UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ANASTÁCIO DE OLIVEIRA

DECAIMENTO DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM SUPERVÍCIES DE NÍVEL ANALÍTICAS NA ESFERA

FORTALEZA

2016

JOSÉ ANASTÁCIO DE OLIVEIRA

DECAIMENTO DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM SUPERVÍCIES DE NÍVEL ANALÍTICAS NA ESFERA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O47d Oliveira, José Anastácio de.
Decaimento do Primeiro Autovalor do Operador de Laplace-Beltrami em Superfícies de Nível Analíticas na Esfera / José Anastácio de Oliveira. – 2016.
51 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

1. Primeiro Autovalor. 2. Desigualdade de Lojasiewicz. 3. Superfície de Nível. I. Título.
CDD 510

JOSÉ ANASTÁCIO DE OLIVEIRA

DECAIMENTO DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM SUPERVÍCIES DE NÍVEL ANALÍTICAS NA ESFERA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria e Topologia.

Aprovoda em: 24 / 05 / 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vincent Jean Henri Grandjean
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico esse trabalho aos meus pais, Luiz e Lúcia.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais Luiz e Lúcia pelo incentivo, apoio, amor e amizade desde sempre. Aos meus irmãos Michelyne e Paulo pelo o incentivo. Aos meus sobrinhos Clara, Paulo e Clarisse pelos bons momentos de diversão.

Aos amigos Nalva (Marinalva), Cida (Aparecida), Clau-clau (Claudécio), Wolvas (Carmos), Robinho (Robson), Samuca (Samuel), Rigo (Rigoberto), Helton, Edivânia e Selene pelo apoio, principalmente durante esse período.

Aos professores acadêmicos da graduação e pós-graduação por transmitirem seus conhecimentos que contribuiram bastante para minha formação. Em especial, ao meu orientador Alexandre pela paciência e atenção. Aos professores (da URCA) Flávio, Ricardo e Valdemiro por incentivarem seus alunos a cursarem pós-graduação.

Aos professores Pacelli e Vincent por participarem da banca examinadora e pelas dicas.

Aos colegas Janielly, Nino (Eddygledson), Upá, Augusto (Tcham!), Amílcar, Wanderley, Robério, Chaves, Neilha, Elano, Helano, João Victor.

Aos funcionários da PGMAT. Em especial, a Andrea e Jessica pelo excelente trabalho na secretária.

A CAPES e FUNCAP pelo auxílio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que direto ou indiretamente ajudaram na conclusão do curso e/ou deste trabalho.

"Quanto mais aumenta nosso conhencimento, mais evidente fica nossa ignorância."

John F. Kennedy

RESUMO

Neste texto, será apresentado um resultado proposto por Paulo Cordaro e Jorge Hounie sobre o decaimente do primeiro autovalor do operador de Laplace-Beltrami em uma superfície de nível conexa em $\mathbb{S}^{n+1}$, $n \geq 1$. Esta dissertação baseia-se no artigo "*The First Eingenvalue of Analytic Level Surfaces on Spheres*" de Sagun Chanillo (Mathematical Reseach Letters, vol 1 (1994), p. 159-166).

Palavras-chave: Primeiro autovalor. Desigualdade de Lojasiewicz. Superfície de Nível.

ABSTRACT

In the text, will presented one resultad proposed by Paulo Cordaro and Jorge Hounie concerning the possible rate of decay of the first eigenvalue of Laplace-Beltrami operator on a level surface connected in $\mathbb{S}^{n+1}$, $n \geq 1$. This thesis is basead on the paper "*The First Eingenvalue of Analytic Level Surfaces on Spheres*" of Sagun Chanillo (Mathematical Reseach Letters, vol. 1 (1994), p. 159-166).

Keywords: First eigenvalue. Lojasiewicz inequality. Level surface.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considere $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ analítica, com $n \geq 1$, e, para $s \in \mathbb{R}$, definamos a superfície de nível conexa $V_s = f^{-1}(s)$. Denotemos por s_0 o valor crítico de f. Estamos interessados em analisar o decaimento do primeiro autovalor do operador de Laplace-Beltrami, denotado por Δ, em V_s. Mais precisamente,

Teorema: *Existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$, que idependem de s e s_0, tais que*

$$\lambda_1(V_s) \geq C|s - s_0|^{\alpha}, \qquad s \to s_0.$$

Uma vez que iremos utilizar o operador Δ, levaremos em consideração o problema de autovalor que consiste em determinar os números λ tais que, para $h \in C^2(M)$, seja solução de $\Delta h + \lambda h = 0$, onde M é compacto e conexo. A teoria espectral garante a existência desses autovalores. Utilizando a definição do tom fundamental para M, teremos

$$\lambda^*(M) = \inf_{\mathcal{M}-\{0\}} \frac{\int_M |\mathrm{grad}\, h|^2 \, d\mu}{\int_M |h|^2 d\mu}$$

onde

$$\mathcal{M} = \left\{ h \in W^{1,2}(M); \int_M h \, d\mu = 0 \right\}$$

que junto com o Teorema de Rayleigh nos dará $\lambda^*(M) = \lambda_1(M)$. E, para relacionar o primeiro autovalor ao lado direito da desigualdade apresentada no teorema acima, tivemos o auxílio da desigualdade de Lojasiewicz, onde em [15] foi apresentada uma prova por Zurro e Lojasiewicz. Ademais, foi utilizada a desigualdade de Poincaré, resultado que pode ser encontrados em livros de Equações Diferenciais Parciais, como por exemplo em [8].

2 PRELIMINARES

Nessa primeira parte serão apresentados resultados essenciais para demonstração do resultado proposto.

2.1 Métricas Riemannianas e Conexões

Nesta seção serão apresentados as definições de métricas Riemannianas e conexões.

Definição 2.1 *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle\, ,\, \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\mathbf{x}(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, ..., 1, ..., 0)$, então*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

é uma função diferenciável.

Exemplo 2.1 *(Métrica Euclidiana). Seja $\mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$. Temos que a métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.*

Definição 2.2 *Sejam M e N variedade Riemmanianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado de uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df(u), df(v) \rangle_{f(p)} \tag{2.1}$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$

Exemplo 2.2 *(Variedades Imersas) Seja $f : M^n \to N^m$ uma imersão com $m = n + k$, ou seja, f é diferenciável e $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\langle\, ,\, \rangle_p$ é uma métrica Riemanniana em N, f induz uma métrica Riemanniana em M por* (2.1). *A métrica de M é dita métrica induzida por f, e f é uma imersão isométrica.*

O conceito de conexão atende a necessidade de definir uma noção de derivação intrínseca para campos vetoriais cuja idéia refere-se a conectar localmente os espaços tangentes de uma variedade.

Definição 2.3 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão afim ∇ em M é dada por*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) \quad &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que goza das seguintes propriedades:
1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$
com $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e f, g suaves.
Ademais, se ∇ verifica:
4. $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$ *(compatibilidade com a métrica)*
5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ *(simetria)*
dizemos que a conexão é Riemanniana (ou de Levi-Civita).

Observação 2.1 *Seja M variedade Riemanniana com a conexão afim ∇ com $dim(M) = n$. Dados $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em $p \in M$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ vetor tangente em p à $x_i \mapsto \mathbf{x}(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$. Sendo ∇ simétrico, temos*

$$[\nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i](f) = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

para $f \in \mathcal{D}(M)$ e $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Teorema 2.1 (Levi-Civita) *Seja M variedade Riemanniana, existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compátivel com a métrica Riemanniana de M.*
Demonstração: Ver [3], página 61. ∎

Para fechar essa seção, introduzimos a idéia de gradiente, divergente e laplaciano.

Definição 2.4 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f em M dado por*

$$\langle\nabla f, X\rangle = df(X)$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Observação 2.2 *Sejam f, h suaves em* M, *seguem as propriedades:*
1. $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h;$

2. $\nabla(fh) = h\,\nabla f + f\,\nabla h$.

Observação 2.3 *Seja* $U \subset M$ *vizinhança coordenada, com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. *O gradiente de* f *em* U *é dado por*

$$\nabla f = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Definição 2.5 *Seja* $X \in \mathcal{X}(M)$. *Definimos a divergência de* X *como sendo a função suave* $div\, X : M \to \mathbb{R}$, *para* $p \in M$, *por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = tr\{x \mapsto (\nabla_v X)(p)\}$$

com $v \in T_pM$.

Observação 2.4 *Sejam* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *e* f *suave em* M. *Então,*
1. $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y)$;
2. $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle$.

Observação 2.5 *Seja* $U \subset M$ *é uma vizinhança coordenada com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. *Se* $X \in \mathcal{X}(M)$ *for dado em* U *por* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, *teremos*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{det(g_{ij})} \right).$$

Definição 2.6 *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *suave. O laplaciano de* f, $\Delta f : M \to \mathbb{R}$, *é dado por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Observação 2.6 *Para* f, h *suaves em* M, *segue as propriedades:*
1. $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$
2. $\Delta(fh) = f\,\Delta h + h\,\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle$.

Observação 2.7 *Seja* f *suave em* M *e* $U \subset M$ *vizinhança coordenada com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. *Então, o laplaciano de* f *em* U *é dado por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{det(g_{ij})} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

2.2 Geodésicas e Variedades Completas

Nesta seção será introduzida a idéia de geodésicas seguindo da definição da aplicação exponencial. Daí, estamos aptos a definir a idéia de bolas geodésicas. Posteriormente, será apresentada uma "pequena" idéia referente às propriedades globais de uma variedade Riemanniana, a saber, o conceito de completeza dessa variedade. Por fim, um dos principais teoremas dessa teoria vai ser apresentada, isto é, o teorema de Hopf-Rinow cuja demonstração vai ser ocultada.

