UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELZON CÉZAR BEZERRA JÚNIOR

UM ESTUDO SOBRE REGULARIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS

FORTALEZA

2016

ELZON CÉZAR BEZERRA JÚNIOR

UM ESTUDO SOBRE A REGULARIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAS PARCIAIS ELÍPTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

B469e Bezerra Júnior, Elzon Cézar
Um estudo sobre regularidade de soluções de equações diferenciais parciais elípticas / Elzon Cezar Bezerra Júnior. – 2016.
130 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Análise.
Orientação: Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior.

1. Equações diferenciais parciais elípticas. 2. Regularidade. 3. Estimativas. I. Título.

CDD 515.3533

ELZON CÉZAR BEZERRA JÚNIOR

UM ESTUDO SOBRE A REGULARIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAS PARCIAIS ELÍPTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovado em: 19 / 05 / 2016.

BANCA EXAMINADORA

Raimundo Alves Leitão Júnior

Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Eduardo A Teixeira

Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Damião Júnio G Araújo

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho ao meu amor Leonel Borges Brum.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo seu infinito amor e misericórdia e por toda a força concedida nessa jornada. Aos meus pais, ,Cezar e Cléa, por todo amor e esforço empregado durante à minha formação como pessoa e profissional. A meu amado irmão Marcos Paulo, pelo amor, carinho e amizade.

Aos meus amigos, fonte de força, risadas e bons momentos, em especial, a Victor Calabria pelos horas de descontração, pelas conversas sobre o futuro e as inúmeras risadas. Ao querido André Couto, por sempre me ouvir, me fazer rir e compartilhar o que há de melhor em arte fazendo a minha vida mais completa.

A Leonel Brum, pelo amor, companheirismo, paciência e dedicação.

Aos amigos que fizeram parte da realização deste trabalho. A Silvio Farias pelo valioso companheirismo, respeito e as conversas fora do ambiente matemático. A Victor Gomes, por me fazer crescer bastante em matemática durante os tempos de estudo conjunto e pelas divertidas conversas. A Elisafã Braga, pela simpatia, respeito, atenção e pelos vários ensinamentos matemáticos durante todo o meu percurso no mestrado. A Alexandre Cezar por toda simpatia, bom humor e a disposição em me ajudar, desde o início do mestrado até o fim.

Aos meus mestres durante todo esse percurso, em especial, ao meu orientador Raimundo Leitão, pelos ensinamentos durante o curso de verão, por toda atenção , encorajamento e determinação dados durante a dissertação e aos membros da banca de defesa pela disponibilidade. Ao professor Antonio Caminha, pelas aulas, paciência e gosto matemático transmitido. Ao professor Darlan Girão, pelo apoio durante a cadeira de estágio.

Agradeço também a Andrea Dantas pela eficiência e a todos os funcionários da UFC.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

"Hey, Jude, don't make it bad
take a sad song and make it better."

Lennon/McCartney

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da regularidade de soluções de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem, serão usadas técnicas tais como o princípio do máximo, estimativas a priori e a desigualdade de Harnack. Por fim generalizamos o conceito de solução buscando soluções no espaço de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Regularidade. Estimativas. Solução Fraca.

ABSTRACT

The main objective of this work is to study the regularity of solutions of elliptic partial differential equations of second order, will be used techniques such as the principle of maximum estimates a priori and the unequal Harnack. Finally generalize the solution concept seeking solutions in the Sobolev space $W^{2,p}(\Omega)$.

Keywords: Elliptic Partial Differential Equations. Regularity. Estimates. Weak Solutions

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo deste trabalho iremos estudar propriedades gerais das equações diferencias parciais elípticas lineares e quasilineares, isto é, vamos estudar equações da forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i}^{n} b_i(x)D_i u + c(x)u = f(x)$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + \sum_{i}^{n} b_i(x, u, Du) = 0.$$

No capítulo 2, vamos desenvolver os pré-requisitos necessários para o entendimento dos capítulos restantes como conceitos de cálculo no $\mathbb{R}^n$, conceitos de teoria da medida e teoremas de convergência de integral e por fim será dado um breve resumo sobre espaços de Sobolev e teoremas de imersão entre estes. No capítulo 3 será estudado funções harmônicas e suas propriedades como a propriedade do valor médio, soluções fundamentais, princípios do máximo, desigualdade de Harnack e por fim os métodos de energia.

No capítulo 4 discutiremos os princípios do máximo e suas aplicações, dois tipos de princípio do máximo serão estudados um devido a Hopf e outro a Alexandroff. Como aplicação veremos as estimativas a priori dos problemas de Dirichlet de Von Neumann. Para finalizar o capítulo 5, faz um estudo da definição de solução fracas e suas propriedades gerais, como a Hölder Continuidade.

Notações

(a) Ω é um conjunto aberto e conexo.

(b) $\overline{\Omega}$ é o fecho do conjunto Ω.

(c) $\partial\Omega$ é o bordo de Ω.

(d) Se $\Omega^{'}$ é aberto, escrevemos $\Omega^{'} \subset\subset \Omega$ se $\Omega^{'} \subset \overline{\Omega^{'}} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega^{'}}$ é compacto.

(e) $m(\Omega)$ é a medida de Lebesgue do conjunto Ω.

(f) $|\Omega|$ é a cardinalidade do conjunto Ω.

(g) Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ então $u^{+} = \max(u, 0)$, $u^{-} = -\min(u, 0)$ e $u = u^{+} - u^{-}$.

(h) $\mathrm{osc}_{\Omega}\, u = \sup_{\Omega} u - \inf_{\Omega} u$.

(i) $\mathrm{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$, isto é, o suporte de u é o menor fechado em que u não se anula.

(j) $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$, é o gradiente da função u, onde $D_i u = \partial u/\partial x_i$.

(k) $D^2 u = (D_{ij} u)_{i\times j}$ é a matriz hessiana de u.

(l) $B_r(x_0) \in \Omega$ é uma bola fechada de centro x_0 e raio r.

(m) $B_r^0(x_0) \in \Omega$ é uma bola aberta de centro x_0 e raio r.

(n) $\alpha(n)$ é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

(o) $\omega_n = \alpha(n)n$ é a area da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

(p) Se U é um espaço vetorial com produto interno, e $v, w \in U$, $v \cdot w$ é o produto interno de u e v no espaço U.

(q) $C^k(\Omega), C^{\infty}(\Omega)$ denota respectivamente o conjunto das funções k-vezes diferenciáveis cujas suas derivadas até a ordem k são contínuas e o conjunto das funções suaves.

(r) $C_0^k(\Omega), C_0^{\infty}(\Omega)$ é o conjunto das funções $C^k(\Omega), C^{\infty}(\Omega)$ com suporte compacto.

(s) A distância entre os conjuntos Ω e $\Omega^{'}$ é dada por

$$\mathrm{dist}(\Omega, \Omega^{'}) = \inf\{|x - y|; x \in \Omega \text{ e } y \in \Omega^{'}\}$$

a distância entre um elemento x e um conjunto Ω é dada por

$$\mathrm{dist}(x, \Omega) = \inf\{|x - y|; y \in \Omega\}$$

(t) $W^{k,p}(\Omega), H^k(\Omega)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ é um espaço de Sobolev.

(u) $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é o conjunto das funções Hölder contínuas.

(v) Um multi-índice α é uma n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, 2, \ldots, n$. Definimos a ordem do multi-índice α como

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

O seu fatorial é definido como

$$\alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!.$$

O seu coeficiente binomial como

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}_+.$$

A exponenciação

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x^{\alpha_i}.$$

E por fim, a derivada parcial

$$D^\alpha u = \frac{\partial u^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

(x) Sejam f, g funções quaisquer. Escrevemos $f = o(g)$ quando $x \to x_0$, desde que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

2 PRELIMINARES

Este capítulo destina-se a dar uma base para a leitura do texto como um todo.

2.1 Algumas noções de cálculo em $\mathbb{R}^n$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto

Teorema 2.1 *(Teorema da Divergência) Seja* $\boldsymbol{u} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *então*

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{u}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \nu \; dS$$

onde ν *é a* i*-ésima coordenada do vetor* ν *exterior a* $\partial\Omega$*.*

Prova: Veja em Lima [13] página 492.

Teorema 2.2 *(Teorema de Gauss-Green) Suponha que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int\limits_{\Omega} D_i u = \int\limits_{\partial\Omega} u\nu^i dS \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

onde ν^i *é a i-ésima coordenada do vetor* ν *exterior a* $\partial\Omega$*.*

Prova: Basta aplicar o teorema da divergência ao campo $\mathbf{u} = (0, \ldots, \underbrace{u}_{i}, \ldots, 0)$.

Teorema 2.3 *(Fórmula de Integração Por Partes) Sejam* $u, \nu \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int\limits_{\Omega} D_i u\nu dx = -\int\limits_{\Omega} u D_i \nu + \int\limits_{\partial\Omega} u\nu\nu^i dS \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Prova: Basta aplicar o teorema de Gauss-Green a $u\nu$.

Teorema 2.4 *(Fórmulas de Green)*

(a) $\int\limits_{\Omega} D\nu \cdot Du dx = -\int\limits_{\Omega} u\Delta\nu dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\nu}{\partial\nu} u dS$

(b) $\int\limits_{\Omega} u\Delta\nu - \nu\Delta u = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\nu}{\partial\nu} - \int\limits_{\partial\Omega} \nu\frac{\partial u}{\partial\nu} dS$

Prova: Para a prova de (a) basta aplicar a fórmula da integração por partes a $uD_i\nu$. Para a prova de (b) basta trocar u por ν e ν por u gerando assim duas identidades, a identidade do item (a) e a identidade obtida através da troca, subtraindo essas duas identidades segue o item (b).

2.2 Teoria da Medida

Definição 2.1 *Uma coleção* $\mathbb{M}$ *de subconjuntos de* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é chamada* σ*-álgebra se*

(a) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathbb{M}$
(b) $J \in \mathbb{M}$ *então* $\mathbb{R}^n \setminus J \in \mathbb{M}$
(c) Se $\{A_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{M}$*, então* $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{M}$
o par $(X, \mathbb{M})$ é chamado de espaço mensurável e os seus elementos de conjuntos mensuráveis.

Definição 2.2 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Dizemos que* f *é uma função mensurável se*

$$f^{-1}(\Omega) \in \mathbb{M}$$

para cada conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}$*.*

Definição 2.3 *Uma medida no espaço mensurável* $(X, \mathbb{M})$ *é uma função* $\mu : \sigma \to [0, \infty]$ *que satisfaz as seguintes condições*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$
(b) Se $(A_k)_{k\geqslant 1}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois, então*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

A medida μ é finita se $\mu(X) < \infty$. O terno (X, Σ, μ) é chamado de espaço de medida.

Definição 2.4 *Dizemos que uma propriedade* (P) *no conjunto* X *vale em quase todo ponto* $(q.t.p)$ *de* X *se*

$$m(Y) = m(\{y \in X; \neg P\}) = 0$$

2.2.1 Espaços L^p

Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ tais que

$$||u||_{L^p(X,\Sigma,\mu)} = \left(\int\limits_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad para \quad 1 \leqslant p < \infty$$

é definido como o espaço $L^p(X, \Sigma, \mu)$. Se $p = 1$ dizemos que a função f é integrável.

Definição 2.5 *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é dita localmente integrável se*

$$\int_K |f(x)|dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset X$*, simbolizamos isso dizendo que* $f \in L^1_{loc}(X)$*. Para* $1 < p < \infty$ *a definição é análoga.*
O caso $p = \infty$ é o conjunto das funções mensuráveis em X tais que

$$||u||_{L^\infty(X,\Sigma,\mu)} = \inf\{c \geqslant 0; m(\{x \in X; |f(x)| > C\}) = 0\} < \infty$$

isto é, o espaço $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ é o conjunto das funções limitas q.t.p.

2.2.2 Convolução e suavidade

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $\epsilon > 0$, escrevemos

$$\Omega_\epsilon \coloneqq \{x \in \Omega; \mathrm{dis}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$$

Definição 2.6 *(a) Seja* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *definido por*

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & se\ |x| < 1 \\ 0, & se\ |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

onde C *é uma constante tal que* $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$

(b) Para cada $\epsilon > 0$ *definimos*

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta(\frac{x}{\epsilon})$$

Chamamos η *o mollifier standard. As funções* η_ϵ *são suaves e satisfazem*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon dx = 1, \quad supp(\eta_\epsilon) \subset B_\epsilon(0)$$

Definição 2.7 *Se* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é localmente integrável, defina a molificão de* f *como*

$$f_\epsilon \coloneqq \eta_\epsilon * f \quad em \quad \Omega_\epsilon$$

isto é

$$f_\epsilon(x) = \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y)f(x-y)dy$$

para todo $x \in \Omega_\epsilon$.

Proposição 2.1 *Seja* f *como acima, então*

(a) $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$
(b) $f_\epsilon \to f$ *q.t.p quando* $\epsilon \to 0$.

Prova: Veja em Evans [5] página 714.

2.2.3 Teoremas de Convergência de Integrais

Teorema 2.5 *(Lemma de Fatou) Assuma que* $\{f_k\}_{k\geqslant 1}$ *é uma sequência de funções mensuráveis não-negativa, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Prova: Veja em Stein e Shakarchi [15] página 61.

Teorema 2.6 *(Teorema da Convergência Dominada) Seja* $\{f_k\}_{k\geqslant 1}$ *seja uma sequência de funções mensuráveis em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $f_k \to f$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^n$. *Se existe uma função* g *integrável tal que* $|f_k| \leqslant g$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^n$ *para todo* k, *então*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Prova: Veja em Stein e Shakarchi [15] página 67.

2.2.4 Diferenciação

Teorema 2.7 *(Teorema da Diferenciação de Lebesgue) Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *localmente integrável, então para quase todo ponto* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *vale*

$$⨍_{B_r(x_0)} f(x) \to f(x_0) \quad \text{quando} \quad r \to 0.$$

Prova: Veja em Stein e Shakarchi [15] página 104.

2.3 Coordenadas Polares

Teorema 2.8 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *contínua e localmente integrável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f dS \right) dr$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Em particular, vale*

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B_r(x_0)} f dx \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f dS$$

para cada $r > 0$.

Prova: Veja em Folland [6] página 78.

2.4 Algumas desigualdades úteis

(a) **Desigualdade de Cauchy**

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Prova: Basta notar que $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geqslant 0$.

(b) **Desigualdade de Cauchy com** ϵ

$$ab \leqslant \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \quad (a, b > 0, \epsilon > 0).$$

Prova: Note que

$$ab = ((2\epsilon)^{\frac{1}{2}} a)\left(\frac{b}{(2\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

e aplique a desigualdade de Cauchy.

(c) **Desigualdade de Young** - Seja $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

Prova: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dado por $f(x) = e^x$ é estritamente convexa pois

$f''(x) = e^x > 0$, segue que

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \leqslant \frac{1}{p}e^{\log a^p} + \frac{1}{q}e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(d) **Desigualdade de Young com ϵ**

$$ab \leqslant \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q \quad (a, b > 0, \epsilon > 0)$$

para $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p}q^{-1}$.

Prova: Escreva

$$ab = ((p\epsilon)^{\frac{1}{p}}a)\left(\frac{b}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}}\right)$$

e aplique a desigualdade de Young.

(e) **Desigualdade de Hölder** - Assuma que $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega |fg|dx \leqslant ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q.(\Omega)}$$

Prova: Veja em Evans [5] página 707.

(f) **Desigualdade de Minkowski** Assuma $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$. Então

$$||f + g||_{L^p(\Omega)} \leqslant ||f||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Veja em Evans [5] página 707.

(g) **Desigualdade de Hölder Generalizada** - Sejam $1 \leqslant p_1, \ldots, p_m \leqslant \infty$, com $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$, e assuma que $f_k \in L^p(\Omega)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Então

$$\int_\Omega \left|\prod_{i=1}^n f_k\right| \leqslant \prod_{i=1}^n ||f_k||_{L^p(\Omega)}.$$

Prova: Veja em Evans [5] página 707.

(h) **Desigualdade de Interpolação** - Assuma que $1 \leqslant m \leqslant l \leqslant n \leqslant \infty$ e

$$\frac{1}{l} = \frac{\theta}{m} + \frac{1-\theta}{n}$$

Suponha também que $f \in L^m(\Omega) \cap L^n(\Omega)$. Então $f \in L^l(\Omega)$, e

$$\|u\|_{L^l(\Omega)} \leqslant \|u\|^{\theta}_{L^m(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^n(\Omega)}.$$

.

Prova: Veja em Evans [5] página 708.

2.5 Espaços de Sobolev

2.5.1 Espaços de Hölder

Definição 2.8 *Dizemos que* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *é Hölder Contínua de expoente* γ *se*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^{\gamma} \quad (x, y \in \Omega)$$

para alguma constante $0 < \gamma \leqslant 1$.

Definição 2.9 *O espaço de Hölder*

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$$

consiste em funções u *que são* k*-vezes continuamente diferenciáveis e cuja sua* k*-pesima derivada parcial seja limitada e Hölder contínua de expoente* γ.

Definição 2.10 *(Derivadas Fracas) Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* α *um multi-índice dado. Uma função* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *será chamada de* $\alpha-$*ésima derivada fraca de* u *se vale a seguinte identidade*

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx.$$

Para todas as funções $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. *Neste caso denotaremos* $D^{\alpha} u = v$.

Observação 2.1 *Observe que* $D^{\alpha} u$ *é unica a menos de um conjunto de medida nula.*

Definição 2.11 *(Espaço de Sobolev) Seja* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *definimos o espaço de Sobolev*

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D_i u \in L^2(\Omega)\}$$

aqui as derivadas são tomadas no sentido fraco e as mesmas pertencem a $L^2(\Omega)$. *Como notação para este espaço iremos usar* $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Definição 2.12 *O espaço* $H_0^1(\Omega)$ *é definido como*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)} \ \ em \ \ H^1(\Omega).$$

2.5.2 Desigualdades de Sobolev

Definição 2.13 *Se* $1 \leqslant p < n$, *o conjugado de Lebesgue de* p *é definido como*

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Teorema 2.9 *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Assuma que* $1 \leqslant p < n$. *Existe uma constante* C, *que depende apenas de* n *e* p, *tal que*

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todas as funções $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Prova: Veja em Evans [5] página 277.

Teorema 2.10 *(Estimativas para* $W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leqslant p < n$*) Assuma* Ω *limitado e aberto. Suponha que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *para algum* $1 \leqslant p < n$. *Então vale a estimativa*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leqslant C||Du||_{L^p(\Omega)}$$

para cada $1 \leqslant q \leqslant p^*$, *e a constante* C *depende de* p, q, n.

Prova: Veja em Evans [5] página 280.

Definição 2.14 *Para todo conjunto* $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$(u)_E = \fint_E u dx.$$

Teorema 2.11 *(Desigualdade de Poincaré em uma bola) Assuma que* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então existe uma constante* C, *que depende de* n *e* p, *tal que*

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B_r(x))} \leqslant Cr\|Du\|_{L^p(B_r(x))}$$

para todo bola $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ *e cada função* $W^{1,p}(B_r^0(x))$.

Prova: Veja em Evans [5] página 291.

Teorema 2.12 *(Desigualdade de Poincaré em* $W^{1,p}(\Omega)$*) Assuma que* $1 \leqslant p < \infty$ *e seja* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *um domínio de extensão conexa para* $W^{1,p}(\Omega)$ *de medida finita. Seja* $E \subset \Omega$ *um conjunto mensurável a Lesbgue de medida positiva. Então existe uma constante* C *positiva, dependendo de* p, Ω, E *tal que para toda função* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *vale*

$$\int\limits_{\Omega} |u(x) - u_E|^p \leqslant C \int\limits_{\Omega} |Du(x)|^p dx.$$

Prova: Veja em Leoni [12] página 361.

3 FUNÇÕES HARMÔNICAS

3.1 Propriedade do Valor Médio

Assuma que Ω é um domínio limitado.

Definição 3.1 - *Dizemos que* $u \in C(\Omega)$ *satifaz a propriedade do valor médio se valem as seguintes igualdades*

a)
$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \text{ para qualquer } B_r(x) \subset \Omega;$$

b)
$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int\limits_{B_r(x)} u(y) dy \text{ para qualquer } B_r(x) \subset \Omega$$

Observe que na definição (3.1), a) e b) são equivalentes.

De a), temos

$$u(x) n r^{n-1} = \frac{1}{\alpha_n} \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y.$$

Integrando com relação a variável r, temos

$$\begin{aligned} s^n u(x) &= \int_0^s u(x) n r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_0^s \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y dr \\ &= \frac{n}{\omega_n} \int\limits_{B_s(x)} u(y) dy \end{aligned}$$

fazendo $r = s$, segue que $a)$ implica $b)$.
De b), temos

$$u(x) r^n = \frac{n}{\omega_n} \int\limits_{B_r(x)} u(y) dy$$

derivando em ambos os lados com relação a r

$$nr^{n-1}u(x) = \frac{n}{\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dy$$

assim

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dy.$$

Observação 3.1 *A partir do teorema de mudança de variáveis para integrais podemos reescrever* $a)$ *e* $b)$ *como*
a')

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x+rw)dS_w \text{ para qualquer } B_r(x) \subset \Omega;$$

b')

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n} \int_{|w|\leqslant 1} u(r+rw)dw \text{ para qualquer } B_r(x) \subset \Omega.$$

Proposição 3.1 *Se* $u \in C(\overline{\Omega})$ *satisfaz a propriedade do valor médio em* Ω *então* u *assume o seu máximo e mínimo somente em* $\partial\Omega$ *a menos que* u *seja constante.*

Prova: Considere o conjunto

$$\Sigma = \{x \in \Omega; u(x) = M = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)\}.$$

É claro que Σ é fechado em Ω pois $\Sigma = u^{-1}(\{M\})$ e $u \in C(\overline{\Omega})$. Mostremos agora que Σ é aberto, para todo $x_0 \in \Sigma$, tome $B_r(x_0) \subset \Omega$ para algum $r > 0$. Então, pela propriedade do valor médio temos

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy \leqslant M \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} dy = M$$

$$0 \leqslant \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} (M - u(y))dy \leqslant 0.$$

Isso implica que

$$\frac{n}{\omega_n r^n} \int\limits_{B_r(x_0)} (M - u(y))dy = 0. \tag{3.1.1}$$

Mas $u(y) \leqslant M$ então, se $u(y) < M$, temos

$$\int\limits_{B_r(x_0)} (M - u(y)) > 0$$

contrariando (3.1.1) daí $u \equiv M$ em $B_r(x_0)$, isto é, $B_r(x_0) \subset \Sigma$. Como Σ é aberto e fechado em Ω e este é conexo, segue que $\Sigma = \Omega$.

Definição 3.2 *Uma função* $u \in C^2(\Omega)$ *é harmônica se* $\Delta u = 0$.

Teorema 3.1 *Seja* $u \in C^2(\Omega)$ *harmônica em* Ω*. Então* u *satisfaz a propriedade do valor médio em* Ω*.*

Prova: Seja qualquer $B_r(x) \subset \Omega$. Então para todo $\theta \in (0, r)$, aplicamos o teorema da divergência em $B_\theta(x)$ e obtemos

$$\int_{B_\theta(x)} \Delta u(y)dy = \int_{\partial B_\theta} Du(y) \cdot \nu dS. \tag{3.1.2}$$

Onde ν é o vetor normal exterior à esfera $\partial B_\theta(x)$. Agora, pelo teorema da mudança de variáveis temos que:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_\theta(x)} \Delta u(y)dy = &= \theta^{n-1} \int\limits_{|w|=1} Du(x+\theta w) \cdot \nu dS_w \\
&= \theta^{n-1} \int\limits_{|w|=1} \frac{\partial}{\partial \theta} u(x+\theta w)dS_w \\
&= \theta^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_{|w|=1} u(x+\theta w)dS_w.
\end{aligned}$$

Note que acima usamos a definição de derivada direcional e o teorema da convergência dominada. Agora, como u é harmônica, temos que $\Delta u = 0$ e assim para cada $\theta \in (0, r)$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_{|w|=1} u(x+\theta w)dS_w = 0.$$

Integrando com relação a θ no intervalo $(0, r)$, temos:

$$\int_0^r \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{|w|=1} u(x + \theta w) dS_w = 0$$

pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w - \int_{|w|=1} u(x) dS_w = 0$$

portanto

$$\int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w = \omega_n u(x)$$

assim, concluímos que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w.$$

3.2 Regularidade

Segundo a definição dada na seção anterior, as funções harmônicas aqui tratadas têm pelo menos todas as derivadas de ordem 2 contínuas. Iremos mostrar agora que vale mais ainda, toda função harmônica é suave.

Teorema 3.2 *Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz a propriedade do valor médio, então u é suave e harmônica em Ω.*

Prova: Se $\Delta u \neq 0$, então existe $B_r(x) \subset \Omega$ tal que $\Delta u > 0$ em $B_r(x)$. Portanto

$$0 < \int_{B_r(x)} \Delta u(y) = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_n u(x)) = 0.$$

Contradição, daí $\Delta u = 0$ em Ω. Agora mostramos que u é suave. Para isso , seja η o molifier standart, que é uma função radial segundo a sua definição. Considerando $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$ a molificação de u em $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega; dis(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$. A idéia é mostrar que $u \equiv u^\epsilon$ em Ω_ϵ pois como sabemos $u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

$$
\begin{aligned}
u^{\epsilon}(x) = \int\limits_{B_\epsilon(x)} u(y)\eta_\epsilon(x-y)dy &= \frac{1}{\epsilon^n}\int\limits_{B_\epsilon(x)} \eta(\frac{x-y}{\epsilon})u(y)dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \int\limits_{\partial B_r(x)} \eta(\frac{|x-y|}{\epsilon})u(y)dS_y dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta(\frac{r}{\epsilon})\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta(\frac{r}{\epsilon})u(x)n\alpha(n)r^{n-1}dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}u(x)\int_0^\epsilon \eta(\frac{r}{\epsilon})\int\limits_{\partial B_r(0)} dS_y dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}u(x)\int\limits_{B_\epsilon(0)} \eta(\frac{|y|}{\epsilon})dy \\
&= u(x)\int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y)dy = u(x).
\end{aligned}
$$

Assim $u^\epsilon \equiv u$ em Ω_ϵ, portanto $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. Como Ω_ϵ se aproxima de Ω quando $\epsilon \to 0$ e o conceito de diferenciabilidade é local, segue então que $u \in C^\infty(\Omega)$.

Agora discutiremos o fato que toda função harmônica é analítica, para isso começamos falando sobre as estimativas das derivadas de uma função harmônica.

Proposição 3.2 *Assuma que u é harmônica em Ω. Então*

$$|D^\beta u(x_0)| \leqslant \frac{C_k}{r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \tag{3.2.1}$$

para cada bola $B_r(x_0) \subset \Omega$ e cada multi-índice α de ordem $|\alpha| = k$. Aqui

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)} \tag{3.2.2}$$

para $k = 1, 2, \ldots$

Prova: Para o caso $k = 0$, temos pela fórmula do valor médio que

$$
\begin{aligned}
|D^{\beta}u(x_0)| = |u(x_0)| &= \Big| \fint_{B_r(x_0)} u(y)dy \Big| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B_r(x_0)} |u(y)|dy \\
&= \frac{C_0}{r^n} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.
\end{aligned}
$$

Para o caso $k = 1$, temos que $D^{\beta}u(x_0) = D_i u$ para algum $i = 1, 2, \ldots$. Daí como $\Delta u = 0$, temos que $\Delta D_i u = 0$, isto é, $D_i u$ é uma função harmônica em Ω. Logo, pela fórmula do valor médio

$$
\begin{aligned}
|D_i u(x_0)| = &= \Big| \fint_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} D_i u(x)dx \Big| \\
&= \Big| \frac{2^n n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u\nu^i dS \Big|.
\end{aligned}
$$

Note que acima usamos o teorema de Gauss-Green. Assim usando a desigualdade de Hölder, concluimos:

$$
|D_i u(x_0)| \leqslant \frac{2n}{r} \|u\|_{L^{\infty}(\partial B_{\frac{r}{2}}(x_0))}. \tag{3.2.3}
$$

Veja que se $x \in \partial B_{\frac{r}{2}}(x_0)$, então $B_{\frac{r}{2}}(x) \subset B_r(x_0) \subset \Omega$ e então

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &\leqslant \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{B_{\frac{r}{2}}(x)} |u(y)|dy \\
&\leqslant \left(\frac{2}{r}\right)^n \frac{1}{\alpha(n)} \int_{B_r(x_0)} |u(y)|dy
\end{aligned} \tag{3.2.4}
$$

de (3.2.3), temos que

$$
|D^{\beta}u(x_0)| \leqslant \frac{2n}{r} \|u\|_{L^{\infty}(\partial B_{\frac{r}{2}}(x_0))}
$$

usando a definição da norma L^{∞} em (3.2.4)

$$
|D^{\beta}u(x_0)| \leqslant \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} = \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.
$$

Se $|\beta| = 1$. Assuma agora que $k \geqslant 2$, e que (3.2.1) e (3.2.2) sejam válidas para todo multi-índice de ordem menor ou igual a $k-1$. Fixe $B_r(x_0) \subset \Omega$ e seja α um multi-índice de ordem menor ou igual a k. Então $D^\beta u = D_i(D^\gamma u)$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $|\gamma| = k-1$. Agora, usando a hipótese de indução temos:

$$|D^\beta u(x_0)| = |D_i(D^\gamma u)| \leqslant \frac{nk}{r} \|D^\gamma u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{k}}(x_0))}. \tag{3.2.5}$$

Veja que se $x \in \partial B_{\frac{(k-1)r}{k}}(x)$, então $B_{\frac{(k-1)r}{k}}(x) \subset B_r(x_0) \subset \Omega$. Como (3.2.1) e (3.2.2) valem para $k-1$, segue que

$$|D^\beta u(x_0)| \leqslant \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \tag{3.2.6}$$

de (3.2.5) e (3.2.6)

$$|D^\beta u(x_0)| \leqslant \frac{nk}{r} \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Assim,

$$|D^\beta u(x_0)| \leqslant \frac{nk2^{(n+1)(k-1)}n^{k-1}(k-1)^{(k-1)}}{\alpha(n)(k-1)^{(n+k-1)}r^{n+k}} k^{n+k-1} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

E logo conlui-se que:

$$|D^\beta u(x_0)| \leqslant \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Veremos agora que não existem funções harmônicas limitadas, a menos que as mesmas sejam constantes. Esse fato é conhecido como

Teorema 3.3 *(Liouville) Suponha que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é harmônica e limitada. Então u é constante em Ω.*

Prova: Fixe $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ e aplique a proposição 3.2 a $B_r(x_0)$

$$|D(x_0)| \leqslant \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)r^{n+1}} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy.$$

Por hipótese, u é limitada, isto é, existe $M > 0$ real tal que $|u(x)| \leqslant M$, $\forall x \in \Omega$ e assim:

$$|Du(x_0)| \leqslant \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)r^{n+1}} M\alpha(n)r^n = \frac{2^{n+1}n}{r} M. \tag{3.2.7}$$

Fazendo $r \to \infty$ em (3.2.7), segue que $Du = 0$, logo u é constante em Ω.

