

**Charles Welton Ferreira Barbosa**

*Uma Análise Comparativa de Métodos  
Aproximativos Baseados em Smoothed Particle  
Hydrodynamics para Animação de Fluidos*

Fortaleza

2013

**Charles Welton Ferreira Barbosa**

***Uma Análise Comparativa de Métodos  
Aproximativos Baseados em Smoothed Particle  
Hydrodynamics para Animação de Fluidos***

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Computação da Universidade Federal do Ceará  
como requisito parcial para obtenção do título  
de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador:

Creto Augusto Vidal

Coorientador:

Joaquim Bento Cavalcante Neto

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO  
MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO  
CRAB - COMPUTAÇÃO GRÁFICA, REALIDADE VIRTUAL E ANIMAÇÃO

Fortaleza

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

- 
- P718o      Barbosa, Charles Welton Ferreira.  
            Uma Análise comparativa de métodos aproximativos baseados em *Smoothed Particle Hydrodynamics* para animação de fluidos/ Charles Welton Ferreira Barbosa. – 2013.  
            59f. : il. , enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Computação, Programa de Pós Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2013.  
            Área de Concentração: Bancos de Dados.  
            Orientação: Prof. Dr. Creto Augusto Vidal.  
            Coorientação: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante Neto.
- 1.Simulação. 2. Animação. I. Título.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Organização . . . . .	2
<b>2 Mecânica e Simulação de Fluidos</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução . . . . .	3
2.2 Conceitos de Mecânica dos Fluidos . . . . .	3
2.2.1 Densidade . . . . .	3
2.2.2 Pressão . . . . .	4
2.2.3 Viscosidade . . . . .	4
2.2.4 Equação de Navier-Stokes . . . . .	5
2.3 <i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> . . . . .	5
2.4 Considerações finais . . . . .	7
<b>3 Trabalhos Relacionados</b>	<b>8</b>
3.1 Introdução . . . . .	8
3.2 <i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> . . . . .	8
3.2.1 Animação interativa de fluidos . . . . .	9
3.2.2 <i>Weakly-compressible Smoothed Particle Hydrodynamics</i> . . . . .	11
3.3 Condição de contorno . . . . .	14
3.3.1 Forças diretas . . . . .	14
3.3.2 Partículas fantasmas . . . . .	17
3.4 Considerações finais . . . . .	20

<b>4 Aspectos de implementação</b>	<b>22</b>
4.1 Introdução . . . . .	22
4.2 Visão geral . . . . .	22
4.3 Condição de contorno . . . . .	23
4.3.1 Forças diretas . . . . .	23
4.3.2 Partículas fantasmas . . . . .	26
4.4 Busca espacial . . . . .	30
4.4.1 Estrutura de grade . . . . .	30
4.4.2 <i>Hash</i> . . . . .	32
4.5 Escolha de parâmetros . . . . .	32
4.5.1 Equações . . . . .	33
4.5.2 Inicialização das partículas . . . . .	34
4.5.3 Passo da simulação . . . . .	35
4.6 Considerações finais . . . . .	35
<b>5 Resultados</b>	<b>37</b>
5.1 Introdução . . . . .	37
5.2 Condição de contorno . . . . .	37
5.2.1 Descrição dos testes . . . . .	38
5.2.2 Discussão . . . . .	40
5.3 Escolha das equações . . . . .	43
5.3.1 Descrição dos testes . . . . .	43
5.3.2 Discussão . . . . .	45
5.4 Inicialização das partículas . . . . .	50
5.4.1 Discussão . . . . .	50
5.5 Considerações finais . . . . .	53
<b>6 Conclusão</b>	<b>54</b>
6.1 Discussão . . . . .	54
6.2 Trabalhos Futuros . . . . .	55
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

## *Lista de Figuras*

1.1	Imagens de fluidos geradas por computador. . . . .	1
3.1	Animação de água caindo em um copo. Fonte: [Müller et al. 2003]. . . . .	9
3.2	Comparação do método apresentado (esquerda) com o método de [Müller et al. 2003] (direita). Fonte: [Becker e Teschner 2007]. . . . .	13
3.3	Animação de pedra quicando na água. Fonte: [Becker et al. 2009]. . . . .	14
3.4	Exemplo de sólido (esquerda) e partículas auxiliares criadas na sua superfície (direita). Fonte: [Becker et al. 2009]. . . . .	15
3.5	Imagem demonstrando partículas fantasmas de ar(azul marinho) e da fronteira(verde). Fonte: [Schechter e Bridson 2012]. . . . .	18
3.6	Teste hidrostático: comparação do uso de partículas fantasma (esquerda) e a falta de partículas fantasma (direita). Fonte: [Schechter e Bridson 2012]. . . . .	18
3.7	Comparação dos resultados obtidos com o método SPH com partículas fantasmas(linha superior) com aqueles obtidos com o WCSPH(linha inferior). Fonte: [Schechter e Bridson 2012]. . . . .	21
4.1	Visão geral do método. Os métodos de condição de contorno modificam o método de diferentes maneiras. . . . .	23
4.2	Exemplo de partículas geradas na superfície de triângulo. . . . .	24
4.3	Imagem que demonstra amostragem uniforme das partículas fantasmas(esquerda). O erro numérico é visível na distribuição das partículas(direita). Fonte: [Schechter e Bridson 2012]. . . . .	28
4.4	Imagem que demonstra exemplo de grade utilizada na criação das partículas fantasmas. O fluido é representado em azul, e vértices da grade são representados por círculos. . . . .	28
4.5	Exemplo de grade utilizada para busca espacial. Partículas de fluido em azul. . . . .	31
5.1	Volume inicial do teste hidrostático. . . . .	39
5.2	Volume inicial do teste da torneira sobre esfera. . . . .	40
5.3	Gráficos de resultado do teste hidroestático. . . . .	40
5.4	Gráficos de resultado do teste da torneira sobre esfera. . . . .	41
5.5	Imagens de resultado após 3 segundos de animação do teste hidrostático. . . . .	42