Definição 2.7 *Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se*

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

Observação 2.8 *Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, então $|\gamma'(t)| \equiv constante$.*

Observação 2.9 *Uma geodésica $\gamma : I \to M$ é normalizada se $|\gamma'(t)| = 1$.*

Observação 2.10 *Note que toda geodésica que não é um ponto ($|\gamma'(t)| \neq 0$) pode ser normalizada através de uma parametrização por comprimento de arco, ou seja, se $\gamma : I \to M$, $t \in I$, é uma parametrização qualquer para uma geodésica, ela pode ser reparametrizada para se tornar uma geodésica normalizada. Basta escolher $t_0 \in I$ e definindo o parêmetro comprimento de arco*

$$c(t) = \int_{t_0} t|\gamma'(t)|dt.$$

Com efeito, segue pela regra da cadeia,

$$|\gamma'(c)| = |\gamma'(t)||t'(c)| = |\gamma'(t)|\frac{1}{c'(t)} = |\gamma'(t)|\frac{1}{|\gamma'(t)|} = 1.$$

Exemplo 2.3 (Geodésicas de $\mathbb{R}^n$) *Lembrando que δ_{ij} é a métrica canônica de $\mathbb{R}^n$, temos que $\Gamma_{ij}^k = 0$. Daí, a equação geodésica é*

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = 0, \quad k = 1, ..., n.$$

Logo, as soluções para essa equação diferencial são

$$x(t) = tu + x_0$$

com $u, x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Isso nos mostra que as geodésicas de* $\mathbb{R}^n$ *são retas.*

Teorema 2.2 (Existência e Unicidade de Geodésicas) *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Então, para todos* $p \in M$ *e* $\xi \in T_pM$, *e para cada* $t_0 \in \mathbb{R}$, *existem um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *contendo* t_0 *e uma única geodésica* $\gamma : I \to M$ *tais que* $\gamma(t_0) = p$ *e* $\gamma'(t_0) = \xi$.
Demonstração: Ver [3], página 70. ■

Definição 2.8 *Sejam* $p \in M$ *e* $\mathcal{U} \subset TM$ *aberto, onde* $\mathcal{U} = \{(q, \xi) \in TM; q \in V, \xi \in T_qM, |\xi| < \varepsilon\}$, *sendo* V *vizinhança de* p *em* M. *A aplicação* $exp : \mathcal{U} \to M$ *dada por*

$$exp(q, \xi) = \gamma(1, q, \xi) = \gamma\left(|\xi|, q, \frac{1}{|\xi|}\right), \ (q, \xi) \in \mathcal{U}$$

é chamada aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Observação 2.11 *Podemos restringir* exp *a um aberto do espaço tangente* T_pM, *ou seja, podemos definir*

$$exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM \to M$$

por $exp_p(\xi) = exp(p, \xi)$. *Tem-se que* exp *é diferenciável e* $exp_p(0) = p$.

Observação 2.12 *Note que* $exp_p(\xi)$ *é o ponto de* M *obtido pecorrendo um comprimento igual a* $|\xi|$, *a partir de* p, *sobre a geodésica que passa por* p *com velocidade igual a* $\frac{\xi}{|\xi|}$.

Proposição 2.1 *Seja* $p \in M$. *Existe um* $\varepsilon > 0$ *tal que* $exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM \to M$ *é um difeomorfismo de* $B_\varepsilon(0)$ *sobre um aberto de* M.
Demonstração: Ora,

$$d(exp_p)_0(\xi) = \frac{d}{dt}(exp_p(t\xi))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, p, t\xi))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, p, \xi))\Big|_{t=0} = \xi.$$

ou seja, $d(exp_p)_0 : T_pM \to T_pM$ é a identidade e $T_0(T_pM) = T_pM$. Portanto, segue pelo Teorema da Função Inversa que exp_p é um difeomorfismo local em uma vizinhança de 0. ■

Definição 2.9 *Seja* M *variedade Riemanniana e* $p \in M$. *Definimos o raio de injetividade em* p *por*

$$inj(p) = sup\,\{\varepsilon;\ exp_p \text{ é injetiva em } B_\varepsilon(0) \subset T_pM\}$$

E, $inj(M) = inf\{inj(p); p \in M\}$.

Exemplo 2.4 *Segue que $inj(\mathbb{S}^n) = \pi$ e $inj(\mathbb{R}^n) = +\infty$.*

Prosseguindo, considere $c : [a, b] \to M$ contínua, e $[a, b] \subset \mathbb{R}$, de forma que: existe uma partição $a = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i \in \{0, ..., k-1\}$, são diferenciáveis. Curvas com essas caractéristicas são chamadas de curvas diferenciáveis por partes. Dizemos que c liga os pontos $c(a)$ e $c(b)$.

Definição 2.10 *Sejam $\gamma : I \to M$ geodésica e $[a, b] \subset I$. Tem-se que $\gamma_{|_{[a,b]}}$ é chamado o segmento de geodésica ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Seja c apresentado anteriomente e denotemos por $l(c)$ o comprimento da curva c em M ligando p e q. Dizemos que o segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \to M$ é minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$ para toda curva c ligando $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.*

Lema 2.1 *(Gauss) Sejam $p \in M$ e $\xi \in T_pM$ tais que $exp_p(\xi)$ esteja definida. Então,*

$$\langle (dexp_p)_\xi(\xi), (dexp_p)_\xi(w) \rangle = \langle \xi, w \rangle$$

para $\omega \in T_pM$.

Demonstração: Ver [3], página 77. ∎

Seja exp_p um difeomorfismo em uma vizinhaça de V da origem em T_pM, $exp_pV = U$ é chamada de vizinhança normal de p. Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $exp_pB_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a bola geodésica (ou normal) de centro p e raio ε. O Lema de Gauss nos garante que a fronteira de uma bola normal é uma hipersuperfície em M ortogonal às geodésicas que partem de p, denotamos ela por $S_\varepsilon(p)$ que é chamada esfera geodésica (ou normal).

Definição 2.11 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Para $p, q \in M$, definimos distância entre p e q por*

$$d(p, q) = inf\{l(c);\ c \text{ é uma curva } diferenciável \text{ por partes ligando } p \text{ e } q\}.$$

Observação 2.13 *Se M é uma variedade Riemanniana conexa com a função distância definida acima, segue que M é um espaço métrico.. A topologia de M como espaço métrico coincide com a topologia inicial de M como variedade diferenciável. E, a bola geodésica*

$B_\varepsilon(p)$ coincide com a bola métrica dada por

$$B(p,\varepsilon) = \{q \in M; d(p,q) < \varepsilon\}.$$

Definição 2.12 *Uma variedade Riemanniana M é completa se para todo $p \in M$, exp_p está definido para todo $\xi \in T_pM$.*

Teorema 2.3 (Hopf-Rinow) *Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. São equivalentes:*
(a) exp_p está definido em todo T_pM;
(b) Os limitados e fechados de M são compactos;
(c) M é completa como espaço métrico;
(d) M é geodesicamente completa;
(e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset intK_{n+1}$ e $\cup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p,q_n) \to \infty$;
Ademais, as afirmações acima implicam que
(f) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p e q com $l(\gamma) = d(p,q)$.
Demonstração: Ver [3], página 162. ■

2.3 Curvatura e Imersões Isométricas

Nesta seção será apresentada a idéia de tensor curvatura e, posteriomente, definiremos curvatura seccional e curvatura de Ricci. Por fim, daremos uma pequena introdução sobre imersões isómetricas.

Definição 2.13 *Seja M uma variedade Riemanniana. O (3,1)-tensor curvatura R de M é uma aplicação $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observação 2.14 *O tensor curvatura R de uma variedade Riemanniana verifica as propriedades:*
(a) R é multilinear;
(b) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

(b) (Primeira Identidade de Bianchi): Dados $X, Y e Z \in \mathcal{X}$, tem-se

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Observação 2.15 *Seja $\{x_i\}$ sistema de coordenadas em torno de $p \in M$, tem-se $[\partial_i, \partial_j] = 0$, donde*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i} - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial j})\partial_k.$$

Definição 2.14 *Seja M uma variedade Riemanniana e σ um plano de T_pM. A curvatura seccional (ou Riemanniana) de M associada a σ é dada por*

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X \wedge Y|^2} = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

onde $X, Y \in T_pM$ e $\{X, Y\}$ é uma base para σ.

Definição 2.15 *Sejam M variedade Riemanniana e $p \in M$. O tensor de Ricci, $Ric : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é dado por*

$$Ric(X,Y) = tr(Z \to R(X,Y)Z).$$

Se $\{E_1, ..., E_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM tem-se

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle.$$

Seja $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana com dimensão $m = k+n$, se M é uma variedade diferenciável com dimensão n, teremos uma imersão $i : M \longrightarrow \overline{M}$. A métrica de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M, ou seja, se $\xi_1, \xi_2 \in T_pM$, tem-se $\langle \xi_1, \xi_2\rangle = \langle di_p(\xi_1), di_p(\xi_2)\rangle$. Assim, i passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$. Como toda imersão é localmente um mergulho, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de tal que $i(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$, ou seja, existe uma vizinhança de $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $i(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V$, com $V \subset \mathbb{R}^k$ aberto, tais que φ aplica difeomorficamente $i(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.Nessa situação, dizemos que $\overline{M}$ é a variedade ambiente de M.

Agora, considere $(\overline{M}, \overline{g})$ variedade ambiente da variedade Riemanniana (M, g). Para $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe este espaço como $T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$ onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, se $\xi \in T_p\overline{M}$, podemos escrever

$$\xi = \xi^\top + \xi^\perp, \ \xi^\top \in T_pM, \ \xi^\perp \in (T_pM)^\perp,$$

onde $\xi^{\top} \in T_pM$ é a componente tangencial de ξ e $\xi^{\perp} \in (T_pM)^{\perp}$ é chamada a componente normal de ξ.

Representemos por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Se X, Y são extensões locais de vetores em M, e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^{\perp}.$$

Agora, podemos introduzir a definição de segunda forma fundamental.

Definição 2.16 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $(\overline{M}, \overline{g})$ sua variedade ambiente. A aplicação $II : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ definida por*

$$II(X, Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^{\perp} = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y,$$

é a segunda forma fundamental de M, onde $\overline{X}, \overline{Y}$ são quaisquer extensões locais de X, Y a $\overline{M}$.

Observação 2.16 *A segunda forma fundamental está bem definida e é bilinear e simétrica.*

Proposição 2.2 (Equação de Weingarten) *Sejam $X, Y \in TM$ e $N \in (TM)^{\perp}$. Então, em M vale*

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{N}, \overline{Y} \rangle = -\langle N, II(X, Y) \rangle$$

onde $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{N}$ são quaisquer extensões locais de X, Y, N em M.