Veremos agora que toda função harmônica é analítica, isto é, a função u pode ser representada por uma série de potências convergente em uma vizinhança de um ponto $x_0 \in \Omega$.

Teorema 3.4 *Assuma que* u *é harmônica em* Ω. *Então* u *é analítica em* Ω.

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$ e $4r := \mathtt{dist}(x_0, \partial\Omega)$, então $M := \frac{1}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B_{2r}(x_0))} < \infty$, pois u é harmônica, logo suave e assim a função $|u|$ é contínua em $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, logo integrável. Agora note que $B_r(x) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ para $x \in B_r(x_0)$. Da proposição (3.2), temos:

$$|D^\beta u(x_0)| \leqslant \frac{C_k}{r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Usando a definição de norma L^∞ e o valor de C_k dado por (3.2.2), temos

$$\|D^\beta u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leqslant \frac{1}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.\Big(\frac{2^{n+1}n}{r}\Big)^{|\beta|}|\beta|^{|\beta|} \quad \leqslant \quad M\Big(\frac{2^{n+1}n}{r}\Big)^{|\beta|}|\beta|^{|\beta|}$$

Agora que que para cada k inteiro positivo temos $k^k/k! < Ce^k$, então $|\beta|^{|\beta|} \leqslant Ce^{|\beta|}|\beta|!$ para todo multi-índice β. Além disso, pelo teorema multinomial:

$$n^k = (1 + 1 + \cdots + 1)^k = \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!}$$

portanto

$$n^k \geqslant \frac{|\beta|!}{\beta!}$$

e assim

$$|\beta|! \leqslant n^{|\beta|}\beta!.$$

Usando isso na estimativa para a norma L^∞ de $D^\beta u$

$$\begin{aligned}
\|D^\beta u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} &\leqslant CM\Big(\frac{2^{n+1}n}{r}\Big)^{|\beta|}e^{|\beta|}|\beta|! \\
&\leqslant CM\Big(\frac{2^{n+1}n}{r}\Big)^{|\beta|}e^{|\beta|}n^{|\beta|}\beta! \\
&= CM\Big(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\Big)^{|\beta|}\beta!.
\end{aligned}$$

Queremos mostrar agora que a série de Taylor de u em x_0

$$\sum_{\beta} \frac{D^\beta u(x_0)}{\beta!}(x-x_0)^\beta \tag{3.2.8}$$

sobre todos os multi-índices β, é convergente desde que

$$|x-x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3 e}.$$

Para provarmos isso, calculemos para cada n o termo resto da série (3.2.8)

$$r_p(x) := \sum_{|\beta|=p} \frac{D^\beta u(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)^\beta}{\beta!} \tag{3.2.9}$$

para algum $0 \leqslant t \leqslant 1$, onde $t = t(x)$, com efeito

$$\begin{aligned}
|r_p(x)| &\leqslant \sum_{|\beta|=p} \frac{|D^\beta u(x_0+t(x-x_0))||(x-x_0)^\beta|}{\beta!} \\
&\leqslant \sum_{|\beta|=p} CM\Big(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\Big)^{|\beta|}\beta!\frac{|x-x_0|^{|\beta|}}{\beta!} \\
&\leqslant CM\sum_{|\beta|=p}\Big(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\Big)^{p}\Big(\frac{r}{2^{n+2}n^3 e}\Big)^{p} \\
&\leqslant CM\sum_{|\beta|=n}\frac{1}{(2n)^p} \\
&= CM\frac{1}{(2n)^p}n^p
\end{aligned}$$

fazendo $p \to \infty$, segue que $CM\frac{1}{2^p} \to 0$.

Afim de finalizar essa seção vamos mostrar que os valores de toda função harmônnica não-negativa em um domínio V são comparáveis, desde que $\Gamma \subset\subset \Omega$, lembremos que $\Gamma \subset\subset \Omega$ quer dizer que $\Gamma \subset \bar{\Gamma} \subset \Omega$ e $\bar{\Gamma}$ é compacto.

Teorema 3.5 *(Desigualdade de Harnack) Para todo domínio $\Gamma \subset\subset \Omega$, existe uma constante C, que depende somente de Γ, tal que*

$$\sup_{\Gamma} u \leqslant C \inf_{\Gamma} u$$

Em particular,

$$\frac{1}{C}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y)$$

para todos $x, y \in \Gamma$.

Prova: Seja $r \coloneqq \frac{1}{4}\mathtt{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$. Escolha agora $x, y \in \Gamma$ tais que $|x - y| \leqslant r$, vale a desigualdade

$$u(x) = \fint_{B_{2r}(x)} u(z)dz \geqslant \frac{1}{\omega_n (2r)^n} \int_{B_r(y)} u(z)dz = \frac{1}{2^n}u(y)$$

o que implica

$$\sup_{B_r(y)} u \leqslant 2^n \sup_{B_r(y)} u.$$

Como Γ é conexo e $\overline{\Gamma}$ é compacto, o teorema de Borel-Lebesgue garante que podemos cobrir $\overline{\Gamma}$ com um número finito de bolas abertas $B_1, B_2, \ldots, B_p$ de raio p tais que $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, \ldots, p-1$. Daí

$$u(x) \geqslant \frac{1}{2^{pn}}u(y)$$

para todos $x, y \in \Gamma$.

Vamos finalizar essa seção falando de uma condição necessária e suficiente para caraterizar uma função harmônica.

Teorema 3.6 *Suponha que* $u \in C(\Omega)$, *então u é harmônica se, e somente se,*

$$\int_\Omega u\Delta\rho = 0 \text{ para qualquer } \rho \in C_0^2(\Omega). \tag{3.2.10}$$

Prova: Se u é harmônica, a segunda identidade de Green nos diz que:

$$\int_\Omega u\Delta\rho - \underbrace{\rho\Delta u}_{=0} = \int_{\partial\Omega} uD\rho \cdot N - \int_{\partial\Omega} \rho Du \cdot N$$

onde N é o normal exterior ao bordo de Ω. Então, como $\rho \in C_0^2(\Omega)$, segue que $\rho \equiv 0$ em $\partial\Omega$ e assim

$$\int_{\Omega} u\Delta\rho = 0.$$

Reciprocamente se vale (3.2.10), então afirmamos que se $B_r(x) \subset \Omega$, temos

$$r \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y) = n \int_{B_r(x)} u(y)dy. \tag{3.2.11}$$

Pois se vale isso

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y)\Big) &\underbrace{=}_{(3.2.11)} \frac{d}{dr}\Big(\frac{n}{n\alpha(n)r^{n}} \int_{B_r(x)} u(y)dy\Big) \\
&= \frac{n}{\omega_n}\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} u(y)dy\Big) \\
&= \frac{n}{\omega_n}\Big(\frac{-nr^{n-1}}{r^{2n}} \int_{B_r(x)} u(y)dy + \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y)\Big) \\
&= \frac{n}{\omega_n}\Big(\frac{-n}{r^{n+1}} \int_{B_r(x)} u(y)dy + \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y)\Big) \\
&\underbrace{=}_{(3.2.11)} \frac{n}{\omega_n}\Big(\frac{-r}{r^{n+1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y) + \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y)\Big) \\
&= \frac{n}{\omega_n}\Big(\frac{-1}{r^{n}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y) + \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y)\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com isso, conluímos que

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS(y) = \text{constante}$$

agora note que,

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y - u(x) \Big| &\leqslant \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} |u(y) - u(x)| \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

pois $|u(x) - u(y)| \leqslant \epsilon$ sempre que $r = |x - y| < \delta$, em outras palavras mostramos que

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) = \lim_{r \to 0} \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = u(x)$$

portanto,

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) = u(x).$$

Logo u é harmônica em Ω.

Agora provamos a identidade (3.2.11), por simplicidade assumimos $x = 0$. Seja

$$\rho(y, r) = \begin{cases} (|y|^2 - r^2)^n, & |y| < r \\ 0, & |y| \geqslant r \end{cases}$$

e $\rho_k(y, r) = (|y|^2 - r^2)^{n-k}(2(n - k + 1)||y|^2 + n(|y|^2 - r^2))$ para $|y| \leqslant r$ e $k = 2, 3, \ldots, n$. Com um cálculo simples nas derivadas parciais podemos mostrar que $\rho(, r) \in C^2(\Omega)$, além disso note que:

$$\Delta_y \rho(y, r) = \begin{cases} 2n\rho_2(y, r), & |y| < r \\ 0, & |y| \geqslant r. \end{cases}$$

Mas por (3.2.10) obtemos:

$$\int\limits_{B_r(0)} u(y) \Delta_y \rho(y, r) dy = \int\limits_{B_r(0)} u(y) \rho_2(y, r) = 0$$

supondo que para $k = 2, 3, \ldots, n - 1$ vale

$$\int\limits_{B_r(0)} u(y) \rho_k(y, r) = 0 \tag{3.2.12}$$

mostramos a validade então para $k + 1$.

Derivando (3.2.12), com respeito a r, temos que:

$$\int\limits_{\partial B_r(0)} u(y) \rho_k(y, r) dy + \int\limits_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial \rho_k}{\partial r}(y, r) dy = 0$$

mas para $2 \leqslant k < n$, $\rho_k(y, r) = 0$ desde que $|y| = r$, daí

$$\int\limits_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial \rho_k}{\partial r}(y, r) dy = 0. \tag{3.2.13}$$

Como $\frac{\partial \rho_k}{\partial r}(y, r) = -2r\rho_{k+1}(y, r)(n - k + 1)$, temos

$$\int_{B_r(0)} -2r(n-k+1)\rho_{k+1}(y,r)u(y)dy = 0$$

o que mostra que

$$\int_{B_r(0)} \rho_{k+1}(y,r)u(y)dy = 0.$$

Para concluir fazemos $k = n-1$ em (3.2.12), e daí se $\rho_n(y, r) = (n+2)|y|^2 - nr^2$ então,

$$\int_{B_r(0)} ((n+2)^2|y|^2 - nr^2)u(y)dy = 0$$

derivando esta identidade com relação a r obtemos:

$$\int_{\partial B_r(0)} ((n+2)r^2 - nr^2)u(y)dS(y) = 2nr \int_{B_r(0)} u(y)dy.$$

e assim,

$$r\int_{\partial B_r(0)} u(y)dS(y) = n\int_{B_r(0)} u(y)dy.$$

3.3 Solução Fundamental Para a Equação de Laplace

Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$, uma vez que o laplaciano é invariante por rotações, é plausível esperar que a equação de Laplace tenha soluções radiais, isto é, funções u que satisfazem $\Delta u = 0$ tais que $u(x) = v(r)$, onde $r = |x - a|$, onde $a \in \mathbb{R}^n$. Veremos que a equação de Laplace possui apenas uma dessas, que será chamada de solução fundamental.

Vamos então procurá-la. Para isso, calculemos inicialmente o laplaciano de u. Temos

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$$

se $v \neq 0$. Assim $\Delta u = 0$ se, e somente se,

$$v'' + \frac{n-1}{r}v = 0.$$

. Resolvendo essa equação diferencial de 2ª ordem, obtemos para $r > 0$

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log(r), & n = 2 \\ c_3 + c_4 r^{2-n}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Onde c_i $\forall i = 1, 2, 3, 4$ são constantes. Feito isso, vamos exigir que a nossa função v possua singularidade e que satisfaça

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial v}{\partial r} dS = 1 \ para\ qualquer\ r > 0. \tag{3.3.1}$$

Assim, chegamos a seguinte definição

Definição 3.3 *A função* $\Gamma : R^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\Gamma(a, x) \coloneqq \Gamma(a - x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|a - x|, & n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n(2-n)} |a - x|^{2-n}, & n \geqslant 3 \end{cases}$$

é chamada solução fundamental da equação de Laplace.

Note que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ fixado, $\Gamma(a, x)$ é harmônica para $x \neq 0$ e a condição (3.3.1) é satisfeita, veja por exemplo, para o caso $n = 2$

$$\Delta_x \Gamma(a, x) = \frac{-1}{2\pi} (\frac{2-n}{|a - x|^2}).$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(a)} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(a, x) &= \int_{\partial B_r(a)} D\Gamma \cdot N \\ &= \int_{\partial B_r(a)} \frac{x - a}{2\pi r^2} \cdot \frac{a - x}{r} \\ &= \int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{2\pi r^2} r^2 = 1. \end{aligned}$$

Teorema 3.7 *Suponha que* Ω *é um domínio limitado em* $\mathbb{R}^n$ *e que* $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*. Então para qualquer* $a \in \Omega$ *vale*

$$u(a) = \int\limits_{\Omega} \Gamma(a,x)\Delta u(x)dx - \int\limits_{\partial\Omega} (\Gamma(a,x)\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(a,x))dS_x.$$

Prova: Vamos fazer a prova para o caso $n \geqslant 3$, o caso $n = 2$ tem o mesmo raciocínio. Aplicando a segunda identidade de Green a u e $\Gamma(a,.)$ no conjunto $\Omega \setminus B_r(a)$ para $r > 0$ pequeno, temos

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_r(a)} (\Gamma\Delta u - u\Delta\Gamma) = \int\limits_{\partial\Omega\cup\partial B_r(a)} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)dS_x. \tag{3.3.2}$$

Agora note que o vetor normal exterior a $\partial\Omega$ coincide com o vetor normal interior a $\partial B_r(a)$, e além disso Γ é harmônica em $\Omega \setminus B_r(a)$ assim

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_r(a)} \Gamma\Delta u = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)dS_x - \int\limits_{\partial B_r(a)} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)dS_x. \tag{3.3.3}$$

Fazendo $r \to 0$ em (3.3.3) temos

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma\Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right) - \lim_{r\to 0}\int\limits_{\partial B_r(a)} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)dS_x. \tag{3.3.4}$$

Para finalizar calculamos o limite na identidade (3.3.4). Para $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\partial B_r(a)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial n}dS_x\right| &\leqslant \frac{1}{|2-n|\omega_n}r^{2-n}\int\limits_{\partial B_r(a)} |Du\cdot n|dS_x \\
&\leqslant \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\int\limits_{\partial B_r(a)} |Du|dS_x \\
&\leqslant \frac{r}{(n-2)}\sup_{\partial B_r(a)}|Du| \to 0 \text{ quando } r \to 0.
\end{aligned}$$

Além disso, usando o fato que u é contínua vale que

$$\int_{\partial B_r(a)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(a)} u(x)dS_x \to u(a) \text{ quando } r \to 0.$$

Logo a identidade (3.3.4) fica

$$\int_{\Omega} \Gamma \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) dS_x + u(a).$$

Observação 3.2 *Na passagem* (3.3.4) *foi usado o teorema da convergência dominada no cálculo do limite*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\Omega \setminus B_r(a)} \Gamma \Delta u.$$

3.4 Funções de Green

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado. Seja $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. O teorema (3.7) diz que para qualquer $x \in \Omega$ vale

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(x,y) dS_y. \tag{3.4.1}$$

Então se u resolve o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

para $f \in C(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C(\partial\Omega)$ vale

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \Gamma(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(y) - \varphi(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(x,y) dS_y \tag{3.4.2}$$

Portanto a identidade (3.4.2) nos diz que u pode ser expressa em termos de f e φ, com um termo desconhecido, que é a derivada normal de u ao longo de $\partial\Omega$. Afim de solucionar o problema de Dirichlet, devemos eliminar esse termo a partir de um ajuste na solução fundamental.

Considere qualquer $x \in \Omega$ fixado e defina

$$\gamma(x,y) = \Gamma(x,y) + \phi(x,y)$$

para toda função $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ com $\Delta_y \phi(x,y) = 0$ em Ω. Escolhido essa função o teorema (3.7) pode ser escrito como

$$u(x) = \int_{\Omega} \gamma(x,y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \big(\gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y)\frac{\partial \gamma}{\partial n_y}(x,y)\big)dS_y. \tag{3.4.3}$$

Já que $\phi(x,.)$ é harmônica. Agora se escolhermos $\phi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que para cada $x \in \Omega$

$$\begin{cases} \Delta_y \phi(x,y) = 0, & y \in \Omega \\ \phi(x,y) = -\Gamma(x,y) & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A função γ resultante é chamada função de Green e será denotada por G. Se tal G existe, então a solução do problema de Dirichlet pode ser expressa como

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy - \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial G}{\partial n_y}. \tag{3.4.4}$$

A função de Green $G(x,y)$ é definida em função de $y \in \overline{\Omega}$ para cada $x \in \Omega$ fixado. A primeira observação sobre funções de Green, e que caso existam, esssas funções são únicas. Com efeito, suponha o contrário, isto é existem $G_1(x,y) = \Gamma(x,y) + \phi_1(x,y)$ e $G_2(x,y) = \Gamma(x,y) + \phi_2(x,y)$, então G_1 e G_2 são funções harmônicas na variável y e portanto, tomando $\zeta = G_1 - G_2$ e usando o princípio do máximo concluímos que $G_1 = G_2$.

Proposição 3.3 *(Simetria das Funções de Green) Funções de Green são simétricas em* $\Omega \times \Omega$, *isto é,* $G(x,y) = G(y,x)$ *para* $x \neq y$ *em* Ω

Prova: Sejam $x_1, x_2 \in \Omega$ com $x \neq y$. Se tomarmos $r < d/2$, onde $d = |x_1 - x_2|$ $B_r(x_1) \cap B_r(x_2) = \emptyset$, pois se ocorresse o contrário, então $|x - x_1| < r$ e $|x - x_2| < r$, logo pela desigualdade triangular teríamos $d < r$, assim $d < r < d/2$ e assim $1/2 > 1$, absurdo. Feito isso, fixamos agora a notação $G_1(y) = G(x_1, y)$ e $G_2(y) = G(x_2, y)$. Aplicando a segunda fórmula de Green para as funções G_1 e G_2 na região $\Omega \setminus B_r(x_1) \cup B_r(x_2)$

$$\int_{\Omega\setminus B_r(x_1)\cup B_r(x_2)} G_1\Delta G_2 - G_2\Delta G_1 \quad = \int_{\partial(\Omega\setminus B_r(x_1)\cup B_r(x_2))} \Big(G_1\frac{\partial G_1}{\partial n} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big)dS.$$

Como a orientação dos vetor normal exterior a $\partial\Omega$ é contrária aos vetores normais de $\partial B_r(x_1)$ e $\partial B_r(x_2)$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial(\Omega\setminus B_r(x_1)\cup B_r(x_2))}\Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big)dS &= \int\limits_{\partial\Omega}\Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big)dS\\ &- \int\limits_{\partial B_r(x_1))}\Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big)dS\\ &- \int\limits_{\partial B_r(x_2)}\Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big)dS.\end{aligned}$$

Por hipótese G_i é harmônica para $y \neq x_i$, $i = 1, 2$ e se anula em $\partial\Omega$, assim

$$\int\limits_{\partial B_r(x_1)}\Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big)dS+\int\limits_{\partial B_r(x_2)}\Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big)=0. \tag{3.4.5}$$

Agora aplicamos a identidade de Green as funções Γ e G_2

$$\int\limits_{B_r(x_1)}\Gamma\Delta G_2-G_2\Delta\Gamma=\int\limits_{\partial B_r(x_1)}\Big(\Gamma\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\Big) \tag{3.4.6}$$

note agora que G_2 é harmônica para $y \neq x_2$ e Γ é harmônica para todo $x \neq y$ em particular $\Delta\Gamma = 0$ em $B_r(x)$ assim

$$\int\limits_{\partial B_r(x_1)}(\Gamma\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial\Gamma}{\partial n})=0. \tag{3.4.7}$$

Fazendo o mesmo raciocínio com as funções Γ e G_1, conclui-se que

$$\int\limits_{\partial B_r(x_1)}(G_1\frac{\partial\Gamma}{\partial n}-\Gamma\frac{\partial G_1}{\partial n})=0. \tag{3.4.8}$$

somando (3.4.7) e (3.4.8), obtemos uma identidade onde o lado esquerdo tem o mesmo limite que o lado esquerdo de (3.4.5) quadno $r \to 0$.

$$\int\limits_{\partial B_r(x_1)}(\Gamma\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial\Gamma}{\partial n})+\int\limits_{\partial B_r(x_1)}(G_1\frac{\partial\Gamma}{\partial n}-\Gamma\frac{\partial G_1}{\partial n})=0. \tag{3.4.9}$$

Para finalizar, observe que para $i = 1, 2$

$$\Big|\int_{\partial B_r(x_i)}\Gamma\frac{\partial G_i}{\partial n}\Big| \leqslant C\sup_{\partial B_r(x_i)}|\Gamma|r^{n-1}\to 0$$

quando $r \to 0$. Agora quando $i = 1, 2$

$$\Big| \int\limits_{\partial B_r(x_{i-1})} G_i \frac{\partial \Gamma}{\partial n} - G_i(x_{i-1}) \Big| \leqslant C \sup_{\partial B_r(x_{i-1})} |G_i| r^{n-1} + |G_i(x_{i-1})|$$

Daí quando $r \to 0$, segue que

$$\int\limits_{\partial B_r(x_{i-1})} G_i \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \to G_i(x_{i-1})$$

portanto, fazendo $r \to 0$ em (3.4.9) concluimos que

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1).$$

Proposição 3.4 *As funções de Green na bola* $B_R(0)$ *são dadas por*

(a) Para $n \geqslant 3$

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \Big(|x-y|^{2-n} - \Big| \frac{R}{|x|} x - \frac{|x|}{R} y \Big|^{2-n} \Big).$$

(b) Para $n = 2$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \Big(\log|x-y| - \log \Big(\frac{R}{|x|} x - \frac{|x|}{R} y \Big).$$

Prova: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ que faz $T(x) = R^2 x/|x|^2$, esta transformação tem um nome especial ela é chamada de inversão através da esfera $\partial B_R(0)$ que transforma o interior da bola $B_R(0)$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$. Usaremos a inversão para calcular a função de Green na bola $B_R(0)$. Assim, fixado $x \in B_R(0)$, precisamos encontrar uma função harmônica $\phi_x \in C^1(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$ solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_y \phi_x(y) = 0, & y \in B_R(0) \\ \phi_x(y) = -\Gamma(x-y), & y \in \partial B_R(0). \end{cases}$$

Se $y \neq 0$, poderíamos tomar ϕ_x como $-\Gamma$ exceto pelo fato de Γ possuir uma singularidade em y. Vamos mostrar que basta tomar a função abaixo para corrigir esse problema

$$\phi_x(y) = +\frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}}\Gamma\Big(\frac{R^2y}{|y|^2} - x\Big)$$

Note que ϕ_x é harmônica em $B_R(0)$, pois o laplaciano é invariante por translações. Além disso, sua única singularidade é $R^2y/|y|^2$ que é a imagem do ponto x pela inversão através da esfera $\partial B_R(0)$ logo não pertence a bola centrada na origem de raio R, agora note que

$$\Gamma\Big(\frac{|y|}{R}\Big(\frac{R^2y}{|y|^2} - x\Big)\Big) = -\frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}}\Gamma\Big(\frac{R^2y}{|y|^2} - x\Big)$$

basta usar a definição de Γ para $n \geqslant 3$.

Além disso para $y \in \partial B_R$

$$\Big|\frac{|y|}{R}\Big(\frac{R^2y}{|y|^2} - x\Big)\Big| = |x - y|$$

que nos mostra $\phi_x(y) = -\Gamma(x - y) \text{ em } \partial B_r(0)$. O caso para $n = 2$ é análogo.

Corolário 3.1 *Suponha que G é a função de Green da esfera. Então vale*

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R|x - y|^n}$$

para qualquer $x \in B_r$ *e* $y \in \partial B_R$.

Prova: Consideramos apenas o caso $n \geqslant 3$. Da proposição anterior, temos que a função de Green para a esfera é:

$$G(x, y) = \frac{1}{(2 - n)\omega_n}\left(|x - y|^{2-n} - \Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2}\left|y - \frac{R^2x}{|x|^2}\right|^{2-n}\right) \tag{3.4.10}$$

Derivando (3.4.10) com relação a y_i temos que para $x \in B_R$ e $y \in \partial B_R$

$$D_{y_i}G = \frac{y_i}{\omega_n R^2}\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n}.$$

Como $n_i = \frac{y_i}{R}$ para $|y| = R$, segue que

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} n_i D_{y_i} G(x,y) = \frac{1}{\omega_n R}\Big(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\Big). \tag{3.4.11}$$

A derivada da função de Green na direção normal a esfera de raio R vai ser denotada a partir de agora por $K(x,y)$ para $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ e será chamada de núcleo de Poisson, este goza das seguintes propriedades:

Proposição 3.5 *O núcleo de Poisson $K(x,y)$ para $x \in \Omega$ e $y \in \partial\Omega$ satisfaz*

(a) $K(x,y)$ *é uma função suave para* $x \neq y$*;*

(b) $K(x,y) > 0$ *para* $|x| < R$*;*

(c) $\int_{|y|=R} K(x,y)dS_y = 1$ *para* $|x| < R$

Prova: Os itens (a) e (b) são de fácil verificação, vamos mostrar o item (c), vimos que a solução do problema de Dirichlet pode ser expressa como

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y) + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)dS_y$$

Se $\Omega = B_R$, u é harmônica em B_R e $u = \varphi$ em ∂B_R então nos resta somente a segunda parcela da integral, daí

$$u(x) = \int_{\partial B_R} u(y)\frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}dS_y.$$

Fazendo agora $u = 1$ segue o resultado.

Teorema 3.8 *(Fórmula da Integral de Poisson) Para $\varphi \in C(\partial B_R(0))$, a função u definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\varphi(y)dS_y, & |x| < R \\ \varphi(x), & \text{em } |x| = R \end{cases}$$

satisfaz $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega)$ *e*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em}\Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prova: Veja em Biezuner [2], página 116.

Observação 3.3 *Note que se fizermos* $x = 0$ *na fórmula da integral de Poisson, temos*

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(y) dS_y$$

que é a propriedade do valor médio.

Lema 3.1 *(Desigualdade de Harnack) Suponha que* u *é harmônica em* $B_R(x_0)$ *e* $u \geqslant 0$. *Então, vale que*

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leqslant u(x) \leqslant \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0)$$

onde $r = |x - x_0| < R$.

Prova: Suponha que $x_0 = 0$ e $u \in C(\overline{B_R})$, pela fórmula da integral de Poisson, temos que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{R^2 - x^2}{|x-y|^n} dS_y$$

como $R - |x| \leqslant |x - y| \leqslant R + |x|$ para $|y| = R$, podemos conluir que

$$\frac{1}{\omega_n R} \frac{R-|x|}{R+|x|} \left(\frac{1}{R+|x|}\right)^{n-2} \int\limits_{\partial B_R} u(y) dS_y \quad \leqslant \quad u(x) \leqslant \frac{1}{\omega_n R} \frac{R+|x|}{R-|x|} \left(\frac{1}{R-|x|}\right)^{n-2} \int\limits_{\partial B_R} u(y) dS_y.$$

Usando a propriedade do valor médio vista na observação (3.3), segue o resultado.

Corolário 3.2 *Se* u *é uma função harmônica em* $\mathbb{R}^n$ *então* $u \equiv \text{constante}$.

Prova: Assumimos que $u \geqslant 0$ em $\mathbb{R}^n$. Tome qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e aplique a desigualdade de Harnack na bola $B_R(0)$ com $|x| < R$. Obtemos então que

$$\frac{1}{\omega_n R} \frac{R-|x|}{R+|x|} \left(\frac{1}{R+|x|}\right)^{n-2} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{1}{\omega_n R} \frac{R+|x|}{R-|x|} \left(\frac{1}{R-|x|}\right)^{n-2} u(0).$$

Colocando R em evidência na desigualdade acima, e fazendo $R \to \infty$, concluímos que

$$u(x) \equiv u(0) = c.$$

3.5 Princípios do Máximo

Veremos nessa seção como usar o princípio do máximo para obter estimativas interiores para o gradiente e a desigualdade de Harnack.