5.6	Imagens de resultado após 1,5 segundos de animação do teste da torneira sobre esfera. . . . .	42
5.7	Volume inicial do teste da quebra de barragem. . . . .	44
5.8	Volume inicial do teste da torneira. . . . .	45
5.9	Gráficos de resultado do teste da quebra de barragem. . . . .	46
5.10	Gráficos de resultado do teste da torneira. . . . .	47
5.11	Imagens de resultado após 1,2 segundos de animação do teste da quebra de barragem. . . . .	48
5.12	Imagens de resultado após 2,2 segundos de animação do teste da torneira. . . .	49
5.13	Gráficos de resultado do teste da quebra de barragem. . . . .	51
5.14	Gráficos de resultado do teste da torneira. . . . .	51
5.15	Imagens de resultado após 1,2 segundos de animação do teste da quebra de barragem. . . . .	52
5.16	Imagens de resultado após 2,2 segundos de animação do teste da torneira. . . .	52

## *Lista de Tabelas*

5.1	Tabela de constantes utilizadas no teste hidrostático. . . . .	38
5.2	Tabela de constantes utilizadas no teste da torneira sobre esfera. . . . .	39
5.3	Tabela de constantes utilizadas no teste da quebra de barragem. . . . .	44
5.4	Tabela de constantes utilizadas no teste da torneira. . . . .	45

## *Resumo*

Animações de fluidos, como a água ou fumaça, são utilizadas para introduzir detalhes em jogos virtuais ou filmes. Vários métodos existem para a simulação de fluidos utilizando sistemas de partículas e, em especial, utilizando o método *Smoothed Particle Hydrodynamics*, ou SPH. O método SPH é uma boa escolha para a simulação de fluidos por sua fácil descrição e implementação. Este trabalho apresenta alguns métodos baseados no SPH para a simulação de fluidos gerais, e para a interação entre fluidos e sólidos. Esses métodos são analisados e comparados relativos ao seu realismo, apresentando alguns pontos fracos de cada método. Essa análise pode ser utilizada para guiar a implementação de melhores métodos baseados no SPH, e para a animação realista de fluidos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Computação gráfica, Simulação de fluidos, Método aproximativo, Sistema de partículas, SPH.

# *Abstract*

*Animations of fluids, such as water or smoke, are used to add details to virtual games or films. Various methods exist for simulating fluids using particle systems, including the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method. The SPH method is a good choice for simulating fluids for its easy description and implementation. This work describes some methods based on SPH for general fluid simulation, and for the interaction between fluids and solids. These methods are analysed and compared on their realism, and a few weak points of each method are presented. This analysis may be used for the creation of better methods based on SPH, and for the realistic animation of fluids.*

**KEYWORDS:** *Computer graphics, Fluid simulation, Approximative method, Particles system, SPH.*

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

Fluidos são parte essencial da vida moderna, e podem ser encontrados com facilidade; líquidos e gases são considerados fluidos. O estudo de fluidos também é essencial em diversas aplicações. Por exemplo, projetos de aviões envolvem simulações em diversas situações, e o ar ao redor do avião é de grande importância.

Aplicações de Computação Gráfica comumente envolvem animações convincentes de água ou gases. Essas animações são utilizadas na produção de vídeos ou em jogos virtuais. O interesse principal na produção de vídeos é na animação de fluidos de forma realista, e o custo computacional para tal pode ser alto. Em jogos, o interesse está em obter alto realismo com o mínimo de custo computacional. Na Figura 1.1, alguns exemplos de fluidos simulados por computador são apresentados.



(a) Imagem do jogo multiplataforma *The Elder Scrolls V: Skyrim* mostrando um rio. Fonte: <http://www.head-fi.org>



(b) Fluido simulado e renderizado pelo programa *Blender*. Fonte: <http://www.blenderguru.com>

Figura 1.1: Imagens de fluidos geradas por computador.

Para a análise ou simulação de fluidos, dois pontos de vista são utilizados: o ponto de vista Euleriano e o ponto de vista Lagrangiano. O ponto de vista Euleriano analisa pontos fixos no espaço, e simulações com este ponto de vista comumente utilizam malhas e diferenças finitas [Stam 1999]. O ponto de vista Lagrangiano analisa partículas em movimento, e simulações costumam utilizar sistemas de partículas.

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics*, ou SPH, é um método de aproximação de funções e suas derivadas utilizando sistemas de partículas, e que pode ser utilizado para a simulação de fluidos. Métodos que utilizam o ponto de vista Euleriano precisam, em geral, resolver grandes sistemas de equações, o que envolve alto custo computacional. Em contraste, o método SPH não exige a solução de sistemas de equações. Além disso, o método SPH possui fácil descrição e implementação.

Este trabalho tem como foco apresentar métodos para a simulação de fluidos gerais baseados no SPH, e de métodos para a interação entre fluidos e sólidos. Esses métodos são comparados entre si, procurando encontrar pontos fracos entre cada um. Além disso, este trabalho discute aspectos de implementação de um sistema para a simulação de fluidos.

## 1.2 Organização

Este documento está organizado em seis capítulos. No Capítulo 2 definições e conceitos relevantes para a simulação e para a animação de fluidos são apresentados. A seguir, o método SPH é apresentado, indicando como ele pode ser utilizado para aproximar funções e suas derivadas por meio de sistemas de partículas.

No Capítulo 3, são apresentados os métodos utilizados neste trabalho como propostos originalmente. No total, são apresentados dois métodos para a simulação de fluidos gerais, e dois métodos para a interação entre fluidos e sólidos.

No Capítulo 4, a implementação do sistema utilizado é apresentada. Este sistema implementa os métodos dos trabalhos apresentados no Capítulo 3. Além disso, modificações feitas nesses métodos também são apresentadas.

No Capítulo 5 o sistema apresentado é utilizado para comparar e analisar os diferentes métodos implementados. Os métodos são comparados no realismo visual e na variação da densidade do fluido. No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões acerca do trabalho e algumas sugestões de trabalhos futuros.

## 2 *Mecânica e Simulação de Fluidos*

### 2.1 Introdução

Este capítulo visa apresentar definições e conceitos importantes para a simulação de fluidos. Na Seção 2.2, são dadas definições de mecânica dos fluidos. A equação de Navier-Stokes, na sua forma utilizada com o método *Smoothed Particle Hydrodynamics*, é apresentada. Na Seção 2.3, o método *Smoothed Particle Hydrodynamics* é apresentado para a aproximação de funções e suas derivadas por meio de sistemas de partículas. As definições nesta seção serão utilizadas posteriormente para a geração de animações.