Demonstração: Temos em M, $\langle \overline{Y}, \overline{N} \rangle = 0$ e X é tangente a M, assim $\overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{N} \rangle = 0$. Ora, em M

$$\begin{aligned}
\overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{N} \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{N}, \overline{Y} \rangle + \langle \overline{N}, \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{N}, \overline{Y} \rangle + \langle \overline{N}, II(X, Y) + \nabla_X Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{N}, \overline{Y} \rangle + \langle \overline{N}, II(X, Y) \rangle + \langle \overline{N}, \nabla_X Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{N}, \overline{Y} \rangle + \langle \overline{N}, II(X, Y) \rangle
\end{aligned}$$

Logo, $\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{N}, \overline{Y} \rangle = -\langle N, II(X, Y) \rangle$. ■

Teorema 2.4 (Equação de Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonomais de T_pM. Então,*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle II(x, x), II(y, y) \rangle - |II(x, y)|^2.$$

Demonstração: Sejam, X, Y extensões locais ortogonais de x, y, respectivamente, e tangentes a M; indiquemos por $\overline{X}, \overline{Y}$ as extensões locais de X, Y a $\overline{M}$. Assim, temos em M

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)X, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{X}, Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}(\nabla_X X + II(X,X)), Y\rangle - \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\nabla_Y X + II(Y,X)), Y\rangle \\
&\quad + \langle (\nabla_{[X,Y]}X + II([X,Y],X)), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} II(X,X), Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} II(Y,X), Y\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{[X,Y]}X, Y\rangle + \langle II(X,Y), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} II(X,X), Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} II(Y,X), Y\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{[X,Y]}X, Y\rangle
\end{aligned}
$$

Segue pela equação de Weingarten

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} II(X,X), Y\rangle = -\langle II(X,X), II(Y,Y)\rangle$$

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} II(Y,X), Y\rangle = -\langle II(Y,X), II(X,Y)\rangle.$$

E,

$$\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X = (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X)^{\top} + (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X)^{\perp} = \nabla_Y\nabla_X X + (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X)^{\perp}$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X)^{\top} + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X)^{\perp} = \nabla_X\nabla_Y X + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X)^{\perp}$$

donde,

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X, Y\rangle = \langle \nabla_Y\nabla_X X, Y\rangle,$$

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X, Y\rangle = \langle \nabla_X\nabla_Y X, Y\rangle.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)X, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} II(X,X), Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\nabla_Y X, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} II(Y,X), Y\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{[X,Y]}X, Y\rangle \\
&= \langle \nabla_Y\nabla_X X, Y\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y X, Y\rangle + \langle \nabla_{[X,Y]}X, Y\rangle \\
&\quad + \langle II(Y,X), II(X,Y)\rangle - \langle II(X,X), II(Y,Y)\rangle \\
&= \langle R(X,Y)X, Y\rangle + \langle II(Y,X), II(X,Y)\rangle - \langle II(X,X), II(Y,Y)\rangle
\end{aligned}
$$

Por fim, sendo $\overline{K}(X,Y) = \langle \overline{R}(X,Y)X, Y\rangle$ e $K(X,Y) = \langle R(X,Y)X, Y\rangle$, temos

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = \langle II(X,X), II(Y,Y)\rangle - |II(X,Y)|^2.$$

■

2.4 Campos de Jacobi e Coordenadas Geodésicas

Nesta seção, será introduzido o conceito de campo de Jacobi e coordenadas geodésicas.

Definição 2.17 *Seja $\gamma : I \to M$, $I \subset \mathbb{R}$, geodésica. Um campo J ao longo de γ que satisfaz*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

é chamado um campo de Jacobi ao longo de γ.

Proposição 2.3 (Existência e Unicidade de Campos de Jacobi) *Seja $\gamma : I \to M$ geodésica, $I \subset \mathbb{R}$. Dado $t_0 \in I$ e $X, Y \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe um único campo de Jacobi ao longo de γ tal que*

$$J(t_0) = X,$$
$$\frac{DJ}{dt}(t_0) = Y.$$

Demonstração: Ver [3], página 124. ■

Definição 2.18 *Seja $\gamma : I \to M$ geodésica, $I \subset \mathbb{R}$. Dado $t_1 \in I$, diremos que $\gamma(t_1)$ é ponto conjugado de $\gamma(t_0)$ ao longo de γ se existe um campo de Jacobi J ao longo de $\gamma, J \neq 0$ tal que $J(t_0) = J(t_1) = 0$.*

Proposição 2.4 *Seja $\gamma : [0, \beta] \to M$ uma geodésica. Então um campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = (dexp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)),\ t \in [0, \beta].$$

Demonstração: Ver [3], página 126. ■

Teorema 2.5 (Rauch) *Seja M uma variedade Rimanniana, $\delta \in \mathbb{R}$ constante e $\gamma : [0, \beta] \to M$ geodésica unitária tal que $K \leq \delta$ para toda curvatura seccional ao longo de $\gamma|_{[0,\beta]}$. Se $J \in \mathcal{J}^{\perp}$ então a função $|J|$ ao longo de γ satisfaz*

$$|J|'' + \delta|J| \geq 0$$

em $[0,\beta)$. *Além disso, se* ψ *for solução em* $[0,\beta]$ *de*

$$\psi'' + \delta\psi = 0,\ \ \psi(0) = |J|(0),\ \ \psi'(0) = |J|'(0)$$

com $\psi \neq 0$ *em* $(0,\beta)$, *então*

$$\left\{\frac{|J|}{\psi}\right\}' \geq 0,$$

$$|J| \geq \psi$$

em $(0,\beta)$.
E, a igualdade ocorre em $t_0 \in (0,\beta)$ *se, e somente se* $K(J(t),\gamma'(t)) = \delta$, $\forall t \in [0,t_0]$.
Demonstração: Ver [6], página 87. ∎

Seja M uma variedade Riemanniana completa e $p \in M$. Para cada $\xi \in T_pM$, seja $\gamma : [0,\beta] \to M$ geodésica tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \xi$. Denotamos por $c(\xi) = sup\{t > 0; d(p,\gamma(t)) = t\}$ o "cut point"de p ao longo de γ. Assim, $[0, c(\xi)]$ é o intervalo maximal onde γ é minimizante. Agora, seja $\mathcal{D}_p = \{t\xi \in T_pM; 0 \leq t < c(\xi), |\xi| = 1\} \subset T_pM$, tem-se que para $\xi \in \mathcal{D}_p$, $\gamma(t) = exp_p(t\xi)$ minimiza distância de p a $\gamma(t)$, $\forall t \in [0, c(\xi)]$. Definimos o "cut locus"de p como sendo $Cut(p) = \{exp_p(\xi c(\xi)); \xi \in T_pM, |\xi| = 1\}$. Notemos que $M = exp_p(\mathcal{D}_p) \cup Cut(p)$. Daí, somos motivados a definição,

Definição 2.19 *O difeomorfismo* $exp_p : \mathcal{D}_p \to exp_p(\mathcal{D}_p)$ *é chamado de coordenadas geodésicas de* $M - Cut(p)$.

Definição 2.20 *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Um campo vetorial* X *ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é dito paralelo quando* $\frac{DX}{dt} = 0$, $\forall t \in I$. *Se* c *é diferenciável em* M *e* $X_0 \in T_{c(t_0)}M$, *então existe um único campo de vetores paralelo* X *ao longo de* c, *tal que* $X(t_0) = X_0$. *Nessas condições,* $X(t)$ *é chamado o transporte paralelo de* $X(t_0)$ *ao longo de* c.

Serão apresentados agora a métrica e o elemento volume de M em coordenadas geodésicas. Sejam M variedade Riemanniana e $p \in M$. Fixemos $\xi \in T_pM$ com $|\xi| = 1$ e definamos $\xi^\perp = \{\eta \in T_pM; \langle\eta,\xi\rangle = 0\}$ o complememnto ortogonal de $\{\mathbb{R}\xi\}$ em T_pM e seja $\tau : T_pM \to T_{exp_p(t\xi)}M$ transporte paralelo ao longo de $\gamma : [0,\beta] \to M$. Agora, definamos $\mathcal{A}(t,\xi) : \xi^\perp \to \xi^\perp$ por

$$\mathcal{A}(t,\xi)\eta = \tau^{-1}J(t),$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de ξ com condições iniciais

$$J(0) = 0,\quad J'(0) = \eta.$$

Seja $\mathcal{R} : \xi^{\perp} \to \xi^{\perp}$ dado por $\mathcal{R}\eta = \tau^{-1}R(\gamma'(t), \tau\eta)\gamma'(t)$ onde R é o tensor curvatura de M. Notemos que $\mathcal{R}(t)$ é autoadjunta e $\mathcal{A}(t,\xi)$ satisfaz a equação de Jacobi $\mathcal{A}'' + \mathcal{R}\mathcal{A} = 0$ com condição inicial $\mathcal{A}(0,\xi) = 0$, $\mathcal{A}'(0,\xi) = I$, sendo I a matriz identidade.

Calculemos a métrica de M em coordenadas geodésicas. Seja a parametrização $\psi : (0, +\infty) \times U \to exp_p(\mathcal{D}_p)$ dada por $\psi(t,u) = exp_p(t\xi(u))$. Assim, para $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial u^i}$ coordenadas naturais em $(0,+\infty)$ e U, respectivamente, com $i \in \{1, ..., n-1\}$, temos

$$(\partial_t\psi)(t;\xi) = d(exp_p)_{t\frac{\partial}{\partial t}}\left(\frac{\partial}{\partial t}t\right) = \gamma'(t);$$

$$(\partial_\alpha\psi)(t,\xi) = d(exp_p)_{t\frac{\partial}{\partial u^\alpha}}\left(t\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = J_\alpha(t,\xi) = \tau\mathcal{A}(t,\xi)\partial_\alpha\xi,$$

com $\partial_\alpha\xi = \xi_*(\partial/\partial u^\alpha)$, e $J(0;\xi) = 0$ e $J'(0;\xi) = \partial_\alpha\xi$.
Daí,

$$\langle\partial_t\psi, \partial_t\psi\rangle = 1,$$

como $\partial_\alpha\xi \perp \xi$

$$\langle\partial_t\psi, \partial_\alpha\psi\rangle = 0,$$

e para $\beta \in \{1, ..., n-1\}$

$$\langle\partial_\alpha\psi, \partial_\beta\psi\rangle = \langle\mathcal{A}(t,\xi)\partial_\alpha\xi, \mathcal{A}(t,\xi)\partial_\beta\xi\rangle.$$

Logo,

$$ds^2 = dt^2 + |\mathcal{A}(t,\xi)d\xi|^2$$

e o elemento volume de M será

$$d\mu = \sqrt{g(t,\xi)}dtd\sigma,$$

onde $det\mathcal{A}(t,\xi) = \sqrt{g(t,\xi)}$.

Teorema 2.6 (Bishop-Günther) *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $p \in M$. Dada $\gamma : [0,\beta] \to M$, geodésica unitária e $\gamma(0) = p$. Se as curvaturas seccionais K de M ao longo de γ satisfazem $K(\gamma'(t), \omega) \leq \delta$, $\forall t \in [0,\beta]$, com $\omega \in T_pM$, $|\omega| = 1$ e $S_\delta(t) \neq 0$ em $[0,\beta]$. Então,*

$$\left\{\frac{\sqrt{g(t,\xi)}}{{S_\delta}^{n-1}}\right\}' \geq 0 \tag{2.2}$$

em $(0,\beta)$, e

$$\sqrt{g(t,\xi)} \geq {S_\delta}^{n-1} \tag{2.3}$$

em $(0,\beta]$.

