UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LEONARDO FERREIRA SOARES

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE
2014

LEONARDO FERREIRA SOARES

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio França Cruz

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S655n Soares, Leonardo Ferreira
Números complexos: uma abordagem voltada para professores do ensino médio / Leonardo Ferreira Soares - 2014.
61 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientação: Prof. Dr. Flávio França Cruz.

1. Números complexos. 2. Livros didáticos - Avaliação. 3. Ensino médio. I. Título.

CDD 512.788

LEONARDO FERREIRA SOARES

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 27 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Flávio França Cruz

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Zelalber Gondim Guimarães

Prof. Ms. Zelalber Gondim Guimarães
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisca Leidmar Josué Vieira

Profa. Ms. Francisca Leidmar Josué Vieira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

AGRADECIMENTOS

A Deus sobre todas as coisas e por me proporcionar força nas horas mais díficeis.

A minha família pelo incentivo e apoio.

Ao meu orientador prof. Dr. Flávio França Cruz pela paciência e sugestões na busca de melhoria.

A todos os meus professores do PROFMAT que contribuíram na minha formação e deram importantes sugestões para a minha formação.

Ao prof. Ms . Zelálber Gondim Guimarães pela ajuda técnica.

Ao prof. Dr. Wilson Hugo ao sugerir aplicação na física.

Ao meu colega de mestrado prof. Especialista Francisco Aílton Alcântara pela ajuda na parte técnica do texto.

E finalmente à CAPES pelas bolsas de estudo que me proporcionaram um grande auxílio para cursar este programa de mestrado.

RESUMO

Este trabalho apresenta os números complexos com um enfoque que julgamos ser adequado para os professores do ensino médio. O objetivo do trabalho é fornecer mais um texto sobre o tema e auxiliar os professores do ensino médio em suas aulas. Iniciamos o trabalho com uma definição de números complexos que contempla o rigor matemático necessário e busca manter a simplicidade exigida para esse nível de ensino. Utilizamos a representação geométrica de um número complexo sempre que possível para motivar e simplificar as definições e demonstrações. Abordamos as fórmulas trigonométrica e de Moivre ressaltando a sua importância. Apresentamos a dedução da fórmula da raiz n-ésima de um número complexo . No penúltimo capítulo, abordamos alguns assuntos que não são contemplados nos livros didáticos de matemática do ensino médio que são a fórmula de Euler, a qual grande parte das aplicações dos números complexos existe devido a essa grande descoberta. O logaritmo complexo, cuja teoria explica como se calcular logaritmos de números negativos ou complexos e também tratamos sobre potências complexas, de tal maneira a explicar como se calcular potências de número quando a base e o expoente são números complexos. Finalmente, encerramos este trabalho fazendo uma análise de alguns livros didáticos do ensino médio.

Palavras Chaves: Professores. Plano complexo. Exponencial. Logaritmica.

ABSTRACT

This paper presents the complex numbers with an approach that we think to be appropriated for high school teachers. The aim is to provide one more text on the subject and assist high school teachers in their classes. We started working with a definition of complex numbers which includes the mathematical rigor necessary and seeks to maintain the simplicity required for this level of education. We used the geometric representation of a complex number, wherever possible, to motivate and simplify the definitions and demonstrations. We discussed the trigonometric and Moivre formulas emphasizing their importance. We presented the deduction of the formula for n-th root of a complex number. On the penultimate chapter, we discussed some issues that are not covered in mathematics textbooks from high school such as Euler's formula, which the majority of applications of complex numbers exists because of this great discovery. The complex logarithm, whose theory explains how to calculate logarithms of negative or complex numbers and we also worked on complex powers, in such a way to explain how to calculate power number when the base and the exponent are complex numbers. Finally, we concluded this paper by analyzing some high school textbooks.

Key Words: Teachers. Complex plan. Exponencial. Logarithm.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Em geral, a abordagem dada pelos livros didáticos do ensino médio aos números complexos engloba desde sua forma algébrica até a extração de raízes quando a base é complexa e o expoente é racional e omitem as demonstrações da teoria. O propósito deste trabalho é fornecer mais um texto sobre números complexos que venha complementar os livros didáticos, por isso, no decorrer da leitura, utilizamos a representação geométrica para ilustrar e motivar as definições e demonstrações as quais fizemos com o rigor matemático adequado a esse nível de ensino. Abordamos algo a mais sobre o tema que não se encontra nos livros de matemática do ensino médio e é de fundamental importância na tentativa de auxiliar os professores em suas aulas e ajudar a responder algumas perguntas que surgem naturalmente como as do tipo: para que serve os números complexos? A potência e a base de um número podem ser complexas ? Existe logaritmo de número negativo ou complexo? Um número real elevado a um complexo será sempre complexo? Essas perguntas não são fáceis de serem respondidas e durante muito tempo tiraram o sossego dos professores de matemática, Enquanto não se tinha estudado a fórmula de Euler, o logaritmo e a potência de um número cuja variável é complexa . O público alvo deste trabalho são os professores do ensino médio. Nesse sentido, esperamos que o leitor tenha uma noção básica de cálculo diferencial e integral para que ele mergulhe nesse mundo fantástico que é "O conjunto dos números complexos". Começamos com as definições, propriedades e gráficos de um número complexo bem como o de seu conjugado. Trabalhamos a noção de módulo e distância de dois complexos e suas propriedades. Na sessão sobre lugares geométricos explicamos o conteúdos e resolvemos uma série de exemplos para facilitar a aprendizagem do leitor e ajudar a melhorar a sua visão geométrica. Deduzimos as fórmulas de extração de raízes e mostramos também outra maneira algébrica de se calcular raízes quadradas seguida de seu significado geométrico. Enfatizamos a importância das fórmulas de Moivre. Definimos a exponencial complexa baseada na exponencial real a qual surge naturalmente em várias situações do nosso dia a dia, como na matemática financeira, no crescimento da população de bactérias, e etc. Em seguida, enriquecemos o conteúdo com um pouco da história da criação dos logaritmos reais e suas propriedades e analogamente definimos o logaritmo complexo e o relacionamos à potência complexa para assim podermos falar sobre as maiores aplicações dos números complexos. Após algum tempo realizando pesquisas na tentativa de se encontrar aplicações dos números complexos, percebemos que somente usando as ferramentas do ensino médio é difícil de se achar muitas aplicações o que mostra a grande necessidade de pesquisa contínua sobre os números complexos e buscar encontrar muito mais do que se tem hoje. No penúltimo capítulo, abordamos as aplicações dos números complexos. Finalmente, fizemos uma análise de alguns livros didáticos adotados nas escolas públicas e privadas do ensino médio.

O Conjunto dos Números Complexos

Neste capítulo definiremos o conjunto dos números complexos o conjugado e a distância entre dois números complexos. E provaremos todas as suas propriedades. Faremos uma seção sobre lugares geométricos e resolveremos uma série de exercícios para facilitar o entendimento do leitor.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é formado pelos pares ordenados de números reais, ou seja, $\mathbb{C} = \{(x,y); x,y \in \mathbb{R}\}$ dotado das operações de adição e multiplicação definidas abaixo

$$\text{(Adição)} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z + w = (x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$$

e a multiplicação é dada por

$$\text{(Multiplicação)} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \cdot w = (x,y) \cdot (a,b) = (xa - yb, xb + ya)$$

Para quaisquer z, w e t em $\mathbb{C}$ valem as seguintes propriedades:

Associatividade da Adição: $z + (w+t) = (z+w) + t$;

Comutatividade da Adição: $z + w = w + z$;

Elemento Neutro: existe $0 \in \mathbb{C}$ tal que $0 + z = z + 0 = z$;

O Elemento Oposto: Para cada $z \in \mathbb{C}$ existe o elemento $-z$ tal que $z + (-z) = 0$ a esse elemento damos o nome de elemento oposto de z;

Associatividade da Multiplicação: $(z \cdot w) \cdot t = z \cdot (w \cdot t)$;

Comutatividade da Multiplicação: $z \cdot w = w \cdot z$;

Elemento Inverso: Para cada $z \neq (0,0)$ existe um único $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = (1,0)$ denotamos w por z^{-1} e o chamamos de elemento inverso ou simplesmente o inverso de z;

Elemento Unidade: $1 \cdot z = z$, onde $1 = (1,0)$;

Distributividade: $z \cdot (w+t) = z \cdot w + z \cdot t$.

Demonstração. **Associatividade da Adição:** Sejam $z = (x,y), w = (u,v)$ e $t = (a,b)$ então

$$\begin{aligned} z + (w+t) &= (x,y) + ((u,v) + (a,b)) \\ &= (x,y) + (u+a, v+b) \\ &= (x + (u+a), y + (v+b)) \\ &= ((x+u)+a, (y+v)+b) \\ &= (z+w)+t \end{aligned}$$

onde da antepenúltima para a penúltima linha da demonstração usamos o fato do conjunto dos números reais ser associativo.

Comutatividade da Adição: Segue imediatamente da comutatividade dos números reais e da definição da adição de números complexos, pois

$$z + w = (x,y) + (u,v) = (x+u, y+v) = (u+x, v+y) = (u,v) + (x,y) = w + z.$$

Elemento Neutro: Sejam $z = (x,y)$ e $0 = (0,0)$, então

$$0 + z = (0,0) + (x,y) = (0+x, 0+y) = (x,y) = z.$$

O Elemento Oposto: Sejam $z = (x,y)$ e $-z = (-x,-y)$ em $\mathbb{C}$ então temos

$$z + (-z) = (x,y) + (-x,-y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0,0) = 0.$$

Associatividade da Multiplicação: Sejam $z = (x,y), w = (u,v)$ e $t = (a,b)$, então segue da distributividade e associatividades dos números reais que:

$$
\begin{aligned}
(z\cdot w)\cdot t &= [(x,y)\cdot(u,v)]\cdot(a,b)\\
&= [(xu-yv)a-(xv+yu)b,(xv+yu)a+(xu-yv)b]\\
&= [(xua-yva-xvb-yub,xva+yua+xub-yvb)]\\
&= [x(ua-vb)-y(va+ub),x(va+ub)+y(ua-vb)]\\
&= (x,y)\cdot(ua-vb,ub+va)\\
&= (x,y)\cdot[(u,v)\cdot(a,b)]\\
&= z\cdot(w\cdot t)
\end{aligned}
$$

Comutatividade da Multiplicação: Sejam $z=(x,y)$ e $w=(u,v)$, então segue da comutatividade e distributividades dos números reais que:

$$z\cdot w=(x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,yu+xv)=(ux-vy,uy+vx)=(u,v)\cdot(x,y)=w\cdot z.$$

Elemento Inverso: Sejam $z=(x,y)\neq(0,0)$ e definimos $z^{-1}=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})$.

Pela definição do produto de dois números complexos temos que

$$
\begin{aligned}
z\cdot z^{-1} &= (x,y)\cdot(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})\\
&= \left(\frac{xx-y(-y)}{x^2+y^2},\frac{yx+x(-y)}{x^2+y^2}\right)\\
&= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},\frac{0}{x^2+y^2}\right)\\
&= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},0\right)\\
&= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=(1,0).
\end{aligned}
$$

Elemento Unidade: Temos que

$$1\cdot z=(1,0)\cdot(x,y)=(1\cdot x-0\cdot y,0\cdot x+1\cdot y)=(x,y)=z.$$

Distributividade: Essa propriedade segue imediatamente das propriedades de distributividade, definição da multiplicação de números complexos e a associatividade:

$$
\begin{aligned}
z\cdot(w+t) &= (x,y)[(u,v)+(a,b)]\\
&= (x,y)[(u+a,v+b)]\\
&= [x(u+a)-y(v+b),x(v+b)+y(u+a)]\\
&= [xu+xa-yv-yb,xv+xb+yu+ya]\\
&= [(xu-yv)+(xa-yb),(xv+yv)+(xb+ya)]\\
&= [(xu-yv),(xv+yu)]+[(xa-yb),(xb+ya)]\\
&= (x,y)\cdot(u,v)+(x,y)\cdot(a,b) = z\cdot w+z\cdot t
\end{aligned}
$$

$\square$

A partir daqui podemos interpretar a subtração e a divisão de dois números complexos z e w como sendo respectivamente, $z-w = z+(-w)$ e $z/w = z\cdot w^{-1}$.

Observação 1. *Para todo número complexo z não nulo, são válidas as seguintes potências $z^0 = 1$, $z^n = \underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n-parcelas}$ e $z^{-n} = (z^n)^{-1} = \dfrac{1}{z^n} = \underbrace{\dfrac{1}{z}\cdots\dfrac{1}{z}}_{n-parcelas} = \underbrace{z^{-1}z^{-1}\cdots z^{-1}}_{n-parcelas}$, se $z \neq 0$ $(n \geq 1)$.*

Note que o conjunto dos $\mathbb{R}$ pode ser identificado como o subconjunto $\{Im(z) = 0\}$ de $\mathbb{C}$. Daí, diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos, por exemplo, se $z,w,p,t \in \mathbb{C}$, então $\dfrac{z}{w},\dfrac{p}{t} \in \mathbb{C}$ e

$$\frac{z}{w}+\frac{p}{t} = \frac{z\cdot t+p\cdot w}{w\cdot t}$$

e ainda,

$$\frac{z}{w}\cdot\frac{p}{t} = \frac{z\cdot p}{w\cdot t}$$

O plano complexo

O grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro a formalizar o conceito de números complexos e representá-lo no plano, chamado de plano complexo. A representação se baseia no plano cartesiano. Onde o eixo $0x$ é chamado de eixo real que denotamos por $Re(z)$ e o eixo $0y$ é chamado de eixo imaginário que denotamos por $Im(z)$. De acordo com a figura abaixo

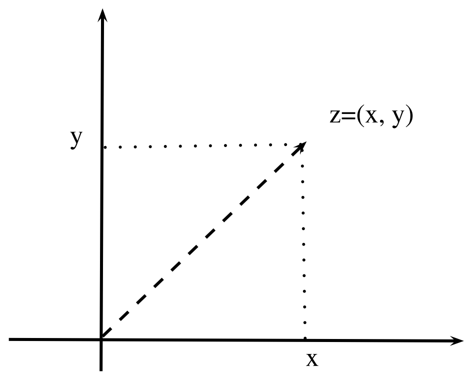


Figura 1: Plano Complexo

O conjugado de um número complexo

O conjugado de z é indicado por $\bar{z} = (x, -y)$, ou seja, é obtido de $z = (x, y)$ quando trocamos somente o sinal de y. Graficamente o conjugado é representado conforme figura (2). E note que z e $\bar{z}$ são simétricos em relação ao eixo real $0x$.

