



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO PEREIRA CHAVES

TEOREMAS DE COMPARAÇÃO PARA O NÚCLEO DO CALOR DE
SUBVARIÉDADES MÍNIMAS E APLICAÇÕES

FORTALEZA

2016

FRANCISCO PEREIRA CHAVES

TEOREMAS DE COMPARAÇÃO PARA O NÚCLEO DO CALOR DE
SUBVARIETADES MÍNIMAS E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli
Feitosa Bessa

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

C438t Chaves, Francisco Pereira
Teoremas de comparação para o núcleo do calor de subvariedades mínimas e aplicações / Francisco Pereira Chaves. – 2016.
64 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Geometria Diferencial
Orientação: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa.

1. Variedades riemanianas. 2. Núcleo do calor. 3. Subvariedades mínimas. I. Título.

CDD 516.36

FRANCISCO PEREIRA CHAVES

TEOREMAS DE COMPARAÇÃO PARA O NÚCLEO DO CALOR DE
SUBVARIÉDADES MÍNIMAS E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 11/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Flávio França Cruz
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

FRANCISCO PEREIRA CHAVES

TEOREMAS DE COMPARAÇÃO PARA O NÚCLEO DO CALOR DE
SUBVARIETADES MÍNIMAS E APLICAÇÕES

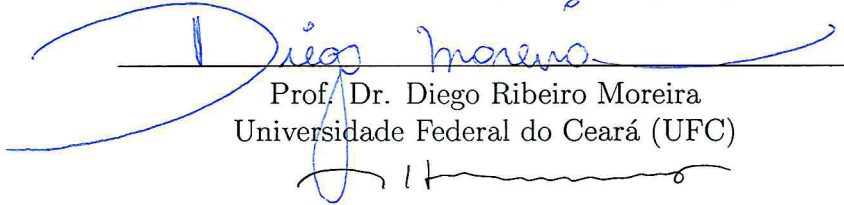
Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 11 / 02 / 2016.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

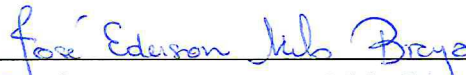


Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Flávio França Cruz
Universidade Regional do Cariri (URCA)



Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho aos meus pais queridos
Antonio e Maria.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela graça que me concedeu de realizar este trabalho, por toda ajuda nos momentos difíceis, mostrando sempre um caminho a seguir, e pelo reconhecimento dos meus esforços.

Aos meus pais, por todo amor, carinho e dedicação, pelos ensinamentos e pela força que sempre me dedicaram, tornando-me capaz de alcançar meus objetivos, e aos meus irmãos, por todo apoio, incentivo e confiança em mim depositados.

A minha esposa, Regivânia, por todo amor, carinho, companheirismo e compreensão.

Aos meus sobrinhos, por me fazer acreditar que posso ser uma pessoa cada vez melhor, e aos demais familiares, pela presença em todos os momentos necessários.

Aos amigos de minha cidade querida, Missão Velha, por todo incentivo recebido durante toda minha jornada.

Ao professor Gregório Pacelli Feitosa Bessa, pela orientação, pelas palavras de incentivo e confiança e por todo apoio recebido durante a realização deste trabalho.

Aos professores Diego Moreira, Jorge Herbert, Flávio França e José Ederson, pelas observações e sugestões sobre este trabalho e pela disponibilidade para a participação da banca examinadora.

A todos os colegas da Pós-Graduação em Matemática da UFC, por todo apoio, conselhos e sugestões recebidos e pela contribuição na realização deste trabalho, dentre os quais posso citar Adam, Adriano, Assis, Calvi, Cleiton, Damião Junio, Davi Lustosa, Davi Ribeiro, Disson, Ednardo, Edvalter, Emanuel, Fabrício, Fagner, Flávio, Grangeiro, Halison, João Francisco, Jocel, Kelson, Kelton, Luiz Antonio, Marcos Ranieri, Nazareno, Nino, Rondinelle, Thadeu, Tiago Nogueira, Tiago Veras, Valdir, Wanderley e Wilson.

Agradecimentos especiais aos amigos João Vitor e Tiarlos, por todo conhecimento compartilhado e apoio nos momentos difíceis, como também ao amigo e parceiro, Renivaldo, o baiano, com quem obtive os resultados da terceira parte deste trabalho.

À bibliotecária Rocilda Maria Cavalcante Sales, pela correção das referências bibliográficas e aos demais bibliotecários da biblioteca do curso de Matemática.

Às secretárias Andréa e Jéssica, pelo auxílio indispensável em todos os momentos em que precisei.

À CAPES, ao CNPq e à FUNCAP, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

Charles Chaplin

RESUMO

No presente trabalho, provaremos resultados de comparação para o núcleo do calor de subvariedades mínimas de variedades Riemannianas com curvatura seccional limitada superiormente pela curvatura de uma variedade modelo. Em seguida, iremos obter resultados sobre a propriedade L^1 -Liouville de submersões Riemannianas com fibras mínimas. Por último, provaremos desigualdades para o tom fundamental ponderado de subconjuntos transversalmente folheados de variedades Riemannianas ponderadas em termos das curvaturas médias ponderadas das folhas da folheação.

Palavras-chave: Núcleo do calor, Subvariedades mínimas, Propriedade L^1 -Liouville, Tom fundamental, Curvatura média.

ABSTRACT

In this work we will prove comparison results for the heat kernel of minimal submanifolds in Riemannian manifolds with sectional curvature bounded above by the curvature of a model manifold. Next we will obtain results about the L^1 -Liouville property of Riemannian submersions with minimal fibers. Finally, we will prove inequalities for the weighted fundamental tone of transversally foliated subsets of weighted Riemannian manifolds in terms of the weighted mean curvatures of the leaves of the foliation.

Keywords: Heat kernel, Minimal submanifolds, L^1 -Liouville property, Fundamental tone, Mean curvature.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	Preliminares	14
2.1	Operadores diferenciais	14
2.2	Curvaturas	22
2.3	Variedades esfericamente simétricas	23
2.4	Teoria espectral	27
2.5	Núcleo do calor e propriedades estocásticas	29
2.6	Imersões isométricas	32
2.7	Submersões Riemannianas	33
3	Teoremas de comparação para o núcleo do calor de subvariedades mínimas	36
3.1	Núcleo do calor em variedades modelo	36
3.2	Teoremas de comparação para o núcleo do calor	42
4	Variedades L^1 -Liouville	51
4.1	A propriedade L^1 -Liouville	51
4.2	A propriedade L^1 -Liouville de submersões Riemannianas	52
5	Tom fundamental ponderado e folheações ponderadas	56
5.1	Variedades Riemannianas ponderadas	56
5.2	Folheações em variedades ponderadas	59
6	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

O estudo do núcleo do calor de variedades Riemannianas tem sido de grande relevância em Matemática nas últimas décadas, veja [25]. Entre uma miríade de aplicações do núcleo do calor em Matemática, podemos citar as relações geométricas do espectro do Laplaciano codificada no núcleo do calor. Essas relações se manifestam evidente na expansão assintótica do núcleo do calor em autofunções e autovalores. É interessante encontrar cotas inferiores e superiores para o núcleo do calor em termos da geometria das variedades, porque estas estão relacionadas com propriedades mais sofisticadas da variedade, tais como desigualdades isoperimétricas. Na década de 1980, foram publicados trabalhos importantes [10, 11, 28] estabelecendo teoremas de comparação do núcleo do calor. Cheeger e Yau, em [10], obtiveram teoremas de comparação para o núcleo do calor, comparando as curvaturas médias das esferas geodésicas e as curvaturas de Ricci da variedade com as respectivas curvaturas de uma variedade modelo. Cheng, Li e Yau, em [11], provaram teoremas de comparação para o núcleo do calor. Eles mostraram que o núcleo do calor de um domínio compacto Ω com raio extrínseco a de uma subvariedade M^m minimamente imersa em uma forma espacial de curvatura constante b , não é maior do que o núcleo do calor da bola geodésica, da forma espacial de curvatura constante b de dimensão $m = \dim M$, de raio a centrada na origem. Em [28], Markvorsen estendeu os resultados de Cheng-Li-Yau para subvariedades minimamente imersas em espaços ambiente com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $b \in \mathbb{R}$. Neste trabalho, estendemos os resultados de Cheng-Li-Yau e Markvorsen para imersões mínimas em variedades com curvatura limitada superiormente por uma função radial $-G$. Essa função radial é associada a uma variedade modelo e provamos que o núcleo do calor de um domínio compacto Ω de M é limitado pelo núcleo do calor de uma bola do modelo de um certo raio associado a Ω e à imersão. Mais precisamente, seja N uma variedade Riemanniana completa de dimensão n e seja $q \in N$ um ponto distinguido. Suponha que a curvatura seccional radial de N ao longo de geodésicas partindo de q é limitada superiormente

$$K_N^{\text{rad}}(z) \leq -G(r_q(z)),$$

onde $r_q(z) = \text{dist}_N(q, z)$ e $G: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Seja $\sigma: [0, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$ a única solução do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \sigma'' - G\sigma = 0, \\ \sigma(0) = 0, \sigma'(0) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

onde R é o maior real tal que $\sigma|_{(0, R_0)} > 0$. O modelo \mathbb{M}_σ^m associado é o espaço quociente

$$\mathbb{M}_\sigma^m = [0, R_0) \times \mathbb{S}^{m-1} / \sim$$

onde

$$(t, \theta) \sim (s, \alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} t = s = 0 \\ t = s \neq 0, \quad \theta = \alpha \end{cases}$$

A origem o de \mathbb{M}_σ^m é a classe $[(0, \theta)] = \{0\} \times \mathbb{S}^{m-1} / \sim$. Seja $B_\sigma(R)$ a bola geodésica de \mathbb{M}_σ^m com centro na origem e de raio R . Os núcleos do calor $\mathcal{H}_R^\sigma(o, y, t) = \mathcal{H}_R^\sigma(|o - y|, t)$, $\mathcal{K}_R^\sigma(o, y, t) = \mathcal{K}_R^\sigma(|o - y|, t)$ de $B_\sigma(R)$ com dados de Dirichlet e Neumann, respectivamente, dependem somente da distância $|o - y|$ e de t .

Teorema 1.1. *Sejam M e N variedades Riemannianas completas de dimensão m e n respectivamente, e seja $\varphi: M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica mínima. Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto com bordo suave $\partial\Omega \neq \emptyset$. Para qualquer $p \in \Omega$ com $q = \varphi(p)$, seja*

$$a = \sup_{y \in \Omega} \text{dist}_N(q, \varphi(y))$$

o raio extrínseco de Ω em p . Suponha que $a \leq \text{inj}_N(q)$ e que a curvatura seccional radial de N ao longo de geodésicas partindo de q satisfaz

$$K_N^{\text{rad}}(z) \leq -G(r_q(z))$$

onde G é uma função suave par na origem e $G' \leq 0$ em $[0, a)$.

1. Se a solução σ de (1) satisfaz $\sigma' > 0$ em $[0, a)$, e a é tal que

$$a \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\|G_-\|_{L^\infty([0, a])}}}$$

então

$$\mathcal{H}_\Omega(p, y, t) \leq \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t)$$

para todo $y \in \Omega$ e todo $t \in [0, \infty)$.

2. Se a imersão φ é própria e $\Omega = D_p(a)$ é a bola extrínseca com centro em p e raio a , isto é, a componente conexa de $\varphi^{-1}(B_N(a))$ contendo p , então

$$\mathcal{K}_\Omega(p, y, t) \leq \tilde{\mathcal{K}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t)$$

para todo $y \in \Omega$ e todo $t \in [0, \infty)$. Onde $\mathcal{H}_\Omega(p, y, t)$ e $\mathcal{K}_\Omega(p, y, t)$ são os núcleos do calor de Ω centrados em p , com dados de Dirichlet e Neumann respectivamente.

Uma variedade Riemanniana M é chamada Liouville quando toda função harmônica limitada em M deve ser constante. Essa definição é motivada pelo Teorema de Liouville que diz que o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é Liouville. Mais geralmente dizemos que uma variedade Riemanniana é L^p -Liouville se toda função harmônica $u \in L^p(M)$ deve ser constante. Pode-se considerar uma noção de variedades L^p mais geral. Em vez de funções harmônicas L^p , se considera funções superharmônicas não negativas L^p . No capítulo 4,

estudaremos as propriedades L^1 -Liouville em uma importante classe de variedades Riemannianas, estudadas inicialmente por O’Neil, em [29] e [30], e Gray, em [17], a saber, as submersões Riemannianas. Nós provamos que há uma relação estreita entre as propriedades L^1 -Liouville da base e do espaço total de submersões Riemannianas se as fibras são mínimas ou mínimas e compactas. Para contextualizar esse resultado, ressaltamos que existem exemplos de variedades Liouville, M e K com a variedade K compacta tal que o produto $M \times K$ não é Liouville, veja [20, p.209]. Nós provamos o resultado a seguir.

Teorema 1.2. *Sejam M e N variedades Riemannianas completas e seja $\pi: M \rightarrow N$ uma submersão Riemanniana com fibras mínimas $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in N$. Se M é L^1 -Liouville, então N é L^1 -Liouville. Se, além da minimalidade, as fibras F_p são compactas então M é L^1 -Liouville se, e somente se, N é L^1 -Liouville.*

Na última parte desta tese, iremos considerar o espectro $\text{Spec}(-\Delta_f)$ do operador Laplaciano ponderado $-\Delta_f$ de uma variedade Riemanniana ponderada M_f . Obtemos limites inferiores para o tom fundamental ponderado $\lambda_f^*(-\Delta_f) := \inf \text{Spec}(-\Delta_f)$ de subconjuntos abertos admitindo uma folheação transversalmente orientada \mathcal{F} , em termos das curvaturas médias ponderadas das folhas $F \in \mathcal{F}$. Nossos resultados são extensões das desigualdades do tipo Chern-Heiz para folheações, obtidas por Barbosa, Bessa e Montenegro, em [1]. Nosso resultado é o seguinte.

Teorema 1.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^2 transversalmente orientada de codimensão 1 de um conjunto aberto conexo Ω de uma variedade Riemanniana ponderada $(n+1)$ -dimensional M_f . Então*

$$2\sqrt{\lambda_f^*(\Omega)} \geq \inf_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} |H_f^F(x)|,$$

onde H_f^F significa a curvatura média ponderada da folha F .

e

2 Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve apresentação de alguns fatos básicos de geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto. Indicamos como leitura complementar as referências [16], [21] e [33].

2.1 Operadores diferenciais

Seja M^m uma variedade Riemanniana m -dimensional suave com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇ . Em todo o texto, suave significa de classe C^∞ . O elemento de volume Riemanniano da métrica g será denotado por $d\nu$. Denotaremos por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais suaves em M e por $\mathcal{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais suaves em M .

Definição 2.1. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave $\text{grad } f$, definido em M por*

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = df(X),$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Decorre da definição que se $f, g \in C^\infty(M)$, então:

1. $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$;
2. $\text{grad}(fg) = g \text{grad } f + f \text{grad } g$.

Proposição 2.1. *Se $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\text{grad } f = \sum_{k,l=1}^m g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Em particular,

$$|\text{grad } f|^2 = \sum_{k,l=1}^m g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Demonstração. Se $\text{grad } f = \sum_{l=1}^m a_l \frac{\partial}{\partial x^l}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^k} &= \left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^m a_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \sum_{j=1}^m a_j g_{jk}, \end{aligned}$$

de modo que

$$g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^m a_j g_{jk} g^{kl} = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{jl} = a_l.$$

Para o que falta, temos

$$\begin{aligned} |\text{grad } f|^2 &= \left\langle \sum_{k,l=1}^m g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l}, \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l} g^{kl} g^{ij} g_{lj} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= \sum_{j,k,l} g^{kl} \delta_{il} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, seja $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Em particular, se p é ponto de máximo ou de mínimo local para f , então $\text{grad } f(p) = 0$.

Demonstração. Para a primeira parte basta observar que, se X for uma extensão local de γ' , então

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = df_p(X) = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Suponha agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe um conjunto aberto $U \subset M$ contendo p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$. Se $v \in T_p M$ e $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ é como no enunciado, então $f \circ \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} = 0.$$

Como $v \in T_p M$ é arbitrário, segue que $\text{grad } f(p) = 0$. □

Definição 2.2. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Dizemos que $p \in M$ é um ponto crítico de f se $\text{grad } f(p) = 0$. Em particular, segue da Proposição 2.2 que todo ponto de máximo local ou de mínimo local de f é um ponto crítico de f .*

Corolário 2.1. *Seja Ω um subconjunto aberto conexo de uma variedade Riemanniana M . Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave com $\text{grad } f = 0$ em Ω , então f é constante em Ω .*

Demonstração. Fixado um ponto $p \in \Omega$, seja $A = \{q \in \Omega; f(q) = f(p)\}$. Então $A \neq \emptyset$ (pois $p \in A$). A continuidade de f garante que A é fechado em Ω . Afirmamos que A é aberto em Ω . De fato, seja $q \in A$ e consideremos uma vizinhança coordenada conexa U de q . Dado $q' \in U$, existe uma curva suave $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$, com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = q'$. Pela Proposição 2.2, temos que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \left\langle \text{grad } f, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle_{\gamma(t)} = 0.$$

Logo a função $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)$ é constante em $[0, 1]$. Em particular,

$$f(p) = f(q) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(q'),$$

e assim $q' \in A$. Desde que $q' \in U$ é arbitrário, concluímos que $U \subset A$. Logo, A é aberto. Como Ω é conexo, concluímos que $A = \Omega$ e portanto f é constante em Ω . \square

Corolário 2.2. *Se $f: M^m \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ e $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$\text{grad}(F \circ f) = F'(f) \text{grad } f.$$

Demonstração. Se $p \in M$, $v \in T_p M$ e $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então segue da Proposição 2.2 que

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(F \circ f), v \rangle_p &= \left. \frac{d}{dt}(F \circ f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \\ &= F'(f(p)) \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \\ &= F'(f(p)) \langle \text{grad } f, v \rangle_p. \end{aligned}$$

\square

Definição 2.3. *Seja X um campo vetorial suave em M . A divergência de X é a função suave $\text{div } X: M \rightarrow \mathbb{R}$, dada para $p \in M$ por*

$$(\text{div } X)(p) = \text{tr} \{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_p M$ e tr denota o traço do operador linear.