Além disso, ocorre a igualdade em (2.2)*(respectivamente em* (2.3)*) em um* $t_0 \in (0,\beta)$ *(respectivamente em* $(0,\beta]$*) se, e somente se* $\mathcal{R} = \delta I$ *e* $\mathcal{A} = S_\delta I$ *em todo* $[0,t_0]$*, onde*

$$S_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} sen(t\sqrt{\delta}) & , se \quad \delta > 0 \\ t & , se \quad \delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}} senh(t\sqrt{-\delta}) & , se \quad \delta < 0 \end{cases}$$

Demonstração: Sendo $\mathcal{A} : \xi^\perp \to \xi^\perp$ e $det\,\mathcal{A}(t,\xi) = \sqrt{g(t,\xi)}$, definamos $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Note que $\mathcal{B}$ é autoadjunta. Ora, $det\,\mathcal{B} = det\,\mathcal{A}^*\mathcal{A} = (det\,\mathcal{A})^2$ e, $ln\,det\,\mathcal{B} = 2ln\,(det\,\mathcal{A})$. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{(det\,\mathcal{B})'}{det\,\mathcal{B}} = \frac{(det\,\mathcal{A})'}{det\,\mathcal{A}}.$$

Dado $\alpha \in (0,\beta)$ e considere $\{e_1,...,e_{n-1}\}$ base ortonormal de $\xi^\perp$ composto por autovetores de $\mathcal{B}(\alpha)$ e seja $\{J_1(t),...,J_{n-1}(t)\}$ solução da equação de Jacobi em $\xi^\perp$:

$$J'' + \mathcal{R}(t)J = 0,$$

onde

$$J_i(t) = \mathcal{A}(t)e_i, \quad i \in \{1,...,n-1\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{(det\,\mathcal{A})'}{det\,\mathcal{A}}(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{(det\,\mathcal{B})'}{det\,\mathcal{B}}(\alpha) &= \frac{1}{2}tr(\mathcal{B}'\mathcal{B}^{-1})(\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\langle \mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_i\rangle)'}{\langle \mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_i\rangle}(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\langle \mathcal{A}'e_i, \mathcal{A}e_i\rangle}{\langle \mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_i\rangle}(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\langle J_i, J_i'\rangle}{\langle J_i, J_i\rangle}(\alpha). \end{aligned}$$

Como estamos nas condições do Teorema 2.5, temos

$$\frac{\langle J_i', J_i\rangle}{\langle J_i, J_i\rangle}(\alpha) = \frac{|J_i|'}{|J_i|^2}(\alpha) \geq \frac{S_\delta'}{S_\delta}(\alpha)$$

uma vez que a S_δ é solução da equação $\psi'' + \delta\psi = 0$ com condições iniciais $S_\delta(0) = 0, \quad S_\delta'(0) = 1$.

Logo,

$$\frac{(det\,\mathcal{A})'}{det\,\mathcal{A}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle J_i, J_i' \rangle}{\langle J_i, J_i \rangle}(\alpha) \geq (n-1)\frac{S_\delta'}{S_\delta}(\alpha)$$

ou seja,

$$\left\{ \frac{\sqrt{g(t,\xi)}}{{S_\delta}^{n-1}} \right\}' \geq 0$$

em $(0, \beta)$.

E, consequentemente

$$\sqrt{g(t,\xi)} \geq {S_\delta}^{n-1}$$

em $(0, \beta]$. ■

Teorema 2.7 (Bishop) *Seja M uma variedade Riemanniana completa e δ constante tal que*

$$Ric(\xi, \xi) = tr\,\mathcal{R} \geq \delta\,(n-1)\,|\xi|^2,\ \ \xi \in TM.$$

Se , dado $|\xi| = 1$ e $\beta > 0$, tal que $\sqrt{g(t,\xi)} > 0$, $t \in (0, \beta)$. Então,

$$\left\{ \frac{\sqrt{g(t,\xi)}}{{S_\delta}^{n-1}} \right\}' \leq 0 \tag{2.4}$$

em $(0, \beta)$, e

$$\sqrt{g(t,\xi)} \leq {S_\delta}^{n-1} \tag{2.5}$$

em $(0, \beta]$. Além disso, ocorre a igualdade em (2.4)(respectivamente em (2.5)) em um $t_0 \in (0, \beta)$(respectivamente em $(0, \beta]$) se, e somente se $\mathcal{R} = \delta I$ e $\mathcal{A} = S_\delta I$ em todo $[0, t_0]$, onde

$$S_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} sen(t\sqrt{\delta}) & ,\,se \quad \delta > 0 \\ t & ,\,se \quad \delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}} senh(t\sqrt{-\delta}) & ,\,se \quad \delta < 0 \end{cases}$$

Demonstração: Sendo $\sqrt{g(t,\xi)} = det\,\mathcal{A}(t,\xi)$, definamos $\mathcal{B} = \mathcal{A}'\mathcal{A}^{-1}$ em $(0, \beta)$ e notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^* - \mathcal{B} &= (\mathcal{A}'\mathcal{A}^{-1})^* - \mathcal{A}'\mathcal{A}^{-1} \\ &= (\mathcal{A}^{-1})^*(\mathcal{A}')^* - \mathcal{A}'\mathcal{A}^{-1} \\ &= (\mathcal{A}^{-1})^*(\mathcal{A}')^*\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} - (\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^*\mathcal{A}'\mathcal{A}^{-1} \\ &= (\mathcal{A}^{-1})^*[(\mathcal{A}')^*\mathcal{A} - \mathcal{A}^*\mathcal{A}']\mathcal{A}^{-1} \\ &= (\mathcal{A}^{-1})^*\, W(\mathcal{A}, \mathcal{A})\, \mathcal{A}^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

onde $W(\mathcal{A},\mathcal{A})$ é o wronskiano e $W(\mathcal{A},\mathcal{A})=0$. Logo, $\mathcal{B}$ é autoadjunta e, consequentemente satisfaz a equação de Riccati

$$\mathcal{B}'+\mathcal{B}^2+\mathcal{R}=0.$$

Ora,

$$\begin{aligned}0=tr(0)&=tr(\mathcal{B}'+\mathcal{B}^2+\mathcal{R})\\&=(tr\mathcal{B})'+tr\mathcal{B}^2+tr\mathcal{R}\\&\geq(tr\mathcal{B})'+\frac{(tr\mathcal{B})^2}{n-1}+\delta(n-1)\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}tr\mathcal{B}^2&\geq\frac{(tr\mathcal{B})^2}{n-1},\quad \text{por}\quad \text{Cauchy-Schwarz;}\\ tr\mathcal{R}&\geq\delta(n-1),\quad \text{por}\quad \text{hipótese.}\end{aligned}$$

Façamos

$$\phi=tr\mathcal{B}=tr(\mathcal{A}'\mathcal{A}^{-1})=\frac{(det\mathcal{A})'}{det\mathcal{A}}$$

donde,

$$\phi'+\frac{\phi^2}{n-1}+\delta(n-1)\leq 0.$$

Prosseguindo, façamos

$$\psi(t)=(n-1)\mathcal{L}_\delta\ \text{ com }\ \mathcal{L}_\delta(t)=\frac{S'_\delta}{S_\delta}(t),$$

note que, ψ é estritamente decrescente e quando $\delta\leq 0$, teremos $\psi>(n-1)\sqrt{-\delta}$. Ora, ψ satisfaz a equação de Riccati

$$\psi'+\frac{\psi^2}{n-1}+\delta(n-1)=0,$$

daí,

$$\frac{\psi^2}{n-1}+(n-1)\delta>0,\quad \forall t.$$

Ora, quando $t\to 0$, temos

$$\phi\sim\frac{n-1}{t},$$

assim, existe um $\epsilon_0>0$ tal que

$$\frac{\phi^2}{n-1}+(n-1)\delta>0,\quad \text{em }(0,\epsilon_0)$$

ou ainda, em $(0, t)$, $t \in (0, \beta)$.
Portanto, teremos

$$\frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\delta} \geq 1,$$

donde

$$\int_0^t \frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\delta} \geq t.$$

Seja $\operatorname{arc}\mathcal{L}_\delta$ a inversa de $\mathcal{L}_\delta$, segue que,

$$\operatorname{arc}\mathcal{L}_\delta \left(\frac{\phi(t)}{n-1} \right) \geq t,$$

ou seja,

$$\phi \geq \psi$$

em $(0, \beta)$. Logo,

$$\left\{ \frac{\sqrt{g(t,\xi)}}{{S_\delta}^{n-1}} \right\}' \leq 0 \quad \text{em} \ \ (0, \beta)$$

e, consequentemente

$$\sqrt{g(t,\xi)} \leq {S_\delta}^{n-1} \quad \text{em} \ \ (0, \beta].$$

■

2.5 Conjuntos Mensuráveis

A ideia de conjuntos mensuráveis, assim como a ideia de funções mensuráveis, é essencial para esse trabalho, já que mais a frente iremos utilizar a integração de Lesbegue. Ainda nessa seção será apresentada a medida de Hausdorff.

Definição 2.21 *Seja $E \in \mathbb{R}^n$, definimos sua medida exterior, $m_*(E)$, por*

$$m_*(E) = inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|;\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}$$

onde Q_j são cubos fechados.
Ademais, se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \mathcal{O} \supset E,\ \textit{aberto}, \quad \textit{tal que} \quad m_*(\mathcal{O} - E) \leq \varepsilon,$$

dizemos que E é mensurável a Lesbegue. Denotamos $m(E) = m_*(E)$.

Observação 2.17 *Temos:*

1. Se $m_*(E) = 0$, então E é mensurável;
2. Se $\{E_j\}_{j\geq 1}$ são mensuráveis, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ é mesurável;
3. Todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado é mensurável;
4. Se E é mensurável, então E^c é mensurável. Daí, segue que $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ é mensurável, desde que $\{E_j\}_{j\geq 1}$ sejam mensuráveis.
5. Definamos para $a \in \mathbb{R}^n$ o conjunto $E + a = \{x + a;\ x \in E\}$. Sendo E mensurável, segue que $E + a$ também é. Ademais, $m(E + a) = m(E)$.

Proposição 2.5 *Um conjunto mensurável verifica as propriedades:*
1. Se $E_1 \subset E_2$, então $m(E_1) \leq m(E_2)$
2. Se $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, então $m(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$
3. Se $E = E_1 \cup E_2$ com $d(E_1, E_2) > 0$, então $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$.
Demonstração: Ver [18], páginas 16-19. ■

Definição 2.22 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, a função $f : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é dita mensurável quando $f^{-1}([-\infty, a]) = \{x \in E;\ f(x) < a\}$ é mensurável, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Observação 2.18 *Temos:*
1. Se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável. Então,dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + \alpha$ e αf são mensuráveis.
2. Uma função $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(\mathcal{O})$ é mensurável. para todo $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ aberto.
3. Se $f : E \to \mathbb{R}$ é analítica, então f é mensurável.