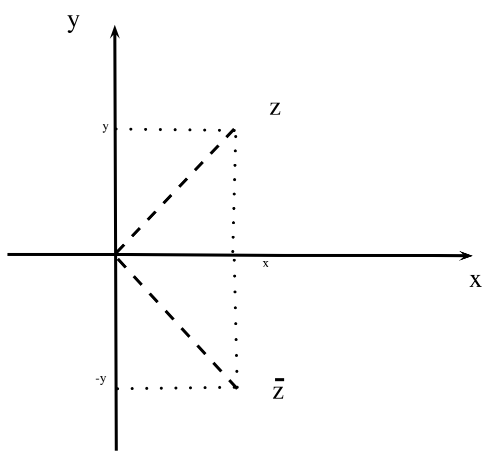


Figura 2: Conjugado de um complexo

Para todo número complexo $z=(x,y)$ definimos a parte real e a parte imaginária de z por $Re(z)=x$ e $Im(z)=y$, respectivamente. Se $Re(z)=x=0$, dizemos z é um imaginário puro. Se $Im(z)=0$, dizemos que z é um real puro, ou simplesmente real. Podemos associar biunívocamente todo número complexo $z=(x,y)$ ao um par ordenado no plano complexo.

A Distância entre dois números complexos

A distância entre dois números complexos $z=(x_1,y_1)$ e $w=(x_2,y_2)$, é cálculada usando-se a mesma ideia da geometria analítica, onde se define a distância entre dois pontos no plano cartesiano como sendo

$$d(z,w)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Conforme figura (3.)

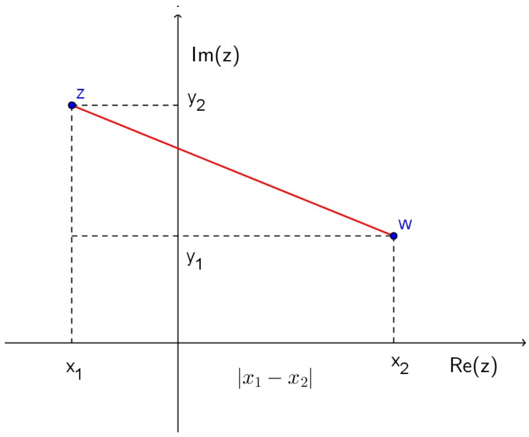


Figura 3: Distância entre dois números complexos

Agora, quando $w=(0,0)$ a fórmula fica

$$d(z,0)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

e é chamada de módulo do número complexo z. Em outras palavras, significa a distância de z à origem do plano.

Um fato interessante que decorre da multiplicação de dois números complexos é o seguinte. Qual será o valor de $(0,1)^2$? A resposta a questão é

$$\begin{aligned}(0,1)^2 &= (0,1)\cdot(0,1)\\ &= (0.0-1.1, 0.1+1.0)\\ &= (-1,0)\end{aligned}$$

essa igualdade $(0,1)^2 = (-1,0)$ é estranha ou absurda no conjunto dos números reais. Já que o quadrado de qualquer número real é não negativo. A esse número *estranho* deu-se o nome de unidade imaginária e representa-se por i. Então, $i^2 = -1$. Agora, podemos interpretar

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0).(0,1)$$

como sendo $z = x + iy$, onde $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$. Essa forma de representar um número complexo é chamada de *forma algébrica*.

Observação 2. *A interpretação geométrica da soma e a diferença de dois números complexos z e w no plano complexo é dado pela regra do paralelogramo, ou seja, conforme figura 4.*

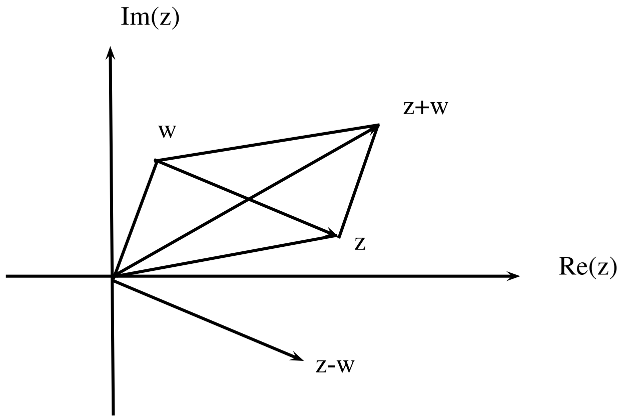


Figura 4: Soma e a diferença de dois números complexos

Seguem-se as seguintes propriedades do conjugado e do módulo de números complexos.

Proposição 1. *Para quaisquer que sejam $z, w \in \mathbb{C}$ temos as seguintes propriedades: (Ver (**??**)).*

1. $\overline{\overline{z}} = z$ *(o conjugado do conjugado de um número complexo é igual ao próprio número complexo);*
2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ *(o conjugado da soma de dois números complexos é igual a soma dos seus conjugados);*
3. $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$ *(o conjugado da diferença é igual a diferença dos conjugados);*
4. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ *(o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados);*
5. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ *(o conjugado da divisão é igual a divisão dos conjugados);*
6. $z + \overline{z} = 2Re(z)$ *(somar um número complexo com seu conjugado é equivalente a dobrar a parte real do número complexo);*
7. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$ *(A diferença entre um complexo e o seu conjugado é equivalente a dobrar a parte imaginária do número complexo);*
8. $\overline{z} = z$ *se, somente se,* $z \in \mathbb{R}$*;*
9. z *é imaginário puro, se somente se,* $\overline{z} = -z$*;*
10. $Re(z) + Re(w) = Re(z+w)$ *(A soma das partes reais é igual a parte real da soma);*
11. *Se* $k \in \mathbb{R}^*$*, então* $Re(kz) = kRe(z)$*;*
12. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$*;*
13. $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$*;*

14. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

15. $|z| = |\overline{z}|$;

16. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

17. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *com* $z \neq (0,0)$;

18. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ *desde que* $w \neq 0$;

19. $|z+w| \leq |z| + |w|$;

20. $|z+w| \geq ||z| - |w||$.

Demonstração. Faremos aqui as demonstrações das propriedades anteriores

1. Seja $z = x+iy$, então $\overline{z} = x-iy \Rightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{x-iy} = x+iy$.

2. Sejam $z = x+iy$ e $w = u+iv$, então

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{(x+iy)+(u+iv)} \\
&= (x+u) - i(y+v) \\
&= (x-iy) + (u-iv) \\
&= \overline{z} + \overline{w}
\end{aligned}$$

3. Sejam $z = x+iy$ e $w = u+iv$ então

$$\begin{aligned}
\overline{z-w} &= \overline{(x+iy)-(u+iv)} \\
&= \overline{(x-u)+i(y-v)} \\
&= (x-u) - i(y-v) \\
&= (x-iy) - (u-iv) \\
&= \overline{z} - \overline{w}
\end{aligned}$$

4. Sejam $z = x+iy$ e $w = u+iv$ números complexos, então

$$|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$$

extraindo a raiz quadrada obtemos o resultado.

5. Sejam $z = x + iy$ e $w = u + iv$, então da propriedade anterior temos que

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z \cdot w^{-1}} = \overline{z} \cdot \overline{w^{-1}} = \overline{z} \cdot \overline{w}^{-1}$$

6. É fácil ver que $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$ e que somando obtemos $z + \overline{z} = 2x = 2Re(z)$.

7. É imediato, uma vez que $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$, logo $z - \overline{z} = 2iy = 2iIm(z)$.

8. Se $z = \overline{z}$ é equivalente do item anterior que $z - \overline{z} = 2iIm(z) = 0$ e dai teremos que $z = x \in \mathbb{R}$.

9. É imediato do item anterior, pois $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$ logo $\overline{z} = -z$ se, somente se, $x - iy = -x - iy$, ou seja, $2x = 0$ e daí $x = 0$.

10. Sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$. Então, temos que

$$Re(z + w) = Re((a + c) + i(b + d)) = a + c = Re(z) + Re(w)$$

onde $Re(z) = a$ e $Re(w) = c$.

11. De fato, sejam $k \in \mathbb{R}^*$ e $z = a + ib \in \mathbb{C}$, então

$$Re(kz) = Re(k(a + ib)) = Re(ka + ikb) = ka = kRe(z)$$

12. Provemos que $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$, com efeito sabemos $x \leq |x|$ e do fato que $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ segue o resultado.

13. Já a desigualdade $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$ segue também do fato que $y \leq |y|$ e de que $y \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

14. Seja $z = x + iy$, temos que $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

15. Segue imediatamente que $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

16. Sejam $z = x + iy$ e $w = u + iv$ então temos que

$$
\begin{aligned}
\overline{z \cdot w} &= \overline{(x+iy) \cdot (u+iv)} \\
&= \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} \\
&= (xu - yv) - i(xv + yu) \\
&= (x - iy)(u - iv) = \overline{z} \cdot \overline{w}
\end{aligned}
$$

17. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
|z^{-1}| &= \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{|z|} = |z|^{-1}
\end{aligned}
$$

18. Sejam $z = x + iy$ e $w = a + ib$ então tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z}{w}\right| &= |z|.|w^{-1}| \\
&= |x+iy| \cdot \left|\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}\right| \\
&= \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}} \\
&= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|z|}{|w|}.
\end{aligned}
$$

19. De fato, basta observarmos que

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\overline{w}) \\ &= z\bar{z}+z\overline{w}+w\bar{z}+w\overline{w} \\ &= |z|^2+\bar{z}w+z\overline{w}+|w|^2 \\ &= |z|^2+2Re(\bar{z}w)+|w|^2 \\ &\leq |z|^2+2|z||w|+|w|^2 \\ &= (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

onde na desigualdade acima usamos o fato que $2Re(zw) \leq 2|zw| = 2|z||w|$ e na passagem da segunda para a terceira igualdade, utilizamos que $\overline{\bar{z}w} = z\overline{w}$, ou seja, que $\bar{z}w+z\overline{w} = 2Re(\bar{z}w)$.

20. Basta observarmos que $|z| = |z+w-w| \leq |z+w|+|w|$, donde obtemos que $|z|-|w| \leq |z+w|$. Se trocarmos $|z|$ por $|w|$ no que fizemos acima teremos o resultado $-(|z|-|w|) \leq |z+w|$ e daí tem-se o que queríamos. Uma vez que, se $(|z|-|w|) \leq |z+w|$ e $-(|z|-|w|) \leq |z+w|$ teremos que $|z+w| \geq ||z|-|w||$.

□

Exemplo 1 (IMO)**.** *Se z e w são números complexos de módulo 1 e tais que $zw \neq -1$, mostre que $\dfrac{z+w}{1+zw}$ é um número real.*

Solução: *Pela propriedade (16) basta mostrar que sendo $k = \dfrac{z+w}{1+zw}$, então $k = \bar{k}$. De fato, calculando o conjugado da expressão de k temos*

$$\bar{k} = \frac{\overline{z+w}}{\overline{1+zw}} = \frac{\bar{z}+\overline{w}}{1+\overline{zw}} = \frac{z^{-1}+w^{-1}}{1+z^{-1}w^{-1}} = \frac{w+z}{zw+1} = \frac{z+w}{1+zw} = k$$

conforme queríamos demonstrar.

Lugares Geométricos em $\mathbb{C}$

Nesta seção trataremos de alguns subconjuntos do plano complexo que são chamados comumente de lugares geométricos. Noutras palavras, *lugar Geométrico* é o termo dado ao conjunto de pontos do plano que satisfazem uma determinada condição. Por exemplo, uma circunferência é lugar geométrico dos pontos P do plano cuja distância a um ponto fixo C (centro) é um número real positivo r (raio). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2. *Esboce graficamente no plano complexo os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{C}$.

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

   Solução: *Seja* $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ *elevando ambos os membros dessa última equação ao quadrado fica*

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2.$$

   E isso nos mostra que o lugar geométrico em questão é uma circunferência centrada na origem $(0,0)$ *e raio* $r = 1$ *(Ver figura 5).*

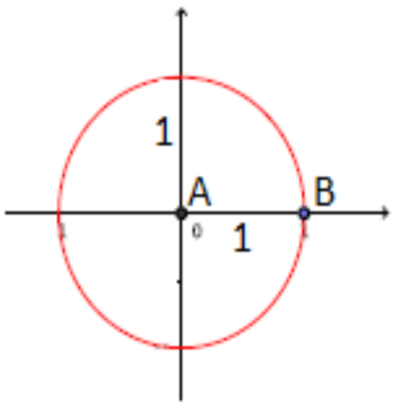


Figura 5: Circunferência de raio 1

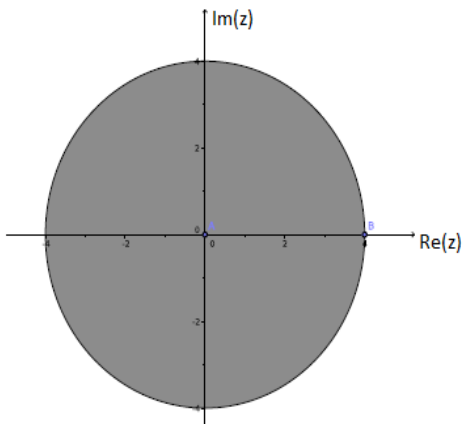


Figura 6: Círculo de raio 4

2. $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4\}$

Solução: *Seja* $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4$, *elevando ambos os membros ao quadrado obtemos*

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 \leq 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4^2$$

e é exatamente um círculo centrado na origem e raio $r = 4$ *(Ver figura 6).*

3. $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$

Solução: *Seja* $z = x + iy$ *então* $|z - i| = |x + iy - i| = |x + i(y-1)| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2$ *que elevando ao quadrado tem-se:*

$$x^2 + (y-1)^2 = 2^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

e isso é uma circunferência de centro $(0,1)$ *e raio* $r = 2$ *(Ver figura 7).*

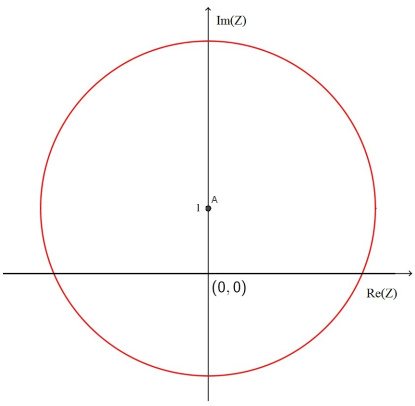


Figura 7: Círculo centrado em (0,1)

4. *$D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-i|\}$*

Solução: *Seja $z = x+iy$, então temos que $|z-1| = |z-i| \Rightarrow |x+iy-1| = |x+iy-i|$ que implica ainda em $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ e que elevando ao quadrado essa última expressão tem-se:*

$$(x-1)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2 = x^2+y^2-2y+1 \Rightarrow x = y$$

e isso diz que o lugar geométrico é conjunto dos pontos que formam a bissetriz dos quadrantes ímpares.