### 2.2 Conceitos de Mecânica dos Fluidos

De acordo com [Granger 1995], todos os líquidos e gases são considerados fluidos e podem ser descritos de maneiras semelhantes. Diferentemente de sólidos, fluidos tomam a forma do recipiente que ocupam.

Assim como sólidos, fluidos obedecem as leis de Newton em nível macroscópico. A diferença mais notável entre fluidos e sólidos está na forma de resistência ao movimento. Sólidos, em geral, oferecem resistência às forças e às deformações que elas provocam. No entanto, fluidos oferecem resistência ao movimento: qualquer força pode deformar um fluido. A seguir, alguns conceitos básicos utilizados em mecânica dos fluidos são apresentados.

#### 2.2.1 Densidade

A densidade de qualquer material, fluido ou sólido, é definida como a razão da sua massa para o volume:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do volume,  $m$  a sua massa e  $V$  o valor do volume. A densidade de um fluido real raramente é constante. Diversos fatores, tais como a temperatura e forças externas, influenciam o valor da densidade em um ponto do fluido.

Apesar dos fluidos reais não terem densidade constante, há situações em que a variação de densidade entre dois pontos distintos do fluido é insignificante. Nessas condições, o fluido é considerado incompressível pois a razão massa para volume se mantém constante. A água em um copo, por exemplo, é dita incompressível. No entanto, a água do Oceano Atlântico é dita compressível pois a densidade no fundo do oceano é maior do que a densidade da superfície.

### 2.2.2 Pressão

Pressão em uma superfície qualquer é a razão entre o módulo da força aplicada na superfície e a área da superfície:

$$p = \frac{F}{A}, \quad (2.2)$$

onde  $p$  é a pressão,  $F$  é o módulo da força normal sendo aplicada na superfície e  $A$  a área da superfície.

No interior de um fluido, a pressão pode ser calculada de diferentes modos e depende da aplicação. Nos trabalhos apresentados no Capítulo 3 e neste trabalho, a pressão é uma função da densidade no ponto.

### 2.2.3 Viscosidade

Todo fluido oferece resistência a seu movimento; esta resistência é proporcional à velocidade e é denominada de viscosidade.

A **viscosidade absoluta** ou **dinâmica** é utilizada para calcular a força devido à viscosidade e é representada pela letra grega  $\mu$ . A **viscosidade cinemática** é utilizada no cálculo da aceleração devido à viscosidade e pode ser relacionada com a viscosidade absoluta:

$$v = \frac{\mu}{\rho}, \quad (2.3)$$

onde  $v$  é a viscosidade cinemática e  $\rho$  a densidade do material. A água é um fluido que possui baixa viscosidade, e não aparenta oferecer resistência ao movimento. Em contraste, óleo de motor é um fluido de alta viscosidade, e oferece muita resistência a qualquer movimento.

### 2.2.4 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes trata da conservação de momento e massa de um fluido e é capaz de descrever qualquer fluido. A equação geral utilizada na animação de fluidos viscosos é:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{a}_e + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{u}$  é a velocidade do fluido,  $t$  o tempo,  $p$  a pressão do ponto em questão,  $\rho$  a sua densidade,  $\nu$  a viscosidade cinemática e  $\mathbf{a}_e$  a aceleração resultante de forças externas. O termo  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  na Equação (2.4) é denominado termo de convecção e pode ser escrito como:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do vetor  $\mathbf{u}$ . Esse termo é necessário em uma formulação Euleriana, pois a velocidade em um ponto fixo depende da velocidade no ponto e da velocidade dos pontos a seu redor. Em sistemas de partículas, a formulação é Lagrangiana, e a posição da partícula avança com o tempo, o que torna esse termo desnecessário. Portanto, a equação de Navier-Stokes usada com *Smoothed Particle Hydrodynamics* é:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{a}_e + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Além da Equação (2.4), é necessário conservar a massa do fluido: a massa no início da simulação deve ser a mesma que no final da simulação. A seguinte equação é utilizada para a conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.7)$$

Em sistemas de partículas, cada massa possui massa constante e a massa é conservada. No entanto, a densidade não pode ser considerada constante neste caso, e ela deve ser atualizada a cada passo da simulação.

## 2.3 Smoothed Particle Hydrodynamics

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics*, ou SPH, foi inicialmente proposto para problemas astrofísicos por Gingold e Monaghan [1977] e Lucy [1977]. O SPH utiliza um conjunto de partículas para aproximar funções e suas derivadas em um domínio. As partículas são suficientes para este cálculo, evitando geração de malhas, o que torna simples tratar problemas com

fronteiras dinâmicas como simulação de fluidos.

Dada uma função  $f(\mathbf{x})$ , procura-se encontrar uma aproximação da mesma a partir de um conjunto de valores conhecidos. Em [Lucy 1977], utilizam-se métodos de Monte Carlo para obter a aproximação da função  $f(\mathbf{x})$ :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \partial\Omega \quad (2.8)$$

onde  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$  representa a aproximação da função  $f$  e  $\Omega$  o domínio da função. A função  $W$  é uma função que pondera o valor de  $f(\mathbf{x}')$  em função da distância de  $\mathbf{x}$  ao centro de uma esfera de raio  $h$  posicionada no ponto  $\mathbf{x}'$ ; a Equação (2.8) funciona como uma média ponderada. Ao invés de uma integral no domínio da função, é possível utilizar um somatório para a aproximação da função  $f$ :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_j f(\mathbf{x}_j) V_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h), \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{x}_j$  e  $V_j$  são a posição e volume de cada partícula  $j$ , respectivamente. Em simulações de fluidos costuma-se substituir o volume da partícula  $V_j$  por  $\frac{m_j}{\rho_j}$ , onde  $m_j$  é a massa da partícula e  $\rho_j$  a sua densidade; como a densidade é indispensável para a simulação, faz mais sentido utilizar massa e densidade. A equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$A_i = \sum_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{i,j}, \quad (2.10)$$

onde  $A_i$  é o valor da propriedade  $A$  da partícula  $i$ , e  $W_{i,j}$  é equivalente a  $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ . Na Equação (2.10), o somatório nas partículas  $j$  não inclui a partícula  $i$ .