Teorema 3.9 *Suponha que* $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ *é uma função subharmônica em* B_1*, então vale*

$$\sup_{B_1} u \leqslant \sup_{\partial B_1} u.$$

Prova: Para cada $\epsilon > 0$ consideramos a função $u_\epsilon = u(x) + \epsilon |x|^2$ para $x \in B_1$, que tem como laplaciano

$$\Delta u_\epsilon = \Delta u + n\epsilon \geqslant n\epsilon > 0 \tag{3.5.1}$$

note que em (3.5.1) foi usado que a função u é subharmônica. Feito isso, suponha que u_ϵ tem um ponto de máximo no interior de B_1, logo

$$\Delta u_\epsilon \leqslant 0.$$

O que contraria (3.5.1), assim, seja $M = \max_{\partial B_1} u_\epsilon$, em particular

$$\sup_{B_1} u_\epsilon \leqslant \sup_{\partial B_1} u_\epsilon$$

mas vale que $u_\epsilon \geqslant u$, assim

$$\sup_{B_1} u \leqslant \sup_{B_1} u_\epsilon \leqslant \sup_{\partial B_1} u_\epsilon.$$

Usando a definição de u_ϵ

$$\sup_{B_1} u \leqslant \sup_{\partial B_1} u(x) + \epsilon |x|^2 \quad \leqslant \quad \sup_{\partial B_1} u(x) + \epsilon \sup_{\partial B_1} |x|^2.$$

Sendo ϵ arbitrário, fazemos $\epsilon \to 0$ e o resultado está provado.

Proposição 3.6 *Suponha que* u *é harmônica em* B_1*. Então vale*

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |Du| \leqslant c \sup_{\partial B_1} |u|$$

onde $c = c(n)$ *é uma constante positiva. Em particular para* $\alpha \in [0, 1]$*, vale*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha} \sup_{\partial B_1} |u|$$

para $x, y \in B_{\frac{1}{2}}$ *e* $C = C(n, \alpha)$ *é uma constante positiva.*

Prova: Um cálculo direto nos mostra que

$$\Delta(|Du|^2) = 2\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}u)^2 + \underbrace{2\sum_{i,j=1}^{n} D_i(\Delta u)D_i u}_{=0} = 2\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}u)^2 \qquad (3.5.2)$$

pois $\Delta u = 0$.

Assim (3.5.2) nos diz que u é subharmônica. Para prosseguirmos, precisamos de uma função cutt-off apropriada. Para cada $\varphi \in C_0^1(B_1)$

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi|Du|^2) &= \Delta\varphi|Du|^2 + 2D\varphi \cdot D(|Du|^2) + \Delta(|Du|^2)\varphi \\ &= \Delta\varphi|Du|^2 + 4\sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_{ij}u D_j u + 2\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij})^2. \end{aligned}$$

Usando agora a desigualdade de Cauchy com $\epsilon = \varphi/2$

$$4|D_i\varphi D_j u D_{ij}u| \leqslant \frac{2}{\varphi}|D_i\varphi D_j u|^2 + 2\varphi|D_{ij}u)|^2.$$

somando ambos os lados, temos que

$$4\sum_{i,j=1}^{n} |D_i\varphi D_j u D_{ij}u| \leqslant \frac{2}{\varphi}\sum_{i,j=1}^{n} |D_i\varphi D_j u|^2 + 2\varphi\sum_{i,j=1}^{n} |D_{ij}u|^2.$$

Com isso, temos a seguinte identidade

$$4\sum_{i,j=1}^{n} |D_i\varphi D_j u D_{ij}u| \leqslant \frac{2}{\varphi}|D\varphi|^2|Du|^2 + 2\varphi\Delta(|Du|^2)$$

de onde segue que

$$4\sum_{i,j=1}^{n}|D_i\varphi D_j u D_{ij}u| \geqslant -\frac{2}{\varphi}|D\varphi|^2|Du|^2 - 2\varphi\Delta(|Du|^2).$$

Finalmente temos uma estimativa para $\Delta(\varphi|Du|^2)$

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi|Du|^2) &\geqslant \Delta\varphi|Du|^2 - \frac{2}{\varphi}|D\varphi|^2|Du|^2 - 2\varphi\Delta(|Du|^2) + 2\varphi\Delta(|Du|^2)\\ &= \Big(\Delta\varphi - \frac{2}{\varphi}|D\varphi|^2\Big)|Du|^2.\end{aligned}$$

Para obter uma cota de $|D\varphi|^2/\varphi$ em B_1 escolhemos uma função cut-off $\varphi = \eta^2$ para alguma função $\eta \in C_0^2(B_1)$ e exigimos que $\eta \equiv 1$ em $B_{1/2}$. Com um cálculo direto, temos que:

$$\Delta(\eta^2|Du|^2) \geqslant (2\eta\Delta\eta - 6|D\eta|^2)|Du|^2 \geqslant -C|Du|^2$$

onde C é uma constante que depende apenas de η.

Note agora que $\Delta(u^2) = 2|Du|^2 + 2u\Delta u = 2|Du|^2$ já que por hipótese u é harmônica, agora tomamos α suficientemente grande para obtermos:

$$\begin{aligned}\Delta(\eta^2|Du|^2 + \alpha u^2) &= \Delta(\eta^2|Du|^2) + \alpha\Delta u^2\\ &\geqslant -C|Du|^2 + 2\alpha|Du|^2\\ &= (2\alpha - C)|Du|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Pelo princípio do máximo

$$\sup_{B_1}(\eta^2|Du|^2 + \alpha u^2) \leqslant \sup_{\partial B_1}(\eta^2|Du|^2 + \alpha u^2)$$

para finalizar a prova da estimativa interior note que

$$\begin{aligned}\sup_{B_1}(\eta^2|Du|^2) &\leqslant \sup_{B_1}(\eta^2|Du|^2+\alpha u^2)\\ &\leqslant \sup_{\partial B_1} C(\eta^2|Du|^2)+\alpha\sup_{\partial B_1} u^2.\end{aligned}$$

Lembre que $\eta = 1$ em $B_{1/2}$ e $\eta = 0$ em ∂B_1 e assim

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}}(|Du|)^2 \leqslant \alpha \sup_{\partial B_1} u^2$$

dessa estimativa, concluímos que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}}|Du| \leqslant c \sup_{\partial B_1} u.$$

Agora mostramos que nessas condições u é Hölder contínua. Sejam $x, y \in B_{1/2}$, sendo $B_{1/2}$ um conjunto convexo, vale que $(1-\alpha)x+\alpha y$ para $\alpha \in [0,1]$. Como u é suave, em particular continuamente diferenciável, temos pela desigualdade do valor médio que

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\leqslant |Du(x.(1-\alpha)+\alpha.y)|.|x-y|\\ &\leqslant |Du((1-\alpha)x+\alpha y)|.|x-y|^{\alpha}\\ &\leqslant \sup_{B_{\frac{1}{2}}}|Du||x-y|^{\alpha}.\end{aligned}$$

E pela estimativa interior que foi provada, segue que:

$$|u(x)-u(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha} \sup_{\partial B_1}|u|.$$

Afim de provar a desigualdade de Harnack precisamos do lema abaixo.

Lema 3.2 *Suponha que* u *é uma função harmônica não-negativa em* B_1. *Então deve valer*

$$\sup_{B_{1/2}}|D\log u| \leqslant C$$

onde $C = C(n)$ *é uma constante positiva.*

Prova: Seja $v = \log u$, então $\Delta v = (\Delta u)(1/u) - |Du|^2(1/u^2) = -|Du|^2 1/u^2 = -|Dv|^2$. Agora mostramos uma estimativa interior para o gradiente de v. Para isso seja $w = |Dv|^2$, então um cálculo direto demonstra que

$$\Delta w = 2\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}v)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} D_i v D_i(\Delta v)$$

$$\begin{aligned}
\Delta w + 2\sum_{i,j=1}^{n} D_i v D_i w &= 2\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}v)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} D_i v D_i(\Delta v) + 2\sum_{i,j=1}^{n} D_i v D_i w \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}v)^2 + 2\Big(\sum_{1}^{n} D_i v(D_i(\Delta v + w))\Big) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}v)^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} D_i v(-|Dv|^2 + |Dv|^2)\Big) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}v)^2.
\end{aligned}$$

Note agora que devido a média quadrática ser maior ou igual a média aritmética, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}v)^2 &\geqslant \sum_{i=1}^{n}(D_{ii}v)^2 \\
&\geqslant n\frac{(\sum_{i=1}^{n}(D_{ii}v))^2}{n^2} \\
&\geqslant \frac{(\Delta v)^2}{n}
\end{aligned}$$

portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}v)^2 \geqslant \frac{(\Delta v)^2}{n} = \frac{1}{n}|Dv|^4 = \frac{w^2}{n}.$$

Tome agora uma função não-negativa $\varphi \in C_0^1(B_1)$. Então com um cálculo direto podemos mostrar que

$$\Delta(\varphi w) = (\Delta\varphi)w + 4\sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_{ij}\nu D_j\nu + 2\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij})^2 + 2\varphi\sum_{i=1}^{n} D_i\nu D_i(\Delta\nu) \quad (3.5.3)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi w) + 2\sum_{i=1}^{n} D_i\nu D_i(\varphi w) &= (\Delta\varphi)w + 2\varphi\sum_{i=1}^{n} D_i\nu\underbrace{(\Delta\nu + w)}_{=0} + 4\sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_{ij}\nu D_j\nu \\
&+ 2w\sum_{i=1}^{n} D_i\nu D_i\varphi + 2\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}\nu)^2 \\
&= 2\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}\nu)^2 + 4\sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_{ij}\nu D_j\nu \\
&+ 2w\sum_{i=1}^{n} D_i\nu D_i\varphi + (\Delta\varphi)w.
\end{aligned}$$

Assim, conluímos que

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi w) + 2\sum_{i=1}^{n} D_i\nu D_i(\varphi w) &= 2\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}\nu)^2 + 4\sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_j\nu D_{ij}\nu \\
&+ 2w\sum_{i=1}^{n} D_i\nu D_i\varphi + (\Delta\varphi)w.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\left|4\sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_j\nu D_{ij}\nu\right| \leqslant 4\sum_{i,j=1}^{n}|D_i\varphi D_j\nu D_{ij}\nu|$$

novamente pela desigualdade de Cauchy com ϵ

$$\begin{aligned}
4\sum_{i,j=1}^{n}|(D_i\varphi D_j\nu)D_{ij}\nu| &\leqslant \varphi\sum_{i=1}^{n}(D_i\varphi)^2 + \frac{4}{\varphi}\sum_{i,j=1}^{n}(D_i\varphi)^2(D_j\nu)^2 \\
&\leqslant \varphi\sum_{i=1}^{n}(D_i\varphi)^2 + \frac{4}{\varphi}|D\varphi|^2|D\nu|^2.
\end{aligned}$$

Usando o resultado obtido a partir da desigualdade de Cauchy com ϵ (3.5.3) fica

$$\Delta(\varphi w) \geqslant \varphi \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}v)^2 - 2|D\varphi|^2|Dv|^3 + \Big(\Delta\varphi - 4\frac{|D\varphi|^2}{\varphi}\Big)|Dv|^2$$

se φ é escolhida de tal modo que $|D\varphi|^2/\varphi$ seja limitada em B_1. Escolha $\varphi = \eta^4$ para algum $\eta \in C_0^1(B_1)$. Assim para cada η fixado

$$\Delta(\eta^4 w) + 2\sum_{i}^{n} D_i v D_i(\eta^4 w) \geqslant \eta^4 \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}v)^2 - |D\eta^4||Dv|^3 - \Big(\Delta\eta^4 - 4\frac{|D\eta^4|}{\eta^4}\Big).$$

Efetuando as contas, temos que um cálculo direto das derivadas da função η nos dão o seguinte resultado

$$\begin{aligned}\Delta(\eta^4 w) + 2\sum_{i=1}^{n} D_i v D_i(\eta^4 w) &\geqslant \frac{1}{n}\eta^4|Dv|^4 - 8\eta^3|D\eta||Dv|^3 \\ &\quad + 4\eta^2(\eta\Delta\eta - 13|D\eta|^2)|Dv|^2\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

afim de faciliar os cálculos vamos chamar $t = \eta|Dv|$, assim (3.5.4) fica:

$$\Delta(\eta^4 w) \geqslant \frac{1}{2n}t^4 - 8|D\eta|t^3 + 4(\eta\Delta\eta - 13|D\eta|^2)t^2 \geqslant -C.$$

Onde C é uma constante positiva dependendo apenas de n e η. Agora suponha que $\eta^4 w$ atinge o seu valor máximo em um ponto $x_0 \in B_1$. Então $D(\eta^4 w) = 0$ e $\Delta(\eta^4 w) \leqslant 0$ em x_0, segue dessa suposição que

$$\Delta(\eta^4 w) + 2\sum_{i=1}^{n} D_i v D_i(\eta^4 w) \geqslant \frac{1}{2n}\eta^4 w^2 - C.$$

E assim

$$\eta^4 w^2(x_0) \leqslant C$$

onde C é uma constante positiva que depende de n e η. Agora, se $w(x_0) \geqslant 1$, então $\eta^4(x_0)w(x_0)w(x_0) \geqslant \eta^4(x_0)w(x_0)$, daí $\eta^4(x_0)w(x_0) \leqslant \eta^4(x_0)w(x_0)^2 \leqslant C$. Caso contrário $\eta^4(x_0)w(x_0) \leqslant \eta^4(x_0)$. Em ambos os casos

$$\eta^4(x_0)w(x_0) \leqslant \overline{C}.$$

Onde a constante $\overline{C}$ depende de n e η. Mas $w = |Dv|^2 = |D \log u|^2$, e assim

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}}(\eta^4 w) \leqslant \sup_{B_1}(\eta^4 w) \leqslant C \text{ em } B_1$$

mas em $B_{1/2}$, $\eta = 1$, daí

$$\sup_{B_{1/2}} w \leqslant C$$

Usando a definição de w obtemos

$$\sup_{B_{1/2}} |D \log u| \leqslant C.$$

Corolário 3.3 *Suponha que u é uma função harmônica não-negativa em B_1, então vale que*

$$u(x_1) \leqslant cu(x_2) \text{ para quaisquer } x,\ y \in B_{1/2}$$

onde c é uma constante positiva que depende apenas de n.

Prova: Como $B_{1/2}$ é convexa, dados $x_1, x_2 \in B_{1/2}$ distintos, vale que $tx_1+(1-t)x_2 \in B_{1/2}$, para $t \in [0, 1]$. Assim, pelo lema (3.2)

$$|D \log u(tx_1 + (1-t)x_2)| \leqslant \sup_{B_{1/2}} |D \log u| \leqslant C.$$

Multiplicando por $|x_1 - x_2|$

$$|x_1 - x_2||D \log u(tx_1 + (1-t)x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$$

de onde segue que

$$D \log u(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant C|x_1 - x_2|. \tag{3.5.5}$$

Integrando (3.5.5) em ambos os lados com relação a t no intervalo $[0, 1]$, temos

$$\log \frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leqslant C|x_1 - x_2|$$

elevando ambos os lados ao número de Euler e

$$\frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leqslant e^{C|x_1 - x_2|}$$

de onde concluímos que

$$u(x_1) \leqslant c u(x_2).$$

Proposição 3.7 *Suponha que* $u \in C(\overline{B_1})$ *é uma função harmônica em* B_1. *Se* $u(x) < u(x_0)$ *para qualquer* $x \in \overline{B_1} \setminus \{x_0\}$ *e para algum* $x_0 \in \partial B_1$, *então vale*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geqslant C_*(u(x_0) - u(0))$$

onde C_* *é uma constante positiva que só depende de* η. *Veja que em particular, a derivada na direção do normal exterior ao bordo de* B_1 *é estritamente positiva.*

Prova: Considere a função positiva definida em B_1, $v(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha}$. Veja que $\Delta v = e^{-\alpha|x|^2}(-2\alpha n + 4\alpha^2|x|^2)$. Queremos mostrar que v é subharmônica sob certas condições sobre α e $|x|$. Para isso, veja que, para qualquer $1/2 \leqslant |x| \leqslant 1$ e $\alpha \geqslant 2n + 1$ vale

$$\Delta v(x) = e^{-\alpha|x|^2}(-2\alpha n + 4\alpha^2|x|^2) > 0.$$

Assim para α fixado a função v é subharmônica na região $L = B_1 \setminus B_{1/2}$. Agora defina para cada $\epsilon > 0$ a função

$$h_\epsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x).$$

Essa função também é subharmônica em L pois, $\Delta h_\epsilon = \Delta u(x) + \epsilon\Delta v$, por hipótese u é harmônica em B_1, daí $\Delta h_\epsilon = \epsilon\Delta v > 0$ em L pois v é subharmônica nesse conjunto. Obviamente $h_\epsilon(x) \leqslant 0$ em ∂B_1 pois, por hipótese $u(x) - u(x_0) < 0$ para todo $x \in \partial B_1$, daí $h_\epsilon(x) < \epsilon v(x)$, agora note que se $x \in \partial B_1$ vale $v(x) = e^{-\alpha} - e^{-\alpha} = 0$. Portanto em ∂B_1 vale $h_\epsilon(x) \leqslant 0$. É claro que se $x_0 \in \partial B_1$ vale $h_\epsilon(x_0) = u(x_0) - u(x_0) + \epsilon v(x_0) = 0$.

Agora afirmamos que $u(x) < u(x_0)$ para $x \in \partial B_{1/2}$. O que também é óbvio, pois se $x \in \partial B_{1/2} \subset B_1$ então pela hipótese $u(x) < u(x_0)$. Agora mostremos que $h_\epsilon(x) < 0$ para $x \in \partial B_{1/2}$

$$h_\epsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x) \quad < \quad \epsilon v(x) = \epsilon \underbrace{e^{\frac{-\alpha}{4}} - e^{-\alpha}}_{>0}.$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno concluímos que $h_\epsilon(x) < 0$ em $\partial B_{1/2}$. Em resumo $h_\epsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x)$ é subharmônica em L, $h_\epsilon \leqslant 0$ em ∂B_1, $h_\epsilon(x_0) = 0$ e $h_\epsilon < 0$ em $\partial B_{1/2}$.

Pelo princípio do máximo, o máximo em h_ϵ é atingido em $\partial(B_1 \setminus B_{1/2}) = \partial B_1 \cup \partial B_{1/2}$, mas $x_0 \in \partial B_1$ é tal que $h_\epsilon(x) \leqslant h_\epsilon(x_0)$, $\forall\, x \in \partial B_1$, portanto x_0 é ponto de máximo de h_ϵ em L. Isso implica que

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \eta}(x_0) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geqslant -\epsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = 2\alpha\epsilon e^{-\alpha}. \tag{3.5.6}$$

Para justificar (3.5.6) note que, o gradiente de h_ϵ no ponto x_0 é perpendicular a ∂B_1, mas como $\eta = p$ onde $p \in \partial B_1$, então $Dh_\epsilon \parallel \eta$. Daí existe $c > 0$ tal que $\eta = cDh_\epsilon$. Portanto

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \eta}(x_0) = Dh_\epsilon(x_0) \cdot \eta = c|Dh_\epsilon(x_0)|^2 \geqslant 0.$$

Agora veja que

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \eta}(x_0) = \epsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) \geqslant 0$$

logo

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \geqslant -\epsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0).$$

Usando agora a definição de derivada direcional e o fato que $D\nu(x_0) = -2\alpha e^{-\alpha}$, segue

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geqslant 2\alpha e^{-\alpha}\epsilon > 0$$

por fim seja $w(x) = u(x_0) - u(x) > 0$ em B_1. É claro que w é harmônica em B_1. Pelo corolário (3.3) temos que

$$\inf_{B_{1/2}} w \geqslant cw(0) \quad \text{ou} \quad \sup_{B_{1/2}} u \leqslant u(x_0) + c(n)(u(x_0) - u(0)).$$

Assim, tomando

$$\epsilon = \delta c(n)(u(x_0) - u(0))$$

para δ pequeno dependendo de n, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geqslant C_*(u(x_0) - u(0)).$$

Para finalizar essa seção mostremos que que toda solução da equação de Laplace sob certas condições é Hölder contínua com expoente $\alpha/2$ com $\alpha \in (0,1)$

Teorema 3.10 *Suponha que* $u \in C(\overline{B_1})$ *é uma função harmônica em* B_1 *com* $u = \varphi$ *em* ∂B_1. *Se* $\varphi \in C^\alpha(\partial B_1)$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$, *então* $u \in C^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_1})$ *e vale a estimativa*

$$||u||_{C^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_1})} \leqslant C||\varphi||_{C^\alpha(\partial B_1)}$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de n e α.

Prova: Basta mostrarmos a seguinte desigualdade

$$\sup_{x\in B_1} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}}} \leqslant 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x\in \partial B_1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad \forall \quad x_0 \in \partial B_1. \tag{3.5.7}$$

Para $x, y \in B_1$ sejam $d_x = \mathrm{dist}(x, \partial B_1)$ e $d_y = \mathrm{dist}(y, \partial B_1)$. Suponha que $d_y \leqslant d_x$ e $|x-y| \leqslant d_x/2$. Tome $x_0, y_0 \in \partial B_1$ tais que $d_x = |x-x_0|$ e $d_y = |y-y_0|$. Assim

$y \in \bar{B}_{d_x/2}(x) \subset B_{d_x}(x) \subset B_1$. Então pela estimativa interior aplicada a função harmônica $u - u(x_0)$ temos

$$|u(x) - u(y)| = |(u(x) - u(x_0) - (u(y) - u(x_0)| \leqslant \frac{C(n,\alpha)}{d_x^{\frac{\alpha}{2}}}|x-y|^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B_{d_x}(x)} |u(x) - u(x_0)|.$$

Logo

$$\begin{aligned}
d_x^{\frac{\alpha}{2}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{\alpha}{2}}} &\leqslant C(n,\alpha) \sup_{x \in \partial B_{d_x}(x)} |u(x) - u(x_0)| \\
&\leqslant C(n,\alpha) \sup_{x \in B_1} |u(x) - u(x_0)| \\
&= C(n,\alpha) \sup_{x \in B_1} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}}} |x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leqslant 2^{\alpha} C(n,\alpha) \|\varphi\|_{C^{\alpha}(\partial B_1)}.
\end{aligned}$$

Note que usamos (3.5.7) e o fato que

$$|z - x_0| \leqslant 2d_x, \forall \quad z \in B_{d_x}(x).$$

Agora suponha que $d_y \leqslant d_x \leqslant 2|x-y|$. Então,

$$|u(x) - u(x_0)| \leqslant |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0) - u(y_0)| + |u(y_0) - u(y)|.$$

Usando (3.5.7) concluímos que

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leqslant C(n,\alpha) 2^{\frac{\alpha}{2}} \|\varphi\|_{C^{\alpha}(\partial B_1)} (|x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}} + |x_0 - y_0|^{\frac{\alpha}{2}} + |y - y_0|^{\frac{\alpha}{2}}) \\
&\leqslant C(n,\alpha) 2^{\frac{\alpha}{2}} \|\varphi\|_{C^{\alpha}(\partial B_1)} (d_x^{\frac{\alpha}{2}} + 5^{\frac{\alpha}{2}} |x-y|^{\frac{\alpha}{2}} + d_y^{\frac{\alpha}{2}}) \\
&\leqslant C(n,\alpha) \|\varphi\|_{C^{\alpha}(\partial B_1)} |x-y|^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade

$$|x_0 - y_0| \leqslant |x_0 - x| + |x - y| + |y - y_0| \quad \leqslant \quad d_x + |x-y| + d_y \leqslant 5|x-y|.$$

Agora vamos a prova de (3.5.7). Suponha que $B_1 = B_1(e_1)$, onde e_1 é o i-ésimo vetor canônico em $\mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$ e $\varphi(0) = 0$. Seja

$$K := \sup_{x \in \partial B_1} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\alpha}$$

veja que se $x \in \partial B_1$ então $|x|^2 = 2x_1$, assim

$$u(x) = \varphi \leqslant \sup_{\partial B_1} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\alpha}|x|^\alpha = K|x|^\alpha \leqslant K2^{\frac{\alpha}{2}}x_1^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.5.8}$$

Agora defina

$$v(x) = K2^{\frac{\alpha}{2}}x_1^{\frac{\alpha}{2}} \ \forall \quad x \in B_1$$

temos

$$\Delta v(x) = K2^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{\alpha}{2} - 1\Big)x_1^{\frac{\alpha}{2}-2} < 0 \quad em \quad B_1$$

pois $\alpha < 1$ e $x_1 > 0$ em B_1.

Pelo princípio do máximo aplicado a função $u - v$ (atente que $\Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v = -\Delta v > 0$)

$$\sup_{B_1}(u - v) \leqslant \sup_{\partial B_1}(u - v) \underbrace{\leqslant}_{(3.5.8)} 0$$

assim

$$u(x) \leqslant v(x) = K2^{\frac{\alpha}{2}}x_1^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant K2^{\frac{\alpha}{2}}|x|^{\frac{\alpha}{2}} \ \forall \quad x \in B_1.$$

Considerando agora que

$$-u = -\varphi \leqslant \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\alpha}|x|^\alpha \leqslant \sup_{\partial B_1} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\alpha}|x|^\alpha \quad = \quad K|x|^\alpha \leqslant K|x|^{\frac{\alpha}{2}}2^{\frac{\alpha}{2}} = v(x) \tag{3.5.9}$$

como consequência de (3.5.9) temos $|u(x)| \leqslant K2^{\frac{\alpha}{2}}|x|^{\frac{\alpha}{2}}$ para todo $x \in B_1$. Portanto,

$$\sup_{B_1} \frac{|u(x)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \leqslant 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{\partial B_1} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^{\alpha}}.$$

Para o caso geral, considere $\widehat{B_1} = B_1(e_1)$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma rotação tal que $T(x_0) = e_1$. Defina $\widehat{\varphi} : \partial\widehat{B_1} \to \mathbb{R}$ por $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(L^{-1}(x)) - \varphi(x_0) \quad \forall \quad x \in \partial\widehat{B_1}$ onde $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $L(x) = e_1 - T(x)$. Notemos que $\widehat{\varphi}(0) = \varphi(L^{-1}(0)) - \varphi(0) = \varphi(x_0) - \varphi(x_0) = 0$. Além disso $L^{-1}(\partial\widehat{B_1}) = \partial B_1$. Assim

$$\begin{aligned}
\sup_{\partial\widehat{B_1}} \frac{|\widehat{\varphi}|}{|x|^{\alpha}} &= \sup_{\partial\widehat{B_1}} \frac{|\varphi(L^{-1}(x)) - \varphi(L^{-1}(x_0))|}{|L(L^{-1}(x)) - L(L^{-1}(0))|^{\alpha}} \\
&= \sup_{\partial\widehat{B_1}} \frac{|\varphi(L^{-1}(x)) - \varphi(L^{-1}(x_0))|}{|x - x_0|^{\alpha}} \\
&= \sup_{\partial B_1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)}{|x - x_0|^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento para u (trocando α por $\alpha/2$ e $\widehat{\varphi}$ por $\widehat{u}$ juntamente com o fato de $L^{-1}(\widehat{B_1}) = B_1$ e lembrando que o laplaciano é invariante por rotações e translações segue o resultado).

3.6 Métodos de Energia

Nesta seção discutiremos funções harmônicas a partir do método de energia. Vamos assumir que $a_{ij} \in C(B_1)$ satisfaz

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad para \quad qualquer \quad x \in B_1 \quad e \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

para quaisquer constantes positivas λ e Λ. Consideremos $u \in C^1(B_1)$ satisfazendo

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0 \quad para \quad qualquer \quad \varphi \in C_0^1(B_1). \tag{3.6.1}$$

Proposição 3.8 *Funções harmônicas satisfazem a identidade (3.6.1) para* $a_{ij} = \delta_{ij}$.

Prova: Basta integrar por partes a função $\zeta = (a_{ij} D_i u)\varphi$

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi = -\int_{B_1} (a_{ij} D_{ij} u \varphi + D_j a_{ij} D_i u \varphi) + \int_{\partial B_1} a_{ij} D_i u \varphi p^j$$

onde p^j é o j-ésimo coordenada do vetor normal ao bordo de B_1. Note que agora que $\varphi \equiv 0$ em ∂B_1 pois $\varphi \in C_0^1(B_1)$. Assim

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi = -\int_{B_1} (a_{ij} D_{ij} u \varphi + D_j a_{ij} D_i u \varphi).$$

Tome agora $a_{ij} = \delta_{ij}$ (delta de Kronecher) na expressão acima, segue que para $i \neq j$, segue o resultado. Agora para $i = j$

$$\int_{B_1} D_i u D_j \varphi = -\int_{B_1} D_{ii} u \varphi$$

como u é harmônica, segue o resultado.

Lema 3.3 *(Desigualdade de Caccioppoly) Suponha que* $u \in C^1(B_1)$ *satisfaça*

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0 \text{ para qualquer } \varphi \in C_0^1(B_1)$$

Então para qualquer função $\eta \in C_0^1(B_1)$ *temos*

$$\int_{B_1} \eta^2 |Du|^2 \leqslant C \int_{B_1} |D\eta|^2 u^2$$

onde C *é uma constante positiva dependendo apenas de* λ *e* Λ.