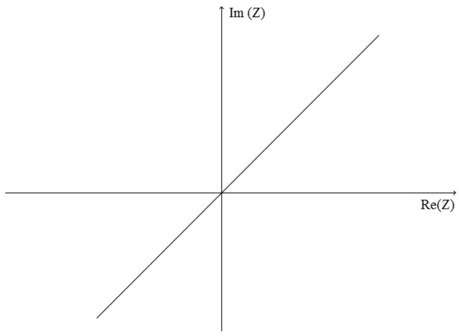


Figura 8: Bissetriz dos quadrantes ímpares

5. *Determine o número complexo z de "menor"argumento[1] tal que $|z-25i| \leq 15$ (Ver (**??**)).*

Solução: *Seja $z = x+iy$, então $|z-25i| = |x+iy-i25| = |x+i(y-25)| \leq 15$ que calculando o módulo temos $\sqrt{x^2+(y-25)^2} \leq 15$ e portanto elevando ao quadrado obtemos $x^2+(y-25)^2 \leq 15^2$ e isso representa uma circunferência de centro no ponto $C = (0,25)$ e raio 15. Mas, como esse número complexo tem que ter o menor argumento possível e satisfazer o enunciado, então é podemos enxergar o problema a partir daqui pelo seu gráfico. Percebam, conforme figura 9 que é o ponto de tangência P da reta na circunferência. Note que fica determinado um triângulo retângulo $\triangle OPC$ reto em P. E que agora, traçaremos a altura relativa à hipotenusa $\overline{OC}$ do triângulo $\triangle OPC$. Seja H o pé dessa perpendicular, como mostrado na figura 9. Usaremos as relações métricas no triângulo retângulo, em particular a relação*

$$\overline{OC}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{OP}^2 \Rightarrow 25^2 = 15^2 + \overline{OP}^2 \Rightarrow \overline{OP} = 20$$

[1]Definiremos melhor o argumento de número complexo no início do capítulo 3

e como $\overline{CO} \cdot \overline{PH} = \overline{CP} \cdot \overline{OP}$ *disso resulta* $25 \cdot \overline{PH} = 15 \cdot 20$ *que implica em* $\overline{PH} = 12$. *E mais* $\overline{OP}^2 = \overline{OH} \cdot \overline{OC}$ *conclui-se que* $20^2 = \overline{OH} \cdot 25 \Rightarrow \overline{OH} = 16$. *E portanto, as coordenadas de* P *são* $P = (12, 16)$ *ou equivalentemente* $P = 12 + 16i$ *(Ver figura 9).*

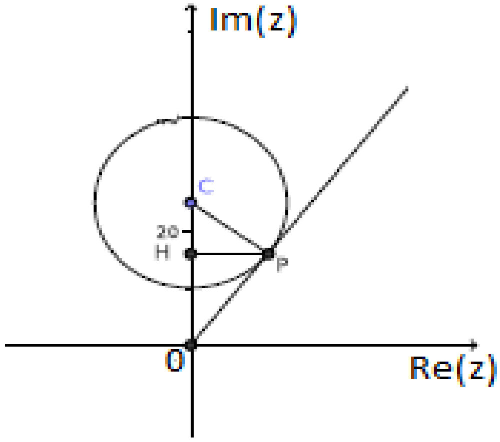


Figura 9: Reta tangente

Forma Trigonométrica ou Polar

Neste capítulo abordaremos a forma trigonométrica de um número complexo e também o produto e o quociente de dois números complexos nessa forma. E demonstraremos a importante fórmula de Moivre.

Seja $z = (x,y) \neq 0$ um número complexo não nulo. Consideremos o módulo de um número complexo $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ e o argumento $\theta = arg(z)$ que é o menor dos ângulos formados pelo vetor $\overrightarrow{0z}$ e o semi-eixo positivo dos x. Daí, todo número complexo não nulo z tem uma infinidade de argumentos, onde dois quaisquer deles diferem entre si por um múltiplo de 2π. Quando o argumento pertence ao intervalo $(-\pi,\pi]$ o chamamos de argumento principal e o indicamos por $Arg(z)$. Veja a figura 10.

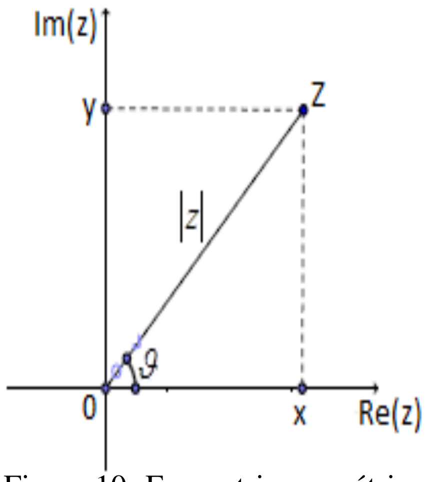


Figura 10: Forma trigonométrica

Da figura 10 vemos que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{|z|}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ e portanto segue as igualdades $x = |z|\cos\theta$ e $y = |z|\operatorname{sen}\theta$ e como $z = x+iy = |z|\cos\theta + i|z|\operatorname{sen}\theta$, temos a forma trigonométrica de um número complexo

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{1}$$

Observação 3. *Se*

$$\begin{cases} z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ e \\ z = |z|(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \end{cases} \tag{2}$$

então igualando as duas equações em 2 devemos ter

$$\begin{cases} \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\beta \\ \cos\theta = \cos\beta \end{cases}$$

mas da trigonometria temos que a equação $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\beta$ *só ocorre quando* θ *e* β *são congruos módulo* 2π*, ou quando são simétricos módulo* 2π *em relação ao eixo dos cossenos. Ou seja,* $\theta = \beta + 2k\pi$ *ou* $\theta = (\pi - \beta) + 2k\pi$*. Analogamente, para equação* $\cos\theta = \cos\beta$ *temos* $\theta = \beta + 2k\pi$ *ou* $\theta = -\beta + 2k\pi$*. Conforme figuras 11(a), 11(b) e 12(b). Vale resaltar que daqui em diante sempre que falarmos de argumento, estaremos nos referindo ao argumento principal.*

Comparando as soluções encontradas, para que sejam satisfeitas ambas as equações só nos resta uma opção $\theta = \beta + 2k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *que equivale a colocarmos* $\theta = \{\beta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$*. Onde* $\theta = arg(z)$ *e* $\beta = Arg(z)$*.*

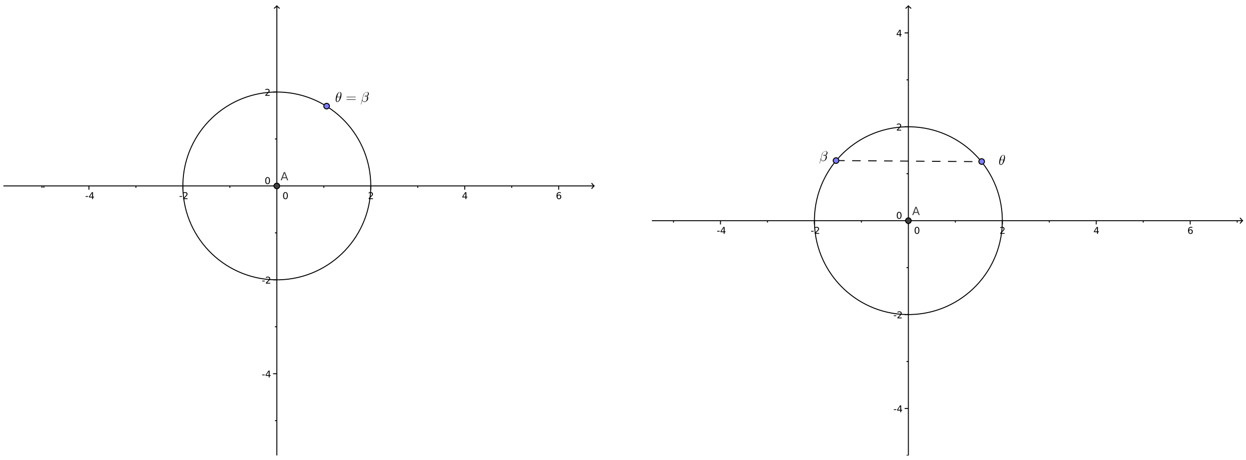
Exemplo 3. *Sejam (a)* $z = 1 + i$ *e (b)* $w = i$ *escreva na forma polar esses números complexos.*

Solução: *(a) Veja que* $z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

agora substituindo $|z| = \sqrt{2}$ *e* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *na forma trigonométrica obteremos*

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$



(a) $\theta \equiv \beta$ (b) θ é simétrico a β em relação a $0y$

Figura 11: Argumentos congruentes e simétricos em relação ao eixo x

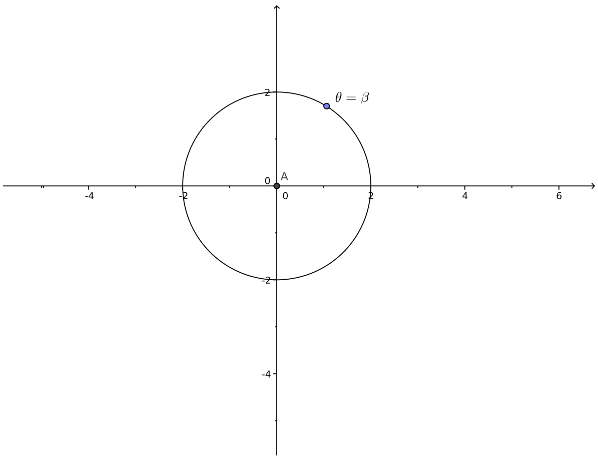
Analogamente, para (b) $w = i$*, temos que* $|w| = 1$ *então*

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta = \frac{0}{1} = 0 \\ \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \ \beta = \frac{\pi}{2}$$

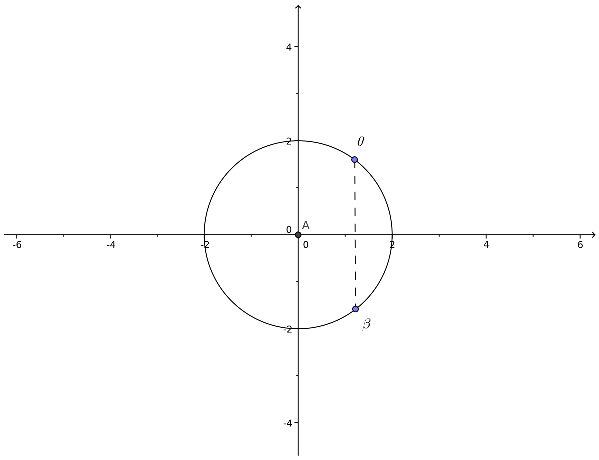
e portanto substituindo em 1, tem-se

$$w = |w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) = \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Vejamos agora a representação do produto dos números $z = x + iy$ e $w = u + iv$ esses mesmos números na forma trigonométrica ficam da seguinte forma
$z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ e $w = |w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$, respectivamente. Multiplicando essas expressões membro a membro obtemos



(a) $\theta \equiv \beta$



(b) θ é simétrico a β em relação a $0x$

Figura 12: Argumentos congruentes em relação ao eixo y

$$
\begin{aligned}
z\cdot w &= |z||w|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta)\\
&= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i(\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \,\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha) - \,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta)\\
&= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta - \,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) + \mathrm{i}(\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \,\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha)\\
&= |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta))
\end{aligned}
$$

ou seja, para multiplicarmos dois números complexos z e w, basta multiplicarmos os seus módulos e substituir o novo argumento pela soma dos argumentos de z e w.

Agora passaremos a pensar em particular o que acontece quando multiplicamos z pela unidade imaginária i, ou seja, iz vejamos, escrevendo $w = i$ na forma trigonométrica temos $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$ e $|z\cdot i| = |z||i| = |z|$ agora usando a fórmula do produto de números complexos fica $zi = |z|\left[\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\,\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]$ finalmente interpretando este último resultado percebemos que o que houve foi uma rotação de 90° no sentido positivo em torno da origem. Que graficamente tem-se

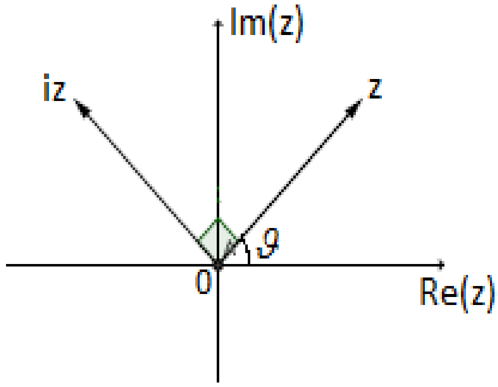


Figura 13: Rotação de 90 graus

Exemplo 4 (O Problema do Tesouro[2])**.** *Dois piratas decidem enterrar um tesouro numa ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de* $90°$*, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda , segundo um ângulo de* $90°$*, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "vamos imaginar que a árvore estivesse aqui". Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc, e encontra tesouro. A pergunta é : esse pirata era sortudo ou matemático? Como foi dito anteriormente e mesmo tendo sido apresentado num curso de números complexos , e para "alunos" que tinham bastante experiência – eram professores de matemática, as pessoas presentes acharam que este problema não tinha nada a ver com o tema da aula que é números complexos, o*

[2]O problema a seguir foi inspirado no livro Polynomials, de E. J. Barbeau.

problema da ilha do tesouro causa uma enorme comoção .Na verdade, todos admitiram que, se o curso não fosse sobre números complexos, nenhum dos presentes teria tido a idéia de resolver esse problema usando álgebra dos números complexos. E, depois da sugestão para fazê-lo, quase ninguém conseguiu, pois realmente tinham que estar bem inspirados para fazerem essa ligação entre esse problema com os números complexos já que costumamos trabalhar desse jeito com o conjunto e associando-o assim a geometria plana devemos admitir que isso é realmente raro nesse ramo. Geralmente os livros didáticos do ensino médio que trabalhamos não trazem problemas assim reside aí a razão pela qual não conseguimos fazer tal associação. Qual é a relação entre o problema apresentado e os números complexos? Bem tudo se baseia em dois fatos fundamentais da teoria algébrica dos números complexos sendo pojetados no plano complexo.