Lucy [1977] menciona algumas propriedades essenciais para aproximar uma função  $f$ :

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{d}, h) \partial\Omega = 1 \quad (2.11a)$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N f_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) = f(\mathbf{x}), \quad (2.11b)$$

onde  $N$  é o número de partículas do sistema. O autor menciona ainda que, para aumentar a precisão do método, a função  $W$  deve satisfazer as seguintes restrições:

1.  $W$  deve ser não-negativa no domínio. Isso garante que partículas não influenciem negativamente o valor da função em um ponto.
2.  $W$  deve ser decrescente à medida que o vetor  $\mathbf{d}$  aumenta em módulo. Isso garante que partículas próximas têm influência maior do que partículas mais distantes.
3. Se  $|\mathbf{d}| \geq h$ , então  $W(\mathbf{d}, h) = 0$ . Isso garante que partículas muito distantes não influenciam

o valor da função.

4. A função  $W$  deve ter derivadas contínuas. Isso garante que as derivadas da função  $f$  são bem aproximadas.

Neste trabalho, a função peso originalmente apresentada em [Dalrymple e Rogers 2006] e apresentada na Equação (2.12) é utilizada. Essa função é uma boa escolha pois ela satisfaz as restrições descritas em [Lucy 1977] e possui derivada analítica.

$$W(\mathbf{d}, h) = \begin{cases} \frac{15}{2\pi h^3} \left( \frac{|\mathbf{d}|^2}{h^2} - \frac{2|\mathbf{d}|}{h} + 1 \right) & \text{caso } |\mathbf{d}| < h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.12)$$

Além de aproximar funções, é possível calcular derivadas espaciais de funções. Por exemplo, o gradiente de uma função  $f$  pode ser escrito como:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_j f(\mathbf{x}_j) \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h). \quad (2.13)$$

Aproximar o gradiente de uma função com SPH depende apenas do gradiente da função peso e partículas com valores da função  $f$ , o que pode simplificar os cálculos.

## 2.4 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentadas definições de simulação de fluidos utilizadas extensivamente durante a geração de animações. Essas definições incluem a definição de densidade, pressão e viscosidade no fluido.

A equação de Navier-Stokes foi então apresentada. Essa equação trata da conservação de momento em todo ponto do fluido, e é utilizada na simulação de fluidos gerais. Além disso, a equação de conservação de massa foi apresentada, a qual é utilizada para atualizar a densidade do fluido.

Finalmente, o método *Smoothed Particle Hydrodynamics*, foi apresentado. O método é utilizado para a aproximação de funções e suas derivadas. SPH utiliza uma função peso para a aproximação de funções, e a função peso utilizada neste trabalho também foi apresentada.

No próximo capítulo, alguns trabalhos relacionados que utilizam SPH para a animação de fluidos são apresentados. Esses trabalhos são utilizados no sistema implementado, e comparados em diferentes aspectos.

## 3 *Trabalhos Relacionados*

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, trabalhos que utilizam *Smoothed Particle Hydrodynamics* para a animação de fluidos são apresentados. Na Seção 3.2, dois métodos para a simulação de fluidos gerais são apresentados. No entanto, esses métodos não se preocupam com a interação correta entre fluidos e sólidos. Por isso, na Seção 3.3 são apresentados trabalhos que procuram garantir as condições de contorno corretas.

### 3.2 *Smoothed Particle Hydrodynamics*

O método SPH utiliza um conjunto de partículas para a simulação de fluidos, onde cada partícula possui posição, velocidade e massa. Além disso, em cada partícula definem-se valores de propriedades do fluido: densidade, pressão e aceleração resultante.

Ao simular fluidos, deseja-se resolver a equação de Navier-Stokes. Esta é uma equação diferencial que procura garantir a conservação do momento do fluido, e calcula a aceleração em cada ponto:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{a}_e + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{u}$  é a velocidade no ponto,  $t$  o tempo,  $p$  a pressão,  $\rho$  a densidade do fluido,  $\mathbf{a}_e$  a aceleração resultante de forças externas no ponto e  $\nu$  a viscosidade cinemática do material.

Os métodos apresentados em [Müller et al. 2003] e [Becker e Teschner 2007] são comumente utilizados em Computação Gráfica para a geração de animações de fluidos. Ambos os métodos utilizam um sistema de partículas para resolver a Equação (3.1). Essa resolução avança passo a passo a partir do estado inicial do fluido no tempo  $t_0$  para obter os estados ao final de cada incremento  $\delta t$ . Assim, o conjunto de partículas, que representam o estado do fluido no instante de tempo  $t$ , muda sua configuração e propriedades no instante de tempo  $t^* = t + \delta t$ . Estes métodos são apresentados no restante desta seção.

### 3.2.1 Animação interativa de fluidos

Em [Müller et al. 2003], um método para a animação de fluidos em aplicações interativas foi apresentado. Na Figura 3.1, um exemplo de animação gerada pelo método é apresentada.

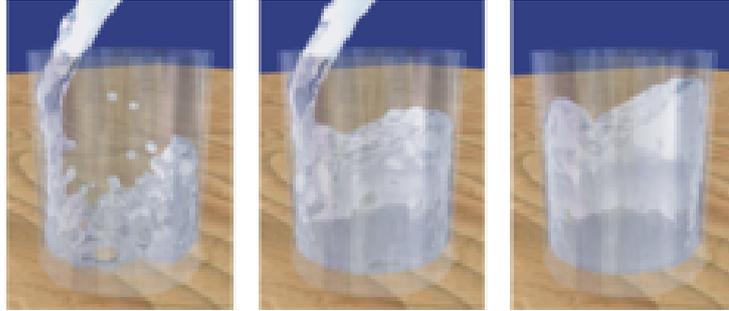


Figura 3.1: Animação de água caindo em um copo. Fonte: [Müller et al. 2003].

