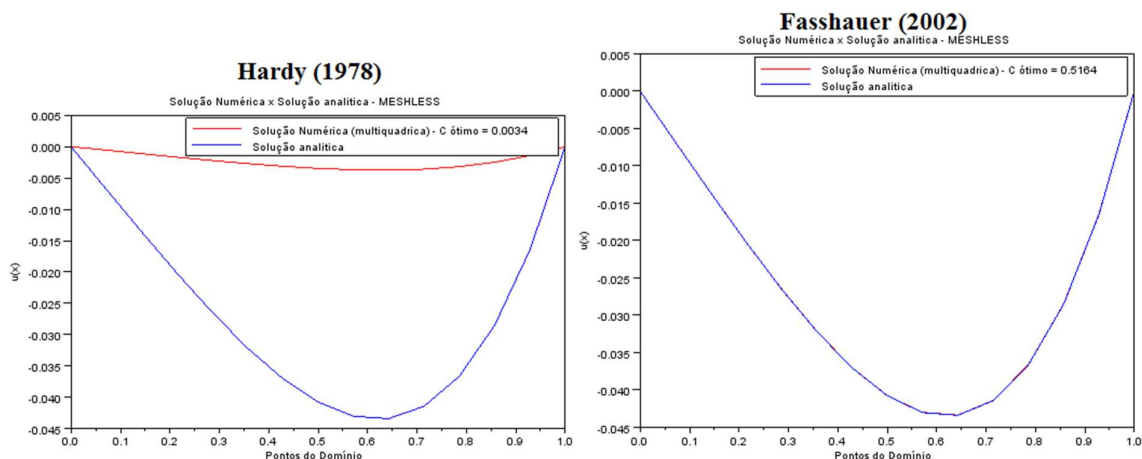
<b>Caso I - 1D: Multiquádrica - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0090	0.0000	0.0090	0.0000
-0.0068	0.0019	-0.0068	0.0087	0.0000
-0.0136	-0.0051	-0.0136	0.0085	0.0000
-0.0202	-0.0119	-0.0202	0.0083	0.0000
-0.0264	-0.0183	-0.0264	0.0081	0.0000
-0.0321	-0.0242	-0.0321	0.0079	0.0000
-0.0370	-0.0293	-0.0370	0.0077	0.0000
-0.0408	-0.0332	-0.0408	0.0076	0.0000
-0.0430	-0.0355	-0.0430	0.0075	0.0000
-0.0434	-0.0360	-0.0434	0.0074	0.0000
-0.0414	-0.0341	-0.0414	0.0073	0.0000
-0.0366	-0.0293	-0.0366	0.0073	0.0000
-0.0285	-0.0212	-0.0285	0.0073	0.0000
-0.0165	-0.0092	-0.0165	0.0073	0.0000
0.0000	0.0074	0.0000	0.0074	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0078	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados apresentados na tabela 4.3 mostram, claramente, que o método 02 possui a melhor convergência, pois os valores entre a solução analítica e a solução numérica são iguais, pelo menos, até a quarta casa decimal.

Em sequência são apresentados os resultados obtidos por Hardy  $c = 0.0034$  e Fasshauer  $c = 0.5164$ , conforme mostra a figura 4.6:

Figura 4.6- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na figura 4.6, a aproximação utilizando o  $c$  de Fasshauer (2002) é melhor que a de Hardy (1978). A tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos pelas metodologias. E mostra um pequeno erro (0.0001) na solução de Fasshauer, o que torna a solução do método 02 um pouco melhor para esse caso. Apesar do erro médio em ambos serem iguais.

Tabela 4.4 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso I – 1D.

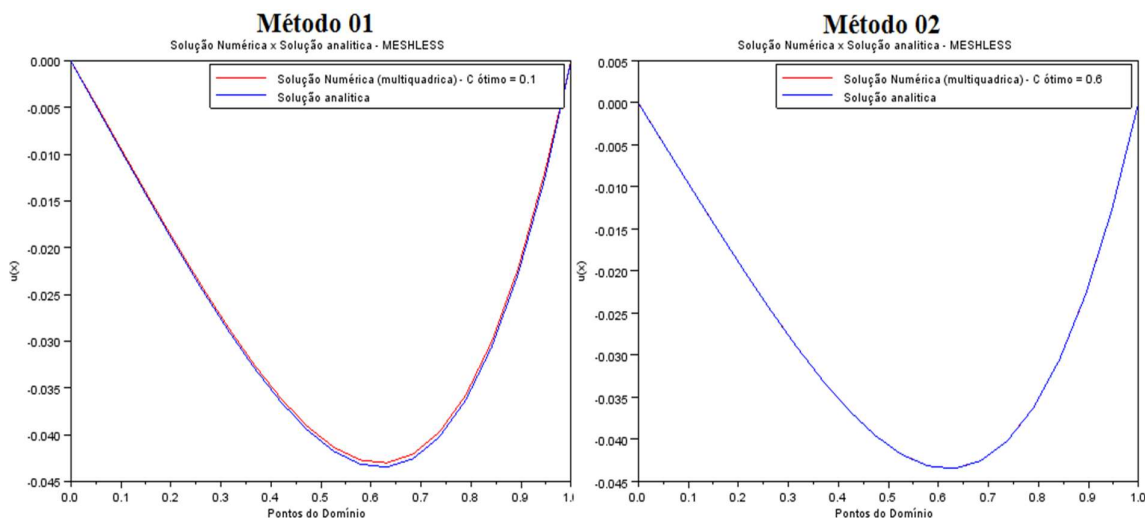
<b>Caso I - 1D: Multiquádrica - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0068	0.0000	-0.0068	0.0068	0.0000
-0.0136	0.0000	-0.0136	0.0136	0.0000
-0.0202	0.0000	-0.0202	0.0202	0.0000
-0.0264	0.0000	-0.0264	0.0264	0.0000
-0.0321	0.0000	-0.0321	0.0321	0.0000
-0.0370	0.0000	-0.0370	0.0370	0.0000
-0.0408	0.0000	-0.0407	0.0408	0.0001
-0.0430	0.0000	-0.0430	0.0430	0.0000
-0.0434	0.0000	-0.0434	0.0434	0.0000
-0.0414	0.0000	-0.0414	0.0414	0.0000
-0.0366	0.0000	-0.0366	0.0366	0.0000
-0.0285	0.0000	-0.0285	0.0285	0.0000
-0.0165	0.0000	-0.0165	0.0165	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0258	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

### 4.1.1.3 Simulação 3 – 20 nós ou pontos:

A figura 4.7 apresenta os resultados obtidos para essa simulação comparando os métodos 01 e 02.

Figura 4.7- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

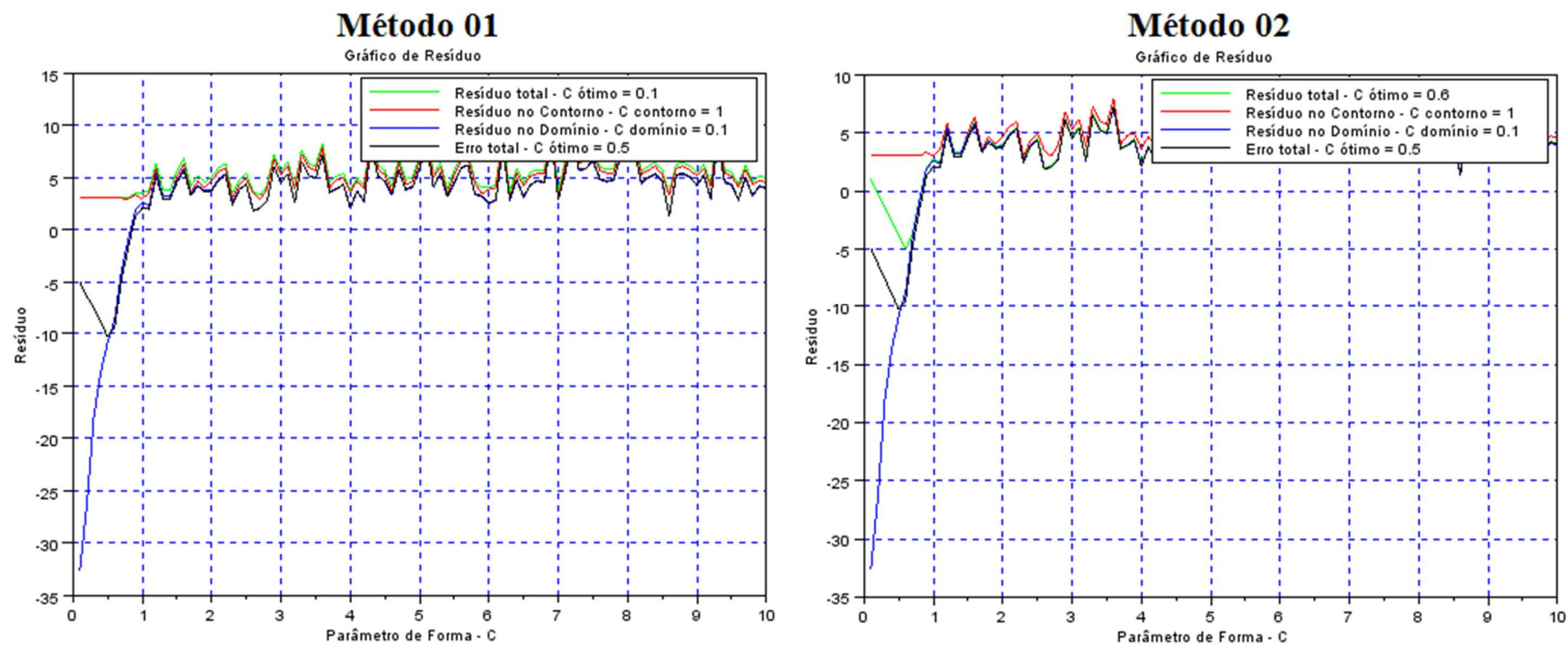
Observando a figura 4.7, é possível verificar que o método 01 obteve um importante resultado em relação a sua convergência com a solução analítica. Com o parâmetro de forma ótimo no valor 0.1, a solução proposta utilizando o método 01 quase se sobrepõe completamente sobre a solução analítica.

O método 02, mais uma vez, mostrou-se como uma boa alternativa para otimização do parâmetro de forma. Entretanto, com um valor de  $c$  igual 0.6, desta vez, apesar de muito próximo do valor de  $c$  ideal de 0.5, os valores não foram os iguais como na última simulação.

A figura 4.8 mostra os gráficos dos resíduos para ambos os métodos, observando as linhas preta e verde, geradas no gráfico do método 02, é possível ver que a linha verde está um pouco à frente da linha preta nos pontos com valores de resíduos mais baixos.

A seguir são apresentados os resultados numéricos obtidos nesta simulação para ambos os métodos. Ver tabela 4.5:

Figura 4.8- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.5 – Resultados Simulação 3 – Caso I – 1D.

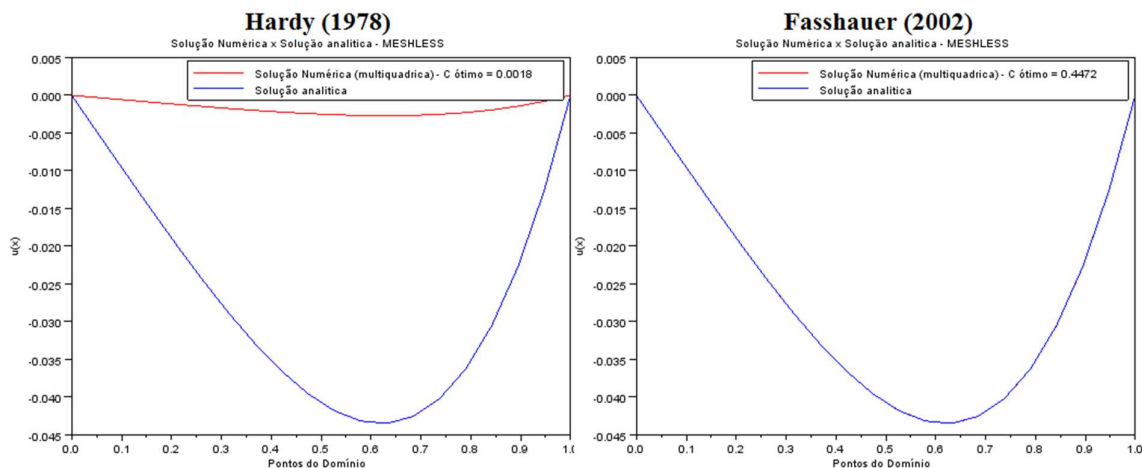
<b>Caso I - 1D: Multiquádrica - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0050	-0.0049	-0.0050	0.0001	0.0000
-0.0101	-0.0099	-0.0101	0.0002	0.0000
-0.0150	-0.0148	-0.0150	0.0002	0.0000
-0.0199	-0.0196	-0.0199	0.0003	0.0000
-0.0245	-0.0242	-0.0245	0.0003	0.0000
-0.0289	-0.0286	-0.0289	0.0003	0.0000
-0.0330	-0.0326	-0.0330	0.0004	0.0000
-0.0365	-0.0362	-0.0365	0.0003	0.0000
-0.0395	-0.0391	-0.0395	0.0004	0.0000
-0.0418	-0.0414	-0.0418	0.0004	0.0000
-0.0432	-0.0427	-0.0431	0.0005	0.0001
-0.0435	-0.0430	-0.0435	0.0005	0.0000
-0.0426	-0.0421	-0.0426	0.0005	0.0000
-0.0402	-0.0397	-0.0402	0.0005	0.0000
-0.0363	-0.0358	-0.0363	0.0005	0.0000
-0.0305	-0.0300	-0.0305	0.0005	0.0000
-0.0227	-0.0222	-0.0227	0.0005	0.0000
-0.0126	-0.0120	-0.0126	0.0006	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0004	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

Comparando os resultados o erro médio calculado para a solução do método 01 reduziu para 0.0004, o que mostra a evolução do método para uma quantidade maior de pontos. No entanto, quando comparado ao erro médio obtido para a solução gerada pelo método 02, o método 01 ainda fica com desempenho menor.

Em seguida, apresentam-se os resultados para os valores de  $c$  pelos métodos de Hardy (1978),  $c = 0.0018$ , e de Fasshauer (2002),  $c = 0.4472$ . Conforme mostra a figura 4.9. Observando a tabela 4.6, nota-se que novamente a solução de Fasshauer é melhor que a de Hardy, mas novamente a existência de um pequeno erro de 0.0001 faz com que a solução do método 02 seja levemente superior.

Figura 4.9- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - Simulação 3 - Caso I – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.6 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - Simulação 3 - Caso I – 1D.

<b>Caso I - 1D: Multiquádrlica - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000
-0.0050	-0.0003	-0.0050	0.0047	0.0000
-0.0101	-0.0006	-0.0101	0.0095	0.0000
-0.0150	-0.0009	-0.0150	0.0141	0.0000
-0.0199	-0.0012	-0.0199	0.0187	0.0000
-0.0245	-0.0015	-0.0245	0.0230	0.0000
-0.0289	-0.0017	-0.0289	0.0272	0.0000
-0.0330	-0.0020	-0.0330	0.0310	0.0000
-0.0365	-0.0022	-0.0365	0.0343	0.0000
-0.0395	-0.0024	-0.0395	0.0371	0.0000
-0.0418	-0.0026	-0.0418	0.0392	0.0000
-0.0432	-0.0027	-0.0431	0.0405	0.0001
-0.0435	-0.0027	-0.0435	0.0408	0.0000
-0.0426	-0.0027	-0.0426	0.0399	0.0000
-0.0402	-0.0025	-0.0402	0.0377	0.0000
-0.0363	-0.0023	-0.0363	0.0340	0.0000
-0.0305	-0.0019	-0.0305	0.0286	0.0000
-0.0227	-0.0014	-0.0227	0.0213	0.0000
-0.0126	-0.0008	-0.0126	0.0118	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0247	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

O quadro 4.1 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 10, 15 e 20 pontos realizadas para o primeiro caso unidimensional, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.1 – Resumos dos Resultados Caso I – 1D.

<b>CASO I</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>10 Pontos</b>	0.0187	0.0002	0.0001	0.0233
<b>15 Pontos</b>	0.0078	0.0000	0.0000	0.0258
<b>20 Pontos</b>	0.0004	0.0000	0.0000	0.0247

Fonte: Elaborado pela autora.



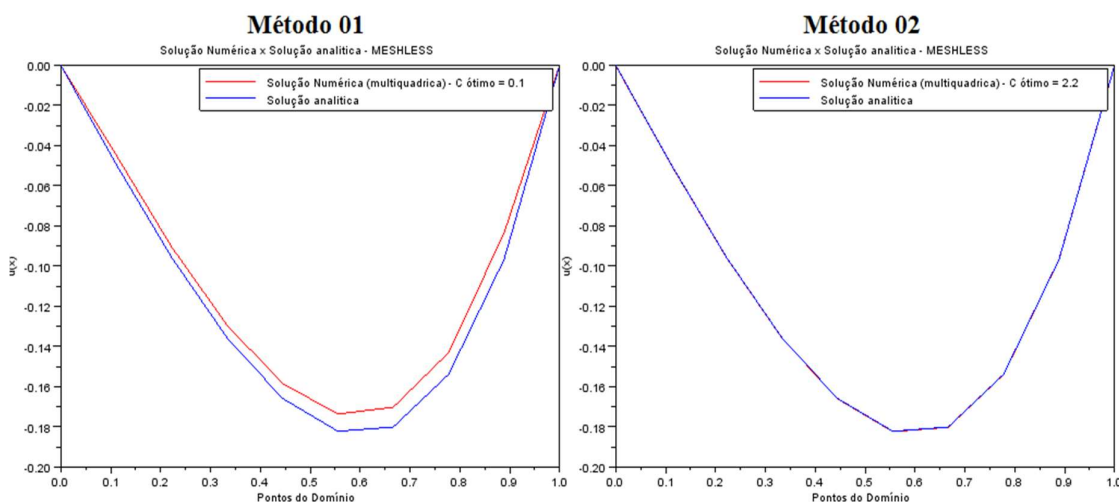
### 4.1.2 Caso II - 1D: Multiquádrica

Os resultados apresentados referem-se ao segundo caso de aplicação unidimensional, que tem como elemento principal a equação 93.

#### 4.1.2.1 Simulação 1 – 10 nós ou pontos:

A figura 4.10 apresenta os gráficos das soluções numéricas, calculadas com a utilização dos métodos 01 e 02 que fazem a otimização do parâmetro de forma, e da solução analítica do problema.

Figura 4.10- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso II – 1D.

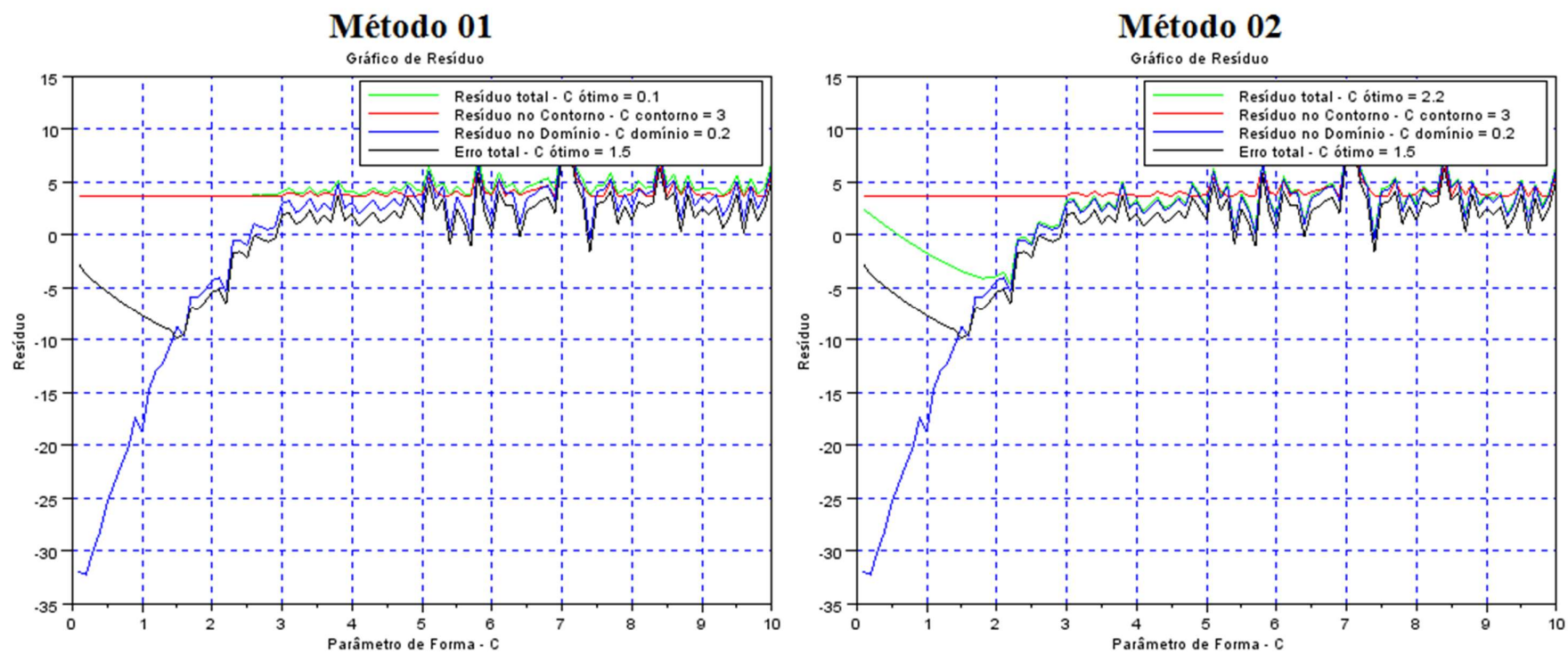


Fonte: Elaborado pela autora.

Com um valor de  $c$  igual 0.1, o método 01 se apresentou de maneira razoável, uma vez que se trata de uma solução numérica. Já a solução proposta pelo método 02, cujo  $c$  é igual 2.2, convergiu de maneira excelente com a solução analítica.

Analisando a figura 4.11 a seguir, os gráficos referentes aos resíduos gerados mostram que o valor de  $c$  ideal possui o valor igual a 1.5. Assim, mesmo que a solução gerada pelo método 02 não tenha coincidido com o valor de 1.5, o desempenho da plataforma nesse caso foi muito bom.

Figura 4.11- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso II – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

A tabela 4.7 mostra os resultados das soluções numéricas obtidas em ambos os métodos e o erro associado à comparação com a solução analítica do problema.

Tabela 4.7 – Resultados Simulação 1 – Caso II – 2D.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	-0.0002	0.0000	0.0002
-0.0493	-0.0447	-0.0495	0.0046	0.0002
-0.0956	-0.0904	-0.0958	0.0052	0.0002
-0.1356	-0.1293	-0.1358	0.0063	0.0002
-0.1658	-0.1584	-0.1659	0.0074	0.0001
-0.1822	-0.1735	-0.1823	0.0087	0.0001
-0.1800	-0.1702	-0.1801	0.0098	0.0001
-0.1537	-0.1429	-0.1539	0.0108	0.0002
-0.0965	-0.0834	-0.0966	0.0131	0.0001
0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000	0.0001
<b>Erro médio</b>			0.0066	0.0002

Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados apresentados na tabela mostram que os erros gerados pela solução proposta no método 01 são superiores aos erros gerados na comparação da solução gerada pelo método 02, nesse caso a diferença para solução analítica ocorre apenas na quarta casa decimal.

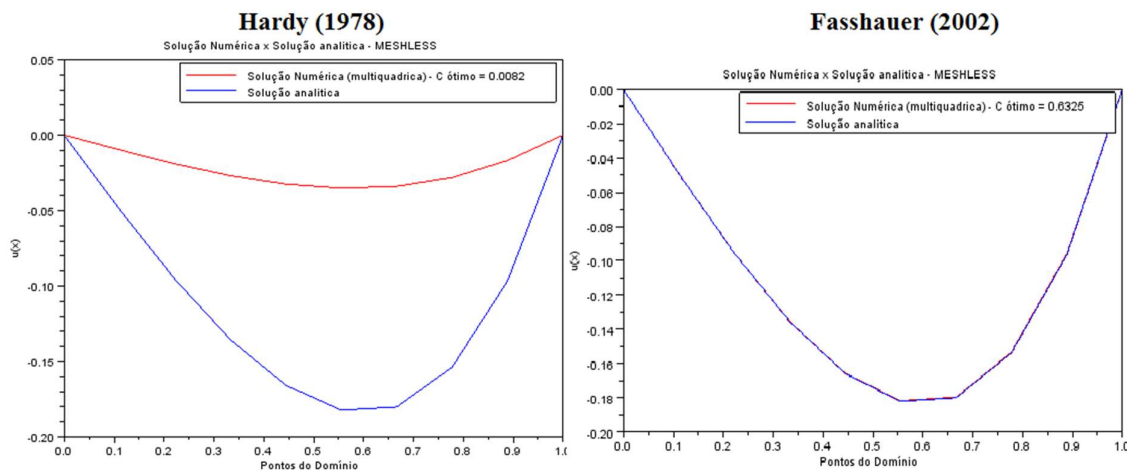
Obviamente o erro médio gerado pelo método 02 é inferior ao gerado pelo método 01. Portanto, para essa primeira simulação, o método 02 possui melhor desempenho, quando comparado ao método 01.

É importante ressaltar que, embora o método 01 tenha gerado um erro maior, seus resultados não fazem com que a aplicação desse método seja excluída, uma vez que um erro médio de 0.0066 para uma solução numérica é bastante aceitável.

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para parâmetros de forma calculados com o uso das metodologias de Hardy (1978), cujo valor é  $c = 0.0082$  e Fasshauer (2002), cujo valor é  $c = 0.6325$ .

Observando a figura 4.12, a metodologia de Fasshauer (2002) se adequou melhor que a metodologia de Hardy (1978), cuja solução numérica está distante de convergir com a solução analítica, conforme mostra a figura.

Figura 4.12- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso II – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.8 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso II – 1D.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0493	-0.0097	-0.0493	0.0396	0.0000
-0.0956	-0.0190	-0.0955	0.0766	0.0001
-0.1356	-0.0268	-0.1354	0.1088	0.0002
-0.1658	-0.0324	-0.1656	0.1334	0.0002
-0.1822	-0.0350	-0.1819	0.1472	0.0003
-0.1800	-0.0338	-0.1796	0.1462	0.0004
-0.1537	-0.0280	-0.1532	0.1257	0.0005
-0.0965	-0.0167	-0.0958	0.0798	0.0007
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0857	0.0002

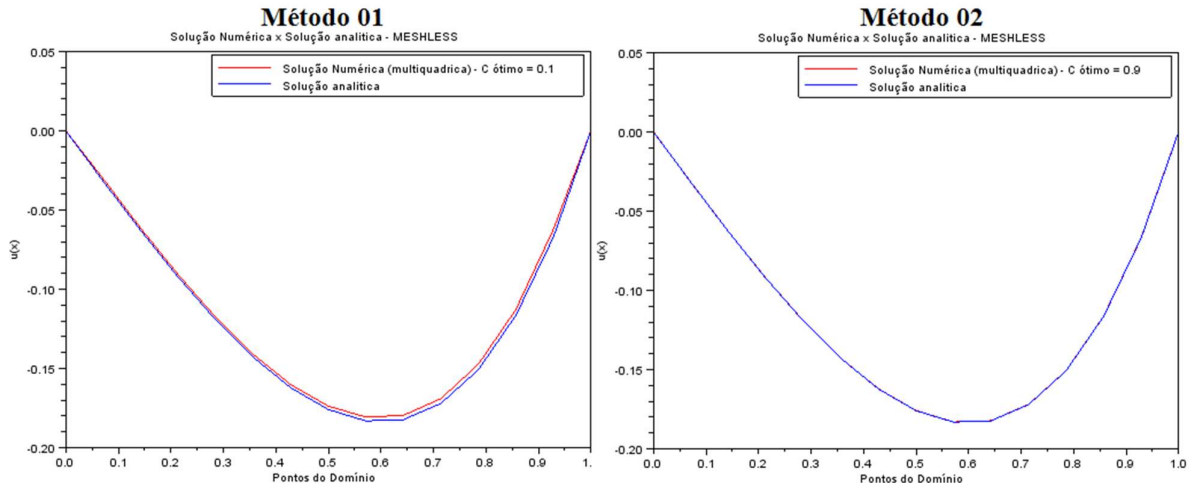
Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando a tabela 4.8, os erros gerados pela metodologia de Fasshauer (2002) ocorrem apenas na quarta casa decimal. Mesmo o erro médio de 0.0002 igual ao gerado pelo método 02, alguns pontos da tabela 4.8 apresentaram erros maiores, o que confere ao método 02 desempenho melhor.

#### 4.1.2.2 Simulação 2 – 15 nós ou pontos:

Os resultados da simulação 2 estão presentes na figura 4.13 mostrada abaixo:

Figura 4.13- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso II – 1D.



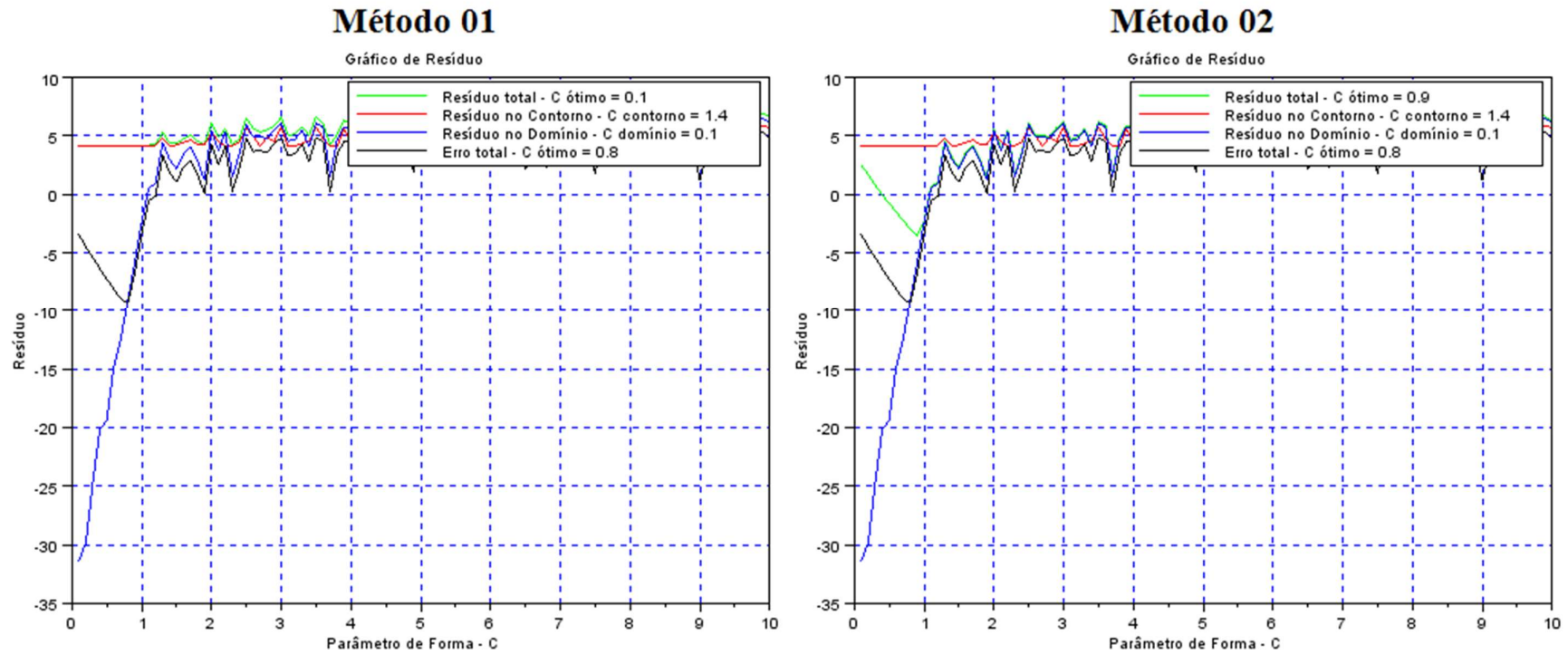
Fonte: Elaborado pela autora.

Como é possível verificar na figura 4.13, a solução numérica, obtida com a utilização do parâmetro de forma ótimo calculado pelo método 01, apresentou melhor convergência com a solução analítica do problema. Entretanto a solução numérica apresentada no método 02 é melhor, uma vez que é visto apenas uma única solução, devido à sobreposição entre as duas soluções.

Pela figura 4.14, que apresenta os gráficos dos resíduos gerados, o  $c$  ótimo obtido pelo método 01 é igual a 0.1 e esse é o mesmo valor calculado pelo método 01 na simulação 1 de 10 pontos, entretanto sobre esse fato cabe ressaltar que se trata de uma coincidência apenas, uma vez que o parâmetro de forma ideal pode variar em função da quantidade de pontos e nessa simulação com 15 pontos distribuídos o valor de  $c$  ideal é igual a 0.8, diferente do valor de 1.5 encontrado na simulação anterior.

Na figura 4.14 ainda é possível verificar que o parâmetro de forma ótimo obtido com o auxílio do método 02 é igual a 0.9 valor bastante próximo de 0.8, que corresponde ao valor de  $c$  ideal. Isso explica o fato da solução numérica proposta por esse método ter melhorado.

Figura 4.14- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso II – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados numéricos gerados pelos métodos 01 e 02 estão dispostos na tabela 4.9 mostrada a seguir:

Tabela 4.9 – Resultados Simulação 2 – Caso II – 1D.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001
-0.0319	-0.0304	-0.0318	0.0015	0.0001
-0.0630	-0.0616	-0.0629	0.0014	0.0001
-0.0925	-0.0909	-0.0924	0.0016	0.0001
-0.1194	-0.1178	-0.1194	0.0016	0.0000
-0.1430	-0.1412	-0.1430	0.0018	0.0000
-0.1622	-0.1603	-0.1622	0.0019	0.0000
-0.1760	-0.1738	-0.1759	0.0022	0.0001
-0.1831	-0.1807	-0.1830	0.0024	0.0001
-0.1823	-0.1796	-0.1822	0.0027	0.0001
-0.1721	-0.1691	-0.1720	0.0030	0.0001
-0.1508	-0.1473	-0.1507	0.0035	0.0001
-0.1165	-0.1128	-0.1164	0.0037	0.0001
-0.0670	-0.0621	-0.0670	0.0049	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001
<b>Erro médio</b>			0.0021	0.0001

Fonte: Elaborado pela autora.

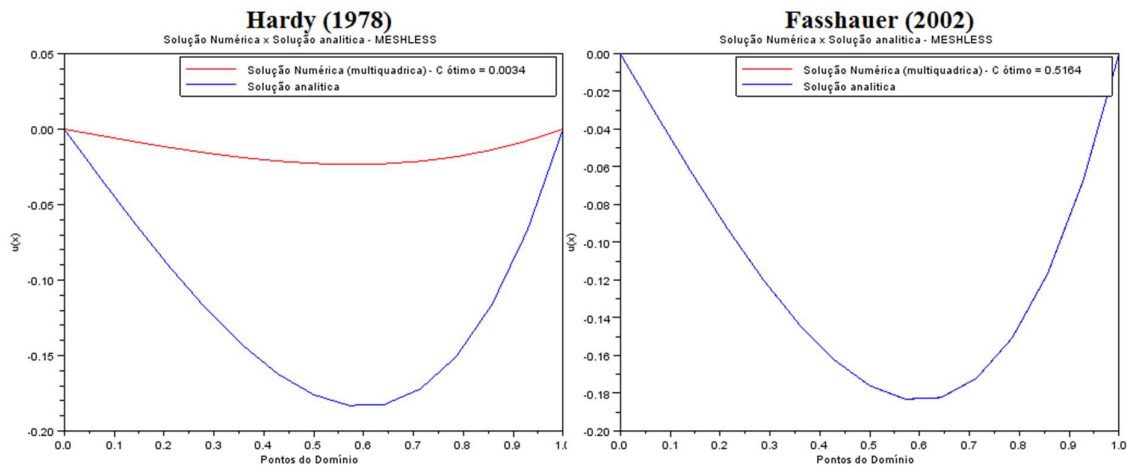
Pelos valores apresentados na tabela 4.9, nota-se que a diferença média entre a solução numérica obtida pelo método 02 e a solução analítica é de apenas 0.0001, ou seja, além de se dá na quarta casa decimal, a diferença é de apenas 1 (uma) unidade.