Decorre da definição que se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, então

1. $\text{div}(X + Y) = \text{div } X + \text{div } Y$.
2. $\text{div}(fX) = f \text{div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle$.

Proposição 2.3. *Seja $X \in \mathcal{X}(M)$ e seja $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$. Se X for dado em U por $X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, então a divergência de X é dada em U por*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \Gamma_{ij}^j \right],$$

onde os Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da métrica de M em U .

Demonstração. Notamos primeiro que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial a_k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + a_k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left[\frac{\partial a_k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + a_k \Gamma_{ik}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \sum_{j,k=1}^m \left[\frac{\partial a_k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} + a_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Portanto, como o traço de um operador linear é o traço da matriz que o representa em qualquer base, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^m \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_j \Gamma_{ij}^i \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \Gamma_{ji}^j \right] = \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \Gamma_{ij}^j \right]. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.4. *Seja $X \in \mathcal{X}(M)$ e seja $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$. Se X for dado em U por $X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, então a divergência de X é dada em U por*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} (a_i \sqrt{G}), \quad (2)$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) g^{jk} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{kj} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{jk} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{kj} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{kj}. \end{aligned}$$

Afirmamos agora que

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{jk} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x^i}.$$

Para provar a relação acima, seja $(g^k)_i$ a matriz obtida de (g_{ij}) derivando as entradas de sua k -ésima coluna na direção de $\frac{\partial}{\partial x^i}$, isto é,

$$(g^k)_i = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^i} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^i} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}.$$

Desde que $G = \det(g_{ij})$ é uma função linear de cada uma de suas colunas, temos

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \det(g_{ij})^{-1} \det((g^k)_i) = \det(g^{-1}(g^k)_i).$$

Segue agora, desde que $g^{-1}g = Id$, que

$$g^{-1}(g^k)_i = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & A_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & A_{(k-1)k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{(k+1)k} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

onde $A_{lk} = g^{lj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$. Portanto,

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \det(g^{-1}(g^k)_i) = A_{kk} = g^{kj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i},$$

como afirmado. Segue então daí e da Proposição 2.3 que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \Gamma_{ij}^j \right] = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + \frac{a_i}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + \frac{a_i}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^i} \right] = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \left[\sqrt{G} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^i} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} (a_i \sqrt{G}). \end{aligned}$$

□

Definição 2.4. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O Laplaciano de f é a função suave $\Delta f: M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} f.$$

Usando as propriedades do gradiente e da divergência, temos, para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$, que

1. $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$.
2. $\Delta(fg) = g \Delta f + f \Delta g + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$.

Proposição 2.5. *Se $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$, então o Laplaciano de f é dado em U por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{G} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

Demonstração. Pela Proposição 2.1, temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} f \\ &= \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \end{aligned}$$

onde $a_i = \sum_{j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$. Assim, pela Proposição 2.4, temos

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} (a_i \sqrt{G}) = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{G} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

□

Proposição 2.6. *Se $f: M \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ e $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$\Delta(F \circ f) = F''(f)|\operatorname{grad} f|^2 + F'(f)\Delta f.$$

Demonstração. Usando a definição do Laplaciano, as propriedades da divergência e o Corolário 2.2, temos que

$$\begin{aligned} \Delta(F \circ f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(F \circ f)) = \operatorname{div}(F'(f) \operatorname{grad} f) \\ &= \langle \operatorname{grad} F'(f), \operatorname{grad} f \rangle + F'(f) \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &= F''(f) \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle + F'(f) \Delta f \\ &= F''(f) |\operatorname{grad} f|^2 + F'(f) \Delta f. \end{aligned}$$

□

Definição 2.5. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O Hessiano de f em $p \in M$ é o operador linear $\text{Hess } f: T_p M \rightarrow T_p M$, definido por*

$$\text{Hess } f(v) = \nabla_v \text{grad } f, \quad v \in T_p M.$$

Podemos considerar $\text{Hess } f$ como um $(0, 2)$ -tensor em M tal que, para cada par de campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\text{Hess } f(X, Y) = \langle \text{Hess } f(X), Y \rangle = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle.$$

Proposição 2.7. *Se $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $p \in M$, então o Hessiano de f em p é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Sejam $v, w \in T_p M$ e sejam V, W , respectivamente, extensões de v e w a campos definidos em uma vizinhança de p em M , então

$$\begin{aligned} \langle \text{Hess } f(v), w \rangle &= \langle \nabla_V \text{grad } f, W \rangle \\ &= V \langle \text{grad } f, W \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_V W \rangle \\ &= V(Wf) - \langle \text{grad } f, \nabla_W V + [V, W] \rangle \\ &= W(Vf) + [V, W]f - \langle \text{grad } f, \nabla_W V + [V, W] \rangle \\ &= W(Vf) - \langle \text{grad } f, \nabla_W V \rangle \\ &= \langle \text{Hess } f(w), v \rangle. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.8. *Se $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta f = \text{tr} \{ \text{Hess } f \}.$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal móvel $\{E_1, \dots, E_m\}$, isto significa que os campos vetoriais $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{X}(M)$ são ortonormais em cada ponto de U . Então

$$\begin{aligned} \text{tr} \{ \text{Hess } f \}(p) &= \sum_{i=1}^m \langle \text{Hess } f(E_i), E_i \rangle_p \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} \text{grad } f, E_i \rangle_p \\ &= \text{div}(\text{grad } f)(p) \\ &= \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

Agora vamos enunciar uma fórmula integral, conhecida como Teorema da Divergência ou Teorema de Green.

Teorema 2.1 (Teorema da Divergência). 1. *Seja X um campo vetorial de classe C^1 com suporte compacto em uma variedade Riemanniana M . Então*

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\nu = 0.$$

2. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M , e denote por dA o elemento de volume Riemanniano em ∂M com respeito à métrica induzida. Seja η o campo vetorial normal unitário exterior em ∂M . Então, para um campo vetorial X de classe C^1 em M , temos*

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\nu = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle \, dA.$$

Para uma demonstração, veja Sakai [33].

Corolário 2.3 (Fórmulas de Green). 1. *Seja M uma variedade Riemanniana e sejam $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e C^2 , respectivamente. Se $h \operatorname{grad} f$ tem suporte compacto em M , então*

$$\int_M \{ \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f \rangle - h \Delta f \} \, d\nu = 0.$$

Se, além disso, h é de classe C^2 e $f \operatorname{grad} h$ tem suporte compacto em M , então

$$\int_M \{ h \Delta f - f \Delta h \} \, d\nu = 0.$$

Em particular, se f tem suporte compacto, então $\int_M \Delta f \, d\nu = 0$.

2. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M e sejam $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e C^2 , respectivamente. Se η for o campo vetorial normal unitário exterior em ∂M , então*

$$\int_M \{ \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f \rangle - h \Delta f \} \, d\nu = \int_{\partial M} h(\eta f) \, dA.$$

Em particular, $\int_M \Delta f \, d\nu = - \int_{\partial M} \eta f \, dA$ e

$$\int_M \{ h(\eta f) - f(\eta h) \} \, dA = 0.$$

Para uma demonstração, veja Sakai [33].

2.2 Curvaturas

Nesta seção, relembremos definições e propriedades básicas das curvaturas seccional e de Ricci e da curvatura escalar.

Definição 2.6. *Seja M uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1, 3)$ -tensor $Rm: \mathcal{X}^3(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dado para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ por*

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

Podemos interpretar o tensor curvatura de Riemann como um $(0, 4)$ -tensor, $Rm: \mathcal{X}^4(M) \rightarrow C^\infty(M)$, definido por

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle Rm(X, Y)Z, W \rangle.$$

Proposição 2.9. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

1. $Rm(X, Y)Z = -Rm(Y, X)Z$;
2. *Primeira identidade de Bianchi:*

$$Rm(X, Y)Z + Rm(Y, Z)X + Rm(Z, X)Y = 0;$$

3. $Rm(X, Y, Z, W) + Rm(X, Y, W, Z) = 0$;
4. $Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y)$;
5. *Segunda identidade de Bianchi:*

$$(\nabla_X Rm)(Y, Z)U + (\nabla_Y Rm)(Z, X)U + (\nabla_Z Rm)(X, Y)U = 0.$$

Para uma demonstração, veja Sakai [33].

Definição 2.7. *Sejam $p \in M$ e π um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$. A curvatura seccional K_π de π é dada por*

$$K_\pi = \frac{\langle Rm(X, Y)Y, Z \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \quad (:= K(X, Y)),$$

onde $X, Y \in \pi$ são dois vetores linearmente independentes de $T_p M$. Lembramos que esta definição não depende da escolha dos vetores (veja [33]).

Note que se $\{e_1, e_2\}$ for uma base ortonormal de π , então

$$K_\pi = \langle Rm(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle.$$

Seja M^m uma variedade Riemanniana m -dimensional. Para um ponto $p \in M$ fixado, seja $r(x) = \text{dist}_M(p, x)$ a função distância de p em M . Podemos definir em $M \setminus (\text{cut}(p) \cup \{p\})$ as *coordenadas polares com pólo em p* . Isto é, para qualquer ponto

$x \in M \setminus (\text{cut}(p) \cup \{p\})$, podemos associar um raio polar $r = \text{dist}_M(p, x)$ e um “ângulo” polar $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ tal que a geodésica minimizante ligando p a x parte de p na direção θ em $T_p M$. Aqui estamos identificando $T_p M$ com \mathbb{R}^m , de modo que θ pode ser considerado como um ponto de \mathbb{S}^{m-1} . Se $\text{cut}(p) = \emptyset$, dizemos que M é uma *variedade com um pólo*. Neste caso, dizemos que p é um *pólo* de M . Observamos que se M é uma variedade com um pólo p , então podemos definir as coordenadas polares em $M \setminus \{p\}$. Se, além disso, M é geodesicamente completa, então M é difeomorfa a \mathbb{R}^m .

Definição 2.8. Para qualquer $x \in M \setminus \{p\}$ tal que $x \notin \text{cut}(p)$, dizemos que um subespaço bidimensional π de $T_x M$ é radial se π admite uma base $\{\frac{\partial}{\partial r}, X\}$, onde X é um vetor unitário ortogonal a $\frac{\partial}{\partial r}$. A curvatura seccional radial de M ao longo de geodésicas partindo de p , denotada por K^{rad} é definida por

$$K^{\text{rad}} = \sup\{K_\pi; \pi \text{ é radial}\}.$$

Definição 2.9. O tensor curvatura de Ricci é o $(0, 2)$ -tensor $\text{Ric}: \mathcal{X}^2(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dado para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ por

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}\{Z \mapsto Rm(Z, X)Y\}.$$

Note que $\text{Ric}(X, Y)$ é simétrico com respeito a X e Y . De fato, se $\{e_1, \dots, e_m\}$ for uma base ortonormal de $T_p M$, então

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^m \langle Rm(e_i, X)Y, e_i \rangle = \sum_{i=1}^m \langle Rm(e_i, Y)X, e_i \rangle = \text{Ric}(Y, X).$$

Assim, o tensor de Ricci pode ser considerado como o $(1, 1)$ -tensor simétrico $\text{Ric}: \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$, definido por

$$\text{Ric}(v) = \text{Ric}(v, v) = \sum_{i=1}^m \langle Rm(e_i, v)v, e_i \rangle.$$

Definição 2.10. A curvatura escalar de uma variedade (M, g) é a função $S: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$S = \text{tr}\{\text{Ric}\}.$$

2.3 Variedades esfericamente simétricas

Seja M^m uma variedade Riemanniana m -dimensional suave com métrica g . Fixado um ponto $o \in M$, seja $r(x) = \text{dist}_M(o, x)$ a função distância de o e considere em $M \setminus (\text{cut}(o) \cup \{o\})$ as coordenadas polares (r, θ) com pólo em o . Em coordenadas polares,

a métrica g em $M \setminus (\text{cut}(o) \cup \{o\})$ tem a forma

$$g = dr^2 + \mathcal{A}_{ij} d\theta^i d\theta^j,$$

onde $(\theta^1, \dots, \theta^{m-1})$ são coordenadas em \mathbb{S}^{m-1} e $\mathcal{A}_{ij}(r, \theta)$ é uma matriz positiva definida. Seja $S_r := \partial B_M(r) \setminus \text{cut}(o)$, onde $B_M(r)$ denota a bola geodésica de M com centro em o e raio r . O operador Laplaciano em M em coordenadas polares tem a forma

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{A} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta_{S_r}$$

onde $A = \det \mathcal{A}_{ij}$ e Δ_{S_r} é o operador Laplaciano na subvariedade S_r .

Definição 2.11. Dizemos que uma variedade Riemanniana m -dimensional (M, g) é uma variedade esfericamente simétrica ou variedade modelo se valem as seguintes condições:

1. Existe uma carta $\Phi: M \rightarrow B(r_0)$, onde $B(r_0) := \{x \in \mathbb{R}^m; |x| < r_0\}$ é a bola em \mathbb{R}^m com centro na origem e raio $r_0 \in (0, \infty]$.
2. A métrica g em coordenadas polares (r, θ) na carta acima tem a forma

$$g = dr^2 + \sigma^2(r) d\theta^2, \quad (3)$$

onde $d\theta^2$ é a métrica canônica em \mathbb{S}^{m-1} e $\sigma(r)$ é uma função suave positiva em $(0, r_0)$, chamada a função "warping" do modelo.

Denotaremos por \mathbb{M}_σ^m a variedade modelo m -dimensional com a métrica g dada em coordenadas polares por (3).

Dada uma função suave positiva $\sigma(r)$ em $(0, r_0)$, uma condição necessária e suficiente para que exista uma variedade modelo \mathbb{M}_σ^m com função *warping* σ é

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \sigma^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{para todo } k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

A hipótese (4) assegura que a métrica g em $(0, r_0) \times \mathbb{S}^{m-1}$, dada em coordenadas polares por (3), pode ser estendida suavemente à origem $r = 0$ (veja [18] e [26]).

Lema 2.1. Seja \mathbb{M}_σ^m uma variedade modelo m -dimensional. Então, o elemento de volume Riemanniano dv de \mathbb{M}_σ^m é dado em coordenadas polares por

$$dv = \sigma^{m-1}(r) dr d\theta, \quad (5)$$

e o operador Laplaciano em \mathbb{M}_σ^m tem a forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (m-1) \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sigma^2(r)} \Delta_{\mathbb{S}^{m-1}}.$$

Para uma demonstração, veja Grigor'yan [21].

Exemplo 2.1. Enumeramos a seguir alguns exemplos de variedades modelo.

1. \mathbb{R}^m é uma variedade modelo com $r_0 = \infty$ e $\sigma(r) = r$. O elemento de volume Riemanniano é dado por

$$d\nu = r^{m-1} dr d\theta$$

e

$$\Delta_{\mathbb{R}^m} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^m}.$$

2. \mathbb{S}^m sem um pólo é uma variedade modelo com $r_0 = \pi$ e $\sigma(r) = \text{sen } r$. O elemento de volume Riemanniano é dado por

$$d\nu = \text{sen}^{m-1} r dr d\theta$$

e

$$\Delta_{\mathbb{S}^m} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (m-1) \cotg r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\text{sen}^2 r} \Delta_{\mathbb{S}^{m-1}}.$$

3. \mathbb{H}^m é uma variedade modelo com $r_0 = \infty$ e $\sigma(r) = \text{senh } r$. O elemento de volume Riemanniano é dado por

$$d\nu = \text{senh}^{m-1} r dr d\theta$$

e

$$\Delta_{\mathbb{H}^m} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (m-1) \cotgh r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\text{senh}^2 r} \Delta_{\mathbb{S}^{m-1}}.$$

Seja $B_\sigma(R)$ a bola geodésica de \mathbb{M}_σ^m com centro na origem $o \in \mathbb{M}_\sigma^m$ e raio R . Denote por ω_m o volume de \mathbb{S}^{m-1} , isto é,

$$\omega_m = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} d\theta.$$

Então, para qualquer $R \in (0, r_0)$, a área $S(R)$ da esfera geodésica $\partial B_\sigma(R)$ é dada por

$$S(R) = \omega_m \sigma^{m-1}(R),$$

e o volume $V(R)$ da bola geodésica $B_\sigma(R)$ é dado por

$$V(R) = \int_0^R S(r) dr = \omega_m \int_0^R \sigma^{m-1}(r) dr.$$

Para qualquer $x \in \mathbb{M}_\sigma^m \setminus \{o\}$ tal que $x \notin \text{cut}(o)$, seja K^{rad} a curvatura seccional radial de \mathbb{M}_σ^m ao longo de geodésicas partindo de o , e seja $\text{Ric}_o(x)$ a curvatura de Ricci de \mathbb{M}_σ^m em x , na direção $\frac{\partial}{\partial r}$. É um fato bem conhecido que a curvatura seccional radial K^{rad} de \mathbb{M}_σ^m ao longo de geodésicas partindo de o depende apenas do raio polar r e é dada por (veja [7])

$$K^{rad}(r) = -\frac{\sigma''}{\sigma}(r). \quad (6)$$

A curvatura de Ricci Ric_o também depende apenas de r e é dada por

$$\text{Ric}_o(r) = -(m-1)\frac{\sigma''}{\sigma}(r). \quad (7)$$

Segue da relação (6) que uma variedade modelo \mathbb{M}_σ^m pode ser equivalentemente especificada prescrevendo a curvatura seccional radial $-G \in C^\infty([0, \infty))$, onde a função G é par na origem, e recuperando σ como a solução do problema de Cauchy em $[0, r_0)$

$$\begin{cases} \sigma'' - G\sigma = 0, \\ \sigma(0) = 0, \sigma'(0) = 1 \end{cases}$$

no intervalo maximal $(0, r_0)$ onde σ é positiva.