Para resolver a Equação (3.1), é necessário saber a densidade em cada ponto do fluido, pelo fato dele não ser considerado incompressível nessa formulação. A equação de aproximação do SPH é utilizada para o cálculo da densidade:

$$A_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A_j W_{i,j}, \quad (3.2)$$

onde  $A_i$  é o valor de uma propriedade  $A$  na partícula  $i$ ,  $m_i$  a sua massa,  $\rho_i$  a sua densidade, e  $W$  a função peso do SPH. A contração  $W_{i,j}$  significa  $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ , onde  $\mathbf{x}_i$  é a posição da partícula  $i$  e  $h$  o raio de influência do SPH. Substituindo a propriedade  $A$  pela densidade do fluido:

$$\rho_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j W_{i,j} \quad (3.3a)$$

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{i,j}. \quad (3.3b)$$

Ao início de cada passo da simulação, a densidade de cada partícula é calculada utilizando a Equação (3.3b). A partir da densidade, a pressão em cada partícula é então calculada:

$$p_i = k(\rho_i - \rho_0), \quad (3.4)$$

onde  $p_i$  é a pressão da partícula  $i$ ,  $k$  uma constante de rigidez dada pelo usuário, e  $\rho_0$  a densidade de repouso do fluido. A densidade de repouso é a densidade que o fluido deve assumir quando em completo repouso. Finalmente, a aceleração de cada partícula pode ser calculada.

A aceleração  $\mathbf{a}_i$  de cada partícula, derivada a partir da equação de Navier-Stokes, é:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i,e} + \mathbf{a}_{i,p} + \mathbf{a}_{i,v}, \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{a}_{i,e}$ ,  $\mathbf{a}_{i,p}$  e  $\mathbf{a}_{i,v}$  são as acelerações devido a forças externas, pressão e viscosidade, respectivamente. As forças externas aplicadas a cada partícula são as forças gravitacionais e forças de colisão com sólidos. Quando a colisão entre uma partícula de fluido e um sólido é detectada, a partícula de fluido é empurrada na direção contrária, evitando que a partícula entre no sólido. O método de detecção da colisão não é descrito por Müller et al. [2003].

A aceleração em um ponto do fluido em decorrência da pressão  $\mathbf{a}_p$  é:

$$\mathbf{a}_p = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (3.6)$$

Aplicando a equação de aproximação do SPH à equação acima, a aceleração de cada partícula devido à pressão é:

$$\mathbf{a}_{i,p} = -\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} p_j \nabla W_{i,j}. \quad (3.7)$$

No entanto, a Equação (3.7) não gera forças simétricas entre duas partículas: a força que a primeira exerce na segunda pode ser diferente da força que a segunda exerce na primeira. Ou seja, essa equação viola a terceira lei de Newton, e o momento do fluido não é conservado. Para evitar isso, uma equação diferente é utilizada para a aceleração devido à pressão:

$$\mathbf{a}_{i,p} = -\sum_j \frac{m_j}{2\rho_i\rho_j} (p_i + p_j) \nabla W_{i,j}. \quad (3.8)$$

De maneira semelhante a acima, a aceleração de cada partícula devido à viscosidade é:

$$\mathbf{a}_{i,v} = \nu \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \nabla^2 W_{i,j}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{u}_i$  é a velocidade da partícula  $i$ . Finalmente, a velocidade e a posição no próximo instante de tempo de cada partícula podem ser calculadas a partir da aceleração resultante. A variação na velocidade e posição obedecem às seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = \mathbf{a}_i \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} = \mathbf{u}_i. \quad (3.10b)$$

Integração de Euler pode ser utilizada para resolver as equações acima. No entanto, erro numérico indesejado pode ser introduzido devido ao método de integração, e é recomendado minimizá-lo. Em [Müller et al. 2003], um método de segunda ordem denominado *Leap-frog* é utilizado. Esse método emprega uma estimativa da velocidade no meio do intervalo de integração ( $t + \frac{\delta t}{2}$ ), para aumentar a precisão da integração. A velocidade intermediária é escrita  $\mathbf{u}_i^{t+\frac{1}{2}}$ .

A atualização da velocidade e posição de cada partícula com *Leap-frop* é:

$$\mathbf{u}_i^{t+\frac{3}{2}} = \mathbf{u}_i^{t+\frac{1}{2}} + \delta t \mathbf{a}_i^{t+1} \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{u}_i^{t+1} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_i^{t+\frac{1}{2}} + \mathbf{u}_i^{t+\frac{3}{2}} \right) \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i + \delta t \mathbf{u}_i^{t+\frac{1}{2}}, \quad (3.11c)$$

onde  $\mathbf{u}_i^{t+\frac{3}{2}}$ ,  $\mathbf{u}_i^{t+1}$  e  $\mathbf{x}_i^{t+1}$  são a velocidade intermediária, velocidade e posição da partícula  $i$  no próximo instante de tempo, respectivamente. No início da simulação, a velocidade intermediária possui o mesmo valor da velocidade da partícula ( $\mathbf{u}_i^{t+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_i$ ), e é atualizada a cada passo de acordo com as equações acima. A velocidade intermediária é utilizada apenas na atualização das partículas, e a velocidade da partícula  $\mathbf{u}_i$  é utilizada nos demais cálculos.

O método apresentado acima é capaz de simular fluidos gerais, e gerar animações visualmente convincentes. O objetivo do método é ser aplicado em aplicações interativas, e Müller et al. [2003] não apresentaram nenhuma análise da correteza física do método. Os autores argumentam que um número razoável de partículas (aproximadamente 2000) podem ser utilizadas, e a interatividade é mantida. No entanto, o método SPH é sensível à escolha dos parâmetros, e o método de escolha não foi apresentado.

### 3.2.2 Weakly-compressible Smoothed Particle Hydrodynamics

Em [Becker e Teschner 2007], *Weakly-compressible Smoothed Particle Hydrodynamics* (WCSPH) é apresentado, cujo propósito é diminuir o erro numérico de SPH em comparação ao método de Müller et al. [2003]. O fluido a ser simulado é não viscoso e quase incompressível; deseja-se simular um fluido cuja variação de densidade é a menor possível.