Em relação aos resultados gerados pelo método 01, o erro médio nesta simulação caiu para 0.0021, condizente com a significativa melhora da solução proposta em relação à solução analítica. Entretanto, o método 02 continua gerando resultados melhores que os resultados obtidos com o método 01.

A seguir, tem-se os resultados gerados com a utilização do parâmetro de forma utilizando Hardy (1978), cujo valor é 0.0034 e com a utilização de Fasshauer (2002), cujo valor é 0.5164.

A figura 4.15 mostra os resultados para ambas as metodologias e suas comparações com a solução analítica.

Figura 4.15- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para pontos - Caso II – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.10 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 15 pontos - Caso II – 1D.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0319	-0.0042	-0.0319	0.0277	0.0000
-0.0630	-0.0084	-0.0630	0.0546	0.0000
-0.0925	-0.0123	-0.0925	0.0802	0.0000
-0.1194	-0.0158	-0.1194	0.1036	0.0000
-0.1430	-0.0188	-0.1430	0.1242	0.0000
-0.1622	-0.0212	-0.1622	0.1410	0.0000
-0.1760	-0.0227	-0.1759	0.1533	0.0001
-0.1831	-0.0233	-0.1831	0.1598	0.0000
-0.1823	-0.0229	-0.1822	0.1594	0.0001
-0.1721	-0.0213	-0.1720	0.1508	0.0001
-0.1508	-0.0183	-0.1507	0.1325	0.0001
-0.1165	-0.0138	-0.1164	0.1027	0.0001
-0.0670	-0.0077	-0.0669	0.0593	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0966	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

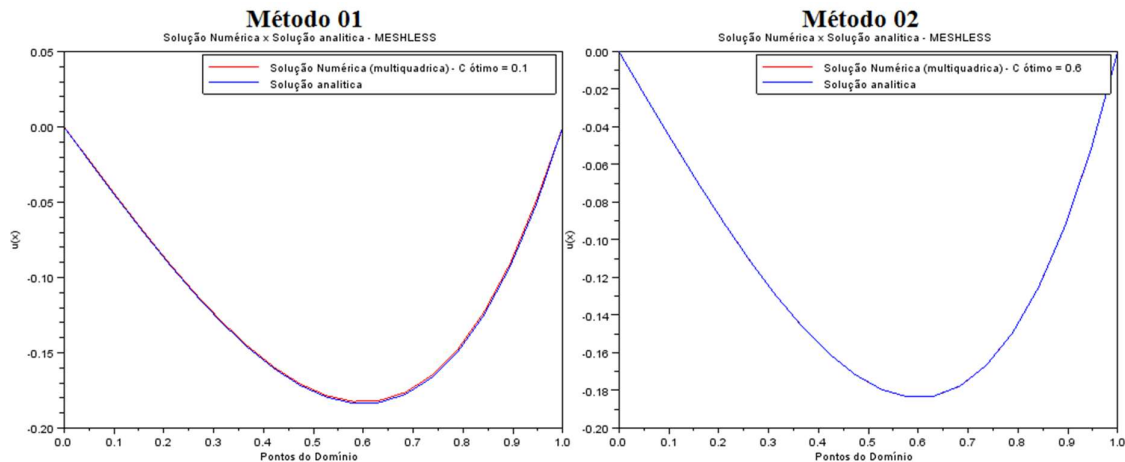
Pelos resultados, o método de Fasshauer (2002) é melhor que o de Hardy (1978) e um pouco melhor que o método 02, pois seu erro médio é zero. Apesar o  $c$  do método 02 está próximo do  $c$  ideal, quando observando o gráfico dos resíduos, pode-se ver que do valor 0.9 está num ponto de subida, ou seja, de aumento de erro, enquanto o 0.5164 não.



#### 4.1.2.3 Simulação 3 – 20 nós ou pontos:

Os resultados da simulação 3 estão apresentados na figura 4.16:

Figura 4.16- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso II – 1D.

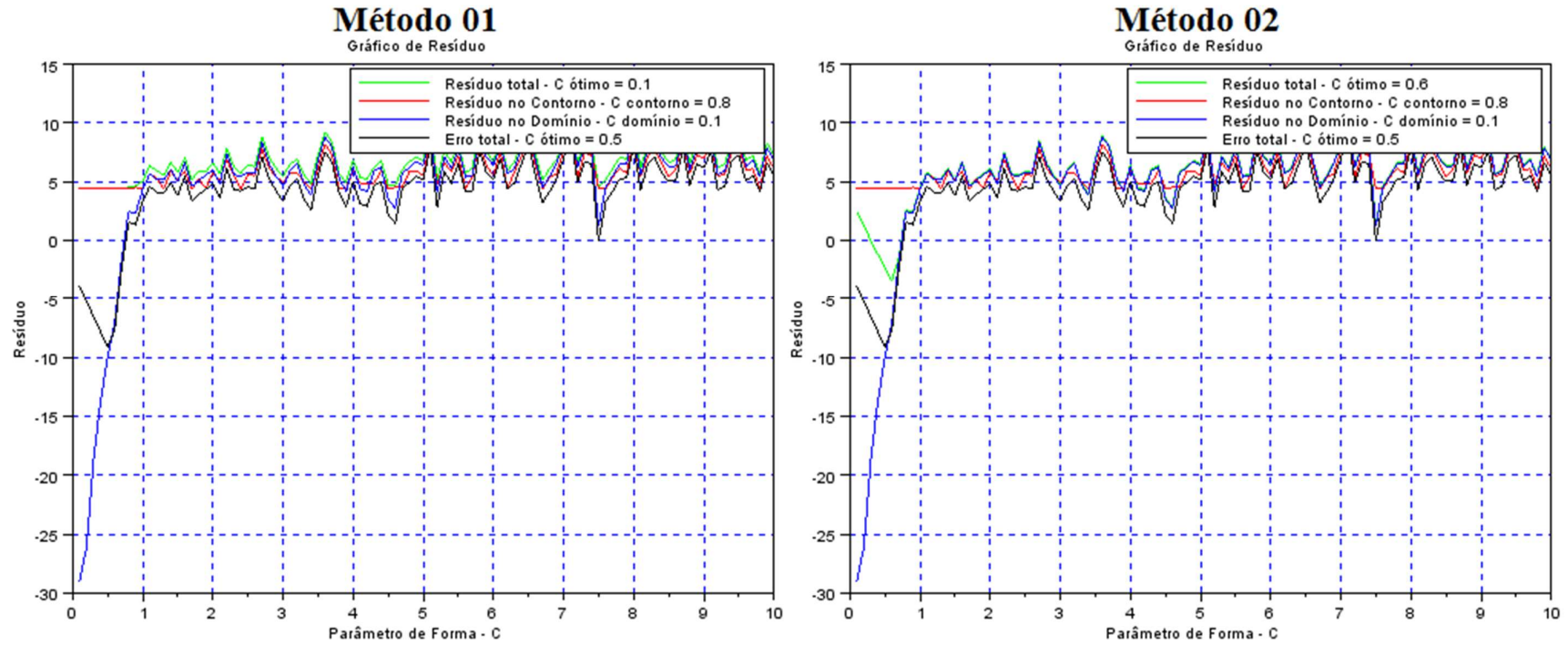


Fonte: Elaborado pela autora.

As curvas da solução analítica e da solução numérica gerada com o auxílio do método 01 estão visualmente mais próximas, indicando que o método melhorou nesta simulação. A solução numérica obtida com o método 02 continua excelente, mas para verificar quantitativamente é necessário fazer uma análise dos resultados e dos erros, os quais serão mostrados posteriormente na tabela 4.11 de resultados. Os gráficos dos resíduos mostrados na figura 4.17 indicam que o parâmetro de forma ideal para esta simulação possui o valor de 0.5.

Os resultados mostrados na tabela 4.11 indicam que houve uma melhor convergência para a solução numérica proposta pelo método 02, uma vez que o erro da maioria dos pontos foi nulo e em apenas 4 pontos o erro foi igual a 0.0001, o que retornou um erro médio nulo conforme mostra a tabela.

Figura 4.17- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso II – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.11 – Resultados Simulação 3 – Caso II – 1D.

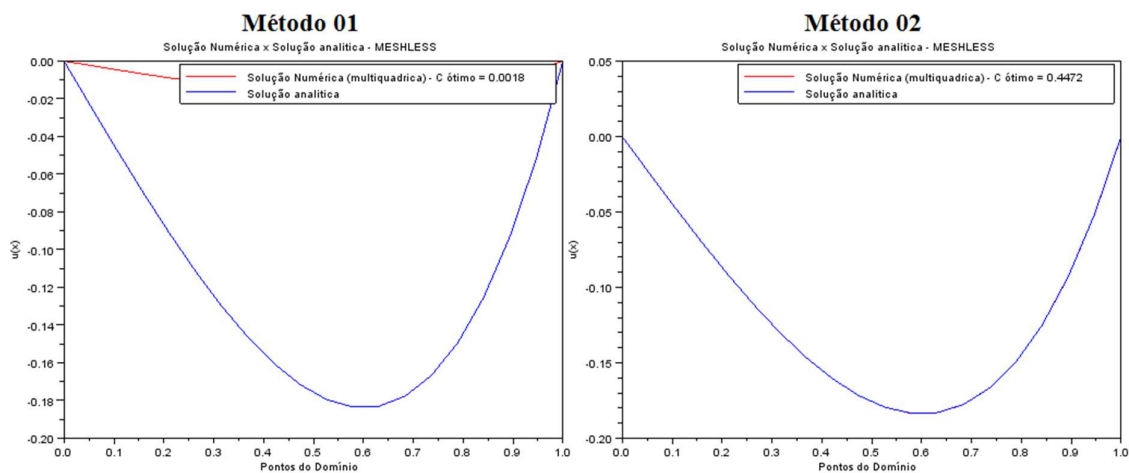
<b>Caso II - 1D: Multiquádrica - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0236	-0.0229	-0.0236	0.0007	0.0000
-0.0468	-0.0462	-0.0468	0.0006	0.0000
-0.0694	-0.0687	-0.0694	0.0007	0.0000
-0.0910	-0.0903	-0.0910	0.0007	0.0000
-0.1112	-0.1105	-0.1113	0.0007	0.0001
-0.1298	-0.1291	-0.1299	0.0007	0.0001
-0.1464	-0.1456	-0.1464	0.0008	0.0000
-0.1604	-0.1596	-0.1605	0.0008	0.0001
-0.1716	-0.1707	-0.1716	0.0009	0.0000
-0.1794	-0.1784	-0.1795	0.0010	0.0001
-0.1834	-0.1823	-0.1834	0.0011	0.0000
-0.1830	-0.1818	-0.1830	0.0012	0.0000
-0.1776	-0.1763	-0.1776	0.0013	0.0000
-0.1666	-0.1652	-0.1666	0.0014	0.0000
-0.1493	-0.1477	-0.1493	0.0016	0.0000
-0.1249	-0.1231	-0.1249	0.0018	0.0000
-0.0925	-0.0906	-0.0925	0.0019	0.0000
-0.0512	-0.0488	-0.0512	0.0024	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0010	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

A figura 4.18 e a tabela 4.12 mostram os resultados obtidos para parâmetros de forma calculados com o uso das metodologias de Hardy (1978), com  $c = 0.0018$  e Fasshauer (2002), cujo  $c = 0.4472$ .

Analisando os resultados, o método Fasshauer (2002) tem melhor desempenho que o método de Hardy (1978) e que o método 02, uma vez que apenas em um ponto foi obtido um erro no valor de 0.0001.

Figura 4.18- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.12 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II – 1D.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0236	-0.0023	-0.0236	0.0213	0.0000
-0.0468	-0.0046	-0.0468	0.0422	0.0000
-0.0694	-0.0068	-0.0694	0.0626	0.0000
-0.0910	-0.0088	-0.0910	0.0822	0.0000
-0.1112	-0.0108	-0.1112	0.1004	0.0000
-0.1298	-0.0125	-0.1298	0.1173	0.0000
-0.1464	-0.0140	-0.1464	0.1324	0.0000
-0.1604	-0.0153	-0.1604	0.1451	0.0000
-0.1716	-0.0162	-0.1716	0.1554	0.0000
-0.1794	-0.0168	-0.1794	0.1626	0.0000
-0.1834	-0.0170	-0.1834	0.1664	0.0000
-0.1830	-0.0168	-0.1830	0.1662	0.0000
-0.1776	-0.0161	-0.1776	0.1615	0.0000
-0.1666	-0.0149	-0.1666	0.1517	0.0000
-0.1493	-0.0132	-0.1493	0.1361	0.0000
-0.1249	-0.0108	-0.1248	0.1141	0.0001
-0.0925	-0.0079	-0.0925	0.0846	0.0000
-0.0512	-0.0043	-0.0512	0.0469	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			<b>0.1025</b>	<b>0.0000</b>

Fonte: Elaborado pela autora.

O quadro 4.2 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 10, 15 e 20 pontos realizadas para o segundo caso unidimensional, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.2 – Resumos dos Resultados Caso II – 1D.

<b>CASO II</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>10 Pontos</b>	0.0066	0.0002	0.0002	0.0857
<b>15 Pontos</b>	0.0021	0.0001	0.0000	0.0966
<b>20 Pontos</b>	0.0010	0.0000	0.0000	0.1025

Fonte: Elaborado pela autora.

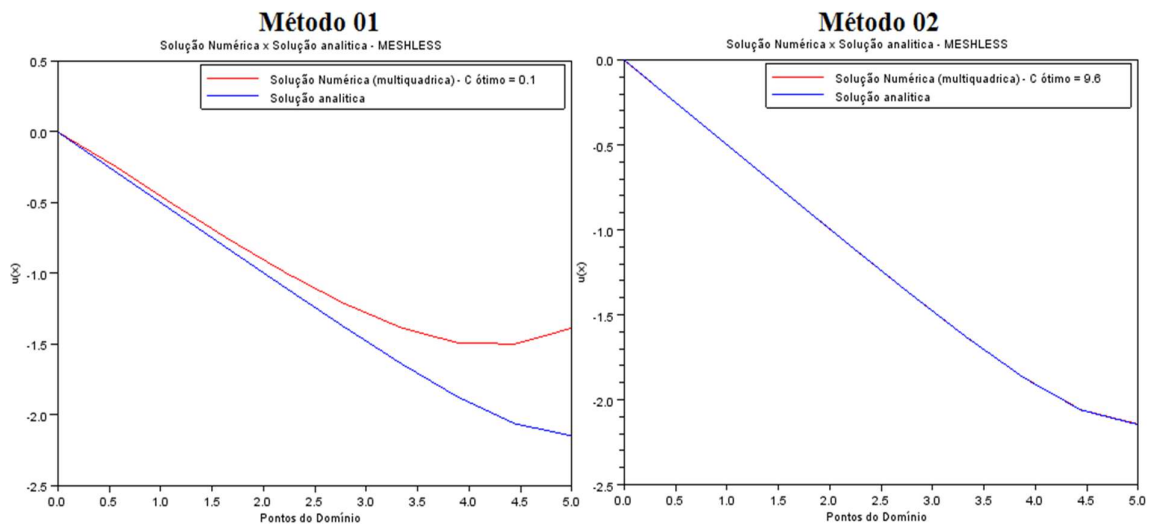
### 4.1.3 Caso III - 1D: Multiquádrica

Os resultados apresentados referem-se ao terceiro caso de aplicação unidimensional, que tem como elemento principal a equação 95.

#### 4.1.3.1 Simulação 1 – 10 nós ou pontos:

A figura 4.19 apresenta os gráficos das soluções numéricas, calculadas com a utilização dos métodos 01 e 02 que fazem a otimização do parâmetro de forma, e da solução analítica do problema.

Figura 4.19- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso III – 1D.



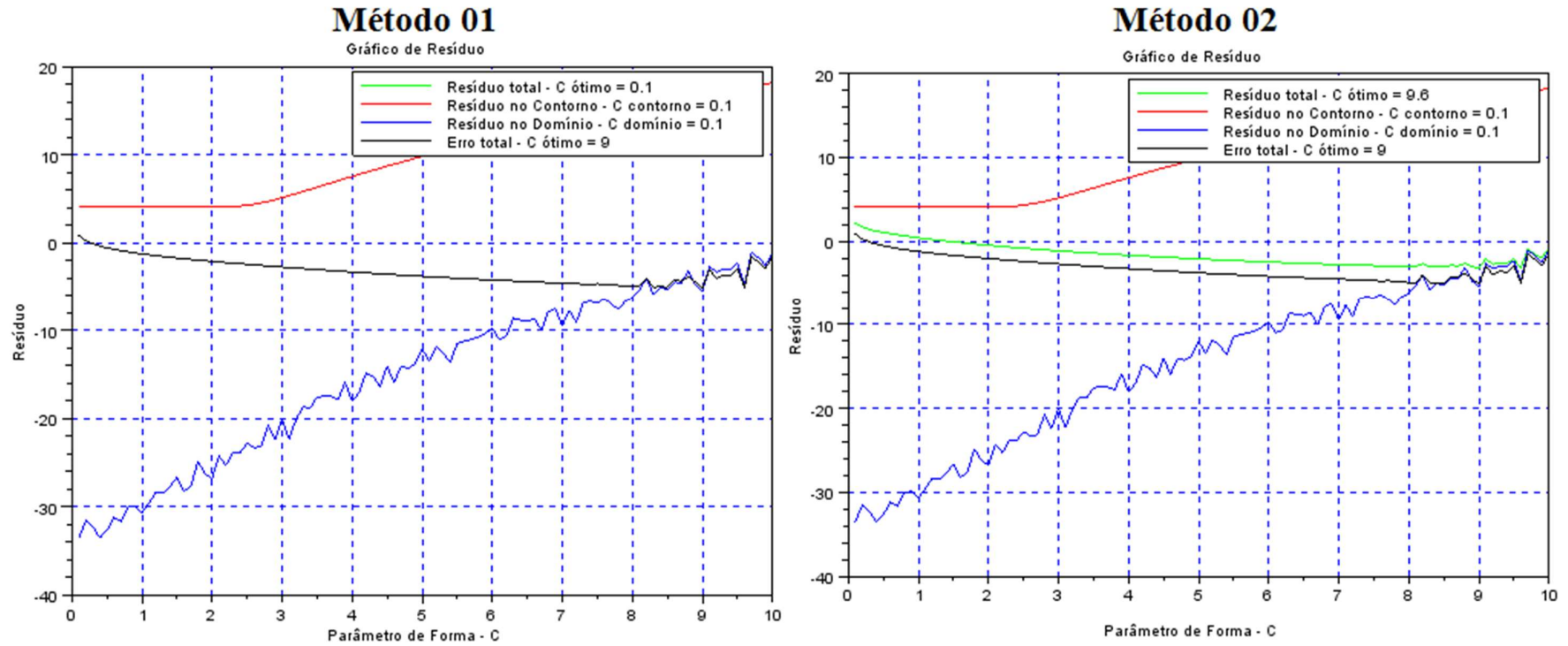
Fonte: Elaborado pela autora.

Observando a figura 4.19 é evidente que a solução numérica gerada com o auxílio do método 01 não está adequada, quando comparada à solução analítica do problema. A solução numérica inicia com uma boa convergência, mas na região da segunda condição de contorno, que nesse caso é uma derivada, distorce-se completamente.

Entretanto a solução numérica proposta pelo método 02 converge totalmente com a solução analítica. Dessa maneira, é possível afirmar que o método 02 é superior ao método 01 para simulação 1 do caso apresentado.

A figura 4.20 apresenta os gráficos dos resíduos gerados para ambos os métodos:

Figura 4.20- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos – Caso III – 1D.



Conforme é possível verificar no gráfico o valor ideal para o parâmetro de forma é 9. O método 02 calculou um valor de  $c$  igual 9.6, que é próximo ao valor ideal. No entanto, o  $c$  de 0.1 gerado pelo método 01 está distante do valor ideal, o esse ponto ainda está situado em um ponto, cujo valores de erro são maiores. Dessa forma, é possível concluir que o método 01 não gera uma solução adequada para esta simulação.

A tabela 4.13 mostra os resultados numéricos das soluções obtidas pelos métodos 01 e 02, bem como suas comparações com os valores da solução analítica.

Tabela 4.13 – Resultados Simulação 1 – Caso III - 1D.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	-0.0007	0.0000	0.0007
-0.2773	-0.2410	-0.2778	0.0363	0.0005
-0.5542	-0.5055	-0.5547	0.0487	0.0005
-0.8302	-0.7594	-0.8307	0.0708	0.0005
-1.1042	-0.9970	-1.1047	0.1072	0.0005
-1.3736	-1.2091	-1.3740	0.1645	0.0004
-1.6332	-1.3812	-1.6334	0.2520	0.0002
-1.8710	-1.4899	-1.8708	0.3811	0.0002
-2.0611	-1.4981	-2.0601	0.5630	0.0010
-2.1464	-1.3861	-2.1442	0.7603	0.0022
<b>Erro médio</b>			0.2384	0.0007

Fonte: Elaborado pela autora.

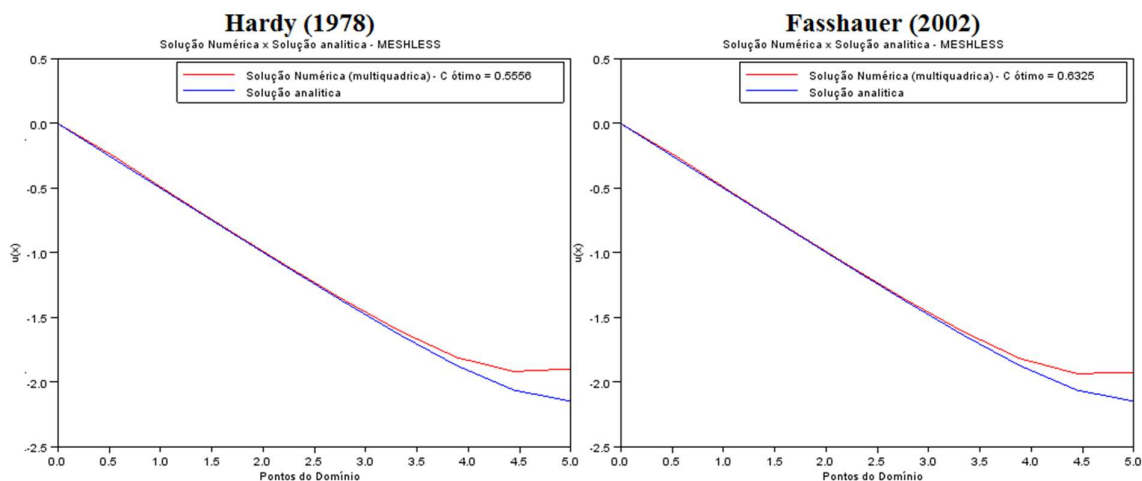
Pela análise da tabela, é possível observar que os erros encontrados para o método 01 são superiores aos erros presentes na solução do método 02. Nesse último, os erros ocorreram na quarta (maioria) e terceira (dois pontos) casa decimal, com um pico no valor de 0.0022, mas o erro médio foi igual 0.0007.

A seguir, são apresentados os resultados gerados com a utilização do parâmetro de forma utilizando Hardy (1978), cujo valor é 0.5556 e com a utilização de Fasshauer (2002), cujo valor é 0.6325.

A figura 4.21 mostra os resultados das soluções numéricas obtidas com o uso dessas metodologias.



Figura 4.21- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Observando a figura 4.21, nota-se que as metodologias de Fasshauer (2002) e de Hardy (1978) são muito semelhantes. Em ambas, verifica-se que as soluções numéricas não convergem totalmente com a solução analítica do problema. Esse é o mesmo problema encontrado na solução do método 01, na região próxima à condição de contorno de Neumann ocorre uma distorção. Pela tabela 4.14, a metodologia de Fasshauer (2002) é um pouco melhor. Comparando, ainda, os valores do erro médio, das tabelas 4.13 e 4.14, é possível afirmar que o método 02 é superior as soluções de Hardy (1978) e de Fasshauer (2002) nesta simulação.

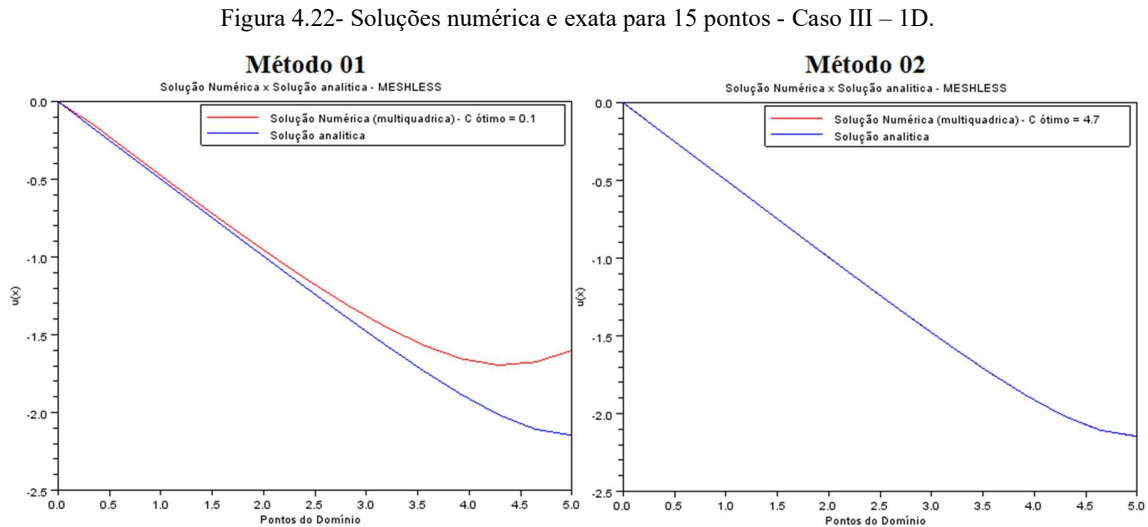
Tabela 4.14 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III – 1D.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.2773	-0.2572	-0.2600	0.0201	0.0173
-0.5542	-0.5464	-0.5478	0.0078	0.0064
-0.8302	-0.8240	-0.8248	0.0062	0.0054
-1.1042	-1.0966	-1.0976	0.0076	0.0066
-1.3736	-1.3596	-1.3614	0.0140	0.0122
-1.6332	-1.6036	-1.6071	0.0296	0.0261
-1.8710	-1.8082	-1.8159	0.0628	0.0551
-2.0611	-1.9169	-1.9334	0.1442	0.1277
-2.1464	-1.8965	-1.9234	0.2499	0.2230
<b>Erro médio</b>			<b>0.0542</b>	<b>0.0480</b>

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 4.1.3.2 Simulação 2 – 15 nós ou pontos:

A figura 4.22 apresenta as curvas das soluções numéricas e analítica:



Fonte: Elaborado pela autora.

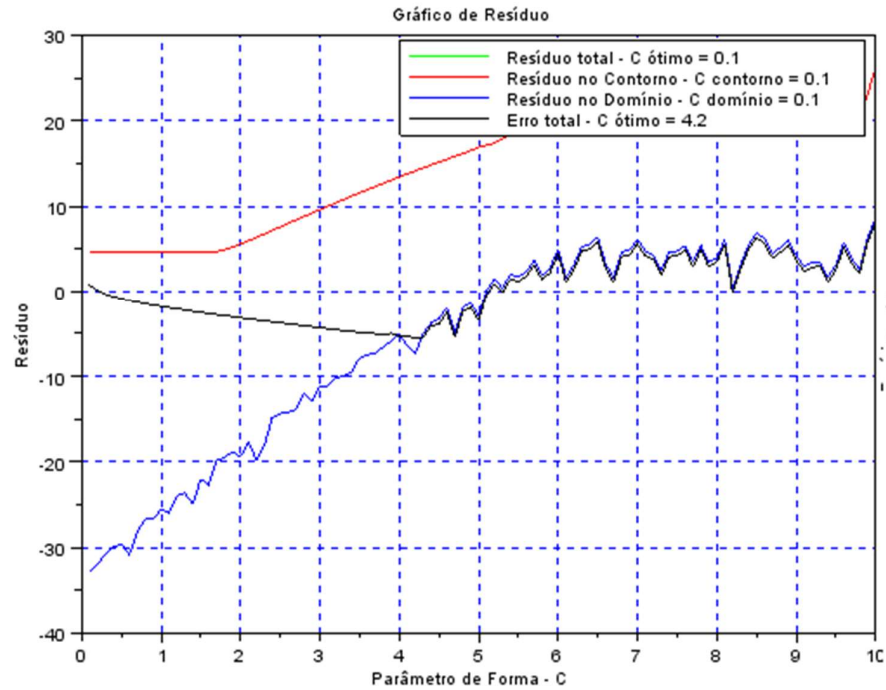
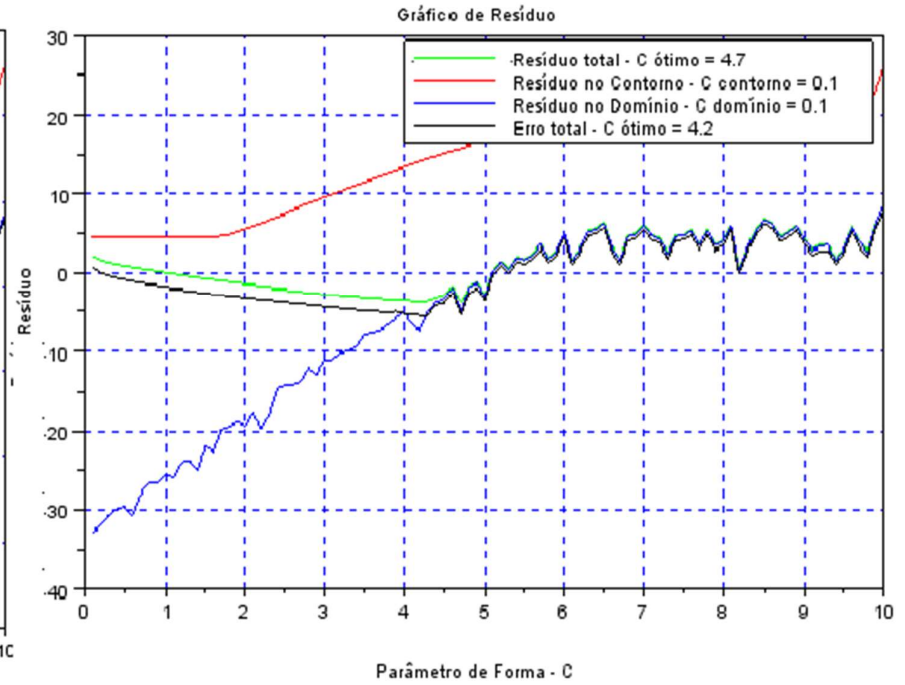
Analisando a figura 4.22, a solução gerada pelo método 01 obteve uma pequena evolução comparando com os resultados da simulação anterior, mas o problema, nas proximidades da condição de contorno de Neumann, continua não havendo convergência com a solução analítica.

A solução numérica gerada com o auxílio do método 02 e a solução analítica estão sobrepostas, ou seja, um resultado excelente para esse método, que se mostrou superior ao método 01. O  $c$  ótimo calculado pelo método 02, no valor de 4.7, está próximo do valor de  $c$  ideal de 4.2 conforme mostra a figura 4.23.

Ao observar a linha preta do erro no gráfico dos resíduos do método 02 na figura 4.23, é possível verificar que o ponto para o  $c$  de 4.7 está em um ponto de erro mínimo muito próximo do mínimo erro de 4.2, quase não havendo diferença entre os dois.

Para comparar as diferenças entre as soluções numéricas geradas e a solução analítica, deve-se analisar os resultados numéricos apresentados na tabela 4.15.

Figura 4.23- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso III – 1D.

**Método 01****Método 02**

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.15 – Resultados Simulação 2 – Caso III – 1D.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0004
-0.1783	-0.1539	-0.1787	0.0244	0.0004
-0.3564	-0.3337	-0.3568	0.0227	0.0004
-0.5344	-0.5110	-0.5348	0.0234	0.0004
-0.7121	-0.6850	-0.7124	0.0271	0.0003
-0.8891	-0.8551	-0.8894	0.0340	0.0003
-1.0652	-1.0199	-1.0655	0.0453	0.0003
-1.2397	-1.1777	-1.2400	0.0620	0.0003
-1.4115	-1.3254	-1.4117	0.0861	0.0002
-1.5789	-1.4588	-1.5790	0.1201	0.0001
-1.7388	-1.5718	-1.7390	0.1670	0.0002
-1.8866	-1.6552	-1.8866	0.2314	0.0000
-2.0141	-1.6961	-2.0140	0.3180	0.0001
-2.1081	-1.6761	-2.1077	0.4320	0.0004
-2.1464	-1.6016	-2.1459	0.5448	0.0005
<b>Erro médio</b>			0.1426	0.0003

Fonte: Elaborado pela autora.

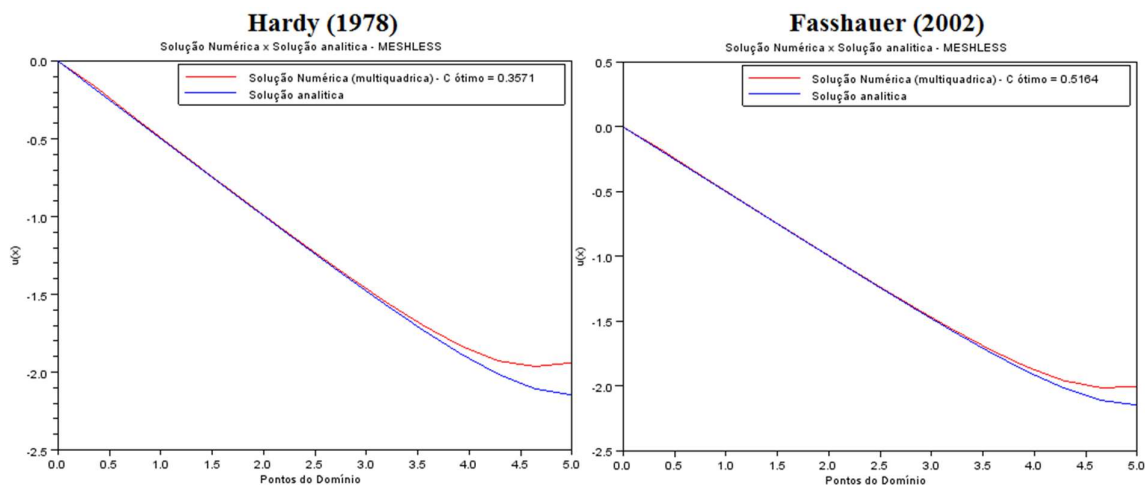
Pela tabela 4.15, é possível perceber que ambos os métodos evoluíram em relação à simulação anterior, uma vez que seus erros médios caíram para 0.1426 no método 01 e para 0.0003 no método 02.

Outro aspecto importante a respeito do método 02 é o fato das diferenças entre as soluções ocorrem apenas na quarta casa decimal com um pico de 0.0005 de erro máximo. Situação diferente da simulação anterior, em que dois pontos possuíam erros na terceira casa e com um pico de 0.0022.

A seguir, são apresentados os resultados gerados com a utilização do parâmetro de forma utilizando Hardy (1978), cujo valor é 0.3571 e com a utilização de Fasshauer (2002), cujo valor é 0.5164.

A figura 4.24 mostra os resultados para ambas as metodologias e suas comparações com a solução analítica. Analisando a figura, observa-se que a solução de Fasshauer (2002) é um pouco melhor que a solução pelo método de Hardy (1978). Além disso, é possível notar que a solução numérica de Fasshauer (2002) se adequou melhor comparada aos seus resultados na simulação 1.

Figura 4.24- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 15 pontos - Caso III – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pelos resultados da tabela 4.16, verifica-se que os erros médios das soluções caíram. Entretanto, comparando com o erro médio de 0.0003 obtido pelo método 02, pode-se afirmar que para esta simulação o método 02 é superior ao método de Fasshauer (2002).

Tabela 4.16 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 15 pontos - Caso III – 1D.