Lema 2.2 (Zorn) *Seja X um conjunto parcialmente ordenado, não vazio, tal que cada cadeia em X é limitada superiomente. Então X possui pelo menos um elemento maximal.*

Teorema 2.8 (Cobertura de Vitali) *Seja $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ familia de bolas em $\mathbb{R}^n$ e denotemos por r_α o raio de B_α com $sup\, r_\alpha < \infty$, $\alpha \in I$. Então, existe um subconjunto $I_0 \subset I$ tal que,*
1. $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I_0}$ são dois a dois disjuntos;
2. $\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I_0} 5B_\alpha$.
Demonstração: Provemos o primeiro item. Denotemos por $r = supr_\alpha$, com $\alpha \in I$ e para cada $j \in \mathbb{N}$, definamos o conjunto $I(j) = \{\alpha \in I;\ r2^{-j-1} < r_\alpha \leq r2^{-j}\}$. Provemos por indução, para $j = 0$ temos $I(0)$ é parcialmente ordenado e cada cadeia de $I(0)$ é limitado superiomente, logo $I(0)$ possui pelo menos um elemento maximal. Denotemos por $L(0)$ o subconjunto maximal de $I(0)$ de forma que $\{B_\alpha\}_{\alpha\in L(0)}$ são dois a dois disjuntos. Prosseguindo, para $j = 1$, podemos extrair $L(1) \subset I(1)$ maximal tal que $\{B_\alpha\}_{\alpha\in L(1)}$ são dois a dois disjuntos, e $\{B_\alpha\}_{\alpha\in L(0)}$ também será. Assim, suponhemos que para $j = k - 1$ tenhamos $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\bigcup_{m=0}^{k-1} L(m)}$ sejam doi a dois disjuntos e, para $j = k$ seja $L(k) \subset I(K)$

maximal tal que $\{B_\alpha\}_{\alpha\in L(k)}$ são dois a dois disjuntos. Daí, $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\bigcup_{m=0}^{k}L(m)}$ são dois a dois disjuntos. Façamos

$$I_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L(k)$$

e temos $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I_0}$ são dois a dois disjuntos.
Para o segundo item, fixemos B_α com $\alpha \in I$ e provemos que existe $\beta \in I_0$ tal que $B_\alpha \subset 5B_\beta$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in I(k)$, temos

$$\frac{r}{2^{k+1}} < r_\alpha \leq \frac{r}{2^k}.$$

Ora, se $i \in L(k)$, não há o que provar. Suponhemos o contrário. Por construção, temos B_α intercepta uma bola B_β para $0 \leq l \leq k$. Assim,

$$r_\beta \geq \frac{r}{2^{l+1}} \geq \frac{r}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}r_\beta$$

donde

$$d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta.$$

Então,

$$r_\alpha + d(x_\alpha, x_\beta) \leq 2r_\alpha + r_\alpha \leq 5r_\beta.$$

Portanto,

$$B_\alpha = B(x_\alpha, r_\alpha) \subset B(x_\beta, r_\alpha + d(x_\alpha, x_\beta)) \subset B(x_\beta, 5r_\beta) = 5B_\beta.$$

■

Definição 2.23 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ e*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\text{diam}(F_i))^s;\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,\ \text{diam}(F_i) \leq \delta\forall i\right\}.$$

Definimos a s-dimensional medida de Hausdorff como sendo,

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Proposição 2.6 *Seja $E \in \mathbb{R}^n$ mensurável e $\mathcal{H}^s$ a s-dimensional medida de Hausdorff de E. Se $n = s$, então existe uma constante $c = c(n)$ positiva, tal que $m(E) = c\,\mathcal{H}^n(E)$.*
Demonstração: Ver [18], página 328. ■

Observação 2.19 *Sejam $E, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ mensuráveis. Temos:*

1. Se $E_1 \subset E_2$, então $\mathcal{H}^n(E_1) \leq \mathcal{H}^n(E_2)$.
2. Definindo, para $a \in \mathbb{R}^n$, $E + a = \{x + a; \, x \in E\}$. Segue que, $E + a$ é mensurável e $\mathcal{H}^n(E + a) = \mathcal{H}^n(E)$.
3. Definindo, para $\alpha \in \mathbb{R}$ positivo, $\alpha E = \{\alpha x; \, x \in E\}$. Teremos αE mensurável e $\mathcal{H}^n(\alpha E) = \alpha^n \mathcal{H}^n(E)$.

2.6 Desigualdade de Poincaré

Passamos a analisar definições acerca de espaços de Lebesgue e Sobolev. Daí, podemos apresentar um resultado essencial, que é a desigualdade de Poincaré.

Definição 2.24 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável. Definimos*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis a Lebesgue}; \int_\Omega |f|^2 < +\infty \right\}$$

munido da norma,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definição 2.25 *Se toda sequência limitada em um espaço vetorial normado $(E, \| \cdot \|)$ possui uma subsequência convergente em $(F, \| \cdot \|)$, dizemos que há uma imersão compacta de E em F.*
Notação: *$E \subset\subset F$.*

Definição 2.26 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável. Definimos*

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \, f \in L^2(U) \quad \text{para cada} \quad U \subset\subset \Omega \}.$$

Definição 2.27 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, α um multi-índice e $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dizemos que uma função $g_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é a α-ésima derivada fraca de f se*

$$\int_\Omega f(D^\alpha \phi) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \, dx$$

$\forall \, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nessa situação temos $g_\alpha = D^\alpha f$.

Definição 2.28 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definimos*

$$W^{1,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega);\ D^\alpha f \in L^2(\Omega),\ \forall 0 \leq |\alpha| \leq 1\}$$

munido da norma

$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 2.9 (Rellich-Kondrakhov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e $\partial\Omega \in C^1$. Suponhe $1 \leq p < n$. Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q < p^*$.
Obs: $p^* = \frac{np}{n-kp}$
Demonstração: Ver [8], página 272. ■

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com volume finito, definimos a média de f em Ω por

$$\overline{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f\, dx$$

Teorema 2.10 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, conexo, aberto e $\partial\Omega \in C^1$. Então, existe uma constante $C = C(n)$ em Ω tal que*

$$\|f - \overline{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$.
Demonstração: Suponhamos que exista uma sequência (f_m) em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\|f_m - \overline{f}_m\|_{L^2(\Omega)} > m\, \|\nabla f_m\|_{L^2(\Omega)}$$

Seja

$$g_m = \frac{f_m - \overline{f}_m}{\|f_m - \overline{f}_m\|_{L^2(\Omega)}}$$

Então,

$$\overline{g}_m = 0, \quad \|g_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

e

$$\|\nabla f_m\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{m}$$

Em particular, (g_m) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Como $W^{1,2}(\Omega)$ é reflexivo e pelo Teorema de Rellich-Kondrakhov, teremos

$$g_m \rightharpoonup g \quad \text{em} \quad W^{1,2}(\Omega) \quad \text{e} \quad g_m \to g \quad \text{em} \quad L^2(\Omega)$$

Dai, $\overline{g} = 0 \quad \text{e} \quad \|g\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Ademais, $g_m \rightharpoonup g$ em $W^{1,2}(\Omega)$ implica

$$\|g\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \liminf \|g_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 1 + \liminf \|\nabla f_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

Como $\|g\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} = 1 + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$ teremos $\nabla g = 0$ q.t.p. Ora, Ω é conexo, assim g é constante. O fato de $\overline{g} = 0$ implica que $g = 0$ em Ω, donde, $\|g\|_{L^2(\Omega)} = 0$, contrariando $\|g\|_{L^2(\Omega)} = 1$. ■

Denotemos a média de f em $B(x,r)$ por

$$(f)_{x,r} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f \, dy.$$

Assim,

Corolário 2.1 (Desigualdade de Poincaré para Bolas) *Se $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma constante $C = C(n) > 0$ tal que*

$$\|f - (f)_{x,r}\|_{L^2(B(x,r))} \leq Cr\|\nabla f\|_{L^2(B(x,r))} \tag{2.6}$$

para cada $f \in W^{1,2}(B^0(x,r))$.

Demonstração: De início, notemos que para $\Omega = B^0(0,1)$ tem-se (2.6), ou seja, dado $g \in W^{1,2}(B^0(0,1))$, temos

$$\|g - (g)_{0,1}\|_{L^2(B(0,1))} \leq C\|\nabla g\|_{L^2(B(0,1))}.$$

Assim, dado $f \in W^{1,2}(B^0(x,r))$ e seja

$$g(y) = f(x + ry), \quad y \in B(0,1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|f - (f)_{x,r}\|_{L^2(B(x,r))} &= r\,\|g - (g)_{0,1}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&\leq r\,C\,\|g - (g)_{0,1}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&= r\,C\,\|f - (f)_{x,r}\|_{L^2(B(x,r))}
\end{aligned}$$

Concluindo o resultado. ∎

2.7 Desigualdade de Lojasiewicz

Nesta seção, serão apresentadas definições acerca de conjuntos analíticos, semi-analitcos e subanalíticos. Posteriormente, será apresentada a desigualdade de Lojasiewicz, um resultado muito importante para esse trabalho.

Definição 2.29 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito analítico, se para todo $x \in X$, existe uma vizihança U de x em $\mathbb{R}^n$ e uma função analítica $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $X \cap U = f^{-1}(0)$.*

Exemplo 2.5 *Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$. Fazendo $f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1 = 0$, temos f analítica. Logo, $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0)$, donde $\mathbb{S}^n$ é analítico.*

Exemplo 2.6 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = sen\, x^2 + y^3$. Assim, o conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = 0\}$ é um conjunto analítico. Em geral, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ analítica, teremos $X = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\}$ é analítico.*

Definição 2.30 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito semi-analítico, se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^n$ tal que, para $p, q_1, ..., q_k$ funções analíticas em U, tem-se que $U \cap X$ é a união finita de cojuntos da forma $\{x \in U; p(x) = 0, q_i(x) > 0, i = 1, ..., k\}$.*

Observação 2.20 *Note que todo conjunto analítico é semi-analítico.*

Observação 2.21 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $F : X \to \mathbb{R}$ é semi-analítica se seu gráfico $graf(F) = \{(x, F(x)); x \in X\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto semi-analítico.*

Definição 2.31 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e para um m dado definamos $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ projeção ortogonal. Dizemos que X é um conjunto subanalítico se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^n$ e um subcojunto semi-analítico e limitado $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $U \cap X = \pi(S)$.*

Observação 2.22 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que uma função $F : X \to \mathbb{R}$ é subanalítica se seu gráfio $graf(F) = \{(x, F(x));\ x \in X\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é subanalítico.*

Seguem algumas propriedades acerca de conjuntos subanalíticos.

1. Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são subanalíticos, então $A \cup B$ é subanalítico;

2. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto subanalítico então A^c é subanalítico;
3. Por 1 e 2, segue que a intersecção e a diferença de conjuntos subanalíticos é um conjunto subanalítico;
4. Seja $F : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ aplicação subanalítica, então X e $F(X)$ são conjuntos subanalíticos.
5. Composta de funções subanalíticas ainda é uma função subanalítica;
6. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto subanalítico então $\overline{X}$, int$X$ e ∂X são conjuntos subanalíticos.