O método anterior utiliza a equação de aproximação do SPH para calcular a densidade de cada partícula. Devido a essa escolha, a densidade do fluido não é consistente em todo o volume do fluido: a superfície do fluido costuma ter menos partículas do que o interior e, portanto, a densidade na superfície é menor do que no interior. Para resolver esse problema, Becker e Teschner [2007] utilizam a equação de conservação de massa para o cálculo da densidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right), \quad (3.12b)$$

onde  $u$ ,  $v$ , e  $w$  são as componentes da velocidade  $\mathbf{u}$ . Aplicando a equação de aproximação do

SPH:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = - \sum_j m_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla W_{i,j}. \quad (3.13)$$

No início da simulação, cada partícula é inicializada com valor igual à densidade de repouso  $\rho_0$ . No início de cada passo, a densidade é atualizada de acordo com a divergência da velocidade:

$$\rho_i = \rho_i^* - \delta t \sum_j m_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla W_{i,j}, \quad (3.14)$$

onde  $\rho_i^*$  é a densidade da partícula  $i$  antes do início do passo. A pressão em cada partícula pode então ser calculada utilizando a equação de Tait:

$$p_i = R \left( \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (3.15)$$

onde  $R$  é uma constante de rigidez, e  $\gamma$  é uma constante de continuidade. Em [Becker e Teschner 2007],  $\gamma$  é utilizada com valor igual a 7. A equação de Tait é conceitualmente equivalente à Equação (3.4), pois se tomado  $\gamma = 1$ :

$$p_i = R \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) \quad (3.16a)$$

$$p_i = R \left( \frac{\rho_i - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (3.16b)$$

$$p_i = \frac{R}{\rho_0} (\rho_i - \rho_0) \quad (3.16c)$$

$$p_i = k (\rho_i - \rho_0). \quad (3.16d)$$

Apesar de equivalentes, os valores da pressão são diferentes, e o resultado visual pode ser diferente. Becker e Teschner [2007] argumentam que a utilização da equação de Tait com grau maior leva a uma suavização da superfície do fluido. A Figura 3.2 demonstra o resultado obtido pelo método proposto.

A partir da pressão, a aceleração devido à pressão pode ser calculada:

$$\mathbf{a}_{i,p} = - \sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{i,j}. \quad (3.17)$$

Como mencionado anteriormente, o fluido simulado é não viscoso. No entanto, remover a viscosidade introduz instabilidades à simulação, o que limita o tamanho do passo. Por isso, Becker e Teschner [2007] utilizam um termo de viscosidade artificial para estabilizar a simulação. A

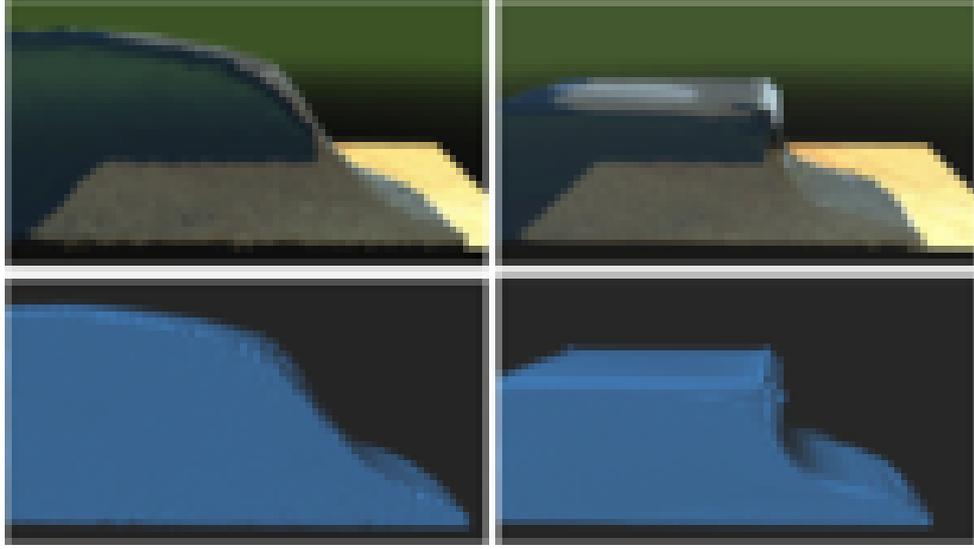


Figura 3.2: Comparação do método apresentado (esquerda) com o método de [Müller et al. 2003] (direita). Fonte: [Becker e Teschner 2007].

aceleração devido à viscosidade artificial é:

$$\mathbf{a}_{i,v} = \sum_j m_j \Pi_{i,j} \nabla W_{i,j} \quad (3.18a)$$

$$\Pi_{i,j} = \begin{cases} \frac{2\alpha h c_s}{\rho_i + \rho_j} \cdot \frac{\mathbf{u}_{i,j} \cdot \mathbf{x}_{i,j}}{|\mathbf{x}_{i,j}|^2 + 0.01h^2} & \text{caso } \mathbf{u}_{i,j} \cdot \mathbf{x}_{i,j} < 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.18b)$$

onde  $\mathbf{x}_{i,j} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$ ,  $\alpha$  é um fator positivo de viscosidade, e  $c_s$  a velocidade do som no fluido. Ou seja, a aceleração entre duas partículas é não nula caso elas estejam se aproximando. Finalmente, a aceleração resultante é calculada como no método anterior e integrada no tempo.

WCSPH é capaz de simular fluidos quase incompressíveis se um valor correto é dado à constante de rigidez  $R$ . Em [Becker e Teschner 2007], uma relação entre a rigidez e a velocidade do som no fluido é apresentada:

$$R = \frac{\rho_0 c_s^2}{\gamma}, \quad (3.19)$$

onde  $\gamma$  é a constante de continuidade da equação de Tait. De acordo com Monaghan [1994], se a percentagem da variação da densidade desejada é igual a  $\eta$ ,  $\frac{v_f}{c_s}$  deve ser igual a  $\sqrt{\eta}$ , onde  $v_f$  é o módulo da velocidade máxima do fluido durante toda a simulação. Ou seja, se  $\eta = 0,01$  e  $v_f = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $c_s$  deve ser igual a  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Desse modo, a densidade de cada partícula não varia mais do que  $\eta \rho_0$  durante a simulação.