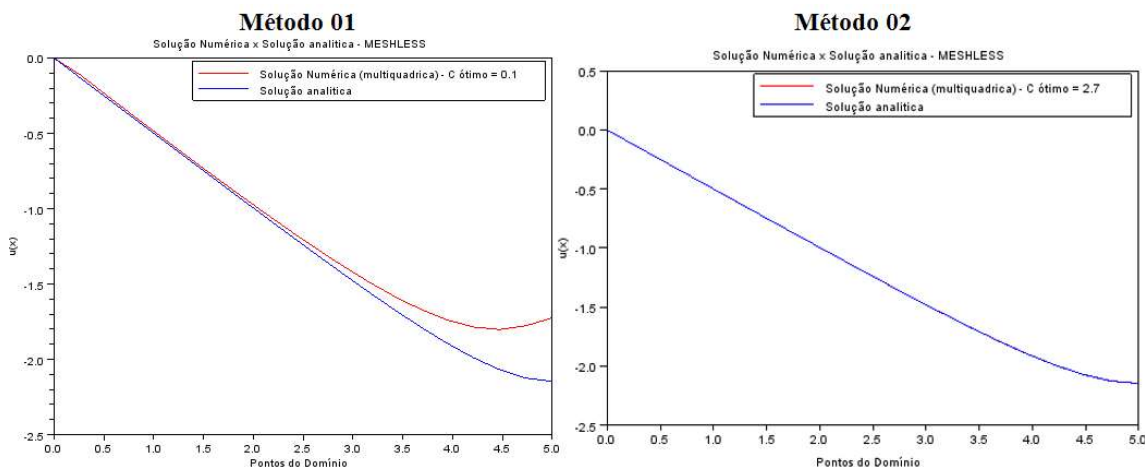
<b>Caso III - 1D: Multiquádrica - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1783	-0.1618	-0.1678	0.0165	0.0105
-0.3564	-0.3480	-0.3514	0.0084	0.0050
-0.5344	-0.5283	-0.5306	0.0061	0.0038
-0.7121	-0.7074	-0.7092	0.0047	0.0029
-0.8891	-0.8847	-0.8863	0.0044	0.0028
-1.0652	-1.0598	-1.0618	0.0054	0.0034
-1.2397	-1.2319	-1.2347	0.0078	0.0050
-1.4115	-1.3994	-1.4036	0.0121	0.0079
-1.5789	-1.5594	-1.5660	0.0195	0.0129
-1.7388	-1.7070	-1.7178	0.0318	0.0210
-1.8866	-1.8342	-1.8516	0.0524	0.0350
-2.0141	-1.9285	-1.9571	0.0856	0.0570
-2.1081	-1.9637	-2.0109	0.1444	0.0972
-2.1464	-1.9399	-2.0055	0.2065	0.1409
<b>Erro médio</b>			<b>0.0404</b>	<b>0.0270</b>

Fonte: Elaborado pela autora.

### 4.1.3.3 Simulação 3 – 20 nós ou pontos:

Os resultados para esta última simulação para casos unidimensionais com o uso da RBF Multiquádrica estão mostrados na figura 4.25, que apresenta a comparação entre as curvas das soluções numéricas geradas com a solução analítica do problema.

Figura 4.25- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso III – 1D.



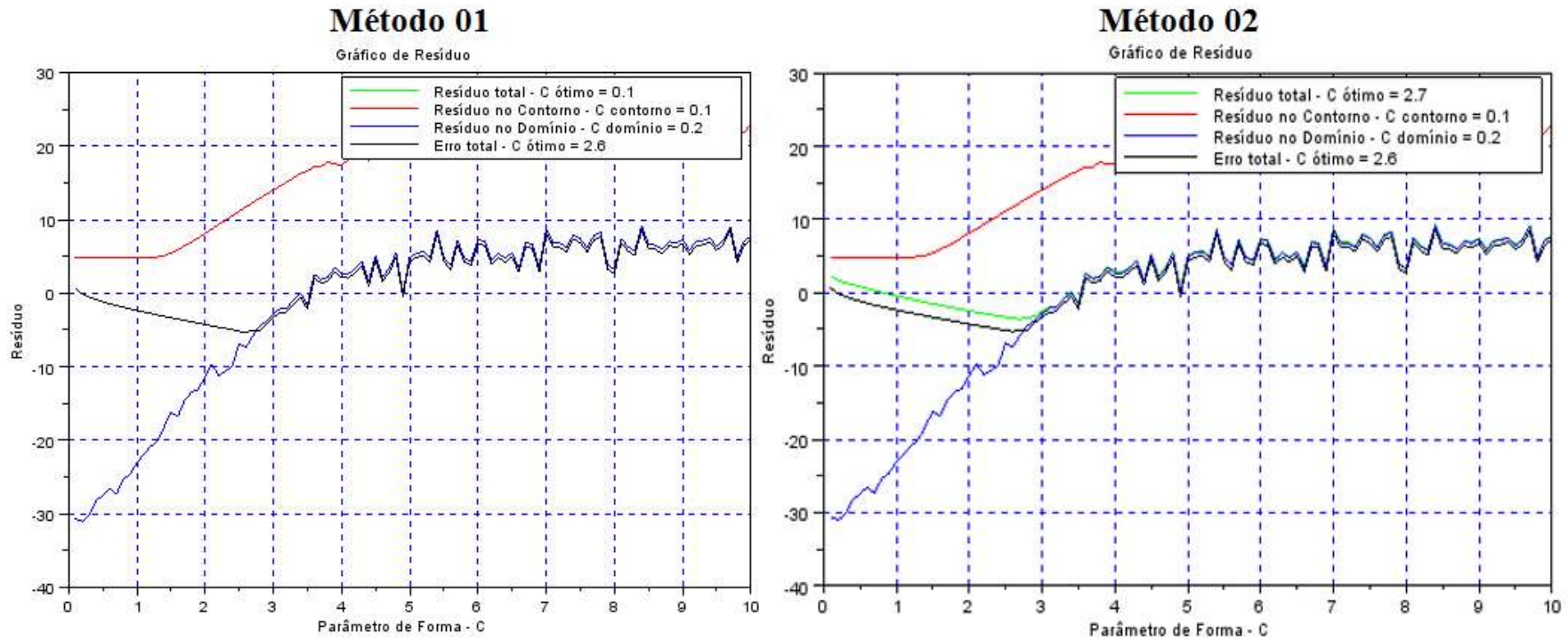
Fonte: Elaborado pela autora.

Em relação ao método 01, a curva da solução numérica gerada se aproximou da solução analítica, é o melhor resultado para esse comparando as três simulações, mas comparado ao método 02, cuja solução converge totalmente com a solução analítica, o método 01 não é o melhor, devido à distorção sofrida nos pontos próximo ao limite superior do domínio.

Pelos resultados mostrados na figura 4.26, o valor de  $c$  otimizado utilizando o método 02 é igual a 2.7, esse valor é muito próximo do valor ideal de 2.6. Dessa maneira, é possível que a solução numérica gerada por esse método nesta simulação também seja a melhor dentre as simulações executadas. Para verificar tal fato, é necessário analisar os valores mostrados na tabela 4.17.

Entretanto o erro médio do método 02 manteve-se constante no valor de 0.0003, igual ao valor obtido na simulação 2. Apesar do erro ter caído em vários pontos, houve novamente outros picos de valor (0.0010 e 0.0013) que influenciaram no resultado final. Ainda assim, o método produziu uma boa solução para o problema.

Figura 4.26- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso III – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.17 – Resultados Simulação 3 – Caso III.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001
-0.1314	-0.1111	-0.1313	0.0203	0.0001
-0.2627	-0.2457	-0.2626	0.0170	0.0001
-0.3939	-0.3791	-0.3939	0.0148	0.0000
-0.5251	-0.5111	-0.5250	0.0140	0.0001
-0.6560	-0.6417	-0.6559	0.0143	0.0001
-0.7867	-0.7709	-0.7866	0.0158	0.0001
-0.9170	-0.8982	-0.9169	0.0188	0.0001
-1.0468	-1.0234	-1.0467	0.0234	0.0001
-1.1757	-1.1457	-1.1756	0.0300	0.0001
-1.3034	-1.2644	-1.3033	0.0390	0.0001
-1.4294	-1.3782	-1.4292	0.0512	0.0002
-1.5528	-1.4853	-1.5526	0.0675	0.0002
-1.6726	-1.5834	-1.6724	0.0892	0.0002
-1.7871	-1.6694	-1.7868	0.1177	0.0003
-1.8939	-1.7388	-1.8935	0.1551	0.0004
-1.9895	-1.7857	-1.9890	0.2038	0.0005
-2.0689	-1.8023	-2.0681	0.2666	0.0008
-2.1247	-1.7777	-2.1237	0.3470	0.0010
-2.1464	-1.7246	-2.1451	0.4218	0.0013
<b>Erro médio</b>			0.0964	0.0003

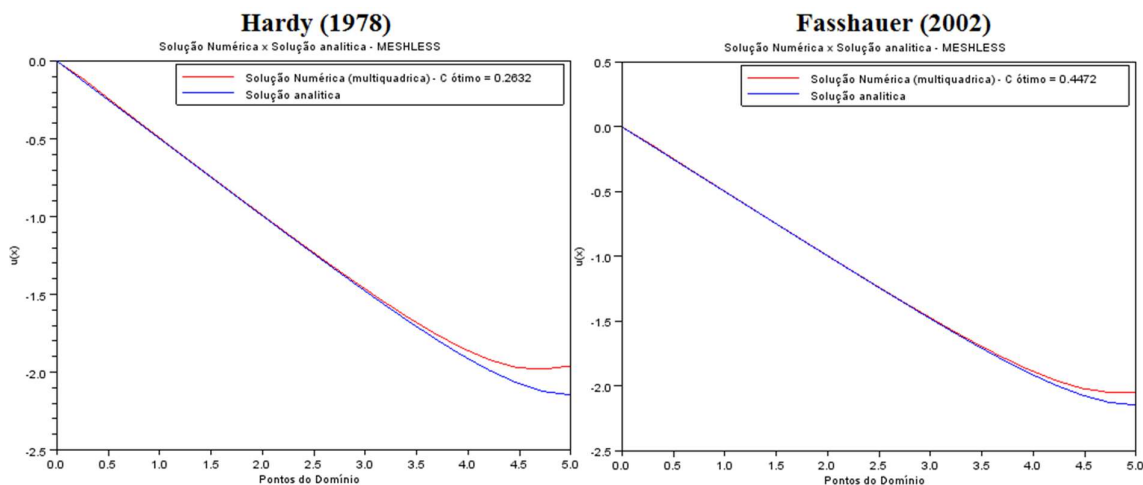
Fonte: Elaborado pela autora.

A figura 4.27 e a tabela 4.18 mostram os resultados das soluções numéricas obtidas com a utilização do parâmetro de forma utilizando Hardy (1978), cujo valor é 0.2632 e com a utilização de Fasshauer (2002), cujo valor é 0.4472.

Os resultados indicam que a solução com o  $c$  de Fasshauer (2002) é um pouco superior à solução com o  $c$  de Hardy (1978). As soluções evoluíram em relação as simulações anteriores, como é possível observar na curva da solução e nos erros médio, mas comparando com as soluções anteriores, a solução do método 02 é superior à solução de Fasshauer (2002).



Figura 4.27- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III – 1D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.18 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III – 1D.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1314	-0.1177	-0.1245	0.0137	0.0069
-0.2627	-0.2545	-0.2588	0.0082	0.0039
-0.3939	-0.3877	-0.3908	0.0062	0.0031
-0.5251	-0.5204	-0.5228	0.0047	0.0023
-0.6560	-0.6521	-0.6541	0.0039	0.0019
-0.7867	-0.7831	-0.7849	0.0036	0.0018
-0.9170	-0.9132	-0.9151	0.0038	0.0019
-1.0468	-1.0423	-1.0445	0.0045	0.0023
-1.1757	-1.1698	-1.1727	0.0059	0.0030
-1.3034	-1.2954	-1.2993	0.0080	0.0041
-1.4294	-1.4182	-1.4236	0.0112	0.0058
-1.5528	-1.5369	-1.5446	0.0159	0.0082
-1.6726	-1.6498	-1.6607	0.0228	0.0119
-1.7871	-1.7543	-1.7699	0.0328	0.0172
-1.8939	-1.8467	-1.8690	0.0472	0.0249
-1.9895	-1.9214	-1.9532	0.0681	0.0363
-2.0689	-1.9710	-2.0167	0.0979	0.0522
-2.1247	-1.9813	-2.0476	0.1434	0.0771
-2.1464	-1.9594	-2.0447	0.1870	0.1017
<b>Erro médio</b>			0.0344	0.0183

Fonte: Elaborado pela autora.

O quadro 4.3 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 10, 15 e 20 pontos realizadas para o terceiro caso unidimensional, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.3 – Resumos dos Resultados Caso III – 1D.

<b>CASO III</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>10 Pontos</b>	0.2384	0.0007	0.0480	0.0542
<b>15 Pontos</b>	0.1426	0.0003	0.0270	0.0404
<b>20 Pontos</b>	0.0964	0.0003	0.0183	0.0344

Fonte: Elaborado pela autora.

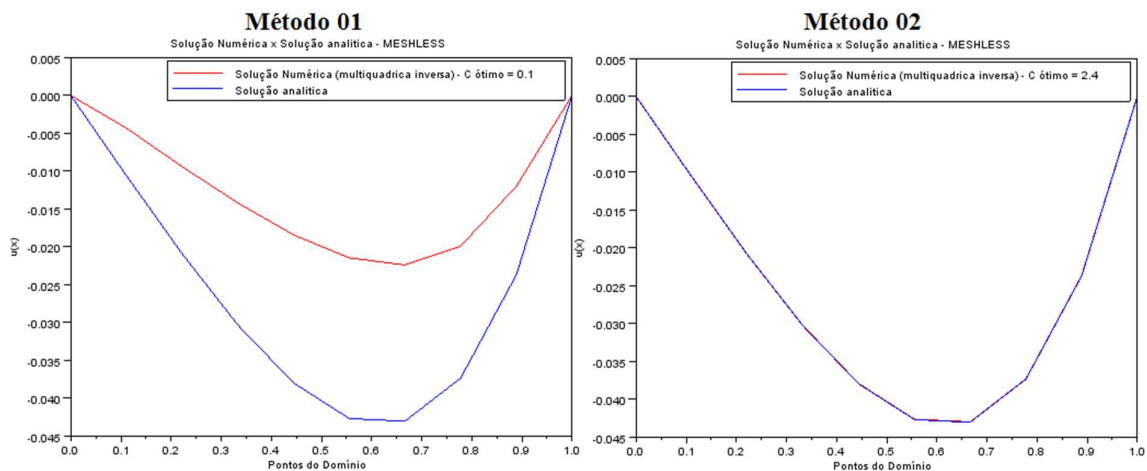
#### 4.1.4 Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa

Os resultados apresentados nesta seção são referentes as simulações realizadas para a RBF multiquádrica inversa.

##### 4.1.4.1 Simulação 1 – 10 nós ou pontos:

Os resultados obtidos pelos métodos 01 e 02 nessa simulação são apresentados nas figuras 4.28 e 4.29. Na primeira, são mostradas comparações dos resultados numéricos obtidos com a solução exata do problema. Enquanto na figura 4.29, estão apresentados os gráficos referentes aos resíduos gerados pelos métodos 01 e 02, e o  $c$  ótimo obtido em cada método.

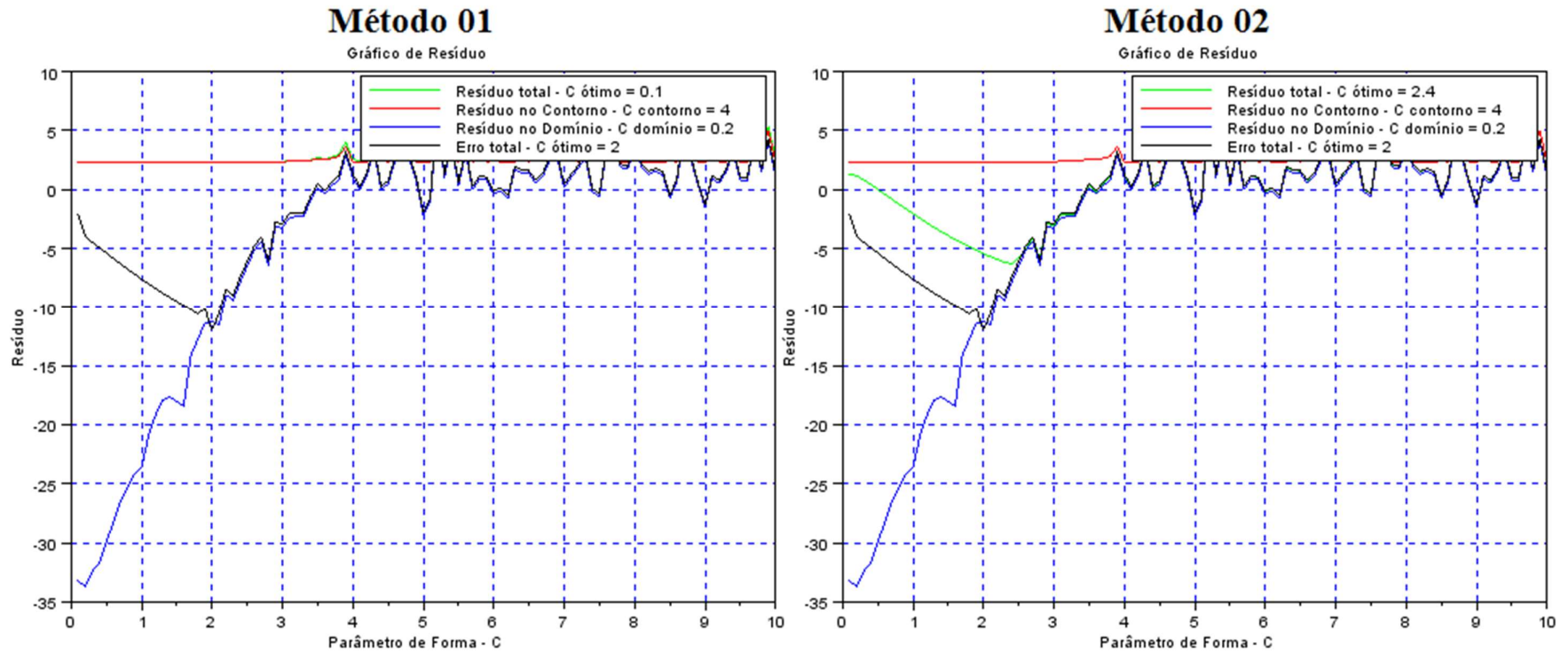
Figura 4.28- Soluções numérica e exata para 10 pontos – Caso I – 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os parâmetros de forma ótimos calculados pelos métodos 01 e 02 foram, respectivamente, iguais a 0.1 e 2.4. Pela figura 4.28, o método 02 convergiu melhor que o método 01. Pela figura 4.29, o  $c$  ótimo do erro foi igual 2, diferente do valor de 1.4 encontrado para equação utilizando a RBF multiquádrica. Nesse ponto, é importante esclarecer que o  $c$  ótimo do erro não necessariamente deve ser igual para RBF multiquádrica e multiquádrica inversa, uma vez que o erro, como foi descrito na metodologia, trata-se da diferença entre a solução numérica e a solução exata, e o  $c$  ótimo gerado é a tentativa de encontrar a melhor solução possível, por meio da minimização do erro. Ou seja, como uma solução numérica está envolvida, então os valores provavelmente serão diferentes.

Figura 4.29- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

A tabela 4.19 mostra os resultados numéricos para as soluções obtidas pelos métodos 01 e 02, bem como, o erro associado a cada um desses métodos em relação à solução analítica.

Tabela 4.19 – Resultados Simulação 1 – Caso I – 1D: MQ Inversa.

<b>Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001
-0.0106	-0.0043	-0.0106	0.0063	0.0000
-0.0209	-0.0094	-0.0209	0.0115	0.0000
-0.0303	-0.0142	-0.0303	0.0161	0.0000
-0.0380	-0.0184	-0.0379	0.0196	0.0001
-0.0427	-0.0214	-0.0426	0.0213	0.0001
-0.0430	-0.0224	-0.0430	0.0206	0.0000
-0.0373	-0.0199	-0.0373	0.0174	0.0000
-0.0237	-0.0120	-0.0236	0.0117	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001
<b>Erro médio</b>			0.0125	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

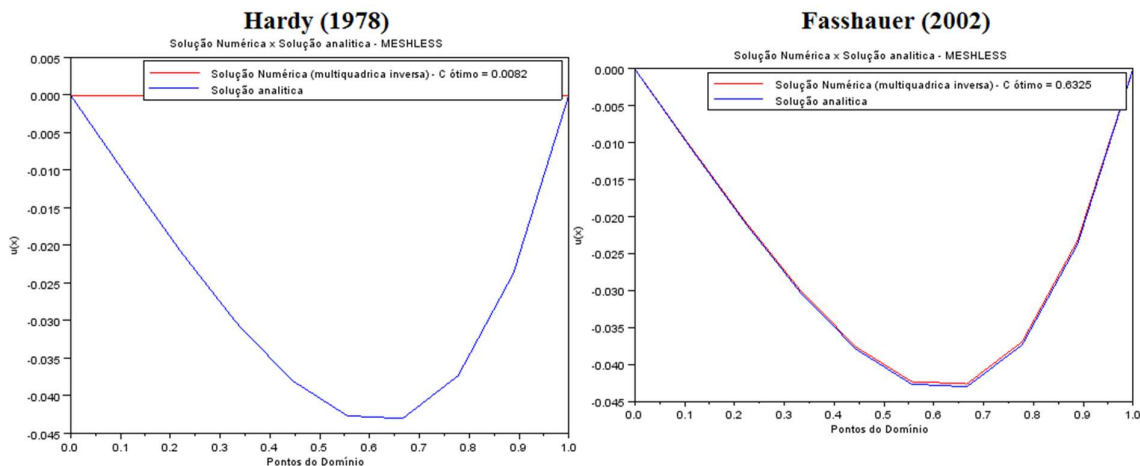
Comparando os resultados, o método 02 é visivelmente superior ao método 01, visto que seu erro médio é nulo. Embora alguns pontos não tenham apontado o mesmo valor encontrado na solução analítica, a diferença é de uma unidade na quarta casa decimal.

Nessa mesma simulação, mas utilizando a RBF multiquádrica, o erro médio gerado pelo método 02 foi igual a 0.0002. Assim, ao utilizar a RBF multiquádrica inversa para a simulação com 10 pontos os resultados obtidos foram um pouco melhores.

A seguir serão analisados os resultados obtidos com a utilização da metodologia de Hardy (1978), cujo parâmetro de forma é 0.0082 e da metodologia de Fasshauer (2002), cujo  $c$  é igual a 0.6325.

A figura 4.30 apresenta os resultados das soluções numéricas comparadas à solução analítica do problema. Na figura, é possível perceber que a metodologia de Fasshauer (2002) é superior à de Hardy (1978), devido a boa convergência com a solução analítica.

Figura 4.30- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na tabela 4.20, são mostrados os resultados das soluções obtidas por ambas as metodologias apresentadas, bem como, as comparações com a solução analítica.

Tabela 4.20 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.

<b>Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0106	-0.0013	-0.0106	0.0093	0.0000
-0.0209	-0.0027	-0.0208	0.0182	0.0001
-0.0303	-0.0039	-0.0302	0.0264	0.0001
-0.0380	-0.0049	-0.0378	0.0331	0.0002
-0.0427	-0.0056	-0.0425	0.0371	0.0002
-0.0430	-0.0057	-0.0429	0.0373	0.0001
-0.0373	-0.0050	-0.0372	0.0323	0.0001
-0.0237	-0.0031	-0.0235	0.0206	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0214	0.0001

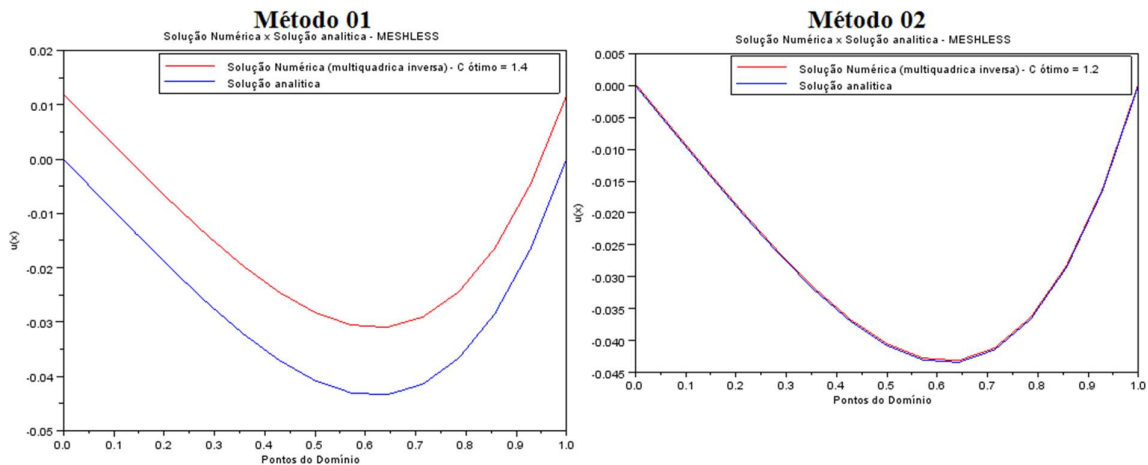
Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando os resultados da tabela, com um erro médio de 0.0001, a solução gerada pelo método de Fasshauer (2002) fica um pouco inferior à solução dada pelo método 02, cujo erro médio foi nulo.

#### 4.1.4.2 Simulação 2 – 15 nós ou pontos:

A figura 4.31 apresenta as curvas das soluções numéricas obtidas através dos métodos 01 e 02 e sua comparação com a curva gerada pela solução analítica para uma simulação com 15 pontos.

Figura 4.31- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.



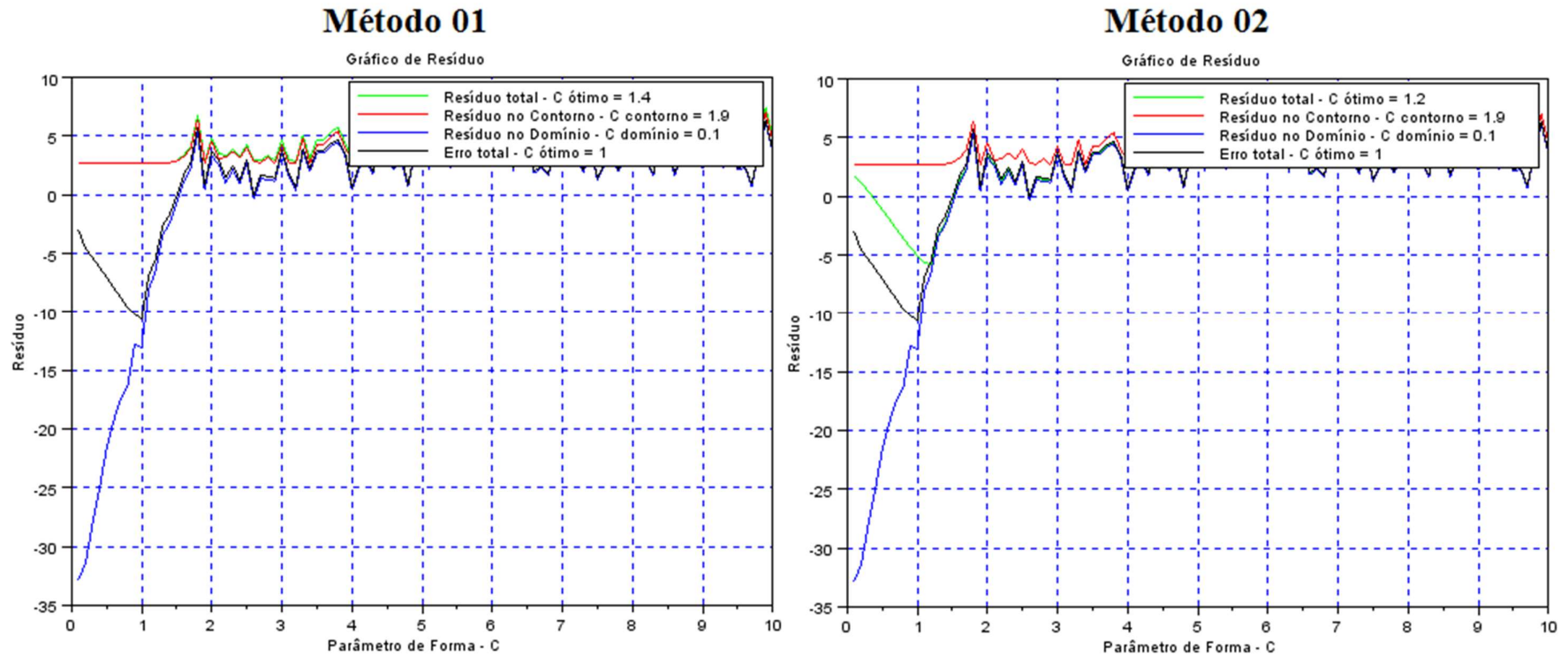
Fonte: Elaborado pela autora.

O método 02, novamente, gerou uma solução numérica melhor que a solução obtida pelo método 01, dada a convergência com a solução analítica. Pela figura 4.32, o  $c$  ideal é igual a 1, tal valor é próximo dos parâmetros de forma calculados pelo método 01 ( $c = 1.4$ ) e pelo método 02 ( $c = 1.2$ ), mas a melhor convergência está para o método 02.

Comparando os resultados para esta simulação, com os resultados obtidos para a RBF multiquádrica, em ambos os métodos as curvas de soluções convergem melhor com a utilização da RBF multiquádrica. Para melhor entendimento, basta analisar as curvas do método 02 na figura 4.4, em que praticamente não é possível visualizar a curva vermelha, como ocorre na figura 4.31.

Além disso, o  $c$  ótimo calculado pelo método 02 na simulação multiquádrica possui o mesmo valor calculado para o parâmetro de forma ideal. Tal fato, também não ocorreu na atual simulação, conforme mostra a figura 4.32.

Figura 4.32- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.



A tabela 4.21 mostra os resultados numéricos obtidos para a utilização dos métodos 01 e 02.

Tabela 4.21 – Resultados Simulação 2 - Caso I – 1D: MQ Inversa.

<b>Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0119	0.0003	0.0119	0.0003
-0.0068	0.0052	-0.0066	0.0120	0.0002
-0.0136	-0.0014	-0.0133	0.0122	0.0003
-0.0202	-0.0079	-0.0199	0.0123	0.0003
-0.0264	-0.0140	-0.0262	0.0124	0.0002
-0.0321	-0.0197	-0.0319	0.0124	0.0002
-0.0370	-0.0245	-0.0367	0.0125	0.0003
-0.0408	-0.0282	-0.0405	0.0126	0.0003
-0.0430	-0.0305	-0.0427	0.0125	0.0003
-0.0434	-0.0310	-0.0431	0.0124	0.0003
-0.0414	-0.0291	-0.0412	0.0123	0.0002
-0.0366	-0.0244	-0.0364	0.0122	0.0002
-0.0285	-0.0165	-0.0283	0.0120	0.0002
-0.0165	-0.0046	-0.0162	0.0119	0.0003
0.0000	0.0117	0.0003	0.0117	0.0003
<b>Erro médio</b>			0.0122	0.0003

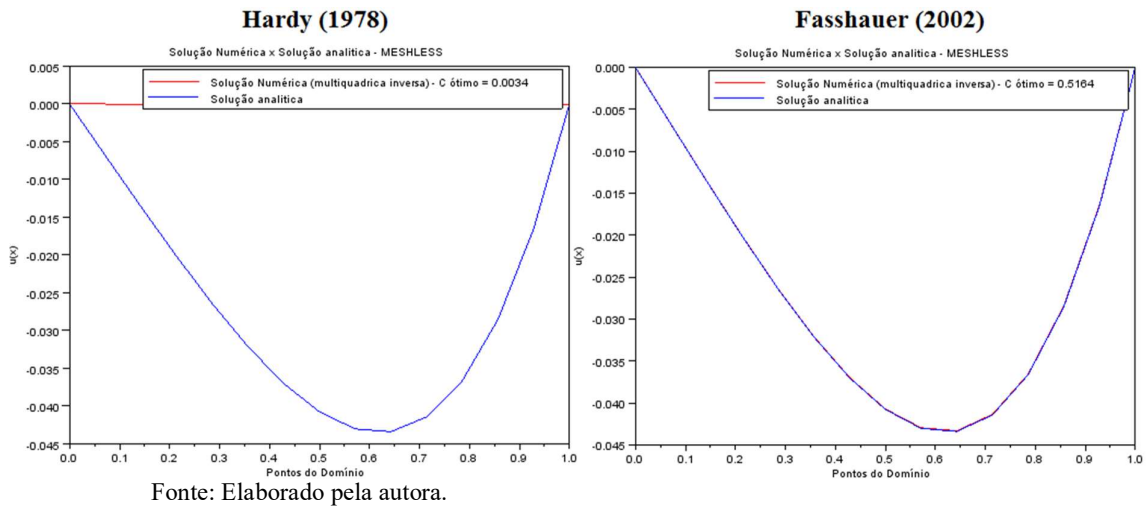
Fonte: Elaborado pela autora.

Pelos os resultados da tabela acima, é possível confirmar a afirmação realizada anteriormente. A aplicação do método 02 nesta simulação causou um erro médio de 0.0003, o qual é um resultado excelente. Entretanto, comparado a um erro médio nulo, em que todos os pontos também não resultaram em erro algum, como na solução do método 02 com o uso a RBF multiquádrica, é possível afirmar que a RBF multiquádrica inversa, nesta simulação, obteve um desempenho um pouco inferior.

A seguir são apresentados os resultados para as soluções com o uso do parâmetro de forma de Hardy (1978) com valor igual a 0.0034 e com o  $c$  de Fasshauer (2002) de valor igual a 0.5164.

A figura 4.33 apresenta os resultados das soluções numéricas e suas comparações em relação à solução analítica.

Figura 4.33- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 nós. Caso I – 1D: MQ Inversa.



Pela figura 4.33 e tabela 4.22, a metodologia de Fasshauer (2002) apresenta uma solução numérica melhor que a de Hardy (1978). Além disso, com um erro médio nulo, a solução de Fasshauer (2002) é um pouco melhor que a solução proposta pelo método 02.

Tabela 4.22 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.

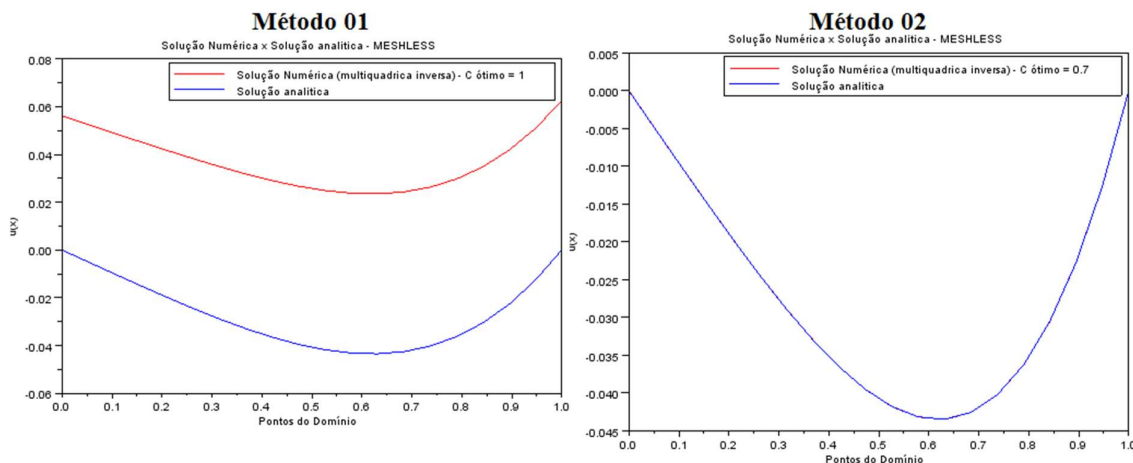
<b>Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0068	0.0000	-0.0068	0.0068	0.0000
-0.0136	0.0000	-0.0136	0.0136	0.0000
-0.0202	0.0000	-0.0202	0.0202	0.0000
-0.0264	0.0000	-0.0264	0.0264	0.0000
-0.0321	0.0000	-0.0321	0.0321	0.0000
-0.0370	0.0000	-0.0370	0.0370	0.0000
-0.0408	0.0000	-0.0407	0.0408	0.0001
-0.0430	0.0000	-0.0430	0.0430	0.0000
-0.0434	0.0000	-0.0433	0.0434	0.0001
-0.0414	0.0000	-0.0413	0.0414	0.0001
-0.0366	0.0000	-0.0366	0.0366	0.0000
-0.0285	0.0000	-0.0284	0.0285	0.0001
-0.0165	0.0000	-0.0164	0.0165	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0258	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 4.1.4.3 Simulação 3 – 20 nós ou pontos:

Nesta última simulação para o primeiro caso aplicando a RBF inversa, os resultados das curvas das soluções numéricas calculadas usando os métodos 01 e 02 e suas, respectivas, comparações com a solução analítica podem ser vistas na figura 4.34:

Figura 4.34- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.