1. *Como já foi falado no decorrer desta trabalho, no plano complexo, a diferença entre dois números complexos significa o vetor com origem no primeiro ponto e extremidade no segundo, é o que costumamos escrever como:* $\overline{AB} = B - A$;

2. *Da multiplicação de um número complexo z por i ("unidade imaginária") equivale fazer uma rotação no sentido positivo de* $90°$ *como foi mostrado anteriormente. Analise a figura abaixo que descreve a situação do problema e veja a relação entre as teorias estudadas implícitas na questão (Ver figura 14).*

A figura ilustra a situação do problema sendo A a árvore, P e Q as pedras, o tesouro está no ponto T médio dos pontos $P^{'}$ *e* $Q^{'}$. *Considerando os pontos pertencentes ao plano complexo, não importando onde esteja à origem, tem-se:*

$$T = \frac{P^{'} + Q^{'}}{2} = \frac{P - i(P - A) + Q + i(Q - A)}{2} = \frac{P + Q}{2} + i(Q - P)$$

esse resultado não só demonstra que a localização do tesouro independe da posição da árvore (o pirata era matemático...) como também permite localizá-lo com o terceiro vértice de um dos triângulos retângulos isósceles com hipotenusa PQ como na figura abaixo: (Ver figura 15)

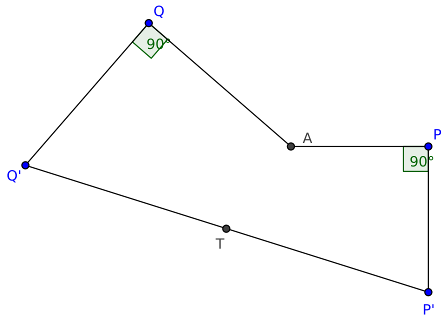


Figura 14: Mapa do Tesouro

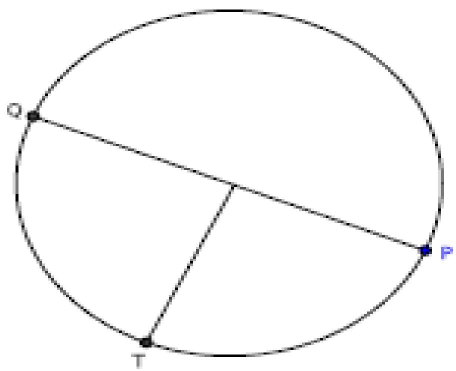


Figura 15: Mapa do Tesouro B

Dados $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e $w = |w|(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$, e usando a propriedade (17) do módulo temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= z\cdot w^{-1}\\
&= |z||w|^{-1}[\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha].[\cos(-\beta)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(-\beta)]\\
&= |z|.|w|^{-1}[\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha].[\cos\beta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\beta]\\
&= |z|.|w|^{-1}[(\cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)+\mathrm{i}(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)]\\
&= |z|.|w|^{-1}[\cos(\alpha-\beta)+i\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]\\
&= \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha-\beta)+i\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

então dividir dois números complexos é o mesmo que dividir seus módulos e substituir o seu novo argumento pela subtração dos dois anteriores.

Fórmula de Moivre

Será que existe uma maneira mais fácil de calcularmos, por exemplo as potências do tipo: z^n, com $n\in\mathbb{N}$ e $z\in\mathbb{C}$ sem usar o binômio de Newton? A resposta é afirmativa, pois, $z^n = |z|^n(\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(\mathrm{n}\theta))$ que conhecemos como fórmula de Moivre e pode ser provada por indução finita sobre $n\in\mathbb{N}$. De fato, veja que para $n=1$ temos $z^1 = |z|[\cos(1\theta)+i\operatorname{sen}(1\theta)] = |\mathrm{z}|[\cos(\theta)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta)]$ e o resultado é válido. Agora, suponha que a fórmula de Moivre seja válida para um $n\in\mathbb{N}$, vamos mostrar que vale para $n+1\in\mathbb{N}$. Com efeito, temos que

$$z^n z = |z|^n|z|[\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(\mathrm{n}\theta)][\cos\theta+\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta]$$

que pela fórmula da soma de dois arcos na trigonometria e a definição da multiplicação na forma polar resulta em

$$z^{n+1} = |z|^{n+1}[\cos(n+1)\theta + i\operatorname{sen}(\mathrm{n}+1)\theta]$$

como queríamos mostrar.

Exemplo 5. *Como aplicação da fórmula de Moivre, vejamos como calcular*

$$(1+\sqrt{3})^{17}.$$

Solução: *Façamos inicialmente,* $z = 1+\sqrt{3}$ *colocando na fórmula polar resulta em* $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$. *Agora elevando ambos os membros ao expoente* 17 *teremos*

$$z^{17} = 2^{17}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^{17} = 2^{17}\left(\cos\frac{17\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{3}\right),$$

ou seja

$$z^{17} = 2^{17}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = 2^{17}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

ou ainda,

$$z^{17} = 2^{16}(1 - i\sqrt{3}).$$

Poderíamos calcular $(1+\sqrt{3}i)^{17}$ *também usando o binômio de Newton que após ser desenvolvido nos daria 18 parcelas que simplificando chegaríamos também a* $2^{16}(1-\sqrt{3}i)$.

Conclusão, a fórmula de Moivre é muito útil para calcularmos potência de números complexos.

Observação 4. *Observemos que*

$$i^n = \begin{cases} i^0 = 1, \ \textit{para } n = 0 \\ i^1 = i \ \textit{ para } n = 1 \\ i^2 = -1 \ \textit{ para } n = 2 \\ i^3 = -i \ \textit{ para } n = 3 \\ i^4 = 1, \ \textit{para } n = 4 \end{cases}$$

percebemos que as potências da unidade imaginária se repetem de 4 em 4, pois temos que $i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$, *assim para cada potência de i basta dividirmos por 4 e tomarmos o seu resto, fazendo* i^r.

Exemplo 6. *Sendo i a unidade imaginária, calcule o valor da expressão*

$$\left(\sum_{n=0}^{2014} i^n\right)^8.$$

***Solução**: Temos que*

$$\sum_{n=0}^{2014} i^n = (i^0+i^1+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\cdots+(i^{2009}+i^{2010}+i^{2011}+i^{2012})+i^{2013}+i^{2014}$$

pela observação 4, cada um dos parênteses da expressão acima vale zero. Daí note que $2014 = 4\cdot 503+2$ *e isso nos diz que podemos agrupar as potências de i do somatório de 4 em 4 tal que a soma dessas potências em cada parcela será zero, e nos restará as duas últimas potências de i:* $i^{2013}+i^{2014}$*, assim*

$$\sum_{n=0}^{2014} i^n = i^{2013}+i^{2014} = i^1+i^2 = i-1.$$

Então calcular

$$\left(\sum_{n=0}^{2014} i^n\right)^8$$

é equivalente a encontrarmos o valor de $(i-1)^8$*. Escrevendo* $z=i-1$ *na forma trigonométrica temos* $|z|=\sqrt{2}$ *que implica*

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \theta = \frac{7\pi}{4},$$

daí $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$ *agora elevando ambos os membros a 8 temos*

$$z^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)^8.$$

Segue da fórmula de Moivre que

$$z^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8\cdot 7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{8\cdot 7\pi}{4}\right) = 2^4(\cos 14\pi + i\operatorname{sen} 14\pi) = 16(1+\mathrm{i}\cdot 0) = 16.$$

Exemplo 7 (ITA-2011)**.** *Seja* $z=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$*. Qual o valor da expressão* $\sum_{n=1}^{89} z^n$*?*

Solução: *Escrevendo* $z = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *na forma trigonométrica obtemos*

$$z = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}.$$

Portanto, elevando ao quadrado,

$$z^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim $z^{89} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^{89}$, *logo*

$$z^{89} = \cos\left(\frac{89\cdot 2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{89\cdot 2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{z}^2.$$

Agora, observemos que

$$\sum_{n=1}^{89} z^n = z+z^2+\cdots+z^{89} = \frac{z(z^{89}-1)}{(z-1)} = \frac{z(z^2-1)}{(z-1)} = \frac{z(z-1)(z+1)}{(z-1)} = z(z+1)$$

portanto,

$$\sum_{n=1}^{89} z^n = z(z+1) = (-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1.$$

Graficamente representamos a fórmula de Moivre por

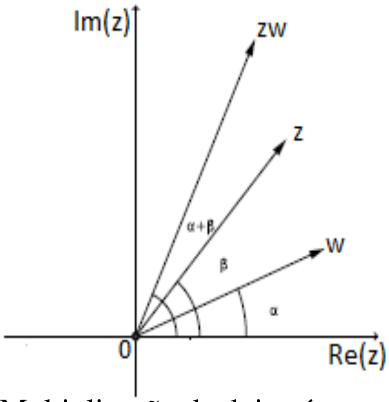


Figura 16: Multiplicação de dois números complexos

Encontrando Raízes Quadradas Algebricamente

Esta seção é dedicada ao estudo de equações do tipo $x^2 = \beta$ com $\beta \in \mathbb{C}^*$. Queremos encontrar $x \in \mathbb{C}^*$ para o qual

$$x^2 = \beta, \tag{3}$$

para isto tomemos $\beta = a + ib$ e $x = c + id$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Daí, substituindo na equação (3) ficamos com $(c+id)^2 = a + ib$ que implica na seguinte igualdade $c^2 + 2cdi - d^2 = a + ib$ donde obtemos[3].

$$\begin{aligned} a &= c^2 - d^2 \\ b &= 2cd \end{aligned} \tag{4}$$

Se elevarmos ambos os membros das duas equações ao quadrado, desenvolvendo e somando obtemos $a^2 = (c^2 - d^2)^2 = c^4 - 2c^2d^2 + d^4$ e $b^2 = 4c^2d^2$ que somando nos dá $a^2 + b^2 = c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 4c^2d^2 = (c^2 + d^2)^2$ que resulta em

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c^2 + d^2. \tag{5}$$

[3]A resolução desse problema se encontra em (**??**)

Agora, somando a primeira equação (4) com (5) ficamos com

$$\sqrt{a^2+b^2}+a = c^2-d^2+c^2+d^2 = 2c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \Rightarrow |c| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

E agora subtraindo a primeira equação de (4) de (5) obteremos

$$\sqrt{a^2+b^2}-a = c^2+d^2-c^2+d^2 = 2d^2 \Rightarrow d^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \Rightarrow |d| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

A segunda equação de (4) nos sugere que o sinal de b depende do sinal de c e d. Por exemplo, se

$$b>0 \Rightarrow \begin{cases} c>0 \text{ e } d>0 \\ \text{ou} \\ c<0 \text{ e } d<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ \text{ou} \\ z_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

e no caso em que

$$b<0 \Rightarrow \begin{cases} c>0 \text{ e } d<0 \\ \text{ou} \\ c<0 \text{ e } d>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ \text{ou} \\ z_2 = -\sqrt{\frac{-\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

Agora, considere a questão

$$x^2+\beta x+\gamma = 0 \tag{6}$$

com $\beta,\gamma \in \mathbb{C}$. A ideia dessa demonstração é análoga a da dedução da equação do 2º grau feita por Baskara. Completando quadrado em (6) obtemos

$$x^2+\beta x+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2,$$

donde

$$x^2+\beta x+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=-\gamma+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2=-\gamma+\frac{\beta^2}{4},$$

ou seja,

$$\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{-4\gamma+\beta^2}{4} \Rightarrow x=-\frac{\beta}{2}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}$$

E teremos as raízes

$$x=-\frac{\beta}{2}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}. \tag{7}$$

Chamando $\Delta=\beta^2-4\gamma$ em (7) ficamos com:

$$x_1=-\frac{\beta}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \text{ e } x_2=-\frac{\beta}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Exemplo 8. *Determine as raízes da equação* $x^2+2ix+(-2-i)=0$.

Solução: *Observemos que* $\Delta=(2i)^2-4(-2-i)=4+4i$. *Agora devemos encontrar os números complexos cujo quadrado seja igual a* $4+4i$. *Temos que* $a=4$ *e* $b=4$ *e daí* $a^2+b^2=32$. *Pelas fórmulas*

$$|c|=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad e \quad |d|=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

obtemos

$$|c|=\sqrt{\frac{\sqrt{32}+4}{2}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+4}{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

e

$$|d|=\sqrt{\frac{\sqrt{32}-4}{2}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-4}{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

E assim as raízes são

$$x_1=\frac{-2i+\sqrt{\Delta}}{2} \; e \; x_2=\frac{-2i-\sqrt{\Delta}}{2}$$

onde $\Delta=\sqrt{2\sqrt{2}+2}+i\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Extração de raízes de um número complexo

Neste capítulo abordaremos sobre extração de raízes de um número complexo e mostraremos sua representação gráfica para facilitar o entendimento do leitor.

Dizemos que w é uma raiz n-ésima de z com $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, se $z^n = w$. Se $z, w \neq 0$ então existem exatamente n raizes distintas da equação $z^n = w$, tal afirmação pode ser provada pelo seguinte teorema (Ver (**??**)).