O teorema seguinte descreve para o ambiente de modelos, uma extensão de resultados de comparação do Hessiano clássicos (veja [18] e [32]).

Teorema 2.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana m -dimensional. Fixado um ponto $p \in M$, seja $r(x) = \text{dist}_M(p, x)$ a distância de p , e seja $D_p = M \setminus \text{cut}(p)$ o domínio das coordenadas geodésicas normais centradas em p . Dada uma função $G \in C^\infty([0, \infty))$ par na origem, seja σ a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \sigma'' - G\sigma = 0, \\ \sigma(0) = 0, \sigma'(0) = 1, \end{cases}$$

e seja $I = (0, r_0) \subset (0, \infty)$ o intervalo maximal onde σ é positiva. Se a curvatura seccional radial de M ao longo de geodésicas partindo de p satisfaz

$$K_M^{rad}(x) \geq -G(r(x)) \quad (\text{resp. } \leq)$$

em $B_M(r_0)$, a bola geodésica de M com centro em p e raio r_0 , então

$$\text{Hess } r(x) \leq \frac{\sigma'}{\sigma}(r(x)) \{ \langle \cdot, \cdot \rangle - dr \otimes dr \} \quad (\text{resp. } \geq)$$

em $(D_p \setminus \{p\}) \cap B_M(r_0)$, no sentido das formas quadráticas.

Para uma demonstração, veja Pigola-Rigoli-Setti [32].

2.4 Teoria espectral

Seja M uma variedade Riemanniana m -dimensional com bordo suave ∂M (possivelmente vazio) e seja $C_0^\infty(M)$ o espaço das funções suaves com suporte compacto em M . Denotaremos por $W^1(M)$ e $W_0^1(M)$, respectivamente, os fechos de $C^\infty(M)$ e $C_0^\infty(M)$, com respeito à norma

$$\|u\|_1^2 = \int_M u^2 d\nu + \int_M |\text{grad } u|^2 d\nu.$$

Quando M é geodesicamente completa, o Laplaciano Δ é um operador essencialmente auto-adjunto em $C_0^\infty(M)$. Assim, ele admite uma única extensão a um operador auto-adjunto ilimitado, também denotado por Δ (veja [13], [14] e [37]), cujo domínio é o conjunto $W_0^2(M) = \{f \in W_0^1(M); \Delta f \in L^2(M)\}$.

Quando M não é geodesicamente completa, consideraremos sempre a extensão de Friedrichs de Δ inicialmente definido em $C_0^\infty(M)$. Se $\partial M \neq \emptyset$, devemos especificar algumas condições sobre o bordo a fim de que Δ seja auto-adjunto. Usaremos dois tipos de condições.

1. Condições de bordo de Dirichlet:

Neste caso, o domínio de Δ é o conjunto $W_0^1(M)$.

2. Condições de bordo de Neumann:

Agora o domínio de Δ é o conjunto $W^1(M)$.

Definição 2.12. *Seja Ω um domínio compacto com bordo suave $\partial\Omega \neq \emptyset$ de uma variedade Riemanniana M . Dizemos que um número λ é um autovalor de Ω com condições de bordo de Dirichlet (resp. Neumann), se existir uma função $0 \neq u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, chamada de autofunção de Ω associada a λ , tal que*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & (\text{resp. } \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\partial\Omega} = 0), \end{cases}$$

onde η é o vetor normal exterior em $\partial\Omega$.

O conjunto E_λ de todas as autofunções associadas a um autovalor λ é um espaço vetorial de dimensão finita, chamado de *autoespaço* associado a λ . É um fato bem conhecido que o conjunto de todos os autovalores de Ω (com condições de bordo de Dirichlet ou Neumann) consiste de uma sequência

$$0 \leq \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) < \dots \rightarrow \infty.$$

Autoespaços associados a diferentes autovalores são ortogonais em $L^2(\Omega)$, e $L^2(\Omega)$ é a soma direta de todos os autoespaços. A dimensão do autoespaço associado a $\lambda_i(\Omega)$ é chamada a *multiplicidade* de $\lambda_i(\Omega)$. A multiplicidade do *primeiro autovalor* $\lambda_1(\Omega)$ é 1. O

primeiro autovalor tem a seguinte caracterização variacional

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\text{grad } \phi|^2 d\nu}{\int_{\Omega} \phi^2 d\nu}; \phi \in H \setminus \{0\} \right\}, \quad (8)$$

onde $H = W_0^1(\Omega)$, para a condição de bordo de Dirichlet e $H = \{\phi \in W^1(\Omega); \int_{\Omega} \phi d\nu = 0\}$, para a condição de bordo de Neumann. A igualdade é satisfeita em (8) se, e somente se, ϕ é uma primeira autofunção.

Seja $\Omega \subset M$ um conjunto aberto ilimitado. Então Ω pode não ter autovalores. Contudo, o lado direito de (8) ainda faz sentido e é chamado o *tom fundamental* de Ω , denotado por $\lambda^*(\Omega)$. Em outras palavras, quando Ω é um domínio compacto com bordo $\partial\Omega \neq \emptyset$, o tom fundamental é o primeiro autovalor $\lambda^*(\Omega) = \lambda_1(\Omega)$ com condições de bordo de Dirichlet. Quando $\Omega = M$ é uma variedade geodesicamente completa, o tom fundamental $\lambda^*(M)$ coincide com a base do espectro $\text{Spec}(M) \subset [0, \infty)$ de $-\Delta$ em M , isto é, $\lambda^*(M) = \inf \text{Spec}(M)$. O tom fundamental $\lambda^*(M)$ de uma variedade Riemanniana completa M pode também ser dado por $\lambda^*(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1(\Omega_k)$, onde $\{\Omega_k\}$ é uma sequência de exaustão de M por conjuntos abertos limitados.

A caracterização variacional (8) permite-nos obter limites superiores para o primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega)$ de Ω (com condições de bordo de Dirichlet ou Neumann). O resultado a seguir fornece um método simples para obter limites inferiores e superiores para o primeiro autovalor de Dirichlet de domínios compactos em variedades Riemannianas (veja [2] e [9]).

Teorema 2.3 (Barta). *Seja Ω um domínio compacto com bordo suave por partes $\partial\Omega \neq \emptyset$ de uma variedade Riemanniana M . Seja $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $f|_{\Omega} > 0$ e $f|_{\partial\Omega} = 0$, e seja $\lambda_1(\Omega)$, o primeiro autovalor de Dirichlet de Ω . Então*

$$\sup_{\Omega} (-\Delta f / f) \geq \lambda_1(\Omega) \geq \inf_{\Omega} (-\Delta f / f). \quad (9)$$

A igualdade em (9) é válida se, e somente se, f é uma autofunção de Ω associada a $\lambda_1(\Omega)$.

Para uma demonstração, veja Chavel [9].

O resultado a seguir descreve o comportamento dos autoespaços em pontos próximos à origem em variedades esfericamente simétricas.

Teorema 2.4. *Seja M uma variedade com bordo. Suponha que existe um ponto $o \in M$ tal que a métrica de M é invariante sob rotações em torno de o e que M pode ser escrita como a bola de raio a em torno de o com respeito à métrica rotacionalmente simétrica. Então, para cada autoespaço*

$$E_{\lambda} = \{\phi; \Delta\phi = -\lambda\phi\}$$

com autofunções satisfazendo a condição de bordo de Dirichlet ou de Neumann, temos

1. $\phi(o) = 0$ para toda $\phi \in E_\lambda$ (a menos de múltiplo escalar), ou
2. existe uma única $\phi \in E_\lambda$ (a menos de múltiplo escalar) que é rotacionalmente simétrica, isto é, ϕ pode ser escrita como uma função de $r_o(y) = \text{dist}_M(o, y)$. Em particular, se exigirmos que $\phi(o) \geq 0$ e $\int_M \phi^2 d\nu = 1$, então ϕ é única em E_λ .

Para uma demonstração, veja Cheng-Li-Yau [11].

2.5 Núcleo do calor e propriedades estocásticas

Nesta seção, apresentaremos alguns fatos sobre o núcleo do calor de uma variedade Riemanniana. Indicamos ao leitor as referências [21] e [35] para uma leitura complementar.

Seja M uma variedade Riemanniana m -dimensional com bordo suave ∂M (possivelmente vazio). Denotaremos por Δ_D e Δ_N os Laplacianos em M com condições de bordo de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Se M for uma variedade geodesicamente completa, então $\Delta_D = \Delta_N = \Delta$. O operador Δ (ou Δ_D, Δ_N) é auto-adjunto, logo define um *semigrupo do calor* $\{P_t\}_{t \geq 0}$, isto é, uma família de operadores limitados, positivos definidos e auto-adjuntos em $L^2(M)$, tais que se $u_0 \in L^2(M)$, então a função

$$u(x, t) := P_t u_0(x) \in C^\infty(M \times (0, \infty))$$

é solução do problema de Cauchy para a equação do calor

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t) \\ u(x, t) \xrightarrow{L^2} u_0(x) \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+. \end{cases}$$

Além disso, existe uma função suave $p \in C^\infty(M \times M \times (0, \infty))$, chamada o *núcleo do calor* de M , tal que

$$P_t u(x) = \int_M p(x, y, t) u(y) d\nu(y).$$

Proposição 2.10. *O núcleo do calor satisfaz as propriedades a seguir:*

1. *Simetria:* $p(x, y, t) \equiv p(y, x, t)$ para todos $x, y \in M$ e $t > 0$.
2. $p(x, y, t) \geq 0$ para todos $x, y \in M$ e $t > 0$, e, para todo $x \in M$ e $t > 0$

$$\int_M p(x, y, t) d\nu(y) \leq 1.$$

3. *A identidade de semigrupo:* para todos $x, y \in M$ e $t, s > 0$,

$$p(x, y, t + s) = \int_M p(x, z, t) p(z, y, s) d\nu(z).$$

4. Para qualquer $x \in M$, a função $u(y, t) := p(x, y, t)$ satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

5. Para qualquer função $f \in C_0^\infty(M)$,

$$\int_M p(x, y, t) f(y) d\nu(y) \xrightarrow{C^\infty} f(x) \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

Teorema 2.5. *Seja M uma variedade Riemanniana m -dimensional compacta com bordo ∂M (possivelmente vazio). Seja $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ uma base ortonormal de $L^2(M)$ consistindo de autofunções com autovalores correspondentes λ_i . Então*

$$p(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y),$$

em particular,

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \int_M p(x, y, t) d\nu(x),$$

e quando $t \rightarrow 0$

$$p(x, y, t) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp\left(\frac{-d^2(x, y)}{4t}\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x, y) t^i\right), \quad (10)$$

onde a_i são funções suaves com $a_i(y, y) = 1$.

Para uma demonstração, veja Grigor'yan [21].

Exemplo 2.2. *Enunciamos aqui algumas fórmulas explícitas conhecidas para o núcleo do calor.*

1. O núcleo do calor de \mathbb{R}^m é dado pela função de Gauss-Weierstrass:

$$p(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right).$$

2. O núcleo do calor de \mathbb{H}^3 é dado por

$$p(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t} - t\right) \frac{r}{\sinh r},$$

onde $r = \text{dist}(x, y)$ é a distância geodésica entre $x, y \in \mathbb{H}^3$.

Definição 2.13. *Uma variedade Riemanniana M é chamada estocasticamente completa*

se o núcleo do calor $p(x, y, t)$ de M satisfaz a identidade

$$\int_M p(x, y, t) d\nu(y) = 1,$$

para todo $x \in M$ e $t > 0$. Caso contrário, M é chamada estocasticamente incompleta.

Teorema 2.6. *As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. M é uma variedade estocasticamente completa.
2. Para todo $\lambda > 0$, a única solução suave limitada não negativa da equação $\Delta u \geq \lambda u$ em M é a função $u \equiv 0$.
3. Para todo $\lambda > 0$, a única solução suave limitada não negativa da equação $\Delta u = \lambda u$ em M é a função $u \equiv 0$.
4. Para todo $T > 0$, a única solução limitada em $M \times (0, T)$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u|_{t=0^+} = 0 \end{cases} \text{ no sentido } L^1_{loc}(M), \quad (11)$$

é a função $u \equiv 0$.

5. Para toda função $u \in C^2(M)$ com $u^* = \sup_M u < \infty$, e para todo $\gamma < u^*$,

$$\inf_{\Omega_\gamma} \Delta u \leq 0,$$

onde $\Omega_\gamma = \{x \in M; u(x) > \gamma\}$.

6. Para toda função $u \in C^2(M)$ com $u^* = \sup_M u < \infty$, existe uma sequência $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, tal que, para todo k ,

$$u(x_k) > u^* - 1/k \quad e \quad \Delta u(x_k) < 1/k.$$

Para uma demonstração, veja Grigor'yan [20].

Exemplo 2.3. *São variedades estocasticamente completas:*

- a. \mathbb{R}^m , \mathbb{S}^m e \mathbb{H}^m para todo m (veja [20]).
- b. Variedades de Cartan-Hadamard (veja [31]).

Definição 2.14. *Uma variedade Riemanniana M é chamada parabólica se toda função superharmônica positiva em M é constante.*

Teorema 2.7. *As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. M é parabólica.
2. A função de Green $G(x, y)$ definida em $M \times M$ por

$$G(x, y) := \int_0^\infty p(x, y, t) dt$$

satisfaz $G(x, y) = \infty$ para algum (equiv. todo) $x \neq y$.

3. Para toda função $q(x) \in C_0^\infty(M)$, que é não negativa e não identicamente nula, a única solução suave limitada não nula da equação $\Delta u = q(x)u$ em M é a função $u \equiv 0$.

Para uma demonstração, veja Grigor'yan [20].

Exemplo 2.4. Com respeito à parabolicidade, temos.

- a. Qualquer variedade compacta é parabólica, pelo princípio do máximo. Em particular, \mathbb{S}^m é parabólica para todo m .
- b. \mathbb{R}^m é parabólico se, e somente se, $m < 3$ (veja [20]).
- c. \mathbb{H}^m não é parabólico (veja [20]).

2.6 Imersões isométricas

Seja $\varphi: M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica de uma m -variedade Riemanniana M em uma n -variedade Riemanniana N . Considere uma função suave $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ e a composição $f = g \circ \varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$. Identificando, como é usual, X com $d\varphi_q(X)$, temos em $q \in M$ e para todo $X \in T_qM$ que

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = df(X) = dg(X) = \langle \text{grad } g, X \rangle.$$

Então escrevemos

$$\text{grad } g = \text{grad } f + (\text{grad } g)^\perp,$$

onde $(\text{grad } g)^\perp$ é perpendicular a T_qM . Sejam ∇^M e ∇^N as conexões Riemannianas de M e N , respectivamente, e sejam $\mathcal{S}(q)(X, Y)$ e $\text{Hess } f(q)(X, Y)$, respectivamente, a segunda forma fundamental da imersão φ e o Hessiano de f em $q \in M$, com $X, Y \in T_qM$. Então, temos em $q \in M$ e para quaisquer $X, Y \in T_qM$ que

$$\begin{aligned} \text{Hess}_M f(q)(X, Y) &= \langle \nabla_X^M \text{grad } f, Y \rangle_q \\ &= \left\langle (\nabla_X^N \text{grad } g)^\top, Y \right\rangle_{\varphi(q)} - \left\langle (\nabla_X^N (\text{grad } g)^\perp)^\top, Y \right\rangle_{\varphi(q)} \\ &= X \langle \text{grad } g, Y \rangle_{\varphi(q)} - \left\langle \text{grad } g, (\nabla_X^N Y)^\top \right\rangle_{\varphi(q)} \\ &= X \langle \text{grad } g, Y \rangle_{\varphi(q)} - \langle \text{grad } g, \nabla_X^N Y \rangle_{\varphi(q)} + \left\langle \text{grad } g, (\nabla_X^N Y)^\perp \right\rangle_{\varphi(q)} \\ &= \langle \nabla_X^N \text{grad } g, Y \rangle_{\varphi(q)} + \left\langle \text{grad } g, (\nabla_X^N Y)^\perp \right\rangle_{\varphi(q)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Hess}_M f(q)(X, Y) = \text{Hess}_N g(\varphi(q))(X, Y) + \langle \text{grad } g, \mathcal{S}(X, Y) \rangle_{\varphi(q)}, \quad (12)$$

para todos $X, Y \in T_q M$. Tomando o traço em (12), com respeito a uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $T_q M$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta f(q) &= \sum_{i=1}^m \text{Hess } f(q)(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \text{Hess } g(\varphi(q))(e_i, e_i) + \langle \text{grad } g, -\vec{H} \rangle, \end{aligned}$$

onde $\vec{H} = -\sum_{i=1}^m \mathcal{S}(e_i, e_i)$ denota o vetor curvatura média da imersão φ (veja [24]).