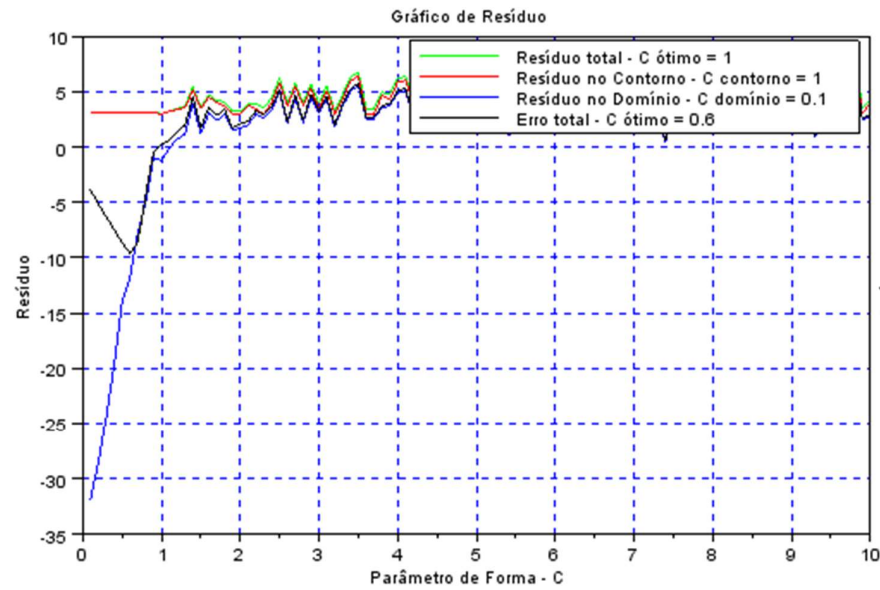
Fonte: Elaborado pela autora.

Pela análise da figura acima, o método 02 proporcionou uma solução melhor que o método 01, já que a solução gerada pelo último sequer está próxima da solução analítica. Observando os gráficos do resíduo na figura 4.35, o  $c$  ideal tem valor igual a 0.6, muito próximo do 0.7 obtido no método 02, e isso é facilmente identificado ao acompanhar o ponto de menor resíduo na linha verde. No entanto, ao se comparar com as soluções geradas com a RBF mutiquadrada, o método 01 apresentou naquela simulação resultados bem melhores, com sua solução quase se sobrepondo a solução analítica. Isso não ocorreu neste caso.

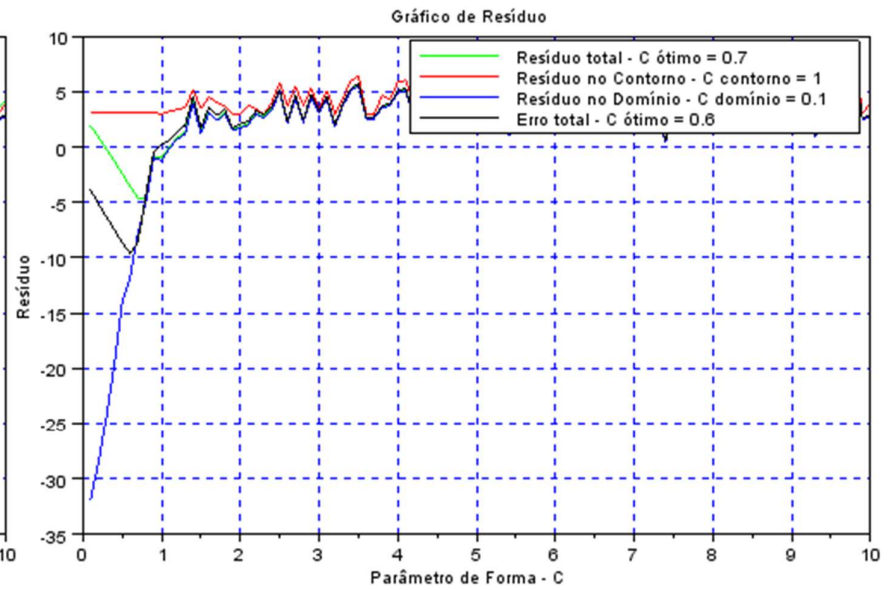
Para uma melhor análise, deve-se verificar os resultados desta simulação apresentados na tabela 4.23. O erro médio para o método 01 foi igual 0.0637, enquanto que na RBF multiquádrada o mesmo erro foi 0.0004. Já no método 02, tanto na RBF multiquádrada quando na multiquádrada inversa, o erro médio foi nulo, mas como na simulação multiquádrada apenas um valor divergiu da solução analítica, então é possível identificar que a RBF multiquádrada foi um pouco melhor.

Figura 4.35- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.

### Método 01



### Método 02



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.23 – Resultados Simulação 3 – Caso I – 1D: MQ Inversa.

<b>Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0561	0.0000	0.0561	0.0000
-0.0050	0.0525	-0.0050	0.0575	0.0000
-0.0101	0.0489	-0.0100	0.0590	0.0001
-0.0150	0.0453	-0.0150	0.0603	0.0000
-0.0199	0.0417	-0.0198	0.0616	0.0001
-0.0245	0.0382	-0.0245	0.0627	0.0000
-0.0289	0.0349	-0.0289	0.0638	0.0000
-0.0330	0.0318	-0.0330	0.0648	0.0000
-0.0365	0.0290	-0.0365	0.0655	0.0000
-0.0395	0.0267	-0.0395	0.0662	0.0000
-0.0418	0.0249	-0.0418	0.0667	0.0000
-0.0432	0.0238	-0.0431	0.0670	0.0001
-0.0435	0.0235	-0.0435	0.0670	0.0000
-0.0426	0.0243	-0.0426	0.0669	0.0000
-0.0402	0.0263	-0.0402	0.0665	0.0000
-0.0363	0.0297	-0.0363	0.0660	0.0000
-0.0305	0.0348	-0.0305	0.0653	0.0000
-0.0227	0.0418	-0.0227	0.0645	0.0000
-0.0126	0.0509	-0.0126	0.0635	0.0000
0.0000	0.0625	0.0000	0.0625	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0637	0.0000

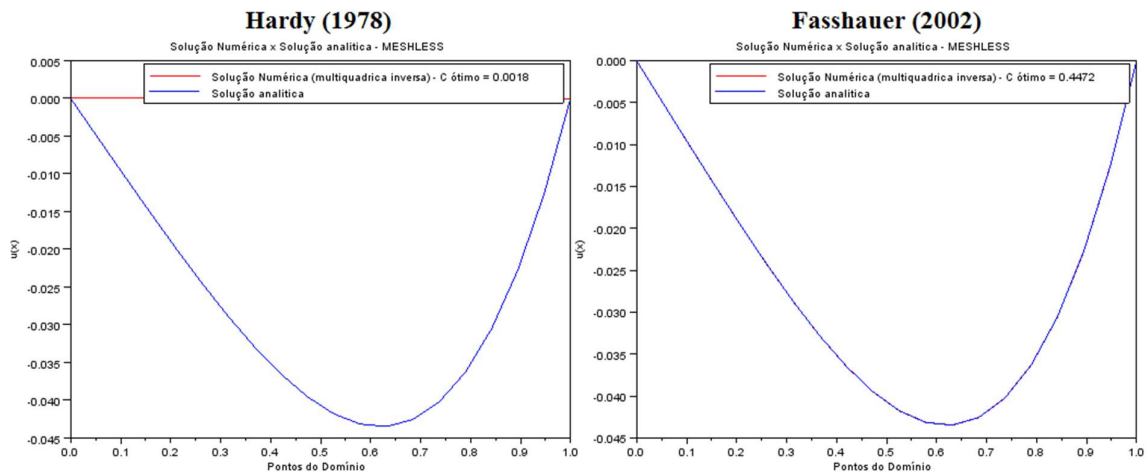
Fonte: Elaborado pela autora.

A figura 4.36 e a tabela 4.24 mostram os resultados para o  $c$  igual a 0.0018 de Hardy (1978) e para o  $c$  de 0.4472 de Fasshauer (2002).

Observando a figura e analisando os dados da tabela, a solução de Fasshauer (2002) é melhor que a de Hardy (1978), pois o erro médio da proposta de Fasshauer (2002) é nulo, além de sua solução convergir com a curva da solução analítica.

Comparando com a solução do método 02, que teve três pontos que divergiram da solução analítica em 0.0001, com a solução de Fasshauer (2002), em que quatro pontos apresentaram a mesma divergência, é possível dizer que a solução proposta pelo método 02 é um pouco melhor que a solução de Fasshauer (2002).

Figura 4.36- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.24 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso I – 1D: MQ Inversa.

<b>Caso I - 1D: Multiquádrica Inversa - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0050	0.0000	-0.0050	0.0050	0.0000
-0.0101	0.0000	-0.0100	0.0101	0.0001
-0.0150	0.0000	-0.0150	0.0150	0.0000
-0.0199	0.0000	-0.0198	0.0199	0.0001
-0.0245	0.0000	-0.0245	0.0245	0.0000
-0.0289	0.0000	-0.0289	0.0289	0.0000
-0.0330	0.0000	-0.0330	0.0330	0.0000
-0.0365	0.0000	-0.0365	0.0365	0.0000
-0.0395	0.0000	-0.0395	0.0395	0.0000
-0.0418	0.0000	-0.0418	0.0418	0.0000
-0.0432	0.0000	-0.0431	0.0432	0.0001
-0.0435	0.0000	-0.0435	0.0435	0.0000
-0.0426	0.0000	-0.0425	0.0426	0.0001
-0.0402	0.0000	-0.0402	0.0402	0.0000
-0.0363	0.0000	-0.0363	0.0363	0.0000
-0.0305	0.0000	-0.0305	0.0305	0.0000
-0.0227	0.0000	-0.0227	0.0227	0.0000
-0.0126	0.0000	-0.0126	0.0126	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			<b>0.0263</b>	<b>0.0000</b>

Fonte: Elaborado pela autora.

O quadro 4.4 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 10, 15 e 20 pontos realizadas para o primeiro caso unidimensional com a aplicação da multiquádrica inversa, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.4 – Resumos dos Resultados Caso I – 1D: MQ Inversa.

<b>CASO I - MULTIQUÁDRICA INVERSA</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>10 Pontos</b>	0.0125	0.0000	0.0001	0.0214
<b>15 Pontos</b>	0.0122	0.0003	0.0000	0.0258
<b>20 Pontos</b>	0.0637	<b>0.0000</b>	0.0000	0.0263

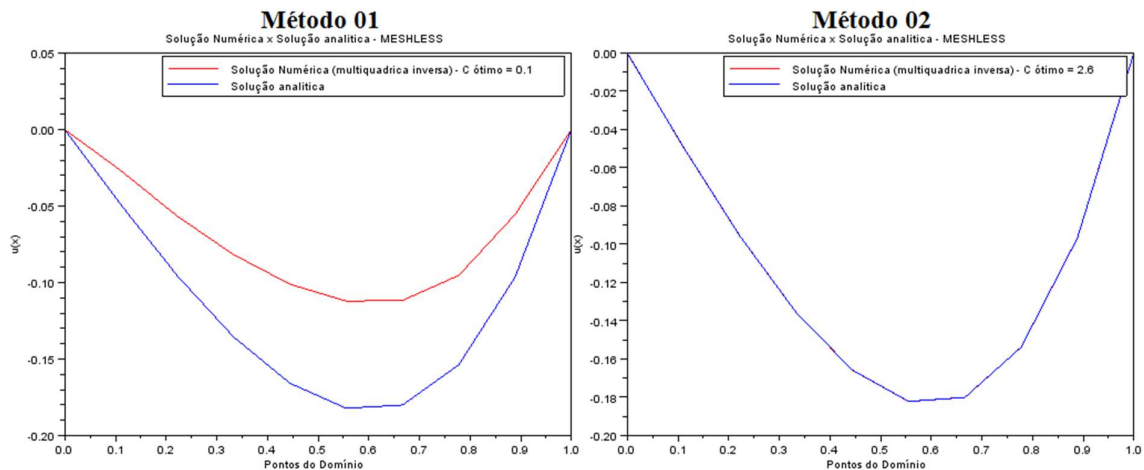
Fonte: Elaborado pela autora.

#### 4.1.5 Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa

##### 4.1.5.1 Simulação 1 – 10 nós ou pontos:

A seguir são apresentadas as curvas das soluções numéricas obtidas com o auxílio dos métodos 01 e 02, bem como suas comparações com a solução analítica do problema.

Figura 4.37- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

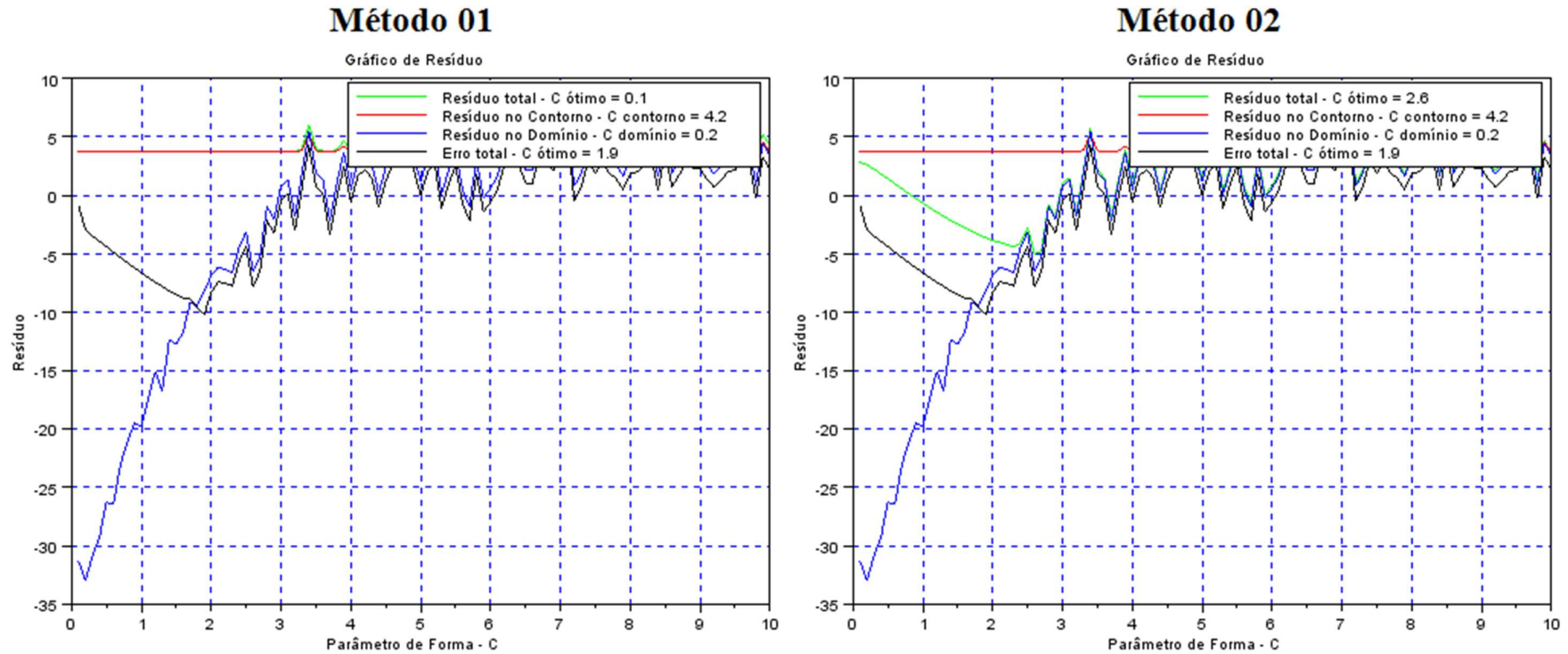
Novamente, o método 02 proporcionou uma solução numérica melhor que o método 01, basta observar as curvas de soluções mostradas na figura 4.37. O parâmetro de forma ótimo de 0.1 do método 01 está distante do valor ideal de 1.9 como mostra os gráficos dos resíduos na figura 4.38.

Comparando a figura 4.37 com a figura 4.10, que mostra as curvas de soluções utilizando os métodos na RBF multiquádrica, é possível afirmar que a solução proposta pelo método 01 nesta simulação ficou ruim, dada a distância entre a solução numérica e a analítica.

Já em relação ao método 02, só será possível obter uma conclusão melhor após a observação dos resultados em cada ponto da simulação, a fim de comparar os erros encontrados em cada um deles.



Figura 4.38- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

A tabela 4.25 mostra os resultados numéricos para cada solução gerada por ambos dos métodos aplicados.

Tabela 4.25 – Resultados Simulação 1 – Caso II - 1D: MQ Inversa.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000	0.0001
-0.0493	-0.0270	-0.0494	0.0223	0.0001
-0.0956	-0.0566	-0.0957	0.0390	0.0001
-0.1356	-0.0818	-0.1356	0.0538	0.0000
-0.1658	-0.1010	-0.1658	0.0648	0.0000
-0.1822	-0.1121	-0.1822	0.0701	0.0000
-0.1800	-0.1117	-0.1800	0.0683	0.0000
-0.1537	-0.0953	-0.1538	0.0584	0.0001
-0.0965	-0.0556	-0.0965	0.0409	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0418	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

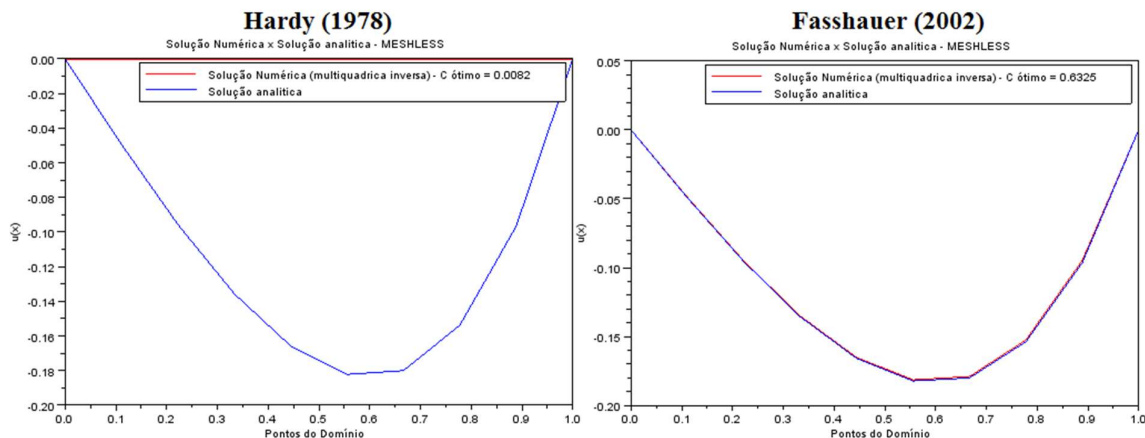
Pelos dados apresentados na tabela acima, o método 02 aplicado a RBF multiquádrica inversa obteve uma solução melhor que a RBF multiquádrica, visto que o erro médio nesta simulação foi nulo e na simulação multiquádrica foi de 0.0002.

Pela tabela também é possível confirmar a afirmação feita anteriormente, que o método 01 nesta simulação resultou numa solução ruim, pois na simulação com RBF multiquádrica o erro médio calculado para o método 01 foi igual a 0.0066, e na simulação atual com o uso da RBF multiquádrica inversa o erro médio para esse método foi igual a 0.0418.

Dessa maneira, o que ocorreu nesta simulação foi diferente do que aconteceu na simulação com 10 pontos para o caso I, em que as soluções obtidas por ambos os métodos melhoraram com o uso da RBF multiquádrica inversa. Neste caso, uma solução melhorou e a outra piorou.

A seguir, são mostrados os resultados das soluções geradas com a utilização do parâmetro de forma de Hardy (1978) igual a 0.0082 e de Fasshauer (2002) igual a 0.6325.

Figura 4.39- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pela figura 4.39, é possível ver que a solução de Fasshauer (2002) é a melhor. Analisando o erro médio dado na tabela 4.26, o erro médio da solução gerada pelo parâmetro de forma de Fasshauer (2002) é igual a 0.0007. Dessa maneira, com um erro médio nulo, a solução obtida com a utilização do método 02 é melhor que a solução encontrada com o  $c$  de Fasshauer (2002).

Tabela 4.26 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - 10 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.

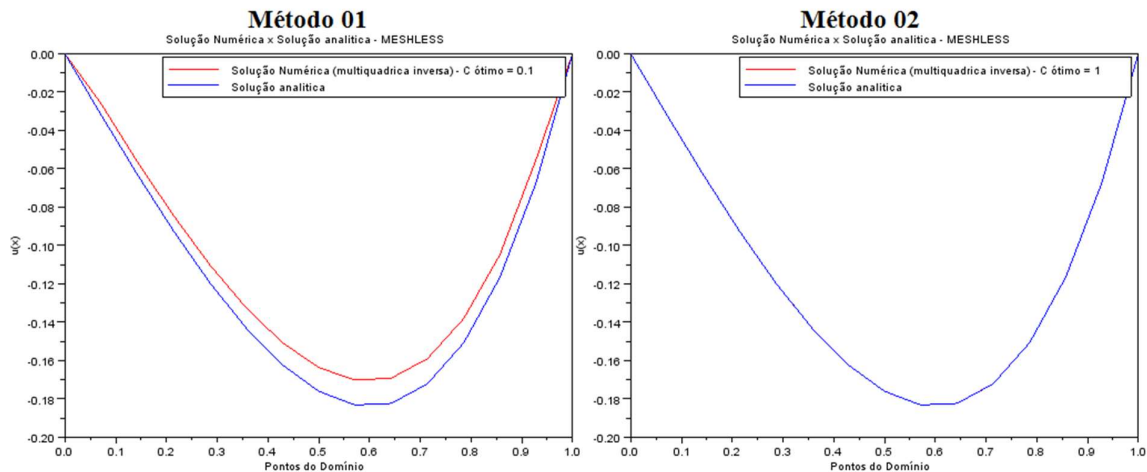
<b>Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0493	0.0000	-0.0489	0.0493	0.0004
-0.0956	-0.0001	-0.0951	0.0955	0.0005
-0.1356	-0.0001	-0.1350	0.1355	0.0006
-0.1658	-0.0002	-0.1651	0.1656	0.0007
-0.1822	-0.0002	-0.1813	0.1820	0.0009
-0.1800	-0.0002	-0.1790	0.1798	0.0010
-0.1537	-0.0003	-0.1525	0.1534	0.0012
-0.0965	-0.0003	-0.0948	0.0962	0.0017
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.1057	0.0007

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 4.1.5.2 Simulação 2 – 15 nós ou pontos:

Os resultados referentes às soluções numéricas calculadas com a utilização dos métodos 01 e 02 são apresentados na figura a seguir:

Figura 4.40- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.



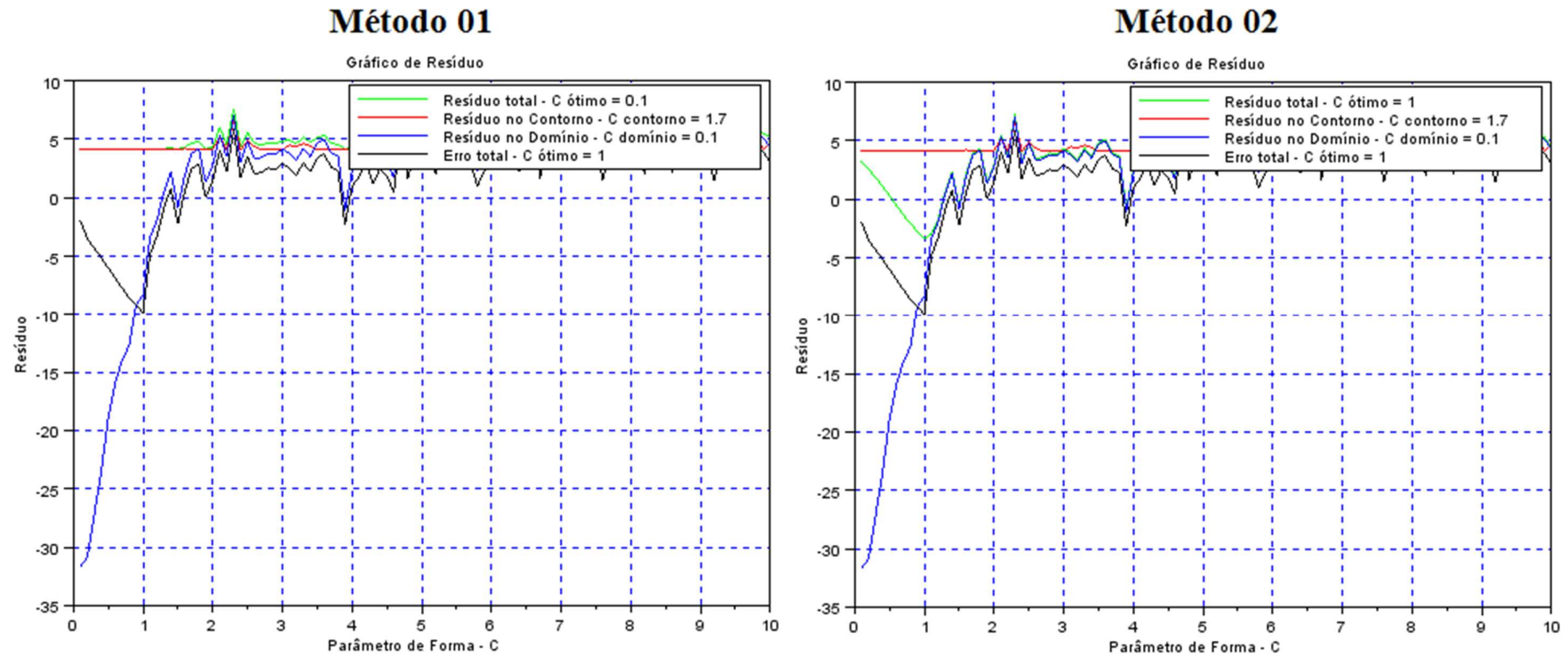
Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando as curvas de soluções da figura 4.40, a solução do método 01 melhorou em relação a simulação com 10 pontos. Entretanto, a solução obtida com o uso do método 02 foi melhor, pois nem é possível identificar duas curvas distintas, devido a incrível convergência com a solução analítica.

Ao comparar as soluções desta simulação com a simulação utilizando a RBF multiquádrica, é possível fazer algumas afirmações. Para o método 01, a solução com a RBF multiquádrica é melhor. Já para o método 02, a solução com o uso da RBF multiquádrica inversa é provavelmente melhor, uma vez que o parâmetro de forma ótimo calculado pelo método 02 é igual ao parâmetro de forma ideal conforme mostra o gráfico dos resíduos na figura 4.41.

Observando as linhas preta e verde no gráfico dos resíduos do método 02, verifica-se que o ponto de mínimo resíduo para cada linha ocorre, quando o parâmetro de forma é igual a 1.

Figura 4.41- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

A tabela 4.27 apresenta os resultados numéricos obtidos para cada um dos métodos aplicados.

Tabela 4.27 – Resultados Simulação 2 – Caso II - 1D: MQ Inversa.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0319	-0.0261	-0.0319	0.0058	0.0000
-0.0630	-0.0564	-0.0630	0.0066	0.0000
-0.0925	-0.0844	-0.0925	0.0081	0.0000
-0.1194	-0.1101	-0.1194	0.0093	0.0000
-0.1430	-0.1325	-0.1430	0.0105	0.0000
-0.1622	-0.1506	-0.1622	0.0116	0.0000
-0.1760	-0.1636	-0.1760	0.0124	0.0000
-0.1831	-0.1702	-0.1831	0.0129	0.0000
-0.1823	-0.1691	-0.1823	0.0132	0.0000
-0.1721	-0.1590	-0.1721	0.0131	0.0000
-0.1508	-0.1381	-0.1508	0.0127	0.0000
-0.1165	-0.1047	-0.1165	0.0118	0.0000
-0.0670	-0.0549	-0.0670	0.0121	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0093	0.0000

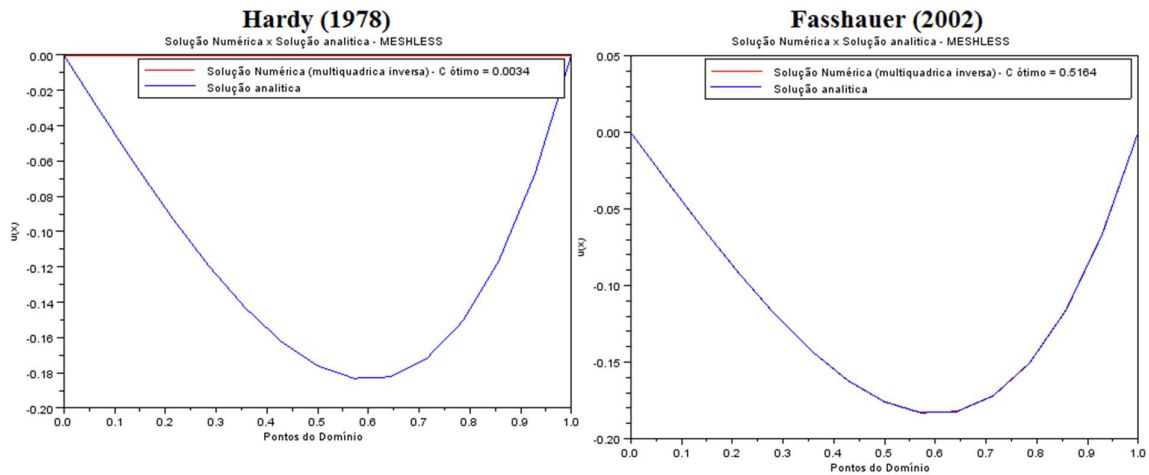
Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme os resultados da tabela, é possível confirmar a afirmação feita anteriormente, na qual o método 02 com aplicação da RBF multiquádrica inversa gerou um resultado um pouco melhor que a RBF multiquádrica, pois o erro médio da primeira RBF foi nulo, enquanto o erro médio da segunda RBF foi igual a 0.0001.

Já considerando o método 01, a utilização da RBF multiquádrica acumulou um erro médio igual a 0.0021, e com o uso da RBF multiquádrica inversa o erro médio foi igual a 0.0093. Isso, confirma que a solução gerada pelo método 01 com a aplicação da RBF multiquádrica é melhor para uma simulação com 15 pontos.

Em seguida, são apresentados os resultados para o parâmetro de forma de Hardy (1978) com valor 0.0034 e para o  $c$  de Fasshauer (2002) de valor igual a 0.5164. A figura 4.42 mostra as soluções numéricas e sua comparação com a solução analítica do problema. Pela figura, é possível perceber que a solução de Fasshauer (2002) é a melhor.

Figura 4.42- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando a tabela 4.28, o erro médio da solução gerada pelo  $c$  de Fasshauer (2002) é 0.0002. Dessa maneira, com um erro médio nulo, a solução obtida com a utilização do método 02 é um pouco melhor que a solução encontrada com o  $c$  de Fasshauer (2002).

Tabela 4.28 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) - para 15 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.

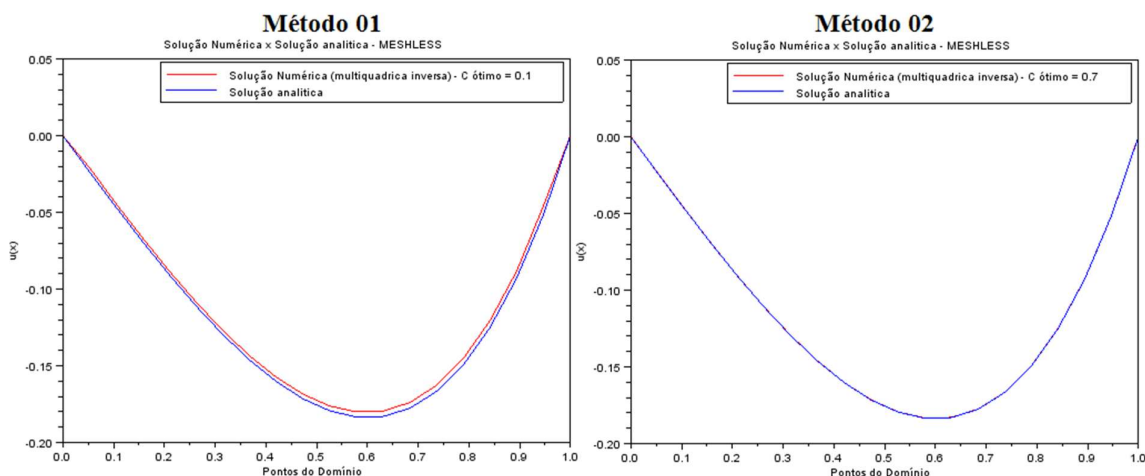
<b>Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0319	0.0000	-0.0318	0.0319	0.0001
-0.0630	0.0000	-0.0629	0.0630	0.0001
-0.0925	0.0000	-0.0924	0.0925	0.0001
-0.1194	0.0000	-0.1194	0.1194	0.0000
-0.1430	0.0000	-0.1429	0.1430	0.0001
-0.1622	0.0000	-0.1621	0.1622	0.0001
-0.1760	0.0000	-0.1758	0.1760	0.0002
-0.1831	0.0000	-0.1829	0.1831	0.0002
-0.1823	0.0000	-0.1821	0.1823	0.0002
-0.1721	0.0000	-0.1718	0.1721	0.0003
-0.1508	0.0000	-0.1505	0.1508	0.0003
-0.1165	0.0000	-0.1162	0.1165	0.0003
-0.0670	0.0000	-0.0667	0.0670	0.0003
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			<b>0.1107</b>	<b>0.0002</b>

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 4.1.5.3 Simulação 3 – 20 nós ou pontos:

Os resultados desta última simulação estão presentes nas figuras 4.43 e 4.44. Na figura 4.43 estão as curvas das soluções numéricas e da solução analítica.

Figura 4.43- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na imagem acima é possível ver que a solução obtida pelo método 01 melhorou, mas não está melhor que a solução proposta pelo método 02. Além disso, comparada a solução proposta pelo método 01 com o uso da RBF multiquádrica mostrada na figura 4.16, a solução aqui mostrada não está melhor.

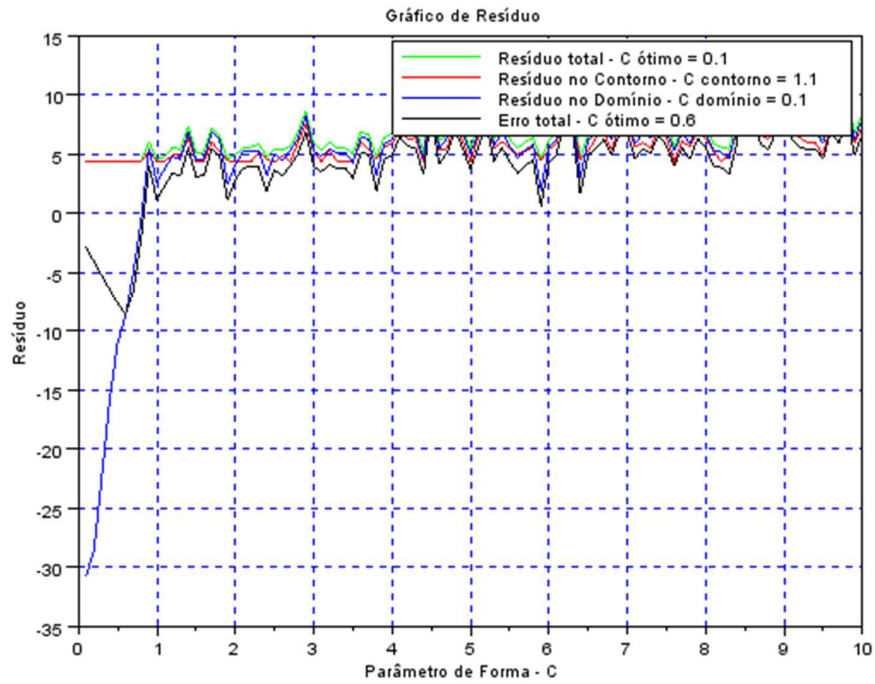
O gráfico dos resíduos mostrado na figura 4.44 indica um valor de  $c$  ideal igual a 0.6, conforme é possível verificar observando a linha preta em ambos os métodos.