Prova: Tome $\varphi = u\eta^2$, pela hipótese

$$\int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\eta^2 + 2(a_{ij} D_i u D_j \eta) u\eta = 0 \tag{3.6.2}$$

mas $\lambda |Du|^2 \eta^2 \leqslant a_{ij} D_i u D_j u \eta^2 \leqslant \Lambda |Du|^2 \eta^2$. Portanto

$$\lambda \int_{B_1} |Du|^2 \eta^2 \leqslant \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\eta^2 \leqslant \Lambda \int_{B_1} |Du|^2 \eta^2. \tag{3.6.3}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{B_1} 2(a_{ij}D_iuD_j\eta)u\eta\Big| &\leqslant \int_{B_1} 2|a_{ij}||u||\eta||Du||D\eta| \\ &\leqslant 4\Lambda\int_{B_1}|u||\eta||Du||D\eta|\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

de (3.6.2)

$$\int_{B_1}(a_{ij}D_iuD_ju)\eta^2 + \int_{B_1}2(a_{ij}D_iuD_j\eta)u\eta = 0. \tag{3.6.5}$$

Agora usando (3.6.2), (3.6.4) e (3.6.5) temos

$$\lambda\int_{B_1}|Du|^2\eta^2 \leqslant -\int_{B_1}(2a_{ij}u\eta)D_iuD_j\eta \leqslant 4\Lambda\int_{B_1}|u||\eta||Du||D\eta|$$

segue por transitividade que

$$\lambda\int_{B_1}|Du|^2\eta^2 \leqslant 4\Lambda\int_{B_1}|u||\eta||Du||D\eta|. \tag{3.6.6}$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\int_{B_1}|u||\eta||Du||D\eta| \leqslant \Big(\int_{B_1}|Du|\eta^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B_1}|D\eta|^2u^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

usando agora (3.6.6)

$$\lambda\int_{B_1}|Du|^2\eta^2 \leqslant 4\Lambda\Big(\int_{B_1}|Du|\eta^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B_1}|D\eta|^2u^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Mas $\int\limits_{B_1}|Du|^2\eta^2 \neq 0$, caso contrário o resultado seria imediato. Então

$$\lambda\Big(\int_{B_1}|Du|^2\eta^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant 4\Lambda\Big(\int_{B_1}|D\eta|u^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado, temos

$$\lambda^2 \int\limits_{B_1} |Du|^2\eta^2 \leqslant 16\Lambda^2 \int\limits_{B_1} |D\eta|^2 u^2.$$

Com isso, podemos concluir

$$\int\limits_{B_1} |Du|^2\eta^2 \leqslant C \int\limits_{B_1} |D\eta|^2 u^2.$$

Corolário 3.4 *Seja* u *como no lema anterior. Então para qualquer* $0 \leqslant r < R \leqslant 1$ *deve valer*

$$\int\limits_{B_r} |Du|^2 \leqslant \frac{C}{(R-r)^2} \int\limits_{B_R} u^2$$

onde C é uma constante que depende de λ *e* Λ

Prova: Tome η tal que $\eta = 1$ em B_r, $\eta = 0$ em B_R^c e $|D\eta| \leqslant \frac{2}{(R-r)}$. Aplicando o teorema anterior segue o resultado.

Corolário 3.5 *Seja* u *como na desigualdade de Caccioppoli. Então, para cada* $0 < R \leqslant 1$ *deve valer*

$$\int\limits_{B_{\frac{R}{2}}} u^2 \leqslant \theta \int\limits_{B_R} u^2 \quad e \quad \int\limits_{B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 \leqslant \theta \int\limits_{B_R} |Du|^2$$

onde $\theta = \theta(n, \lambda, \Lambda) \in (0, 1)$.

Prova: Tome $\eta \in C_0^1(B_R)$ com $\eta = 1$ em $B_{R/2}$ e $|Du| \leqslant 2R^{-1}$. Pela desigualdade de Caccioppoli

$$\int\limits_{B_R} |D(\eta u)|^2 \leqslant C \int\limits_{B_R} |D\eta| u^2 \tag{3.6.7}$$

mas

$$\int\limits_{B_R} u^2|D\eta|^2 = \underbrace{\int\limits_{B_R \cap B_{R/2}} u^2|D\eta|^2}_{=0} + \int\limits_{B_R \cap B_{R/2}^c} u^2|D\eta|^2 \leqslant \frac{4}{R^2} \int\limits_{B_R \cap B_{R/2}^c} u^2.$$

Logo (3.6.7) fica

$$\int_{B_R} |D(\eta u)|^2 \leqslant \frac{4}{R^2} \int_{B_R \cap B^c_{R/2}} u^2$$

Usando a desigualdade de Poincaré na função ηu^2 obtemos

$$\int_{B_R} (\eta u)^2 \leqslant CR^2 \int_{B_R \cap B_{R/2}} |D(\eta u)|^2$$

o que implica

$$(C+1) \int_{B_{R/2}} u^2 \leqslant C \int_{B_R} u^2.$$

Para a segunda desigualdade, usamos a desigualdade de Caccioppoli para $u - a$ para um a arbitrário

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \eta^2 |Du|^2 &\leqslant C \int_{B_R} |D\eta|^2 (u-a)^2 = \\ &= C \int_{B_R \cap B_{R/2}} |D\eta|^2 (u-a)^2 + C \int_{B_R \cap B^c_{R/2}} |D\eta|^2 (u-a)^2. \end{aligned}$$

Mas $\eta = 1$ em $B_{R/2}$ e $|Dn| \leqslant 2R^{-1}$ então,

$$\int_{B_R} \eta^2 |Du|^2 \leqslant \frac{C}{R^2} \int_{B_R \cap B^c_{R/2}} (u-a)^2 \tag{3.6.8}$$

usando agora a desigualdade de Poincaré com $a = \fint_{B_R \cap B^c_{R/2}} u$ temos

$$\int_{B_R \cap B^c_{R/2}} (u-a)^2 \leqslant c(n) R^2 \int_{B_R \cap B^c_{R/2}} |Du|^2.$$

De (3.6.8) temos

$$\int_{B_{R/2}} |Du|^2 \leqslant C \int_{B_R \cap B_{R/2}^c} |Du|^2$$

em particular

$$(C+1) \int_{B_{R/2}} |Du|^2 \leqslant C \int_{B_R} |Du|^2.$$

4 PRINCÍPIOS DO MÁXIMO

4.1 Princípio do Máximo Forte

Suponha Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$. Considere o operador L in Ω

$$Lu \equiv a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u \tag{4.1.1}$$

para $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Aqui assumimos que a_{ij}, b_i e c são funções contínuas e assim limitadas em $\overline{\Omega}$ e que L é uniformemente elíptico no seguinte sentido:

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \textit{ para qualquer } \xi \in \Omega \textit{ e para algum constante positiva } \lambda$$

Além do mais, vamos supor que a matriz $A = (a_{ij})$ seja simétrica. Veja que não há perda de generalidade, supor isso, pois uma vez que $u \in C^2(\Omega)$ temos que, se

$$Lu \equiv a_{ji}D_{ji}u + b_i(x)D_iu + c(x)u$$

é um operador como em (4.1.1) e $u \in C^2(\Omega)$, então vale $D_{ij}u = D_{ji}u$, daí se definirmos a matriz $A = (a_{ij})$ sendo simétrica, então $a_{ji}D_{ji}u = a_{ij}D_{ij}u$.

Note aqui que (4.1.1) está escrito sob a notação de Einstein, isto é, omitimos o símbolo do somatório e interpretamos os indíces repetidos no mesmo termo como indicador da presença desse somatório. Tal notação será usada durante todo o capítulo.

Lema 4.1 *Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $Lu > 0$ com $c(x) \leqslant 0$ em Ω. Se u possui um máximo não-negativo em $\overline{\Omega}$, então u não pode atingir máximo em Ω.*

Prova: Suponha que u atinge o seu máximo não-negativo em $\overline{\Omega}$ no ponto $x_0 \in \Omega$. Então $D_iu(x_0) = 0$, mostremos agora que a matriz $P = (D_{ij}u(x_0))$ é semi-negativa definida. Uma vez que x_0 é ponto de máximo temos que para qualquer $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$z^T(D_{ij}u(x_0))z = D_{ij}u(x_0)z_iz_j \leqslant 0. \tag{4.1.2}$$

Pois x_0 é ponto de máximo. Agora pela condição de elipticidade temos que

$$a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 > 0.$$

O que mostra que a matriz $I = (a_{ij}(x_0))$ é positiva definida. Feito isso, mostremos que a matriz PI é semi-negativa definida com traço não-positivo. Com efeito, seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com $|z| = 1$

$$z^T PIz = z^T Pzz^T Iz = (\underbrace{z^T Pz}_{\leqslant 0})(\underbrace{z^T Iz}_{\geqslant 0}).$$

Assim PI é uma matriz semi-negativa definida, com $tr(PI) = a_{ii}(x_0)D_{ii}u(x_0) \leqslant 0$, já que I é positiva definida (veja [HJ] teorema 7.63, página 465)

Isso implica que

$$Lu(x_0) = a_{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) + \underbrace{b_i(x_0)D_i u(x_0)}_{=0} + c(x_0)u(x_0) \leqslant c(x_0)u(x_0)$$

como $c(x) \leqslant 0$ $\forall x \in \Omega$ e $u(x_0)$ é não-negativo, temos

$$Lu(x_0) \leqslant c(x_0)u(x_0) \leqslant 0$$

contradição.

Observação 4.1 *Se $c(x) \equiv 0$ a hipótese da não-negatividade do ponto de máximo x_0 de u pode ser retirada pois $Lu(x_0) \leqslant \underbrace{c(x_0)}_{=0} u(x_0)$ independente do sinal de $u(x_0)$ teremos $Lu(x_0) \leqslant 0$ causando a contradição.*

Teorema 4.1 *(Princípio do Máximo Fraco) Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $Lu \geqslant 0$ em Ω com $c(x) \leqslant 0$ em Ω. Então u atinge em $\partial\Omega$ um máximo não-negativo.*

Prova: Seja $\Omega^+ = \{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$. Se o conjunto Ω^+ for vazio não há o que fazer, pois nesse caso $u \leqslant 0$ em Ω e portanto

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leqslant 0 = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Logo, podemos supor que $\Omega^+ \neq \emptyset$. Como u é contínua temos que Ω^+ é aberto em Ω, logo em $\mathbb{R}^n$. Note agora que $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$, como $c \leqslant 0$ em Ω se definirmos $Ku = Lu - c(x)u$ vale

$$Ku = Lu - c(x)u = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu \geqslant 0 \quad em \ \Omega^+.$$

Aplicando agora o lema (4.1) ao operador K obtemos

$$\max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

Agora uma vez que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega^+} \cup \overline{(\Omega \setminus \Omega^+)}$, afirmamos que

$$u \leqslant 0 \quad em \quad \overline{\Omega \setminus \Omega^+}$$

basta tomar uma sequência $(x_n)_n \in \Omega \setminus \Omega^+$ tal que $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x$, para $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega^+}$ e usar a continuidade de u. Feito isso, segue que

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leqslant \max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

Pois se o máximo de u em $\overline{\Omega}$ for atingido em $\overline{\Omega^+}$ segue a igualdade, se for atingido em $\overline{(\Omega \setminus \Omega^+)}$ teremos $u \leqslant 0$ e

$$\max_{\overline{\Omega^+}} u > \max_{\overline{\Omega}} u$$

assim é suficiente mostrar que

$$\max_{\partial\Omega^+} u \leqslant \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Para isso considere $x_0 \in \partial\Omega^+$ tal que $u(x_0) = \max_{\partial\Omega^+} u$. A continuidade de u e a definição de Ω^+ implicam que $u(x_0) \geqslant 0$. Agora consideramos dois casos:

Caso 1 - $u(x_0) = 0$

Nesse caso devemos ter $u \leqslant 0$ em $\overline{\Omega}$ pois $\max_{\overline{\Omega}} u \leqslant \max_{\partial\Omega^+} u = 0$. Logo $u^+ = 0$ em $\partial\Omega$ e portanto

$$u(x_0) = \max_{\partial\Omega^+} u = 0 = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Caso 2 - $u(x_0) > 0$

Como Ω^+ é aberto em Ω, vale que $x_0 \in \partial\Omega$. Se não fosse assim então $u \geqslant 0$ em $B_\epsilon(x_0) \subset \Omega^+$, contrariando o fato que $x_0 \in \partial\Omega^+$. Daí

$$\max_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = u^+(x_0) \underbrace{\leqslant}_{u(x_0)>0} \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Corolário 4.1 *Se* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *então o problema de valor de fronteira de Dirichlet para* $f \in C(\Omega)$ *e* $\varphi \in C(\partial\Omega)$ *tem uma única solução*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

se $c(x) \leqslant 0$ *em* Ω.

Prova: Seja $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo o problema de Dirichlet acima, então se consideremos $w = u - v$ temos que $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$$\begin{cases} Lw = 0, & \text{em } \Omega \\ w = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com $c(x) \leqslant 0$. Então pelo princípio do máximo fraco

$$\sup_{\Omega} w \leqslant \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Como $w = 0$ em $\partial\Omega$ temos que $\sup_\Omega w \leqslant 0$. Se tomarmos agora $w = -u + v$, concluimos que

$$\sup_{\Omega}(-u + v) \leqslant 0$$

o que implica

$$\inf_{\Omega} w \geqslant 0.$$

Portanto

$$0 \geqslant \sup_{\Omega} w \geqslant w(x) \geqslant \inf_{\Omega} w \geqslant 0.$$

Assim $w(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$, isto é, $u = v$ em Ω

Observação 4.2 *O fato do domínio Ω ser limitado é essencial, uma vez que feita esta hipótese temos a garantia da existência de máximo e mínimo de u em Ω. Igualmente importante é o fato do coeficiene c ser não-positivo. Vamos ilustrar esse comentário com um exemplo*

Seja $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in (0, \pi) \text{ e } y \in (0, \pi)\}$. Então $u = \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ é solução não-trivial do problema

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí vejamos que se $(x, y) = (\pi/2, \pi/2) \in \Omega$ então u atinge o seu máximo, contrariando o princípio do máximo fraco, que diz que esse máximo deveria estar em $\partial\Omega$.

O próximo resultado é uma ferramenta para a demonstração do princípio do máximo forte para o operadores elípticos. Dizemos que a fronteira $\partial\Omega$ de um domínio Ω satisfaz a condição da esfera interior em x_0 se existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$. Quando um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ é um ponto de máximo para uma determinada função u, vale que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geqslant 0. \tag{4.1.3}$$

O teorema abaixo devido a Hopf nos diz que se $Lu \geqslant 0$, isto é u é subsolução então vale a desigualdade estrita em (4.1.3).

Teorema 4.2 *(Lema de Hopf) Seja B uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com $x_0 \in \partial B$. Suponha que $u \in C^2(B) \cap C(B \cup \{x_0\})$ e $Lu \geqslant 0$ em B com $c(x) \leqslant 0$ em B. Assuma ainda que*

$$u(x) < u(x_0) \text{ para qualquer } x \in B \text{ e } u(x_0) \geqslant 0.$$

Então para cada vetor ν normal exterior a $\partial\Omega$ com $\nu \cdot \eta(x_0) > 0$. Deve valer

$$\lim_{t\to 0^+} \inf \frac{1}{t}[u(x_0) - u(x_0 - t\nu)] > 0.$$

Prova: Assumimos que $B = B_r(0)$. Vamos assumir também que que $u \in C(\overline{B})$ e $u(x) < u(x_0)$ para qualquer $x \in \overline{B} \setminus \{x_0\}$, pois veja que se esse não for o caso é suficiente tomar uma bola $B' \subset B$ que é internamente tangente à B no ponto x_0, daí restringimos a função u a essa nova bola. Considere $v(x) = u(x) + \epsilon h(x)$ para alguma função não-negativa h.

Agora iremos escolher ϵ apropriadamente tal que v atinge um máximo não-negativo somente em x_0. Denote por $\Sigma = B \cap B_{r/2}(x_0)$, defina agora $h(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r^2}$ com α a ser definido. Por construção $h > 0$, mostremos agora que $Lh > 0$ em Σ, temos

$$\begin{aligned} Lh &= e^{-\alpha|x|^2}\Big\{4\alpha^2 a_{ij}(x)x_ix_j - 2\alpha a_{ii}(x) - 2\alpha b_i(x)x_i + c(x)\Big\} - ce^{-\alpha r^2} \\ &\geqslant e^{-\alpha|x|^2}\Big\{4\alpha^2 a_{ij}x_ix_j - 2\alpha[a_{ii}(x) + b_i(x)x_i] + c(x)\Big\} \\ &\underbrace{\geqslant}_{\text{elipticidade}} e^{-\alpha|x|^2}\Big\{4\alpha^2\lambda|x|^2 - 2\alpha[a_{ii}(x) + b_i(x)x_i] + c(x)\Big\}. \end{aligned}$$

Agora note que se $x \in \Sigma$

$$|x_0| \leqslant |x - x_0| + |x| \leqslant r/2 + |x|$$

mas $x_0 \in \partial B_r(0)$, então

$$|x| \geqslant r/2.$$

Feito isso, vale que

$$Lh \geqslant e^{-\alpha|x|^2}\Big\{4\alpha^2\lambda\frac{r^2}{4} - 2\alpha[a_{ii}(x) + b_i(x)x_i] + c(x)\Big\}.$$

Então para $\alpha > 0$ suficientemente grande, concluímos que $Lh > 0$ em Σ. Com isso, temos que $Lv = Lu + \epsilon Lh > 0$ em Σ para qualquer $\epsilon > 0$. Assim, o lema (4.1) é testemunha que, v não pode atingir máximo não-negativo no interior de Σ. Provemos agora que para algum $\epsilon > 0$ pequeno v atinge o seu máximo não negativo em x_0. Considere v em $\partial\Sigma$

i) Para $x \in \partial\Sigma \cap B$, temos que $u(x) < u(x_0)$, então $u(x_0) - u(x) > 0$, logo existe algum $\delta > 0$ tal que $\delta > u(x_0) - u(x)$ assim $u(x) < u(x_0) - \delta$ .Tome $\epsilon > 0$ pequeno tal que $\epsilon h < \delta$ em $\partial\Sigma \cup B$. Assim para este ϵ escolhido temos que $v(x) < -\delta + \epsilon h(x) + u(x_0) < u(x_0)$ portanto, $v(x) < u(x_0)$ desde que $x \in \partial\Sigma \cap B$.

ii) Em $\Sigma \cup \partial B$, $h(x) = 0$ e $u(x) < u(x_0)$ para $x \neq x_0$. Logo, $v(x) < u(x_0)$ em $\Sigma \cup \partial B \backslash \{x_0\}$ e $v(x_0) = u(x_0)$.

Assim, concluimos que

$$\frac{v(x_0) - v(x_0 - t\nu)}{t} \geqslant 0 \;\; para \;\; qualquer \;\; t > 0 \;\; pequeno.$$

Tomando $t \to 0$

$$\liminf_{t \to 0} \frac{1}{t}[u(x_0) - u(x_0 - t\nu)] \geqslant -\epsilon \frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0)$$

mas pela definição de h, segue que

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Teorema 4.3 *(Princípio do Máximo Forte ou Princípio do Máximo Hopf) Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $Lu \geqslant 0$ *com* $c(x) \leqslant 0$ *em* Ω. *Então o máximo não-negativo de* u *em* $\overline{\Omega}$ *pode ser assumido somente em* $\partial\Omega$ *a menos que* u *seja constante.*

Prova: Seja M o máximo não-negativo de u em $\overline{\Omega}$. Seja $\Sigma = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$. Vamos mostrar que $\Sigma = \Omega$. Se $\Sigma \subsetneq \Omega$, então como Σ é fechado relativamente a Ω podemos encontrar uma bola $B \subset \Omega \setminus \Sigma$ com um ponto na sua fronteira pertencendo a Σ, é claro que B existe pois basta escolher um ponto $p \in \Omega \setminus \Sigma$ tal que $\mathrm{dist}(p, \Sigma) < \mathrm{dist}(p, \partial\Omega)$ e criar uma bola com centro em p e depois estender essa bola que cortará Σ antes de $\partial\Omega$.

Suponha que $x_0 \in \partial B \cap \Sigma$, obviamente temos que $Lu \geqslant 0$ em B, pois $B \subset \Omega$ e $u(x) < u(x_0)$ para qualquer $x \in B$, pois $x_0 \in \Sigma$ então $u(x_0) = M \geqslant 0$. O teorema (4.2) implica que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

onde ν é o vetor normal exterior a bola B na direção de x_0 agora lembre que x_0 é ponto de máximo interior em Ω, assim $Du(x_0) = 0$, o que é uma contradição pois

$$0 < \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = Du(x_0) \cdot \eta(x_0) = 0.$$

Observação 4.3 *Lembre que na prova do teorema anterior pedimos uma bola* $B \subset \Omega \setminus \Sigma$ *com um ponto de fronteira pertencendo* Σ*. Vamos discutir melhor a existência dessa bola. Suponha que* $B_\rho(p)$ *seja esta bola então ela deve satisfazer:*

$(a) B_\rho(p) \subset \Omega \setminus \Sigma$;
$(b) |\overline{B_\rho(p)} \cap \Sigma| = 1.$

Por hipótese u *é contínua em* $\Omega \backslash \Sigma$ *é aberto logo existe uma bola aberta contida neste conjunto. Tome como* x_1 *o centro desta bola e seja* $x_2 \in \Sigma$*, existe um arco em* Ω *ligando* x_1 *e* x_2*, já que* Ω *por ser aberto e conexo é conexo por caminhos. Agora denote por* x_3 *o primeiro ponto desse arco em* Σ*.*

Seja $S = \text{dist}(x_3, \partial\Omega)$*. Tome agora* x_4 *no arco entre* x_1 *e* x_3 *com* $|x_4 - x_3| < s/2$*. Seja agora* $B_{r_1}(x_4)$ *a maior bola ao redor de* x_4 *contida em* $\Omega \setminus B$*, veja que* $0 < r_1 < s/2$*. Tome agora* $x_5 \in \partial B_{r_1}(x_4) \cap \Sigma$*. Finalmente, fazendo* $p = (1/2)x_4 + (1/2)x_5$ *e* $r = (1/2)r_1$*. Uma vez que* $\overline{B_\rho(p)} \subset B_{r_1}(x_4) \cap \{x_5\}$ *segue que* $\overline{B_\rho(p)} \cap \Sigma$ *possui apenas um ponto.*

Corolário 4.2 *(Princípio da Comparação) Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaça* $Lu \geqslant 0$ *e* $c(x) \leqslant 0$ *em* Ω*. Se* $u \leqslant 0$ *em* $\partial\Omega$*, então* $u \leqslant 0$ *em* $\overline{\Omega}$*.*

Prova: Pelo princípio do máximo forte

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

pela hipótese, temos que $u \leqslant 0$ em $\partial\Omega$, assim

$$\max_{\partial\Omega} u \leqslant 0.$$

Portanto

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leqslant \max_{\partial\Omega} u \leqslant 0$$

de onde se conclui que

$$u \leqslant 0 \ \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Corolário 4.3 *Suponha Ω possua a propriedade da esfera interior e que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaça $Lu \geqslant 0$ em Ω com $c(x) \leqslant 0$. Assuma que u atinge o seu máximo não-negativo em $x_0 \in \overline{\Omega}$. Então $x_0 \in \partial\Omega$ e para qualquer vetor exterior a $\partial\Omega$ em x_0 vale*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

a menos que u seja constante.

Prova: Se u atinge seu máximo não-negativo em $x_0 \in \overline{\Omega}$, pelo princípio do máximo forte, $x_0 \in \partial\Omega$, mas $\partial\Omega$ possui a propriedade da esfera interior, portanto existe uma bola $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$, daí $u(x) < u(x_0)$ $\forall x \in B$ e $u(x_0) \geqslant 0$, então segue pelo lema de Hopf que $\partial u/\partial \nu(x_0) > 0$, a menos que u seja constante.

Corolário 4.4 *(Unicidade do Problema de Neumann) Suponha que Ω é limitado em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a propriedade da esfera interior. Considere o seguinte problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.4}$$

para alguma função $f \in C(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Assuma ainda que $c(x) \leqslant 0$ em Ω e $\alpha(x) \geqslant 0$ em $\partial\Omega$. Então o problema (4.1.4) possui uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ se $c \not\equiv 0$ ou $\alpha \not\equiv 0$. Se $c \equiv 0$ e $\alpha \equiv 0$, o problema (4.1.4) tem única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a menos de constantes aditivas.

Prova: Seja $u = v - w$, onde $v, w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ são soluções de (4.1.4), então u é uma solução da seguinte equação homogênea

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Vamos dividir a prova desse corolário em dois casos:

Caso (1) - $c \not\equiv 0$ e $\alpha \not\equiv 0$.

Vamos mostrar que $u \equiv 0$. Suponha que u possua um máximo positivo em $x_0 \in \overline{\Omega}$. Se $u \equiv C > 0$, onde C é uma constante temos $0 = Lu = c(x)u(x)$ em Ω, mas $c(x) \leqslant 0$ assim $0 = c(x)u(x) \leqslant 0$, como $u \equiv C > 0$ então $c \equiv 0$ em Ω contrariando a hipótese. Agora em $\partial\Omega$, temos $0 \leqslant \alpha(x)u(x) = 0$, mas $u > 0$ então $\alpha \equiv 0$ em Ω

contradição.

Caso contrário $x_0 \in \partial\Omega$ e pelo corolário (4.3) $(\partial u/\partial \nu)(x_0) > 0$, o que contrária o fato que $(\partial u)/\partial \nu)(x_0) = 0$ pois $u \equiv C$. Assim $u \equiv 0$.

Caso (2) - $c \equiv 0$ e $\alpha \equiv 0$.

Vamos mostrar que $u \equiv c$ onde c é uma constante.

$$\begin{cases} a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu(x) = 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Suponha que u é uma solução não-constante de (4.1.6). Então pelo princípio do máximo forte o seu máximo em $\overline{\Omega}$ é atingido apenas em $\partial\Omega$, novamente pelo corolário (4.3) $(\partial u/\partial \nu)(x_0) > 0$ o que é uma contradição. Logo $u \equiv c$.

Proposição 4.1 *(Princípio da Comparação sem restrição sobre* c*) Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaz* $Lu \geqslant 0$. *Se* $u \leqslant 0$ *em* Ω, *então ou* $u < 0$ *em* Ω *ou* $u \equiv 0$ *em* Ω.

Prova: Mostremos que não pode ocorrer ao mesmo tempo $u \equiv 0$ e $u > 0$ em Ω. Suponha que $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \Omega$, mostremos que $u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Para isso, escreva $c(x) = c^+(x) - c^-(x)$. Por hipótese

$$Lu = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu + c^+u - c^-u \leqslant 0 \text{ em } \Omega.$$

Assim u satisfaz

$$a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu - c^-u \geqslant -c^+u \geqslant 0$$

pois $-c^+ \leqslant 0$ em Ω e por hipótese $u \leqslant 0$ em Ω. Como $-c^- \leqslant 0$, podemos aplicar o princípio do máximo forte que garante que $u \equiv c$, onde c é uma constante, mas como vimos $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \Omega$, logo $u \equiv 0$.

Teorema 4.4 *(Princípio do Máximo Geral para operadores sem restrição no coeficiente* c*) Suponha que exista* $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $w > 0$ *em* $\overline{\Omega}$ *e* $Lw \leqslant 0$ *em* Ω. *Se* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaz* $Lu \geqslant 0$ *em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *não pode assumir em* Ω *o seu máximo não-negativo a menos que* $\frac{u}{w} \equiv \text{constante}$. *Se, além disso* $\frac{u}{w}$ *assumir seu máximo não-negativo em* $x_0 \in \partial\Omega$ *e* $\frac{u}{w} \not\equiv C$, *então para qualquer vetor exterior* ν *em* x_0 *no bordo de* Ω *vale*

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\frac{u}{w}\Big)(x_0) > 0$$

se $\partial\Omega$ *possui a condição da esfera interior em* x_0.

Prova: Seja $u = \frac{u}{w}$, então $vw = u$, um cálculo direto nos mostra que

$$\begin{aligned} Lu &= \Big(w a_{ij} D_{ij} v + a_{ij} D_i v D_j w + a_{ij} D_i w D_j v + v a_{ij} D_{ij} w\Big) \\ &+ \Big(w b_i D_i v + v b_i D_i w\Big) + c(vw). \end{aligned}$$

Assim $Lu = wLv + vLw - c(vw) + 2a_{ij}D_i v D_j w$, pois a matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica vale então que $a_{ij}D_j v D_i w = a_{ij} D_i v D_j w$, mas por hipótese $\frac{Lu}{w} \geqslant 0$, daí

$$0 \leqslant \frac{Lu}{w} = \frac{1}{w}\Big(wLv + vLw - c(vw) + 2a_{ij}D_i v D_j w\Big)$$

$$0 \leqslant \frac{Lu}{w} = Lv + \frac{v}{w}Lw - cv + \frac{2}{w}a_{ij}D_i v D_j w$$

$$0 \leqslant a_{ij}D_{ij}v + \Big(b_i + \frac{2}{w}a_{ij}D_j v\Big)D_i v + \Big(\frac{Lw}{w}\Big)v.$$

Portanto se $J = a_{ij}D_{ij}v + \Big(b_i + \frac{2}{w}a_{ij}D_j w\Big)D_i v + \Big(\frac{Lw}{w}\Big)v$, então v satisfaz $Jv \geqslant 0$, além disso $Lw/w \leqslant 0$. Aplicando o lema de Hopf e o princípio do máximo forte a J e v, segue o resultado desejado.