Assim como o método anterior, WCSPH é capaz de simular fluidos gerais, e pode ser utilizado em aplicações interativas se escolhidos corretamente os parâmetros da simulação. Em compa-

ração, não se espera que o tempo de simulação seja muito diferente do método anterior para um mesmo exemplo. Os autores argumentam que WCSPH obtém resultados melhores, mas não apresentam resultados numéricos que comprovem isso.

### 3.3 Condição de contorno

Os métodos apresentados na seção anterior são capazes de simular fluidos gerais, sem tratar a influência que fronteiras sólidas têm no fluido. Nesta seção, dois métodos para o tratamento dessa influência são apresentados.

#### 3.3.1 Forças diretas

Em [Becker et al. 2009], um método para tratar a interação entre sólidos e fluidos é proposto. Esse método é capaz de simular a influência do sólido no fluido, e vice-versa. A Figura 3.3 mostra uma animação gerada por esse método.



Figura 3.3: Animação de pedra quicando na água. Fonte: [Becker et al. 2009].

No início da simulação, partículas auxiliares são criadas na superfície de cada sólido, de modo a preencher toda a superfície do sólido. As partículas auxiliares são utilizadas na detecção da colisão entre partículas de fluido e superfície de um sólido. A Figura 3.4 demonstra as partículas auxiliares.

No início de cada passo, os fluidos e sólidos são simulados, ignorando a influência entre si. Neste passo, os sólidos são atualizados considerando a colisão entre si. Maiores detalhes sobre um método de simulação de sólidos podem ser encontrados em [Baraff 1992]. Os fluidos são atualizados considerando a aceleração resultante  $\mathbf{a}_i^*$ :

$$\mathbf{a}_i^* = \mathbf{a}_{i,e}^* + \mathbf{a}_{i,p} + \mathbf{a}_{i,v}, \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{a}_{i,e}^*$  é a aceleração devido à forças externas, ignorando a influência de sólidos. As acelerações devido à pressão ( $\mathbf{a}_{i,p}$ ) e devido à viscosidade ( $\mathbf{a}_{i,v}$ ) são calculadas utilizando um dos

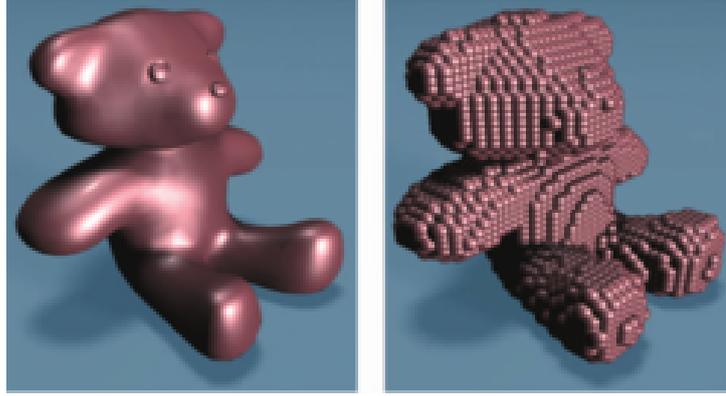


Figura 3.4: Exemplo de sólido (esquerda) e partículas auxiliares criadas na sua superfície (direita). Fonte: [Becker et al. 2009].

métodos da seção anterior. A velocidade do próximo instante de tempo de cada partícula é calculada a partir da aceleração acima.

A seguir, são detectadas as colisões entre partículas de fluidos e partículas auxiliares dos sólidos. Duas partículas estão em colisão se a distância entre elas é menor do que  $h$ , o raio de influência do SPH. Para cada par de partículas em colisão, a velocidade relativa  $\mathbf{u}_{rel}$  entre as duas é calculada:

$$\mathbf{u}_{rel} = \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_s^*, \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{u}_i^*$  é a velocidade da partícula  $i$  após aplicada a aceleração  $\mathbf{a}_i^*$ , e  $\mathbf{u}_s^*$  a velocidade do sólido no ponto de colisão. A posição da partícula auxiliar do sólido é utilizada como ponto de colisão. A partir da velocidade relativa, calcula-se a velocidade normal e tangencial:

$$\mathbf{u}_N = (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_{rel}) \mathbf{n}_s \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_{rel} - \mathbf{u}_N, \quad (3.22b)$$

onde  $\mathbf{u}_N$  é a velocidade normal,  $\mathbf{u}_T$  é a velocidade tangencial e  $\mathbf{n}_s$  é a normal do sólido no ponto de colisão. Então, a velocidade relativa objetivo pode ser calculada:

$$\mathbf{u}_{rel}^* = \alpha \mathbf{u}_T - \beta \mathbf{u}_N, \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{u}_{rel}^*$  é a velocidade relativa objetivo, e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes de resistência e elasticidade da colisão, respectivamente. A velocidade relativa objetivo é a velocidade relativa que se espera após a colisão; o fluido não deve entrar no sólido e a resistência do sólido deve ser aplicada corretamente.

As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  devem ter valores entre 0 e 1. Quanto maior a constante  $\alpha$ , menor a força de atrito que o sólido aplica no fluido. Quanto maior a constante  $\beta$ , maior a elasticidade da

colisão, e o fluido se solta do sólido com maior facilidade.

Caso a partícula de fluido esteja se afastando do sólido, o método pode dificultar esse movimento, gerando animações visualmente erradas. Por isso, caso  $\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_{rel} > 0$ , a velocidade relativa objetivo é:

$$\mathbf{u}_{rel}^* = \alpha \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_N. \quad (3.24)$$

Ou seja, a velocidade normal não é modificada, e a partícula de fluido pode se afastar do sólido.