A tabela 4.29 apresenta os resultados numéricos propostos nos métodos 01 e 02. Com um erro médio igual a 0.0001, o método 02 possui uma solução numérica melhor que a do método 01, cujo erro médio foi igual a 0.0030. Entretanto, comparando esses resultados com os valores obtidos pela aplicação da RBF multiquádrica, na qual para o método 01 gerou um erro médio de 0.0010 e para o método 02 um erro médio nulo, é possível afirmar que a utilização da RBF multiquádrica possibilitou resultados um pouco melhores, quando comparada a RBF multiquádrica inversa para esta simulação.

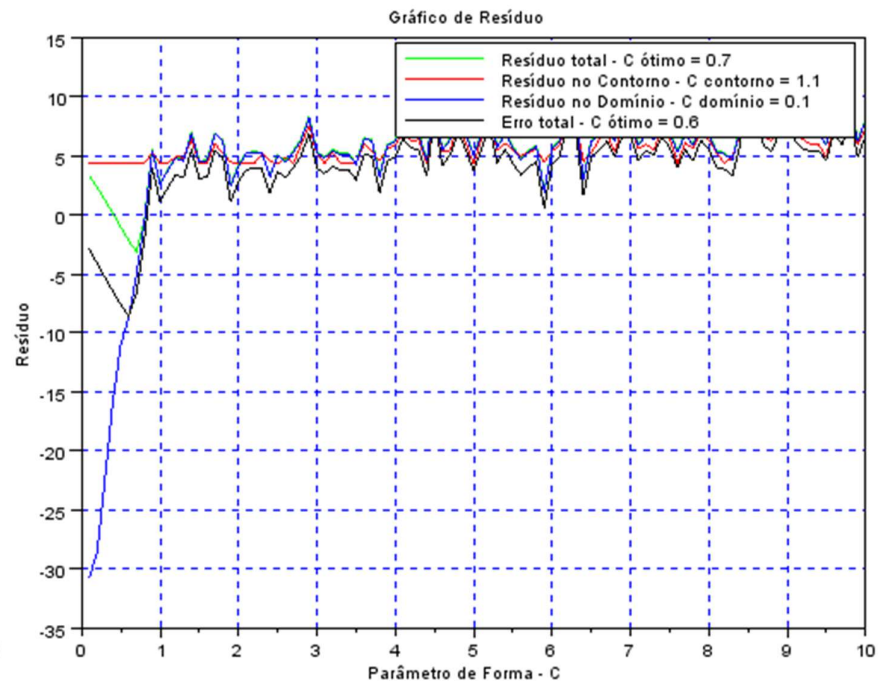


Figura 4.44- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.

### Método 01



### Método 02



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.29 – Resultados Simulação 3 – Caso II – 1D: MQ Inversa.

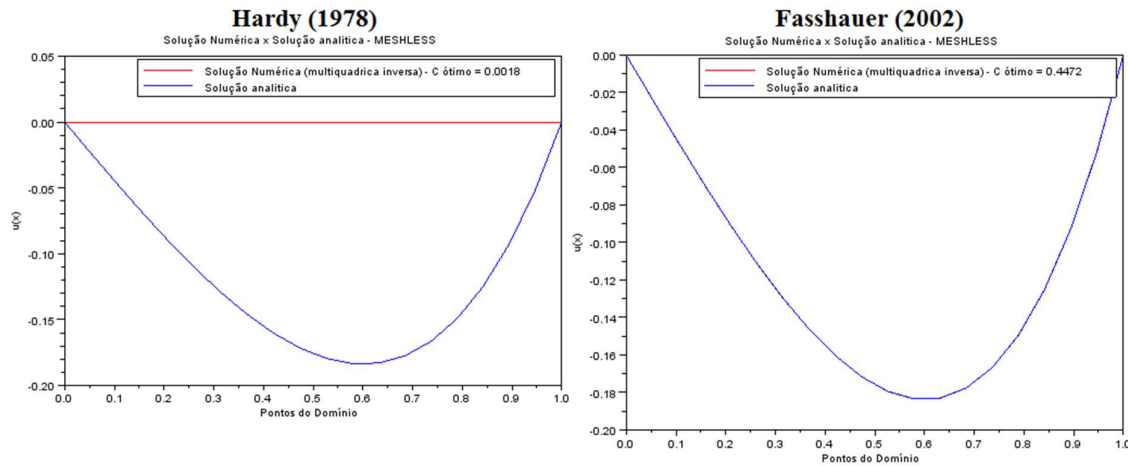
<b>Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001
-0.0236	-0.0210	-0.0235	0.0026	0.0001
-0.0468	-0.0445	-0.0467	0.0023	0.0001
-0.0694	-0.0670	-0.0693	0.0024	0.0001
-0.0910	-0.0885	-0.0909	0.0025	0.0001
-0.1112	-0.1087	-0.1112	0.0025	0.0000
-0.1298	-0.1272	-0.1298	0.0026	0.0000
-0.1464	-0.1436	-0.1463	0.0028	0.0001
-0.1604	-0.1576	-0.1604	0.0028	0.0000
-0.1716	-0.1686	-0.1715	0.0030	0.0001
-0.1794	-0.1763	-0.1794	0.0031	0.0000
-0.1834	-0.1801	-0.1833	0.0033	0.0001
-0.1830	-0.1795	-0.1829	0.0035	0.0001
-0.1776	-0.1739	-0.1776	0.0037	0.0000
-0.1666	-0.1627	-0.1666	0.0039	0.0000
-0.1493	-0.1451	-0.1492	0.0042	0.0001
-0.1249	-0.1204	-0.1248	0.0045	0.0001
-0.0925	-0.0880	-0.0924	0.0045	0.0001
-0.0512	-0.0455	-0.0512	0.0057	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001
<b>Erro médio</b>			0.0030	0.0001

Fonte: Elaborado pela autora.

A figura 4.45 e a tabela 4.30 mostram os resultados obtidos com o  $c$  de Hardy (1978), cujo valor para 20 nós é 0.0018 e para o  $c$  de Fasshauer (2002), cujo valor é 0.4472.

Observando a figura fica evidente que a solução gerada com o  $c$  de Fasshauer (2002) é melhor que a solução com o  $c$  de Hardy (1978). Além disso, o erro médio nulo da solução de Fasshauer (2002) faz com que essa solução seja um pouco melhor que a solução proposta pelo método 02.

Figura 4.45- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II - 1D:  
MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.30 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso II - 1D: MQ Inversa.

<b>Caso II - 1D: Multiquádrica Inversa - 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0236	0.0000	-0.0235	0.0236	0.0001
-0.0468	0.0000	-0.0468	0.0468	0.0000
-0.0694	0.0000	-0.0693	0.0694	0.0001
-0.0910	0.0000	-0.0909	0.0910	0.0001
-0.1112	0.0000	-0.1112	0.1112	0.0000
-0.1298	0.0000	-0.1298	0.1298	0.0000
-0.1464	0.0000	-0.1463	0.1464	0.0001
-0.1604	0.0000	-0.1604	0.1604	0.0000
-0.1716	0.0000	-0.1716	0.1716	0.0000
-0.1794	0.0000	-0.1794	0.1794	0.0000
-0.1834	0.0000	-0.1834	0.1834	0.0000
-0.1830	0.0000	-0.1830	0.1830	0.0000
-0.1776	0.0000	-0.1776	0.1776	0.0000
-0.1666	0.0000	-0.1666	0.1666	0.0000
-0.1493	0.0000	-0.1492	0.1493	0.0001
-0.1249	0.0000	-0.1248	0.1249	0.0001
-0.0925	0.0000	-0.0924	0.0925	0.0001
-0.0512	0.0000	-0.0511	0.0512	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.1129	0.0000

Fonte: Elaborado pela autora.

O quadro 4.5 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 10, 15 e 20 pontos realizadas para o segundo caso unidimensional com a aplicação da multiquádrica inversa, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.5 – Resumos dos Resultados Caso II – 1D: MQ Inversa.

<b>CASO II - MULTIQUÁDRICA INVERSA</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>10 Pontos</b>	0.0418	0.0000	0.0007	0.1057
<b>15 Pontos</b>	0.0093	0.0000	0.0002	0.1107
<b>20 Pontos</b>	0.0030	0.0001	0.0000	0.1129

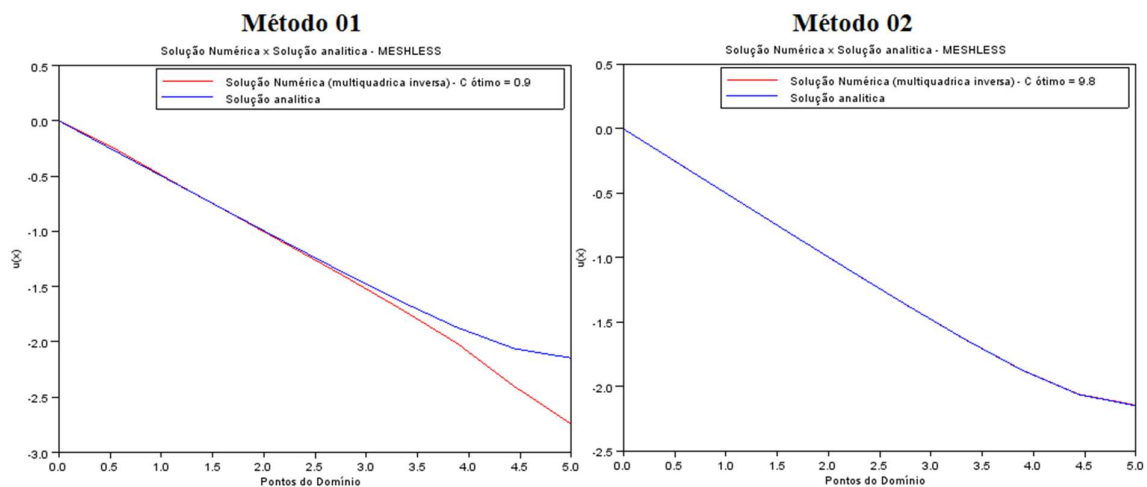
Fonte: Elaborado pela autora.

### 4.1.6 Caso III - 1D: Multiquádrica Inversa

#### 4.1.6.1 Simulação 1 – 10 nós ou pontos:

A figura a seguir apresenta as curvas das soluções numéricas obtidas com o auxílio dos métodos 01 e 02, bem como a comparação de cada uma delas com a solução analítica do problema.

Figura 4.46- Soluções numérica e exata para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.



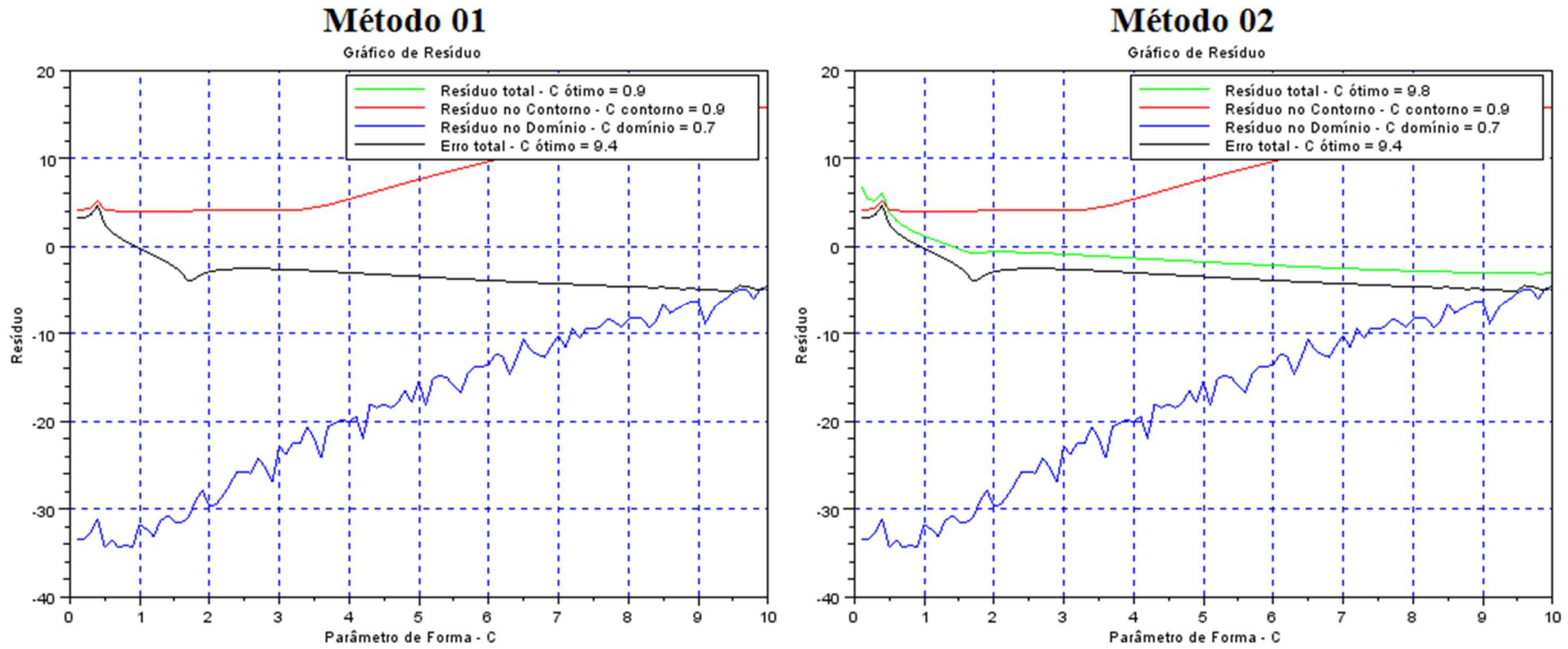
Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados da figura 4.46 apontam que a solução gerada com o auxílio do método 02 é melhor que a solução proposta pelo método 01, tendo em vista a convergência entre a solução numérica e a solução analítica.

A solução obtida no método 01 tem um bom início, mas na região próxima à condição de contorno de Neumann, a solução numérica sofre uma distorção. Essa situação é semelhante ao que ocorreu na simulação com 10 pontos utilizando a RBF multiquádrica no método 01, entretanto, na solução atual a distorção é menor que a apresentada na figura 4.19.

A figura 4.47, que mostra os gráficos dos resíduos gerados pelos métodos 01 e 02, aponta um valor para o parâmetro de forma ideal de 9.4, ao observar as linhas pretas, é possível identificar uma ligeira queda no valor do resíduo na região onde o valor de  $c$  flutua entre 9 e 9.5, isso indica a região do melhor  $c$  a ser utilizado.

Figura 4.47- Gráficos dos resíduos gerados para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir, apresenta-se a tabela 4.31, a qual mostra os resultados numéricos obtidos pelos métodos 01 e 02, bem como o erro médio das soluções, quando comparadas à solução analítica do problema.

Tabela 4.31 – Resultados Simulação 1 – Caso III - 1D: MQ Inversa.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica Inversa - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0002
-0.2773	-0.2572	-0.2770	0.0201	0.0003
-0.5542	-0.5504	-0.5539	0.0038	0.0003
-0.8302	-0.8324	-0.8300	0.0022	0.0002
-1.1042	-1.1161	-1.1039	0.0119	0.0003
-1.3736	-1.4027	-1.3733	0.0291	0.0003
-1.6332	-1.7008	-1.6326	0.0676	0.0006
-1.8710	-2.0152	-1.8700	0.1442	0.0010
-2.0611	-2.4027	-2.0591	0.3416	0.0020
-2.1464	-2.7445	-2.1430	0.5981	0.0034
<b>Erro médio</b>			0.1219	0.0009

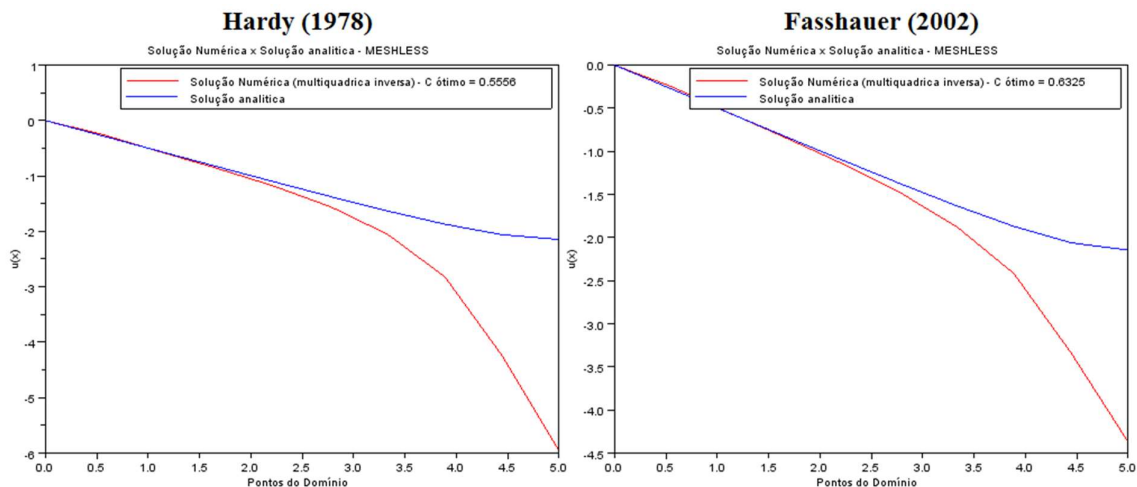
Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando os valores da tabela, é possível confirmar que com um erro médio igual a 0.1219 o método 01 com utilização da RBF multiquádrica inversa obteve uma solução melhor frente à solução obtida pelo método 01 com o uso da RBF multiquádrica, cujo erro médio foi igual a 0.2384.

Já em relação ao método 02, a solução gerada por esse método com o uso da RBF multiquádrica inversa resultou em um erro médio igual a 0.0009, ou seja, melhor que a solução obtida pelo método 01. No entanto, esse valor de erro é superior ao erro médio de 0.0007, o qual foi resultado da solução numérica calculada pelo método 02, mas com a utilização da RBF multiquádrica. Dessa forma, apesar de ser uma diferença discreta, o método 02 na simulação atual gerou uma solução um pouco inferior.

Os resultados mostrados a seguir representam as soluções geradas com o uso das metodologias de Hardy (1978) e de Fasshauer (2002) para o cálculo do parâmetro de forma. Para uma simulação com 10 pontos o  $c$  de Hardy (1978) é igual a 0.5556 e o  $c$  de Fasshauer (2002) é igual a 0.6325.

Figura 4.48- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pela figura, o método de Fasshauer (2002) é um pouco superior ao método de Hardy (1978), embora ambas as soluções não sejam boas, pois existe uma grande distorção entre a solução numérica e a solução analítica. Analisando a tabela, o erro médio para a solução de Fasshauer (2002) foi igual a 0.4475. Dessa forma, é possível afirmar que as soluções propostas pelos métodos 01 e 02 são melhores, com destaque para a solução do método 02, que possui o menor erro médio entre os três métodos.

Tabela 4.32 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 10 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica Inversa - 10 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.2773	-0.2534	-0.2499	0.0239	0.0274
-0.5542	-0.5612	-0.5515	0.0070	0.0027
-0.8302	-0.8612	-0.8433	0.0310	0.0131
-1.1042	-1.1818	-1.1456	0.0776	0.0414
-1.3736	-1.5570	-1.4769	0.1834	0.1033
-1.6332	-2.0553	-1.8761	0.4221	0.2429
-1.8710	-2.8193	-2.4176	0.9483	0.5466
-2.0611	-4.2367	-3.3358	2.1756	1.2747
-2.1464	-5.9545	-4.3695	3.8081	2.2231
<b>Erro médio</b>			<b>0.7677</b>	<b>0.4475</b>

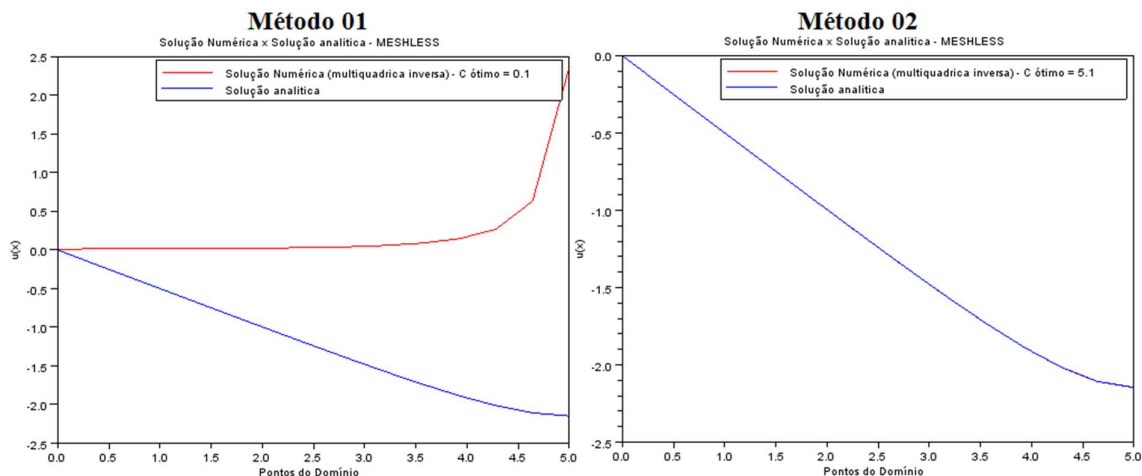
Fonte: Elaborado pela autora.



#### 4.1.6.2 Simulação 2 – 15 nós ou pontos:

A figura mostrada a seguir apresenta os gráficos das soluções numéricas obtidas com a aplicação dos métodos 01 e 02. Além disso, mostra a comparação desses gráficos com a solução analítica.

Figura 4.49- Soluções numérica e exata para 15 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.



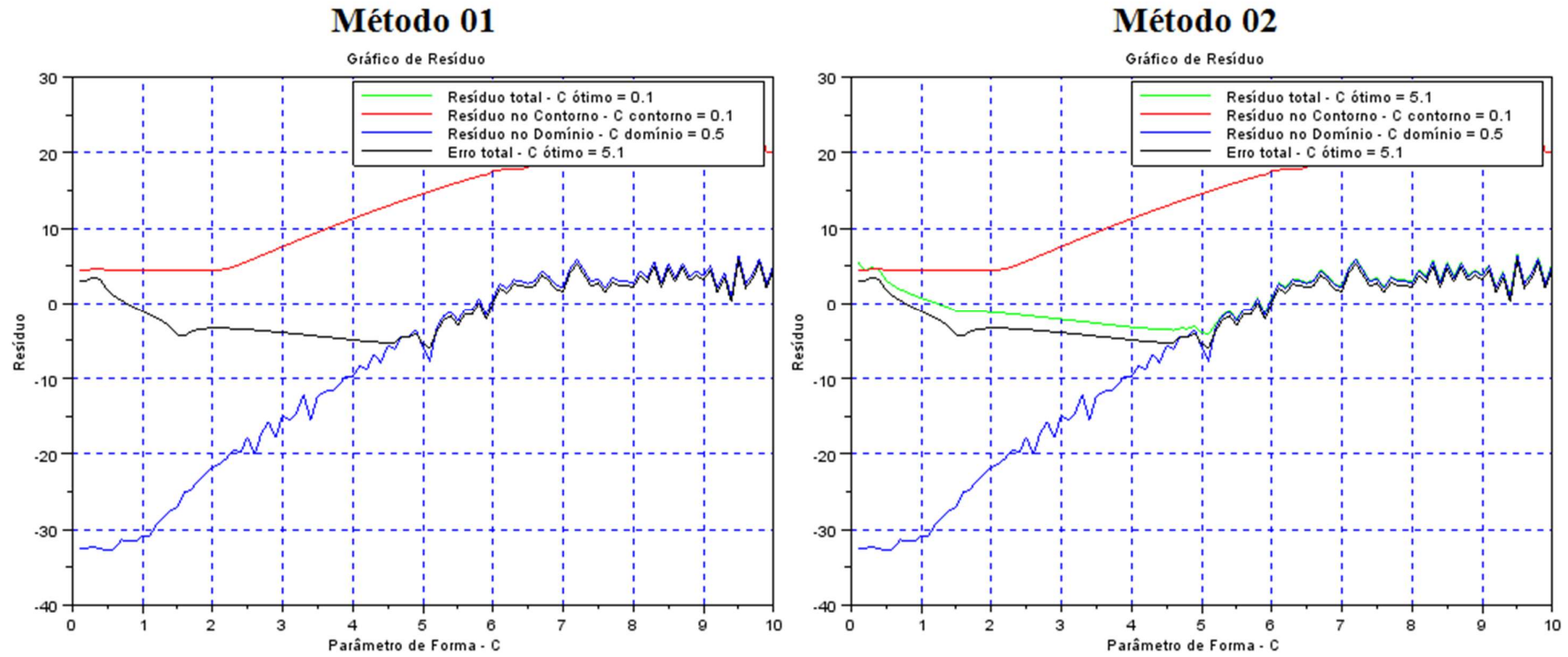
Fonte: Elaborado pela autora.

Observando a figura 4.49, nota-se que o método 01 não proporcionou uma boa solução numérica, sua curva de solução não converge em nenhum ponto com a solução analítica desde o ponto inicial. Lembrando desta simulação com a aplicação da RBF multiquádrica vista na figura 4.22, é possível notar que a solução numérica acompanha a solução analítica havendo uma distorção na região da condição de contorno de Neumann. Assim, na atual simulação o método 01 não geraria uma boa representação do problema.

Em relação à solução gerada pelo método 02, pode afirmar que é uma excelente solução e conseqüentemente melhor que a obtida pelo método 01. E é possivelmente uma solução melhor que a solução calculada pelo método 02 com o uso da RBF multiquádrica, pois, observando a figura 4.50, verifica-se que o  $c$  ótimo de 5.1 é igual ao  $c$  ideal. Isso mostra que o método 02 nesta simulação chegou na melhor solução possível.

A tabela 4.33, que mostra os resultados numéricos das soluções, apresenta mais informações.

Figura 4.50- Gráficos dos resíduos gerados para 15 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.33 – Resultados Simulação 2 – Caso III – 1D: MQ Inversa.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica Inverso - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1783	0.0215	-0.1783	0.1998	0.0000
-0.3564	0.0240	-0.3565	0.3804	0.0001
-0.5344	0.0238	-0.5344	0.5582	0.0000
-0.7121	0.0236	-0.7121	0.7357	0.0000
-0.8891	0.0244	-0.8891	0.9135	0.0000
-1.0652	0.0271	-1.0652	1.0923	0.0000
-1.2397	0.0327	-1.2397	1.2724	0.0000
-1.4115	0.0428	-1.4115	1.4543	0.0000
-1.5789	0.0603	-1.5788	1.6392	0.0001
-1.7388	0.0909	-1.7387	1.8297	0.0001
-1.8866	0.1478	-1.8864	2.0344	0.0002
-2.0141	0.2711	-2.0137	2.2852	0.0004
-2.1081	0.6349	-2.1074	2.7430	0.0007
-2.1464	2.3640	-2.1455	4.5104	0.0009
<b>Erro médio</b>			1.4432	0.0002

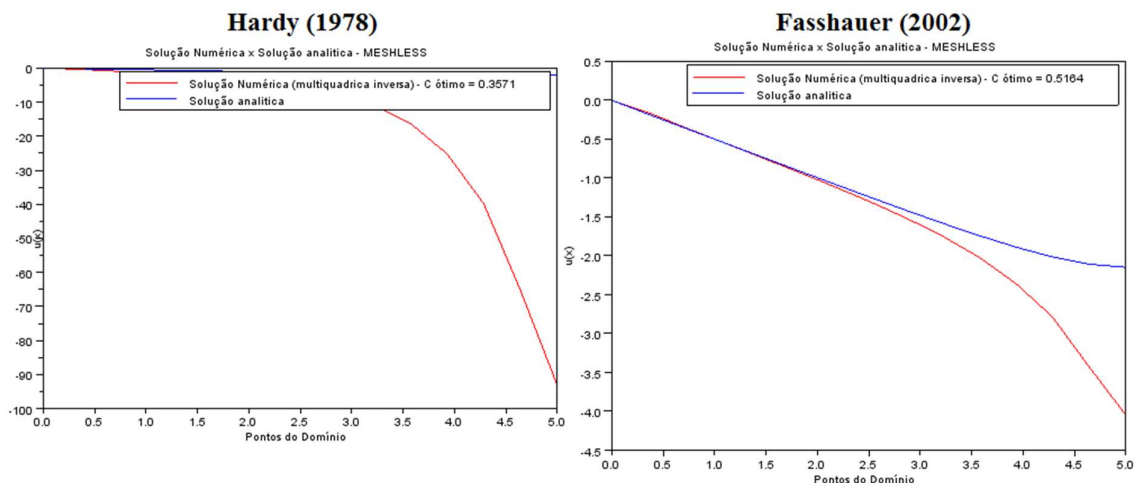
Fonte: Elaborado pela autora.

Pelos resultados da tabela, com erro médio de 1.4432 (método 01 RBF multiquádrica inversa) ante um erro médio de 0.1426 (método 01 RBF multiquádrica), nota-se que a solução do método 01 não foi adequada e piorou, quando se variou as RBFs.

Quanto aos resultados numéricos gerados pelo método 02, confirma-se que é um método melhor que o 01 e que o método 02 com aplicação da RBF multiquádrica. No entanto, é uma diferença pequena, uma vez que o erro médio para o método com a RBF multiquádrica foi igual a 0.0003. Comparando os resultados das tabelas, nota-se que os valores de erro nos pontos próximos à região do contorno de Neumann são menores com o uso da RBF multiquádrica, mas a grande maioria dos pontos possui erro nulo ou de 0.0001 com a utilização da RBF multiquádrica inversa.

A figura 4.51 mostrada a seguir apresenta os resultados para esta simulação utilizando os parâmetros de forma gerados com as metodologias de Hardy (1978), com  $c$  igual a 0.3571, e de Fasshauer (2002), com  $c$  igual a 0.5164. Pela figura, o método de Fasshauer (2002) é melhor que o método de Hardy (1978), mas a sua solução não é muito boa, pois existe uma grande distorção entre as soluções numérica e analítica.

Figura 4.51- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso III - 1D:  
MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pela tabela, o erro médio para a solução de Fasshauer (2002) foi 0.3423. Dessa forma, é possível afirmar que a solução proposta pelo método 02 é melhor, já que ela possui o menor erro médio.

Tabela 4.34 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 15 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.

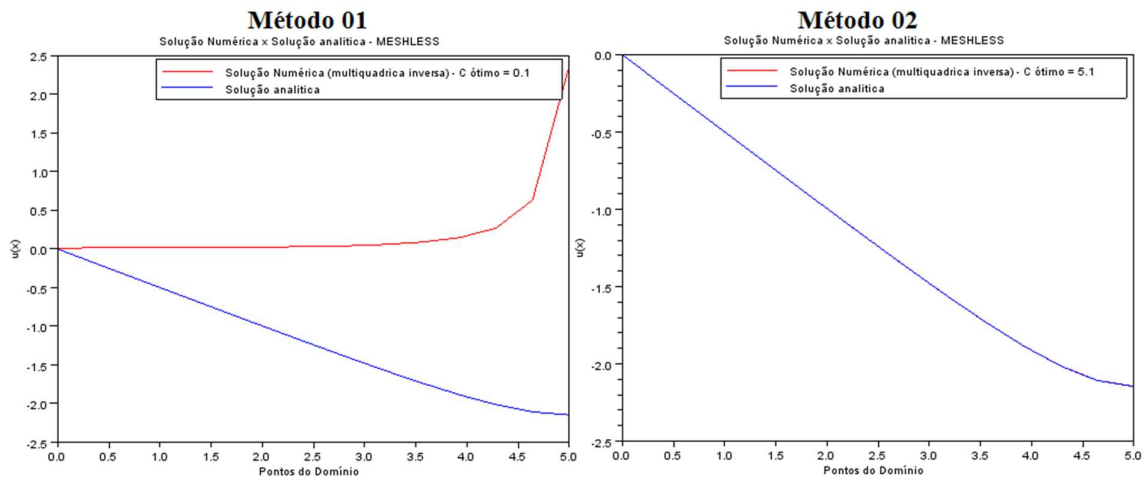
<b>Caso III - 1D: Multiquádrica Inverso - 15 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1783	-0.3445	-0.1573	0.1662	0.0210
-0.3564	-0.9182	-0.3498	0.5618	0.0066
-0.5344	-1.4419	-0.5344	0.9075	0.0000
-0.7121	-2.0214	-0.7197	1.3093	0.0076
-0.8891	-2.7448	-0.9066	1.8557	0.0175
-1.0652	-3.7329	-1.0978	2.6677	0.0326
-1.2397	-5.1697	-1.2967	3.9300	0.0570
-1.4115	-7.3519	-1.5091	5.9404	0.0976
-1.5789	-10.7696	-1.7441	9.1907	0.1652
-1.7388	-16.2437	-2.0161	14.5049	0.2773
-1.8866	-25.1678	-2.3522	23.2812	0.4656
-2.0141	-39.8477	-2.7831	37.8336	0.7690
-2.1081	-65.2591	-3.4259	63.1510	1.3178
-2.1464	-93.0826	-4.0467	90.9362	1.9003
<b>Erro médio</b>			<b>17.0824</b>	<b>0.3423</b>

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 4.1.6.3 Simulação 3 – 20 nós ou pontos:

A figura mostrada a seguir apresenta os gráficos das soluções numéricas obtidas com a aplicação dos métodos 01 e 02.

Figura 4.52- Soluções numérica e exata para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.

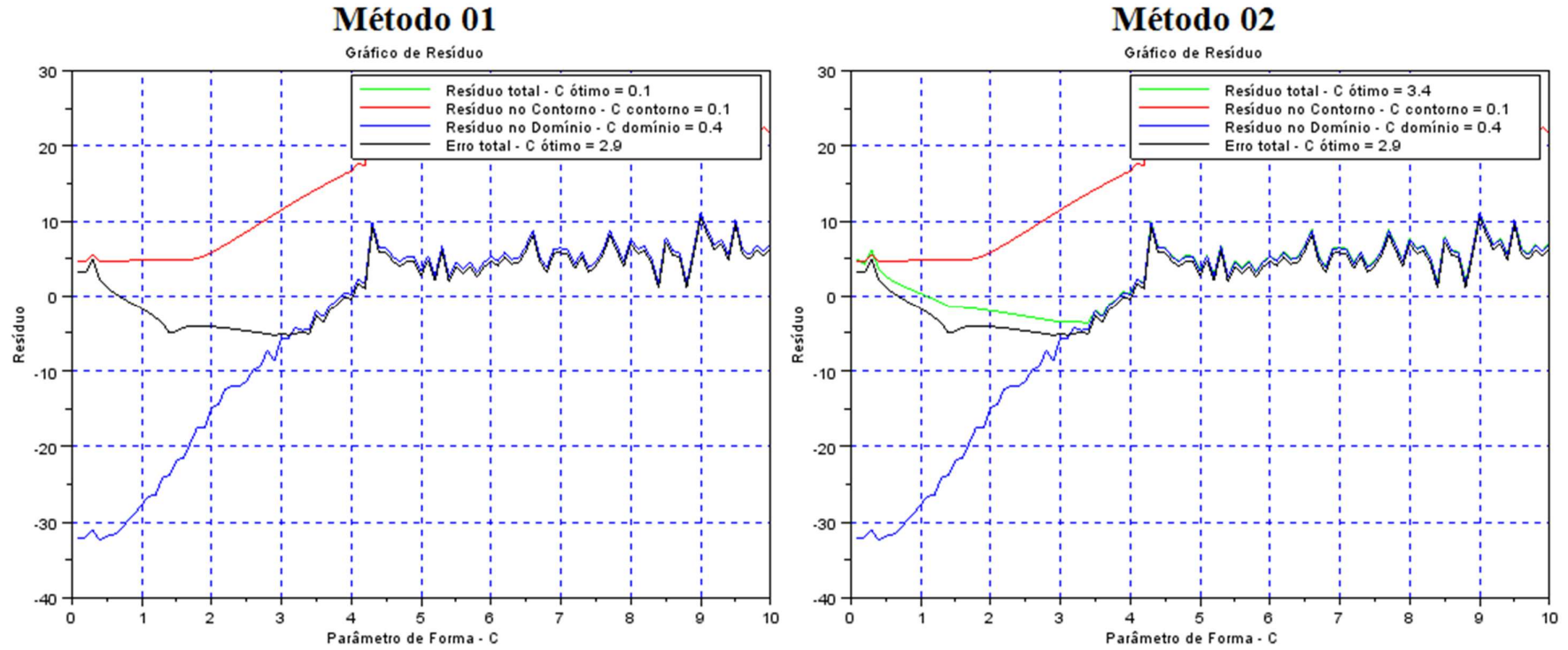


Fonte: Elaborado pela autora.