2.7 Submersões Riemannianas

Sejam M e N variedades suaves. Uma aplicação suave sobrejetiva $\pi: M \rightarrow N$ é uma *submersão* se a diferencial $d\pi_q$ tem posto máximo para todo $q \in M$. A variedade M é chamada o *espaço total* da submersão, N é a *base* e, para todo $p \in N$, a imagem inversa $F_p = \pi^{-1}(p)$ é uma subvariedade mergulhada de M , chamada a *fibra* de π em p .

Definição 2.15. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma submersão $\pi: M \rightarrow N$ é chamada submersão Riemanniana se para todo $p \in N$ e todo $q \in F_p$, a restrição de $d\pi_q$ ao subespaço ortogonal $(T_q F_p)^\perp$ é uma isometria sobre $T_p N$.*

Dados $p \in N$ e $q \in F_p = \pi^{-1}(p)$, um vetor tangente $\xi \in T_q M$ é dito *vertical* se ele é tangente à fibra F_p , e *horizontal* se ele pertence ao espaço ortogonal $(T_q F_p)^\perp$. Dado $\xi \in TM$, suas componentes horizontal e vertical são denotadas por ξ^h e ξ^v , respectivamente. Denotemos por $\mathcal{D} = (TF)^\perp \subset TM$ a distribuição suave de posto $k = m - n$, em M consistindo dos vetores horizontais. A segunda forma fundamental das fibras é o $(1, 2)$ -tensor simétrico $\mathcal{S}^F: \mathcal{D}^\perp \times \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{D}$, definido por

$$\mathcal{S}^F(v, w) = (\nabla_v^M W)^h,$$

onde W é uma extensão vertical de w e ∇^M é a conexão de Levi-Civita de M . Observe que as fibras da submersão são subvariedades totalmente geodesicas de M exatamente quando $\mathcal{S}^F = 0$.

Para qualquer campo vetorial $X \in \mathcal{X}(N)$, existe um único campo horizontal $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$, chamado o *levantamento horizontal* de X , que é π -relacionado a X , isto é, para quaisquer $p \in N$ e $q \in F_p$, $d\pi_q(\tilde{X}_q) = X_p$. Um campo horizontal $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ é chamado *básico* se ele for π -relacionado a algum campo vetorial $X \in \mathcal{X}(N)$.

Se \tilde{X} e \tilde{Y} são campos vetoriais básicos, então valem as seguintes relações:

1. $g_M(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g_N(X, Y) \circ \pi$,
2. $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^h$ é básico e π -relacionado a $[X, Y]$,
3. $(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y})^h$ é básico e π -relacionado a $\nabla_X^N Y$,

onde ∇^N é a conexão de Levi-Civita de N .

O vetor curvatura média da fibra F é o campo horizontal \vec{H}^1 definido por

$$\vec{H}(q) = - \sum_{i=1}^k \mathcal{S}^F(q)(e_i, e_i) = - \sum_{i=1}^k (\nabla_{e_i}^M e_i)^h,$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^k$ é um referencial ortonormal local para a fibra em uma vizinhança de q . Observe que \vec{H} não é básico em geral. Por exemplo, quando as fibras são hipersuperfícies de M , então \vec{H} é básico se, e somente se, todas as fibras têm curvatura média constante. As fibras são subvariedades *mínimas* de M quando $\vec{H} \equiv 0$.

Exemplo 2.5. Destacamos os seguintes exemplos de submersões Riemannianas com fibras *mínimas*.

- a. Sejam (M, g_M) e (N, g_N) variedades Riemannianas. O produto Riemanniano de (M, g_M) e (N, g_N) é a variedade produto $W = M \times N$ dotada com a métrica produto $g_W = g_M + g_N$. As projeções $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ e $\pi_N: M \times N \rightarrow N$ são submersões Riemannianas com fibras totalmente geodésicas e difeomorfas a N e M , respectivamente.
- b. Sejam (M, g_M) e (N, g_N) variedades Riemannianas e seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva em M . A variedade produto $W = M \times N$ dotada com a métrica $g_W = g_M + f^2 g_N$ é chamada o produto warped de M e N , com função warping f , e é denotada por $M \times_f N$. A projeção $\pi_M: M \times_f N \rightarrow M$ é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas, enquanto que a projeção $\pi_N: M \times_f N \rightarrow N$ não é (a menos que $f \equiv 1$).
- c. Aplicações de recobrimento $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ são submersões Riemannianas com fibras *mínimas*.
- d. Seja G um grupo de Lie dotado com uma métrica bi-invariante e seja $K \subset G$ um subgrupo compacto, então a projeção natural $\pi: G \rightarrow G/K$ é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas compactas difeomorfas a K .

A divergência de um campo vetorial básico $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ e a divergência de um campo $X \in \mathcal{X}(N)$, π -relacionado a \widetilde{X} , são relacionadas pela fórmula a seguir.

Lema 2.2. Seja $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ um campo vetorial básico, π -relacionado a $X \in \mathcal{X}(N)$. Então, para todo $p \in N$ e todo $q \in F_p$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M(\widetilde{X})_q &= \operatorname{div}_N(X)_p + g_M(\widetilde{X}_q, \vec{H}_q) \\ &= \operatorname{div}_N(X)_p + g_N(d\pi_q(\widetilde{X}_q), d\pi_q(\vec{H}_q)). \end{aligned} \tag{13}$$

Em particular, se as fibras são *mínimas*, então $\operatorname{div}_M(\widetilde{X}) = \operatorname{div}_N(X)$.

Para uma demonstração, veja Bessa-Montenegro-Piccione [5].

Dada uma função suave $f: N \rightarrow \mathbb{R}$, chamamos a função $\widetilde{f} = f \circ \pi: M \rightarrow \mathbb{R}$

¹Às vezes, o vetor curvatura média é definido por $\vec{H}(q) = \sum_{i=1}^k \mathcal{S}^F(q)(e_i, e_i)$

o levantamento de f a M . Denotando por \tilde{X} o levantamento horizontal de um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(N)$, é imediato que $\text{grad}_M \tilde{f} = \widetilde{\text{grad}_N f}$, isto é, o gradiente $\text{grad}_M \tilde{f}$ do levantamento de f é o levantamento horizontal do gradiente $\text{grad}_N f$ de f .

O Laplaciano em N de uma função suave $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ e o Laplaciano em M de seu levantamento $\tilde{f} = f \circ \pi$ são relacionados pela fórmula a seguir.

Lema 2.3. *Seja $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e seja $\tilde{f} = f \circ \pi$ seu levantamento. Então, para todo $p \in N$ e todo $q \in F_p$*

$$\begin{aligned} (\Delta^M \tilde{f})_q &= (\Delta^N f)_p + g_M((\text{grad}_M \tilde{f})_q, \vec{H}_q) \\ &= (\Delta^N f)_p + g_N((\text{grad}_N f)_p, d\pi_q(\vec{H}_q)). \end{aligned} \tag{14}$$

Em particular, se as fibras são mínimas, então $(\Delta^M \tilde{f})_q = (\Delta^N f)_p$.

Para uma demonstração, veja Bessa-Montenegro-Piccione [5].

3 Teoremas de comparação para o núcleo do calor de subvariedades mínimas

Neste capítulo iremos provar teoremas de comparação para o núcleo do calor. Nossos resultados são extensões de teoremas de comparação obtidos por Cheng, Li e Yau, em [11], e Markvorsen, em [28].

3.1 Núcleo do calor em variedades modelo

Seja \mathbb{M}_σ^m a variedade modelo m -dimensional com curvatura seccional radial $-G(r)$, onde $G \in C^\infty([0, \infty))$ é uma função par na origem. Assuma que a solução σ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \sigma'' - G\sigma = 0, \\ \sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1 \end{cases} \quad (15)$$

é positiva em $(0, R)$. Denote por $B_\sigma(R) \subset \mathbb{M}_\sigma^m$ a bola geodésica de raio R centrada na origem $o \in \mathbb{M}_\sigma^m$ e seja $r_o(y) = \text{dist}(o, y)$ a função distância de o em \mathbb{M}_σ^m . É um fato bem conhecido que os núcleos do calor de $B_\sigma(R)$ centrados em o dependem apenas de r_o e t (veja [10]). Podemos então denotar com $\tilde{\mathcal{H}}_R^\sigma(r_o(y), t)$ e $\tilde{\mathcal{K}}_R^\sigma(r_o(y), t)$, os núcleos do calor de $B_\sigma(R)$ centrados em o , com condições de bordo de Dirichlet e Neumann, respectivamente. O resultado a seguir é devido a Cheeger e Yau (veja [10, Lema 2.3]).

Lema 3.1 (Cheeger-Yau). *Suponha que a solução σ de (15) é positiva em $(0, R)$ e que $B_\sigma(R) \subset \mathbb{M}_\sigma^m \setminus \text{cut}(o)$. Então*

1. $\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\mathcal{H}}_R^\sigma(r, t) < 0$, para todo $r \in (0, R)$ e todo $t > 0$.
2. $\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\mathcal{K}}_R^\sigma(r, t) < 0$, para todo $r \in (0, R]$ e todo $t > 0$.

Agora reescrevemos $\tilde{\mathcal{H}}_R^\sigma(r_o(y), t)$ e $\tilde{\mathcal{K}}_R^\sigma(r_o(y), t)$ como uma função de s e t , ou seja, $\tilde{\mathcal{H}}_R^\sigma(r_o(y), t) = \tilde{\mathcal{H}}(s(r), t) = \tilde{\mathcal{H}}(s, t)$ e $\tilde{\mathcal{K}}_R^\sigma(r_o(y), t) = \tilde{\mathcal{K}}(s(r), t) = \tilde{\mathcal{K}}(s, t)$, onde

$$s(r) = \int_0^r \sigma(t) dt. \quad (16)$$

Denotaremos por $\tilde{\mathcal{H}}'(s, t)$ e $\tilde{\mathcal{H}}''(s, t)$, respectivamente, as derivadas primeira e segunda de $\tilde{\mathcal{H}}(s, t)$ com respeito a s . Usando técnicas análogas às desenvolvidas em [11], provamos os seguintes resultados que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Lema 3.2. *Suponha que a solução σ de (15) é positiva e $\sigma' > 0$ em $(0, R)$, onde R satisfaz*

$$R \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\|G_-\|_{L^\infty([0, R])}}}, \quad (17)$$

onde $G_-(r) = \max\{0, -G(r)\}$. *Suponha também que $G' \leq 0$ em $(0, R)$ e que $B_\sigma(R) \subset \mathbb{M}_\sigma^m \setminus \text{cut}(o)$. Então $\tilde{\mathcal{H}}''(s, t) \geq 0$, para todo $r \in [0, R]$ e $t > 0$.*

Demonstração. Temos que

$$\tilde{\mathcal{H}}_t(s, t) = \Delta^{B_\sigma} \tilde{\mathcal{H}}(s, t) = \sigma^2(r) \tilde{\mathcal{H}}''(s, t) + m\sigma'(r) \tilde{\mathcal{H}}'(s, t). \quad (18)$$

Diferenciando a equação (18) duas vezes com respeito a s , obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_t''(s, t) &= \sigma^2(r) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(s, t) + (m+4)\sigma'(r) \tilde{\mathcal{H}}^{(3)}(s, t) \\ &\quad + 2(m+2)G(r) \tilde{\mathcal{H}}''(s, t) + m \frac{G'(r)}{\sigma(r)} \tilde{\mathcal{H}}'(s, t) \end{aligned} \quad (19)$$

Defina a função $f = \sigma \circ s^{-1}$. Então $\sigma(r) = f(s(r))$, $\sigma'(r) = (f \cdot f')(s(r))$ e $G(r) = [f \cdot f'' + (f')^2](s(r))$, onde $f' = (\partial/\partial s)f$. O Lema 3.1 implica que $(ds/dr) \tilde{\mathcal{H}}' \leq 0$ e, desde que $ds/dr = \sigma(r) \geq 0$, obtemos $\tilde{\mathcal{H}}' \leq 0$. Assim, de (19), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_t''(s, t) &\geq \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(s, t) f^2(s) + (m+4)(f \cdot f')(s) \tilde{\mathcal{H}}^{(3)}(s, t) \\ &\quad + 2(m+2)[f \cdot f'' + (f')^2](s) \tilde{\mathcal{H}}''(s, t). \end{aligned} \quad (20)$$

Pelo princípio do máximo, a não negatividade de $\tilde{\mathcal{H}}''$ vai seguir então da não negatividade de $\tilde{\mathcal{H}}''$ sobre o bordo de $0 \leq s \leq s(R)$ e $t \in [0, \infty)$. Quando $t = 0$ e $s \neq 0$, $\tilde{\mathcal{H}}(s, 0) \equiv 0$, logo $\tilde{\mathcal{H}}''(s, 0) = 0$. Quando $t > 0$ e $s = s(R)$, desde que $\tilde{\mathcal{H}}' \leq 0$, $\tilde{\mathcal{H}}_t|_{r=R} = 0$ e $\Delta^{B_\sigma} s = m\sigma'(r) \geq 0$, temos para $r = R$ que

$$\sigma^2(r) \tilde{\mathcal{H}}''(s, t) = \Delta^{B_\sigma} \tilde{\mathcal{H}}(s, t) - \tilde{\mathcal{H}}'(s, t) \Delta^{B_\sigma} s = \tilde{\mathcal{H}}_t(s, t) - \tilde{\mathcal{H}}'(s, t) \Delta^{B_\sigma} s \geq 0.$$

Assim $\tilde{\mathcal{H}}''(s, t) \geq 0$ para $t > 0$ e $s = s(R)$.

Resta provar que $\tilde{\mathcal{H}}''(0, t) \geq 0$. Usando a expansão de autofunções

$$\tilde{\mathcal{H}}(o, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(0) \phi_i(y)$$

e aplicando o Teorema 2.4 da Seção 2.4, obtemos

$$\tilde{\mathcal{H}}''(s, t) = \sum_{\lambda} e^{-\lambda t} \phi_{\lambda}(0) \frac{1}{\sigma^2(r)} \left[-\lambda \phi_{\lambda} - m \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \left(\frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial r} \right) \right],$$

onde $\phi_{\lambda}(0) > 0$ e todas as ϕ_{λ} 's são rotacionalmente simétricas. Suprimindo o subscrito λ , afirmamos que a função

$$g = \lambda \phi + m \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

se anula em segunda ordem e $\partial^2 g / \partial r^2$ é não positiva quando $r \rightarrow 0$. O lema então seguirá.