Teorema 1. *Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes complexas distintas e elas são dadas por*

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2\mathrm{k}\pi}{\mathrm{n}}\right)\right] \tag{8}$$

com $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ denotemos por z_k o número complexo dado em (8). Seja $w = |w|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $\theta = arg(w)$. Estamos procurando todos os números complexos $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ para os quais $z^n = w$. Então

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\mathrm{n}\alpha) = \mathrm{w} = |\mathrm{w}|(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

que pela igualdade de números complexos implica em:

$$|z|^n = |w|, \quad \cos(n\alpha) = \cos(\theta) \text{ e } \mathrm{sen}\,(\mathrm{n}\alpha) = \mathrm{sen}\,(\theta)$$

da primeira condição concluímos que $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ e da trigonometria temos que $n\alpha = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Daí as raízes n-ésimas de w são os números da forma z_k. Tomando $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ obtemos as raízes n-ésimas distintas de w. Entretanto, os demais valores de k nos dão apenas repetições das raízes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. De fato, tome $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Escreva $k = qn + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < n$. Como

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(qn+r)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2qn\pi}{n} + \frac{2r\pi}{n} = \frac{\theta + 2r\pi}{n} + 2q\pi$$

ou seja, o que obtemos ao somar $\frac{\theta + 2r\pi}{n}$ com $2q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$ são arcos côngruos de $\frac{\theta + 2r\pi}{n}$, por isso, $\cos\left(\frac{\theta + 2r\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\theta + 2r\pi}{n} + 2q\pi\right)$ e $\text{sen}\left(\frac{\theta + 2\text{r}\pi}{\text{n}}\right) = \text{sen}\left(\frac{\theta + 2\text{r}\pi}{\text{n}} + 2\text{q}\pi\right)$ e então vemos que $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$

$\square$

Ao fazermos $k = 0$ em (8) obtemos a chamada *raiz n-ésima principal* de w. Denotamos por, $\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{\text{n}}\right)\right)$. Pelo que acabou de ser visto podemos notar que todas raízes n-ésimas de w possuem o mesmo módulo e este é $\sqrt[n]{|w|}$. Daí, podemos imaginar n pontos sobre a circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Além disso, é fácil ver que tais pontos $(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ estão igualmentes espaçados ao longo dessa circunferência devido à relação de seus argumentos. Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 9. *Calcule as raízes quadradas do número $z = 1$.*

***Solução**: Incialmente note que $w = 1 \Rightarrow w = 1 + i0$ e escrevendo w na forma polar, teremos $|w| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$. Como $\cos\theta = \frac{1}{1} = 1$ e $\text{sen}\,\theta = \frac{0}{1} = 0$ conclui-se que $\theta = Arg(z) = 0$ rad. Assim, $k \in \{0, 1\}$ então $z_k = \sqrt{1}\left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0 + 2\text{k}\pi}{2}\right)\right) = (\cos k\pi + i\,\text{sen}\,\text{k}\pi)$ agora fazendo $k = 0$ implica $z_0 = \cos(0 \cdot \pi) + i\,\text{sen}\,(0 \cdot \pi) = 1 + \text{i} \cdot 0 = 1$, e para $k = 1$ teremos que $z_1 = \cos(\frac{1\pi}{2}) + isen(\frac{1\pi}{2}) = 0 + i.1 = i$. Graficamente temos:*

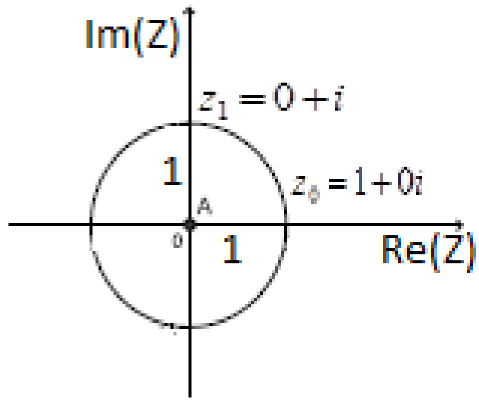


Figura 17: Raizes quadradas da unidade

Exemplo 10. *Esboce na circunferência as raízes cúbicas de* 8.

Solução: *Analogamente ao exemplo anterior, seja* $w = 8 = 8 + i0 \Rightarrow |w| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$. *Como* $\cos\theta = \dfrac{8}{8} = 1$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{0}{8} = 0$, *então* $\theta = Arg(z) = 0$ *rad. Daí,*

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

com $k \in \{0, 1, 2\}$, *então*

- *Para* $k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{0+2.0\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{0+2.0\pi}{3}\right)\right) = 2(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = 2$

- *Para* $k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2.1.\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2.1.\pi}{3}\right)\right) = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})) =$
  $= 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$

- *Para* $k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2.2.\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2.2.\pi}{3}\right)\right) = 2(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{3})) =$
  $= 2(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

Agora colocando os pontos z_0, z_1, z_2, *em um circunferência de raio* $r = 2$, *temos:*

Vejamos o seguinte exemplo, menos trivial que os anteriores:

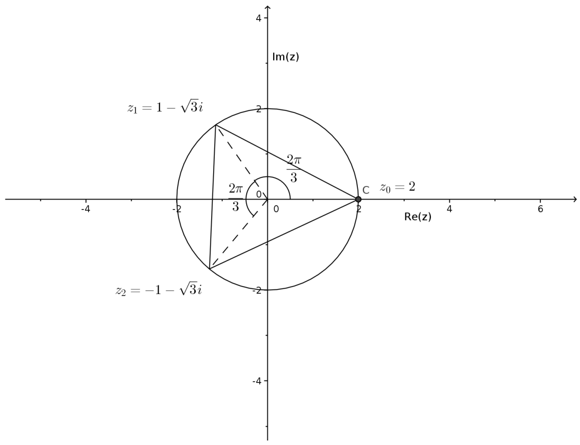


Figura 18: Raízes cúbicas de 8

Exemplo 11 (IMO)**.** *Use os números complexos para provar que*

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Solução: *Considere o número $w = 1 + 0i$, que colocando na forma polar temos que $|w| = 1$, $\cos\theta = \frac{1}{1} = 1$ e como $\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{1} = 0$ segue que $\theta = 0°$ ou $\theta = 0$ rad. Portanto, w na forma polar será $w = \cos 2k\pi + i\operatorname{sen} 2\mathrm{k}\pi$. Extraindo a raiz sétima de w teremos $\sqrt[7]{w} = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{2\mathrm{k}\pi}{7}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Agora, como já sabemos que as raízes sétimas da unidade são dadas pela expressão*

$$w_k = \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\mathrm{k}\pi}{7}\right)\right],$$

fazendo k variar no conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 6\}$, obtemos as raízes

- $n = 0 \Rightarrow w_0 = \cos(\frac{2.0.\pi}{7}) + i\operatorname{sen}(\frac{2.0.\pi}{7}) = 1$
- $n = 1 \Rightarrow w_1 = \cos(\frac{2.1.\pi}{7}) + i\operatorname{sen}(\frac{2.1.\pi}{7}) = \cos(\frac{2\pi}{7}) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})$
- $n = 2 \Rightarrow w_2 = \cos(\frac{2.2.\pi}{7}) + i\operatorname{sen}(\frac{2.2.\pi}{7}) = \cos(\frac{4\pi}{7}) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{7})$
- $\vdots$
- $n = 6 \Rightarrow \cos(\frac{2.6.\pi}{7}) + i\operatorname{sen}(\frac{2.6.\pi}{7}) = \cos(\frac{12\pi}{7}) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\frac{12\pi}{7})$.

Daí, o enunciado do problema nos sugere a escolher uma dessas raízes sétima da unidade, digamos $w_1 = \cos\frac{2\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}$, $w_1^2 = \cos\frac{4\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}$ e $w_1^3 = \cos\frac{6\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}$ e então, segue que $Re(w_1 + w_1^2 + w_1^3) = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}$, onde usamos o fato de que os ângulos $\frac{4\pi}{7} + \frac{3\pi}{7} = \pi$ e $\frac{6\pi}{7} + \frac{\pi}{7} = \pi$ são suplementares. Por outro lado, perceba que como

$w_1^7 = w_1^{7-k} \cdot w_1^k = 1$ e $|w_1^k| = 1$, segue que $w_1^{7-k} = w_1^7 \cdot w_1^{-k} = 1 \cdot w_1^{-k} = w_1^{-k} = (w_1^k)^{-1} = \dfrac{1}{w_1^k} = \overline{w_1^k}$. Portanto,

$$\overline{w_1 + w_1^2 + w_1^3} = w_1^6 + w_1^5 + w_1^4.$$

Assim concluímos que

$$Re(w_1 + w_1^2 + w_1^3) = Re(w_1^6 + w_1^5 + w_1^4)$$

e como

$$S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}, \text{ com } z \neq \{0,1\}$$

e $w_1 \neq 1$ é uma n-ésima raiz da unidade, então $w_1^n = 1$ de modo que $1 + w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^{n-1} = 0$ e consequentemente segue o resultado $w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^6 = -1$. Tomando as partes reais dessa igualdade ficamos com

$$Re(w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^6) = Re(-1).$$

Depois disso agrupamos os termos convenientemente para obtermos

$$Re(w_1 + w_1^2 + w_1^3) = Re(w_1^4 + w_1^5 + w_1^6) = -1,$$

ou seja,

$$2Re(w_1 + w_1^2 + w_1^3) = -1.$$

Portanto segue que

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} = -Re(w_1 + w_1^2 + w_1^3) = \frac{1}{2},$$

como queríamos provar.

A Exponencial

Neste capítulo discutiremos sobre o número de Euler, a série de Taylor e concluíremos a seção com a relevante fórmula de Euler. Para assim podermos definir as potências do tipo z^w com z e w complexos. Portanto, o leitor necessitará de uma noção básica do cálculo diferencial e integral.

O número de Euler e surge naturalmente em alguns problemas de matemática financeira, no crescimento de população de bactérias, no decaimento radioativo e etc. Sendo assim um dos números mais importante da matemática. Inicialmente definiremos o número de Euler, como sendo

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

onde "e"é um número irracional, cujo valor aproximado é $e \approx 2,7$. Como podemos ver, conforme tabela abaixo.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
$n=1$	$(1+\frac{1}{1})^1 = 2$
$n=2$	$(1+\frac{1}{2})^2 = 2.25$
$n=10$	$(1+\frac{1}{10})^{10} = 2,5937425$
$n=50$	$(1+\frac{1}{50})^{50} = 2,691588$
$n=100$	$(1+\frac{1}{100})^{100} = 2,7048138$
$n=500$	$(1+\frac{1}{500})^{500} = 2,715568521$

Séries de Potências

Uma série de potências é uma soma infinita de potências de x, do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes reais, que chamamos de coeficientes da série. Em geral, a série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots$$

é denominada série de potências em $(x-a)$ ou série de potências centradas em a, ou ainda séries de potências em torno de a. Umas das séries de potências mais conhecidas e que são bastantes usadas nos livros de Cálculo é a série de Taylor, cuja representação é dada por:

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

que a série de Taylor da função f em torno de a.

Exemplo 12. *Como nosso objetivo é deduzirmos a fórmula de Euler, para isso precisamos calcular inicialmente a série de Maclaurin da função exponencial $f(x) = e^x$, onde a série de Maclaurin é a série de Taylor em torno do $a = 0$. Mas, observemos que*

$$f(0) = e^0 = 1, f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

desse modo, obtemos que

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{1.(x-0)}{1!} + \frac{1.(x-0)^2}{2!} + \frac{1.(x-0)^3}{3!} + \cdots$$

que resulta em

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{9}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste ponto, extendemos o conceito de função exponencial real para uma função exponencial complexa, fazendo a simples substituição em (9) de $x = yi$ com $y \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária e fazendo os cálculos sem nos preocupar formalmente com o significado do que seja convergência, teremos:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots \\ &= \underbrace{(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} \cdots)}_{(*)} + i \underbrace{(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots)}_{(**)} \end{aligned}$$

consideremos agora as funções $\mathrm{sen}\, y$ *e* $\cos y$ *e fazendo a expansão da série de Taylor em torno de* $a = 0$ *para ambas, tem-se*

$$(*)\ \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots$$

e

$$(**)\ \mathrm{sen}\, \mathrm{y} = \mathrm{y} - \frac{\mathrm{y}^3}{3!} + \frac{\mathrm{y}^5}{5!} - \frac{\mathrm{y}^7}{7!} + \cdots$$

E então concluímos que

$$e^{iy} = \cos y + i\,\mathrm{sen}\, \mathrm{y} \tag{10}$$

esta é a exponencial complexa que é devida ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783).

Segue das propriedades de potências com expoentes reais que:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

e fazendo a substituição de e^{iy} por $e^{iy} = \cos y + i\,\mathrm{sen}\, \mathrm{y}$, obteremos a seguinte expressão:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, \mathrm{y})$$

Sendo que muitas vezes usamos a notação $\exp(z)$ no lugar de e^z, onde $z = x + iy$.

Essa expressão da exponencial complexa tem muitas aplicações, vejamos alguns exemplos que ilustram a sua utilidade.

Exemplo 13. *Calcule o valor de* $\exp(\frac{i\pi}{2})$.

Solução: *Basta fazer* $y = \dfrac{\pi}{2}$ *em* e^{iy}, *donde* $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}\,(\frac{\pi}{2}) = 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$.

Exemplo 14. *Determine o valor de* $\exp(1+i\pi)$

Solução: *É imediato que,*

$$\exp(1+i\pi) = e^{1+i\pi} = e^{1}(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = \mathrm{e}(-1+\mathrm{i}.0) = -\mathrm{e}$$

Exemplo 15. *Sejam* $x = 1^{e^{(1+2i\pi)}}$ *e* $y = e^{i\frac{\pi}{2}}$. *Calcule o valor de* $(x+y)^{2014}$.

Solução: *Inicialmente vamos calcular o valor* $e^{(1+2i\pi)}$. *Com efeito, temos*

$$e^{(1+2i\pi)} = e(\cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi) = \mathrm{e}(1+\mathrm{i}.0) = \mathrm{e}$$

E agora, temos que $1^{e^{(1+2i\pi)}} = 1^{e}$. *Então a questão agora é calcular o valor de* 1^{e}. *Para isso, consideremos a função exponencial* $f(x) = b^{x}$ *e calculando a série de Taylor para essa função em torno de* $a = 0$, *teremos*

$$f(0) = b^{0} = 1, f'(x) = b^{x}\ln b, f''(x) = b^{x}(\ln b)^{2}, \ldots, f^{(n)}(x) = b^{x}(\ln b)^{n}$$

e assim resulta que

$$\begin{aligned} f(x) = b^{x} &= f(0) + \frac{f'(0)(x-0)}{1!} + \frac{f''(0)(x-0)^{2}}{2!} + \frac{f'''(0)(x-0)^{3}}{3!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{b^{0}.\ln b.x}{1!} + \frac{b^{0}(\ln b)^{2}x^{2}}{2!} + \frac{b^{0}(\ln b)^{3}x^{3}}{3!} + \cdots \\ &= 1 + \ln b \cdot x + \frac{(\ln b)^{2}x^{2}}{2!} + \frac{(\ln b)^{3}x^{3}}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

E agora fazendo $b = 1$ *e* $x = e$ *na expressão acima obtemos*

$$f(x) = 1^{e} = 1 + \ln(1)\cdot e + \frac{(\ln 1)^{2}e^{2}}{2!} + \frac{(\ln 1)^{3}e^{3}}{3!} + \cdots = 1$$

pois sabemos que $ln(1) = 0$ em todas as parcelas em que a mesma aparece.