Lema 2.3 (Seleção de Curva) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ conjunto subanalítico e $0 \in \overline{X}$. Então, existe $\gamma : (0, \varepsilon) \to X$ analítica tal que $\gamma(t) \to x_0 \in X$ quando $t \to 0$.*

Teorema 2.11 (Desigualdade de Lojasiewicz) *Seja f uma função analítica numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$. Então, para $C > 0$, temos*

$$C\,|f(x)|^\alpha \leq |\nabla f(x)| \tag{2.7}$$

com $0 < \alpha < 1$, na vizinhança de 0.

Demonstração: Considere $\nabla f(0) = 0$ e definamos $g : B \to \mathbb{R}^2$ dado por $g(x) = (|f(x)|, |\nabla f(x)|)$, onde B é uma bola compacta centrado em 0. Seja $E = g(B) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u = |f(x)|,\, v = |\nabla f(x)|, \forall x \in B\} \subset [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Note que E é compacto e subanalítico.

Afirmação: Seja , para $L > 0$, $F = E \cap \{0 \leq v < Lu\}$. Então $0 \notin \overline{F}$.

De fato, suponhe que para $L > 0$ tenhamos $0 \in \overline{F}$, assim, $\overline{g^{-1}(F)} \cap g^{-1}(0) \neq \varnothing$. Seja $b \in \overline{g^{-1}(F)} \cap g^{-1}(0)$, segue pelo Lema de seleção de curva, que existe $\lambda : (0, \varepsilon) \to F$ tal que $\lambda(t) \to b$ quando $t \to 0$. Logo, $g(\lambda((0, \varepsilon))) \subset \{0 \leq v < u\}$, donde, para $h(t) = (f \circ \lambda)(t)$, teremos

$$\begin{aligned} |h'(t)| = |(f \circ \lambda)'(t)| &= |\lambda'(t)\, \nabla f(\lambda(t))| \\ &= |\lambda'(t)|\, |\nabla f(\lambda(t))| \\ &\leq M\, |\nabla f(\lambda(t))| \\ &\leq M\, L\, |h(t)| \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo $M > 0$ constante.

Ora, $h(0) = 0$ e para h não identicamente nulo, temos

$$h(t) = a_1 t + ... + a_k t^k + ...$$

para $a_k \neq 0$ e $k \geq 1$. E,

$$h'(t) = a_1 + ... + k a_k t^{k-1} + ...$$

donde, quando $t \to 0$ temos $t^{k-1} > t^k$ implicando $h'(t) > h(t)$, contrariando (2.8).
Prosseguindo, seja $\phi(u) = \inf E_u$, onde $E_u = E \cap \{$reta vertical que passa por (u,0)$\}$ para $u > 0$ pequeno. Note que ϕ é limitado e subanalítico. Daí,

$$\phi(u) = a + a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + ...$$

com $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. Pela afirmação $0 < \alpha_1 < 1$. Logo, para $C > 0$ com $C < a_1$, temos

$$Cu^{\alpha_1} < \phi(u) \leq v$$

ou seja, $C\,|f(x)|^{\alpha_1} \leq |\nabla f(x)|$ para $0 < \alpha_1 < 1$. ∎

3 TEOREMA PRINCIPAL

3.1 Problema de Autovalor

Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e $h \in C^2(M)$. O problema do autovalor para o Laplaciano consiste em determinar os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $-\Delta h = \lambda h$ em M admita soluções não triviais.

O espaço vetorial das soluções do problema para um autovalor λ dado, é denominado seu autoespaço. E, os elementos de cada autoespaço são denominados de autofunções.

Teorema 3.1 *Sejam M variedade Riemannina satisfazendo as hipóteses acima e $h \in C^2(M)$. Então, o conjunto dos autovalores consiste de uma sequência*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \uparrow +\infty$$

e cada autoespaço associado tem dimensão finita.

Definição 3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos o tom fundamental $\lambda^*(M)$ como sendo*

$$\lambda^*(M) = \inf_{\mathcal{M}-\{0\}} \frac{\int_M |\mathrm{grad}\, h|^2 \, d\mu}{\int_M |h|^2 d\mu}$$

onde

$$\mathcal{M} = \left\{ h \in W^{1,2}(M); \int_M h \, d\mu = 0 \right\}$$

Teorema 3.2 (Rayleigh) *Sejam M variedade Riemanniana definido acima e $h \in C^2(M)$ satisfazendo o problema de autovalor. Então,*

$$\lambda_1(M) \leq \frac{\int_M |\nabla h|^2 \, d\mu}{\int_M |h|^2 \, d\mu}. \tag{3.1}$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, h é autofunção de λ_1. Se $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ é base ortonormal completa de $L^2(M)$ tal que ϕ_j é autofunção de λ_j, para cada $j = 1, 2, \ldots$ tal *que* $\langle h, \phi_1 \rangle = \langle h, \phi_2 \rangle = \ldots = \langle h, \phi_{k-1} \rangle = 0$ *teremos*

$$\lambda_k \leq \frac{\int_M |\nabla h|^2 \, d\mu}{\int_M |h|^2 d\mu} \tag{3.2}$$

com a igualdade acontencendo se, e somente se, h *é uma autofunção de* λ_k.

Demonstração: ■

Observação 3.1 *Segue pelo Teroema de Rayleigh que* $\lambda^*(M) = \lambda_1(M)$.

3.2 Prova do Teorema Principal

Passemos a analisar o teorema principal. Para tal, definamos $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ analítica real, onde $\mathbb{S}^{n+1}$ é uma esfera de raio R e $n \geq 1$. Dado $s \in \mathbb{R}$, definamos a superfície de nível $V_s = f^{-1}(s)$. Notemos que V_s é fechado, consequentemente compacto e completo. Sendo $s \in \mathbb{R}$ valor regular de f, segue que $V_s \subset \mathbb{S}^{n+1}$ é uma subvariedade de $\mathbb{S}^{n+1}$ de dimensão n, assim podemos dar a V_s a métrica induzida pela inclusão. Portanto, V_s é uma variedade Riemanniana.

Afirmação 1 *Denotemos por* K *a curvatura seccional de* V_s*. Então, existem* $\beta < 0$ *e* $C > 0$ *tais que*

$$\sup_{x \in V_s} |K(x)| \leq C|s - s_0|^{\beta}. \tag{3.3}$$

Demonstração: De fato, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de $T_x V_s$ e denotemos por $K(x)(e_i, e_j)$ as curvaturas seccionais de V_s nas direções e_i e e_j, sendo assim, será necessário ter $|K(x)| = \sup_{i,j} |K(x)(e_i, e_j)|$. Sendo V_s uma subvariedade imersa em S^{n+1}, teremos que S^{n+1} será sua variedade ambiente e podemos definir a segunda forma fundamental em V_s por $II : \mathcal{X}(V_s) \times \mathcal{X}(V_s) \to \mathcal{X}(V_s)^{\perp}$. Daí, para $\overline{K}$ a curvatura seccional de S^{n+1}, teremos pela Equação de Gauss,

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \langle II(e_i, e_i), II(e_j, e_j) \rangle - |II(e_i, e_j)|^2,$$

onde e_i, e_j são ortonormais em $T_x V_s$.

Sendo V_s uma superfície de nível, teremos que o $\nabla f(x)$ é normal a V_s. Ademais, II é normal a V_s em x. Daí, façamos $\eta = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ donde, teremos constantes a_1, a_2 e a_3 diferentes de zero, tal que $II(e_i,e_i) = a_1\eta$, $II(e_j,e_j) = a_2\eta$ e $II(e_i,e_j) = a_3\eta$. Portanto,

$$\begin{aligned}
K(e_i,e_j) &= \frac{1}{R^2} + \langle a_1\eta, a_2\eta\rangle - \langle a_3\eta, a_3\eta\rangle \\
&= \frac{1}{R^2}\langle \eta,\eta\rangle + a_1a_2\langle\eta,\eta\rangle - a_3^2\langle\eta,\eta\rangle \\
&= \frac{1}{|\nabla f(x)|^2}\Big\{\frac{1}{R^2}\langle\nabla f(x),\nabla f(x)\rangle \\
&\quad + a_1a_2\langle\nabla f(x),\nabla f(x)\rangle - a_3^2\langle\nabla f(x),\nabla f(x)\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

Ora, $\langle\nabla f(x),\nabla f(x)\rangle = df(X)$ com $X = \nabla f(x)$ e, sendo f analítica em um compacto temos $|df(X)| \le m$ para $m > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
|K(x)| &= \sup_{i,j}|K(x)(e_i,e_j)| \\
&= \sup_{i,j}\left|\frac{1}{|\nabla f(x)|^2}\Big\{\frac{1}{R^2}\,df(X) + a_1a_2\,df(X) - a_3^2\,df(X)\Big\}\right| \\
&\le \sup_{i,j}\Big\{\frac{1}{|\nabla f(x)|^2}\,a\,|df(X)|\Big\} \\
&\le \sup_{i,j}\Big\{\frac{1}{|\nabla f(x)|^2}\,a\,m\Big\} \\
&= \frac{1}{|\nabla f(x)|^2}\,a\,m \\
&\le \frac{a\,m\,C}{|s-s_0|^{2\alpha_1}} \\
&= C\,|s-s_0|^{-2\alpha_1}
\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade foi utilizado a desiguadade de Lojasiewicz.
Por fim,

$$\sup_{x\in V_s}|K(x)| \le C\,|s-s_0|^{\beta}$$

com $\beta = -2\alpha_1$. ■

Afirmação 2 *Denotemos por* inj(V_s) *o raio de injetividade de* V_s*. Então, para* $\gamma > 0$ *e* $C > 0$*, temos*

$$\mathrm{inj}(V_s) \ge C\,|s-s_0|^{\gamma}. \tag{3.4}$$

Demonstração: Seja $f(x_1,...,x_{n+1}) = t$ e $z_0 \in V_t$ fixo. Sem perda de generalidade, considere x_{n+1} na direção normal a V_t em z_0. Teremos pela desigualdade de Lojasiewicz

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z_0)\right| = |\nabla f(z_0)| \geq C\,|t-t_0|^{\alpha}.$$

Afirmação: Existe uma vizinhança de z_0 de raio $C\,|t-t_0|^{\alpha}$ tal que $\forall z \in V_t$ nesta vizinhança tenhamos

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z)\right| \geq C\,|t-t_0|^{\alpha}.$$

De fato, lembrando que $f \in C^2$ temos

$$\begin{aligned} C\,|t-t_0|^{\alpha} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z_0)\right| &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z_0) - \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z)\right| \\ &\leq C\,|z-z_0| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z)\right|. \end{aligned}$$

Donde, para $|z-z_0| \leq \frac{C}{2}|t-t_0|^{\alpha}$ teremos

$$C\,|t-t_0|^{\alpha} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z)\right|.$$

Assim, segue pelo Teorema da Função Implicíta, que V_t é dado por um gráfico na vizinhaça de z_0 com raio $C\,|t-t_0|^{\alpha}$.
Prosseguindo, dado η vetor normal a V_s em z com $|\eta| = 1$ e considere e_{n+1} no eixo positivo de x_{n+1}. Assim,

$$\langle \eta, e_{n+1}\rangle = \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right| \geq C\,|s-s_0|^{\alpha}$$