De fato, temos

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} g(r) &= \lambda\phi(0) + m \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ &= \lambda\phi(0) + m \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\sigma''(r)}{\sigma'(r)} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \right],\end{aligned}$$

pela regra de L'Hospital. Por outro lado, desde que

$$\lim_{r \rightarrow 0} m \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \Delta^{B_\sigma}\phi(0)$$

para métrica rotacionalmente simétrica em torno de 0, e $\frac{\partial\phi}{\partial r} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = \lambda\phi(0) + \Delta^{B_\sigma}\phi(0) = \lambda\phi(0) - \lambda\phi(0) = 0.$$

Também

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \lambda \frac{\partial\phi}{\partial r} + m \left\{ \left[G(r) - \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \right\}.$$

Quando $r \rightarrow 0$, isto torna-se

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial r} &= m \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \left[G(r) - \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \right\} \\ &= m \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma'''(r)}{\sigma'(r)} - G(r) \right] \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\sigma''(r)}{\sigma'(r)} \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3\phi}{\partial r^3} \right\} \\ &= m \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^3\phi}{\partial r^3} - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial r},\end{aligned}\tag{21}$$

onde a segunda igualdade é obtida pela regra de L'Hospital. Contudo, diferenciando a equação

$$-\lambda\phi = \Delta^{B_\sigma}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + (m-1) \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial\phi}{\partial r}\tag{22}$$

com respeito a r , obtemos

$$-\lambda \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial^3\phi}{\partial r^3} + (m-1) \left\{ \left[G(r) - \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \right\}$$

Tomando o limite quando $r \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^3\phi}{\partial r^3} = -\frac{(m-1)}{m} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial r}.$$

Combinando com (21), obtemos

$$(m+1) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial r} = 0,$$

e portanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial r} = 0.$$

Finalmente, consideremos a função

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + m \left\{ \left[G'(r) - 2G(r) \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + 2 \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^3 \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[G(r) - \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right\}. \end{aligned}$$

Quando $r \rightarrow 0$, isto torna-se

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= -\frac{\lambda^2}{m} \phi(0) + m \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \left[G'(r) - 2G(r) \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + 2 \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^3 \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[G(r) - \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right\} \\ &= -\frac{\lambda^2}{m} \phi(0) + m \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ -2 \left[G'(r) - 2G(r) \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + 2 \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^3 \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + 2G(r) \left[\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} - \frac{\sigma''(r)}{\sigma'(r)} \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} - 2 \left[G(r) - \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[G(r) - \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \left[G(r) \frac{\sigma(r)}{\sigma'(r)} - \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right] \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} \right\} \\ &= -3 \frac{\lambda^2}{m} \phi(0) - 2\lambda G(r) \phi(0) + m \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Assim

$$3 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = -3 \frac{\lambda^2}{m} \phi(0) - 2\lambda G(r) \phi(0) + m \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4}. \quad (23)$$

Por outro lado, diferenciando a equação (22) duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + (m-1) \left\{ \left[G'(r) - 2G(r) \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + 2 \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^3 \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left[2G(r) - 2 \left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\lambda^2}{m}\phi(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{(m-1)}{m} \left[\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\lambda^2}{m}\phi(0) \right].$$

Combinando com (23), produzimos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = -\frac{2\lambda(\lambda + mG(0))}{m(m+2)}\phi(0). \quad (24)$$

Como foi observado em [3], a desigualdade (17) implica que

$$\lambda \geq m \|G_-\|_{L^\infty([0, R])},$$

e isto implica que

$$\lambda \geq -mG(0). \quad (25)$$

Substituindo (25) em (24), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \leq 0,$$

e o lema está provado. \square

Lembramos que para qualquer $x \in \mathbb{M}_\sigma^m$ tal que $x \notin \text{cut}(o)$ e $x \neq o$, a curvatura de Ricci em x na direção $\frac{\partial}{\partial r}$ é dada por

$$\text{Ric}(x) = -(m-1)G(r_\sigma(x)).$$

Lema 3.3. *Suponha que a solução σ de (15) é positiva e $G' \leq 0$ em $(0, R)$, e que $B_\sigma(R) \subset \mathbb{M}_\sigma^m \setminus \text{cut}(o)$. Se ϕ é uma autofunção rotacionalmente simétrica de $B_\sigma(R)$ com condições de bordo de Neumann e autovalor λ , então*

$$\lambda \geq -mG(0).$$

Demonstração. Suponha por contradição que $\lambda < -mG(0)$ e considere a função

$$h = |\text{grad } \phi|^2 + \frac{\lambda}{m}\phi^2.$$

Então, aplicando a fórmula de Bochner, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta h &= \text{Ric}(\text{grad } \phi, \text{grad } \phi) + \langle \text{grad } \phi, \text{grad } (\Delta \phi) \rangle \\ &+ |\text{Hess } \phi|^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{m}\Delta(\phi^2). \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta h &\geq -(m-1)G(0)|\text{grad } \phi|^2 - \lambda|\text{grad } \phi|^2 + \frac{(\Delta\phi)^2}{m} \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{m}\phi^2 + \frac{\lambda}{m}|\text{grad } \phi|^2 \\
&= \left(-(m-1)G(0) - \frac{m-1}{m}\lambda \right) |\text{grad } \phi|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

em $B_\sigma(R) \setminus \{o\}$. Logo $\Delta h \geq 0$ em $B_\sigma(R)$, o que implica que o máximo de h ocorre em $\partial B_\sigma(R)$, digamos x_0 . Pelo princípio do máximo de Hopf, temos

$$\frac{\partial h}{\partial \eta}(x_0) > 0,$$

onde η é o vetor normal unitário exterior em $\partial B_\sigma(R)$. Por outro lado, desde que ϕ é rotacionalmente simétrica e $\partial\phi/\partial\eta = 0$ em $\partial B_\sigma(R)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \eta}(x_0) &= 2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \frac{\partial\phi_r}{\partial\eta} \right) (x_0) + 2\frac{\lambda}{m} \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) (x_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Isto contradiz a hipótese. □

Lema 3.4. *Suponha que a solução σ de (15) é positiva e que $G' \leq 0$ em $(0, R)$. Suponha também que $B_\sigma(R) \subset \mathbb{M}_\sigma^m \setminus \text{cut}(o)$. Então $\tilde{\mathcal{K}}''(s, t) \geq 0$, para todo $r \in [0, R]$ e $t > 0$.*

Demonstração. Diferenciamos a equação

$$\tilde{\mathcal{K}}_t(s, t) = \Delta^{B_\sigma} \tilde{\mathcal{K}}(s, t) = \sigma^2(r) \tilde{\mathcal{K}}''(s, t) + m\sigma'(r) \tilde{\mathcal{K}}'(s, t) \quad (26)$$

duas vezes com respeito a s e como em (20), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{K}}_t''(s, t) &\geq \tilde{\mathcal{K}}^{(4)}(s, t) f^2(s) + (m+4)(f \cdot f')(s) \tilde{\mathcal{K}}^{(3)}(s, t) \\
&\quad + 2(m+2)[f \cdot f'' + (f')^2](s) \tilde{\mathcal{K}}''(s, t),
\end{aligned}$$

onde $f = \sigma \circ s^{-1}$. A fim de aplicar o princípio do máximo a $\tilde{\mathcal{K}}''$, precisamos checar que $\tilde{\mathcal{K}}'' \geq 0$ sobre o bordo de $0 \leq s \leq s(R)$ e $t \in [0, \infty)$. Quando $t = 0$ e $s \neq 0$, $\tilde{\mathcal{K}}(s, 0) \equiv 0$, logo $\tilde{\mathcal{K}}''(s, 0) = 0$. Além disso, o Lema 3.3, juntamente com os cálculos na prova do Lema 3.2, implica que $\tilde{\mathcal{K}}''(0, t) \geq 0$. Logo discutiremos o caso em que $s = s(R)$. O Lema 3.1 implica que $\tilde{\mathcal{K}}'(s, t) \leq 0$ para todo $0 < s < s(R)$ e $t > 0$. Por outro lado, pela condição de bordo de Neumann sobre $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{K}}'(s, t) \equiv 0$ quando $s = s(R)$. Logo $\tilde{\mathcal{K}}'$ atinge seu máximo

em $s = s(R)$, e o princípio do máximo implica que

$$\tilde{\mathcal{K}}''(s, t) \geq 0$$

para $s = s(R)$ e $t > 0$, o que completa a prova do lema. \square

3.2 Teoremas de comparação para o núcleo do calor

Seja $\varphi: M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica mínima de uma variedade Riemanniana m -dimensional completa M em uma variedade Riemanniana n -dimensional completa N . Para um domínio compacto $\Omega \subset M$, denotaremos por $\mathcal{H}_\Omega(x, y, t)$ e $\mathcal{K}_\Omega(x, y, t)$ os núcleos do calor de Ω com condições de bordo de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Em [11], Cheng, Li e Yau obtiveram teoremas de comparação para $\mathcal{H}_\Omega(x, y, t)$ e $\mathcal{K}_\Omega(x, y, t)$ quando $N = \mathbb{N}^n(b)$ é a forma espacial simplesmente conexa com curvatura constante $b \in \{-1, 0, 1\}$. Mais precisamente, dado $p \in \Omega$, seja $r_p(z) = \text{dist}_N(\varphi(p), z)$, $z \in N$, a função distância extrínseca de $\varphi(p)$. O raio extrínseco de Ω em p é definido por $a = \sup_{x \in \Omega} r_p(\varphi(x))$. Cheng-Li-Yau provaram os seguintes teoremas de comparação.

Teorema 3.1 (Cheng-Li-Yau). *Seja M^m uma subvariedade mínima m -dimensional de $\mathbb{N}^n(b)$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto com bordo suave $\partial\Omega \neq \emptyset$. Para qualquer $p \in \Omega$ seja a o raio extrínseco de Ω em p . Então*

$$\mathcal{H}_\Omega(p, y, t) \leq \bar{\mathcal{H}}_a(r_p(\varphi(y)), t)$$

para todo $y \in \Omega$ e todo $t \in [0, \infty)$, onde $\bar{\mathcal{H}}_a(r, t)$ é o núcleo do calor com condições de bordo de Dirichlet da bola centrada na origem e de raio a na forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{N}^n(b)$, e $a \leq \pi/(2\sqrt{b})$, se $b > 0$.

Para o segundo resultado, assuma além disso que a imersão φ é própria e seja $D_p(a)$ a bola extrínseca com centro em p e raio a , isto é, $D_p(a) \subset \varphi^{-1}(B_N(a))$ é a componente conexa de M contendo p , e $B_N(a)$ é a bola geodésica em N com centro em $\varphi(p)$ e raio a .

Teorema 3.2 (Cheng-Li-Yau). *Neste ambiente acima, temos que*

$$\mathcal{K}(p, y, t) \leq \bar{\mathcal{K}}_a(r_p(\varphi(y)), t)$$

para todo $y \in D_p(a)$ e todo $t \in [0, \infty)$, onde $\bar{\mathcal{K}}_a(r, t)$ é o núcleo do calor com condições de bordo de Neumann da bola centrada na origem e de raio a na forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{N}^n(b)$, e $a \leq \pi/\sqrt{b}$, se $b > 0$.

Em [28], Markvorsen estendeu os resultados de Cheng-Li-Yau para subvariedades mínimas de espaços ambiente com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $b \in \mathbb{R}$. Tanto em [11] como em [28], é feito uso do seguinte princípio de

comparação que pode ser encontrado em referências padrão (veja [10], [11] e [27]).

Proposição 3.1. *Seja M uma variedade compacta com bordo ∂M e seja $x \in M$. Sejam $F(x, y, t)$ e $\tilde{F}(x, y, t)$ funções de classe C^2 definidas em $M \times M \times [0, \infty)$ com as seguintes propriedades:*

1. $F(x, y, t) \geq 0$ para todo $y \in M$ e todo $t \in [0, \infty)$;
2. $F(x, y, 0) = \tilde{F}(x, y, 0) = \delta_x$;
3. $\Delta_y F(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t) = 0$ e $\Delta_y \tilde{F}(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}(x, y, t) \leq 0$ para todo $y \in M$ e todo $t \in [0, \infty)$;
4. (a) $F(x, z, t) = 0$ e $\tilde{F}(x, z, t) \geq 0$ para todo $z \in \partial M$ e todo $t \in [0, \infty)$; ou
(b) $\partial F / \partial \nu_z(x, z, t) = \partial \tilde{F} / \partial \nu_z(x, z, t) = 0$ para todo $z \in \partial M$ e todo $t \in [0, \infty)$.

Então

$$F(x, y, t) \leq \tilde{F}(x, y, t)$$

para todo $y \in M$ e todo $t \in [0, \infty)$.

Nós usamos a Proposição 3.1 para provar o seguinte teorema de comparação para os núcleos do calor.

Teorema 3.3. *Seja $\varphi: M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica mínima de uma variedade Riemanniana m -dimensional completa M em uma variedade Riemanniana n -dimensional completa N . Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto com bordo suave $\partial\Omega \neq \emptyset$. Para qualquer $p \in \Omega$ com $q = \varphi(p)$, seja a o raio extrínseco de Ω em p , e assumamos que $a \leq \text{inj}_N(q)$. Suponha que a curvatura seccional radial de N ao longo de geodésicas partindo de q é limitada superiormente por*

$$K_N^{\text{rad}}(z) \leq -G(r_p(z)) \quad (27)$$

onde $G \in C^\infty([0, a))$ é uma função par na origem e $G' \leq 0$ em $[0, a)$.

1. Se a solução σ de (15) satisfaz $\sigma' > 0$ em $[0, a)$, e a é tal que

$$a \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\|G_-\|_{L^\infty([0, a])}}} \quad (28)$$

então $\mathcal{H}_\Omega(p, y, t) \leq \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t)$ para todo $y \in \Omega$ e todo $t \in [0, \infty)$.

2. Se a imersão φ é própria e $\Omega = D_p(a)$ é a bola extrínseca com centro em p e raio a , então $\mathcal{K}_\Omega(p, y, t) \leq \tilde{\mathcal{K}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t)$ para todo $y \in \Omega$ e todo $t \in [0, \infty)$.

Demonstração. Vamos comparar os núcleos do calor $\mathcal{H}_\Omega(p, y, t)$ e $\mathcal{K}_\Omega(p, y, t)$ com os núcleos do calor transplantados $\tilde{\mathcal{H}}_\Omega, \tilde{\mathcal{K}}_\Omega: \{p\} \times \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definidos por

$$\tilde{\mathcal{H}}_\Omega(p, y, t) = \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{K}}_\Omega(p, y, t) = \tilde{\mathcal{K}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t),$$

onde $r_p(\varphi(y)) = \text{dist}_N(q, \varphi(y))$. Claramente, $\tilde{\mathcal{H}}_\Omega(p, y, t)$ satisfaz a propriedade (4a) e, para $\Omega = D_p(a)$, $\tilde{\mathcal{K}}_\Omega(p, y, t)$ satisfaz (4b) da Proposição 3.1. Além disso, devido à expansão

assintótica (10) de $\tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_o(z), t)$ e $\tilde{\mathcal{K}}_a^\sigma(r_o(z), t)$ para $r_o(z)$ suficientemente pequeno, quando $t \rightarrow 0$, e também pelo fato de que em M a função distância extrínseca $r_p(z)$ é assintótica à função distância em \mathbb{M}_σ^m , temos que $\tilde{\mathcal{H}}_\Omega(p, y, t), \tilde{\mathcal{K}}_\Omega(p, y, t) \sim \delta_p$ quando $t \rightarrow 0$. Logo, a condição (2) é também satisfeita por $\tilde{\mathcal{H}}_\Omega(p, y, t)$ e $\tilde{\mathcal{K}}_\Omega(p, y, t)$. Resta mostrar que $\tilde{\mathcal{H}}_\Omega(p, y, t)$ e $\tilde{\mathcal{K}}_\Omega(p, y, t)$ satisfazem a propriedade (3). Como antes, reescrevemos

$$\tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t) = \tilde{\mathcal{H}}(s(r), t) = \tilde{\mathcal{H}}(s, t) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{K}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t) = \tilde{\mathcal{K}}(s(r), t) = \tilde{\mathcal{K}}(s, t),$$

onde

$$s(r) = \int_0^r \sigma(t) dt.$$

de modo que

$$s'(r) = \sigma(r) \geq 0 \quad \text{e} \quad s''(r) - (\sigma'/\sigma)s'(r) \equiv 0. \quad (29)$$

Seja $x \in \Omega$ e $X \in T_x M$. Então

$$\begin{aligned} \text{Hess}_M(s \circ r_p \circ \varphi)(x)(X, X) &= s''(r_p(\varphi(x))) \langle \text{grad}_N r_p, d\varphi X \rangle_{\varphi(x)}^2 \\ &\quad + s'(r_p(\varphi(x))) [\text{Hess}_N r_p(\varphi(x))(d\varphi X, d\varphi X) \\ &\quad + \langle \text{grad}_N r_p, \mathcal{S}(X, X) \rangle_{\varphi(x)}], \end{aligned} \quad (30)$$

onde \mathcal{S} denota a segunda forma fundamental da imersão φ .

Usando a hipótese (27), segue do teorema de comparação do Hessiano que

$$\text{Hess}_N r_p(Y, Y) \geq \frac{\sigma'}{\sigma} [\langle Y, Y \rangle - \langle \text{grad}_N r_p, Y \rangle^2] \quad (31)$$

em $B_N(a) \setminus \{q\}$.

Tomando o traço em (30), com respeito a uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^m$ para $T_x M$, e usando (29), (31) e a minimalidade de φ , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta^\Omega(s \circ r_p \circ \varphi)(x) &\geq (s'' - \frac{\sigma'}{\sigma}s')(r_p(\varphi(x))) \sum_{i=1}^m \langle \text{grad}_N r_p, d\varphi e_i \rangle_{\varphi(x)}^2 \\ &\quad + m(\frac{\sigma'}{\sigma}s')(r_p(\varphi(x))) \\ &= \Delta^{B_\sigma} s. \end{aligned} \quad (32)$$

O Lema 3.1 implica que $(ds/dr)\tilde{\mathcal{H}}'(s, t) \leq 0$, onde $\tilde{\mathcal{H}}'(s, t) = (\partial/\partial s)\tilde{\mathcal{H}}(s, t)$, e desde que $ds/dr = \sigma(r) \geq 0$, temos, por (32), que $\tilde{\mathcal{H}}' \Delta^\Omega s \leq \tilde{\mathcal{H}}' \Delta^{B_\sigma} s$.

Além disso, $|\text{grad}_\Omega s| \leq |\text{grad}_N s| = |\text{grad}_{B_\sigma} s|$, e, pelo Lema 3.2, $\tilde{\mathcal{H}}'' \geq 0$.

Usando a identidade $\Delta_y^\Omega \tilde{\mathcal{H}}(s, t) = |\text{grad}_\Omega s|^2 \tilde{\mathcal{H}}''(s, t) + \Delta^\Omega s \tilde{\mathcal{H}}'(s, t)$, obtemos

$$\Delta_y^\Omega \tilde{\mathcal{H}}(s, t) \leq |\text{grad}_{B_\sigma} s|^2 \tilde{\mathcal{H}}''(s, t) + \Delta^{B_\sigma} s \tilde{\mathcal{H}}'(s, t) = \Delta_y^{B_\sigma} \tilde{\mathcal{H}}(s, t).$$

Assim,

$$\Delta_y^\Omega \tilde{\mathcal{H}} - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{H}} \leq \Delta_y^{B_\sigma} \tilde{\mathcal{H}} - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{H}} = 0,$$

e o item 1 está provado.

A desigualdade

$$\Delta_y^\Omega \tilde{\mathcal{K}} - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{K}} \leq \Delta_y^{B_\sigma} \tilde{\mathcal{K}} - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{K}} = 0$$

para o núcleo do calor de Neumann transplantado segue similarmente, usando o Lema 3.1 e o fato que, pelo Lema 3.4, $\tilde{\mathcal{K}}'' \geq 0$, o que prova o item 2. \square

Uma consequência do Teorema 3.3 é a seguinte desigualdade do valor médio para funções subharmônicas.