E por fim, temos dos exemplos anteriores que $(x+y)^{2014} = (1+i)^{2014} = ?$

Neste ponto, vemos que $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x||(\cos y + i \operatorname{sen} y)|$, e portanto $|e^z| = |e^x|$ uma vez que $|(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = 1$. E além disso, temos que $|e^x| = e^x$, pois sabemos do Cálculo, que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. E concluímos que:

$$|e^z| = e^x = e^{Re(z)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Sendo $z = x + iy$ e $n \in \mathbb{Z}$, então

$$(e^z)^n = (e^{x+iy})^n = e^{nx+iny} = e^{nx} \cdot e^{iny} = e^{nx} \cdot (\cos(ny) + i \operatorname{sen}(\mathrm{ny})) = (\mathrm{e^n})^{\mathrm{z}}$$

Se aplicarmos a fórmula de Moivre a expressão $(e^z)^n$ obteremos $e^{n.x}(\cos(ny) + i \operatorname{sen}(\mathrm{ny}))$ e usando a comutatividade do conjunto dos números complexos, obtemos a igualdade:

$$(e^n)^z = (e^z)^n$$

Tomando então $n = -1$ e substituindo em $(e^z)^n$ obtemos $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Considere os números complexos $z_1 = x + iy$ e $z_2 = c + id$, vejamos o que acontece quando fazemos:

$$\begin{aligned}
e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x+iy} \cdot e^{c+id} \\
&= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).\mathrm{e^c}(\cos \mathrm{d} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \mathrm{d}) \\
&= e^x e^c(\cos y + i \operatorname{sen} y).(\cos \mathrm{d} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \mathrm{d}) \\
&= e^x e^c(\cos y \cos d + i \operatorname{sen} \mathrm{d} \cos \mathrm{y} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \mathrm{y} \cos \mathrm{d} - \operatorname{sen} \mathrm{y} \operatorname{sen} \mathrm{d})
\end{aligned}$$

agrupando a expressão entre parenteses na última equação acima temos:

$$e^{x+c} \cdot (\cos(y+d) + i \operatorname{sen}(\mathrm{y} + \mathrm{d})) = \mathrm{e^{z_1+z_2}}$$

Em outras palavras, concluímos que $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, ou seja, a propriedade da multiplicação de potência real de mesma base que antes repetíamos a base e somavamos os expoentes também é válida quando a potência é complexa.

Neste momento interpretaremos a expressão

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{e^z} &= \frac{1}{e^{x+iy}} \\
&= \frac{1}{e^x . e^{iy}} \\
&= \frac{1}{e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, \mathrm{y})} \\
&= \frac{1}{e^x} \cdot (\cos y + i \,\mathrm{sen}\, \mathrm{y})^{-1} \\
&= e^{-x} \cdot (\cos y - i \,\mathrm{sen}\, \mathrm{y}) \\
&= e^{-x} \cdot (\cos(-y) + i \,\mathrm{sen}\, (-\mathrm{y})) = \mathrm{e}^{-\mathrm{z}}
\end{aligned}
$$

Das últimas conclusões que tiramos da exponencial complexa passaremos a pensar agora como fica:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2} = e^{z_1 - z_2}.$$

Daí, concluímos que a propriedade de potência real de mesma base que outrora repetíamos a base e subtraímos os expoentes também são válidas quando os expoentes são complexos. Finalmente usando indução finita é fácil ver que $(e^z)^n = e^{nz}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Até aqui vemos que as propriedades de potências que valiam para potências reais também são válidas quando o expoente é complexo. É importante percebermos que ao contrário do que acontece no caso real, é possível termos $e^z = e^w$ com $z \neq w$. Como exemplo, temos

$$\cos 0 + i \,\mathrm{sen}\, 0 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = \cos 2\pi + \mathrm{i} \,\mathrm{sen}\, 2\pi = 1$$

Em geral, vejamos por que isso acontece:

Teorema 2. *Se $z, w \in \mathbb{C}$, então $e^z = e^w$ se, somente se, $z = w + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $z = x + yi$ e $w = c + di$ com $x, y, c, d \in \mathbb{R}$. Então

$$e^z = e^w \Leftrightarrow e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y) = \mathrm{e}^{\mathrm{c}}(\cos \mathrm{d} + \mathrm{i} \,\mathrm{sen}\, \mathrm{d})$$

da igualdade dos números complexos isso só ocorre quando $e^x = e^c \Rightarrow x = c$ com $\cos y = \cos d$ e $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} d$ que implica em $y = d + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ e da trigonometria concluímos que $z = w + 2k\pi i$. $\square$

Retomando a fórmula de extração de raízes n-ésimas de um número complexo z dada por (8)

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\mathrm{k}\pi}{\mathrm{n}}\right)\right] = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)i}$$

com $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

O que acabamos de mostrar foi que obtermos as raízes n-ésimas de um número complexo z, basta multiplicar a raiz n-ésima principal $(\sqrt[n]{z})$ pelas raízes n-ésimas da unidade. É bom que se diga que também podemos denotar as raízes n-ésimas da unidade por $\zeta_k = e^{\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ e esta observação decorre do seguinte fato, considere $z = 1 + 0i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ e $\cos\theta = \frac{1}{1} = 1$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{1} = 0$, donde concluímos da trigonometria que $\theta = 0^\circ$ agora substituindo na fórmula (8) fica:

$$z_k = \sqrt[n]{|1|} \cdot e^{\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)i} = e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}$$

para $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Exemplo 16. *Calcule as raízes quadradas da unidade.*

Solução: *Sendo* $z = 1 + 0i \Rightarrow |z| = 1$ *e* $\cos\theta = \frac{1}{1} = 1$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{1} = 0$ *que implica que* $\theta = 0^\circ$ *e daí temos que* $\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{2}}$ *com* $k \in \{0, 1\}$ *e assim* $\zeta_k = e^{k\pi i}$ *e agora fazendo:*

- $k = 0 \Rightarrow \zeta_0 = e^{0\pi i} = e^0 = 1$

- $k = 1 \Rightarrow \zeta_1 = e^{1\pi i} = e^{\pi i} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = (-1 + 0\mathrm{i}) = -1$

Portanto as raizes da unidade são $-1, 1$.

Outra diferença que temos que destacar entre as exponenciais reais e complexas é que e^z é periódica, isto é, $e^{z+p} = e^z$, onde p é o período. Por exemplo, considere $z = x + iy$ e veja que

$$
\begin{aligned}
e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i} \\
&= e^{(x+i(y+2\pi))} \\
&= e^{x}\cdot(\cos(y+2\pi)+i\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{y}+2\pi)) \\
&= e^{x}(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,\mathrm{y}) \\
&= e^{x}\cdot e^{yi} \\
&= e^{x+iy}=e^{z}
\end{aligned}
$$

logo e^z é períodica com $p = 2\pi i$.

Logaritmo Complexo

Neste capítulo falaremos sobre o logaritmo de um número real e suas propriedades e estenderemos o conceito para o caso complexo. E por fim, trataremos sobre potências complexas.

Preliminares Históricos

Historicamente os difíceis cálculos com potências quando ainda nem chamam-se assim ”potências” foi o que fez muitos matemáticos trabalharem na tentativa de facilitar e diminuir o seu esforço nas contas na astronomia e na física. Alguns procedimentos então usados com essa finalidade ainda estavam longe do ideal. Era o caso da prostaférese (adição e subtração em grego) , consistindo na conversão de produtos em somas, mediante relações trigonométricas do tipo:

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y)$$

Essa dificuldade seria eliminada pela criação dos logaritmos no século XVII. De acordo com a história são dois os pais da ideia de logaritmo: John Napier (1.550-1617) e Jobst Burgi (1552-1632) em trabalhos independentes, quase que concomitantes, o primeiro a partir de noções geométricas, o segundo a partir de noções algébricas. Na disputa pela descoberta dos logaritmos o suíço Burgi inventou seus logaritmos por volta do ano 1.600 e somente os publicou em 1.620 o que o fez ficar atrás de Napier na prioridade sobre o assunto.

O Caso Real

Relembraremos a definição de logarítmo no caso real.

Definição 1. *Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se o logarítmo de b na base a ao expoente que se deve elevar a base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Simbolicamente, escrevemos: dados $a,b \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$, então*

$$\log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

Dizemos que a é a base , b é o logaritmando e x é o logaritmo. É interessante saber que quando o logaritmo não tiver base, convenciona-se que a base subentendida é 10 o logaritmo é dito decimal(devido ser a base do nosso sistema decimal). Quando a base é 10, geralmente omite-se o valor da base e temos a seguinte notação para o logarítmo decimal:

$$\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$$

Se a base for o número "e" onde "e" é chamado número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Euler, o primeiro a ter ideia de calcular esse número além de perceber onde poderíamos encontrá-lo na natureza, o logaritmo é chamado natural ou logaritmo neperiano (este último é usado de maneira inconveniente pois em seus trabalhos Napier tinha por base o número $a = (1-10^7)^7$, o que aliás para sermos mais exatos o verdadeiro "logaritmo neperiano" é $10^7 \log_a(x/10^7)$ e é bom que saibamos que Euler chamava o logaritmo natural era de logaritmo hiperbólico devido ao seguinte fato: considere a seguinte função $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e seu gráfico é um ramo de uma hipérbole equilátera para satisfazer melhor o seu ego e tirar essas dúvidas de como é o gráfico dessa função veja o livro logaritmos de Elon Lages Lima da editora SBM) pode ser representado por $\log_e x$ ou $\ln x$. Outro fato relevante é que a função logaritmo real é injetiva, ou seja, números reais diferentes têm logaritmos distintos. Agora, vejamos as propriedades do logaritmo advindas de sua definição:

1. $\log_a 1 = 0$ (quando o logaritmando é 1 o logaritmo é zero);
2. $\log_a a = 1$ (quando a base e o logaritmando são iguais o logaritmo é 1);
3. $a^{\log_a b} = b$ (quando uma base está elevada a um logaritmo com a mesma base o resultado será igual ao logaritmando);
4. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ (dois logaritmos de mesma base são iguais quando os logaritmandos também o são);

5. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (o logaritmo do produto de dois números positivos a e b é a soma dos logaritmos na mesma base);

6. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ (o logaritmo da divisão de dois reais positivos b e c de mesma base é igual a diferença de seus respectivos logaritmos);

7. $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$ (a potência do logaritmando desce multiplicando o logaritmo);

8. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (mudança de uma base a para uma base c).

Não demonstraremos as propriedades básicas do logaritmo acima visto que elas são bem simples e acessíveis em diversos livros de ensino médio e deixaremos esse esforço para o leitor.

Motivados pelo seguinte questionamento feito pelos nossos alunos mais interessados em ir um pouco além do que encontramos nos nossos livros didáticos de ensino médio: Será que existe logaritmo de números negativos? E qual o seu significado? Durante séculos isso não teve explicação fazendo com que a busca em responder essa pergunta fosse morosa e árdua até que um dia foi descoberta mas para isso teve que se pensar em uma nova teoria a dos “logaritmos complexos”. Para respondermos tais difíceis questionamentos vejamos o próximo tópico logo abaixo.

O Caso Complexo

Agora, analogamente ao que acabamos de definir anteriormente e usando-se basicamente a mesma ideia estenderemos o conceito de logaritmo real para o complexo. Daí, temos a seguinte definição

Definição 2. *Dizemos que um número complexo w é o logarítmo de um número complexo não nulo z se ocorrer:*

$$e^w = z \Leftrightarrow \ln z = w$$

Porém, antes de nos aprofundarmos mais neste assunto, devemos enxergar que tanto o logarítmo no caso real, quanto a exponencial são inversas uma da outra. Considerando-se os seus domínios e para isso, ambas as funções devem ser bijetivas, o que as tornam obviamente injetivas e daí, podemos dizer que todo número real positivo possui um único logarítmo, ou seja, dados (Ver: pág. 15 e 16 de (**??**)).

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow e^{x_1} \neq e^{x_2} \text{ ou } \log x_1 \neq \log x_2$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. A grande diferença entre o logarítmo real e o complexo é que todo número complexo não nulo possui uma infinidade de logarítmos, devido aos seus infinitos valores dos argumentos. Denotaremos por $\log z$ o conjunto de todos os logarítmos do número complexo $z \neq 0$. Assim, para todo número complexo não nulo z, temos

$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$$

ou seja, $logz$ é o conjunto dos números complexos $w \in \mathbb{C}$ tais que $e^w = z$.

Vamos agora ver como determinar $\log z$. Se $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in arg(z)$, então aplicando-se em ambos os membros da igualdade a base e tem-se:

$$e^w = e^{\ln|z|+i\theta} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\theta} = |z| \cdot e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \mathrm{z}$$

De outro modo, se $w \in \log z$, então $e^w = z$, o que equivale a dizer que $e^{Re(w)} = |e^w| = |z|$ e $Im(w) = Arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donde $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in Arg(z)$. Assim definiremos o seguinte:

$$\log z = \{\ln|z| + i\theta : \theta \in Arg(z)\} = \{\ln|z| + i(Arg(z) + 2k\pi)\}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Perceba que, neste ponto $\log_e x = \ln x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Daqui em diante, usaremos a notação $\log_e x$ ao invés de $\ln z$ para x sendo real positivo.

Exemplo 17. *Calcule os seguintes logarítmicos:*

i) $Log(-1)$

ii) $Log(e^2 i)$

iii) $Log(1+i)$

Solução:

i) $Log(-1) = Log(-1+i0)$ *sendo que* $|z| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$ *e nesse caso* $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-1}{1} = -1$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\mathrm{b}}{|\mathrm{z}|} = \dfrac{0}{1} = 0$ *e assim* $\theta = \pi$ *e segue pela definição do logarítmo complexo* *que* $Log(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi$.

ii) $Log(e^2 i) = Log(0 + ie^2)$ *onde* $|z| = e^2$ *e* $\cos\theta = \dfrac{0}{e^2} = 0$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2} = 1$ *e segue que* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *e então substituindo na função logarítmica, teremos* $Log(z) = \ln|z| + i\theta$ *e portanto* $Log(ie^2) = \ln|e^2| + i\dfrac{\pi}{2} = 2\ln e + \dfrac{\pi}{2}i$

iii) Vamos agora calcular $Log(1+i)$, *sendo que* $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ *e que* $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *que resulta em* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *e portanto*

$$Log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

Considere dois conjuntos A e B, definiremos os conjuntos diferença

$$A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

e o conjunto produto por m

$$m \cdot A = \{m \cdot a : a \in A\}$$

em que $A, B \subset \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{Z}$. E então enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 3. *Dados* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, *temos que:*

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$$

Demonstração. Consideremos o número complexo w pertencente a $\log(z_1) + \log(z_2)$. Então, tomando:

$$w = w_1 + w_2 \tag{11}$$

com $w_1 \in \log(z_1)$ e $w_2 \in \log(z_2)$. Daí aplicando a base e em ambos os lados da equação (11) obtemos $e^w = e^{w_1 + w_2} = e^{w_1} \cdot e^{w_2} = z_1 \cdot z_2$, donde concluímos que $w \in \log(z_1 \cdot z_2)$. Analogamente ao que acabamos de fazer, concluíremos a demonstração quando mostrarmos que dado $w \in \log(z_1 \cdot z_2) \Rightarrow w \in \log(z_1) + \log(z_2)$.