Observando a figura 4.52, verifica-se que o método 02 é superior ao método 01, visto que a solução proposta nesse último está distorcida desde o ponto inicial. Ao comparar a solução pelo método 01, com a solução proposta na figura 4.25, nota-se que o uso da RBF multiquádrica proporcionou uma solução melhor para esse método. Já com relação ao método 02 é necessário analisar os resultados numéricos da solução para verificar o erro entre as soluções, uma vez que os gráficos de resíduos mostrados na figura 4.53 indicam apenas que o  $c$  ótimo do método 02 está mais próximo do  $c$  ideal, quando comparado ao método 01.

Pela tabela 4.35, o erro médio da solução gerada pelo método 02 é igual a 0.0003, e esse foi o mesmo valor obtido pelo método 02 com aplicação da RBF multiquádrica. Partindo para análise de cada ponto individualmente, com a RBF multiquádrica inversa o erro na maioria dos pontos é maior, mas ele é distribuído de modo mais uniforme. Já com a RBF multiquádrica o erro está mais concentrado nos pontos próximos a condição de contorno de Neumann.

Figura 4.53- Gráficos dos resíduos gerados para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.35 – Resultados Simulação 3 – Caso III – 1D: MQ Inversa.

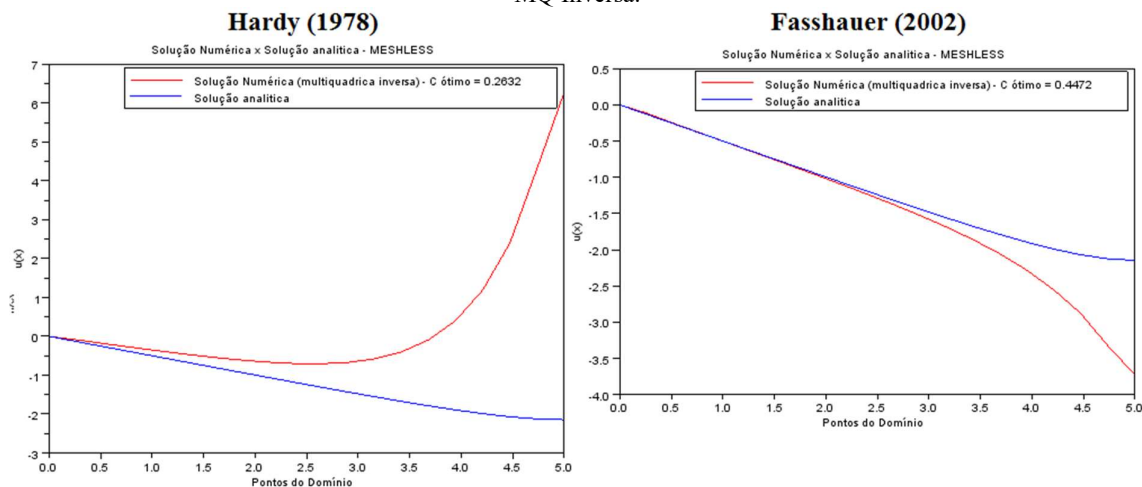
<b>Caso III - 1D: Multiquádrica Inverso- 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0004
-0.1314	-0.0020	-0.1318	0.1294	0.0004
-0.2627	-0.0064	-0.2631	0.2563	0.0004
-0.3939	-0.0115	-0.3943	0.3824	0.0004
-0.5251	-0.0167	-0.5255	0.5084	0.0004
-0.6560	-0.0218	-0.6564	0.6342	0.0004
-0.7867	-0.0267	-0.7871	0.7600	0.0004
-0.9170	-0.0310	-0.9174	0.8860	0.0004
-1.0468	-0.0347	-1.0471	1.0121	0.0003
-1.1757	-0.0375	-1.1760	1.1382	0.0003
-1.3034	-0.0390	-1.3037	1.2644	0.0003
-1.4294	-0.0388	-1.4296	1.3906	0.0002
-1.5528	-0.0360	-1.5530	1.5168	0.0002
-1.6726	-0.0295	-1.6728	1.6431	0.0002
-1.7871	-0.0168	-1.7872	1.7703	0.0001
-1.8939	0.0066	-1.8939	1.9005	0.0000
-1.9895	0.0515	-1.9894	2.0410	0.0001
-2.0689	0.1470	-2.0687	2.2159	0.0002
-2.1247	0.3982	-2.1244	2.5229	0.0003
-2.1464	1.1491	-2.1459	3.2955	0.0005
<b>Erro médio</b>			1.2634	0.0003

Fonte: Elaborado pela autora.

A figura 4.54 e a tabela 4.36 mostram os resultados obtidos com o  $c$  de Hardy (1978), cujo valor para 20 nós é 0.2632 e para o  $c$  de Fasshauer (2002), cujo valor é 0.4472.

Observando a figura fica evidente que a solução gerada com o  $c$  de Fasshauer (2002) é melhor que a solução com o  $c$  de Hardy (1978). Entretanto, um erro médio de 0.2684 faz com que a solução de Fasshauer (2002) não seja uma alternativa melhor que a solução proposta pelo método 02 nesse caso.

Figura 4.54- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.36 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para 20 pontos - Caso III - 1D: MQ Inversa.

<b>Caso III - 1D: Multiquádrica Inverso- 20 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1314	-0.0868	-0.1160	0.0446	0.0154
-0.2627	-0.1837	-0.2561	0.0790	0.0066
-0.3939	-0.2777	-0.3909	0.1162	0.0030
-0.5251	-0.3685	-0.5263	0.1566	0.0012
-0.6560	-0.4547	-0.6614	0.2013	0.0054
-0.7867	-0.5342	-0.7972	0.2525	0.0105
-0.9170	-0.6042	-0.9341	0.3128	0.0171
-1.0468	-0.6605	-1.0730	0.3863	0.0262
-1.1757	-0.6971	-1.2149	0.4786	0.0392
-1.3034	-0.7053	-1.3613	0.5981	0.0579
-1.4294	-0.6726	-1.5144	0.7568	0.0850
-1.5528	-0.5802	-1.6772	0.9726	0.1244
-1.6726	-0.4004	-1.8540	1.2722	0.1814
-1.7871	-0.0921	-2.0516	1.6950	0.2645
-1.8939	0.4069	-2.2783	2.3008	0.3844
-1.9895	1.1908	-2.5503	3.1803	0.5608
-2.0689	2.3996	-2.8776	4.4685	0.8087
-2.1247	4.3145	-3.3238	6.4392	1.1991
-2.1464	6.2697	-3.7242	8.4161	1.5778
<b>Erro médio</b>			1.6064	0.2684

Fonte: Elaborado pela autora.



O quadro 4.6 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 10, 15 e 20 pontos realizadas para o terceiro caso unidimensional com a aplicação da multiquádrica inversa, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.6 – Resumos dos Resultados Caso III – 1D: MQ Inversa.

<b>CASO III - MULTIQUÁDRICA INVERSA</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>10 Pontos</b>	0.1219	0.0009	0.4475	0.7677
<b>15 Pontos</b>	1.4432	0.0002	0.3423	17.0824
<b>20 Pontos</b>	1.2634	0.0003	0.2684	1.6064

Fonte: Elaborado pela autora.

## 4.2 Aplicações Bidimensionais

Os resultados das aplicações bidimensionais serão divididos em duas etapas. Na primeira etapa, serão apresentados os resultados obtidos para os casos bidimensionais possuidores de solução exata, aqui denominados de casos hipotéticos, utilizando os métodos 01 e 02. Desse modo, os resultados gerados irão permitir a escolha do melhor método entre as duas opções apresentadas. Na segunda etapa, o melhor método será aplicado para o desenvolvimento dos resultados de um caso real.

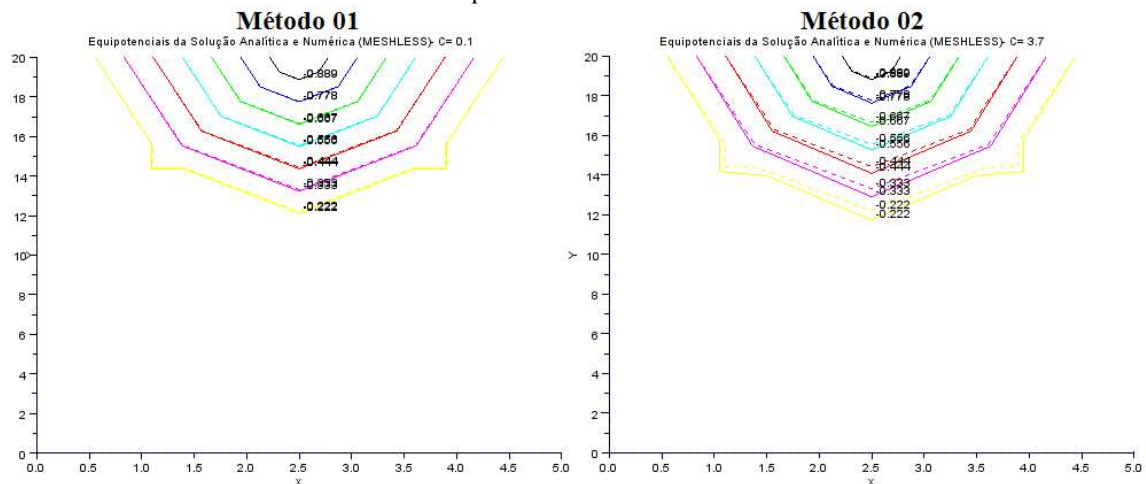
As aplicações bidimensionais, inicialmente, também foram divididas em três simulações: a primeira com 9 pontos, a segunda com 25 pontos e a terceira com 36 pontos discretizados. Entretanto, para o caso real foram realizados três cenários extras com 100, 400 e 625 pontos. É importante ressaltar, novamente, que as simulações foram realizadas apenas para a RBF multiquádrica, devido à complexidade do ambiente bidimensional.

### 4.2.1 Caso I - 2D: Multiquádrica

#### 4.2.1.1 Simulação 1 – 9 nós ou pontos:

Nesta simulação os modelos propostos foram aplicados a nove nós, utilizando as condições de contorno impostas no problema. Na figura 4.55 é possível observar as equipotenciais geradas pelos métodos 01 e 02.

Figura 4.55- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 9 pontos – Caso I - 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme a figura, as soluções numéricas originadas pelo método 01 convergem melhor com a solução analítica. Entretanto, isso não quer dizer que a solução proposta pelo método 02 foi ruim. Na verdade, ambas as soluções são boas, mas com uma certa superioridade obtida pelo método 01.

Ao analisar os gráficos dos resíduos mostrados na figura 4.56, verifica-se que o parâmetro de forma ótimo obtido pelo método 01, no valor de 0.1, possui valor igual ao  $c$  ótimo que seria obtido com o uso da solução analítica, ou seja, o  $c$  ótimo do erro total, o qual vem sendo denominado nas últimas simulações de  $c$  ideal. Isso mostra que, com o uso do método 02, chegou-se a melhor solução possível com a utilização da metodologia dos resíduos.

Um relato interessante a se fazer é mencionar o fato do método 01 não ter se destacado como melhor alternativa durante as simulações realizadas nas aplicações unidimensionais.

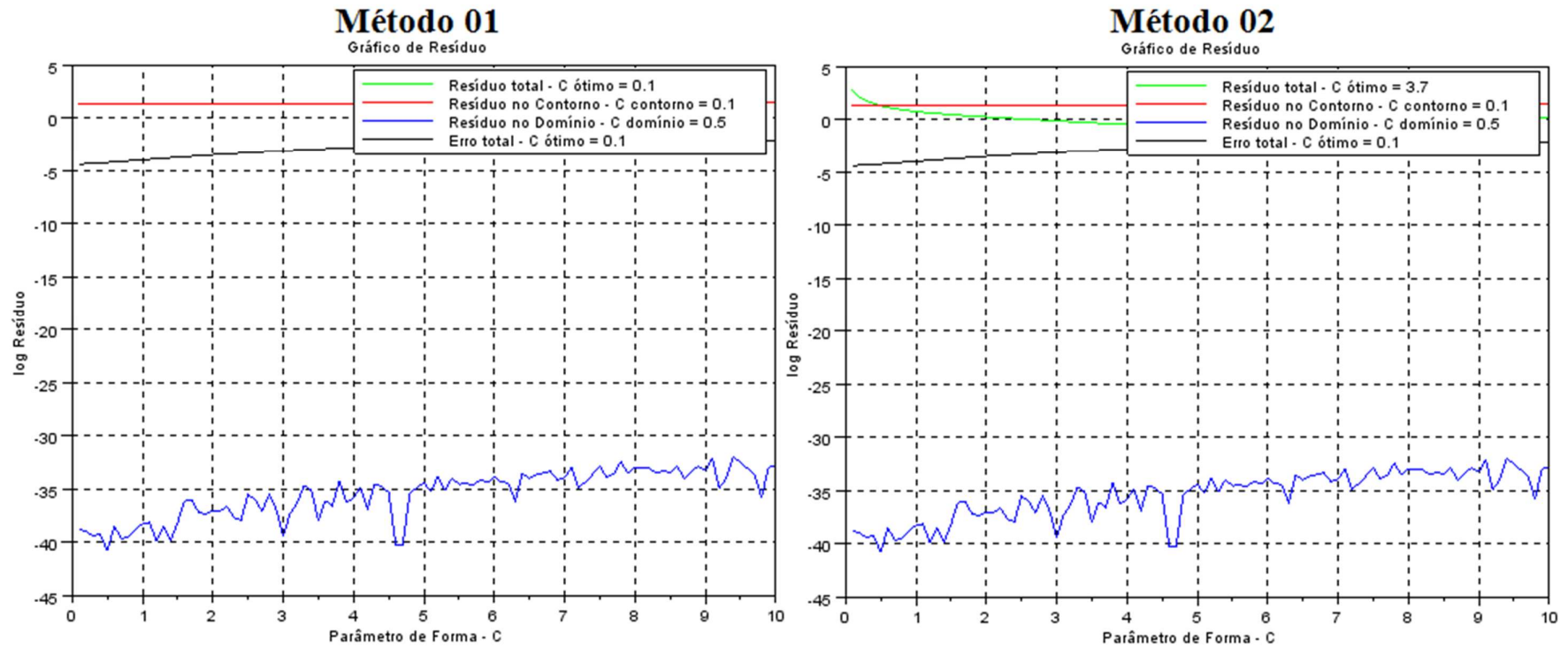
A tabela abaixo mostra os resultados numéricos para esta simulação, mostrando os valores de erro médio, o que confirma que o método 01 é melhor que o método 02 nesta simulação.

Tabela 4.37 – Resultados Simulação 1 – Caso I – 2D.

<b>Caso I - 2D: Multiquádrica - 9 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-1.0000	-1.0000	-1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0019	-0.0100	-0.0588	0.0081	0.0569
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0009	0.0063

Fonte: Elaborado pela autora.

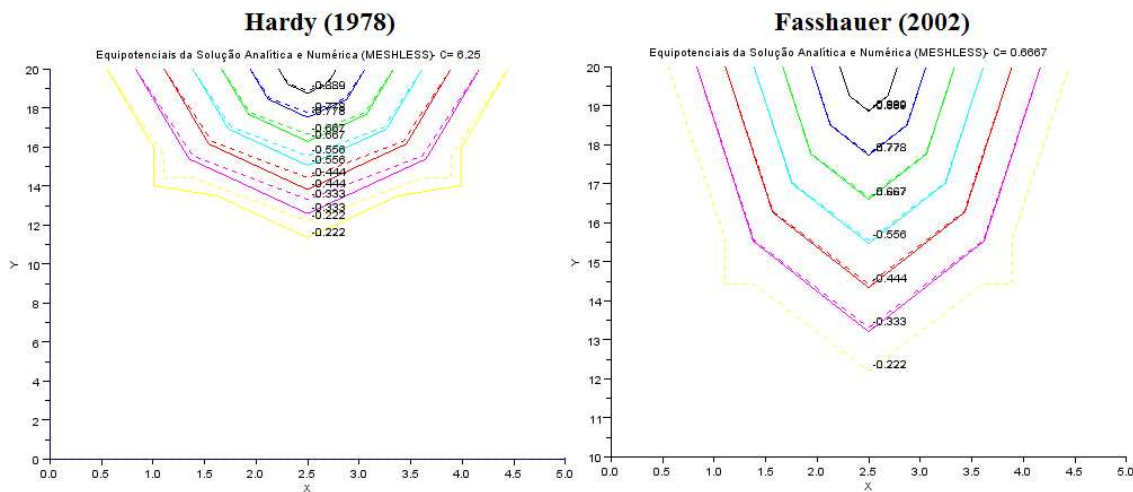
Figura 4.56- Gráficos dos resíduos para 9 pontos – Caso I – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados seguintes correspondem as soluções numéricas obtidas com a utilização das metodologias de Hardy (1978), cujo parâmetro de forma seria igual a 6.25 e de Fasshauer (2002), cujo  $c$  é igual a 0.6667.

Figura 4.57- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 9 pontos no Caso I – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pela figura 4.57, a metodologia de Fasshauer (2002) gerou resultados melhores que a metodologia de Hardy (1978). No entanto, quando se compara os erros médio das tabelas 4.37 e 4.38, verifica-se que o método 01 gerou a melhor solução em relação aos demais.

Tabela 4.38 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 1: Caso I – 2D.

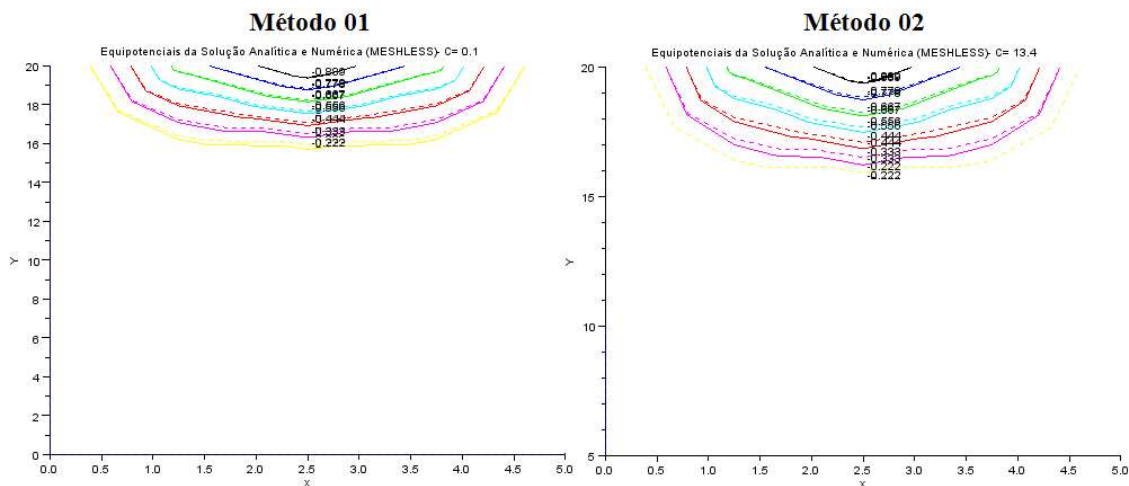
<b>Caso I - 2D: Multiquádrica - 9 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-1.0000	-1.0000	-1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0019	-0.0996	-0.0180	0.0977	0.0161
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.0109	0.0018

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 4.2.1.2 Simulação 2 – 25 nós ou pontos:

Nesta simulação os modelos 01 e 02 foram aplicados a vinte e cinco nós, a figura 4.58 mostra as equipotenciais geradas.

Figura 4.58- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 25 pontos – Caso I - 2D.



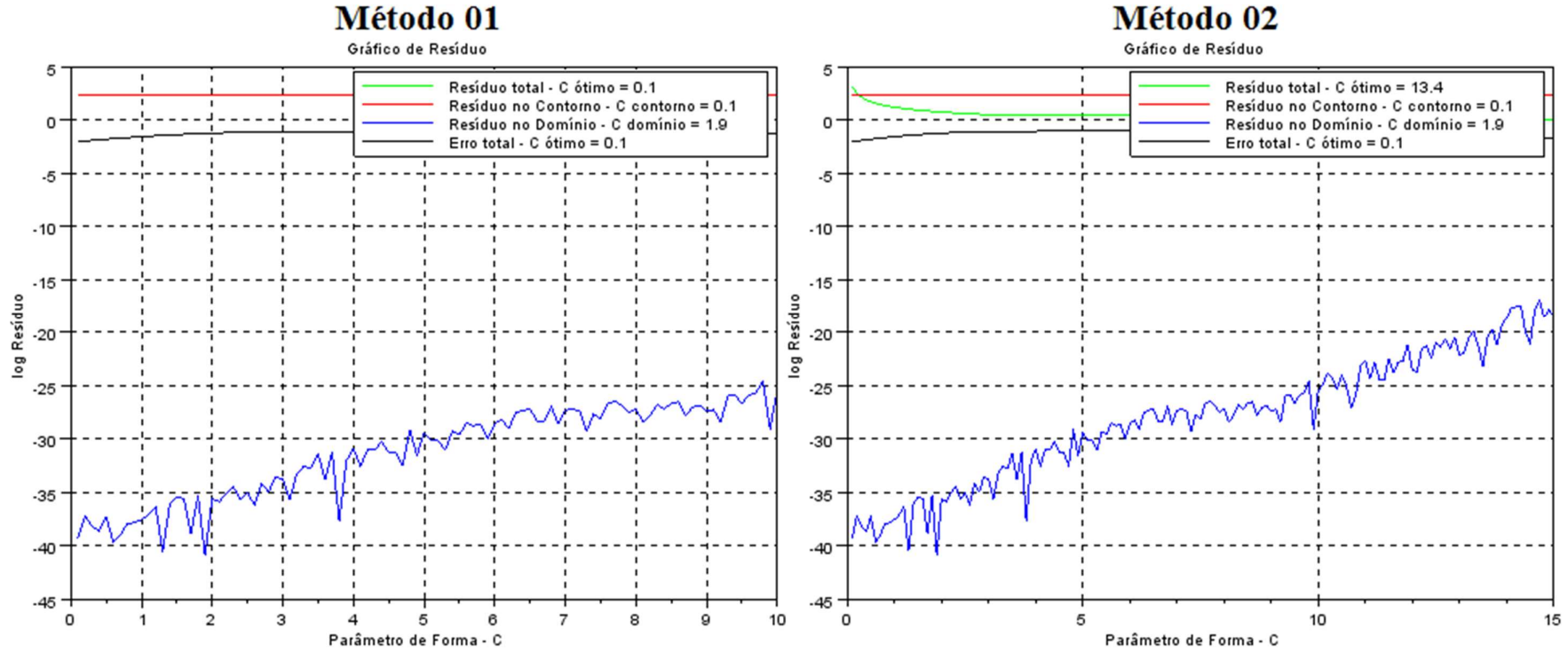
Fonte: Elaborado pela autora.

Pela figura acima, é possível notar que houve um leve distanciamento entre as equipotenciais das soluções numérica e analíticas em ambos os métodos, quando comparada à sobreposição mostrada na simulação anterior. No entanto, ao analisar o aspecto visual das equipotenciais, percebe-se que ele foi suavizado em virtude do aumento no número de nós. Em relação à sobreposição das soluções na simulação atual, é possível afirmar que o método 01 possui melhor adequação entre as soluções.

O parâmetro de forma calculado pelo método 01 obteve valor igual a 0.1, enquanto o valor obtido pelo método 02 foi igual a 13.4. Com um valor superior a 10, limite superior estabelecido inicialmente, nota-se que houve variação no limite superior de cálculo. Na figura 4.59, é possível verificar que, no gráfico dos resíduos gerado pelo método 02, o  $c$  varia até o valor 15. Isso foi devido ao fato que para o limite 10, o valor de  $c$  ótimo coincidiu com esse limite superior e, ao observar a linha verde no gráfico, notou-se que ela estava decrescendo até esse limite. Por isso, o limite superior foi modificado para 15.

O  $c$  ótimo do método 01 foi igual valor de  $c$  ideal ( $c$  do erro total), ou seja, novamente esse método chegou numa excelente solução.

Figura 4.59- Gráficos dos resíduos para 25 pontos – Caso I – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

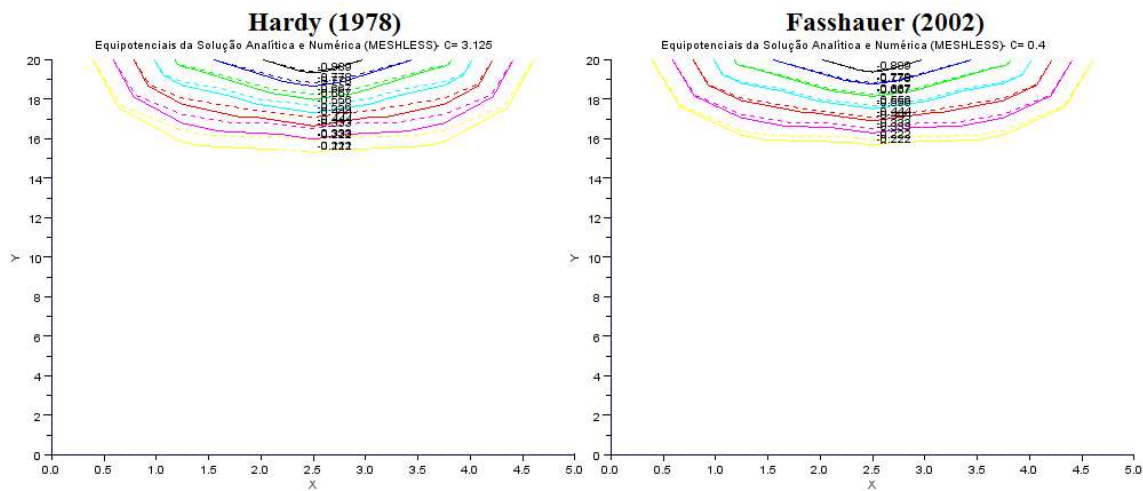




Os resultados a seguir mostram as soluções com o uso das metodologias de Hardy (1978) e de Fasshauer (2002), cujos valores para seus parâmetros de forma nesta simulação são, respectivamente, 3.125 e 0.4.

A figura 4.60 apresenta as equipotenciais geradas pelas metodologias e sua comparação com a solução analítica do problema.

Figura 4.60- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 25 pontos no Caso I – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Apesar das duas soluções serem parecidas, a solução proposta com a utilização da metodologia de Fasshauer (2002) é um pouco melhor. Comparando com a simulação 1, os resultados acima também sofreram certo distanciamento da solução analítica, como ocorreu nos métodos 01 e 02.

A tabela 4.40 apresenta os resultados numéricos das soluções de Hardy (1978) e de Fasshauer (2002). Com um erro médio de 0.0065 e um pico de 0.0577, a solução de Fasshauer (2002) se confirma como superior à solução de Hardy (1978).

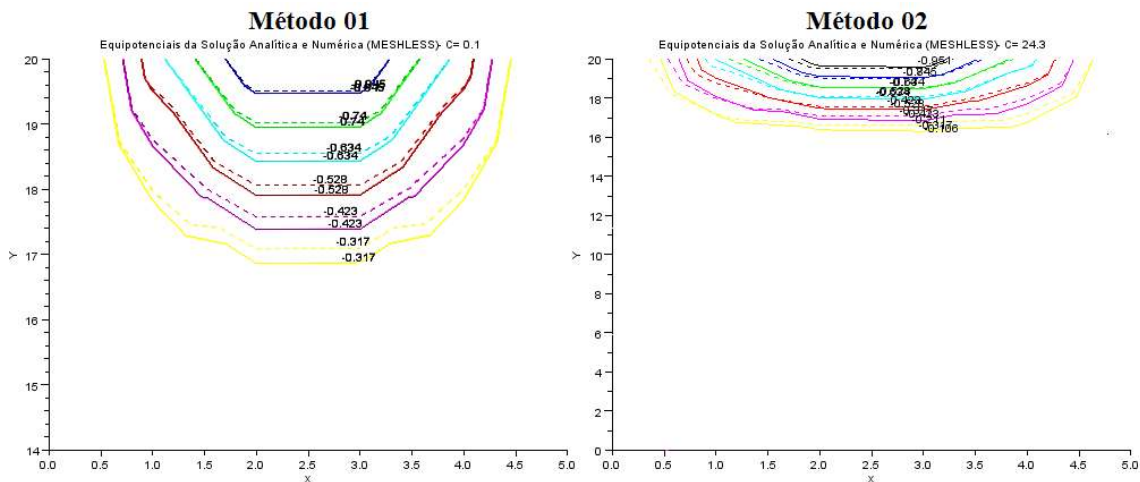
Comparando com os métodos 01 e 02, a metodologia de Fasshauer (2002) é melhor que o método 02, mas, com erro médio e erro máximo menores, o método 01 é superior à metodologia de Fasshauer (2002).



### 4.2.1.3 Simulação 3 – 36 nós ou pontos:

Nesta simulação os modelos 01 e 02 foram aplicados a trinta e seis nós, a figura 4.61 mostra as equipotenciais geradas.

Figura 4.61- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 36 pontos – Caso I – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

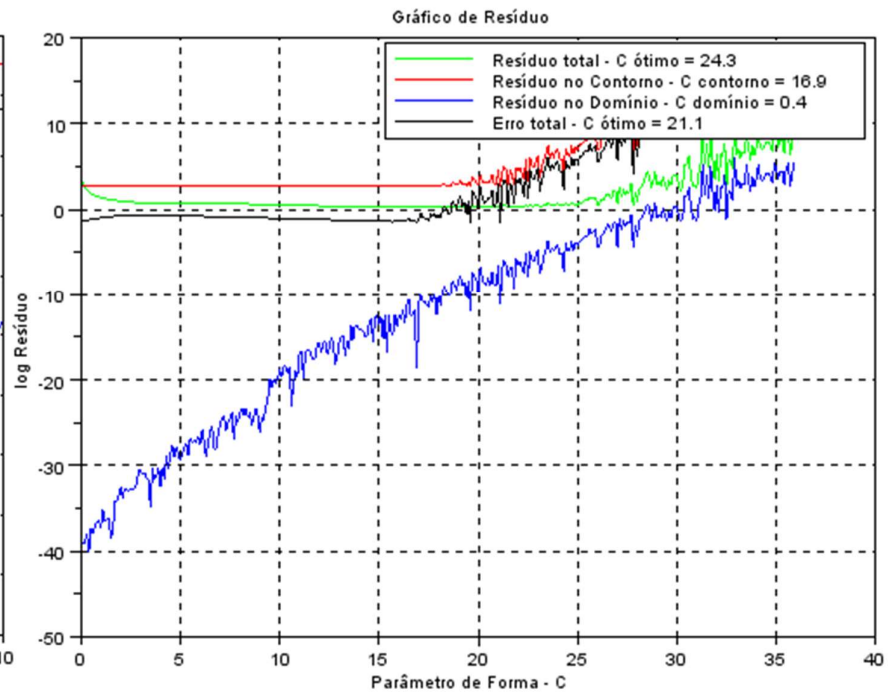
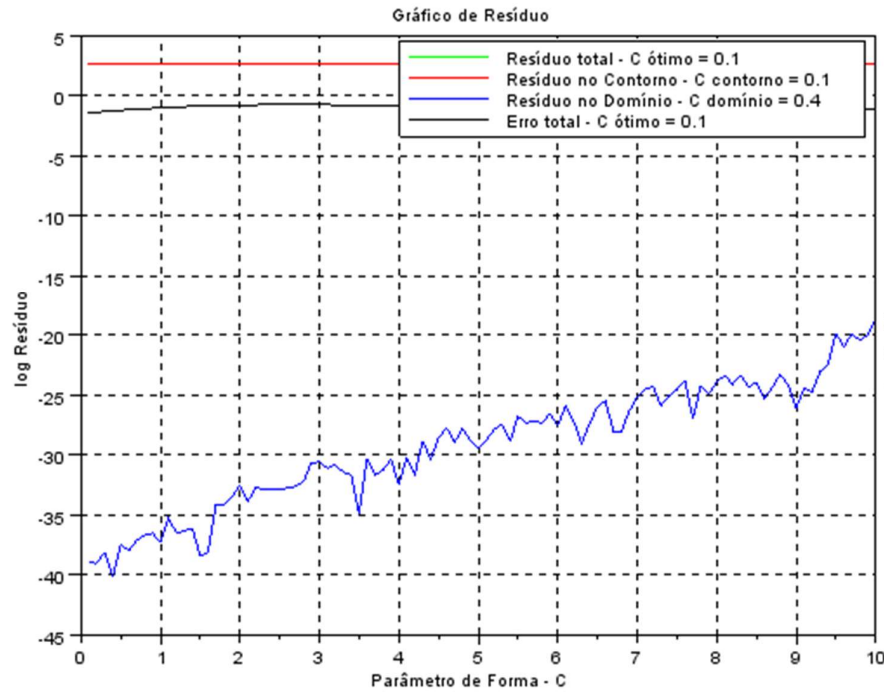
Apenas pela análise da figura 4.61, não é possível afirmar, com certeza, qual método proporcionou a melhor solução, pois em cada método a solução numérica se aproxima da solução analítica em um certo ponto, mas se afasta em outro.

Pelo gráfico dos resíduos, mostrado na figura 4.62, o parâmetro de forma adotado no método 01 coincidiu com o valor para  $c$  ideal, isso quer dizer que possivelmente a melhor solução numérica é obtida por esse método.

Ainda sobre o gráfico dos resíduos, no método 02 o parâmetro de forma varia até o limite de 40, a explicação para isso se deve ao mesmo motivo levantado na simulação anterior com 25 pontos.

Na tabela 4.41 são apresentados os resultados numéricos para as soluções propostas pelos métodos 01 e 02, bem como os erros dessas soluções em relação à solução analítica. A partir da análise dessa tabela, será possível a conclusão sobre qual dos dois métodos proporcionou a melhor solução.

Figura 4.62- Gráficos dos resíduos para 36 pontos – Caso I -2D.

**Método 01****Método 02**

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.41 – Resultados Simulação 3 – Caso I – 2D.

<b>Caso I - 2D: Multiquádrica - 36 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	-0.0355	0.0000	0.0355
-0.5878	-0.5878	-0.6371	0.0000	0.0493
-0.9511	-0.9511	-1.0145	0.0000	0.0634
-0.9511	-0.9511	-1.0290	0.0000	0.0779
-0.5878	-0.5878	-0.6805	0.0000	0.0927
0.0000	0.0000	-0.1075	0.0000	0.1075
0.0000	0.0000	-0.1156	0.0000	0.1156
-0.0476	-0.0876	-0.1877	0.0400	0.1401
-0.0770	-0.1415	-0.2426	0.0645	0.1656
-0.0770	-0.1415	-0.2569	0.0645	0.1799
-0.0476	-0.0876	-0.2305	0.0400	0.1829
0.0000	0.0000	-0.1868	0.0000	0.1868
0.0000	0.0000	-0.1986	0.0000	0.1986
-0.0039	-0.0062	-0.2151	0.0023	0.2112
-0.0062	-0.0100	-0.2303	0.0038	0.2241
-0.0062	-0.0100	-0.2441	0.0038	0.2379
-0.0039	-0.0062	-0.2564	0.0023	0.2525
0.0000	0.0000	-0.2673	0.0000	0.2673
0.0000	0.0000	-0.2788	0.0000	0.2788
-0.0003	-0.0031	-0.2930	0.0028	0.2927
-0.0005	-0.0046	-0.3067	0.0041	0.3062
-0.0005	-0.0046	-0.3197	0.0041	0.3192
-0.0003	-0.0031	-0.3321	0.0028	0.3318
0.0000	0.0000	-0.3437	0.0000	0.3437
0.0000	0.0000	-0.3521	0.0000	0.3521
0.0000	-0.0024	-0.3528	0.0024	0.3528
0.0000	-0.0036	-0.3600	0.0036	0.3600
0.0000	-0.0036	-0.3722	0.0036	0.3722
0.0000	-0.0024	-0.3892	0.0024	0.3892
0.0000	0.0000	-0.4127	0.0000	0.4127
0.0000	0.0000	-0.4169	0.0000	0.4169
0.0000	0.0000	-0.4284	0.0000	0.4284
0.0000	0.0000	-0.4398	0.0000	0.4398
0.0000	0.0000	-0.4511	0.0000	0.4511
0.0000	0.0000	-0.4622	0.0000	0.4622
0.0000	0.0000	-0.4730	0.0000	0.4730
<b>Erro médio</b>			0.0069	0.2659

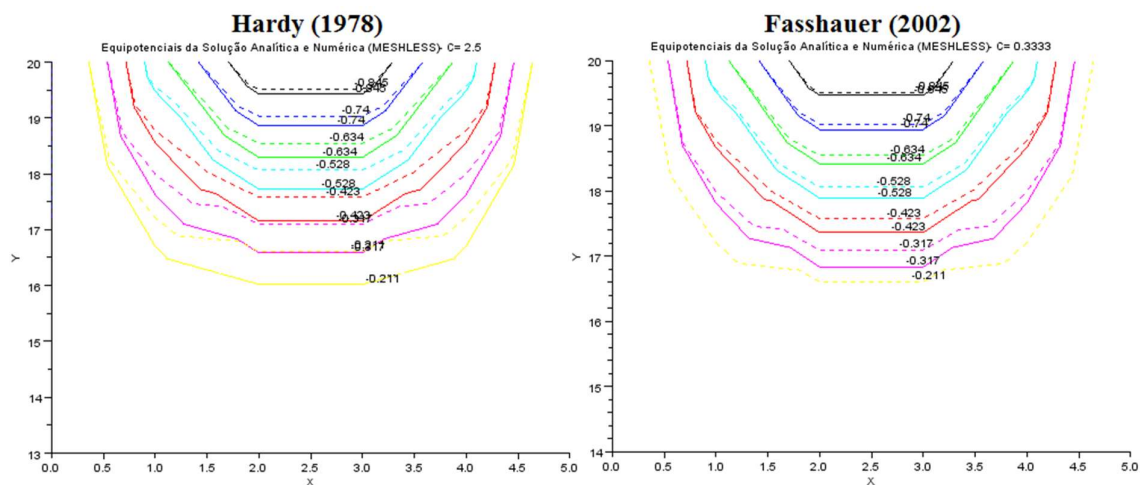
Fonte: Elaborado pela autora.