4.2 Estimativas A Priori

Nesta seção vamos mostrar estimativas a priori para o problema de Dirichlet e o problema de Neumann. Suponha que $\Omega \in \mathbb{R}^n$ seja um domínio limitado. Considere o operador L em Ω

$$Lu \equiv a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_i u + c(x)u$$

que satisfaz as mesmas hipóteses de (4.1.1). Denotamos por Λ a norma do supremo das funções a_{ij} e b_i, isto é, $\Lambda = 2\max_{\Omega}\{|a_{ij}|, |b_i|\}$ que satisfaz

$$\max_{\Omega}|a_{ij}| + \max_{\Omega}|b_i| \leqslant \Lambda.$$

Proposição 4.2 *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

para alguma função $f \in C(\overline{\Omega})$ *e* $\varphi \in C(\partial\Omega)$*. Se* $c(x) \leqslant 0$*, então*

$$|u(x)| \leqslant \max_{\partial\Omega}|\varphi| + C\max_{\Omega}|f| \text{ para qualquer } x \in \Omega$$

onde C é uma constante positiva que depende somente de λ, Λ *e* $\mathrm{diam}(\Omega)$*.*

Prova: Queremos construir uma função w em Ω tal que
a) $L(w \pm u) = Lw \pm f \leqslant 0$ ou $Lw \leqslant \mp f$ em Ω
b) $w \pm u = w \pm \varphi \geqslant 0$ ou $w \geqslant \mp\varphi$ em $\partial\Omega$

Denote por

$$F = \max_{\bar{\Omega}}|f| \;\text{ e }\; \phi = \max_{\partial\Omega}|\varphi|$$

Veja que $|f| \in C(\overline{\Omega})$ então o máximo de f é atingido uma vez que $\overline{\Omega}$ é compacto. Agora note que $\partial\Omega$ é compacta já que Ω é limitado, assim φ também atinge seu valor máximo.

Precisamos mostrar que

$$\begin{cases} Lw \leqslant -F, & \text{em } \Omega \\ w \geqslant \phi, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Pois se isso ocorre mostramos a) e b), pois

$$F = \max_{\Omega}|f| \geqslant |f| \geqslant f$$

o que implica que

$$-F \leqslant -f$$

analogamente,

$$-F \leqslant f.$$

Da mesma forma, concluímos que $\phi \geqslant \varphi$ e $\phi \geqslant -\varphi$. Em resumo $-F \leqslant \mp f$ em Ω e $\phi \geqslant \pm\varphi$ em $\partial\Omega$. Daí

$$\begin{cases} Lw \leqslant -F \leqslant \mp f, & \text{em } \Omega \\ w \geqslant \phi \geqslant \mp\varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

o que mostra os itens a) e b). Agora vamos a prova de (4.2.1).

Suponha que o domínio $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$, que não há perda de generalidade em supor isso, pois assim construímos uma bola de raio d onde Ω estará contido, o que é válido pois, por hipótese, Ω é limitado. Seja $w = \phi + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})F$ com α a ser escolhido a posteriori. Calculando o operador L para a função w temos que

$$\begin{aligned} -Lw &= (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha)Fe^{\alpha x_1} - c\phi - c(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})F \\ &\geqslant (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha)Fe^{\alpha x_1}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Veja que (4.2.2) é válida, pois $e^{\alpha d} > e^{\alpha x_1}$ já que $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$, mas por hipótese $c(x) \leqslant 0$ então $-c(x) \geqslant 0$, portanto $-cF(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \geqslant 0$ e $-c\phi \geqslant 0$. Usando a elipticidade

$$\begin{aligned} -Lw &\geqslant (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha)Fe^{\alpha x_1} \\ &\geqslant (\lambda\alpha^2 + b_1\alpha)F \\ &\geqslant F. \end{aligned}$$

Desde que α seja suficientemente grande tal que $\alpha^2\lambda + b_1(x)\alpha \geqslant 1$ para qualquer $x \in \Omega$. Portanto vale em Ω vale $Lw + F \leqslant 0$, mas $F \geqslant |f| \geqslant f = Lu$ ou $F \geqslant |f| \geqslant -f = -Lu$. Então $L(u+w) = Lu + Lw \leqslant 0$ em Ω o que implica $L(-u-w) \geqslant 0$ em Ω, mas pode ainda ocorrer que $L(w-u) = Lw - Lu \leqslant Lw + F \leqslant 0$ em Ω o que implica em $L(-w+u) \geqslant 0$ em Ω.

Já em $\partial\Omega$ temos que $\phi \leqslant w$ procendendo como anteriormente temos que $u - w \leqslant 0$ em $\partial\Omega$ e $-u - w \leqslant 0$ em $\partial\Omega$. Em resumo,

$$\begin{cases} L(-u-w) \leqslant 0, & \text{em } \Omega \\ -u-w \leqslant 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{cases} L(u-w) \leqslant 0, & \text{em } \Omega \\ u-w \leqslant 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Aplicando o princípio da comparação em (4.2.3) obtemos que $w \geqslant -u$ em Ω, aplicando agora o princípio da comparação a (4.2.4) temos que $w \geqslant u$, e portanto $w \geqslant |u|$, daí

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |u| &\leqslant \sup_{\Omega}(\phi + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})F) \\ &= \phi + \sup_{\Omega}(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})F \\ &= \phi + (e^{\alpha d} - 1)F \\ &= \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \max_{\Omega} |F|. \end{aligned}$$

Observe aqui que α depende de λ e Λ, uma vez que para tomar α suficientemente grande tal que $\alpha^2\lambda + b_1(x)\alpha \geqslant 1$, temos de saber o valor da constante de elipticidade λ. Agora note que a depêndencia de Λ vem do fato que o valor de α vai depender de b_1 logo depende do valor de Λ. Além do mais o número d vai depender de $\mathrm{diam}(\Omega)$, uma vez que $\Omega \subset \{x \in \Omega; 0 < x_1 < d\}$ então $d > \mathrm{diam}(\Omega)$. Conclui-se dessas observações que a constante C depende de λ, Λ e $\mathrm{diam}(\Omega)$.

Proposição 4.3 *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *satisfaça*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.5}$$

se $c(x) \leqslant 0$ *em* Ω *e* $\alpha(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ *em* Ω*, vale que*

$$|u(x)| \leqslant C\{\max_{\partial\Omega} |\varphi| + \max_{\Omega} |f|\} \text{ para qualquer } x \in \Omega$$

onde C *é uma constante positiva dependendo apenas de* λ*,* Λ*,* α_0 *e* $\mathrm{diam}(\Omega)$.

Prova: Inicialmente tratamos do caso especial $c(x) \leqslant -c_0 < 0$, pois o caso geral seguirá deste. Sejam F e ϕ como na proposição anterior. Devemos mostrar que

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi \text{ para qualquer } x \in \Omega.$$

.

Inicialmente defina $v = \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi \pm u$. Então temos

$$
\begin{aligned}
Lv &= c(x)\Big(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi\Big) \pm Lu \\
&\underbrace{=}_{(4.2.5)} c(x)\Big(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi\Big) \pm f \\
&\underbrace{\leqslant}_{c(x)\leqslant -c_0} -c_0\Big(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi\Big) \pm f \\
&= -F - \frac{c_0}{\alpha_0}\phi \pm f \\
&\leqslant -F \pm f \leqslant 0 \text{ em } \Omega
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha v &= \frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi \pm u\Big) + \alpha\Big(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi \pm u\Big) \\
&\underbrace{=}_{F,\phi \ \ ctes} \pm\frac{\partial u}{\partial \nu} \pm u\alpha + \alpha\Big(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi\Big) \\
&\underbrace{=}_{(4.2.5)} \pm\varphi + \alpha\Big(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi\Big) \\
&= \pm\varphi + \frac{\alpha}{c_0}F + \frac{\alpha}{\alpha_0}\phi \\
&\underbrace{\geqslant}_{\alpha(x)\geqslant\alpha_0} \pm\varphi + \frac{\alpha}{c_0}F + \phi \\
&\geqslant \pm\varphi + \phi \geqslant 0 \text{ em } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Se v possui um mínimo negativo em $\overline{\Omega}$, então pelo lema de Hopf v atinge este mínimo em $\partial\Omega$, digamos em $x_0 \in \Omega$. Assim pelo corolário (4.3) aplicado a $-v$, temos $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \leqslant 0$ para $\nu = \nu(x_0)$, o vetor normal exterior ao bordo de Ω em x_0, feito isso concluimos que

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha v\Big)(x_0) \leqslant \alpha v(x_0) < 0$$

o que contraria o fato de

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha v\Big)(x_0) \geqslant 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Portanto $v \geqslant 0$ em $\overline{\Omega}$, e da definição de v segue que

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\phi \text{ para qualquer } x \in \Omega.$$

Para o caso geral, isto é, $c(x) \leqslant 0$ para qualquer $x \in \Omega$. Considere a função auxiliar $u(x) = z(x)w(x)$ onde z é uma função positiva em $\overline{\Omega}$ a ser determinada. Começamos calculando Lw

$$Lu = za_{ij}D_{ij}w + (a_{ij}D_jz)D_iw + (a_{ij}D_jz)D_iw + zb_iD_iw + wb_iD_iz + c(zw) + wa_{ij}D_{ij}z.$$

Como z é uma função positiva em $\overline{\Omega}$

$$\frac{Lu}{z} = a_{ij}D_{ij}w + \Big(\frac{1}{z}(a_{ij} + a_{ji})D_jz\Big)D_iw + b_iD_iw + \frac{w}{z}b_iD_iz + cw + w\Big(\frac{wa_{ij}D_{ij}z}{z}\Big)$$

$$\frac{Lu}{z} = a_{ij}D_{ij}w + \underbrace{\Big(\frac{1}{z}(a_{ij} + a_{ji})D_jz + b_i\Big)}_{=B_i}D_iw + \Big(c + \frac{a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz}{z}\Big)w$$

$$Lw = \frac{Lu}{z} = a_{ij}D_{ij}w + B_iD_iw + \Big(c + \frac{a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz}{z}\Big)w. \tag{4.2.6}$$

Calculando $\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w$ obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \Big(\alpha + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu}\Big)w = \frac{1}{z}\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\Big). \tag{4.2.7}$$

De (4.2.6) e (4.2.7) temos que

$$\begin{cases} a_{ij}D_{ij}w + B_iD_iw + \Big(c + \frac{a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz}{z}\Big)w = \frac{f}{z}, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \Big(\alpha(x) + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu}\Big)w = \frac{\varphi}{z}, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Agora precisamos de uma função $z > 0$ em $\overline{\Omega}$ tal que seja válido

$$\begin{cases} c + \frac{a_{ij}D_{ij}z+b_iD_iz}{z} \leqslant -c_0, & \text{em } \Omega \\ \alpha(x) + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu} \geqslant \frac{\alpha_0}{2}, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.9}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{a_{ij}D_{ij}z+b_iD_iz}{z} \leqslant -c_0 < 0, & \text{em } \Omega \\ |\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu}| \leqslant \frac{\alpha_0}{2}, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2.10}$$

Assim como na prova da proposição (4.2) vamos supor que $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$. Escolha $z = A + e^{\beta d} - e^{\beta x_1}$ para $x \in \Omega$ e para alguma constante positiva A e β a ser determinada. Feito isso, veja que

$$Lz = a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz = -\beta^2 a_{11}e^{\beta x_1} - b_1\beta e^{\beta x_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{-Lz}{z} = -\frac{1}{z}(a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz) &= \frac{(\beta^2 a_{11} + \beta b_1)}{z}e^{\beta x_1} \\ &\geqslant \frac{(\beta^2 a_{11} + \beta b_1)}{z} \\ &\geqslant \frac{\beta^2 a_{11} + b_1\beta}{A + e^{\beta d}}. \end{aligned}$$

Agora se escolhermos β de modo a obter $\beta^2 a_{11} + b_1\beta \geqslant 1$ obtemos

$$-\frac{1}{z}(a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz) \geqslant \frac{1}{A + e^{\beta d}} > 0$$

por outro lado

$$\left|\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right| \leqslant \frac{\beta}{A}e^{\beta d} \leqslant \frac{\alpha_0}{2}$$

se A é escolhido grande.

Isso agora reduz ao caso especial já discutido. O novo termo extra de primeira ordem não altera o resultado. Podemos aplicar o caso especial a w. E assim,

$$|w(x)| = \frac{|u(x)|}{|z(x)|} \leqslant \frac{1}{c_0}\max_{\Omega}\left|\frac{f}{z}\right| + \frac{2}{\alpha_0}\max_{\partial\Omega}\left|\frac{\varphi}{z}\right| \tag{4.2.11}$$

mas z é positiva em $\overline{\Omega}$ e (4.2.11) é válida para todo $x \in \Omega \subset \overline{\Omega}$, então a desigualdade

(4.2.11) acima vale para todo $x \in \overline{\Omega}$ e assim

$$\frac{|u(x)|}{|z(x)|} \leqslant \frac{1}{c_0} \max_{\Omega} |f| \max_{\Omega} \frac{1}{|z|} + \frac{2}{\alpha_0} \max_{\partial\Omega} |\varphi| \max_{\partial\Omega} |\frac{1}{|z|}$$

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{c_0} \max_{\Omega} |f| + \frac{2}{\alpha_0} \max_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

4.3 Estimativas Gradiente

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um domínio limitado. Considere a equação

$$a_{ij} D_{ij} u + b_i D_i u = f(x, u) \quad em \ \Omega \tag{4.3.1}$$

para $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$. Aqui a_{ij}, b_i e c são funções contínuas e assim limitadas em $\overline{\Omega}$ e ainda vamos supor que a equação (4.3.1) é uniformemente elíptica isto é

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \text{ para qualuqer } x \in \Omega \text{ e qualquer } \xi \in \mathbb{R}^n$$

para alguma constante positiva λ.

Proposição 4.4 *Suponha que* $u \in C^3(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$a_{ij} D_{ij} u + b_i D_i u = f(x, u) \ em \ \Omega \tag{4.3.2}$$

para $a_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ *e* $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. *Então vale*

$$\sup_{\Omega} |Du| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |Du| + C$$

onde C *é uma constante positiva que depende somente de* $\lambda, \mathrm{diam}(\Omega), |a_{ij}, b_1|_{C^1(\bar{\Omega})}, M = |u|_{L^\infty(\Omega)}$ *e* $|f|_{C^1(\overline{\Omega}\times[-M,M])}$

Prova: Seja $L = a_{ij} D_{ij} + b_i D_i$. Note que

$$D_i(|Du|^2) = 2 D_k u D_{ki} u$$

e

$$D_{ij}(|Du|^2) = 2(D_{kj}uD_{ki}u + D_kuD_{kij}u).$$

O próximo passo é diferenciar (4.3.2) com relação a x_k e multiplicar por D_ku e depois somar o resultado em k

$$D_k(a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu) = D_kf(x,u)$$

$$(D_ka_{ij}D_{ij}u + a_{ij}D_{kij}u) + (D_kb_iD_iu + b_iD_{ki}u) = D_kf$$

$$(D_kuD_ka_{ij}D_{ij}u + a_{ij}D_kuD_{kij}u) + (D_kb_iD_iuD_ku + b_iD_{ki}uD_ku) = D_kfD_ku + D_zf|Du|^2.$$

Usando os valores das derivadas de $D_i(|Du|^2)$ e $D_{ij}(|Du|^2)$

$$\begin{aligned} a_{ij}D_{ij}(|Du|^2) + b_iD_i(|Du|^2) &= 2a_{ij}D_{kj}uD_{ki}u - 2D_kuD_ka_{ij}D_{ij}u \\ &- 2D_kb_iD_iuD_ku + 2D_kfD_ku + D_zf|Du|^2. \end{aligned}$$

Pela hipótese de elipticidade , temos

$$a_{ij}D_{ki}uD_{kj}u \geqslant \lambda|D^2u|^2$$

assim

$$\begin{aligned} L(|Du|^2) &\geqslant 2\lambda|D^2u|^2 - 2D_kuD_ka_{ij}D_{ij}u \\ &- 2D_kb_iD_iuD_ku + 2D_kfD_ku + D_zf|Du|^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy

$$L(|Du|^2) \geqslant \lambda|D^2u|^2 - C|Du|^2 - C$$

onde C é uma constante positiva que depende de

$$\lambda, \quad |a_{ij}, b_i|_{C^1(\bar{\Omega})}, \quad e \quad |f|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,M])}.$$

Vamos agora somar o termo $L(u^2)$. Temos pela condição de elipticidade

$$\begin{aligned} L(u^2) &= 2a_{ij}D_iuD_ju + 2u(a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu) \\ &\geqslant 2\lambda|Du|^2 + 2uf. \end{aligned}$$

Assim

$$L(|Du|^2 + \alpha u^2) \geqslant \lambda|D^2u|^2 + (2\lambda\alpha - C)|Du|^2 - C \geqslant \lambda|D^2u|^2 + |Du|^2 - C$$

se escolhermos $\alpha > 0$ grande, com C dependendo também de de M. Afim de controlar o termo constante podemos considerar outra função $e^{\beta x_1}$ para $\beta > 0$. Portanto, temos

$$L(|Du|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \geqslant \lambda|Du|^2 + |Du|^2 + \{\beta^2 a_{11}e^{\beta x_1} + \beta b_1 e^{\beta x_1} - C\}.$$

Se tomarmos $\Omega \subset \{x_1 > 0\}$, então $e^{\beta x_1} \geqslant 1$ para qualquer $x \in \Omega$. Escolhendo β grande, podemos tornar o último termo positivo. Assim, se tomarmos $w = |Du|^2 + \alpha|u|^2 + e^{\beta x_1}$ para α e β grandes, dependendo apenas de $\lambda, \mathrm{diam}(\Omega), |a_{ij}, b_i|_{C^1(\bar{\Omega})}, M = |u|_{L^\infty(\Omega)}$ e $|f|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,M])}$ então obtemos

$$Lw \geqslant 0 \text{ em } \Omega.$$

Pelo princípio do máximo

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |Du|^2 &\leqslant \sup_{\partial\Omega} |Du|^2 + \alpha \sup_{\partial\Omega} |u|^2 + \sup_{\partial\Omega} e^{\beta x_1} \\ &\leqslant \sup_{\partial\Omega} |Du|^2 + C \end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

Proposição 4.5 *Suponha que* $u \in C^3(\Omega)$ *satisfaça*

$$a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu = f(x,u) \quad \text{em } \Omega$$

para $a_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, *e* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. *Então vale para qualquer subconjunto compacto* $\Omega^* \subset\subset \Omega$

$$\sup_{\Omega} |Du| \leqslant C$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* $\lambda, \mathrm{diam}(\Omega), |a_{ij}, b_1|_{C^1(\bar{\Omega})}, M = |u|_{L^\infty(\Omega)}$ *e* $|f|_{C^1(\overline{\Omega}\times[-M,M])}$.

Prova: Precisamos tomar uma função cut-off $\gamma \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\gamma \geqslant 0$ e considerar uma função auxiliar da forma

$$w = \gamma |Du|^2 + \alpha |u|^2 + e^{\beta x_1}.$$

Seja $v = \gamma |Du|^2$. Calculando o operador L para v, temos

$$Lv = (L\gamma)|Du|^2 + \gamma L(|Du|^2) + 2a_{ij} D_i \gamma D_j |Du|^2 \tag{4.3.3}$$

da proposição (4.4) temos

$$L(|Du|^2) \geqslant \lambda |D^2 u|^2 - C|Du|^2 - C$$

assim (4.3.3) fica

$$Lv \geqslant \lambda\gamma|Du|^2 - C\gamma|Du|^2 - C\gamma + 2a_{ij} D_i \gamma D_k u D_{kj} u + (L\gamma)|Du|^2 - C.$$

A desigualdade de Cauchy com ϵ^* implica então que para qualquer $\epsilon^* > 0$

$$\begin{aligned} |2a_{ij} D_k u D_i \gamma D_{kj} u| &= |D_i \gamma D_{jk} u||2a_{ij} D_k u| \\ &\leqslant \epsilon^* |D_i \gamma|^2 |D_{jk} u|^2 + \frac{1}{4\epsilon^*} 4|a_{ij}|^2 |D_k u|^2 \\ &\leqslant \epsilon^* |D^2 u|^2 |D\gamma|^2 + c(\epsilon^*)|Du|^2 \end{aligned}$$

daí exigimos para a função cut-off γ

$$|D\gamma|^2 \leqslant C\gamma \text{ em } \Omega. \tag{4.3.4}$$

Então para ϵ^* pequeno

$$\begin{aligned} Lv &\geqslant \lambda\gamma|D^2u|^2 - 2\epsilon^*|D\gamma|^2|D^2u|^2 - 2c(\epsilon^*)|Du|^2 - C|Du|^2 + (L\gamma)|Du|^2 - C \\ &= \lambda\gamma|D^2u|^2\Big(1 - \frac{2\epsilon^*}{\lambda\gamma}|D\gamma|^2\Big) - (2c(\epsilon^*) + C - (L\gamma))|Du|^2 - C \end{aligned}$$

tomando $\frac{\epsilon}{2\lambda}$ no lugar de ϵ^*

$$Lv \geqslant \lambda\gamma|D^2u|^2\Big(1 - \frac{\epsilon}{\lambda}|D\gamma|^2\Big) - C|Du|^2 - C.$$

De (4.3.4) segue que

$$Lv \geqslant \lambda\gamma|D^2u|^2\frac{1}{2} - C|Du|^2 - C.$$

Argumentando como na proposição anterior segue o resultado. Para isso, basta considerar outra função $e^{\beta x_1}$ para $\beta > 0$, e tomar $\Omega \subset \{x_1 > 0\}$, depois escolhermos β suficientemente grande para o tonar o último termo da soma positivo e aplicar o princípio do máximo.

4.4 Princípio do Máximo de Alexandroff

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e considere o operado elíptico L em Ω

$$L \equiv a_{ij}D_{ij} + b_iD_i + c$$

onde os coeficientes a_{ij}, b_i e c são pelo menos contínuos em Ω. A elipticidade do operador L quer dizer que a matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$ é positiva definida em todo Ω, isto é, $\xi^T A\xi \geqslant 0$ para todo $\xi \in \Omega$. Tomamos como $D = \det(A)$ e $D^* = D^{1/n}$, isto é, D^* é a média geométrica dos autovalores da matriz A. Através desta seção vamos assumir que

$$0 < \lambda \leqslant D^* \leqslant \Lambda$$

onde λ e Λ são duas constantes positivas, que denotam, respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz A.

Definição 4.1 *Para $u \in C^2(\Omega)$ definimos o conjunto de contato superior de u como* $\Gamma^+ = \{y \in \Omega;\ u(x) \leqslant u(y) + Du(y)\cdot x - y \text{ para qualquer } x \in \Omega\}$.

Em resumo, o conjunto de contato superior para $u \in C^2(\Omega)$ é o conjunto dos pontos de Ω tal que o hiperplano tangente a u no ponto x está acima do gráfico de u.

Proposição 4.6 *O conjunto de contato superior Γ^+ de $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

a) A matriz Hessiana $D^2u = (D_{ij}u)$ é não-positiva em Γ^+;

b) Se $u \in C^1(\Omega)$ então $p_x = Du(x)$;

c) Se Ω é limitado, então Γ^+ é relativamente compacto;

d) u é côncava se, e somente se, $\Gamma^+ = \Omega$.

Prova: Para a prova do item a), veja que se $y \in \Gamma^+$, pela fórmula de Taylor e a definição de Γ^+ segue que:

$$u(x) - u(y) - Du(y) \cdot (x - y) = \frac{1}{2} D^2u(y) \cdot (x - y)^2 + o(|x - y|^2).$$

Pela definição de Γ^+

$$u(x) - u(y) - Du(y) \cdot (x - y) \ \leqslant 0$$

daí

$$\frac{1}{2} D^2u(y) \cdot (x - y)^2 + o(|x - y|^2) \leqslant 0.$$

Fazendo $x - y = tw$ onde w é um vetor unitário temos

$$\frac{1}{2} D^2u(y) \cdot (tw)^2 + o(|tw|^2) \leqslant 0$$

$$\frac{1}{2} D^2u(y) \cdot w^2 \leqslant \frac{-o(|tw|^2)}{t^2}$$

tomando $t \to 0$ segue que $Du^2u(y) \cdot w^2 \ \leqslant 0$.

Agora para o item b) temos que a equação do hiperplano tangente ao gráfico de u no ponto y é $z = u(y) + p \cdot (x - y)$, mas $(p, -1)$ é o vetor normal ao gráfico de u, daí se $u \in C^1(\Omega)$ então $p = Du$, pois $(Du, -1)$ é o vetor normal ao gráfico de u.

Para a prova de c), basta notar que, como Ω é limitado, por hipótese, então Γ^+ também o é, já que $\Gamma^+ \subset \Omega$, assim toda sequência em Γ^+ é limitada, logo possui subsequência convergente para um ponto em Γ^+, para ver isso, seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^+$, que é uma sequência limitada, como vimos existe $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in \Gamma^+$ tal que $y_{n_k} \to y_0$, por outro lado

$$u(x) \leqslant u(y_{n_k}) + Du(y_{n_k}) \cdot x - y_{n_k}. \tag{4.4.1}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (4.4.1), segue que $y_0 \in \Gamma^+$. Assim Γ^+ é sequencialmente compacto. Por fim, a prova de d), para começar note que é óbvio que $\Gamma^+ \subset \Omega$ devido a definição de Γ^+. Reciprocamente se u é côncava em Ω, $D^2u = (D_{ij}u)$ é não-positiva, daí $\Omega \subset \Gamma^+$, uma vez que a matriz hessiana de u em Γ^+ é não-positiva sempre que $y \in \Gamma^+$.

O próximo resultado será um lema que usaremos para a prova do princípio do máximo de Alexandroff.

Lema 4.2 *Suponha que* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *é não-negativa. Então para cada* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *vale*

$$\int\limits_{B_{M^*}(0)} g \leqslant \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)|\det(D^2u)|$$

onde Γ^+ *é o conjunto de contato superior de* u *e* $M^* = \frac{1}{diam(\Omega)}(\sup\limits_{\Omega} u - \sup\limits_{\partial\Omega} u^+)$.

Prova: Sem perda de generalidade suponhamos que $u \leqslant 0$ em $\partial\Omega$, basta somar uma constante suficientemente grande se necessário. Podemos assumir também que $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\} \neq \emptyset$, caso contrário o resultado seria válido por vacuidade.

Considere para cada $\epsilon > 0$ a aplicação $\psi_\epsilon = Du - \epsilon Id : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Então $D\psi_\epsilon = D^2u - \epsilon Id$. Como D^2u é não-positiva definida em Γ^+ e ϵId é positiva definida, concluímos que $D\psi_\epsilon$ é negativa definida em Γ^+. Pela teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas temos que

$$\int\limits_{\psi_\epsilon(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g = \int\limits_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\psi_\epsilon)|\det(D\psi_\epsilon)| = \int\limits_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\psi_\epsilon)|\det(D^2u - \epsilon Id)|$$

$$\int\limits_{Du(\Gamma^+ \cap \Omega^+) - \epsilon Id(\Omega^+ \cap \Omega^+)} g = \int\limits_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(Du - \epsilon Id)|\det(D^2u - \epsilon Id)|.$$

Se $\epsilon \to 0$ o teorema da convergência dominada nos diz que

$$\int\limits_{Du(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g = \int\limits_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(Du)|\det(D^2u)|.$$

Portanto é suficiente provar que $B_{M^*}(0) \subset Du(\Gamma^+ \cap \Omega^+)$ pois caso essa inclusão seja verdade:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{M^*}(0)} g &\leqslant \int\limits_{Du(\Gamma^+\cap\Omega^+)} g \\
&= \int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+} g(Du)|det(D^2u)| \\
&\leqslant \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)|det(D^2u)|.
\end{aligned}$$

Temos então que provar para todo $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $|a| < M^*$, existe $y \in \Gamma^+ \cap \Omega^+$ tal que $a = D(y)$. Se $a = 0$ isto é óbvio (basta tomar y como sendo o ponto onde u assume o seu máximo positivo), logo podemos pedir $a \neq 0$.

Seja $x^* \in \Omega$ tal que $u(x^*) = \sup_\Omega u = m > 0$. Agora, através de uma translação podemos supor que $x^* = 0$. Dado $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a < m/diam(\Omega)$, considere a função afim

$$L(x) = m + ax.$$

Temos $L(0) = m$ e para todo $x \in \Omega \subset \overline{\Omega}$, vale $|ax| = |a||x| \leqslant m \Rightarrow ax > -m$. Assim $L(x) = m - ax > m - m = 0$. De modo que $L > 0$ em $\Omega \subset \overline{\Omega}$. Agora, como u assume o seu máximo m em 0, temos $Du(0) = 0$. Daí

$$\begin{cases} (u - L)(0) = 0 \\ D(u - L)(0) = 0. \end{cases}$$

Em particular, não podemos ter $u - L \leqslant 0$ em uma vizinhança de 0, pois nesse caso 0 seria um ponto de máximo local para $u - L$ logo $D(u - L)(0) = 0$. Portanto, deve existir $x_1 \in \Omega$ próximo de 0 tal que $(u - L)(x_1) > 0$. Como $u \leqslant 0 < L$ em $\partial\Omega$ (note que $Lu > 0$ em $\partial\Omega$ pois $Lu > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$) segue que $u - L$ atinge um máximo positivo em $\overline{\Omega}$ em um ponto $y \in \Omega$. Daí $D(u - L)(y) = 0$ e assim conluímos a prova do teorema $Du(y) = DL(y) = a$.

Além do mais, para todo $x \in \Omega$ vale

$$(u - L)(x) \leqslant (u - L)(y)$$

$$u(x) - m - ax \leqslant u(y) - m - ay$$

$$u(x) \leqslant u(y) + a(x - y) = u(y) + Du(y)(x - y)$$

logo $y \in \Gamma^+ \cap \Omega^+$.

Para finalizar os preparativos para a prova do princípio do máximo de Alexandroff vamos mostrar que o lema anterior pode ser escrito de uma forma alternativa.