Para isso, tomemos agora $w \in \log(z_1 \cdot z_2)$. Ora, como $\log(z) = \{\ln|z| + i(\theta + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}$, e $\theta \in arg(z)\}$ e lembrando que $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$ com $\theta_1 \in arg(z_1)$

e $\theta_2 \in arg(z_2)$ então $w = \log|z_1 \cdot z_2| + i\theta$ com $\theta \in arg(z_1 \cdot z_2)$. Assim, $w = \log|z_1 \cdot z_2| + i\theta = (\log|z_1| + i\theta_1) + (\log|z_2| + i\theta_2) \in \log z_1 + \log z_2$. □

Teorema 4. *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, então*

$$\log(z_1/z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$$

.

Demonstração. Interpretando z_1/z_2 como sendo $z_1 \cdot z_2^{-1}$ decorre que a demonstarção é análoga ao caso anterior. Tome $k \in \log(z_1) + (\log(-z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$. Então $k = k_1 - k_2$ com $k_1 \in \log z_1$ e $k_2 \in \log z_2$ e aplicando a base e em ambos os lados da igualdade $k = k_1 - k_2$ obtemos $e^k = e^{k_1 - k_2} = \dfrac{e^{k_1}}{e^{k_2}} = \dfrac{z_1}{z_2}$, ou seja, $k \in \log \frac{z_1}{z_2}$. Agora, tomando $k \in \log(z_1/z_2) = \log(z_1 \cdot z_2^{-1})$ e como $\log z = \{\ln|z| + i(\theta + 2p\pi) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta \in arg(z)\}$ e lembrando que $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2))$ com $\theta_1 \in arg(z_1)$ e $\theta_2 \in arg(z_2)$. Assim,

$$\begin{aligned}
k &= \log|z_1/z_2| \\
&= \log|z_1 \cdot z_2^{-1}| + i\theta \\
&= (\log|z_1| + i\theta_1) + (\log|z_2|^{-1} + i\theta_2) \\
&= (\log|z_1| + i\theta) - (\log|z_2| - i\theta_2) \in \log z_1 - \log z_2
\end{aligned}$$

□

Teorema 5. *Dados $z_1 \in \mathbb{C}^*$, temos que*

$$\log(z_1^m) = m \cdot \log z_1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^*$$

Demonstração. Faça $\log z_1 = x$ e $\log z_1^m = y$. Então, basta mostrarmos que $y = mx$. De fato, temos que $e^x = z_1$ e de $\log z_1^m = y \Rightarrow e^y = z_1^m = (e^x)^m = e^{mx}$ que implica em $e^y = e^{mx} \Rightarrow y = mx$. □

Outro modo de provarmos este mesmo teorema é usar indução finita para o caso em que $m \in \mathbb{Z}_+$. E usarmos o fato já demonstrado no **Teorema 3**.

Potências Complexas

Algumas vezes em nossas aulas sobre regras de potências com base $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$ e a^x uma potência real arbitrária. Os nossos alunos até endendem razoavelmente as propriedades dessas potências. E esporadicamente algum ou outro aluno indaga se faz sentido pensar em potências com base e expoente sendo números complexo. E em caso positivo, qual o significado disso? Será que um número complexo puro elevado a outro complexo puro pode ser um número real? A fim de responder a essas e outras indagações e que propomos essa seção.

De início relembraremos que se a é um número real positivo e b é um número real arbitrário, é comum definirmos a^b por:

$$a^b = e^{b \cdot \log a}$$

Agora imitando essa definição para $z \in \mathbb{C}^*$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ fica definido

$$z^\lambda = e^{\lambda Log(z)}$$

O problema é que $z \in \mathbb{C}$ diferentemente de $a \in \mathbb{R}$ tem infinitos logarítmos. Daí, surge o seguinte questionamento. Qual deles devemos usar? Ora, como temos infinitos logarítmos de mesmo valor, então a resposta é usar todos!

Mas precisamente, para todo $w \in \log(z)$, o número complexo $e^{\lambda w}$ é chamado de λ-ésima potência de z associada ao logarítmo w. Caso $w = \log z$, então o número complexo $e^{\lambda w}$ é chamado λ potência principal de z. Portanto, é bom que fique claro que daqui para frente z^λ denotará exclusivamente a λ-potência principal de z, isto é,

$$z^\lambda = e^{\lambda \log z}$$

Para melhor ilustrar a teoria que acabamos de ver, observemos seguintes exemplos.

Exemplo 18. *Calcule as potências:*

1. $(-i)^{\frac{1}{2}}$

2. i^i

Solução:

(1) *Para calcularmos* $(-i)^{\frac{1}{2}}$ *veja que* $\log(-i) = \ln|-i| + i\theta$, *onde* $\theta \in arg(-i)$ *e daí sendo que* $|z| = \sqrt{0^2 + (-i)^2} = 1$ *e* $\cos\theta = \dfrac{0}{1} = 0$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-1}{1} = -1$ *implica que* $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ *ou* $\theta = \dfrac{-\pi}{2}$. *Donde,* $\log(-i) = \ln 1 - i\dfrac{\pi}{2} = -i\dfrac{\pi}{2}$. *E portanto, agora segue*

$$\begin{aligned}
(-i)^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}\log(-i)} \\
&= e^{\frac{1}{2}(\frac{-\pi}{2})i} \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}i} \\
&= \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)
\end{aligned}$$

(2) *Para calcularmos* i^i *usamos exatamente a mesma técnica do exemplo anterior. Calculando* $\log(i) = \ln|i| + i\theta$ *onde* $|i| = 1$ *e* $\cos\theta = 0$, $\operatorname{sen}\theta = 1$ *donde segue que* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *e portanto* $i^i = e^{i\log(i)} = e^{i[\ln|i| + i\frac{\pi}{2}]} = e^{i(0+i\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{\pi}{2}i^2} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Esta questão nos trouxe algo muito interessante e um pouco estranho aos olhos dos leigos, pois inicialmente percebemos que um número complexo elevado a outro complexo pode gerar um número real como resultado, foi isso que concluímos ao calcularmos i^i e chegar a $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Lembrando que que $\log z = \{\ln|z| + i2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Então

$$e^{\lambda(\log|z| + i2k\pi)} = e^{\lambda\log z)} \cdot e^{\lambda 2k\pi i}$$

e segue que as potências λ de z são números da forma $z^\lambda e^{2k\pi\lambda i}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Não devemos deixar de analisar dois casos interessantes que são:

1º Caso: Quando $\lambda \in \mathbb{Z}$, digamos que $\lambda = n$. Como

$$e^{2k\pi\lambda i} = \cos(2k\pi\lambda) + i\operatorname{sen}(2k\pi\lambda) = 1 + 0\mathrm{i} = 1$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, da expressão $e^{2k\pi\lambda i} \cdot z^\lambda$ segue que todos as λ-potências de z se reduzem a z^n onde n é a n-ésima potência de z, de fato, $e^{2k\pi\lambda i} \cdot z^\lambda = e^{2k\pi n i} \cdot z^n = (\cos(2k\pi n) + i\operatorname{sen}(2k\pi n)) \cdot e^{n\log z} = 1 \cdot e^{n\log z} = 1 \cdot z^n = z^n$, uma vez que $n\log z$ é um logarítmo de z^n.

2ª Caso: Quando $\lambda = \dfrac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Veja que

$$
\begin{aligned}
z^{\lambda} &= z^{\frac{1}{n}} \\
&= e^{\frac{1}{n}Logz} \\
&= e^{\frac{1}{n}[\log|z|+i(\theta+2k\pi)]} \\
&= e^{\frac{1}{n}\log|z|} \cdot e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} \\
&= e^{\log|z|^{\frac{1}{n}}} e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} \\
&= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} \\
&= \left[|z|e^{i(\theta+2k\pi)}\right]^{1/n} \\
&= z^{1/n} = \sqrt[n]{z}
\end{aligned}
$$

Exemplo 19. *Quem é maior i^i, $e^{\pi i}$ ou π^e.*

Solução: *Pelo item (b) do exemplo anterior temos que*

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\pi/2}} = k \in \mathbb{R}$$

com $0 < k < 1$ e pela fórmula de Euler $e^{\pi i} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$. E agora calculemos π^e fazendo uma aproximação razoável, se tomarmos $e \approx 2,7$ e $\pi \approx 3,1$ teremos que $\pi^e \approx (3,1)^{2,7} \approx 21,21$ e daí é óbvio que:

$$e^{\pi i} < i^i < \pi^e$$

Aplicações de Números Complexos

Neste capítulo damos alguns exemplos sobre aplicações dos números complexos, numa tentativa de contextualizar os conteúdos estudados anteriormente.

Vejamos alguns exemplos de aplicações de números complexos na Física do ensino médio. Uma onda é um distúrbio transmitido através do vácuo ou de um meio material (sólido, liquido ou gasoso) que transporta alguma forma de energia. Existe uma variedade muito grande de ondas, por exemplo, ondas do mar, ondas numa corda, numa mola, ondas sonoras, ondas eletromagnéticas etc. Essas ondas podem diferir em muitos aspectos, mas todas têm uma mesma característica: transportam energia de um ponto a outro. Trataremos aqui de um tipo especial de onda, a chamada onda harmônica. Uma onda harmônica pode ser produzida, por exemplo, numa corda longa movendo-se uma de suas extremidades para cima e para baixo periodicamente. Após algumas oscilações da corda, seu perfil ficará como ilustra a figura abaixo.

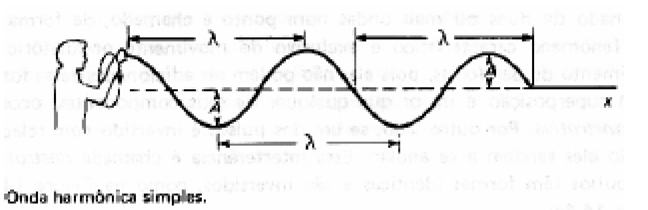


Figura 19: Onda harmônica simples

Quando duas ondas harmônicas de amplitudes diferentes se superpõem a amplitude da onda resultante pode ser calculada facilmente usando a representação polar de números complexos. Se usarmos números reais o cálculo pode se tornar trabalhoso em algumas situações enquanto que a representação polar em termos da exponencial complexa (10) facilita o cálculo, como veremos no exemplo seguinte.

Exemplo 20. *Sabendo que uma onda harmônica é definida como sendo descrita por uma função* *do tipo*

$$y(x,t) = A_n \cos[k(x - vt) + \gamma]$$

onde $A_n > 0$*,* $k > 0$*,* $v > 0$ *e* γ *são constantes. Mostre que a amplitude resultante de duas ondas superpostas* $y_1(x,t) = A_1 \cos[k(x - vt)]$ *e* $y_2(x,t) = A_2 \cos[k(x - vt) + \gamma]$ *de mesma frequência e amplitudes diferentes é dada por*

$$|z| = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos\gamma)^2 + (A_2 \operatorname{sen}\gamma)^2}$$

onde $|z|$ *é a amplitude resultante,* A_1 *e* A_2 *são as amplitudes das ondas,* v *é a velocidade,* t *tempo e* γ *é a diferença de fase.*

Consideremos duas ondas harmônicas de mesma frequência digamos

$$y_1(x,t) = A_1 \cos[k(x - vt)]$$

e

$$y_2(x,t) = A_2 \cos[k(x - vt) + \gamma]$$

A onda resultante é dada por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A_1 \cos[k(x - vt)] + A_2 \cos[k(x - vt) + \gamma]$$

Defina

$$\begin{cases} \tilde{y}_1(x,t) = A_1 \cdot e^{i[k(x-vt)]} \\ \tilde{y}_2(x,t) = A_2 \cdot e^{i[k(x-vt)+\gamma]} \end{cases}$$

Afirmamos que $Re(\tilde{y}_1) = y_1$ e $Re(\tilde{y}_2) = y_2$.

De fato, temos

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x,t) &= A_1 \cdot e^{i[k(x-vt)]} \\ &= A_1[\cos[k(x - vt)] + i \operatorname{sen}[\mathrm{k(x - vt)}]] \\ &= A_1 \cos[k(x - vt)] + iA_1 \operatorname{sen}[\mathrm{k(x - vt)}] \end{aligned}$$

e daí tomando a parte real teremos $Re(\tilde{y}_1) = A_1\cos[k(x-vt)] = y_1$. Analogamente

$$\begin{aligned}\tilde{y}_2(x,t) &= A_2 \cdot e^{i[k(x-vt)+\gamma]}\\ &= A_2[\cos[k(x-vt)+\gamma]+i\,\mathrm{sen}\,[\mathrm{k(x-vt)}+\gamma]\end{aligned}$$

donde segue igualmente que $Re(\tilde{y}_2) = A_2\cos[k(x-vt)+\gamma] = y_2$.

Agora, lembrando das propriedades dos números complexos há uma que usaremos logo em seguida, que nos diz que a soma das partes reais é igual a parte real da soma de dois complexos. A onda resultante do problema em questão é então dada por

$$y(x,t) = Re(\tilde{y}_1) + Re(\tilde{y}_2) = Re(\tilde{y}_1+\tilde{y}_2) = (\underbrace{A_1 + A_2e^{i\gamma}}_{z})[e^{i[k(x-vt)]}]$$

Como sabemos que todo número complexo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma $z = |z|e^{i\theta}$, então a expressão dada acima pode ser reescrita como:

$$(A_1 + A_2e^{i\gamma})[e^{i[k(x-vt)]}] = z\cdot[e^{i[k(x-vt)]}] = |z|\cdot e^{i\theta}\cdot e^{i[k(x-vt)]} = |z|\cdot e^{i[k(x-vt)+\theta]}$$

onde $\theta = Arg(z)$ e $z = A_1 + A_2e^{i\gamma}$. Daí, $|z| = |A_1 + A_2e^{i\gamma}| = |A_1 + A_2(\cos\gamma + i\,\mathrm{sen}\gamma)| = \sqrt{(\mathrm{A_1 + A_2\cos\gamma})^2 + (\mathrm{A_2}$

Exemplo 21. *Determine a amplitude resultante da soma de duas ondas y_1 e y_2 com amplitudes respectivamente,* 3 *e* 5 *e diferença de fase $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$*

Solução: *Aplicando a fórmula da amplitude resultante $\sqrt{(A_1 + A_2\cos\gamma)^2 + (A_2\,\mathrm{sen}\gamma)^2}$ vista anteriormente. E fazendo $A_1 = 3$, $A_2 = 5$ e $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ temos* $\sqrt{(3+5\cos\frac{\pi}{3})^2 + (5\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3})^2} = \sqrt{\dfrac{121}{4} + \dfrac{75}{4}} = \sqrt{\dfrac{196}{4}} = \sqrt{49} = 7.$

Outra aplicação bastante interessante dos números complexos na matemática, podemos citar o estudo dos polinômios. Ora, sabemos que o "Teorema Fundamental da Álgebra", diz que todo polinômio de grau n com coeficientes reais tem no máximo n raízes. Embora, nem sempre essas raízes são todas reais ou todas complexas. Vejamos o seguinte teorema.