Com um erro médio igual 0.0069 e um erro máximo de 0.0645, o método 01 gerou uma solução numérica melhor que o método 02. Comparando com a simulação 2, o erro médio aumentou em 0.0015 pontos. É provável que esses aumentos estejam relacionados ao aumento da quantidade de pontos a serem estimados pela metodologia. Apesar disso, é um erro muito pequeno, levando em consideração que se está trabalhando um método numérico.

A seguir, tem-se as equipotenciais geradas pelas soluções com o uso das metodologias de Hardy (1978) e de Fasshauer (2002), cujos valores para seus parâmetros de forma nesta simulação são, respectivamente, 2.5 e 0.3333.

A figura 4.63 apresenta as equipotenciais geradas pelas metodologias e sua comparação com a solução analítica do problema.

Figura 4.63- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 36 pontos – Caso I – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pela figura, é possível notar que a solução de Fasshauer (2002) é melhor que a solução de Hardy (1978). Com o auxílio dos resultados mostrados na tabela abaixo, o erro médio de Fasshauer (2002) é 0.0079, com pico de 0.0716. Dessa forma, é possível afirmar que a solução proposta pelo método 01 é melhor que a solução de Fasshauer (2002) nesta simulação.



O quadro 4.7 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 9, 25 e 36 pontos realizadas para o primeiro caso bidimensional com a aplicação da multiquádrica, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.7 – Resumos dos Resultados Caso I – 2D: MQ.

<b>CASO I - MULTIQUÁDRICA</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>9 Pontos</b>	0.0009	0.0063	0.0018	0.0109
<b>25 Pontos</b>	0.0054	0.0087	0.0065	0.0140
<b>36 Pontos</b>	0.0069	0.2659	0.0079	0.0136

Fonte: Elaborado pela autora.

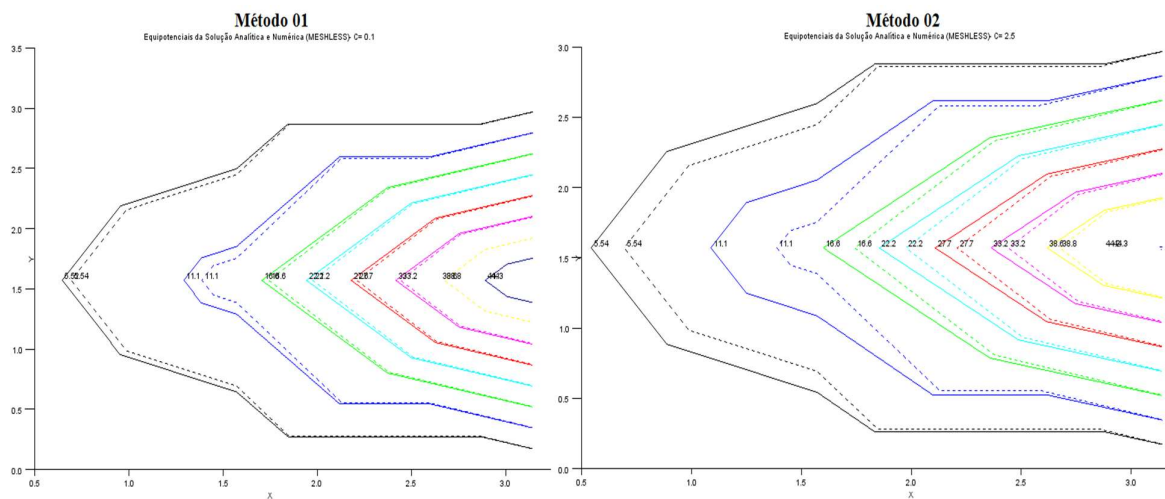


## 4.2.2 Caso II - 2D: Multiquádrica

### 4.2.2.1 Simulação 1 – 9 nós ou pontos:

Nesta simulação foram utilizados nove nós, com base nas condições de contorno impostas no problema. Na figura 4.64 é possível observar as equipotenciais geradas pelos métodos 01 e 02.

Figura 4.64- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 9 pontos – Caso II – 2D.



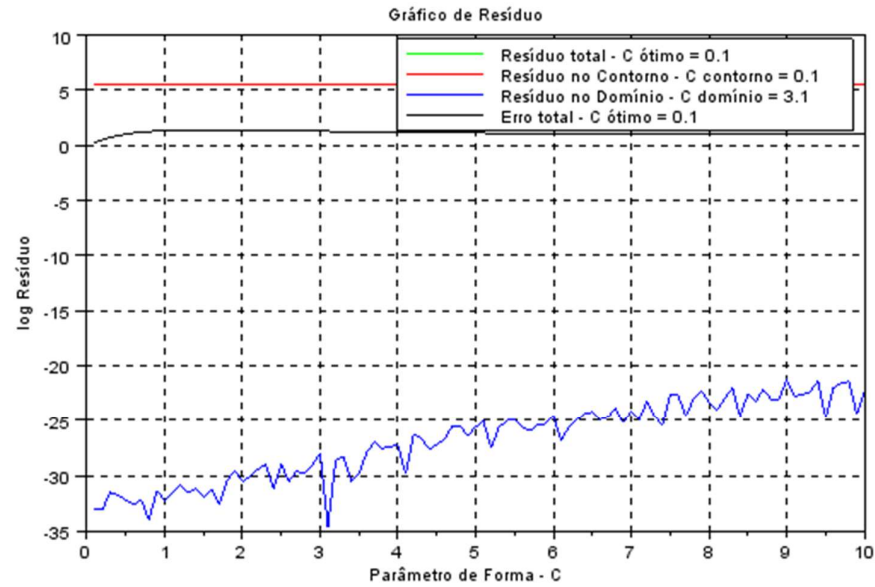
Fonte: Elaborado pela autora.

As equipotenciais geradas pelo método 01, como é possível ver na figura, possuem uma convergência melhor com a solução analítica, que a solução proposta com o método 02.

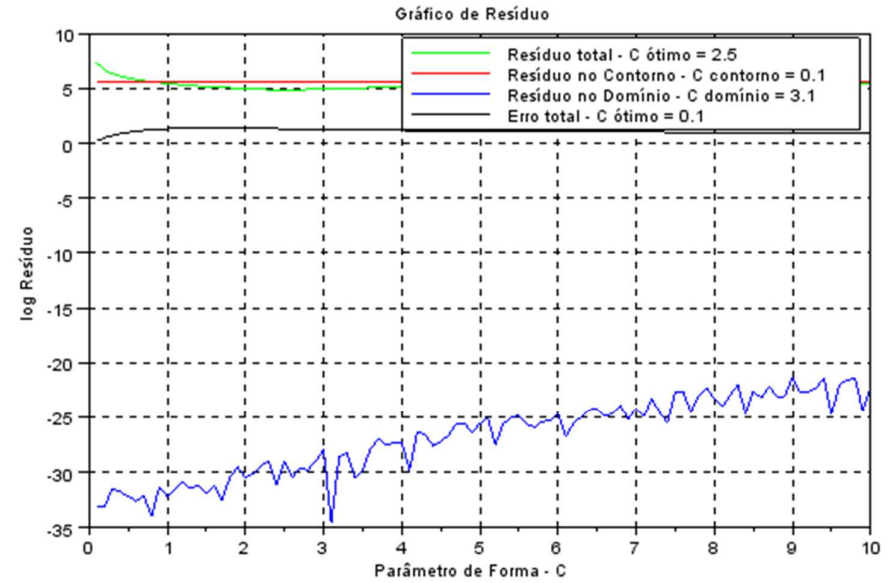
O parâmetro de forma calculado pelo método 01 e utilizado na solução numérica foi igual a 0.1, esse é o mesmo valor obtido quando se utiliza a solução exata como parâmetro de comparação, ou seja, o  $c$  ideal, conforme mostra a figura 4.65. Já o parâmetro de forma encontrado por meio método 02 obteve valor igual a 2.5, que é distante do valor do  $c$  ideal, motivo esse pelo qual se justifica a distancias entre as soluções nesta simulação.

Observando a figura 4.65, pode-se perceber que o gráfico do resíduo total do método 01 não está visível, isso ocorre, pois, o resíduo do contorno está sobreposto a ele, devido aos pequenos valores do resíduo do domínio, por isso apenas a linha vermelha está visível.

Figura 4.65- Gráficos dos resíduos para 9 pontos – Caso II – 2D.

**Método 01**

Fonte: Elaborado pela autora.

**Método 02**

A tabela mostrada abaixo apresenta os resultados numéricos para as soluções obtidas pelos métodos 01 e 02.

Tabela 4.43 – Resultados Simulação 1 – Caso II – 2D.

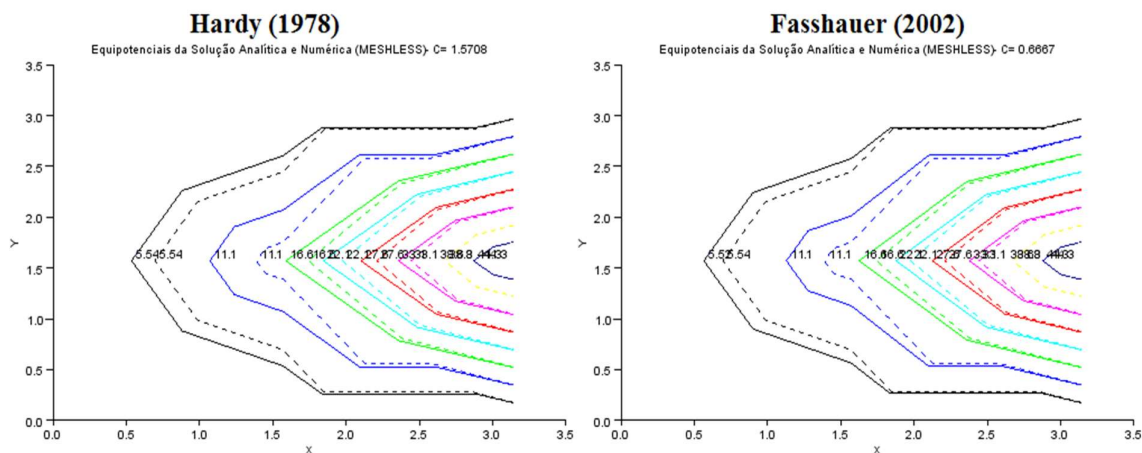
<b>Caso II - 2D: Multiquádrica - 9 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0169	0.0000	0.0000	0.0169	0.0169
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12.5000	13.4359	15.9400	0.9359	3.4400
49.8408	50.0000	50.0000	0.1592	0.1592
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.1236	0.4018

Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados da tabela apontam que o método 01 proporcionou uma solução melhor que o método 02, uma vez que seu erro médio é 0.2782 menor que o erro médio encontrado no método 02.

Utilizando as metodologias de Hardy (1978) e de Fasshauer (2002), os parâmetros de forma encontrados para esta simulação foram, respectivamente, 1.5708 e 0.6667. A figura 4.66 mostra as equipotenciais geradas pelas soluções numéricas das metodologias citadas, juntamente com a comparação de cada dessas soluções numéricas com as equipotenciais da solução analítica do problema.

Figura 4.66- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 9 pontos no Caso II – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Apenas pela figura não é possível afirmar qual é a metodologia que gerou a melhor solução, pois as linhas equipotenciais, em ambos os casos, possuem uma convergência semelhante com a solução analítica. Para melhorar a avaliação, são apresentados os resultados numéricos obtidos em cada metodologia na tabela 4.44.

Tabela 4.44 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 1: Caso II – 2D.

<b>Caso II - 2D: Multiquádrica - 9 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0169	0.0000	0.0000	0.0169	0.0169
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12.5000	16.2132	15.3742	3.7132	2.8742
49.8408	50.0000	50.0000	0.1592	0.1592
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.4321	0.3389

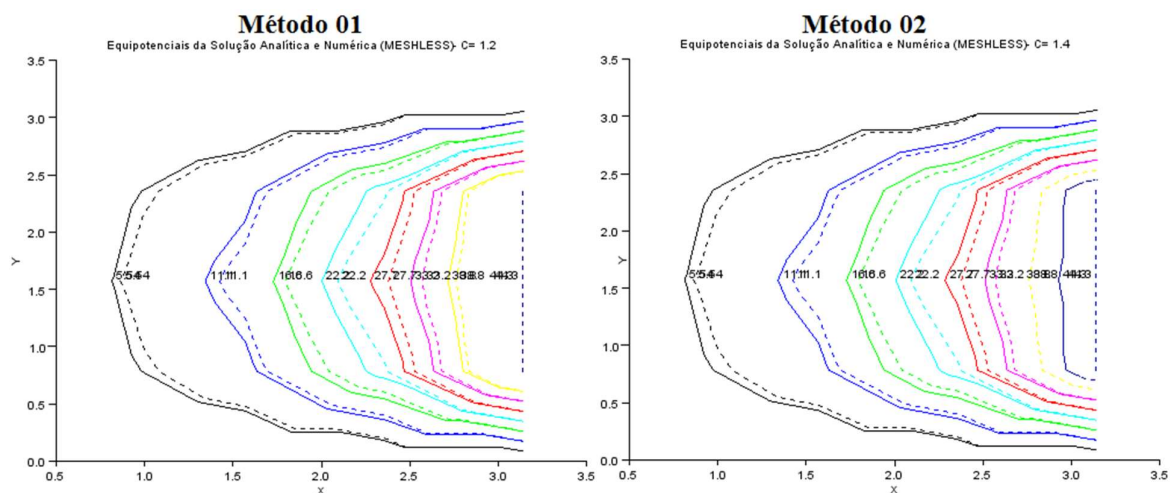
Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados da tabela indicam que a metodologia de Fasshauer (2002) é um pouco melhor que a metodologia de Hardy (1978), com uma diferença mínima entre os erros médios. Apesar disso, como o erro médio do método 01 é menor, é possível afirmar que ele ofereceu a melhor solução numérica para esta simulação.

#### 4.2.2.2 Simulação 2 – 25 nós ou pontos:

As linhas equipotenciais das soluções numéricas encontradas com o auxílio dos métodos 01 e 02, juntamente com a comparação com a solução exata estão presentes na figura 4.67.

Figura 4.67- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 25 pontos – Caso II – 2D.

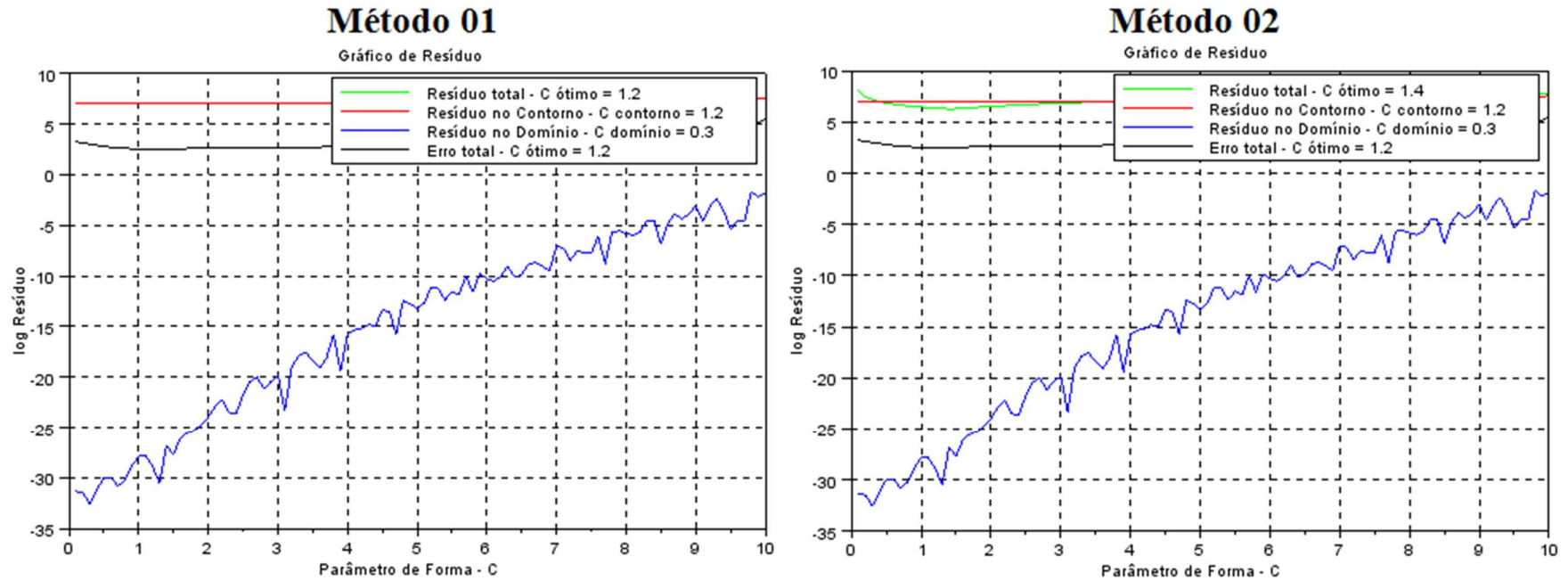


Fonte: Elaborado pela autora.

Analisar somente a figura 4.67 não permite concluir que método é o melhor, pois as equipotenciais geradas, assim como a convergência com a solução analítica, são bastante semelhantes. Dessa forma, é interessante verificar o comportamento dos gráficos de resíduos na figura 4.68. O  $c$  ótimo encontrado no método 01 foi igual a 1.2, esse é o mesmo valor obtido para o  $c$  ótimo do erro total, ou seja, com esse método foi possível chegar a um valor igual ao parâmetro de forma ideal. Já com o método 02 o  $c$  obteve o valor de 1.4, o qual está perto do valor ideal, por isso há semelhança no comportamento das soluções. Entretanto, é provável que o método 01 obtenha um desempenho um pouco melhor, visto que o valor de  $c$  coincidiu com o  $c$  ideal.

A tabela 4.45 apresenta os resultados numéricos obtidos pelos dois métodos. Dessa maneira será possível obter uma conclusão final a respeito do comportamento das soluções dos dois métodos e, através da análise do erro, concluir qual método foi melhor.

Figura 4.68- Gráficos dos resíduos para 25 pontos – Caso II – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 4.45 – Resultados Simulação 2 – Caso II – 2D.

<b>Caso II - 2D: Multiquádrica - 25 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0001	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
0.0169	0.0000	0.0000	0.0169	0.0169
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.3986	4.0612	4.1090	0.6626	0.7104
9.1014	9.9290	10.0450	0.8276	0.9436
21.6014	23.9878	23.9709	2.3864	2.3695
49.7749	50.0000	50.0000	0.2251	0.2251
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.7707	5.2287	5.2437	0.4580	0.4730
12.5000	13.4435	13.4797	0.9435	0.9797
27.0264	29.2800	29.0855	2.2536	2.0591
49.8408	50.0000	50.0000	0.1592	0.1592
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.3986	4.0612	4.1090	0.6626	0.7104
9.1014	9.9290	10.0450	0.8276	0.9436
21.6014	23.9878	23.9709	2.3864	2.3695
49.7749	50.0000	50.0000	0.2251	0.2251
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.4814	0.4874

Fonte: Elaborado pela autora.

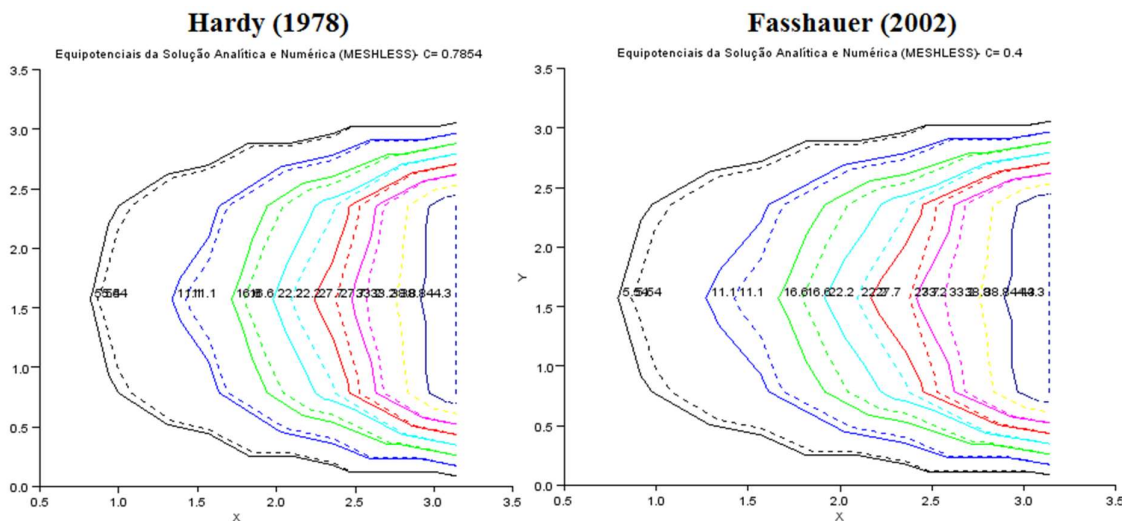
Como pode ser observado na tabela os valores para o erro médio encontrados no método 01 e no método 02 são muito próximos, ou seja, por isso a semelhança das soluções. Entretanto, a solução do método 01 resultou num erro médio um pouco menor, portanto, confirmando a afirmação anterior, que seu desempenho foi levemente superior ao método 02.

Apesar disso, é importante lembrar que, dependendo da ordem de grandeza estabelecida, seria possível afirmar também que os dois métodos estariam equiparados em

relação às soluções geradas, pois ao se trabalhar com um número menor de casas decimais o erro médio seria o mesmo para os dois métodos.

A seguir são apresentados os resultados obtidos para esta simulação com a aplicação do parâmetro de forma utilizando as metodologias de Hardy (1978), cujo valor de cálculo é 0.7854, e de Fasshauer (2002), com valor igual a 0.4.

Figura 4.69- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 25 pontos no Caso II – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

As equipotenciais da solução proposta por Fasshauer (2002) apresentam distorções em relação à solução analítica na região central de suas curvas, tal situação não é observada na solução de Hardy (1978). Isso indica que a solução de Hardy (1978) é melhor nesta simulação para 25 pontos.

A metodologia de Hardy (1978) já estava apresentando uma significativa melhoria durante as simulações em aplicações bidimensionais, mas, até o momento, não havia proposto uma solução melhor que a metodologia de Fasshauer (2002). Os resultados da tabela 4.46 apresentarão a confirmação do bom desempenho obtido com o parâmetro de forma de 0.7854.



Tabela 4.46 – Resultados para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) para simulação 2: Caso II – 2D.

<b>Caso II - 2D: Multiquádrica - 25 Pontos</b>				
<b>Solução Analítica</b>	<b>Solução Numérica</b>		<b>Erro</b>	
	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>	<b>Fasshauer</b>
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0001	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
0.0169	0.0000	0.0000	0.0169	0.0169
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.3986	3.9376	3.9989	0.5390	0.6003
9.1014	9.8356	10.3047	0.7342	1.2033
21.6014	24.1813	24.6019	2.5799	3.0005
49.7749	50.0000	50.0000	0.2251	0.2251
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.7707	5.2037	5.4539	0.4330	0.6832
12.5000	13.5712	14.5463	1.0712	2.0463
27.0264	30.0978	31.7961	3.0714	4.7697
49.8408	50.0000	50.0000	0.1592	0.1592
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.3986	3.9376	3.9989	0.5390	0.6003
9.1014	9.8356	10.3047	0.7342	1.2033
21.6014	24.1813	24.6019	2.5799	3.0005
49.7749	50.0000	50.0000	0.2251	0.2251
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Erro médio</b>			0.5163	0.7094

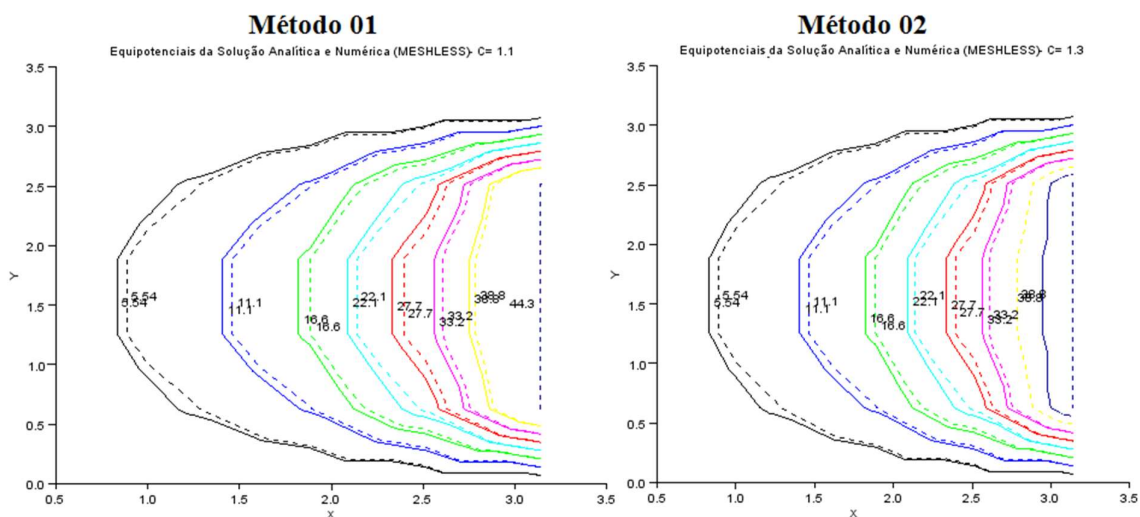
Fonte: Elaborado pela autora.

Com um erro médio menor, a metodologia de Hardy (1978) destaca-se, pela primeira vez, com possuidora da melhor solução, quando comparada a metodologia de Fasshauer (2002), mas os métodos 01 e 02 possuem erro médio menores. De maneira que, o método 01 oferece, portanto, a melhor solução para esta simulação.

#### 4.2.2.3 Simulação 3 – 36 nós ou pontos:

Nesta última simulação serão utilizados 36 pontos discretizados. As linhas equipotenciais das soluções numéricas encontradas com o auxílio dos métodos 01 e 02, juntamente com a comparação com a solução exata estão presentes na figura 4.70.

Figura 4.70- Equipotenciais da solução numérica (linha contínua) e da solução exata (linha tracejada) para 36 pontos – Caso II – 2D.



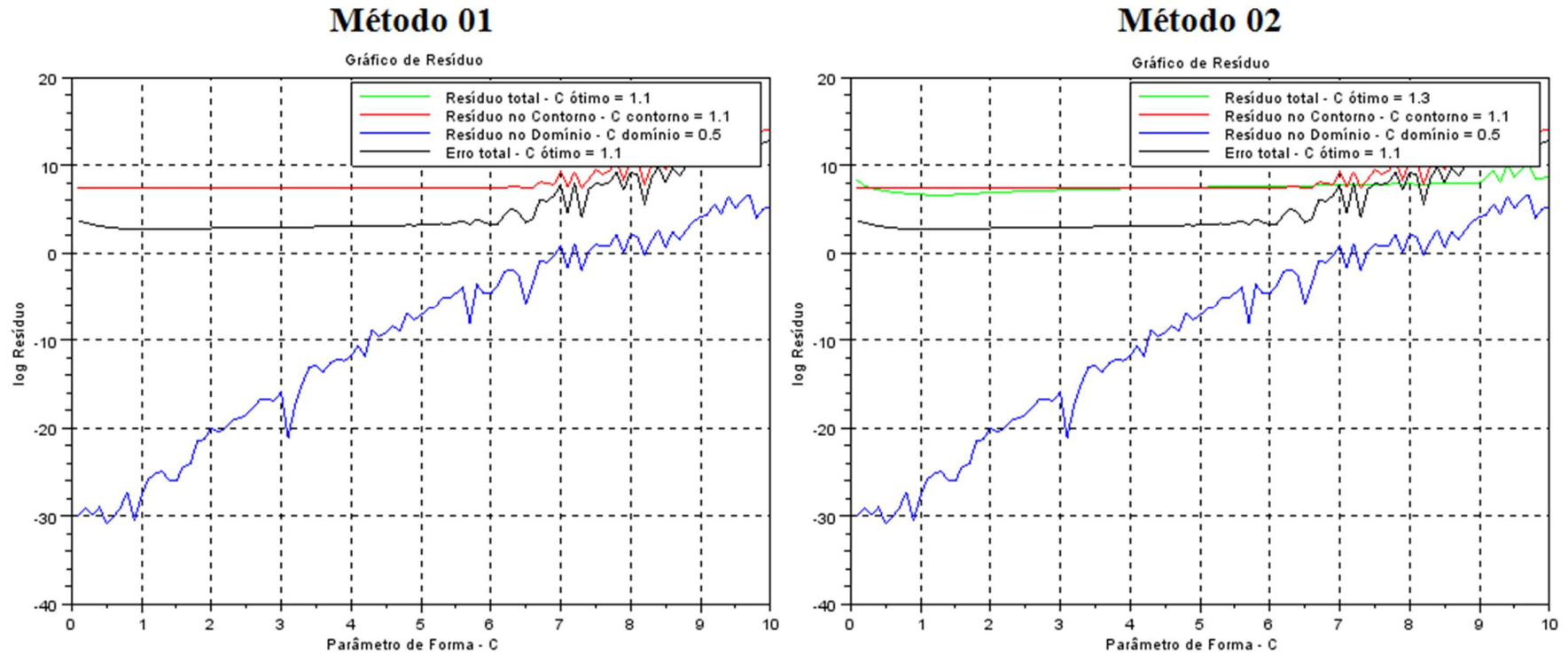
Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme ocorreu na simulação 2, novamente devido a semelhança entre as duas soluções, é necessário recorrer aos gráficos de resíduos da figura 4.71 e aos resultados obtidos para o erro médio mostrados na tabela 4.47 para concluir qual método propôs a melhor solução.

Pela figura 4.71, o parâmetro de forma obtido pelo método 01 foi igual  $c$  ideal com o valor de 1.1. Já o  $c$  ótimo obtido pelo método 02 foi igual a 1.3. Dessa forma, é possível afirmar que o método 01 é um pouco melhor que o método 02.

Para verificar o quanto essa solução do método 01 foi melhor, é necessário analisar a tabela 4.47. Pelos resultados, o erro médio para o método 01 é ligeiramente menor, portanto apresenta a melhor solução. Entretanto, reduzindo a ordem de grandeza desse erro, ele é praticamente igual.

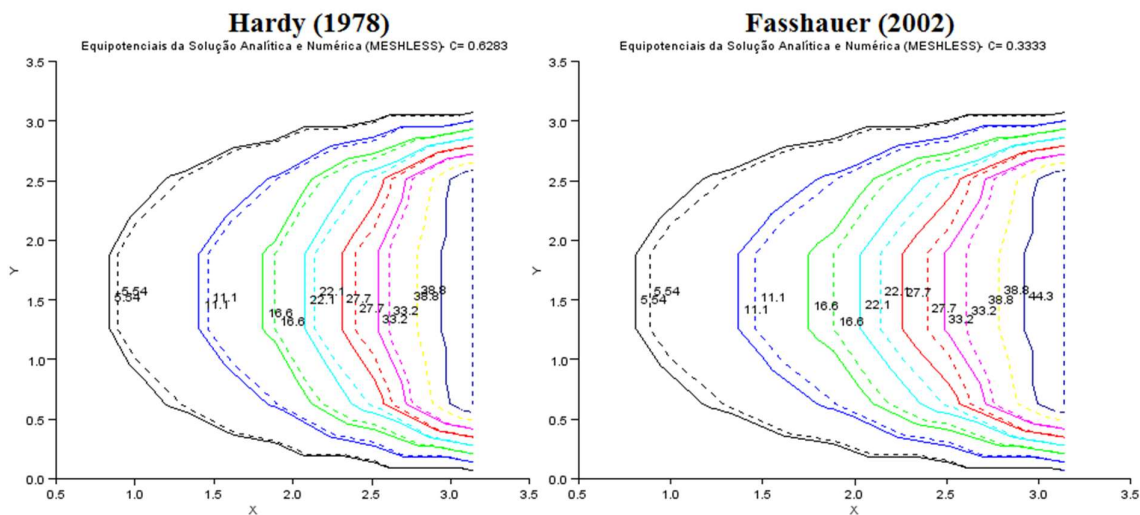
Figura 4.71- Gráficos dos resíduos para 36 pontos – Caso II – 2D.





Em última análise, serão apresentados os resultados das simulações utilizando os parâmetros de forma de Hardy (1978) com valor de 0.6283 e de Fasshauer (2002), com valor igual a 0.3333.

Figura 4.72- Soluções numérica e exata para Hardy (1978) e Fasshauer (2002) com 36 pontos no Caso II – 2D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Novamente, a solução proposta por Hardy (1978) apresentou menores distorções em relação à solução analítica. Pela tabela 4.48, o erro médio da solução de Hardy (1978) é 0.2055 pontos menor que o erro médio da solução de Fasshauer (2002), portanto, mais uma vez, a metodologia de Hardy (1978) obteve uma solução melhor que a metodologia de Fasshauer (2002).

Comparando a solução proposta pela metodologia de Hardy (1978) com as soluções obtidas pelos métodos 01 e 02, esses últimos possuem erro médio menores, oferecendo soluções melhores. No entanto, destaca-se o método 01 como melhor alternativa para solução.



O quadro 4.8 mostrado a seguir apresenta um resumo dos resultados encontrados nas simulações com 9, 25 e 36 pontos realizadas para o segundo caso bidimensional com a aplicação da multiquádrica, nele são apresentados os erros médios encontrados para as quatro metodologias aplicadas:

Quadro 4.8 – Resumos dos Resultados Caso II – 2D: MQ.

<b>CASO II - MULTIQUÁDRICA</b>				
<b>ERRO MÉDIO</b>				
<b>Nº Pontos:</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Fasshauer</b>	<b>Hardy</b>
<b>9 Pontos</b>	0.1236	0.4018	0.3389	0.4321
<b>25 Pontos</b>	0.4814	0.4874	0.7094	0.5163
<b>36 Pontos</b>	0.4235	0.4277	0.6813	0.4758

Fonte: Elaborado pela autora.