Lema 4.3 *Para qualquer matriz simétrica positiva definida* $A = (a_{ij})$ *vale*

$$\det(-D^2u) \leqslant \frac{1}{\det(a_{ij})}\Big(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{n}\Big)^n \quad \text{em } \Gamma^+.$$

Prova: Se os autovalores da matriz $-AD^2u$ são λ_i para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(AD^2u) = a_{ij}D_{ij}u$ e a matriz AD^2u é não-positiva definida em Γ^+, temos

$$\begin{aligned} D^*\{\det(-Du^2)\}^{\frac{1}{n}} &= \det(-AD^2u)^{\frac{1}{n}} \\ &= (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} \\ &= \frac{\mathrm{tr}(-AD^2u)}{n} \\ &= \frac{-a_{ij}uD_{ij}u}{n} \end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

Teorema 4.5 *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaça* $Lu \geqslant f$ *em* Ω *com a seguintes condições:* $\frac{|b|}{D^*}, \frac{f}{D^*} \in L^n(\Omega)$ *e* $c \leqslant 0$ *em* Ω*. Então vale*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\Big|\Big|\frac{f^-}{D^*}\Big|\Big|_{L^n(\Gamma^+)}$$

onde Γ^+ *é o conjunto de contato superior de* u *e* C *é uma constante dependendo somente de* $n, \mathrm{diam}(\Omega)$ *e* $\Big|\Big|\frac{b}{D^*}\Big|\Big|_{L^n(\Gamma^+)}$.

Prova: Devemos escolher g apropriadamente para aplicar o lema (4.2). Tomando $g \equiv 1$

$$\begin{aligned} \omega_n\Big(\frac{\sup_\Omega - \sup_{\partial\Omega} u^+}{\mathrm{diam}(\Omega)}\Big)^n &= \int_{B_{M^*(0)}} 1 \\ &\leqslant \int_{\Gamma^+} 1(Du)\Big(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{nD^*}\Big)^n \end{aligned}$$

assim

$$\left(\frac{\sup_\Omega - \sup_{\partial\Omega} u^+}{\mathrm{diam}(\Omega)}\right)^n \leqslant \frac{1}{\omega_n}\int_{\Gamma^+}\left(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{nD^*}\right)^n.$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a $1/n$

$$\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \leqslant \mathrm{diam}(\Omega)\left\{\frac{1}{\omega_n^{\frac{1}{n}}}\int_{\Gamma^+}\left(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{nD^*}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

portanto

$$\begin{aligned}\sup_\Omega u &\leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\omega_n^{\frac{1}{n}}}\left\{\int_{\Gamma^+}\left(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{nD^*}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{n\omega_n^{\frac{1}{n}}}\left\{\int_{\Gamma^+}\left(\frac{-f}{D^*}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{n\omega_n^{\frac{1}{n}}}\left\|\frac{f^-}{D^*}\right\|_{L^n(\Gamma^+)}. \tag{4.4.2}$$

Para provar o caso geral, escolhemos uma função g adequada. Note que se $f \equiv 0$ e $c \equiv 0$ então $(-a_{ij}D_{ij}u)^n \leqslant |b|^n|Du|^n$, pois como $f \equiv 0$ então $Lu \geqslant 0$, sendo $c \equiv 0$, temos

$$a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu \geqslant 0$$

de onde concluímos que

$$(b_iD_iu)^n \geqslant (-a_{ij}D_{ij}u)^n.$$

Agora pela desigualdade de Cauchy segue que $(-a_{ij}D_{ij}u)^n \leqslant |b|^n|Du|^n$.

Assim pelo lema (4.2) e (4.3)

$$\begin{aligned}\int_{B_{M^*}(0)} g &\leqslant \int_{\Gamma^+} g(Du)\Big(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{D^*n}\Big)^n \\ &\leqslant \int_{\Gamma^+} g(Du)\frac{|b|^n|Du|^n}{(D^*)^n n^n}.\end{aligned}$$

O que nos sugere tomar $g(p) = 1/|p|^n$, mas g não é localmente integrável na origem. Tomamos então $g(p) = 1/(|p|^n + \mu)$ e depois fazemos $\mu \to 0^+$. Pela desigualdade de Cauchy em $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$ temos

$$\begin{aligned}-a_{ij}D_{ij}u &\leqslant b_iD_iu + cu - f \\ &\leqslant |b||Du| + f^- \\ &= (|b|, \mu^{-1}f^-)\cdot(|Du|, \mu) \\ &\underbrace{\leqslant}_{D.H} (|b|^n + (\mu^{-1}f^-)^n)^{\frac{1}{n}}.(|Du|^{\frac{n}{n-1}}1 + \mu^{\frac{n}{n-1}}1)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\underbrace{\leqslant}_{D.H} (|b|^n + (\mu^{-1}f^-)^n)^{\frac{1}{n}}\{[(|Du|^{\frac{n}{n-1}})^{n-1} + (\mu^{\frac{n}{n-1}})^{n-1}]^{\frac{1}{n-1}}[1+1]^{\frac{n-2}{n-1}}\}^{\frac{n-1}{n}} \\ &= (|b|^n + (\mu^{-1}f^-)^n)^{\frac{1}{n}}\{(|Du|^n + \mu^n)^{\frac{1}{n}}2^{\frac{n-2}{n}}\}.\end{aligned}$$

As desigualdades marcadas com D.H indica que usamos a desigualdade de Hölder, em resumo

$$(-a_{ij}D_{ij}u)^n \leqslant (|b|^n + (\mu^{-1}f^{-1})^n)\{(|Du|^n + \mu^n).2^{n-2}\}.$$

Segue do lema (4.2) que

$$\begin{aligned}\int_{B_{M^*}(0)} g &\leqslant \int_{\Gamma^+\cap\Omega^+} g(Du)\frac{(|b|^n + (\mu^{-1}f^{-1})^n)2^{n-2}(|Du|^n + \mu^n)}{n^nD} \\ &\leqslant \frac{2^{n-2}}{n^n}\int_{\Gamma^+\cap\Omega^+}\Big(|b|^n + \Big(\frac{f^-}{\mu}\Big)^n\Big)(|Du|^n + \mu^n)\frac{1}{D(|Du|^n + \mu^n)} \\ &= \frac{2^{n-2}}{n^n}\int_{\Gamma^+\cap\Omega^+}\Big(|b|^n + \Big(\frac{f^-}{\mu}\Big)^n\Big)\frac{1}{D}.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_{M^*}(0)} g &= \int\limits_0^{M^*}\int\limits_{\partial B_r(0)} g r^{n-1} dS dr \\
&= \omega_n \int\limits_0^{M^*} \frac{r^{n-1}}{\mu^n + r^n} dr \\
&= \frac{\omega_n}{n}\log\frac{(M^*)^n+\mu^n}{\mu^n} \\
&= \frac{\omega_n}{n}\log\Big(\frac{(M^*)^n}{\mu^n}+1\Big).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\log\Big(\frac{(M^*)^n}{\mu^n}+1\Big) \leqslant \left\{\frac{2^{n-2}}{n^n}\int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+}\Big(\frac{|b|^n}{D}+\frac{1}{D}\Big(\frac{f^-}{\mu}\Big)^n\Big)\right\}\frac{n}{\omega_n}
$$

elevando ambos os membros ao número de Euler, temos

$$
(M^*)^n \leqslant \mu^n\left\{\exp\left[\frac{2^{n-2}}{n^{n-1}\omega_n}\Big(\Big\|\frac{b}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}+\mu^{-n}\Big\|\frac{f^-}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}\Big)\right]-1\right\}.
$$

Usando agora a definição de M^*, temos

$$
\left(\frac{\sup\limits_{\Omega} u - \sup\limits_{\partial\Omega} u^+}{\mathrm{diam}(\Omega)}\right)^n \leqslant \mu^n.\left\{\exp\left[\frac{2^{n-2}}{n^{n-1}\omega_n}\left(\Big\|\frac{b}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}+\mu^{-n}\Big\|\frac{f^-}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}\right)\right]-1\right\}.
$$

Se $f \not\equiv 0$, escolha $\mu = \Big\|\frac{f^-}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}$, daí

$$
\sup\limits_{\Omega} u \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + \Big\|\frac{f^-}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}\mathrm{diam}(\Omega)\left\{\exp\left[\frac{2^{n-2}}{n^{n-1}\omega_n}\left(\Big\|\frac{b}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}+1\right)\right]-1\right\}^{\frac{1}{n}}
$$

se $f \equiv 0$, temos

$$
\sup\limits_{\Omega} u \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + \mu.\mathrm{diam}(\Omega)\left\{\exp\left[\frac{2^{n-2}}{n^{n-1}\omega_n}\Big\|\frac{b}{D^*}\Big\|_{L^n(\Gamma^+\cap\Omega^+)}\right]-1\right\}^{\frac{1}{n}}.
$$

agora escolhemos qualquer $\mu > 0$ e fazemos $\mu \to 0$, daí

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Usaremos agora o princípio do máximo de Alexandroff e o lema (4.2) para obter estimativas a priori para soluções de equação quasi-lineares e equações totalmente não-lineares.

Proposição 4.7 *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$Qu \equiv a_{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

onde $a_{ij} \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *satisfaz*

$$a_{ij}(x, z, p)\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{para qualquer } (x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad \text{e } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Suponha também que existam funções não-negativas $g \in L^n_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *e* $h \in L^n(\Omega)$ *tais que*

$$\frac{|b(x, z, p)|}{nD^*} \leqslant \frac{h(x)}{g(p)} \quad \text{para qualquer } (x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

e

$$\int_{\Omega} h^n(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} g^n(p)dp = g_\infty.$$

Então vale

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C\mathrm{diam}(\Omega)$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* g *e* h.

Prova: Suponhamos que $Qu \geqslant 0$ em Ω. Como D^2u é não-positiva em Γ^+, vale $-a_{ij}D_{ij}u \geqslant 0$. Assim $b(x, u, Du) \geqslant -a_{ij}(x, u, Du)D_{ij}u \geqslant 0$ em Γ^+, usando isso na hipótese temos

$$\frac{b(x, u, Du)}{nD^*} \leqslant \frac{h(x)}{g(Du)}. \tag{4.4.3}$$

Aplicando o lema (4.2) para g^n obtemos

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_{M^*}(0)} g^n &\leqslant \int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+} g^n(Du)|\det D^2u| \\
&\leqslant \int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+} g^n(Du)\Big(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{nD^*}\Big)^n \\
&\leqslant \int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+} g^n(Du)\Big(\frac{b}{nD^*}\Big)^n.
\end{aligned}
$$

De (4.4.3) temos

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_{M^*}(0)} g^n &\leqslant \int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+} g^n(Du)\Big(\frac{b}{nD^*}\Big)^n \\
&\leqslant \int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+} g^n(Du)\frac{h^n(x)}{g^n(Du)} \\
&= \int\limits_{\Gamma^+\cap\Omega^+} h^n(x) \\
&\leqslant \int\limits_{\Omega} h^n \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} g^n.
\end{aligned}
$$

Assim, existe uma constante positiva que depende apenas de g e h tal que $M^* \leqslant C$. Portanto

$$\sup_{\partial\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \leqslant C\mathrm{diam}(\Omega).$$

Como corolário direto da proposição anterior discutiremos as equações de Monge-Ampère

Corolário 4.5 *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaça*

$$\det(D^2u) = f(x, u, Du) \quad \text{em } \Omega$$

para algum $f \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. *Suponha que exista funções não-negativas* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *e* $h \in L^1(\Omega)$ *tais que*

$$|f(x,z,p)| \leqslant \frac{h(x)}{g(p)} \quad \mathtt{para\ qualquer}\ (x,z,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

e

$$\int\limits_{\Omega} h(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(p)dp = g_\infty.$$

Então vale

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C\mathrm{diam}(\Omega)$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* g *e* h*.*

Prova: Usando o lema (4.2) a g e h como acima, temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{M^*}(0)} g(p)dp &\leqslant \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)|\det(D^2u)| \\
&= \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)|f(x,u,Du)| \\
&\leqslant \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)\frac{h(x)}{g(Du)} \\
&\leqslant \int\limits_{\Omega} h(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x).
\end{aligned}$$

O que implica o resultado.

Corolário 4.6 *Suponhamos que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$\det(D^2u) = f(x) \quad \mathtt{em}\ \Omega$$

para alguma função $f \in C(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} + \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\omega_n^{\frac{1}{n}}} \|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

Prova: Tomamos $g = 1$ e $h = f$ e usamos o resultado anterior.

Finalizamos essa seção provando o princípio do máximo para domínios de volume pequeno.

Teorema 4.6 *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaça* $Lu \geqslant 0$ *em* Ω *com* $u \leqslant 0$ *em* $\partial\Omega$*. Então existe uma constante positiva* δ *que depende de* $n, \lambda, \Lambda, \mathrm{diam}(\Omega)$ *tal que se* $m(\Omega) < \delta$ *então* $u \leqslant 0$.

Prova: Seja $L = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_i + c$ então $L - c^+ = a_{ij}D_{ij} + b_iD_i - c^-$. Daí

$$Lu - c^+u = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu - c^-u$$

por hipótese $Lu \geqslant 0$ assim

$$a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu - c^-u \geqslant -c^+u.$$

Como $\sup\limits_{\partial\Omega} u^+ = 0$, segue pelo princípio do máximo de Alexandroff

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\left\{\int_{\Gamma^+} \left(\frac{c^+u}{D^*}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u \quad &\underbrace{\leqslant}_{D^* \geqslant \lambda} \quad C\left\{\int_{\Gamma^+} \left(\frac{c^+u}{\lambda}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant \quad \frac{C}{\lambda}\|u^+c^+\|_{L^n(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agora pela desigualdade de Hölder

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \frac{C}{\lambda}\|c^+\|_{L^\infty(\Omega)}.m(\Omega)^{\frac{1}{n}} \sup_{\Omega} u^+$$

mas $m(\Omega) \leqslant \delta$, daí

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \frac{C}{\lambda}\|c^+\|_{L^\infty(\Omega)}.\delta^{\frac{1}{n}} \sup_{\Omega} u^+.$$

Se tomarmos $\delta = \left(\frac{C}{\lambda}\|c^+\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^{-n}$, então $\sup_\Omega < \sup_\Omega u^+$. Se $u > 0$ em algum ponto então $u^+ = u$ neste ponto e daí $\sup_\Omega u = \sup_\Omega u^+$, absurdo. Logo $u \leqslant 0$, usando o princípio da comparação concluímos o resultado.

5 SOLUÇÕES FRACAS

O objetivo deste capítulo é o estudar resultados sobre a regularidade de soluções fracas para equações elípticas na seguinte forma

$$-D_j(a_{ij}(x)D_i u) + c(x)u = f(x). \tag{5.0.1}$$

Assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio. Afim de definir o conceito de solução fraca, inicialmente vamos multiplicar a equação (5.0.1) por uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrar o resultado no domínio Ω

$$\int_\Omega -D_j(a_{ij}D_i u)\varphi + cu\varphi = \int_\Omega f\varphi \tag{5.0.2}$$

usando a técnica da integração por partes em (5.0.2) no lado esquerdo, temos que

$$\int_\Omega (a_{ij}D_i u D_j \varphi + cu\varphi) = \int_\Omega f\varphi. \tag{5.0.3}$$

Em geral podemos tomar $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, uma vez que o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H^1(\Omega)$. Feito isso, estamos prontos para a definição de solução fraca.

Definição 5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca se satisfaz*

$$\int_\Omega (a_{ij}D_i u D_j \varphi + cu\varphi) = \int_\Omega f\varphi \quad \text{para qualquer } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

onde assumimos

a) o coeficiente líder $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ é uniformemente elíptico, isto é, para alguma constante positiva λ deve valer

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \text{para qualquer } x \in \Omega \quad \text{e } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

b) o coeficiente $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ e o termo não-homogêneo $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.

Observação 5.1 *Veja que* b) *é o mínimo que pode ser pedido a* c *e* f *tal que* (5.0.2) *faça sentido pois pelo teorema do mergulho de Sobolev*

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega cu\varphi\right| &\leqslant \int_\Omega |cu\varphi| \\ &\leqslant \|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \\ &\leqslant \|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\end{aligned}$$

Assim afim de que o módulo de $\int_\Omega cu\varphi$ *seja finito, devemos ter que* $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ *já que* $u, \varphi \in L^{2^*}(\Omega)$. *Analogamente veja que*

$$\left|\int_\Omega f\varphi\right| \leqslant \|f\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)}$$

daí para que o módulo da integral $\int_\Omega f\varphi$ *seja finita precisamos que* $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, *já que* $\varphi \in L^{2^*}(\Omega)$.

Nas próximas seções iremos discutir a teoria de De Giorgi-Nash-Moser para equações lineares elípticas.

5.1 Limitação Local

Teorema 5.1 *Suponha que* $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ *e* $c \in L^q(B_1)$ *para algum* $q > \frac{n}{2}$ *satisfazendo as seguintes hipóteses*

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \text{ para qualquer } x \in B_1 \text{ e } x \in \mathbb{R}^n$$

e $|a_{ij}|_{L^\infty(B_1)} + \|c\|_{L^q} \leqslant \Lambda$ *para quaisquer constantes positivas* λ *e* Λ. *Suponha que* $u \in H^1(B_1)$ *é uma subsolução no seguinte sentido*

$$\int_{B_1}(a_{ij}D_iuD_j\varphi + cu\varphi) \leqslant \int_{B_1} f\varphi \text{ para qualquer } \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \varphi \geqslant 0 \text{ em } B_1. \quad (5.1.1)$$

Se $f \in L^q(B_1)$, *então* $u^+ \in L^\infty_{loc}(B_1)$. *Além disso, deve valer para qualquer* $\theta \in (0,1)$ *e qualquer* $p > 0$ *a estimativa*

$$\sup_{B_\theta} u^+ \leqslant C\left\{\frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right\}$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q)$ *é uma constante positiva.*

Prova: Vamos provar incialmente para o caso $p = 2$ e $\theta = \frac{1}{2}$. Para algum $k > 0$ e $m > 0$, escolha $\bar{u} = u^+ + k$ e

$$\bar{u}_m = \begin{cases} \bar{u}, & \text{se } u < m \\ k + m, & \text{se } u \geqslant m. \end{cases}$$

Temos que $\bar{u}_m$ ainda pertence a $H^1(B_1)$, uma vez que $\bar{u}_m$ é limitada por cima por $k + m$ e por baixo por k. Note que $D\bar{u}_m = 0$ se $\{u < 0\}$ ou $\{u > m\}$ e que $\bar{u}_m = \bar{u}$ em todos os outros pontos. É claro que a função $\bar{u}$ é sempre positiva e $D\bar{u} = Du$ se $u > 0$. Observe também que $\bar{u}_m \leqslant \bar{u}$ pois se $u < m$ então $\bar{u}_m = \bar{u}$, se $u \geqslant m$ então $\bar{u} = u + k \geqslant m + k = \bar{u}_m$.

Considere a função

$$\varphi = \eta^2(\bar{u}_m^{\beta}\bar{u} - k^{\beta+1})$$

onde $\beta > 0$ e η é uma função não-negativa tal que $\eta \in C_0^1(B_1)$. Note que φ é um elemento de $H_0^1(B_1)$ pois $\bar{u}_m$ é limitada por baixo por k e é também não-negativa, logo φ é uma função teste. Calculando $D\varphi$ temos:

$$D\varphi = \eta^2\bar{u}_m^{\beta}(\bar{u}_m^{-1}\bar{u}\beta D\bar{u}_m + D\bar{u}) + 2\eta D\eta(\bar{u}_m^{\beta}\bar{u} - k^{\beta+1}).$$

Como $\bar{u}_m$ é positiva e $\bar{u}_m = \bar{u}$ sempre que $D\bar{u}_m \neq 0$, concluímos que

$$D\varphi = \eta^2\bar{u}_m^{\beta}(\beta D\bar{u}_m + D\bar{u}) + 2\eta D\eta(\bar{u}_m^{\beta}\bar{u} - k^{\beta+1}). \tag{5.1.2}$$

Note que $\varphi = 0$ e $D\varphi = 0$ em $\{u \leqslant 0\}$, pois nesse caso $\bar{u} = k$, e assim $\bar{u}_m = \bar{u} = k$, logo

$$\varphi = \eta^2 k^{\beta}(k^{\beta}k - k^{\beta+1}) = 0$$

então $D\varphi = 0$. Portanto como $B_1 = (B_1 \cap \{u > 0\}) \cup (B_1 \cap \{u > 0\}^c)$, temos que

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j\varphi = \int_{\{u>0\}} a_{ij}D_iuD_j\varphi + \underbrace{\int_{B_1\cap\{u>0\}^c} a_{ij}D_iuD_j\varphi}_{=0}$$

da mesma forma

$$\int_{B_1} cu\varphi = \int_{\{u>0\}} cu\varphi$$

e

$$\int_{B_1} f\varphi = \int_{\{u>0\}} f\varphi.$$

Assim, se substituimos a função φ em (5.1.1) e integramos com respeito a $\{u > 0\}$ e notarmos também que $\bar{u} \geqslant u^+$ e $\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1} \leqslant \bar{u}_m^\beta \bar{u}$ para $k > 0$ teremos

$$\begin{aligned}
\int a_{ij} D_i u D_j \varphi &= \int a_{ij} D_i \bar{u} \eta^2 \bar{u}_m^\beta (\beta D_j \bar{u}_m + D_j \bar{u}) + 2\int a_{ij} D_i \bar{u} D_j \eta (\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1})\eta \\
&\geqslant \int a_{ij} D_i \bar{u} D_j \bar{u} \eta^2 \bar{u}_m^\beta + a_{ij} D_i \bar{u}_m D_j \bar{u}_m \eta^2 \bar{u}_m^\beta \beta \\
&- 2\int \eta |a_{ij} D_j u D_i \eta| |\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1}| \\
&\geqslant \int \eta^2 \bar{u}_m^\beta (\beta\lambda |D\bar{u}_m|^2 + \lambda |D\bar{u}|^2) - 2\int \eta |a_{ij} D_j u D_i \eta| |\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1}|.
\end{aligned}$$

Veja que foi usado que $D_i u = D_i \bar{u}$ já que o domínio de integração é $\{u > 0\}$. Além do mais foi usado que $D_i u = D_i \bar{u}_m$ sempre que $D_i \bar{u}_m \neq 0$. Analisamos agora a segunda integral. Pela desigualdade de Cauchy temos

$$2\int \eta |a_{ij} D_j \bar{u} D_i \eta| |\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1}| \leqslant \int \eta \Lambda |D\bar{u}| |D\eta| |\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1}|.$$

Pela definição de $\bar{u}, \bar{u}_m$, vale $\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1} \geqslant 0$, daí usando o fato que $\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1} \leqslant \bar{u}_m^\beta \bar{u}$ temos

$$\begin{aligned}
2\int \eta |a_{ij} D_j \bar{u} D_i \eta| |\bar{u}_m^\beta \bar{u} - k^{\beta+1}| &\leqslant 2\Lambda \int \eta |D\bar{u}| |D\eta| \bar{u}_m^\beta \bar{u} \\
&= \int (|D\bar{u}| \eta \bar{u}_m^{\frac{\beta}{2}})(2\Lambda |D\eta| \bar{u} \bar{u}_m^{\frac{\beta}{2}}) \\
&\underbrace{\leqslant}_{\text{Cauchy com } \lambda} \frac{\lambda}{2} \int |D\bar{u}|^2 \eta^2 \bar{u}_m^\beta + \frac{2\Lambda^2}{\lambda} \int |D\eta|^2 \bar{u}^2 \bar{u}_m^\beta.
\end{aligned}$$

Com isso, vale a seguinte estimativa

$$\int a_{ij} D_i u D_j \varphi \geqslant \lambda\beta \int \eta^2 \bar{u}_m^\beta |D\bar{u}_m|^2 + \frac{\lambda}{2} \int \eta^2 \bar{u}_m^\beta |D\bar{u}|^2 - \frac{2\Lambda^2}{\lambda} \int |D\eta|^2 \bar{u}_m^\beta \bar{u}^2. \tag{5.1.3}$$

Como u é subsolução, temos que de (5.1.3) que

$$\lambda\beta\int\eta^2\bar{u}_m^\beta|D\bar{u}_m|^2+\frac{\lambda}{2}\int\eta^2\bar{u}_m^\beta|D\bar{u}|^2-frac2\Lambda^2\lambda\int|D\eta|^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+\int cu\eta^2(\bar{u}_m^\beta\bar{u}-k^{\beta+1})$$
$$\leqslant\int f\eta^2(\bar{u}_m^\beta\bar{u}-k^{\beta+1}).$$

Usando agora o fato que $\bar{u}\geqslant k$

$$\begin{aligned}2\beta\int\eta^2\bar{u}_m^\beta|D\bar{u}_m|^2+\int\eta^2\bar{u}_m^\beta|D\bar{u}|^2 &\leqslant\frac{4\Lambda^2}{\lambda^2}\int|D\eta|^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+\frac{2}{\lambda}\int|c|\eta^2\bar{u}^2\bar{u}_m^\beta+\frac{2}{\lambda}\int|f|\eta^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}\\ &=\frac{4\Lambda^2}{\lambda^2}\int|D\eta|^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+\frac{2}{\lambda}\int(|c|\eta^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+|f|\eta^2\bar{u}_m^\beta\bar{u})\\ &\leqslant C\left\{\int|D\eta|^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+\int(|c|\eta^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+|f|\eta^2\bar{u}_m^\beta\bar{u})\right\}\\ &\leqslant C\left\{\int|D\eta|^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+\int\left(|c|+\frac{|f|}{k}\right)\eta^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2\right\}\end{aligned}$$

onde $c_0\coloneqq|c|+\frac{|f|}{k}$.

Escolha $k=||f||_{L^q}$ se f não identicamente nula. Caso contrário escolha $k>0$ arbitrário e tome depois $k\to0^+$. Por hipótese, temos que

$$||c_0||_{L^q}\leqslant\Lambda+1.$$

Tome agora $w=\bar{u}_m^{\frac{\beta}{2}}\bar{u}$, um cálculo direto nos mostra

$$Dw=\bar{u}^{\frac{\beta}{2}}\left(\frac{\beta}{2}D\bar{u}_m+D\bar{u}\right)$$

assim

$$\begin{aligned}|Dw|^2=\bar{u}_m^\beta\left|\frac{\beta}{2}D\bar{u}_m+D\bar{u}\right|^2 &= \bar{u}_m^\beta\left(\frac{\beta^2}{4}|D\bar{u}_m|^2+\beta D\bar{u}_m\cdot D\bar{u}+|D\bar{u}|^2\right)\\ &\leqslant \bar{u}_m^\beta\left(\frac{\beta^2}{4}|D\bar{u}_m|^2+\beta|D\bar{u}_m||D\bar{u}|+|D\bar{u}|^2\right)\\ &\underbrace{=}_{\bar{u}_m=\bar{u}} \bar{u}_m^\beta\left(\beta\left(\frac{\beta}{4}+1\right)|D\bar{u}_m|^2+|D\bar{u}|^2\right)\\ &\leqslant (\beta+1)(\beta\bar{u}_m^\beta|D\bar{u}_m|^2+\bar{u}_m^\beta|D\bar{u}|^2).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \eta^2|Dw|^2 \leqslant (\beta+1)\left\{\beta\int \bar{u}_m^{\beta}|D\bar{u}_m|^2\eta^2 + \int \bar{u}_m^{\beta}|D\bar{u}|^2\eta^2\right\}$$

usando a definição da função w obtemos

$$\int \eta^2|Dw|^2 \leqslant C\left\{(\beta+1)\int w^2|D\eta|^2 + (1+\beta)\int c_0 w^2\eta^2\right\}.$$

Usando agora que $D(\eta w) = D\eta w + \eta Dw$, temos

$$|D(\eta w)|^2 \leqslant |D\eta|^2 w^2 + 2|\eta||w||D\eta||Dw| + \eta^2|Dw|^2$$

integrando essa desigualdade e usando desigualdade de Cauchy, vale que

$$\int |D(\eta w)|^2 \leqslant C\left\{(\beta+1)\int w^2|D\eta|^2 + (1+\beta)\int c_0 w^2\eta^2\right\}.$$

Pela desigualdade de Hölder temos:

$$\int c_0 w^2\eta^2 \leqslant \left(\int c_0^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int ((\eta w)^2)^{\frac{q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

como $\|c_0\|_{L^q} \leqslant (\Lambda+1)$, temos

$$\int c_0 w^2\eta^2 \leqslant (\Lambda+1)\left(\int (\eta w)^{\frac{2q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

Note que $2^* = \frac{2n}{n-2} > \frac{2q}{q-1} > 2$ se $q > \frac{n}{2}$, daí $\frac{q-1}{2q} \in (\frac{1}{2^*}, \frac{1}{2})$, logo como $(\frac{1}{2^*}, \frac{1}{2})$ é convexo, existe $\theta^* \in (0,1)$ tal que

$$\frac{q-1}{2q} = \frac{1}{2^*}\theta^* + (1-\theta^*)\frac{1}{2}$$

pela desigualdade de interpolação, temos

$$\|\eta w\|_{L^{\frac{2q}{q-1}}} \leqslant \|\eta w\|_{L^{2^*}}^{\bar{\theta}}\|\eta w\|_{L^2}^{1-\bar{\theta}}$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Aplicando a desigualdade de Young com ϵ temos

$$\|\eta w\|_{L^{\frac{2q}{q-1}}} \leqslant \epsilon\|\eta w\|_{L^{2^*}}^{\bar{\theta}\bar{p}} + C(\epsilon)\|\eta w\|_{L^2}^{(1-\bar{\theta})\bar{q}} \quad onde \quad \frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$$

com $C(\epsilon) = \frac{1}{\bar{q}}\frac{1}{\bar{p}^{\frac{\bar{q}}{\bar{p}}}}\epsilon^{-\frac{\bar{q}}{\bar{p}}}$, tomando $\bar{p} = \frac{2q}{n}$ e $\bar{q} = \frac{2q}{2q-n}$, temos $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = \frac{2q-n+n}{2q} = 1$.