Teorema 6. *Se z é raiz de $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ com $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0,1,2,\ldots,n$. Então $\bar{z}$ também é uma raiz.*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C}$ uma raiz de $p(x)$, isto é, $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = 0$. Agora, usando o fato de que $a_i \in \mathbb{R}$, logo $\bar{a}_i = a_i$ e tomando o conjugado em $p(z)$ tem-se:

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z_i}^n = p(\bar{z}) = 0$$

e daí concluímos o teorema. □

Como consequência do Teorema acima temos o seguinte:

Corolário 1. *Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real.*

Demonstração. Pelo Teorema (6) acima se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $p(z) = 0$, tem-se que $p(\bar{z}) = 0$ também. Ou seja, as raízes complexas de um polinômio aparecem aos pares. Ora, como o grau n é ímpar, então pelo menos uma das raízes será real. □

Exemplo 22. *Se i é uma raiz de $p(x) = x^3 + 7x^2 + x + 7$. Encontre as outras raízes de $p(x)$.*

Solução: *Como $p(i) = 0$ teremos que $p(-i) = 0$ também. E como a soma das rízes é dada por $S = \dfrac{-b}{a}$ isso implica que $S = -7$. E daí se x_3 é a outra raiz de $p(x)$ obtemos a equação $x_3 + i + (-i) = -7$, ou seja, $x_3 = -7$. E portanto, as raízes desse polinômio são: $i, -i$ e -7.*

Observação 5. *Os números complexos são usados na Física (para o cálcular a amplitude resultante de duas ondas harmônicas simples com amplitudes diferentes, no estudo da eletricidade, na soma de forças interpretados como vetores no plano complexo sendo a força resultante e etc..) na Engenharia (por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos e correntes alternadas e no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Aerodinâmica (no cálculo da força de sustentação da asa de um avião e para o cálculo do melhor ângulo que um avião deve começar a descrever para se causar menos desconforto para os seus passageiros), na Cartografia em seu estudo das vibrações de misturas mecânicas complexas, na Hidrodinâmica, na geometria fractal e em sistemas dinâmicos (por exemplo, no estudo de interferência de linhas de transmissão de energia e telefonia) e etc. Mas é bom que se diga que em quase toda a sua totalidade o nível em que se aplica os números complexos é em grau bem mais elevado do que o visto no ensino médio pois é preciso no geral termos noções de cálculo; equações diferenciais; variáveis complexas e outras teorias mais elaboradas.*

Exemplo 23 (Fractais)**.** *Um exemplo interessante da aplicação de números complexos, podemos citar os fractais: são objetos que podem ser obtidos geometricamente ou aleatóriamente, também atraves de processos recursivos apresentando determinadas características que por vezes são encontradas em forma da natureza. Essas características são: auto-semelhança, escala, complexi-*

dade e dimensão. Como uma ilustração de um Fractal podemos citar o conjunto de Mandelbrot, que um objeto geométrico gerado pela função de recorrência do tipo:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

tais que $c = x + iy \in \mathbb{C}$ *está no plano complexo. Cuja figura exibimos abaixo (usando o software Scilab):*

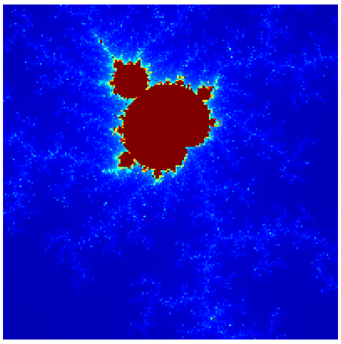


Figura 20: Conjunto de Mandelbrot

Análise de Livros Didáticos

Começamos nossa análise com o livro “A matemática fundamental uma nova abordagem” dos autores José Ruy Giovanni, José Roberto Bornjorno e José Ruy Giovanni JR, da editora FTD. A sua introdução histórica antes de começar com a parte teórica dos números complexos ficou muito boa, como o conjunto dos números complexos é um corpo onde nele estão definidas duas operações: a soma e multiplicação faltou detalhar mais essas operações, não consta as demonstrações, bem como, citar as propriedades do conjugado e do módulo de um número complexo que são extremamente úteis e facilitam a resolução de vários problemas. Trabalhar mais exemplos de questões que envolvem lugares geométricos representados por números complexos teria facilitado o leitor entender e resolver uma série de exercícios, após falar sobre como calcular potência da unidade imaginária na pág.568 foi dado um texto que fala sobre ciências contábeis não existindo o nexo dela com o assunto estudado a deixando fora de contexto. Na parte de multiplicação e divisão de números complexos e na 1ª e 2ª fórmulas de Moivre se começa com a noção intuitiva e já conclui as deduções das respectivas fórmulas não agindo da maneira correta para o caso geral pois a prova formal é por indução finita sobre n. A parte que trata de aplicações dos números complexos na física ficou muito interessante no que diz respeito à interpretação da soma de dois ou mais vetores no plano complexo como sendo a força resultante que age sobre um corpo no qual atuam várias forças. Ainda referente à parte de extração de raízes é preciso se trabalhar mais exemplos de sua interpretação geométrica do polígono regular gerado na circunferência na qual ela distribui seus vértices que são cada uma das raízes do número complexo em questão.

Analisando o livro “Conexões com a matemática” de Juliane Matsubara Barroso da editora moderna, verificou-se que a parte histórica antes dos conteúdos estudados é muito interessante levando o leitor a se inteirar mais sobre os números complexos e sobre o por quê de se estudar tal assunto, o autor inicia primeiramente com motivações dizendo onde se aplica na prática assunto estudado o que realmente é relevante os leitores saberem. Trabalhando na forma algébrica a autora foi feliz em pelo menos citar que nas operações de soma, subtração e multiplicação são válidas a comutatividade, a associatividade a existência do elemento neutro e etc (já que os números complexos são um corpo). No que diz respeito ao conjugado de um número complexo falou-se em algumas de suas propriedades mais faltou dar a sua interpretação geométrica no plano complexo retratando também sobre o seu argumento. A maneira com que se explica como calcular a potência de i foi induzida, explicada mas não se provou matematicamente o por quê de se dividir o expoente por 4 e tomar o seu novo expoente como sendo o resto dessa divisão. O tratamento dado aos números complexos como sendo vetores do plano complexo ficou interessante na hora de se falar em módulo. É preciso se trabalhar mais lugares geométricos com a resolução de mais exercícios, é preciso deduzir corretamente as fórmulas do produto, da divisão de números complexos e também a trigonométrica, a 1ª e 2ª fórmulas de Moivre usando-se para isso indução finita sobre n.

Analisando o livro “Matemática -contexto e aplicações” de Luiz Roberto Dante da editora Ática podemos dizer que a parte histórica introdutória ficou muito boa e bem referenciada nas normas da ABNT e que justifica muito bem o por quê da importância de se estudar números complexos e traz também algumas aplicações interessantes como por exemplo a geometria de fractal apesar de não entrar muito em detalhes .Comenta que o conjunto dos números reais é um subconjunto dos números complexos é muito feliz ao lembrar de falar sobre as propriedades do corpo dos complexos que são às da adição e da multiplicação as quais são comutatividade ,a associatividade ,o elemento neutro, a distributividade da multiplicação em relação à adição. Na parte que o autor trata de potência de i ele poderia ter provado de maneira mais formal por que se deve dividir a potência por 4 e tomar o seu novo resto. A interpretação algébrica dos números complexos ficou muito boa seguida de sua representação algébrica bem estruturada . A sua maneira de abordar o conjugado, sua representação no plano complexo e suas propriedades ficaram instigantes. A parte escrita sobre o módulo e sua representação gráfica está correta e seguida por algumas de suas propriedades o que ajuda o aluno a entender melhor tal assunto e a resolver muitas questões de vestibular que sem as propriedades seria perder um tempão enorme fazendo contas. A fórmula trigonométrica foi corretamente demonstrada, a representação do produto de dois complexos no plano ficou boa ilustrando a relação entre seus módulos e seus argumentos mas a dedução da fórmula do produto e do quociente e as duas fórmulas de Moivre para dois complexos não nulos não foi feita de maneira formal e sim de modo somente intuitivo o que deve ser corrigido em novas versões. A quantidade de questões resolvidas sobre a representação das raízes de um número complexo na circunferência bem como o seu significado ficou razoável, deve-se dar mais importância também a problemas relacionados à lugares geométricos trazendo uma série de exercícios resolvidos para que o leitor interprete melhor alguns desses problemas visto que muitos dos nossos alunos de ensino médio têm enormes dificuldades nesta parte. O autor mostrou-se cuidadoso e diferenciado ao ter trazido um tópico sobre equações binômias e trinômias com coeficientes complexos as quais não foram lembradas pelos autores anteriormente analisados apesar dele não as ter deduzido.

A analise do livro "Construindo a matemática" dos ilustres professores Abdênago Alves Bastos, Antônio de Pádua Rapôso Mazulo, Ciro Nogueira Filho, João Bosco Pitombeira de Carvalho, João Lucas Marques Barbosa, José Othon Dantas Lopes, Luciano Moura Cavalcante e Manoel Ferreira de Azevedo Filho da editora Ponto Graf é muito breve na sua parte histórica que antecede o conteúdo, nesse sentido, eles poderiam ter motivado melhor com muitas histórias interessantes. A forma algébrica dos números complexos bem como as suas propriedades da adição e multiplicação:(associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro e a distributividade do produto em relação à adição) são bem trabalhadas. A representação gráfica de um número complexo e de seu conjugado no plano complexo deveria ter sido mostrada e mais detalhada e comparada com a que conhecemos no plano cartesiano dos números reais, as propriedades do conjugado e do módulo estão bem fundamentadas, a importante desigualdade triangular foi trazida e provada com rigor, as potências de i deveriam ter sido demonstradas e ter sido apresentado uma quantidade maior de exercícios resolvidos o que ajudaria o leitor a resolver algumas questões se tivesse sido abordada aqui nesse material. A forma trigonométrica está bem definida porém não se provaram as propriedades das duas fórmulas de Moivre, do produto e da divisão de complexos na forma trigonométrica essas não foram feitas para o caso geral e sim para o caso de somente dois números complexos onde a maneira correta seria usar indução finita sobre n.

De modo geral todos esses livros analisados sobre a nossa ótica em experiência nos três níveis de ensino de escolas públicas e particulares devem trazer mais exercícios resolvidos detalhadamente e também propostos. Por uma questão de formalidade é bom que as propriedades dos números complexos sejam lembradas e provadas com mais rigor matemático. A parte referente aos gráficos devem ser mais reforçadas nos exemplos e exercícios visto que a maioria dos alunos apresentam muita dificuldade neste quesito. Uma diferença crucial entre o material didático adotado nas escolas do ensino médio e fundamental das escolas públicas e privadas é que algumas vezes o que falta nos livros da escola pública está com certeza o livro da particular e o apoio didático do autor e da editora é mais presente e frequente além de disponibilizarem alguns sites de pesquisa reservado para os professores cadastrados daquela escola que admitiu tal livro de tal editora o que serve para o aprofundamento tanto do aluno quanto do professor. Algo muito importante encontrado lá é um banco enorme de questões que facilitam o trabalho do professor ao elaborar provas, lista de exercícios extra ou trabalhos. O professor é muito motivado e também obrigado a se adaptar no mundo moderno em meio as novas tecnologias e maneiras de ensinar e aprender pelos meios de comunicação tecnológicos e virtuais cada vez mais frequentes em nosso dia a dia e assim ter mais contato e se comunicar mesmo que virtualmente com seus alunos facilitando assim a sua aprendizagem e interação entre professor-aluno- escola e família.

Referências Bibliográficas

GONÇALVES, Adilson. (2007) Introdução à Álgebra, 1ª edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

HEFEZ, Abramo e **VILELLA**, M.L.T. (2012) Polinômios e Equações Álgebricas, 1ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática.

NETO, Antonio C. M. (2012) Tópicos de Matemática Elementar, Vol.6. 1ª.edição. Sociedade Brasileira de Matemática.

FERNANDEZ, C.S. e **BERNARDES** Jr, N.C., (2006) Introdução às Funções de uma Variável Complexa, Sociedade Brasileira de Matemática.

SOARES, M.G. (2003) Cálculo de uma Variável Complexa, 3ª edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

LIMA, E.L. (2005) A Matemática do Ensino Médio, Vol.3. 6ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática.

LIMA, E. L. (2010) Logaritmos, Sociedade Brasileira de Matemática.

IEZZI, Gelson. et al (2004) Fundamentos de Matemática Elementar, Vol.2. 9ª edição. Editora: Atual.

CARNEIRO, J.P.Q. (2001) Revista do Professor de Matemática nº 47

ZANI, S.L. Funções de uma Variável Complexa. Apostila ICMC-USP

BOYER, Carl B. (1996) História da Matemática, Editora: Blücher, 2ª edição.

LUIZ, Adir M. (2007) Curso de Física Básica, Vol. 2, Editora: Livraria da Física.

NUSSENZVEIG, H. M. (2002) Curso de Física Básica, Vol. 2. Editora: Edgard Blücher, 4ª edição.

DO CARMO, M. P. et al (1992) Trigonometria e Números Complexos, Sociedade Brasileira de Matemática.

BASTOS, Abdênago A. et al (2004) Construindo a Matemática. Vol. 3, Editora: Ponto Graf 1ª edição.

SPIEGEL, Murray R. (1973) Variáveis Complexas. Editora: McGraw-Hill do Brasil 1ª edição.

STEWART, James. (1999) Cálculo. Vol. 1 e 2. Editora: Thomson. 4ª edição.

GIOVANNI, J. R. et al (2002) A Matemática Fundamental uma Nova Abordagem. Editora: FTD.

MATSUBARA, Juliane (2012) Conexões com a Matemática. Editora: Moderna 1ª edição.

DANTE, L. R. (2012) Matemática Contexto e Aplicações. Editora: Ática.