Corolário 3.1. *Seja M^m uma subvariedade mínima completa propriamente imersa em uma variedade Riemanniana completa N^n . Seja $D_p(a)$ a bola extrínseca com centro em um ponto $p \in M$ e raio a . Assuma que a curvatura seccional radial de N ao longo de geodésicas partindo de $q = \varphi(p)$ satisfaz (27), e que $\sigma' > 0$ em $[0, a)$, onde $a \leq \text{inj}_N(q)$ e satisfaz (28). Se f é uma função subharmônica não negativa definida em M , então*

$$f(p) \leq \frac{1}{\omega_m \sigma^{m-1}(a)} \int_{\partial D_p(a)} f(y) d\nu(y), \quad (33)$$

onde ω_m denota o volume da esfera unitária m -dimensional em \mathbb{R}^{m+1} . Além disso, se a igualdade é válida para algum a , então f é harmônica em $D_p(a)$.

Demonstração. Denote por $D = D_p(a)$, e sejam $\mathcal{G}_D(p, y)$ e $\tilde{\mathcal{G}}_a^\sigma(o, y) = \tilde{\mathcal{G}}_a^\sigma(r_o(y))$, as funções de Green com condições de bordo de Dirichlet de D e $B_\sigma(a)$, respectivamente, onde $B_\sigma(a) \subset \mathbb{M}_\sigma^m$ denota a bola geodésica de raio a centrada na origem $o \in \mathbb{M}_\sigma^m$. Então $\mathcal{G}_\Omega(p, y)$ e $\tilde{\mathcal{G}}_a^\sigma(r_o(y))$ satisfazem

$$\mathcal{G}_D(p, y) = \int_0^\infty \mathcal{H}_D(p, y, t) dt$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_a^\sigma(r_o(y)) = \int_0^\infty \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_o(y), t) dt.$$

Pelo Teorema 3.3, temos

$$\mathcal{H}_D(p, y, t) \leq \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t)$$

com $\mathcal{H}_D(p, y, t) = \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y)), t) = 0$ para $y \in \partial D$. Assim,

$$\mathcal{G}_D(p, y) \leq \tilde{\mathcal{G}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y))) \quad \text{para } y \in D \quad (34)$$

com

$$\mathcal{G}_D(p, y) = \tilde{\mathcal{G}}_a^\sigma(r_p(\varphi(y))) \quad \text{para } y \in \partial D. \quad (35)$$

Por motivo de simplicidade, denotaremos por $\mathcal{G}(p, y) = \mathcal{G}_D(p, y)$ e $\tilde{\mathcal{G}}(r_o(y)) = \tilde{\mathcal{G}}_a^\sigma(r_o(y))$. Segue de (34) e (35) que

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta_y}(p, y) \geq \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial \eta_y}(r_p(\varphi(y))) \quad (36)$$

onde $\partial/\partial \eta_y$ significa a diferenciação com respeito à variável y na direção normal exterior a ∂D . De (36), usando a não negatividade de \mathcal{G} e a subharmonicidade de f , obtemos

$$\begin{aligned} f(p) &= - \int_D \mathcal{G}(p, y) \Delta f(y) \, d\nu(y) - \int_{\partial D} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta_y}(p, y) f(y) \, d\nu(y) \\ &\leq - \int_{\partial D} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta_y}(p, y) f(y) \, d\nu(y) \\ &\leq - \int_{\partial D} \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial \eta_y}(r_p(\varphi(y))) f(y) \, d\nu(y) \\ &= - \int_{\partial D} \tilde{\mathcal{G}}_r(r_p(\varphi(y))) \frac{\partial r}{\partial \eta_y} f(y) \, d\nu(y) \end{aligned} \quad (37)$$

Desde que $|\partial r/\partial \eta_y| \leq 1$ e $\tilde{\mathcal{G}}_r \leq 0$, de (37), obtemos

$$\begin{aligned} f(p) &\leq - \int_{\partial D} \tilde{\mathcal{G}}_r(r_p(\varphi(y))) f(y) \, d\nu(y) \\ &= - \tilde{\mathcal{G}}_r(a) \int_{\partial D} f(y) \, d\nu(y) \end{aligned}$$

desde que $\tilde{\mathcal{G}}_r$ é rotacionalmente simétrica. Agora (33) segue-se pelo cálculo explícito de $\tilde{\mathcal{G}}_r(a)$. Igualdade em (33) implica que

$$\int_D \mathcal{G}(p, y) \Delta f(y) \, dy = 0.$$

Desde que $\Delta f(y) \geq 0$ e $0 \neq \mathcal{G} \geq 0$, temos que $\Delta f(y) \equiv 0$ em D . □

Observação 3.1. *Uma consequência imediata da desigualdade (33) é que $D_p(a)$ tem volume maior do que ou igual ao volume da bola $B_\sigma(a)$ de \mathbb{M}_σ^m , desde que $\sigma' > 0$ em $[0, a)$; basta tomar $f \equiv 1$ na desigualdade (33) e integrar de 0 a a . Mostraremos a seguir que a hipótese sobre a positividade de σ' não é necessária.*

Corolário 3.2. *Seja M^m uma subvariedade mínima completa propriamente imersa de uma variedade Riemanniana completa N^n . Seja $D_p(a)$ a bola extrínseca com centro em um ponto $p \in M$ e raio a . Assuma que a curvatura seccional radial de N ao longo de geodésicas partindo de $q = \varphi(p)$ satisfaz (27). Se $a \leq \text{inj}_N(q)$, então*

$$\text{vol}(D_p(a)) \geq \text{vol}(B_\sigma(a)). \quad (38)$$

Demonstração. Denote por $D = D_p(a)$, e considere os núcleos do calor com condições de bordo de Neumann de D e $B_\sigma(a)$. Desde que

$$\mathcal{K}_D(p, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(p) \phi_i(y)$$

e

$$\tilde{\mathcal{K}}_a^\sigma(r_o(y), t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}_i t} \tilde{\phi}_i(o) \tilde{\phi}_i(y),$$

onde λ_i , ϕ_i e $\tilde{\lambda}_i$, $\tilde{\phi}_i$ são autovalores e autofunções de D e $B_\sigma(a)$, respectivamente, pelo Teorema 3.3, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(p) \phi_i(y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}_i t} \tilde{\phi}_i(o) \tilde{\phi}_i(\tilde{y}), \quad (39)$$

onde $r_p(\varphi(y)) = r_o(\tilde{y})$. Contudo, o primeiro autovalor com a condição de bordo de Neumann é zero com autofunção normalizada $V^{-1/2}$. Deixando t tender para o infinito na desigualdade (39), obtemos

$$\frac{1}{\text{vol}(D)} \leq \frac{1}{\text{vol}(B_\sigma(a))},$$

e (38) segue-se. □

Outra consequência do Teorema 3.3 é a seguinte comparação do primeiro autovalor do Laplaciano.

Corolário 3.3. *Seja M^m uma subvariedade mínima completa propriamente imersa de uma variedade Riemanniana completa N^n . Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto com bordo suave $\partial\Omega \neq \emptyset$. Para qualquer $p \in \Omega$ com $q = \varphi(p)$, seja a o raio extrínseco de Ω em p , e assumamos que $a \leq \text{inj}_N(q)$ e satisfaz (28). Suponha que a curvatura seccional radial de N*

ao longo de geodésicas partindo de $q = \varphi(p)$ satisfaz (27), e que $\sigma' > 0$ em $[0, a)$. Então o primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega)$ de Δ com a condição de bordo de Dirichlet satisfaz

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_\sigma(a)). \quad (40)$$

Se $a < \frac{\pi}{2\sqrt{\|G_-\|_{L^\infty([0,a])}}}$ e a igualdade é válida em (40), então Ω é radial, isto é, Ω é gerado por geodésicas de comprimento a partindo de p .

Demonstração. Para a primeira parte, basta considerar os núcleos do calor com condições de bordo de Dirichlet de Ω e $B_\sigma(R)$ e usar o fato de que (veja [21])

$$-\lambda_1(\Omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{H}_\Omega(p, y, t)}{t}$$

e

$$-\lambda_1(B_\sigma(a)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_o(y), t)}{t}.$$

Assim, pelo item (1) do Teorema 3.3, temos

$$-\lambda_1(\Omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{\mathcal{H}}_\Omega(p, y, t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{\mathcal{H}}_a^\sigma(r_p(y), t)}{t} = -\lambda_1(B_\sigma(a)),$$

e (40) segue-se.

Para a segunda parte, seja $\tilde{\phi}$ a primeira autofunção de $B_\sigma(a)$ associada a $\lambda_1(\Omega)$. É um fato bem conhecido que $\tilde{\phi}$ é radial e podemos identificá-la com a solução do problema

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{rr} + (m-1)\frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\phi}_r + \lambda_1(B_\sigma(a))\tilde{\phi} = 0 & \text{on } (0, a), \\ \tilde{\phi}(0) = 1, \tilde{\phi}_r(0) = 0, \tilde{\phi}(a) = 0, \tilde{\phi} > 0 & \text{on } [0, a]. \end{cases}$$

Multiplicando a EDO por σ^{m-1} , integrando e usando a condição inicial, concluímos que $\tilde{\phi}_r < 0$ em $(0, a]$. Reescrevemos $\tilde{\phi}$ como uma função de s , onde s é definida por (16). Então

$$\begin{aligned} \Delta^\Omega \tilde{\phi} &= \tilde{\phi}'' |\text{grad}_\Omega s|^2 + \tilde{\phi}' \Delta^\Omega s \\ &= \sigma^2(r) |\text{grad}_\Omega r|^2 \tilde{\phi}'' + m\sigma'(r) \tilde{\phi}' \end{aligned} \quad (41)$$

onde $\tilde{\phi}'$ e $\tilde{\phi}''$ são as derivadas primeira e a segunda de $\tilde{\phi}$ com respeito a s .

Afirmamos que $\tilde{\phi}'' \geq 0$ em $[0, a]$. De fato, escrevendo $\lambda = \lambda_1(B_\sigma(a))$, temos

$$\begin{aligned} -\lambda \tilde{\phi} &= \Delta^{B_\sigma} \tilde{\phi} \\ &= \sigma^2(r) \tilde{\phi}'' + m\sigma'(r) \tilde{\phi}'. \end{aligned} \quad (42)$$

Assim,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\phi}'' = \lim_{r \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\sigma^2(r)} \left(\lambda \tilde{\phi} + m \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \right) \right]. \quad (43)$$

Contudo, pela prova do Lema 3.2 este último termo é igual a

$$\frac{\lambda(\lambda + mG(0))}{m(m+2)} \tilde{\phi}(0)$$

Desde que $a < \frac{\pi}{2\sqrt{\|G_-\|_{L^\infty([0,a])}}}$, temos $\lambda > -mG(0)$. Concluimos assim que $\tilde{\phi}''(0) > 0$.

Agora suponha que s_0 é o primeiro $s \in [0, a)$ tal que $\tilde{\phi}''(s_0) = 0$. Desde que $\tilde{\phi}''(0) > 0$, isto implica que, em s_0 , a função $\tilde{\phi}'$ tem um máximo ou um ponto de inflexão. Por outro lado, diferenciando a equação (42) com respeito a s , obtemos

$$-\lambda \tilde{\phi}' = \sigma^2(r) \tilde{\phi}^{(3)} + (m+2)\sigma'(r) \tilde{\phi}'' + mG(r) \tilde{\phi}'.$$

Assim, em s_0 , temos

$$0 < -[\lambda + mG(s_0)] \tilde{\phi}'(s_0) = \sigma^2(s_0) \tilde{\phi}^{(3)}(s_0),$$

pois $\lambda > -mG(s_0)$ e $\tilde{\phi}'(s_0) = \frac{1}{\sigma(s_0)} \tilde{\phi}_r(s_0) < 0$. Isto é uma contradição, e a afirmação segue-se.

Pela prova do Teorema 3.3, temos $\Delta^\Omega s \geq \Delta^{B_\sigma} s$. Além disso, $|\text{grad}_\Omega r| \leq 1$. Logo, de (41), obtemos

$$\Delta^\Omega \tilde{\phi} \leq \sigma^2(r) \tilde{\phi}'' + m\sigma'(r) \tilde{\phi}' = \Delta^{B_\sigma} \tilde{\phi} = -\lambda \tilde{\phi}.$$

A fim de comparar os primeiros autovalores, consideramos a comparação

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(D_p(a)),$$

pois $\Omega \subset D_p(a)$. A igualdade é válida se, e somente se, $\Omega = D_p(a)$. Logo, temos reduzido ao caso em que $\Omega = D_p(a)$ é a bola extrínseca com centro em p e raio a .

Seja ϕ a primeira autofunção de $D_p(a)$ e, por simplicidade de notação, escre-

vamos $D = D_p(a)$. Pelo Teorema de Barta, temos (veja [2])

$$\begin{aligned}\lambda_1(D) &= -\frac{\Delta^D \phi}{\phi}(x) \\ &= -\frac{\Delta^D \tilde{\phi}}{\tilde{\phi}}(x) + \frac{\phi \Delta^D \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \Delta^D \phi}{\phi \tilde{\phi}}(x) \\ &\geq \lambda + \frac{\phi \Delta^D \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \Delta^D \phi}{\phi \tilde{\phi}}(x).\end{aligned}$$

Contudo, desde que ϕ e $\tilde{\phi}$ são positivas e também

$$\int_D (\phi \Delta^D \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \Delta^D \phi) = 0,$$

pelas condições sobre ϕ e $\tilde{\phi}$, a função $\phi \Delta^D \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \Delta^D \phi$ deve mudar de sinal. Portanto,

$$\begin{aligned}\lambda_1(D) &\geq \lambda + \sup_{x \in D} \left(\frac{\phi \Delta^D \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \Delta^D \phi}{\phi \tilde{\phi}}(x) \right) \\ &\geq \lambda(B_\sigma(a)).\end{aligned}$$

A igualdade é válida se, e somente se,

$$\begin{aligned}\phi \Delta^D \tilde{\phi} &= \tilde{\phi} \Delta^D \phi \\ &= -\lambda_1(D) \phi \tilde{\phi} \\ &= -\lambda_1(B_\sigma(a)) \phi \tilde{\phi}.\end{aligned}$$

Por outro lado, a prova de

$$\Delta^D \tilde{\phi} \leq -\lambda_1(B_\sigma(a)) \tilde{\phi}$$

implica que a igualdade é válida se, e somente se,

$$|\text{grad}_D r| = 1,$$

o que é equivalente à condição que D é radial. □

4 Variedades L^1 -Liouville

Neste capítulo, iremos estudar a propriedade L^1 -Liouville de submersões Riemannianas. Provaremos que quando as fibras das submersões são mínimas, se o espaço total satisfaz a propriedade L^1 -Liouville, então a base satisfaz a propriedade L^1 -Liouville. Quando, além da minimalidade, as fibras são compactas, provaremos que se a base satisfaz a propriedade L^1 -Liouville, então o espaço total satisfaz a propriedade L^1 -Liouville. Em particular, obtemos resultados sobre a propriedade L^1 -Liouville de variedades produto.

4.1 A propriedade L^1 -Liouville

Começamos esta seção com a definição de variedades L^1 -Liouville.

Definição 4.1. *Dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) satisfaz a propriedade L^1 -Liouville (ou simplesmente, M é L^1 -Liouville), se toda função superharmônica não negativa $0 \leq u \in L^1(M)$ deve ser constante.*

A. Grigor'yan, em [19], mostrou que para entender se uma variedade M é L^1 -Liouville podemos considerar simplesmente o comportamento do seu núcleo de Green $\mathcal{G}(x, y)$.

Teorema 4.1 (Grigor'yan). *Uma variedade Riemanniana (M, g) é L^1 -Liouville se, e somente se, para algum (equiv. qualquer) $x \in M$,*

$$\int_M \mathcal{G}(x, y) d\nu(y) = \infty, \quad (44)$$

Note que se M é parabólica, então M é L^1 -Liouville. De fato, neste caso, temos $\mathcal{G} \equiv \infty$ e a condição de integrabilidade é trivialmente satisfeita.

Lembramos que M é *estocasticamente completa* se para algum (equiv. todo) $x \in M$, o núcleo do calor de M satisfaz

$$\int_M p(x, y, t) d\nu(y) = 1.$$

Lembramos também que $\mathcal{G}(x, y)$ e $p(x, y, t)$ são relacionados por

$$\mathcal{G}(x, y) = \int_0^\infty p(x, y, t) dt.$$

Portanto, aplicando o Teorema de Tonelli, imediatamente deduzimos o seguinte

Corolário 4.1. *Uma variedade estocasticamente completa é L^1 -Liouville.*

Em uma variedade modelo \mathbb{M}_σ^m a propriedade L^1 -Liouville é equivalente à completude estocástica. Contudo, existem variedades L^1 -Liouville que são estocasticamente incompletas (veja [6]).