Logo, por uma projeção no plano tangente de V_t em z_0, termos $\mathrm{inj}(p) \geq C\,|t-t_0|^{2\alpha}$. E, por fim

$$\mathrm{inj}(V_s) = \inf_{p\in V_s} \mathrm{inj}(p) \geq C\,|s-s_0|^{2\alpha}.$$

■

Prosseguindo, definamos

$$r_0 = \frac{C|s-s_0|^{2\alpha_1}}{100} \leq \min\left\{\frac{\mathrm{inj}(V_s)}{100}, C|s-s_0|^{-\beta/2}\right\}$$

e definamos a bola geodésica $B(x,\varepsilon)$ com $\varepsilon \leq 10r_0$. Nessas condições, podemos introduzir coordenadas geodésicas sobre $B(x,\varepsilon)$, ou seja, dado $z \in B(x,\varepsilon)$, teremos $z = exp(r\xi)$, onde $r \in \mathbb{R},\ 0 \leq r \leq 10r_0$ e $\xi \in S^{n-1}$. Ademais, sendo V_s completa, já foi demonstrado que seu elemento volume será dado por

$$d\mu = \sqrt{g(r,\xi)}\, dr d\sigma.$$

Lema 3.1 *Para $r \leq 10r_0$ existe uma constante $C_1 = C_1(n) > 0$ tal que*

$$C_1 r^{n-1} \leq \sqrt{g(r,\xi)} \leq C_1^{-1} r^{n-1}. \tag{3.5}$$

Demonstração: Sendo $r \leq 10r_0$, segue que $r \leq C|s-s_0|^{-\frac{\beta}{2}}$ e, ainda $r^2 \leq C|s-s_0|^{-\beta}$. Daí, temos pela Afirmação 1 (3.3)

$$\frac{1}{r^2} \geq C|s-s_0|^{\beta} \geq \sup_{x\in V_s} |K(x)|.$$

Ora, dada $\gamma : [0,10r_0) \to V_s$, geodésica normalizada, com $\gamma(0) = x$, teremos que as curvaturas seccionais ao longo de γ são $\leq \frac{1}{r^2}$, $\forall\, r \in (0,10r_0)$. Portanto, segue pelo Teorema 2.6 (especificamente a desigualdade 2.3) que

$$\begin{aligned}
\sqrt{g(r,\xi)} &\geq S^{n-1}_{\frac{1}{r^2}}(r)\\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2}}}\, sen\left(\sqrt{\frac{1}{r^2}}\, r\right)\right]^{n-1}\\
&= [sen\, 1]^{n-1}\, r^{n-1}.
\end{aligned}$$

Fazendo $C_1 = [sen\, 1]^{n-1}$, teremos $\sqrt{g(r,\xi)} \geq C_1\, r^{n-1}$.
Para outra desigualdade, seja $\{e_1, ..., e_{n-1}, e_n\}$ base ortonormal de T_xV_s e façamos $\eta = |\eta|\, e_n$, para $\eta \in T_xV_s$, temos

$$\begin{aligned}
Ric(\eta,\eta) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(\eta, e_i)\eta, e_1\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(|\eta|e_n, e_i)|\eta|e_n, e_i\rangle + \langle R(|\eta|e_n, e_n)|\eta|e_n, e_n\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |\eta|^2 \langle R(e_n, e_i)e_n, e_i\rangle + |\eta|^2\langle R(e_n, e_n)e_n, e_n\rangle\\
&= |\eta|^2 \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e_n).
\end{aligned}$$

Ora, $|K(e_i, e_n)| \leq C|s - s_0|^\beta$, donde

$$\begin{aligned} Ric(\eta,\eta) &= |\eta|^2 \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e_n) \\ &\geq |\eta|^2 \sum_{i=1}^{n-1} -C\,|s-s_0|^\beta \\ &= -C\,|s-s_0|^\beta\,(n-1)\,|\eta|^2 \\ &\geq -\frac{1}{r^2}\,(n-1)\,|\eta|^2. \end{aligned}$$

Logo, estamos nas hipóteses do Teorema 2.7. Usando a relação 2.5 obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{g(r,\xi)} &\leq S^{n-1}_{\frac{-1}{r^2}}(r) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{-(-1)}{r^2}}}\, senh\left(\sqrt{\frac{-(-1)}{r^2}}\; r\right)\right]^{n-1} \\ &= r^{n-1}\,[senh\,1]^{n-1} \\ &\leq r^{n-1}\,C_1^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, para $r \leq 10r_0$ e $C_1 > 0$ temos

$$C_1\, r^{n-1} \leq \sqrt{g(r,\xi)} \leq C_1^{-1}\, r^{n-1}.$$

■

No próximo resultado, iremos denotar por $|B(x,\varepsilon)|$ o volume de $B(x,\varepsilon)$, e, para $z \in B(x,\varepsilon)$ com $z = exp(r\xi)$ seja $h(z) = h(r,\xi)$, com $h \in C^2(V_s)$. Assim,

Lema 3.2 *Para* $0 \leq \varepsilon \leq 10r_0$ *e* $C_1 = C_1(n) > 0$*, teremos*

$$\int_{B(x,\varepsilon)} |h - h_B|^2\, d\mu \leq C_1\varepsilon^2 \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla h|^2\, d\mu \tag{3.6}$$

onde $h_B = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} h(r,\xi) r^{n-1}\, dr d\sigma$.

Demonstração: Sendo $\varepsilon \leq 10r_0 \leq \mathrm{inj}(V_s)$ e $h \in C^2(V_s)$, podemos usar o Colorário 2.1 .

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{B(x,\varepsilon)} |h-h_B|^2\, d\mu &= \int_{B(x,\varepsilon)} |h-h_B|^2\, \sqrt{g(r,\xi)}\, drd\sigma \\ &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |h-h_B|^2\, C_1^{-1} r^{n-1}\, drd\sigma \\ &\leq C'\varepsilon^2 \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla h|^2\, C_1^{-1} r^{n-1}\, drd\sigma \\ &= C' C_1^{-2} \varepsilon^2 \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla h|^2\, C_1 r^{n-1}\, drd\sigma \\ &\leq C_1 \varepsilon^2 \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla h|^2\, \sqrt{g(r,\xi)}\, drd\sigma \\ &= C_1 \varepsilon^2 \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla h|^2\, d\mu.\end{aligned}$$

∎

Lembrando que, se exp_x é um difeomorfismo em uma vizinhaça V da origem em T_xV_s, $exp_x(V) = U$ é chamada vizinhaça normal de x. Se $B(0,\varepsilon)$ é tal que $\overline{B}(0,\varepsilon) \subset V$, chamamos de $exp_x B(0,\varepsilon) = B(x,\varepsilon)$ a bola normal (ou geodésica) de centro x e raio ε.

Lema 3.3 *Seja $\{B(x_i, r_0)\}_{i=1}^k$ familía de bolas geodésicas em V_s. Então,*
1. V_s pode ser escrito como

$$V_s = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_0);$$

2. Para $i \neq j$, $B(x_i, \frac{r_0}{2}) \cap B(x_j, \frac{r_0}{2})$ tem medida nula;
3. $k \leq C r_0^{-n}$, onde $C = C(f)$ constante que independe de s e s_0.

Demonstração: Provemos cada item.

1. Sendo V_s compacto, segue que

$$V_s = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_0).$$

2. O Teorema 2.8 garante que para $i \neq j$, $B(x_i, \frac{r_0}{2}) \cap B(x_j, \frac{r_0}{2}) = \varnothing$. Assim, $\mathcal{H}^n(B(x_i, \frac{r_0}{2}) \cap B(x_j, \frac{r_0}{2})) = \mathcal{H}^n(\varnothing) = 0$.

3. Para provar esse item, iremos usar o resultado

$$\mathcal{H}^n(V_s) \leq C,$$

com $C = C(f)$ constante que idepende de s e s_0. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [19].

Prosseguindo, o item anterior garante que

$$\mathcal{H}^n\left(\bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{r_0}{2}\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{H}^n\left(B\left(x_i, \frac{r_0}{2}\right)\right) \tag{3.7}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{C'}{2^n}\, r_0^n \tag{3.8}$$

$$= k\,\frac{C'}{2^n}\, r_0^n. \tag{3.9}$$

Fazendo $C_1 = \frac{C'}{2^n}$, teremos

$$\mathcal{H}^n\left(\bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{r_0}{2}\right)\right) = k\, C_1\, r_0^n.$$

Portanto, notando que $\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{r_0}{2}) \subset V_s$, temos

$$k\, C_1\, r_0^n = \mathcal{H}^n\left(\bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{r_0}{2}\right)\right) \leq \mathcal{H}^n(V_s) \leq C$$

ou seja,

$$k \leq C r_0^{-n}.$$

Finalizando a demonstração. ■

Teorema 3.3 *Seja s_0 um valor crítico de f e $V_s = f^{-1}(s)$ com $s \in \mathbb{R}$ definido acima. Existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$, que não dependem de s e s_0, tais que*

$$\lambda_1(V_s) \geq C|s - s_0|^\alpha \quad \textit{quando} \;\; s \to s_0.$$

Observação 3.2 *Para demonstração do resultado, denotemos por $B(x_i, r_0) = B_i$. Assim,*

$$h_{B_i} = \frac{1}{|B(x_i, r_0)|} \int_{B(x_i, r_0)} h(r, \xi)\, r^{n-1}\, dr d\sigma.$$

Demonstração: De início, provemos que para $h \in C^2(V_s)$, temos

$$\int_{V_s} |h - c_h|^2\, d\mu \leqslant C\, |s - s_0|^{-\alpha} \int_{V_s} |\nabla h|^2\, d\mu$$

onde,

$$c_h = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} h(r,\xi)\, r^{n-1}\, dr d\sigma.$$

Com efeito, temos pelo item 1 do Lema 3

$$\begin{aligned}
\int_{V_s} |h - c_h|^2\, d\mu &= \int_{\bigcup_{i=1}^k B_i} |h - c_h|^2\, d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |h - c_h|^2\, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |h - h_{B_i} + h_{B_i} - c_h|^2\, d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^k \int_{B_i} \left(|h - h_{B_i}| + |h_{B_i} - c_h|\right)^2\, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |h - h_{B_i}|^2\, d\mu + \int_{B_i} |h_{B_i} - c_h|^2\, d\mu + \int_{B_i} 2\,|h - h_{B_i}|\,|h_{B_i} - c_h|\, d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{B_i} |h - h_{B_i}|^2\, d\mu + \int_{B_i} |h_{B_i} - c_h|^2\, d\mu + \int_{B_i} \left(|h - h_{B_i}|^2 + |h_{B_i} - c_h|^2\right)\, d\mu \right\} \\
&= \underbrace{2 \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |h - h_{B_i}|^2\, d\mu}_{(\mathbf{I})} + \underbrace{2 \sum_{i=1}^k |h_{B_i} - c_h|^2\, \mu(B_i)}_{(\mathbf{II})} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

onde, $\mu(B_i) = \int_{B_i} d\mu$.
Analisemos (**I**). Ora, utilizando o Lema 2, temos