Agora pela desigualde de Sobolev, temos que

$$\|nw\|_{L^{\frac{2q}{q-1}}} \leqslant \epsilon C(n)\|D(nw)\|_{L^2} + C(n,q)\epsilon^{\frac{-n}{2q-n}}\|nw\|_{L^2}$$

para qualquer ϵ pequeno.

Assim

$$\int |D(\eta w)|^2 \leqslant C\left\{(1+\beta)\int w^2|D\eta|^2 + (1+\beta)(\Lambda+1)\left\{\int |nw|^{\frac{2q}{q-1}}\right\}^{\frac{q-1}{q}}\right\} \tag{5.1.4}$$

mas

$$\left\{\int |nw|^{\frac{2q}{q-1}}\right\}^{\frac{q-1}{q}} \leqslant 2\big(\epsilon^2 c(n)\|D(\eta w)\|_{L^2}^2 + C(n,q)^2\epsilon^{\frac{-2n}{2q-n}}\|\eta w\|_{L^2}^2\big).$$

Tomando ϵ tal que $(1+\beta)\epsilon^{\frac{-2n}{2q-n}} = (1+\beta)^{\frac{2q}{2q-n}}$, A identidade (5.1.4) se torna então

$$\int |D(\eta w)|^2 \leqslant C\left\{(1+\beta)\int w^2|D\eta|^2 + (1+\beta)^{\frac{2q}{2q-n}}\int \eta^2 w^2\right\}$$

em particular

$$\int |D(\eta w)|^2 \leqslant C(1+\beta)^{\alpha}\int (|D\eta|^2 + \eta^2)w^2 \tag{5.1.5}$$

onde α é um número positivo dependendo apenas de n e q.

A desigualdade de Sobolev implica que (5.1.5) se torna

$$\begin{aligned}\left(\int (\eta w)^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} &= \left(\int (\eta w)^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}}\\ &\leqslant C\int |D(\eta w)|^2\\ &\leqslant C(1+\beta)^\alpha \int (|D\eta|^2+\eta^2)w^2\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

onde $\chi = \frac{n}{n-2} > 1$ para $n > 2$ e $\chi > 2$ para $n = 2$. Escolha agora uma função cut-off, tal que para $0 < r < R \leqslant 1$ a função seja $\eta \in C_0^1(B_R)$ com a seguinte propriedade

$$\eta = 1 \ \ em\ B_r \ \ e \ \ |D\eta| \leqslant \frac{2}{R-r}.$$

Substituindo em (5.1.6)

$$\left(\int_{B_1} (\eta w)^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \leqslant C(1+\beta)\int_{B_R} (|D\eta|^2+\eta^2)w^2 \tag{5.1.7}$$

já que $\eta \in C_0^1(B_R)$.

Usando as outras propriedades da função η em (5.1.7)

$$0 \leqslant C(1+\beta)^\alpha \int_{B_R} |D\eta|^2 w^2 + C(1+\beta)^\alpha \int_{B_R} \eta^2 w^2 - \left(\int_{B_1} (\eta w)^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}}$$

mas pela desigualdade de Hölder

$$0 \leqslant C(1+\beta)^\alpha \int_{B_R} |D\eta|^2 w^2 + C(1+\beta)^\alpha \left(\int_{B_R} (\eta w)^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} med(B_R)^{\frac{2}{n}} - \left(\int_{B_1} (\eta w)^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}}$$

assim

$$\left(\int_{B_1} (\eta w)^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \leqslant C(1+\beta)^\alpha \int_{B_R} |D\eta|^2 w^2$$

de onde segue que

$$\left(\int_{B_r} w^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \leqslant \frac{C(1+\beta)^{\alpha}}{(R-r)^2}\int_{B_R} w^2. \tag{5.1.8}$$

Usando a definição de w, a identidade (5.1.8) fica

$$\left(\int_{B_r} \bar{u}^{2\chi}\bar{u}_m^{\beta\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \leqslant \frac{C(1+\beta)^{\alpha}}{(R-r)^2}\int_{B_R} \bar{u}^2\bar{u}_m^{\beta}$$

tomando agora $\gamma = \beta + 2 \geqslant 2$, obtemos

$$\left(\int_{B_r} \bar{u}_m^{\gamma\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \leqslant \frac{C(\gamma-1)^{\alpha}}{(R-r)^2}\int_{B_R} \bar{u}^{\gamma}.$$

Desde que o lado direito na identidade anterior seja limitado. Por fim, vemos que $(\bar{u}_m)_m$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativa, temos ainda que $\bar{u}_m \to \bar{u}$ quando $m \to \infty$, assim pelo lema de Fatou

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_r} \bar{u}^{\gamma\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} &\leqslant \liminf_{m\to\infty}\left(\int_{B_r} \bar{u}_m^{\gamma\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \\ &\leqslant \frac{C(\gamma-1)^{\alpha}}{(R-r)^2}\int_{B_R} \bar{u}^{\gamma}.\end{aligned}$$

Em termos de norma temos

$$\|\bar{u}\|_{L^{\gamma\chi}(B_r)} \leqslant \left(\frac{C(\gamma-1)^{\alpha}}{(R-r)^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\|\bar{u}\|_{L^{\gamma}(B_R)} \tag{5.1.9}$$

onde $C = C(n, q, \lambda, \Lambda) > 0$ e independe de γ. Daí, como (5.1.9) é válida para todo $0 < r < R \leqslant 1$ e para todo $\gamma \geqslant 2$, fazemos uma iteração, tomando sucessivamente os valores $\gamma = 2, 2\chi, 2\chi^2, \ldots$. Defina para todo $i = 1, 2, \ldots$

$$\gamma_i = 2\chi^i \;\text{ e }\; r_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Como $\gamma_i = \chi\gamma_{i-1}$ e $r_{i-1} - r_i = \frac{1}{2^{i+1}}$, substituimos $r = r_i$, $R = r_{i-1}$ e $\gamma = \gamma_i$ em (5.1.9)

$$\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_i}(B_{r_i})} \leqslant C(n, q, \lambda, \Lambda)^{\frac{i}{\chi^i}} \|\bar{u}\|_{L^{\gamma_{i-1}}(B_{r_{i-1}})} \tag{5.1.10}$$

desde que $\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_{i-1}}(B_{r_i})} \leqslant \infty$, vamos começar então a iteração, para isso tome $i = 1, 2, 3, \ldots$ em (5.1.10) temos que

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_1}(B_{r_1})} &\leqslant C(n, q, \lambda, \Lambda)^{\frac{1}{\chi}} \|\bar{u}\|_{L^{\gamma_0}(B_{r_0})} \\
\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_2}(B_{r_2})} &\leqslant C(n, q, \lambda, \Lambda)^{\frac{2}{\chi^2}} \|\bar{u}\|_{L^{\gamma_1}(B_{r_1})} \\
&\cdots \\
\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_{i-1}}(B_{r_{i-1}})} &\leqslant C(n, q, \lambda, \Lambda)^{\frac{i-1}{\chi^{i-1}}} \|\bar{u}\|_{L^{\gamma_{i-2}}(B_{r_{i-2}})} \\
\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_i}(B_{r_i})} &\leqslant C(n, q, \lambda, \Lambda)^{\frac{i}{\chi^i}} \|\bar{u}\|_{L^{\gamma_{i-1}}(B_{r_{i-1}})}.
\end{aligned}$$

Multiplicando todas essas desigualdades e notando que $\gamma_0 = 2$ e $r_0 = 1$, obtemos

$$\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_i}(B_{r_i})} \leqslant C^{\sum \frac{i}{\chi^i}} \|\bar{u}\|_{L^2(B_1)} \ \forall \ i \geqslant 1$$

em particular, como todo $r_i \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} \bar{u}^{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} &\underbrace{=}_{\gamma_i = 2\chi^i} \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} \bar{u}^{2\chi^i} \right)^{\frac{1}{2\chi^i}} \\
&\leqslant C \left(\int_{B_1} \bar{u}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Tomando $i \to \infty$, temos $\chi^i \to \infty$

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leqslant C\|\bar{u}\|_{L^2(B_1)}$$

de onde segue a estimativa,

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \bar{u} \leqslant C\|\bar{u}\|_{L^2(B_1)}.$$

Mas $\bar{u} = u^+ + k$, então

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u^+ &\leqslant C\|u^+ + k\|_{L^2(B_1)} \\
&\underbrace{\leqslant}_{Minkowski} C\|u^+\|_{L^2(B_1)} + C\|k\|_{L^2(B_1)} \\
&\leqslant C\{\|u^+\|_{L^2(B_1)} + k\}.
\end{aligned}$$

Para o caso geral considere, inicialmente qualquer $R \leqslant 1$. Seja

$$\bar{u}(y) = u(Ry) \quad para \quad y \in B_1$$

vamos mostrar agora que $\bar{u}$ é subsolução fraca da equação $Lu = f$ em B_1 sabendo que u o é.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \bar{a}_{ij} D_i \bar{u} D_j \varphi + \bar{c}\bar{u}\varphi &= \int_{B_1} a_{ij}(Ry)(RD_i u(Ry))D_j \varphi(y) + \int_{B_1} (R^2 c(Ry))u(Ry)\varphi(y) \\
&= R^{n+1} \int_{B_R} a_{ij}(z) D_i u(z) D_j \varphi\left(\frac{z}{R}\right) + R^{n+2} \int_{B_R} c(z)u(z)\varphi\left(\frac{z}{R}\right) \\
&= R^{n+2} \left(\int_{B_R} a_{ij} D_i u D_j \bar{\varphi} + cu\bar{\varphi} \right) \\
&\leqslant R^{n+2} \int_{B_R} f(z)\bar{\varphi}(z) \\
&= \int_{B_1} R^2 f(y)\varphi(y) \\
&= \int_{B_1} \bar{f}(y)\varphi(y)
\end{aligned}$$

onde $\bar{a}_{ij} = a_{ij}(Ry)$, $\bar{c} = R^2 c(Ry)$, $\bar{f} = R^2 f(Ry)$ e $\bar{\varphi}(y) = \varphi\left(\frac{y}{R}\right)$.

Vale também que

$$|\bar{a}_{ij}|_{L^\infty(B_1)} + \|\bar{c}\|_{L^q(B_1)} = |a_{ij}|_{L^\infty(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}\|c\|_{L^q(B_1)} \leqslant \Lambda.$$

Note que $\bar{u}, \bar{a}_{ij}, \bar{c}$ satisfazem as hipóteses do teorema (5.1), portanto aplicando-o para o caso $p = 2$ temos

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \bar{u}^+ \leqslant C\left\{ \|\bar{u}\|_{L^2(B_1)} + \|\bar{f}\|_{L^q(B_1)} \right\} \tag{5.1.11}$$

escrevendo agora (5.1.11) em termos de u temos que para todo $p \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{R}{2}}} u^+ &\leqslant C\{\|\bar{u}\|_{L^p(B_1)} med(B_1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} + R^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_1)}\} \\ &\leqslant C\{\|\bar{u}\|_{L^p(B_1)} + R^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_1)}\} \\ &\leqslant C\{R^{2-\frac{n}{p}}\|u^+\|_{L^p(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_R)}\} \\ &\underbrace{\leqslant}_{R\leqslant 1} C\left\{ \frac{1}{R^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_R)} \right\} \end{aligned}$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q)$ é uma constante positiva.

A estimativa para $B_{\theta R}$ é obtida aplicando o resultado acima a $B_{(1-\theta)R}(y)$ para qualquer $y \in B_{\theta R}$, com efeito

$$u^+(y) \leqslant \sup_{B_{\frac{(1-\theta)R}{2}}} u^+ \leqslant C\left\{ \frac{1}{[R(1-\theta)]^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_{(1-\theta)R}(y))} + \|f\|_{L^q(B_{(1-\theta)R}(y))} \right\}$$

para todo $y \in B_{\frac{\theta R}{2}}$. Tomando $R = 1$ segue o teorema (2.1) para $p \geqslant 2$.

Agora provamos para $p \in (0, 2)$. Mostramos que para qualquer $\theta \in (0, 1)$ e $0 < R \leqslant 1$ vale

$$\|u^+\|_{L^\infty(B_{\theta R})} \leqslant C\left\{ \frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}\|u^+\|_{L^2(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_R)} \right\}.$$

Para $p \in (0, 2)$ temos pela desigualdade de interpolação que

$$\|u^+\|^2_{L^2(B_R)} \leqslant \|u^+\|^{2-p}_{L^\infty(B_R)}\|u^+\|^p_{L^p(B_R)}$$

e assim

$$\|u^+\|_{L^\infty(B_{\theta R})} \leqslant C\left\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}\|u^+\|^{1-\frac{p}{2}}_{L^\infty(B_R)}\|u^+\|^{\frac{p}{2}}_{L^p(B_R)} + \|f\|_{L^q(B_R)}\right\}.$$

Pela desigualdade de Young com $\epsilon = \frac{1}{2C}$, temos

$$\begin{aligned}\|u^+\|_{L^\infty(B_{\theta R})} &\leqslant C\left\{\|u^+\|^{\frac{2-p}{2}}_{L^\infty(B_R)}\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}\|u^+\|^{\frac{p}{2}}_{L^p(B_R)} + \|f\|_{L^q(B_R)}\right\}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\|u^+\|_{L^\infty(B_R)} + C\left\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_R)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right\}.\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

Seja $h(t) = \|u^+\|_{L^\infty(B_t)}$ para $t \in (0,1]$. Então para qualquer $0 < r < R \leqslant 1$

$$h(r) \leqslant \frac{1}{2}h(R) + \frac{C}{(R-r)^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}.$$

Note que aqui, fizemos $\theta = \frac{r}{R}$ em (5.1.12), uma vez que $\frac{r}{R} \in (0,1)$. Agora aplicamos o lema abaixo para qualquer $0 < r < R < 1$

$$h(r) \leqslant \frac{C}{(R-r)^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_1)} + C\|f\|_{L^q(B_1)}$$

tomando $R \to 1^-$, obtemos para qualquer $\theta < 1$

$$\|u^+\|_{L^\infty(B_\theta)} \leqslant \frac{C}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_1)} + C\|f\|_{L^q(B_1)}.$$

Lema 5.1 *Seja* $f(t) \geqslant 0$ *limitada em* $[\tau_0, \tau_1]$ *com* $\tau_0 \geqslant 0$. *Suponha que para* $\tau_0 \leqslant t < s \leqslant \tau_1$ *tenhamos*

$$f(t) \leqslant \theta f(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + B$$

para algum $\theta \in [0,1)$. *Então para cada* $\tau_0 \leqslant t < s \leqslant \tau_1$ *vale*

$$f(t) \leqslant c(\alpha,\theta)\left\{\frac{A}{(s-t)^\alpha} + B\right\}.$$

Prova: Fixando $\tau_0 \leqslant t < s \leqslant \tau_1$. Para algum $0 < \tau < 1$ consideramos a sequência $\{t_i\}$ definida por

$$t_0 = 1 \ \ e \ \ t_{i+1} = t_i + (1-\tau)\tau^i(s-t)$$

pela lei de formação da sequência $\{t_i\}$ temos

$$t_i = t_0 + (1-\tau)(s-t)\sum_{j=1}^{n}\tau^j.$$

Tomando $i \to \infty$ e usando o fato que $0 < \tau < 1$, segue que

$$\lim_{\imath\to\infty} t_i = t_0 + \frac{1}{1-\tau}(s-t)(1-\tau) = s$$

daí, com um abuso de notação fazemos $t_\infty = s$.

Por um processo de iteração como no caso particular do teorema (5.1) temos

$$f(t) = f(t_0) \leqslant \tau^k f(t_k) + \left[\frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(s-t)^{-\alpha} + B\right]\sum_{i=0}^{k-1}\tau^i\tau^{-i\alpha}.$$

Escolhendo $\tau < 1$ tal que $\theta < \tau^\alpha < 1$. Tomando $k \to \infty$, segue o resultado.

5.2 Hölder Continuidade

Vamos discutir equações homogêneas sem termos de menor ordem. Considere

$$Lu \equiv -D_i(a_{ij}(x)D_j u) \ \ em \ \ B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$$

onde $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ satisfaz

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \ \ \forall \ \ x \in B_1(0) \ \ e \ \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 5.2 *A função* $u \in H^1_{loc}(B_1)$ *é chamada subsolução (supersolução) da equação* $Lu = 0$ *se*

$$\int_{B_1} a_{ij}D_i u D_j \varphi \leqslant 0 \ \ (\geqslant 0)$$

para toda $\varphi \in H^1_0(B_1)$ *e* $\varphi \geqslant 0$.

Lema 5.2 *Seja* $\phi \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$ *convexa. Então* *a) Se* u *é uma subsolução e* $\phi' \geqslant 0$*, então* $v = \phi(u)$ *é também subsolução desde que* $v \in H^1_{loc}(B_1)$.

b) Se u *é supersolução e* $\phi' \leqslant 0$*, então* $v = \phi(u)$ *é também subsolução desde que* $v \in H^1_{loc}(B_1)$.

Prova: Assuma inicialmente que $\phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R})$. Então, por hipótese $\phi'(s) \geqslant 0$, por convexidade $\phi''(s) \geqslant 0$. Considere $\varphi \in C^1_0(B_1)$ com $\varphi \geqslant 0$. Um cálculo direto nos dá que

$$\begin{aligned}\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi &= \int_{B_1} a_{ij}\phi'(u) D_i u D_j \varphi \\ &= \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j(\phi'(u)\varphi) - \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\varphi\phi''(u).\end{aligned}$$

Note agora que $\phi'(u)\varphi \in H^1_0(B_1)$ é não-negativa, logo pode ser usada como função teste. Assim

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j(\phi'(u)\varphi) \leqslant 0$$

por outro lado

$$\int_{B_1} \lambda |Du|^2 \phi'(u)\varphi \leqslant \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\varphi\phi'(u)$$

para alguma constante positiva λ, daí

$$-\int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\varphi\phi'(u) \leqslant 0.$$

Portanto, conclui-se que

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i \varphi D_j \varphi = \underbrace{\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j(\phi'(u)\varphi)}_{\leqslant 0} - \underbrace{\int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\varphi\phi''(u)}_{\geqslant 0}$$

logo u é subsolução. Em geral seja $\phi_\epsilon(s) = \eta_\epsilon * \phi(s)$ a molificação de ϕ, onde η_ϵ é o mollifier standard, então $\phi'_\epsilon(s) = \eta_\epsilon * \phi'(s) \geqslant 0$ e $\phi''_\epsilon \geqslant 0$. Assim ϕ_ϵ é subsolução como já provamos. Afirmamos agora que vale o seguinte

$$\phi'_\epsilon \to \phi'(s) \ \ \text{q.t.p} \ \ \text{quando } \epsilon \to 0^+.$$

Para ver a validade dessa informação. Fixamos um ponto s, então

$$\begin{aligned} |\phi_\epsilon'(s) - \phi'(s)| &= \left| \int_{B_\epsilon(s)} \eta_\epsilon(s-r)[\phi'(r) - \phi'(s)]dr \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(s)} \eta(\frac{s-r}{\epsilon})|\phi'(r) - \phi'(s)|dr \\ &\leqslant C \fint_{B_\epsilon(s)} |\phi'(r) - \phi'(s)| \end{aligned}$$

segue pelo teorema da diferenciação de Lebesgue que

$$\fint_{B_\epsilon(s)} |\phi'(r) - \phi'(s)| \to 0 \ \ q.t.p \ \ quando \ \epsilon \to 0^+.$$

Por fim, como φ possui suporte compacto, o teorema da convergência dominada é testemunha que

$$\begin{aligned} \int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi &= \int_{B_1} a_{ij} \lim_{\epsilon \to 0^+} \phi_\epsilon'(u) D_i u D_j \varphi \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B_1} a_{ij} \phi_\epsilon'(u) D_i u D_j \varphi \leqslant 0. \end{aligned}$$

A prova do item b) é similar.

Precisamos agora do seguinte lema.

Lema 5.3 *Para qualquer* $\epsilon > 0$ *existe uma constante* $c = c(\epsilon, n)$ *tal que para* $u \in H^1(B_1)$ *com*

$$m(\{x \in B_1; u = 0\}) \geqslant \epsilon m(B_1)$$

deve valer

$$\int_{B_1} u^2 \leqslant C \int_{B_1} |Du|^2.$$

Prova: Segue diretamente da desigualdade de Poincaré para a prova, veja em Leoni [12]-Teorema 12.23 - página 361.

O próximo teorema nos dirá que as soluções fracas da equação $Lu = -D_i(a_{ij}(x)D_iu)$ em $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ não podem oscilar bastante.

Teorema 5.2 *Suponha que* u *é uma supersolução positiva em* B_2 *com*

$$m(\{x \in B_1; u \geqslant 1\}) \geqslant \epsilon m(B_1).$$

Então existe uma constante positiva C *dependendo somente de* n, ϵ *e* $\frac{\Lambda}{\lambda}$ *tal que*

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u \geqslant C.$$

Prova: Uma vez que sempre podemos adicionar uma constante a u e mesmo assim a função resultante irá satisfazer as hipóteses do lema. Assim, podemos assumir que $u \geqslant \delta > 0$ (e fazemos $\delta \to 0^+$).

Mostremos que $v = (\log u)^-$ é subsolução, limitada por $\log \delta^{-1}$. Veja que $v \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$. Assim como u é supersolução e $\phi'(t) = -\frac{1}{t} < 0$, então pelo teorema (5.2) item b) temos que $v = (\log u)^-$ é subsolução, já que $v \in H^1_{loc}(B_1)$ pois v é limitada por $\log \delta^{-1}$ (basta usar a definição de v e que $u \geqslant \delta$).

Então o teorema (5.1) implica

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \leqslant C\left(\int_{B_1} v^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.1}$$

note agora que $m(\{x \in B_1; v = 0\}) = m(\{x \in B_1; u \geqslant 1\}) \geqslant \epsilon m(B_1)$, e assim pelo lema (5.3),

$$\left(\int_{B_1} |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\left(\int_{B_1} |Dv|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.2}$$

De (5.2.1) e (5.2.2)

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \leqslant C\left(\int_{B_1} |Dv|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.3}$$

Agora mostramos que a integral do lado direito de (5.2.3) é limitada. Para isso usamamos a função teste $\varphi = \frac{\xi^2}{u}$ para $\xi \in C^1_0(B_2)$.

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \int a_{ij} D_i u D_j \left(\frac{\xi^2}{u}\right) &= -\int \xi^2 \frac{a_{ij} D_i u D_j u}{u^2} + 2 \int \frac{\xi a_{ij} D_i u D_j \xi}{u} \\
&\underbrace{\leqslant}_{elipticidade} -\lambda \int |Du|^2 \frac{\xi^2}{u^2} + 2 \int \frac{\xi a_{ij} D_i u D_j \xi}{u} \\
&= -\lambda \int |D \log u|^2 \xi^2 + 2 \int \frac{\xi a_{ij} D_i u D_j \xi}{u}.
\end{aligned}
$$

Majorando a primeira integral temos

$$
\begin{aligned}
\lambda \int |D \log u|^2 \xi^2 &\leqslant 2 \int (\xi D_i u \frac{1}{u})(a_{ij} D_j \xi) \\
&\leqslant 2 \left(\int \frac{\xi^2}{u^2} (D_i u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (a_{ij})^2 (D_j \xi)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2 \left(\int \frac{\xi^2}{u^2} |Du|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (a_{ij})^2 |D\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2 \left(\int \xi^2 |D \log u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (a_{ij})^2 |D\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2\Lambda \left(\int \xi^2 |D \log u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |D\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

assim, concluímos que

$$
\int_{B_1} |D \log u|^2 \xi^2 \leqslant \frac{4\Lambda^2}{\lambda^2} \int_{B_1} |D\xi|^2 = C \int_{B_1} |D\xi|^2.
$$

Agora para cada $\xi \in C_0^1(B_2)$ fixada com $\xi \equiv 1$ em B_1, temos

$$
\int_{B_1} |D \log u|^2 \leqslant C
$$

usando (5.2.3)

$$
\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v = \sup_{B_{\frac{1}{2}}} (\log u)^- \leqslant C
$$

como $\sup v$ é cota superior

$$(\log u)^- \leqslant C.$$

Note que se $u \geqslant 1$ não há o que fazer, se $0 < u < 1$

$$\log u \geqslant -C$$

elevando ambos os membros a e

$$u \geqslant e^{-C}$$

assim $\inf\limits_{B_{\frac{1}{2}}} u \geqslant e^{-C}$.

Teorema 5.3 *(Teorema de Oscilação) Suponha que* u *é uma solução limitada de* $Lu = 0$ *em* B_2. *Então existe um número* $\gamma = \gamma(n, \frac{\Lambda}{\lambda}) \in (0,1)$ *tal que*

$$\operatorname{osc}_{B_{\frac{1}{2}}} u \leqslant \gamma \operatorname{osc}_{B_1} u.$$

Prova: Seja $\alpha_1 = \sup\limits_{B_1} u$ e $\beta_1 = \inf\limits_{B_1} u$. Considere as duas soluções positivas

$$\frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1} \quad e \quad \frac{\alpha_1-u}{\alpha_1-\beta_1}$$

temos que

(1) $u \geqslant \frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1) \Leftrightarrow \frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1} \geqslant \frac{1}{2}$

(2) $u \leqslant \frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1) \Leftrightarrow \frac{\alpha_1-u}{\alpha_1-\beta_1} \geqslant \frac{1}{2}$.

Vamos dividir a prova em dois casos:

Caso (1)

$$m\Big(\Big\{x \in B_1; \frac{2(u-\beta_1)}{\alpha_1-\beta_1} \geqslant 1\Big\}\Big) \geqslant \frac{1}{2} m(B_1). \tag{5.2.4}$$

Aplicando o teorema da densidade a (5.2.4) com $\epsilon = \frac{1}{2}$ e a função $\frac{2(u-\beta_1)}{\alpha_1-\beta_1} \geqslant 0$, temos que

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} \frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1} \geqslant \frac{1}{C} \tag{5.2.5}$$

para alguma constante C. Usando (5.2.5) e o fato que o ínfimo é uma cota inferior, temos

$$u \geqslant \beta_1 + \frac{1}{C}(\alpha_1-\beta_1)$$

daí

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u \geqslant \beta_1 + \frac{1}{C}(\alpha_1 - \beta_1).$$

Caso (2)

$$m\Big(\Big\{x \in B_1; \frac{2(\alpha_1 - u)}{\alpha_1 - \beta_1} \geqslant 1\Big\}\Big) \geqslant \frac{1}{2} m(B_1). \tag{5.2.6}$$

Com um cálculo análogo mostramos que

$$\alpha_2 = \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leqslant \alpha_1 - \frac{1}{C}(\alpha_1 - \beta_1).$$

Agora defina

$$\alpha_2 = \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \quad e \ \beta_2 = \inf_{B_{\frac{1}{1}}} u$$

como $B_{\frac{1}{2}} \subset B_1$, temos

$$\alpha_2 \leqslant \alpha_1 \quad e \ \beta_2 \geqslant \beta_1.$$

Assim, como

$$\begin{cases} -\beta_2 \leqslant -\beta_1 - \frac{1}{C}(\alpha_1 - \beta_1) \\ \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_1 - \frac{1}{C}(\alpha_1 - \beta_1) \end{cases}$$

vale que

$$\alpha_2 - \beta_2 \leqslant (1 - \frac{2}{C})(\alpha_1 - \beta_1)$$

de onde segue o resultado.

Como consequência imediata deste resultado, temos o teorema de De Giorgi, que diz que toda solução fraca da equação $Lu = 0$ é α-Hölder contínua.

Teorema 5.4 *Suponha que* $Lu = 0$ *fracamente em* B_1*. Então*

$$\sup_{x \in B_{\frac{1}{2}}} |u(x)| + \sup_{x,y \in B_{\frac{1}{2}}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} \leqslant C\Big(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\Big) \|u\|_{L^2(B_1)}$$

com $\alpha = \alpha\Big(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\Big)$

Prova: Uma parte da desigualdade é dada pelo teorema (2.1), isto é,

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |u(x)| \leqslant C\|u\|_{L^2(B_1)}.$$

Para a outra parte, fixe dois pontos arbitrários $x, y \in B_1$ e seja $r = |x - y|$, afirmamos agora que existe $n \geqslant 0$ tal que $2^{-n+1} > r \geqslant 2^{-n}$. Pela propriedade arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{r} \Rightarrow n + 1 > n > \frac{1}{r}.$$

Agora pela desigualdade de Bernoulli temos $2^n \geqslant 1+n$, assim segue um lado da desigualdade, isto é, $r \geqslant 2^{-n}$, para o outro lado, vamos analisar duas possibilidades. Para $n = 0$, é imediato pela desigualdade triangular. Agora, pelo princípio da boa ordenação existe $n = menor \;\; natural \;\; tal \;\; que \;\; r \geqslant 2^{-n}$, segue pela minimalidade de n que $r < 2^{-(n+1)} = 2^{-n+1}$ que é o lado contrário da desigualdade.