### 4.2.3 Caso III - 2D: Multiquádrica – Caso Real

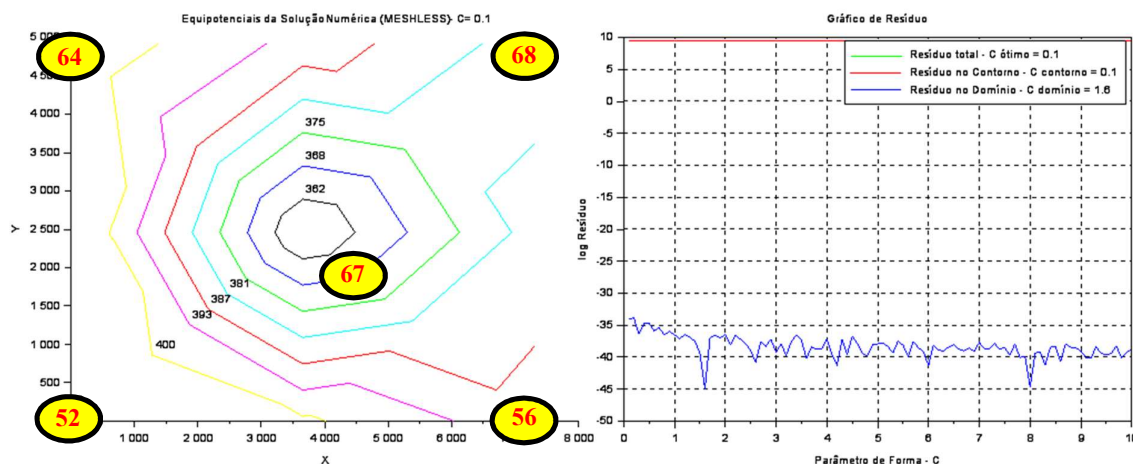
Esse caso trata da aplicação da modelagem desenvolvida em uma região da Bacia Sedimentar do Araripe. Nesse caso se utilizou apenas o método 1 para geração dos resultados, uma vez que tal método vem apresentando os melhores resultados entre as aplicações bidimensionais anteriores.

No caso III, além dos três cenários de 9, 25 e 36 nós ou pontos, foram adicionados mais três com 100, 400 e 625 nós. O objetivo é verificar a influência da quantidade de nós no resultado final. Como se trata de um caso real, utilizou-se a carga hidráulica medida do poço 67 como fator de comparação dos resultados.

#### 4.2.3.1 Simulação 1 – 9 nós ou pontos:

Nesta simulação foram utilizados nove nós, com base nas condições de contorno impostas no problema. A figura 4.73 apresenta as equipotenciais de carga hidráulica e o gráfico de resíduos gerados para os nove pontos distribuídos na região de trabalho.

Figura 4.73- Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 9 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).



Fonte: Elaborado pela autora.

As equipotenciais representaram adequadamente as condições de contorno dadas, visto que ao se colocar os quatro poços dentro do gráfico das equipotenciais, seguindo suas coordenadas utilizadas no programa, em que o poço 52 encontra-se na origem (0,0); o poço 56 no ponto (7301, 0); o poço 64 no ponto (0, 4916) e poço 68 com (7301, 4916), as linhas



equipotenciais próximas correspondem a uma zona que engloba o valor de carga hidráulica real dos poços.

O valor do parâmetro de forma calculado pelo método foi igual a 0.1. Os resíduos devido ao erro não foram calculados, visto que não se dispõe da solução exata, pois se trata de um caso real.

Nessa simulação os poços 52 e 64, cujas cargas hidráulicas são, respectivamente, 412.0m e 404.6m, estão situados numa zona acima da equipotencial 400m, observa-se que as cargas hidráulicas crescem seguindo o sentido acima dessa equipotencial. O poço 56, com carga hidráulica 389.4m, situa-se na região entre as zonas de equipotenciais 387m e 393m. O poço 68, com carga hidráulica 377.8m, situa-se na região entre as zonas de equipotenciais 375m e 381m. Todos os poços estão dentro de uma zona que engloba o valor real correspondente a sua carga hidráulica.

A disposição das equipotenciais 375 (verde), 368 (azul marinho) e 362 (preta) indica que existe um corpo hídrico na região. Isso é fato, pois além dos quatro poços existe o poço 67 localizado no interior da região de estudo.

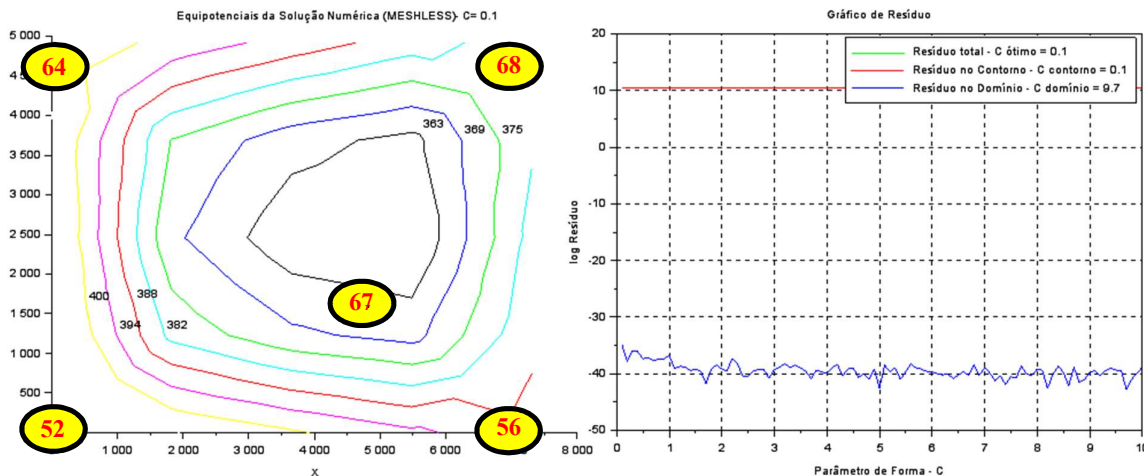
Localizando o poço 67 no gráfico das equipotenciais da figura 4.73, sua posição estaria sobreposta a equipotencial 368m, assim, sua carga hidráulica calculada pelo método seria igual a aproximadamente 368m. No entanto a carga hidráulica real do poço 67 é 384.57m.

A lógica do método aplicado é realizar uma simulação para determinar o comportamento da carga hidráulica na região baseado em alguns dados de medição, como qualquer método numérico o valor não é exato, mas aproximado. Considerando que o erro encontrado considerando o valor da carga hidráulica real e o valor obtido pelo método nessa simulação foi aproximadamente 4.3%, é possível afirmar que a metodologia aplicada fez representação eficiente da região.

#### *4.2.3.2 Simulação 2 – 25 nós ou pontos:*

A divisão em vinte e cinco nós gerou as equipotenciais e resíduos mostrados na figura 4.74. O parâmetro de forma calculado pelo método aplicado obteve o mesmo valor da simulação anterior de 0.1.

Figura 4.74- Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 25 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).



Fonte: Elaborado pela autora.

O sentido do fluxo hídrico encontrado na simulação 2 foi o mesmo encontrado na simulação 1, entretanto, devido ao aumento do número de nós no interior da região de trabalho, foram encontrados mais nós com carga hidráulica de menores valores, o que gerou uma maior expansão superficial da equipotencial de menor valor.

Os poços 52 (carga hidráulica 412.0m) e 64 (carga hidráulica 404.6m) continuam nas zonas de equipotencial acima dos 400m. No poço 56 (carga hidráulica 389.4m), os limites de sua zona passaram para as equipotenciais 388m e 394m, ou seja, aumentaram em 1m em relação à simulação anterior. O poço 68 (carga hidráulica 377.8m) está na zona entre as linhas 375m e 382m, nesse apenas o limite superior variou em 1m. Assim, percebe-se que os quatro poços de carga hidráulica conhecida continuam atendendo às condições de contorno.

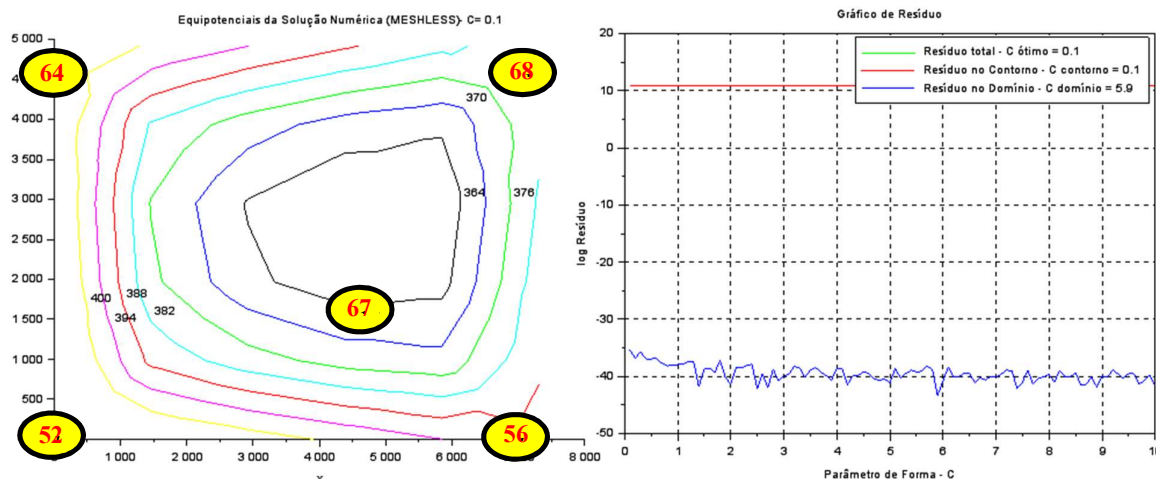
Essas variações não implicam no resultado, apenas na nova distribuição devido ao aumento da quantidade de novos nós, cada um como novo valor de carga hidráulica, por isso existem as variações.

O poço de observação 67, nessa simulação, está situado na zona entre as equipotenciais 363m e 369m, cujo valor interpolado indica uma carga hidráulica de 364.5m, o que corresponde a um erro de aproximadamente 5.2%.

#### 4.2.3.3 Simulação 3 – 36 nós ou pontos:

Os 36 nós distribuídos geraram o gráfico de equipotenciais mostrado na figura 4.75. O parâmetro de forma continuou igual a 0.1, como mostra o gráfico de resíduos.

Figura 4.75- Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 36 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).



Fonte: Elaborado pela autora.

Como a variação no número de pontos foi pequena, as zonas equipotenciais da maioria dos poços mantiveram-se as mesmas, com exceção do poço 68 (carga hidráulica 377.8m), cuja zona ficou entre as linhas 376m e 382m.

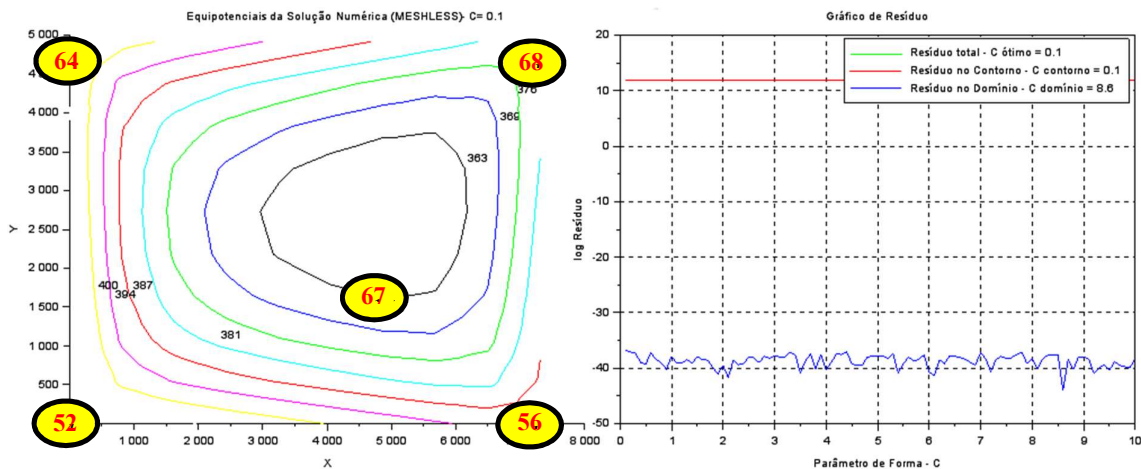
Para o poço 67 a carga hidráulica encontrada foi igual 364m, o que gerou um erro de 5.3% em relação à carga hidráulica medida.

#### 4.2.3.4 Simulação 4 – 100 nós ou pontos:

A partir da simulação 4, a quantidade de nós foi aumentada consideravelmente com a finalidade de verificar qual o comportamento das equipotenciais e da carga hidráulica do poço 67 em relação às simulações anteriores.

Com 100 nós distribuídos, o gráfico das equipotenciais, mostrado na figura 4.76, possui um formato semelhante às simulações anteriores, mas as linhas foram atenuadas e agora possuem uma forma mais curvilínea.

Figura 4.76- Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 100 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).



Fonte: Elaborado pela autora.

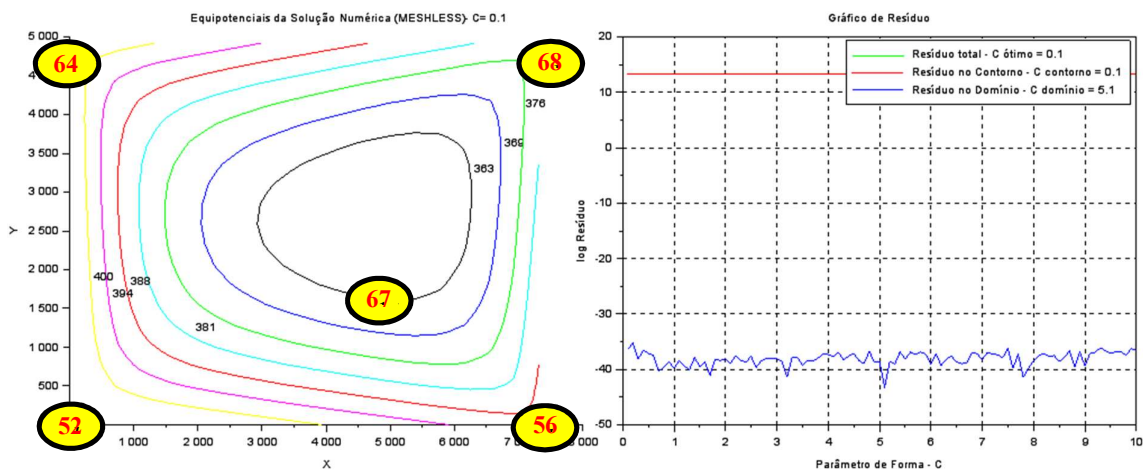
As zonas de localização foram modificadas apenas para os poços 56 e 68. O poço 56 ficou situado entre as linhas equipotenciais de carga hidráulica 387m e 394m. Já o poço 68 localiza-se entre as linhas 381m e 376m. Nas duas situações, é possível notar que ocorreu uma variação de 1m nos limites iniciais em cada zona. Novamente, essa variação é explicada devido ao aumento da quantidade de nós utilizados para representar a região.

A carga hidráulica calculada para o poço de observação 67 foi aproximadamente igual a 363m, o que gera um erro em torno dos 5.6%.

#### 4.2.3.5 Simulação 5 – 400 nós ou pontos:

A figura 4.77 mostra as equipotenciais e os resíduos gerados nesta simulação com 400 nós. O valor da variável  $c$  encontrada pelo método e utilizada na metodologia obteve um valor de 0.1.

Figura 4.77- Equipotenciais de carga hidráulica relativas aos 400 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).



Fonte: Elaborado pela autora.

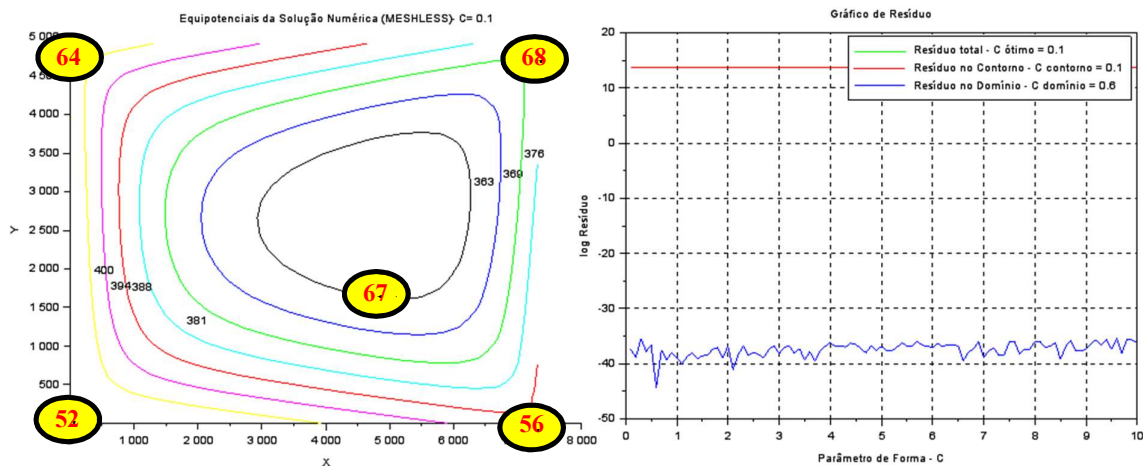
Nessa simulação praticamente não houve mudança nas linhas equipotenciais geradas em relação à simulação 4. Os valores numéricos não sofreram alteração, a disposição das linhas continuou, exceto pelo o aspecto visual das equipotenciais, em que as suas curvas ficaram mais suaves em relação às simulações anteriores.

Sem sofrer variações, a carga hidráulica do poço 67 continuou 363m, ou seja, o erro associado também continua 5.6%.

#### 4.2.3.6 Simulação 6 – 625 nós ou pontos:

Nesta última simulação, a região teve 625 nós utilizados para construir sua representação. Na figura 4.78, observa-se as equipotenciais e o gráfico dos resíduos, bem como, o valor de 0.1 para a variável  $c$ .

Figura 4.78- Equipotenciais de carga hidráulica relativos aos 625 nós (lado esquerdo) e gráfico dos resíduos (lado direito).



Fonte: Elaborado pela autora.

Em relação à simulação 5, não houve alterações, as equipotenciais geradas com 625 nós são praticamente iguais às equipotenciais geradas com 400 nós. Quando comparada à simulação 4, o que pode ser notado é uma mudança estética na apresentação das equipotenciais. Dessa maneira, os valores de carga hidráulica para o poço 67 e o erro correspondente também permaneceram inalterados.

## 5 CONCLUSÕES

Os dois métodos desenvolvidos baseados nos resíduos gerados, o método 01 (que usa o somatório dos resíduos do domínio e do contorno) e o método 02 (que calcula o resíduo do contorno como domínio), apresentaram comportamentos distintos em função da quantidade de dimensões aos quais foram aplicados.

Para os casos unidimensionais, tanto no que se refere à multiquádrica quanto à multiquádrica inversa, o método 02 proporcionou resultados com os menores índices de erro, quando comparado ao método 01. Enquanto nos casos bidimensionais, o método 01 apresentou melhores resultados. Isso ocorreu devido os casos unidimensionais apresentarem apenas dois nós representando as condições de contorno, dessa maneira os resíduos gerados pelo contorno pouco influenciarão no resíduo total. Já para os casos bidimensionais, o número considerável de nós na região do contorno faz com que seus resíduos tenham maior representatividade para o cálculo do resíduo total.

Analisando as RBF's multiquádrica e multiquádrica inversa nos casos unidimensionais, os gráficos dos resíduos do método 02 (linha verde) apresentaram em seu início uma curvatura descendente. Para os mesmos casos, isso também ocorreu com os gráficos dos erros (linha preta), mostrando o comportamento similar entre os dois e, conseqüentemente, a eficiência do método. Após a curvatura descendente, há uma curvatura ascendente seguida de uma irregularidade nos valores.

Observando os gráficos dos resíduos dos casos unidimensionais nas aplicações multiquádrica e multiquádrica inversa, o ponto que produz o  $c$  ótimo pode ser obtido considerando o primeiro resíduo de menor valor da linha verde (resíduo total) no método 02, uma vez que tal afirmação pode ser confirmada analisando a linha preta (erro), no qual o mesmo fenômeno ocorre, na maioria dos casos.

Para os casos bidimensionais testados, em uma das equações a curvatura da linha do gráfico do erro (linha preta) iniciou ascendente, o oposto do que ocorreu no caso unidimensional. Entretanto, o outro caso testado apresentou gráficos com início ascendentes e descendentes, dependendo do número de nós. Isso mostra que para os casos bidimensionais a curvatura do erro não é constante e que não tem comportamento similar ao do resíduo do método 02 que continuou descendente, como nos casos unidimensionais.

Diferente do que ocorreu nos casos unidimensionais, nos casos bidimensionais, o comportamento do resíduo total utilizando o método 01, foi similar ao do erro, gerando, para os casos testados, um parâmetro de forma igual ao melhor parâmetro de forma possível para a RBF utilizada. Apesar das variações dos resíduos totais utilizando o método 01 serem pequenas, estas foram suficientes para mostrar a eficiência do método 01 para problemas bidimensionais.

Considerando os casos unidimensionais aplicando as RBF multiquádrica e multiquádrica inversa que apresenta pelo menos uma condição de contorno de Neumann, o comportamento foi semelhante aos outros casos, entretanto, a curvatura descendente perdurou até maiores valores de  $c$ , obtendo um  $c$  ótimo de maior valor.

Para todos os testes aplicando a RBF multiquádrica nos casos unidimensionais, quanto maior o número de nós mais preciso foi o resultado, ocorrendo um melhor ajuste entre os gráficos de solução analítica e numérica, além da diminuição do erro médio.

Já nos casos unidimensionais aplicando a RBF multiquádrica inversa, o aumento do número de nós não causou uma melhora nos resultados, mas uma variação do erro médio, havendo diminuição do erro em alguns casos e aumento em outros. Ocorreu uma irregularidade no que diz respeito a eficiência do aumento do número de nós.

Já nos casos bidimensionais, o aumento do número de nós causou, de forma geral, um aumento no erro médio, o que pode ser considerado uma piora nos resultados. No entanto, quando se trata do ajuste do gráfico das equipotenciais em duas dimensões, o maior número de nós gerou um melhor assentamento das equipotenciais no espaço, o que pode ser considerado uma melhoria nos resultados devido o melhor ajuste. Como com o aumento do número de nós os erros absolutos continuaram pequenos, pode-se considerar que o aumento do número de nós gerou melhores resultados.

Para os casos unidimensionais nas aplicações multiquádrica e multiquádrica inversa, quanto maior o número de nós, menores são os valores atribuídos ao  $c$  ótimo. Para os casos bidimensionais, não houve relação entre o aumento do número de nós e o valor do parâmetro de forma ótimo.

Nos casos unidimensionais apresentados utilizando as RBF's multiquádrica e multiquádrica inversa, quando comparados os erros entre o método 01 e método 02, apresentados neste trabalho, e os métodos de Hardy (1978) e Fasshauer (2002), o método 02 se mostrou mais eficiente, seguido pelo método de Fasshauer (2002), pelo método 01 e, por fim, pelo método de Hardy (1978).



Para os casos bidimensionais utilizando as RBF's multiquádrica, o método que se mostrou mais eficiente foi o método 01, seguido pelo método de Fasshauer (2002), pelo método 01 e, por fim, pelo método de Hardy (1978). Para o caso do método 01, foi nítido que este foi o melhor e mais preciso, entretanto, diferente dos casos unidimensionais, qualquer um dos quatro métodos analisados neste trabalho apresentaram bons resultados para casos bidimensionais, e podem ser utilizados sem grandes prejuízos.

O método de Fasshauer (2002) para escolha do  $c$ , apesar de ser dependente apenas do número de nós envolvidos, apresentou excelentes resultados para casos unidimensionais envolvendo a RBF multiquádrica e multiquádrica inversa. Entretanto, no caso em que havia a condição de contorno de Neumann, o método não apresentou tanta eficiência.

Nos casos bidimensionais, se fossem utilizados apenas os resíduos do contorno para escolher o parâmetro de forma a ser utilizado no problema, os valores utilizados seriam os mesmos do método 01, ou seja, os resultados seriam os melhores possíveis. Entretanto, para os casos unidimensionais, tanto para a RBF multiquádrica quanto para a RBF multiquádrica inversa, o resíduo do contorno isoladamente não se encontra entre as melhores representações do parâmetro de forma.

Havendo a necessidade de escolher entre a RBF multiquádrica e a RBF multiquádrica inversa para calcular modelos unidimensionais, este trabalho mostrou que a primeira apresenta melhores resultados que a segunda, independente da forma de cálculo do parâmetro de forma.

Assim, é possível concluir que para utilizar o método Meshless assimétrico através da RBF multiquádrica, parâmetros de forma que apresentam os menores resíduos totais são a melhor opção. No entanto, para o cálculo de problemas envolvendo equações unidimensionais, a melhor opção é calcular o resíduo do contorno da mesma forma como se calcula o resíduo do domínio. Já para os casos bidimensionais, o cálculo de cada resíduo (contorno e domínio) deve ser feita de forma isolado antes de soma-los.

No caso aplicado em uma pequena região da Bacia sedimentar do Araripe, os resultados para as três primeiras simulações de 9, 25 e 36 nós mostraram que o erro associado à carga hidráulica do poço 67 foi igual a 4.3%, 5.2% e 5.3%, respectivamente. Entretanto, nas três simulações com 100, 400 e 625 nós o erro permaneceu constante em 5.6% e as linhas equipotenciais também não se modificaram.

No decorrer das simulações do caso real, pode-se perceber que o aumento no número de pontos na região de trabalho não diminui o erro de cálculo, mas ajusta as equipotenciais de forma mais suave na superfície estudada. Além disso, apesar do erro da carga hidráulica do poço 67 ter crescido em 1.5%, isso não significa que o erro tenha aumentado para toda região de trabalho, uma vez que as regiões próximas ao contorno descreveram bem seus poços, ou seja, com uma maior quantidade de dados, acredita-se que o modelo se adeque melhor, uma vez que haverá melhor representação do contorno.

O fato dos valores finais se manterem constantes a partir de certo número de pontos confirma a relação tratada por Kansa (1990a), em que é possível trabalhar com a função de aproximação multiquadrática utilizando uma quantidade reduzida de pontos.

Outro ponto de destaque, está relacionado com o tempo computacional envolvido, uma vez que nas simulações que possuíam uma quantidade reduzida de nós o tempo de geração dos resultados é mais rápido variando aproximadamente entre alguns segundos e 2 min, ao passo que para 400 pontos, utilizando um processador Core i5, o tempo aumentou para aproximadamente 40 min. Isso é importante, pois limitações computacionais existem, mas a possibilidade de trabalhar com um número reduzido de pontos ajuda a atenuar esse tipo de problema.

## 6 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta pesquisa, as aplicações bidimensionais estavam relacionadas com a equação de Laplace, sugere-se como trabalho futuro a aplicação dos dois métodos propostos na metodologia dos resíduos em outras equações envolvendo ambientes bidimensionais como a equação de Poisson, por exemplo.

Realizar estudos estatísticos visando ao desenvolvimento de uma equação empírica para simplificar a aplicação do método dos resíduos.

Outra sugestão consiste em verificar a existência de um limite que relacione o espaço discretizado com o número (mínimo ou máximo) de nós envolvidos.

## 7 BIBLIOGRAFIA

ALENCAR, M.; WENDLAND, E. C. Método de elementos analíticos: Uma alternativa para a modelagem de escoamento subterrâneo. **Revista Águas Subterrâneas**. v. 27, n. 1, p. 110-124, 2013.

ANDRADE, V. S. **Análise Dinâmica de uma Viga Engastada Excitada por uma Fonte Não Ideal**. 2009. 114 f. Tese (Doutorado Escola de Engenharia de São Carlos) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1 ed. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Portugal, 2003.

BOAS, M. L. **Mathematical Methods in The Physical Sciences**. 2 ed. John Wiley & Sons, Inc., 1983.

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 7. ed. John Wiley & Sons, Inc., 2001.

BURDEN, R. L; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010.

CHAPRA, S. C; CANALE, R. P. **Numerical Methods for Engineers**. 5. ed. McGraw-Hill, 2006.

CHEN, Y; LEE, J. D; ESKANDARIAN, A. **Meshless Methods in Solid Mechanics**. Springer, 2006.

CHOW, T. L. **Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction**. New York: Cambridge University Press, 2003.

COGERH – Companhia de Gestão dos Recursos Hídricos. **Boletim de Monitoramento dos Poços com Datalogger no Cariri – Ce (Ano de 2013)**. 2014.

CPRM – Serviço Geológico do Brasil. Programa de recenseamento de fontes de abastecimento por água subterrânea no estado do Ceará - **Diagnóstico do município de Juazeiro do Norte**. Fortaleza: 1998.

DE OLIVEIRA, G. C. P. **Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas pelo Método de Elementos Finitos**. 2011. 138f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Graduate studies in mathematics. V. 19. Berkeley, 1997.

FASSHAUER, G. E. Newton iteration with multiquadrics for the solution of nonlinear PDEs. **Computers and Mathematics with Applications**. v. 43, n. (3/5), p. 423 – 438, 2002.

FERNANDO, A. M; HU, F. Q. DGM-FD: A finite difference scheme based on the discontinuous Galerkin method applied to wave propagation. **Journal of Computational Physics**. v. 230, p. 4871-4898, jun. 2011.

FONG, C. F. C. M; KEE, D. D; KALONI, P. N. **Advanced Mathematics for Engineering and Science**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2003.

FRANKE, C; SCHABACK, R. Solving partial differential equations collocation using radial basis functions. **Applied Mathematics and Computation**. v. 93, p. 73 – 82, jul. 1998.

FRANKE, R. Scattered data interpolation: Tests of some methods. **Mathematics of Computation**. v. 38, n. 157, p. 181 – 200, jan. 1982.

GERALD, C. F; WHEATLEY, P. O. **Applied Numerical Analysis**. 4. ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

GILAT, A; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GUEDES, C. M. C. F. F. M. **Métodos sem malha em problemas de mecânica computacional. Aplicação aos processos de enformação plástica**. 2006. 204 f. Tese (Doutorado em Ciências de Engenharia) – Universidade do Porto, Porto, 2006.

HARDY, R. L. The Application of multiquadric equations and point mass anomaly models to crustal movement studies. **NOAA Technical Report NOS 76 NGS 11**. U.S. Department of Commerce - National Oceanic and Atmospheric Administration, 1978.

HARDY, R. L. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988. **Computers Math. Applic.** Vol. 19, n. 8/9, p. 163 – 208, 1990.

HOFFMAN, J. D. **Numerical Methods for Engineers and Scientists**. 2. ed. New York: Marcel Dekker, INC, 2001.

IENO, G; NEGRO, L. **Termodinâmica**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

INCROPERA, F. P; DEWITT, D. P; BERGMAN, T. L; LAVINE, A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC. 2008.

KANSA, E. J. Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics - I: Surface approximations and partial derivative estimates. **Computers Math. Applic.** Vol. 19, n. 8/9, p. 127 – 145, 1990a.

KANSA, E. J. Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics - II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. **Computers Math. Applic.** Vol. 19, n. 8/9, p. 147 – 161, 1990b.

KANSA, E. J; CARLSON, R. E. Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape parameters. **Computers Math. Applic.** Vol. 24, n. 12, p. 99 – 120, 1992.

KANSA, E. J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. 1999. Disponível em: <<http://www.rbf-pde.org/kansaweb.html>>. Acessado em: 18 de jan. 2016.

KASNER, E; DE CICCO, J. The Laplace Equation. **Science**. v. 102, n. 2645, p. 256-257, set. 1945.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 10. ed. John Wiley & Sons, Inc., 2011.

LI, S; LIU, W. K. Meshfree and particle methods and their applications. **Revista Applied Mechanics Reviews**. v. 55, n. 1, p. 1 – 34, jan. 2002.

LIU, G. R; LIU, M. B. **Smoothed particle hydrodynamics: A Meshfree Particle Method**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2003.

LIU, H; LI, J; SHAO, S; TAN, S. K. SPH modeling of tidal bore scenarios. **Natural Hazards**. v. 75, n. 2, p. 1247 – 1270, 2015.

LIN, H; ATLURI, S. N. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equations. **Revista CMES**. v. 2, n. 2, p. 117 – 142, 2001.

LOTTI, R. S; MACHADO, A. W; MAZZIEIRO, E. T; LANDRE JUNIOR, J. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press Ortodon Ortop Facial**. v. 11, n. 2, p. 35-43, mar/abr. 2006.

MENESCAL, G. C. **Modelagem numérico-analítica da contaminação de aquíferos utilizando o método de colocação RBF livre de malha**. 2008. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil, concentração Recursos Hídricos) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008.

MIDDLETON, J; JONES, M. L; WILSON, A. N. Three-dimensional analysis of orthodontic tooth movement. **Journal of Biomedical Engineering**. vol. 12, p. 319 – 327, jul. 1990.

MONERAT, G. A; FERREIRA FILHO, L. G; SILVA, E. V. C; OLIVEIRA NETO, G; NOGUEIRA, P. H. A. S; DE ASSUMPTÃO, A. R. P. Quantização de sistemas hamiltonianos via método de diferenças finitas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. v. 32, n. 1, p. 1304 – 1304-10, mar. 2010.

PAN, X. F; ZHANG, X; LU, M. W. Meshless Galerkin least-squares method. **Revista Comput Mech**. v. 35, p. 182 – 189, 2005.

PINCHOVER, Y; RUBINSTEIN, J. **An Introduction to Partial Differential Equations**. New York: Cambridge University Press, 2005.

QUADROS, R. S; BORTOLI, A. L. **Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros**. Porto Alegre, 2009.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3. ed. McGraw-Hill, 2006.

ROCHA, P. A. C; ALBIERO, D; DA SILVA, M. E. V; PITOMBEIRA, E. S. Study of a parallel algorithm in liquid front propagation for Ceará's soils using the finite difference method. **Semina: Ciências Agrárias**. v. 33, n. 6 (suplemento 1), p. 2959-2972, 2012.

RODRIGUES, J. D; ROQUE, C. M. C; FERREIRA, A. J. M. Analysis of isotropic and laminated plates by an affine space decomposition for asymmetryc radial basis funtions collocation. **Revista Engineering Analysis with Boundary Elements**. v. 36, p. 709 – 715, jan, 2012.

ROQUE, C. M. C. **Métodos sem malha para a análise de placas e cascas compósitas**. 2007. 401f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade do Porto, 2007.

ROMERO, O. J; FEJOLI, R. F. Utilização de Espuma como Mecanismo de Controle da Mobilidade em Rochas-Reservatório. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**. vol. 31, n. 04, p. 218 – 227, dez, 2015.

SODRÉ, U. **Equações Diferenciais Parciais**. 2003. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/edp.pdf>>. Acessado em: 20 de mar. 2016.

SUCH, M; JIMENEZ-OCTAVIO, J. R; CARNICERO, A; SANCHEZ-REBOLLO, C. Simulación de cargas móviles sobre estructuras mediante un mallado móvil de elementos finitos. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**. v. 31, n. 04, p. 212 – 217, dez, 2015.

SUSA, H. SPH Radiative Hydrodynamics Methods. **International Astronomical Union. Proceedings of the International Astronomical Union**. v. 6, p. 195 – 202, mai, 2010.

STAVROULAKIS, I. P; TERSIAN, S. A. **Partial Differential Equations: An Introduction with Mathematica and MAPLE**. 2. ed. London: World Scientific Publishing Co. Re. Ltd., 2004.

TORII, A. J. **Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. 2012. 223f. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

VALENCIA, L. A. L. **Controle de Vibrações em Vigas Metálicas com Distintas Configurações de Apoio Utilizando Amortecedores de Massa Sintonizados**. 2007. 156f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

VAN WYLEN, G; SONNTAG, R; BORGNAKKE, C. **Fundamentos da Termodinâmica Clássica**. 4. ed. São Paulo: Blucher, 1995.

VERÍSSIMO, L. S. **A importância das águas subterrâneas para o desenvolvimento socioeconômico do eixo CRAJUBAR, Cariri Ocidental – Estado do Ceará**. 1999. 160 p. Dissertação (Mestrado em Geologia, concentração Hidrogeologia) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1999.

VERÍSSIMO, L. S.; AGUIAR, R. B. **Comportamento das bacias sedimentares da região semiárida do nordeste brasileiro - Hidrogeologia da porção oriental da Bacia Sedimentar do Araripe**. Meta A: Diagnóstico do Estado da Arte. Rede Cooperativa de Pesquisa: FINEP – CPRM – UFC, 2005.

VRANKAR, L; KANSA, E. J; LING, L; RUNOVIC, F; TURK, G. Moving-boundary problems solved by adaptive radial basis functions. **Revista Computers & Fluids**. v. 39, n. 9, p. 1480 – 1490, out. 2010.

XIONG, Q; DENG, L; WANG, W; GE, W. SPH method for two-fluid modeling of particle – fluid fluidization. **Revista Chemical Engineering Science**. v. 66, n. 9, p. 1859 – 1865, mai. 2011.

WANG, H; YAN, G; YAN, B. Lattice Boltzmann Model Based on the Rebuilding-Divergency Method for the Laplace Equation and the Poisson Equation. **Journal of Scientific Computing**. v. 46, p. 470-484, mar. 2011.

ZILL, D. G; CULLEN, M. R. **Differential Equations: with boundary-value problems**. 7. ed. Belmont: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009.