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |h - h_{B_i}|^2 d\mu &\leq 2C_1 {r_0}^2 \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |\nabla h|^2 d\mu \\
&\leq 2C_1 {r_0}^2 \sum_{i=1}^k \int_{V_t} |\nabla h|^2 d\mu \\
&= 2C_1 {r_0}^2 k \int_{V_t} |\nabla h|^2 d\mu. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Para (**II**), tomemos uma sequência de bolas $B_{i,m}$ de forma que tenhamos $B_1 = B_{i,1}, ...,$

$B_{i,m}, ..., B_{i,m_0+1} = B_i$. Ora, $B_{i,m} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Tendo em mente que $c_h = h_{B_{i,m}}$, temos

$$\begin{aligned}
|h_{B_i} - c_h| &= |h_{B_{i,m_0+1}} - h_{B_{i,1}}| \\
&= |h_{B_{i,m_0+1}} - h_{B_{i,m_0}} - ... + h_{B_{i,2}} - h_{B_{i,1}}| \\
&\leq |h_{B_{i,m_0+1}} - h_{B_{i,m_0}}| + ... + |h_{B_{i,2}} - h_{B_{i,1}}| \\
&= \sum_{m=1}^{m_0} |h_{B_{i,m}} - h_{B_{i,m+1}}|
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, note que $B_{i,m}$ e $B_{i,m+1}$ são adjacentes, com raio igual a r_0. Assim, seja $B_m = B(x, 5r_0)$, temos:
(a) $B_m \supset B_{i,m}$ e $B_m \supset B_{i,m}$.
(b) $|B_m| \leq C_1 |B_{i,m}|$ e $|B_m| \leq C_1 |B_{i,m+1}|$.
Portanto,

$$|h_{B_{i,m}} - h_{B_m}| \leq |h_{B_{i,m}} - h_{B_m}| + |h_{B_m} - h_{B_{i,m+1}}|. \tag{3.13}$$

Analisemos o lado esquerdo de (3.13). Observe que na primeira parcela temos

$$\begin{aligned}
|h_{B_{i,m}} - h_{B_m}| &= \left| \frac{1}{|B_{i,m}|} \int_{B_{i,m}} h\, r^{n-1}\, drd\sigma - \frac{1}{|B_{i,m}|} \int_{B_{i,m}} h_{B_m}\, r^{n-1}\, drd\sigma \right| \\
&= \left| \frac{1}{|B_{i,m}|} \int_{B_{i,m}} (h - h_{B_m})\, r^{n-1}\, drd\sigma \right| \\
&\leq \frac{1}{|B_{i,m}|} \int_{B_{i,m}} |h - h_{B_m}|\, r^{n-1}\, drd\sigma \\
&\leq \frac{1}{|B_{i,m}|} \int_{B_m} |h - h_{B_m}|\, r^{n-1}\, drd\sigma \\
&\leq \frac{1}{|B_{i,m}|} \left(\int_{B_m} |h - h_{B_m}|^2\, r^{n-1}\, drd\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_m} r^{n-1}\, drd\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{|B_{i,m}|} \left(\int_{B_m} |h - h_{B_m}|^2\, r^{n-1}\, drd\sigma \right)^{\frac{1}{2}} |B_m|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por (a) e (b) teremos $|B_{i,m}| \approx |B_m|$, donde

$$|h_{B_{i,m}} - h_{B_m}| \leq \left(\frac{1}{|B_m|} \int_{B_m} |h - h_m|^2\, r^{n-1}\, drd\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

E, pelo Lema 1

$$|h_{B_{i,m}} - h_{B_m}| \leq \left(\frac{1}{|B_m|} \int_{B_m} |h - h_m|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $5r_0 \leq inj(V_t)$, podemos aplicar Lema 2, donde

$$|h_{B_{i,m}} - h_{B_m}| \leq C_1\, {r_0}^2 \left(\frac{1}{|B_m|} \int_{B_m} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

De forma análoga, temos

$$|h_{B_{i,m+1}} - h_{B_m}| \leq C_1\, {r_0}^2 \left(\frac{1}{|B_m|} \int_{B_m} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13), segue que

$$\begin{aligned} |h_{B_{i,m+1}} - h_{B_{i,m}}| &\leq C_1 {r_0}^2 \left(\frac{1}{|B_m|} \int_{B_m} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + C_1 {r_0}^2 \left(\frac{1}{|B_m|} \int_{B_m} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_1 r_0 |B_m|^{\frac{-1}{2}} \left(\int_{B_m} |\nabla h|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lembrando que $|B_m| \approx C_1 {r_0}^n$, podemos substituir a expressão anterior em (3.12), obtendo

$$\begin{aligned} |h_{B_i} - c_h| &\leq \sum_{i=1}^{m_0} |h_{B_{i,m}} - h_{B_{i,m+1}}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m_0} C_1 r_0 |B_m|^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{B_m} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^{m_0} C_1 r_0 {r_0}^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{B_m} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_1 {r_0}^{-\frac{(n-2)}{2}} \sum_{i=1}^{m_0} \left(\int_{B_m} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 {r_0}^{-\frac{(n-2)}{2}} m_0 \left(\int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daí, teremos

$$|h_{B_i} - c_h|^2 \leq C_1 {r_0}^{-(n-2)} {m_0}^2 \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu.$$

Como $\mu(B_i) \approx C_1 {r_0}^n$ e $m_0 \leq k$, temos em (**II**)

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{k} |h_{B_i} - c_h|^2 \mu(B_i) &= 2\sum_{i=1}^{k} |h_{B_i} - c_h|^2 C_1 {r_0}^n \\ &\leq 2\sum_{i=1}^{k} C_1 {r_0}^n {r_0}^{-(n-2)} {m_0}^2 \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu \\ &= 2C_1 {r_0}^2 {m_0}^2 k \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu \\ &\leq 2C_1 {r_0}^2 k^3 \int_{V_s} |\nabla h|^2 d\mu. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{V_s} |h - c_h|^2 \, d\mu &\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} |h - c_h|^2 \, d\mu \\ &\leq 2C_1 {r_0}^2 k \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu + 2C_1 {r_0}^2 k^3 \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu \\ &= 2C_1 {r_0}^2 (k + k^3) \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu \\ &\leq 4C_1 {r_0}^2 k^3 \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu. \end{aligned}$$

Ora, temos pelo item 3 do Lema 3 que $k \leq C{r_0}^{-n}$, donde $k^3 \leq (C{r_0}^{-n})^3$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{V_s} |h - c_h|^2 \, d\mu &\leq C_1 {r_0}^2 (C{r_0}^{-n})^3 \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu \\ &= C_1 {r_0}^{2-3n} \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu. \end{aligned}$$

Ora, $r_0 = \frac{C|s-s_0|^{2\alpha_1}}{100} \Rightarrow {r_0}^{2-3n} = C|s - s_0|^{\alpha_1(4-3n)}$. Façamos $-\alpha = \alpha_1(3n-4)$. Assim,

$$\int_{V_s} |h - c_h|^2 \, d\mu \leq C|s - s_0|^{-\alpha} \int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \lambda_1(V_s) \;=\; \lambda^*(V_s) \;=\; \inf_{\mathcal{M}-\{0\}} \frac{\int_{V_s} |\nabla h|^2 \, d\mu}{\int_{V_s} |h - c_h|^2 \, d\mu} \\ \geq C \, |s - s_0|^{\alpha} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_1(V_s) \geq C \, |s - s_0|^{\alpha}, \quad \text{quando} \quad s \to s_0.$$

■

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentado um resultado proposto por Cordaro e Hounie cujo objetivo era estudar o decaimento do primeiro autovalor de uma superfície de nível na esfera. Para demonstrá-lo foi preciso utilizar teorias básicas e resultados importantes da Geometria Riemanniana, Geometria Algebrica Real, Equações Diferenciais Parciais e Teoria Espectral.

Por fim, o problema me permitiu conhecer resultados fascinantes (dessas teroias) citadas acima e poder aprofundar mais em problemas de comparação relacionados ao diâmetro, injetividade, volume de variedades Riemanniana.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, J. L.; BIRBRAIR, L.; CARMO, M. DO; FERNANDES, A. Globally Subnalytic CMC Surfaces in $\mathbb{R}^3$. **Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences,** , v. 21, p. 186–192, 2014.

[2] BIERSTONE, Edward; MILMAN, Pierre D. Semianalytic and Subanalytic Sets. **Publications Mathématiques de l'I.H.É.S,** , v. 67, p. 186–192, 1988.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[4] CHANILLO, Sagun. The First Eigenvalue of Analytic Level Surfaces on Spheres. **Mathematical Research Letters,** New York, v. 1, p. 159–166, 1994.

[5] CHAVEL, Isaac. **Eingenvalues in Riemannian Geometry**. New York: Academic Press, 1984.

[6] CHAVEL, Isaac. **Riemannian Geometry:***A Modern Introduction*. New York: Cambridge University Press, 1993.

[7] CORDARO, P.; HOUNIE, J. On local solvability of underdetermined systems of vector fields. **Amer. J. of Math**, v. 112, p. 243–270, 1990.

[8] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. New York: AMS, 2002.

[9] GALLOT, S.; HULIN, D.; LAFONTAINE, J. **Riemannian Geometry**. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[10] GROMOV, Mikhael. Spectral Geometry of semi-algebraic sets. **Ann. Inst. Fourier**, v. 42, n. 1-2, p. 249–274, 1992.

[11] HEBEY, Emmanuel. **Introduction á l'analyse non linéaire sur les variétés**. Paris: Diderot, 1997.

[12] LEE, John M. **Riemannian Manifolds:***An Introduction to Curvature*. New York: Springer-Verlag, 1997.

[13] LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. New York: Springer-Verlag, 2003.

[14] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise vol.2**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[15] LOJASIEWICZ, S.; ZURRO, M. A. On the Gradient Inequality. **Bulletin of the**

Polish Academy of Sciences, v. 47, p. 143–145, 1999.

[16] MATILLA, Pertti. **Geometry of Sets and Measure in Euclidean Spaces**. New York: Cambridge University Press, 1995.

[17] PETERSEN, Peter. **Riemannian Geometry**. New York: Springer-Verlag, 1998.

[18] STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. **Real Analysis:***Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces.* Princeton: Princeton University Press, 2005.

[19] SUSSMANN, Héctor J. Real analytic desinguralization and subanalytic sets: an elemetary approach. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 317, p. 417–461, 1990.

[20] WHEEDEN, Richard L.; ZYGMUND, Antoni. **Measure and Integral:** *An Introduction to Real Analysis.* New York: Marcel Dekker, INC., 1977.