Para $x \in B_{\frac{1}{2}}$, segue pelo teorema de oscilação que

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}_{B_r(x)} u &\leqslant \gamma \operatorname{osc}_{B_{2r}(x)} u \\ \operatorname{osc}_{B_{2r}(x)} u &\leqslant \gamma^2 \operatorname{osc}_{B_{2^2r}(x)} u \\ &\cdots \\ \operatorname{osc}_{B_{2^{n-2}r}(x)} u &\leqslant \gamma^{n-1} \operatorname{osc}_{B_{2^{n-1}r}(x)} u. \end{aligned}$$

Assim $\operatorname{osc}_{B_r(x)} u \leqslant \gamma^{n-1} \operatorname{osc}_{B_{2^{n-1}r}(x)} u$, pelo teorema (5.1) segue que

$$\operatorname{osc}_{B_r(x)} u \leqslant 2C\|u\|_{L^2(B_1)}$$

em particular

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \gamma^{n-1} 2C\|u\|_{L^2(B_1)}.$$

Para finalizar notemos que, como $r \geqslant 2^{-n}$ então $r^\alpha \geqslant 2^{-n\alpha}$ para qualquer $\alpha \in (0,1)$ assim

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} &\leqslant 2C\gamma^{n-1} 2^{n\alpha} \|u\|_{L^2(B_1)} \\ &\leqslant 8C(2^\alpha \gamma)^{n-1} \|u\|_{L^2(B_1)} \end{aligned}$$

tomando α tal que $2^\alpha \gamma = 1$, segue o resultado.

5.3 Desigualdade de Moser-Harnack

Teorema 5.5 *(Desigualdade de Harnack Fraca) Seja* $u \in H^1(\Omega)$ *uma super solução não-negativa em* Ω *no seguinte sentido*

$$\int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j \varphi) \geqslant \int_{B_1} f\varphi \quad \text{para qualquer } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ e } \varphi \geqslant 0 \text{ em } B_1. \tag{5.3.1}$$

Suponha que $f \in L^q(\Omega)$ *para algum* $q > \frac{n}{2}$*. Então para qualquer* $B_R \subset \Omega$ *deve valer para todo* $0 < p < \frac{n}{n-2}$ *e para todo* $0 < \theta < \tau < 1$

$$\inf_{B_{\theta R}} u + R^{2-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_R)} \geqslant C \left(\frac{1}{R^n} \int_{B_{\tau R}} u^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $C = (n, p, q, \lambda, \Lambda, \theta, \tau)$.

Prova: Provaremos incialmente que o resultado permananece válido para qualquer $p_0 > 0$ e para $R = 1$. Seja $\bar{u} = u + k > 0$ para algum $k > 0$ a ser determinado e $v = \bar{u}^{-1}$. Inicialmente vamos dar uma equação para v. Para qualquer $\varphi \in H_0^1(B_1)$ com $\varphi \geqslant 0$ em B_1 considere $\bar{u}^{-2}\varphi$ como função teste em (22)

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \frac{\varphi}{\bar{u}^2} - 2 \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \bar{u} \frac{\varphi}{\bar{u}^3} \geqslant \int_{B_1} f \frac{\varphi}{\bar{u}^2}.$$

É claro que $D\bar{u} = Du$ e $Dv = \frac{-Du}{\bar{u}^2}$ portanto

$$-\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi - 2 \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j u \frac{\varphi}{\bar{u}^3} \geqslant \int_{B_1} \bar{f} v \varphi$$

assim

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi + \bar{f} v \varphi \leqslant -2 \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j u \frac{\varphi}{\bar{u}^3}$$

onde $\bar{f} = \frac{f}{\bar{u}}$.

Como

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j u \frac{\varphi}{\bar{u}^3} \geqslant \lambda \int_{B_1} |Du|^2 \frac{\varphi}{\bar{u}^3} \geqslant 0$$

segue que

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi \leqslant 0$$

e assim

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi + \bar{f} v \varphi \leqslant 0.$$

Em outras palavras, acabamos de mostrar que v é uma subsolução de alguma equação homogênea. Quanto ao valor de k, escolha $k = ||f||_{L^q}$ se f não é identicamente nula, caso contrário escolha um k arbitrário e depois faça $k \to 0^+$. Agora mostramos que

$$||\bar{f}||_{L^q(B_1)} \leqslant 1. \tag{5.3.2}$$

Ora, se $f \equiv 0$ o resultado segue trivialmente. Se $f \not\equiv 0$, então $\bar{f} = \frac{1}{u+||f||_{L^q}}$ assim $\bar{f}(u + ||f||_{L^q}) = f$. Por hipótese $u \in H^1(B_1)$ é não-negativa. Daí $u + ||f||_{L^q} \geqslant ||f||_{L^q}$, portanto, como $|\bar{f}|^q ||f||_{L^q} \leqslant |f|^q$ temos

$$\int_{B_1} |\bar{f}|^q \leqslant \frac{1}{||f||_{L^q}} \int_{B_1} |f|^q = 1$$

o que prova (5.3.2).

Usando agora o teorema (5.1) concluimos que para qualquer $\tau \in (\theta, 1) \subset (0,1)$ e qualquer $p > 0$

$$\sup_{B_\theta} v \leqslant C \left(\int_{B_\tau} v^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

daí em B_θ vale

$$v \leqslant C \left(\int_{B_\tau} v^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

elevando ambos os membros a p

$$v^p \leqslant C \int_{B_\tau} v^p.$$

Pela definição de supremo

$$\sup_{B_\theta} v^p \leqslant C \int_{B_\tau} v^p$$

usando a definição da função v temos

$$\bar{u}^{-p} \leqslant C \int_{B_\tau} \bar{u}^{-p}$$

elevando ambos os lados da desigualdade a p

$$\bar{u}^{-1} \leqslant C \left(\int_{B_\tau} \bar{u}^{-p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando novamente a definição de supremo

$$\sup_{B_\theta} (\bar{u}^{-1}) \leqslant C \left(\int_{B_\tau} \bar{u}^{-p} \right)^{-\frac{1}{p}}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \inf_{B_\theta} \bar{u} &\geqslant C \left(\int_{B_\tau} \bar{u}^{-p} \right)^{\frac{-1}{p}} \\ &= C \left(\int_{B_\tau} \bar{u}^{-p} \int_{B_\tau} \bar{u}^{p} \right)^{\frac{-1}{p}} \left(\int_{B_\tau} \bar{u}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

O ponto chave é mostrar que existe $p_0 > 0$ tal que

$$\left(\int_{B_\tau} \bar{u}^{-p_0} \right) \left(\int_{B_\tau} \bar{u}^{p_0} \right) \leqslant C(n, q, \lambda, \Lambda, \tau) \tag{5.3.3}$$

onde $w = \log \bar{u} - \beta$ e $\beta = \fint_{B_\tau} \log \bar{u}$.

Para isso afirmamos que para qualquer $\tau < 1$ vale

$$\int_{B_\tau} e^{p_0 |w|} \leqslant C(n, q, \lambda, \Lambda, \tau) \tag{5.3.4}$$

veja que, se (5.3.4) é válido, então vale

$$e^{p_0|w|} \geqslant e^{p_0(\log \bar{u} - \beta)}$$

assim

$$e^{p_0|w|} \geqslant e^{p_0 \log \bar{u}}.e^{-p_0\beta} \tag{5.3.5}$$

e

$$e^{p_0|w|} \geqslant e^{p_0(-\log \bar{u} + \beta)}$$

portanto

$$e^{p_0|w|} \geqslant e^{-p_0 \log \bar{u}}.e^{p_0\beta}. \tag{5.3.6}$$

Segue de (5.3.5) e (5.3.6)

$$\begin{aligned} \int_{B_\tau} \bar{u}^{-p_0} &\leqslant e^{-\beta p_0} \int_{B_\tau} e^{|w|p_0} \\ &\leqslant e^{-\beta p_0} C(n, q, \lambda, \Lambda, \tau) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{B_\tau} \bar{u}^{p_0} &\leqslant e^{\beta p_0} \int_{B_\tau} e^{|w|p_0} \\ &\leqslant e^{\beta p_0} C(n, q, \lambda, \Lambda, \tau) \end{aligned}$$

o que mostra (5.3.3).

A prova de (5.3.4) segue do lema de John-Nirenberg (veja em Han e Qing 9 página 52) para isso basta mostra que $w \in \mathsf{OML}$ (oscilação média limitada), isto é, para qualquer $B_r(y) \subset B_r(0) \subset B_1(0)$

$$\int_{B_r} |w - w_{y,r}| \leqslant cr^n$$

onde $w_{y,r} = \fint_{B_r(y)} w$.

Para mostrar que $w \in OML$ devemos verificar inicialmente que w satisfaz a seguinte identidade

$$\int\limits_{B_1} |Dw|^2\varphi^2 \leqslant C \int\limits_{B_1} |D\varphi|^2 \tag{5.3.7}$$

para cada $\varphi \in L^\infty(B_1) \cap H_0^1(B_1)$ com $\varphi \geqslant 0$ e $C = C(n, q, \lambda, \Lambda) > 0$.

Para provar (5.3.7) tomamos como função teste em (22) $\bar{u}^{-1}\varphi$, onde $\varphi \in L^\infty(B_1) \cap H_0^1(B_1)$ e $\varphi \geqslant 0$ temos que, como $Dw = \bar{u}^{-1}D\bar{u}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_1} a_{ij}D_iuD_j\bar{u}^{-1}\varphi &= \int\limits_{B_1} a_{ij}\Big(\frac{1}{\bar{u}}D_i\bar{u}\Big)D_j\bar{u}\Big(\frac{-1}{\bar{u}}\Big)\varphi + \int\limits_{B_1} a_{ij}D_iu\frac{1}{\bar{u}}D_j\varphi \\
&= -\int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_jw\varphi + \int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\varphi \qquad (5.3.8)
\end{aligned}$$

assim

$$-\int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_jw\varphi + \int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\varphi \geqslant \int\limits_{B_1} f\varphi\bar{u}^{-1}.$$

De onde se conclui a estimativa

$$\int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_jw\varphi \leqslant \int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\varphi + \int\limits_{B_1}(-\bar{f}\varphi) \tag{5.3.9}$$

substituindo φ por φ^2 em (5.3.9) e usando a condição de elipticidade temos

$$\begin{aligned}
\lambda\int\limits_{B_1} |Dw|^2\varphi^2 &\leqslant \int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\varphi^2 + \int\limits_{B_1}(-\bar{u}\varphi^2) \\
&\leqslant \int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\varphi^2 + \int\limits_{B_1} |\bar{f}|\varphi^2
\end{aligned}$$

segue por transitividade que

$$\lambda\int\limits_{B_1} |Dw|^2\varphi^2 \leqslant \int\limits_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\varphi^2 + \int\limits_{B_1} |\bar{f}|\varphi^2. \tag{5.3.10}$$

Agora vamos estimar a integral do meio em (5.3.10)

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i w 2\varphi D_j \varphi = \int_{B_1} (a_{ij} D_i \varphi 2)(D_i w \varphi) \tag{5.3.11}$$

usando a desigualde de Cauchy com ϵ em (5.3.11) temos

$$\begin{aligned} \int_{B_1} (a_{ij} D_i \varphi 2)(\varphi D_i w) &\leqslant \epsilon \int_{B_1} 4(a_{ij})^2 (D_i \varphi)^2 + \frac{1}{4\epsilon} \int_{B_1} (D_i w)^2 \varphi^2 \\ &\leqslant 4\Lambda^2 \epsilon \int_{B_1} |D\varphi|^2 + \frac{1}{4\epsilon} \int_{B_1} |Dw|^2 \varphi^2 \end{aligned}$$

tomando $\epsilon = \frac{1}{2\lambda}$

$$\int_{B_1} (a_{ij} D_i \varphi 2)(\varphi D_i w) \leqslant 2\frac{\Lambda^2}{\lambda} \int_{B_1} |D\varphi|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{B_1} |Dw|^2 \varphi^2.$$

Após isso a desigualdade (5.3.10) fica

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |Dw|^2 \varphi^2 &\leqslant 2\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2 \int_{B_1} |D\varphi|^2 + \frac{1}{2} \int_{B_1} |Dw|^2 \varphi^2 + \frac{1}{\lambda} \int_{B_1} |\bar{f}| \varphi^2 \\ &\leqslant C \left\{ \int_{B_1} |D\varphi|^2 + \int_{B_1} |\bar{f}| \varphi^2 \right\} \end{aligned}$$

agora pela desigualdade de Hölder e a desigualdade de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\bar{f}| \varphi^2 &\leqslant \|\bar{f}\|_{L^{\frac{n}{2}}} \left(\int_{B_1} (\varphi^2)^{\frac{n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &= \|\bar{f}\|_{L^{\frac{n}{2}}} \|\varphi\|_{L^{2^*}}^2 \\ &\leqslant c(n,q) \|D\varphi\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Assim segue a identidade (5.3.7). Baseado nessa desigualdade podemos mostrar que é $w \in \mathrm{OML}$ e assim usar o lema de John-Nirenberg. Então para cada $B_{2r}(x) \subset B_1$ escolhemos φ tal que

$$supp(\varphi) \subset B_{2r}(y), \ \ \varphi \equiv 1 \ \ em \ B_r(y) \ \ e \ |D\varphi| \leqslant \frac{2}{r}.$$

Portanto, (5.3.7) fica

$$\int_{B_{2r}(y)} |Dw|^2\eta^2 \leqslant C\frac{4}{r^2}r^n = Cr^{n-2}$$

assim $w \in \mathrm{OML}$ pelo lema de John-Nirenberg.

Vamos mostrar agora que o resultado vale para $p < \frac{n}{n-2}$. Para isso precisamos mostrar que para qualquer $0 < r_1 < r_2 < 1$ e $0 < p_2 < p_1 < \frac{n}{n-2}$ vale

$$\left(\int_{B_{r_1}} \bar{u}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant \left(\int_{B_{r_2}} \bar{u}^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \tag{5.3.12}$$

para alguma constante $C = C(n, q, \lambda, r_1, r_2, p_1, p_2) > 0$.

Para a prova de (5.3.12), tomamos $\varphi = \bar{u}^{-\beta}\eta^2$ para $\beta \in (0, 1)$ em (5.3.1) ficamos com

$$\int_{B_1} |D\bar{u}|^2\bar{u}^{\beta-1}\eta^2 \leqslant C\left\{\frac{1}{\beta^2}\int_{B_1} |D\eta|^2\bar{u}^{-1-\beta} + \frac{1}{\beta}\int_{B_1} \frac{|f|}{k}\eta^2\bar{u}^{-1-\beta}\right\}.$$

Tomando agora $\gamma = 1 - \beta \in (0, 1)$ e $w = \bar{u}^{\frac{\beta}{2}}$. Temos

$$\int_{B_1} |D(\eta w)|^2\eta^2 \leqslant \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\int_{B_1} w^2(|D\eta|^2 + \eta^2)$$

para algum $\alpha > 0$. Pela desigualdade de Sobolev, segue que

$$\left(\int_{B_1} (\eta w)^{2^*}\right)^{\frac{1}{\chi}} \leqslant \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\int_{B_1} w^2(|D\eta|^2 + \eta^2) \tag{5.3.13}$$

onde $\chi = \frac{n}{n-2}$, por fim, para $0 < r < R < 1$, escolhemos $\eta \in C_0^1(B_R)$ com $\eta \equiv 1$ em B_r e $|D\eta| \leqslant \frac{2}{(R-r)}$, a desigualdade (5.3.13) fica então

$$\left(\int_{B_r} w^{2\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \leqslant \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\frac{1}{(R-r)^2}\int_{B_R} w^2.$$

Usando a definição de w temos que

$$\left(\int_{B_r} \bar{u}^{\gamma\chi}\right)^{\frac{1}{\gamma\chi}} \leqslant \Big(\frac{C}{(1-\gamma)^{\alpha}}\frac{1}{(R-r)^2}\Big)^{\frac{1}{\chi}}\left(\int_{B_R} \bar{u}^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\chi}}.$$

para todo $\gamma \in (0,1)$. Fazendo um processo interativo como no teorema (5.1), segue o resultado.

Como consequência da desigualdade de Harnack fraca, temos o seguinte teorema

Teorema 5.6 *(Desigualdade de Moser-Harnack) Seja* $u \in H^1(\Omega)$ *uma solução não-neagativa em* Ω

$$\int_{\Omega} a_{ij}D_i u D_j \varphi = \int_{\Omega} f\varphi \quad \text{para} \quad \text{qualquer } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Suponha que $f \in L^q(\Omega)$ *para algum* $q > \frac{n}{2}$. *Então vale para qualquer* $B_R \subset \Omega$

$$\sup_{B_R} u \leqslant C\left\{\inf_{B_{\frac{R}{2}}} u + R^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_R)}\right\}$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, q) > 0$ *é uma constante.*

Prova: Seja $u \geqslant 0$ uma solução fraca. Usando a desigualdade de Harnack fraca em uma bola $B_{\bar{R}} \subset \Omega$, isto é,

$$\inf_{B_{\theta\bar{R}}} u + \bar{R}^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_{\bar{R}})} \geqslant C\left(\frac{1}{\bar{R}^n}\int_{B_{\tau\bar{R}}} u^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, fazendo $\bar{R} = 3R$, $\tau = \frac{2}{3}$ e $\theta = \frac{1}{6}$ obtemos

$$\inf_{B_{\frac{R}{2}}} u + (3R)^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_{3R})} \geqslant C\Big(\frac{1}{(3R)^n}\int_{B_{2R}} u^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{5.3.14}$$

mas da limitação local das soluções, temos

$$\sup_{B_R} u \leqslant C\left\{\frac{1}{(2R-R)^{\frac{n}{p}}}\|u\|_{L^p(B_{2R})} + R^{2-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_{2R})}\right\}. \tag{5.3.15}$$

Usando (5.3.14) em (5.3.15) obtemos o resultado.

Corolário 5.1 *(Hölder Continuidade) Seja* $u \in H^1(\Omega)$ *uma solução em* Ω

$$\int_\Omega a_{ij}D_iuD_j\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \text{para} \quad \text{qualquer } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Suponha que $f \in L^q(\Omega)$ *para algum* $q > \frac{n}{2}$. *Então* $u \in C^\alpha(\Omega)$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$ *dependendo somente de* n, q, λ, Λ. *Além disso para qualquer* $B_R \subset \Omega$

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C\Big(\frac{|x-y|}{R}\Big)^\alpha \left\{ \left(\int_{B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} + R^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R)} \right\}$$

para quaisquer $x, y \in B_{\frac{R}{2}}$ *onde* $C = (n, \lambda, \Lambda, q)$ *é uma constante positiva.*

Prova: Inicialmente, se $R = 1$. Seja $M(r) = \sup_{B_r} u$ e $m(r) = \inf_{B_r} u$ para $r \in (0,1) = (0,R)$, onde $B_r = B_r(x)$. Então, como $M(r) \leqslant M(1)$ e $m(r) \geqslant m(1)$, pela limitação local das soluções e a desigualdade Moser- Harnack segue, respectivamente que $M(r) < \infty$ e $m(r) > -\infty$. É suficiente mostrar que

$$\omega(r) = M(r) - m(r) \leqslant cr^\alpha\{||u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\} \tag{5.3.16}$$

para qualquer $r < \frac{1}{2}$.

Pois,

$$\sup_{B_r} u - \inf_{B_r} \leqslant Cr^\alpha\{||u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\}$$

daí, para todo $y \in \partial B_r$ vale

$$u(x) - u(y) \leqslant C|x-y|^\alpha\{||u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\}.$$

Trocando x por y temos

$$u(y) - u(x) \leqslant C|x-y|^\alpha\{||u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\}$$

portanto,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha\{||u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\}.$$

Para iniciar a prova de (5.3.16), tomamos $\delta = 2 - \frac{n}{q}$ e aplicamos a desigualdade de Moser-Harnack a $M(r) - u \geqslant 0$ em B_r, obtendo

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}}(M(r)-u) \leqslant C\{\inf_{B_{\frac{r}{2}}}(M(r)-u)+r^{\delta}\|f\|_{L^q(B_r)}\}$$

usando propriedades de supremo e ínfimo temos,

$$M(r)-m\Big(\frac{r}{2}\Big) \leqslant \Big\{\Big(M(r)-M\Big(\frac{r}{2}\Big)\Big)+r^{\delta}\|f\|_{L^q(B_r)}\Big\}. \tag{5.3.17}$$

Analogamente aplicamos a desigualdade Moser-Harnack a $u-m(r)\geqslant 0$, obtendo

$$M\Big(\frac{r}{2}\Big)-m(r) \leqslant \Big\{\Big(m\Big(\frac{r}{2}\Big)-m(r)\Big)+r^{\delta}\|f\|_{L^q(B_r)}\Big\}. \tag{5.3.18}$$

Somando (5.3.17) e (5.3.18), obtemos

$$\omega(r)+\omega\Big(\frac{r}{2}\Big) \leqslant C\Big\{\Big(\omega(r)-\omega\Big(\frac{r}{2}\Big)\Big)+r^{\delta}\|f\|_{L^q(B_r)}\Big\}$$

como

$$(C+1)\omega\Big(\frac{r}{2}\Big) \leqslant (C-1)\omega(r)+Cr^{\delta}\|f\|_{L^q(B_r)} \Rightarrow$$

$$\omega\Big(\frac{r}{2}\Big) \leqslant \gamma\omega(r)+Cr^{\delta}\|f\|_{L^q(B_r)}$$

para algum $\gamma=\frac{C-1}{C+1}<1$.

Aplicando o lema (3.3) com $\omega(r)=\sup_{B_r} u-\inf_{B_r} u$ e $\sigma(r)=Cr^{\delta}\|f\|_{L^q(B_r)}$ em $(0,\frac{1}{2}]$, temos que para qualquer $\mu\in(0,1)$ e $\rho\leqslant\frac{1}{2}$ vale

$$\omega(\rho) \leqslant C\Big\{\rho^{\alpha}\omega\Big(\frac{1}{2}\Big)+C\rho^{\mu\delta}\|f\|_{L^q(B_{r^{\mu\delta}})}\Big\}$$

agora escolha μ tal que $\alpha=(1-\mu)\log\gamma/\log\tau<\mu\delta$

$$\omega(\rho) \leqslant C\rho^{\alpha}\Big\{\omega\Big(\frac{1}{2}\Big)+\|f\|_{L^q(B_1)}\Big\} \ \ \text{para todo } \rho\in\Big(0,\frac{1}{2}\Big]$$

usando o teorema (5.1)

$$\omega\Big(\frac{1}{2}\Big) \leqslant C\Bigg\{\Big(\int_{B_1} u^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\|f\|_{L^q(B_1)}\Bigg\}.$$

Para o caso geral é suficiente mostrar que $\omega(r)\leqslant C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{\alpha}\omega(R)$.

Lema 5.4 *Se* ω *e* σ *são funções não-decrescentes no intervalo* $(0, R]$*. Suponha que para todo* $r \leqslant R$

$$\omega(\tau r) \leqslant \gamma\omega(r) + \sigma(r)$$

para algum $0 < \gamma, \tau < 1$*. Então para qualquer* $\mu \in (0, 1)$ *e* $r \leqslant R$ *temos*

$$\omega(r) \leqslant \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \omega(R) + \sigma(r^{\mu}R^{1-\mu}) \right\}$$

onde $C = C(\gamma, \tau)$ *e* $\alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu)$ *são constantes positivas. De fato* $\alpha = (1-\mu)\frac{\log\gamma}{\log\tau}$.

Prova: Fixe um número $r_1 \leqslant R$. Então para qualquer $r \leqslant r_1$, temos

$$\omega(\tau r) \leqslant \gamma\omega(r) + \sigma(r_1)$$

uma vez que σ é não-decrescente. Agora a partir desta desigualdade vamos obter para qualquer inteiro positivo k o resultado da seguinte afirmação:

Afirmação (1):

$$\omega(\tau^k r_1) \leqslant \gamma^k w(r_1) + \sigma(r_1)\sum_{i=0}^{k-1}\gamma^i \leqslant \gamma^k\omega(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma}.$$

Por hipótese, temos que

$$\omega(\tau r_1) \leqslant \gamma\omega(\tau r_1) + \sigma(r_1)$$

novamente, por hipótese

$$\begin{aligned} \omega(\tau^2 r_1) &= \omega(\tau(\tau r_1)) \\ &\leqslant \gamma\omega(\tau r_1) + \sigma(\tau r_1) \\ &\leqslant \gamma\omega(\tau r_1) + \sigma(r_1) \\ &\leqslant \gamma^2\omega(r_1) + \sum_{i=0}^{1}\gamma^i\sigma(r_1). \end{aligned}$$

Procedendo assim sucessivamente, temos que após a k-ésima etapa temos

$$\begin{aligned}
\omega(\tau^k r_1) &\leqslant \gamma^k \omega(r_1) + \sigma(r_1)\sum_{i=0}^{k-1}\gamma^i \\
&\leqslant \gamma^k \omega(R) + \sigma(r_1)\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i \\
&= \gamma^k \omega(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma}
\end{aligned}$$

e assim está provada a afirmação (1).

Agora para qualquer $r \leqslant r_1$ escolhemos k tal que

$$\tau^k < r \leqslant \tau^{k-1} r_1$$

bastar tomar algum k que satisfaça

$$k < \frac{1}{\log \tau}\log\left(\frac{r}{r_1}\right) \leqslant k-1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\omega(r) \leqslant \omega(\tau^{k-1} r_1) &\leqslant \gamma^{k-1}\omega(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma} \\
&\leqslant \frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{\log\gamma}{\log\tau}}\omega(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma}
\end{aligned}$$

tomando $r_1 = r^{\mu}R^{1-\mu}$, obtemos

$$\omega(r) \leqslant \frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{(1-\mu)\log\gamma}{\log\tau}}\omega(R) + \frac{\sigma(r^{\mu}R^{1-\mu})}{1-\gamma}$$

de onde segue o resultado.

Corolário 5.2 *(Liouville) Suponha que u é uma solução da equação homogênea em $\mathbb{R}^n$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}D_i u D_j \varphi = 0, \quad \mathtt{para} \quad \mathtt{qualquer}\ \varphi \in H_0^1(B_1)$$

se u é limitada, então u é constante.

Prova: Como vimos existe $\gamma < 1$ tal que $\omega(r) \leqslant \gamma\omega(2r)$. Daí, por iteração

$$\omega(r) \leqslant \gamma^k \omega(2^k r) \to 0 \quad \text{quando} \quad r \to 0^+.$$

Já que $\omega(2^k r) \leqslant C$ se u é limitada. Assim para qualquer $r \geqslant 0$

$$\omega(r) = 0.$$

6 CONCLUSÃO

Diante do que foi mostrado, estudamos propriedades básicas sobre regularidade de soluções de equações diferencias parciais elípticas. O protótipo do nosso estudo foi, a equação do Laplace, quanto a regularidade mostramos vários resultados e conseguimos mostrar que podemos derivar as soluções da equação de Laplace infinitamente.

Logo mais generalizamos o princípio do máximo visto para funções harmônicas para operadores diferencais na sua forma geral, como consequência foi obtido a unicidade do problema de Dirichlet e de Von Neumann.

Finalmente buscamos responder a pergunta, o quão regular podem ser as soluções fracas de equação diferencial parcial elíptica? Como ferramentas usamos o teorema da limitação local, que foi essencial para as demonstrações da desigualdade de Harnack Fraca e a desigualdade de Moser Harnack, essa última por sua vez é a ferramenta essencial do estudo da última parte do trabalho e que nos mostram que as soluções fracas de problemas elípticos sobre as nossas hipóteses adotadas, podem ser no máximo Hölder contínuas.

REFERÊNCIAS

[1] Barreiro, J. L. P, Princípios do Máximo e Aplicações. Dissertação. Universidade Estadual de Campinas, 2004.

[2] Biezuner, Rodney Josué. Equações Diferenciais Parciais I/II. Notas de aula, 2010.

[3] Botelho, G., Pellegrino D. e Teixera E. Fundamentos de Análise Funcional, Coleção Textos Universitários - 2012

[4] Brezis,Haim. Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations, , New York: Springer, 2010 .

[5] Evans, Lawrence C. Partial Differential Equations. 2ª ed. Providence, RI: Graduate Studies in Mathematics - vol 19, American Mathematical Society, 1998.

[6] Folland, Gerald B. Real Analysis: Modern techniquess and their applications Differential Equations. 2ª ed. New York: John Wilei (Pure and apllied mathematics: A Wiley Interscience Series of Text,Monographs and Tracts), 1999.

[7] Furtado, M.F. Notas de EDP2. Versão 1.2. Notas de aula, 2012.

[8] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[9] Han, Q. e Lin, F-H. Elliptic partial differential equations 2ª ed. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2000.

[10] Han, Q. A Basic Course in Partial Differential Equations , Graduate Studies in Mathematics - vol 120, American Mathematical Society, 2010.

[11] Horn, R.A e JOHSON C.R. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 1985.

[12] Leoni, Giovanni, A First Course in Sobolev Spaces, Graduate Studies in Mathematics - 105, American Mathematical Society, 2009.

[13] Lima, Elon Lages. Curso de Análise. Vol 2. Projeto Euclides - IMPA, 2014.

[14] Schnell, Christian. The De Giorgi-Nash-Moser Estimates. Notes, 2012.

[15] Stein, Elias M., SHARKARCHI, Rami. Real Analysis: measure theory, integration and Hilbert Space. Princeton, N. J: Princeton University Press (Princeton Lectures in Analysis III), 2005.

[16] Teixeira, Eduardo Vasconcelos Olivera. Elliptic Regularity and Free Boundary Problems: an introduction. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Publicações Matemáticas).

[17] Wheeden, Richard L. Zygmund, Antoni. Measure and integral: an introduction a real analysis. New York: M. Dekker (Monographs and textbook in pure and applied mathematics,43), 1977.