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana geodesicamente completa e seja Ω um domínio compacto em M . O tempo médio de saída do movimento Browniano de Ω é definido como sendo a solução (positiva) do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta E_\Omega = -1 & \text{em } \Omega \\ E_\Omega = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que E_Ω é uma função suave em Ω . Além disso, se $\mathcal{G}_\Omega(x, y)$ denota a função de Green com condições de bordo de Dirichlet de Ω , então temos a fórmula de representação

$$E_\Omega(x) = \int_\Omega \mathcal{G}_\Omega(x, y) d\nu(y).$$

Se $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência de exaustão de M por domínios compactos, então $\mathcal{G}_{\Omega_k}(x, y) \nearrow \mathcal{G}(x, y)$ quando $k \nearrow \infty$. Assim, por convergência monótona, deduzimos que

$$E_{\Omega_k}(x) \nearrow E(x) = \int_M \mathcal{G}(x, y) d\nu(y).$$

Chamamos $E(x)$ de *tempo médio de saída global* de M . Com esta terminologia e notação, M não é L^1 -Liouville se, e somente se, $E(x) < \infty$ para todo $x \in M$.

4.2 A propriedade L^1 -Liouville de submersões Riemannianas

É um fato bem conhecido que o produto Riemanniano $M \times N$ é uma variedade estocasticamente completa se, e somente se, M e N são ambas estocasticamente completas. Para parabolicidade, a situação é diferente. Se $M \times N$ é parabólica, então M e N são ambas parabólicas, mas a implicação inversa, em geral, não é satisfeita. Por exemplo, \mathbb{R}^1 e \mathbb{R}^2 são parabólicas, enquanto que \mathbb{R}^3 não é. Contudo, se M ou N é compacta, então $M \times N$ é parabólica se, e somente se, ambas M e N são parabólicas. Olhando para M e N como bases das submersões Riemannianas π_M e π_N , respectivamente, este resultado é uma consequência do seguinte resultado de M.C. Brandão e J. Oliveira sobre submersões Riemannianas (veja [8]).

Teorema 4.2 (Brandão-Oliveira). *Seja $\pi: M \rightarrow N$ uma submersão Riemanniana com fibras mínimas $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in N$.*

1. *Se M é parabólica, então N é parabólica.*
 2. *Se M é estocasticamente completa, então N é estocasticamente completa.*
- Se, além da minimalidade, as fibras F_p são compactas, o seguinte é válido.*
3. *Se N é parabólica, então M é parabólica.*
 4. *Se N é estocasticamente completa, então M é estocasticamente completa.*

Como observado por M.C. Brandão e J. Oliveira, em [8], existem exemplos de submersões Riemannianas $\pi: M \rightarrow N$ com fibras não compactas F , tais que N é

parabólica (resp. estocasticamente completa), enquanto que M não é parabólica (resp. estocasticamente completa). Nós provamos resultados similares aos de Brandão-Oliveira para a propriedade L^1 -Liouville.

Teorema 4.3. *Sejam M e N variedades Riemannianas completas e seja $\pi: M \rightarrow N$ uma submersão Riemanniana com fibras mínimas $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in N$. Se M é L^1 -Liouville, então N é L^1 -Liouville. Se, além da minimalidade, as fibras F_p são compactas então M é L^1 -Liouville se, e somente se, N é L^1 -Liouville.*

Demonstração. Seja $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência de exaustão de N por domínios compactos com bordos suaves e $\tilde{C}_k = \pi^{-1}(\Omega_k) \subset M$. Seja $\{\tilde{\Omega}_1^j\}_{j=1}^\infty$ uma exaustão de \tilde{C}_1 por domínios compactos com bordos suaves e, para cada k , seja $\{\tilde{\Omega}_k^j\}_{j=1}^\infty$ uma exaustão de \tilde{C}_k por domínios compactos com bordos suaves com $\tilde{\Omega}_{k+1}^1 \supset \tilde{\Omega}_k^k$. Tomando $\tilde{\Omega}_k = \tilde{\Omega}_k^k$, a família $\{\tilde{\Omega}_k\}_{k=1}^\infty$ é uma exaustão de M por domínios compactos com bordos suaves. Afirmamos que o tempo médio de saída $E_{\tilde{\Omega}_k}(x)$ de $\tilde{\Omega}_k$ satisfaz

$$E_{\tilde{\Omega}_k} \leq E_{\Omega_k} \circ \pi \quad \text{em } \tilde{\Omega}_k.$$

De fato, usando a minimalidade das fibras, temos

$$\begin{cases} \Delta(E_{\Omega_k} \circ \pi) = -1 = \Delta E_{\tilde{\Omega}_k}, & \text{em } \tilde{\Omega}_k, \\ E_{\Omega_k} \circ \pi \geq 0 = E_{\tilde{\Omega}_k}, & \text{em } \partial\tilde{\Omega}_k. \end{cases}$$

Assim, $E_{\tilde{\Omega}_k} \leq E_{\Omega_k} \circ \pi$ em $\tilde{\Omega}_k$. Deixando $k \nearrow \infty$, de modo que $E_{\tilde{\Omega}_k} \nearrow E_M$ e $(E_{\Omega_k} \circ \pi) \nearrow E_N \circ \pi$, concluímos que $E_M \leq E_N \circ \pi$. Portanto, se $E_N < \infty$, então $E_M < \infty$.

Para a prova da segunda parte do teorema, vamos precisar do seguinte

Lema 4.1. *Seja $\pi: M \rightarrow N$ uma submersão Riemanniana de uma m -variedade Riemanniana completa M sobre uma n -variedade Riemanniana completa N , com fibras mínimas e compactas $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in N$. Então, para todo domínio compacto com bordo suave $\Omega \subset N$, o tempo médio de saída $E_{\pi^{-1}(\Omega)}$ de $\pi^{-1}(\Omega)$, satisfaz*

$$E_{\pi^{-1}(\Omega)} = E_\Omega \circ \pi,$$

onde E_Ω é o tempo médio de saída de Ω .

Demonstração. Devemos provar que

$$\begin{cases} \Delta^M(E_\Omega \circ \pi) = -1, & \text{em } \pi^{-1}(\Omega), \\ E_\Omega \circ \pi = 0, & \text{em } \partial\pi^{-1}(\Omega). \end{cases}$$

De fato, desde que as fibras de π são mínimas, temos

$$\Delta^M(E_\Omega \circ \pi) = \Delta^N E_\Omega = -1.$$

Além disso, pela compacidade das fibras, se $q \in \partial\pi^{-1}(\Omega)$, então $\pi(q) \in \partial\Omega$. Logo,

$$(E_\Omega \circ \pi)|_{\partial\pi^{-1}(\Omega)}(q) = E_\Omega|_{\partial\Omega}(\pi(q)) = 0.$$

□

Retornando à prova do Teorema 4.3, suponha que as fibras da submersão são mínimas e compactas. Seja $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ uma seqüência de exaustão de N por domínios compactos com bordos suaves. Pelo Lema 4.1, $E_{\pi^{-1}(\Omega_k)} = E_{\Omega_k} \circ \pi$. Deixando $k \nearrow \infty$, de modo que $E_{\pi^{-1}(\Omega_k)} \nearrow E_M$ e $(E_{\Omega_k} \circ \pi) \nearrow E_N \circ \pi$, concluímos que $E_M = E_N \circ \pi$. Portanto, $E_M < \infty$ se, e somente se, $E_N \circ \pi < \infty$, o que acontece se, e somente se, $E_N < \infty$. □

A compacidade das fibras é necessária para a implicação inversa, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. *Sejam $M_1 = (\mathbb{S}^1, d\theta^2)$ e $M_2 = (\mathbb{R}_+, f(t)^2 dt^2)$, onde $f(t)$ é uma função suave positiva em $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, e considere o produto Riemanniano $M = M_1 \times M_2$. A projeção $\pi: M \rightarrow M_1$ é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas não compactas $F \approx M_2$. O espaço base M_1 é L^1 -Liouville, pois \mathbb{S}^1 é parabólica. Afirmamos que o espaço total M pode não ser L^1 -Liouville. De fato, seja $F_R(\theta, t) = F_R(t)$ a função definida em $\Omega_R = \mathbb{S}^1 \times (1/R, R) \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+$, $R > 1$, por*

$$F_R(\theta, t) = \int_0^t f(r) \int_r^R f(s) ds dr.$$

Se a função f é tal que $f'(t) \leq 0$, temos

$$\begin{aligned} \Delta F_R &= \frac{1}{f(t)^2} f'(t) \int_t^R f(s) ds - 1 \\ &\leq -1 = \Delta E_{\Omega_R}, \end{aligned}$$

em Ω_R , onde E_{Ω_R} é o tempo médio de saída de Ω_R . Além disso,

$$F_R \geq 0 = E_{\Omega_R} \quad \text{em } \partial(\Omega_R).$$

Assim $E_{\Omega_R} \leq F_R$ em $\bar{\Omega}_R$. Desde que $E_{\Omega_R} \nearrow E_M$ e $F_R(\theta, t) \nearrow \int_0^t f(r) \int_r^\infty f(s) ds dr$ quando $R \nearrow \infty$, a afirmação segue-se tomando $f(t)$ tal que

$$\int_0^t f(r) \int_r^\infty f(s) ds dr < \infty.$$

Lembramos que o tempo médio de saída de uma variedade produto $M \times N$ satisfaz $E_{M \times N} \leq E_M + E_N$. Assim, se ambas M e N não são L^1 -Liouville, então $M \times N$ não é L^1 -Liouville. Como uma consequência imediata do Teorema 4.3, temos o resultado mais geral seguinte.

Corolário 4.2. *Sejam M e N variedades Riemannianas completas. Se $M \times N$ é L^1 -Liouville, então M e N são L^1 -Liouville. Além disso, se M ou N é compacta, então $M \times N$ é L^1 -Liouville se, e somente se, M e N são L^1 -Liouville.*

Demonstração. Desde que as projeções $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ e $\pi_N: M \times N \rightarrow N$ são submersões Riemannianas com fibras mínimas, se $M \times N$ é L^1 -Liouville, então M e N são L^1 -Liouville. Suponha que M é compacta (o caso em que N é compacta é análogo). Então M é L^1 -Liouville e $\pi_N: M \times N \rightarrow N$ é uma submersão Riemanniana com fibras mínimas e compactas. Portanto, se N é L^1 -Liouville, segue-se do Teorema 4.3 que $M \times N$ é L^1 -Liouville. \square

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 4.3 para variedades produto warped.

Corolário 4.3. *Seja $M \times_f N$ o produto warped de duas variedades Riemannianas completas M e N . Se M não é L^1 -Liouville, então $M \times_f N$ não é L^1 -Liouville.*

Demonstração. Desde que a projeção $\pi_M: M \times_f N \rightarrow M$ é uma submersão Riemanniana com fibras mínimas, se M não é L^1 -Liouville, então $M \times_f N$ não é L^1 -Liouville. \square

5 Tom fundamental ponderado e folheações ponderadas

Neste capítulo, estudaremos a base do espectro do Laplaciano ponderado $-\Delta_f$ de uma variedade Riemanniana ponderada M_f . Iremos obter desigualdades para o tom fundamental ponderado de subconjuntos abertos admitindo uma folheação transversalmente orientada \mathcal{F} , em termos das curvaturas médias ponderadas das folhas de \mathcal{F} . Nossos resultados são extensões das desigualdades do tipo Chern-Heiz para folheações, obtidas em [1] por Barbosa, Bessa e Montenegro.

5.1 Variedades Riemannianas ponderadas

Iniciaremos esta seção com algumas definições que serão utilizadas no decorrer deste capítulo.

Definição 5.1. *Uma variedade Riemanniana ponderada $M_f := (M, \bar{g}, e^{-f} d\nu)$ é uma variedade Riemanniana (M, \bar{g}) juntamente com uma forma volume ponderada $e^{-f} d\nu$, onde f é uma função suave em M e $d\nu$ é o elemento de volume induzido pela métrica \bar{g} .*

Definição 5.2. *O Laplaciano ponderado Δ_f em M_f é definido por*

$$\Delta_f u := \Delta u - \langle \overline{\text{grad}} f, \overline{\text{grad}} u \rangle,$$

onde Δ denota o operador Laplaciano em M

O Laplaciano ponderado é um operador de segunda ordem simétrico, agindo em $C_0^\infty(M) \subset L^2(M, e^{-f} d\nu)$. Se M é uma variedade Riemanniana geodesicamente completa, então Δ_f tem uma única extensão a um operador essencialmente auto-adjunto, também denotado por Δ_f , que tem domínio $D(\Delta_f) = \{u \in L^2(M, d\nu); \Delta_f u \in L^2(M, d\nu)\}$. Se M não é geodesicamente completa, então vamos considerar a extensão de Friedrichs de Δ_f inicialmente definido em $C_0^\infty(M)$. Em qualquer caso, o espectro $\text{Spec}(-\Delta_f)$ de $-\Delta_f$ é um subconjunto da reta real, $\text{Spec}(-\Delta_f) \subset [0, \infty)$, e sua base é dada por

$$\inf \text{Spec}(-\Delta_f) = \inf \left\{ \frac{\int_M |\overline{\text{grad}} u|^2 e^{-f} d\nu}{\int_M u^2 e^{-f} d\nu}, 0 \neq u \in C_0^\infty(M) \right\}. \quad (45)$$

O lado direito da equação (45) será chamado o *tom fundamental ponderado* de M e será denotado por $\lambda_f^*(M)$.

Definição 5.3. *O tensor curvatura de Bakry-Émery Ricci em M_f , denotado por $\overline{\text{Ric}}_f$, é o $(0, 2)$ -tensor*

$$\overline{\text{Ric}}_f = \overline{\text{Ric}} + \overline{\text{Hess}} f,$$

onde $\overline{\text{Ric}}$ denota a curvatura de Ricci de (M, \bar{g}) e $\overline{\text{Hess}} f$ é o Hessiano de f em (M, \bar{g}) .

A divergência ponderada de um campo vetorial é definida como segue.

Definição 5.4. *Seja M_f uma variedade Riemanniana ponderada e considere um campo vetorial $X \in L^1_{loc}(M, e^{-f} d\nu)$ (isto significa que $|X| \in L^1_{loc}(M, e^{-f} d\nu)$). Uma função $h \in L^1_{loc}(M, e^{-f} d\nu)$ é uma divergência ponderada fraca de X se*

$$\int_M \phi h e^{-f} d\nu = - \int_M \langle \text{grad } \phi, X \rangle e^{-f} d\nu, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(M).$$

Dado um campo vetorial $X \in L^1_{loc}(M, e^{-f} d\nu)$, existe no máximo uma divergência ponderada fraca $h \in L^1_{loc}(M, e^{-f} d\nu)$ para X e podemos escrever $h = \text{div}_f X$. Para campos vetoriais $X \in C^1(M)$ (isto é, $|X| \in C^1(M)$), a divergência ponderada fraca $\text{div}_f X$ satisfaz

$$\text{div}_f X = \text{div} X - \langle \text{grad } f, X \rangle,$$

onde $\text{div} X$ é a divergência clássica de X .

Denotaremos por $\mathcal{W}_f^{1,1}(M)$ o espaço de Sobolev de todos os campos vetoriais $X \in L^1_{loc}(M, e^{-f} d\nu)$ que possuem divergência ponderada fraca $\text{div}_f X$.

Observação 5.1. *Se $X \in \mathcal{W}_f^{1,1}(M)$ e $\psi \in C^1(M)$, então $\psi X \in \mathcal{W}_f^{1,1}(M)$ com*

$$\text{div}_f(\psi X) = \langle \text{grad } \psi, X \rangle + \psi \text{div}_f X.$$

Em particular, para $\psi \in C_0^\infty(M)$, temos que

$$\int_M \text{div}_f(\psi X) e^{-f} d\nu = \int_M [\langle \text{grad } \psi, X \rangle - \langle \text{grad } \psi, X \rangle] e^{-f} d\nu = 0.$$

Reciprocamente, se $\psi X \in \mathcal{W}_f^{1,1}(M)$ para toda $\psi \in C_0^\infty(M)$, então $X \in \mathcal{W}_f^{1,1}(M)$.

Seguindo argumentos de [4], provamos o resultado a seguir.

Lema 5.1. *Seja $\Omega \subset M_f$ um conjunto aberto de uma variedade Riemanniana ponderada M_f e seja $X \in C^0(M) \cap \mathcal{W}_f^{1,1}(M)$ um campo vetorial não nulo com $\sup_\Omega |X| < \infty$ e $\inf_\Omega \text{div}_f X \geq 0$. Então*

$$\lambda_f^*(\Omega) \geq \left(\frac{\inf_\Omega \text{div}_f X}{2 \sup_\Omega |X|} \right)^2 \geq 0. \quad (46)$$

Demonstração. Podemos assumir que $\inf_\Omega \text{div}_f X > 0$. Seja $0 \neq \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então o campo vetorial $\psi^2 X$ tem suporte compacto em Ω . Calculando $\text{div}_f(\psi^2 X)$, temos

$$\begin{aligned} \text{div}_f(\psi^2 X) &= \langle \text{grad } \psi^2, X \rangle + \psi^2 \text{div}_f X \\ &\geq -2|\psi| \cdot |\text{grad } \psi| \cdot \sup |X| + \psi^2 \cdot \inf \text{div}_f X \\ &\geq - \left(\epsilon \cdot |\psi|^2 + \frac{1}{\epsilon} \cdot |\text{grad } \psi|^2 \right) \sup |X| + \psi^2 \cdot \inf \text{div}_f X, \end{aligned} \quad (47)$$

para todo $\epsilon > 0$. Integrando (47) sobre Ω , temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_f(\psi^2 X) e^{-f} d\nu \\ &\geq \sup |X| \cdot \int_{\Omega} \left(-\epsilon \cdot |\psi|^2 - \frac{1}{\epsilon} \cdot |\operatorname{grad} \psi|^2 \right) e^{-f} d\nu + \inf \operatorname{div}_f X \cdot \int_{\Omega} \psi^2 e^{-f} d\nu. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \psi|^2 e^{-f} d\nu \geq \frac{\epsilon}{\sup |X|} (\inf \operatorname{div}_f X - \sup |X| \cdot \epsilon) \int_{\Omega} \psi^2 e^{-f} d\nu.$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{\inf \operatorname{div}_f X}{2 \sup |X|} > 0$, obtemos

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \psi|^2 e^{-f} d\nu \geq \left(\frac{\inf \operatorname{div}_f X}{2 \sup |X|} \right)^2 \int_{\Omega} \psi^2 e^{-f} d\nu. \quad (48)$$

Pela formulação variacional do tom fundamental ponderado $\lambda_f^*(\Omega)$ de Ω , a desigualdade (48) implica (46). \square

Seja $\varphi: \Sigma^n \hookrightarrow M^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma n -variedade Σ em uma $(n+1)$ -variedade Riemanniana (M, \bar{g}) . A segunda forma fundamental \mathcal{S} da hipersuperfície Σ é definida por

$$\mathcal{S}(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp,$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de M e $(\cdot)^\perp$ denota a projeção sobre o fibrado normal de Σ . O vetor curvatura média \vec{H} e a curvatura média H da hipersuperfície Σ são dados por

$$\vec{H} = - \sum_{i=1}^n \mathcal{S}(e_i, e_i) \quad \text{e} \quad H = H\eta,$$

onde η é um vetor normal unitário. Seja f uma função suave em M . A restrição da função f a Σ , ainda denotada por f , gera uma medida ponderada $e^{-f} d\sigma$ em Σ e, assim, uma variedade ponderada induzida $(\Sigma, g, e^{-f} d\sigma)$, onde g é a métrica induzida por \bar{g} e $d\sigma$, o elemento de volume de (Σ, g) . O Laplaciano ponderado associado Δ_f em Σ é dado por

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u \rangle.$$

Definição 5.5. *O vetor curvatura média ponderado \vec{H}_f e a curvatura média ponderada H_f da hipersuperfície Σ_f são dados por*

$$\vec{H}_f = \vec{H} - (\overline{\operatorname{grad} f})^\perp \quad \text{e} \quad H_f = (H_f)\eta.$$

A curvatura média ponderada H_f satisfaz $H_f = H - \langle \overline{\text{grad}} f, \eta \rangle$.

Definição 5.6. *Uma hipersuperfície Σ^n imersa em $(M^{n+1}, \bar{g}, e^{-f} d\nu)$ com a métrica induzida g é chamada uma hipersuperfície f -mínima se sua curvatura média ponderada H_f é identicamente nula, ou equivalentemente, se ela satisfaz $H = \langle \overline{\text{grad}} f, \eta \rangle$.*

É um fato bem conhecido (veja [23]) que Σ é f -mínima se, e somente se, ela é um ponto crítico do funcional área ponderado:

$$V_f(\Sigma) := \int_{\Sigma} e^{-f} d\sigma.$$

5.2 Folheações em variedades ponderadas

Em trabalhos seminiais, [12], [15], Chern e Flanders, independentemente, provaram que se $z = z(x_1, \dots, x_n)$ é uma função de classe C^2 definida em um domínio compacto Ω de \mathbb{R}^n com bordo suave $\partial\Omega$, e curvatura média satisfazendo $|H(x_1, \dots, x_n)| \geq b$, então $n \cdot b \leq \text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)/\text{vol}_n(\Omega)$. Se a curvatura escalar satisfaz $S(x_1, \dots, x_n) \geq b > 0$, então $\sqrt{n(n-1)b} \leq \text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)/\text{vol}_n(\Omega)$. Estas desigualdades são análogas, para dimensões mais altas, a desigualdades obtidas por Heinz para dimensão dois, em [22]. Em [34], Salavessa estendeu a primeira dessas desigualdades para gráficos

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\} \subset M \times \mathbb{R}$$

de funções suaves $f \in C^2(M)$, onde M é uma n -variedade Riemanniana. Salavessa provou que

$$n \cdot \inf_{x \in G(f)} |H(x)| \leq h(M),$$

onde $h(M) = \inf_{\Omega} (\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)/\text{vol}_n(\Omega))$ é a constante de Cheeger de M .

Olhando para gráficos como folhas de folheações transversalmente orientadas de codimensão 1, Barbosa, Bessa e Montenegro mostraram, em [1], que as desigualdades de Chern-Heinz são válidas para qualquer folheação de classe C^2 transversalmente orientada de codimensão 1 de subconjuntos abertos $\Omega \subset M$ de variedades Riemannianas. Nós provamos desigualdades de Chern-Heinz para folheações transversalmente orientadas de variedades Riemannianas ponderadas.

Teorema 5.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^2 transversalmente orientada de codimensão 1 de um conjunto aberto conexo Ω de uma variedade Riemanniana ponderada $(n+1)$ -dimensional M_f . Então*

$$2\sqrt{\lambda_f^*(\Omega)} \geq \inf_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} |H_f^F(x)|, \quad (49)$$

onde H_f^F significa a curvatura média ponderada da folha F .

Demonstração. Desde que \mathcal{F} é uma folheação de classe C^2 transversalmente orientada

de Ω , existe um campo vetorial unitário η em Ω normal às folhas de \mathcal{F} . Represente por $H_f^F(x)$ o valor da curvatura média ponderada da folha F em x calculada com respeito a η . Ponha $b = \inf_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} |H_f^F(x)|$. Se $b = 0$, não há nada a provar. Assuma então que $b > 0$. Isto implica que H_f^F não muda de sinal. Logo, podemos escolher o campo vetorial unitário η de tal maneira que $H_f^F(x) > 0$ para qualquer $x \in \Omega$. A divergência ponderada $\overline{\text{div}}_f \eta$ em um ponto $x \in F$ satisfaz $\overline{\text{div}}_f \eta(x) = H_f^F(x)$. Portanto, $\inf_{\Omega} \overline{\text{div}}_f \eta = \inf_{\Omega} H_f^F$. Usando o fato que $\sup_{\Omega} |\eta| = 1$ e aplicando (46) para estimar $\lambda_f^*(\Omega)$, obtemos

$$2\sqrt{\lambda_f^*(\Omega)} \geq \frac{\inf_{\Omega} \overline{\text{div}}_f \eta}{\sup_{\Omega} |\eta|} = \inf_{\Omega} H_f^F \geq b.$$

□

Corolário 5.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^2 transversalmente orientada de codimensão 1 de uma variedade Riemanniana ponderada M_f com $\lambda_f^*(M) = 0$. Se as folhas $F \in \mathcal{F}$ têm a mesma curvatura média ponderada constante H_0 , então cada folha é f -mínima.*

Demonstração. Desde que $\lambda_f^*(M) = 0$, segue do Teorema 5.1 que

$$\inf_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} |H_f^F(x)| \leq 0,$$

e, como H_f^F é constante e igual a H_0 para todas as folhas $F \in \mathcal{F}$, temos

$$|H_0| = \inf_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} |H_f^F(x)| \leq 0.$$

Portanto, $H_0 = 0$ e o corolário segue-se. □

Seja $M_f = (M, g, e^{-f} d\nu)$ uma variedade Riemanniana ponderada m -dimensional. Seja $B_M(r) \subset M$ a bola geodésica de raio r centrada em um ponto $o \in M$ e seja $\rho_M(y) = \text{dist}_M(o, y)$. Em [36, Teorema 4.2], Setti provou que se

$$\text{Ric}_f(y)(\text{grad } \rho_M, \text{grad } \rho_M) \geq m\alpha,$$

para todo $y \in B_M(r)$, então $\lambda_f^*(B_M(r)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^{m+1}(\alpha)}(r))$, onde $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^{m+1}(\alpha)}(r))$ é o primeiro autovalor de Dirichlet para o Laplaciano ordinário Δ em $B_{\mathbb{M}^{m+1}(\alpha)}(r)$, a bola geodésica de raio r na forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{M}^{m+1}(\alpha)$ de curvatura seccional constante α . Em particular, se M_f é uma variedade Riemanniana ponderada m -dimensional com curvatura de Bakry-Émery Ricci não negativa $\text{Ric}_f \geq 0$, então

$$\lambda_f^*(M) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_f^*(B_M(r)) = 0.$$

Por exemplo, se $M_f = (\mathbb{R}^m, g_{\text{can}}, e^{-f} d\nu)$, onde $\text{Hess } f \geq 0$, então $\text{Ric}_f \geq 0$.

Aplicando o resultado de Setti juntamente com o Teorema 5.1, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^2 transversalmente orientada de codimensão 1 de uma variedade Riemanniana ponderada m -dimensional M_f com curvatura de Bakry-Émery Ricci $\text{Ric}_f \geq m\alpha$. Então*

1. $2\sqrt{\lambda^*(\mathbb{M}^{m+1}(\alpha))} \geq \inf_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} |H_f^F(x)|$.
2. *Se $|H_f^F| \geq b > 0$, então $\alpha = -a^2$ para alguma constante positiva a satisfazendo $ma \geq b$.*

Demonstração. Como notado acima, desde que $\text{Ric}_f \geq m\alpha$, temos

$$\lambda_f^*(B_M(r)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^{m+1}(\alpha)}(r)), \quad (50)$$

Deixando $r \rightarrow \infty$ na desigualdade (50), obtemos $\lambda_f^*(M) \leq \lambda^*(\mathbb{M}^{m+1}(\alpha))$. Assim, pelo Teorema 5.1, temos que

$$\inf_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} |H_f^F|(x) \leq 2\sqrt{\lambda_f^*(M)} \leq 2\sqrt{\lambda^*(\mathbb{M}^{m+1}(\alpha))}. \quad (51)$$

Para completar a prova do corolário, observe que, se $|H_f^F| \geq b > 0$, então, por (51), temos $\sqrt{\lambda^*(\mathbb{M}^{m+1}(\alpha))} \geq b/2$. Porém, $\lambda^*(\mathbb{M}^{m+1}(\alpha)) \neq 0$ se, e somente se, $\alpha = -a^2$, e neste caso $\lambda^*(\mathbb{M}^{m+1}(\alpha)) = m^2 a^2/4$. Assim, a desigualdade $\sqrt{\lambda^*(\mathbb{M}^{m+1}(\alpha))} \geq b/2$ pode ocorrer somente se $\alpha = -a^2$ e $ma \geq b$. \square

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, obtivemos teoremas de comparação para o núcleo do calor de subvariedades mínimas de variedades com curvatura limitada superiormente por uma função radial, Teorema 3.3. Nossos resultados são extensões de teoremas de comparação obtidos na década de 1980 por Cheng-Li-Yau e Markvorsen.

Na sequência, obtivemos resultados sobre a propriedade L^1 -Liouville de submersões Riemannianas, Teorema 4.3. Como consequência dos nossos resultados, temos que uma variedade produto com um dos fatores sendo compacto é L^1 -Liouville se, e somente se, ambos os fatores são L^1 -Liouville. Ressaltamos que, no caso mais restrito de variedades Liouville, este resultado não é válido, isto é, existem exemplos de variedades Liouville com um dos fatores sendo compacto, tal que o produto não é Liouville.

Na última parte, depois de introduzir o conceito de variedades ponderadas, obtivemos desigualdades para o tom fundamental ponderado de variedades admitindo uma folheação transversalmente orientada, em termos das curvaturas médias ponderadas das folhas. Nossos resultados são extensões das desigualdades do tipo Chern-Heiz para folheações, obtidas por Barbosa, Bessa e Montenegro.

Nossos objetivos neste trabalho foram alcançados, pois estendemos resultados de comparação para o núcleo do calor a uma classe mais ampla de subvariedades do que as dos resultados já existentes. Obtivemos também resultados sobre a propriedade L^1 -Liouville de submersões Riemannianas. Finalmente, obtivemos desigualdades para o tom fundamental ponderado.

Os resultados expostos acima podem ser úteis para alguém que queira trabalhar na direção dos assuntos mencionados.

REFERÊNCIAS

- [1] BARBOSA, J. L. M.; BESSA, G. P.; MONTENEGRO, J. F. On Bernstein-Heinz-Chern-Flanders inequalities. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge University Press, 2008. p. 457-464.
- [2] BARTA, J. Sur la vibration fondamentale d'une membrane. *C. R. Acad. Sci.*, v. 204, p. 472-473, 1937.
- [3] BESSA, G. P.; GARCÍA-MARTÍNEZ, S. C.; MARI, L.; RAMIREZ-OSPINA, H. F. Eigenvalue estimates for submanifolds of warped product spaces. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge University Press, 2014. p. 25-42.
- [4] BESSA, G. P.; MONTENEGRO, J. F. Eigenvalue estimates for submanifolds with locally bounded mean curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, v. 24, n. 3, p. 279-290, 2003.
- [5] BESSA, G. P.; MONTENEGRO, J. F.; PICCIONE, P. Riemannian submersions with discrete spectrum. *Journal of Geometric Analysis*, v. 22, n. 2, p. 603-620, 2012.
- [6] BESSA, G. P.; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. On the L^1 -Liouville property of stochastically incomplete manifolds. *Potential Analysis*, v. 39, n. 4, p. 313-324, 2013.
- [7] BISHOP, R.; O'NEILL, B. Manifolds of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 145, p. 1-49, 1969.
- [8] BRANDÃO, M. C.; OLIVEIRA, J. Q. Stochastic properties of the Laplacian on Riemannian submersions. *Geometriae Dedicata*, v. 162, n. 1, p. 363-374, 2013.
- [9] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian geometry*. New York: Academic Press, 1984.
- [10] CHEEGER, J.; YAU, S. T. A lower bound for the heat kernel. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 34, n. 4, p. 465-480, 1981.
- [11] CHENG, S. Y.; LI, P.; YAU, S. T. Heat equations on minimal submanifolds and their applications. *American Journal of Mathematics*, v. 106, n. 5, p. 1033-1065, 1984.
- [12] CHERN, S. S. On the curvature of a piece of hypersurface in Euclidean space. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, v. 29, n. 1, p. 77-91, 1965.
- [13] CHERNOFF, P. Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations. *Journal of Functional Analysis*, v. 12, n. 4, p. 401-414, 1973.

- [14] DAVIES, E. B. *Spectral theory and differential operators*. Cambridge: University Press, 1996.
- [15] FLANDERS, H. Remark on mean curvature. *Journal of the London Mathematical Society* v. 41, n. 1, p. 364-366, 1966.
- [16] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [17] GRAY, A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 16, n. 7, p. 715-737, 1967.
- [18] GREENE, R. E.; WU, H. *Function theory on manifolds which possess a pole*. Berlin: Springer-Verlag, 1979. (Lecture Notes in Mathematics; n. 699)
- [19] GRIGOR'YAN, A. Stochastically complete manifolds and summable harmonic functions. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, v. 33, n. 2, p. 425, 1989.
- [20] —————. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 36, n. 2, p. 135-249, 1999.
- [21] —————. *Heat kernel and analysis on manifolds*. Boston: American Mathematical Soc., 2009.
- [22] HEINZ, E. Über Flächen mit eindeutiger projektion auf eine ebene, deren krümmungen durc ungleichungen eingeschränkt sind. *Mathematische Annalen*, v. 129, n. 1, p. 451-454, 1955.
- [23] IMPERA, D.; RIMOLD, M. Stability properties and topology at infinity of f -minimal hypersurfaces. *Geometriae Dedicata*, v. 178, n. 1, p. 21-47, 2015.
- [24] JORGE, L.; KOUTROUFIOTIS, D. An estimate for the curvature of bounded submanifolds. *American Journal of Mathematics*, v. 103, n. 4, p. 711-725, 1981.
- [25] JORGENSON, J.; LANG, S. *The ubiquitous heat kernel*. Berlin: Springer-Verlag, 2001. p. 655-683.
- [26] KAZDAN, J. L.; WARNER, F. W. Curvature functions for open 2-manifolds. *Annals of Mathematics*, p. 203-219, 1974.
- [27] LI, P. *On the first eigenvalue and eigenfunctions of the Laplace operator on a compact Riemannian manifold and their geometric applications*. Ph.D. Thesis, U. of Calif., Berkeley, 1979.

- [28] MARKVORSEN, S. On the heat kernel comparison theorems for minimal submanifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 97, n. 3, p. 479-482, 1986.
- [29] O'NEILL, B. Submersions and geodesics. *Duke Math. J.*, v. 34, n. 29, p. 363-373, 1967.
- [30] —————. The fundamental equations of a submersion. *The Michigan Mathematical Journal*, v. 13, n. 4, p. 459-469, 1966.
- [31] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. G. *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*. Providence: American Mathematical Soc., 2005.
- [32] —————. *Vanishing and finiteness results in geometric analysis: A generalization of the Bochner technique*. Boston: Springer Science & Business Media, 2008.
- [33] SAKAI, T. *Riemannian geometry*. Providence: American Mathematical Soc., 1996.
- [34] SALAVESSA, I. M. C. Graphs with parallel mean curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 107, n. 2, p. 449-458, 1989.
- [35] SCHOEN, R.; YAU, S. T. *Lectures on differential geometry*. Boston: International Press, 1994.
- [36] SETTI, A. G. Eigenvalue estimates for the weighted Laplacian on a Riemannian manifold. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, v. 100, p. 27-55, 1998.
- [37] STRICHARTZ, R. S. Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold. *Journal of Functional Analysis*, v. 52, n. 1, p. 48-79, 1983.