É desejado então encontrar a força  $\mathbf{f}_{i,s}$  que modifica a velocidade relativa para a velocidade relativa objetivo. Considerando integração de Euler, tem-se que:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^* + \frac{\delta t}{m_i} \mathbf{f}_{i,s} \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s^* - \frac{\delta t}{m_s} \mathbf{f}_{i,s} + \delta t \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{I}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{f}_{i,s}, \quad (3.25b)$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r(z) & r(y) \\ r(z) & 0 & -r(x) \\ -r(y) & r(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25c)$$

onde  $\mathbf{u}_i$  é a velocidade da partícula de fluido  $i$  no próximo instante de tempo,  $\mathbf{u}_s$  a velocidade do sólido no ponto de colisão no próximo instante de tempo,  $m_s$  a massa total do sólido,  $\mathbf{I}$  a matriz de inércia do sólido.  $\mathbf{r}$  é igual a  $\mathbf{p} - \mathbf{c}$ , onde  $\mathbf{p}$  é o ponto de colisão e  $\mathbf{c}$  o centro de massa do sólido (para maiores detalhes sobre os cálculos de  $\mathbf{I}$  e  $\tilde{\mathbf{r}}$ , consulte [Baraff 1992]). Resolvendo em  $\mathbf{f}_{i,s}$  nas duas equações acima:

$$\mathbf{f}_{i,s} = \frac{1}{\delta t} \left[ \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_s} \right) \mathbf{I}_3 - \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{I}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \right]^{-1} (\mathbf{u}_{rel} - \mathbf{u}_{rel}^*), \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{I}_3$  é a matriz identidade 3x3.  $\mathbf{f}_{i,s}$  pode então ser aplicada à partícula de fluido, e a força contrária ao sólido. Após consideradas todas as colisões, a aceleração resultante de cada partícula de fluido e de cada sólido podem ser calculadas. A aceleração resultante de cada partícula de fluido é:

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{f}_i + \mathbf{a}_i^*, \quad (3.27)$$

onde  $\mathbf{f}_i$  é a soma das forças de colisão na partícula  $i$ . Cada partícula de fluido é atualizada como nos métodos de simulação anteriores, utilizando o método *Leap-frog*. A atualização dos sólidos depende do método de simulação utilizado.

O método apresentado nesta seção pode ser utilizado com qualquer sólido. No entanto, se os sólidos são estáticos, ou não devem sofrer influência do fluido, esse método pode ser simplifi-

cado: a força calculada para cada colisão depende apenas da velocidade do fluido. A seguir, um método alternativo para o tratamento da condição de contorno é apresentado.

### 3.3.2 Partículas fantasmas

No mundo real, um fluido é capaz de se soltar de um sólido apenas quando outra substância, como o ar, é capaz de entrar em seu lugar. De acordo com Schechter e Bridson [2012], outros métodos SPH não conseguem simular fluidos dessa maneira e, por isso, a condição de contorno não é tratada corretamente. De acordo com os autores, a condição de contorno correta é:

$$\mathbf{u}_{N,p}^f = \mathbf{u}_{N,p}^s, \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{u}_{N,p}^f$  é componente normal da velocidade do fluido no ponto  $\mathbf{p}$ , e  $\mathbf{u}_{N,p}^s$  é a componente normal da velocidade do sólido no mesmo ponto. A velocidade tangencial não é modificada. Para resolver esse problema, um método denominado de *Ghost SPH* foi proposto [Schechter e Bridson 2012].

Esse método introduz partículas fantasmas, garantindo a condição de contorno correta. No entanto, os sólidos simulados não sofrem influência do fluido. As partículas são denominadas fantasmas por fazerem parte da simulação mas não da renderização. Cada partícula fantasma possui posição e velocidade, além de guardar densidade e pressão.

No início da simulação, as partículas fantasmas devem ser criadas, as quais são divididas em dois tipos: **partículas fantasmas de ar** e **partículas fantasmas da fronteira**. As partículas fantasmas de ar são criadas próximas à superfície do fluido, enquanto que as partículas fantasmas da fronteira são criadas próximas às superfícies dos sólidos. Para evitar a criação desnecessária de partículas, as partículas fantasmas são criadas dentro de uma faixa de distâncias à superfície inferiores ao raio,  $h$ , de influência do SPH; partículas com distâncias maiores do que  $h$  a uma partícula de fluido não entram nos cálculos da mesma, e podem ser ignoradas.

O fluido e os sólidos são descritos por *Level-set*, um campo escalar que divide o volume três regiões: interna, na superfície e externa. Valores positivos e negativos no *Level-set* representam pontos no interior e no exterior do volume, respectivamente. Valores iguais a 0 representam a superfície do volume.

A partir do *Level-set*, uma estrutura de grade que cobre todo o volume é criada. Para cada célula da grade, é detectado se a superfície do volume passa pela célula. Para cada célula que contém a superfície do volume, partículas fantasmas são criadas utilizando amostragem de Poisson: uma partícula fantasma é criada apenas se for possível posicioná-la a uma distância superior a  $d$  em

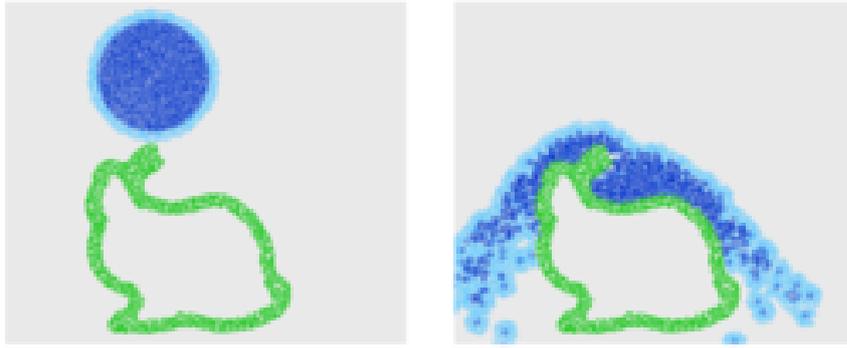


Figura 3.5: Imagem demonstrando partículas fantasmas de ar (azul marinho) e da fronteira (verde). Fonte: [Schechter e Bridson 2012].

relação a todas as outras partículas fantasmas. Em [Schechter e Bridson 2012], o valor de  $d$  é igual a  $\frac{h}{2}$ . A Figura 3.5 mostra as partículas fantasmas criadas por esse método.

A densidade de cada partícula de fluido é calculada de maneira semelhante à Equação (3.3b):

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{i,j} + \sum_k m_i W_{i,k}, \quad (3.29)$$

onde  $i$  é a partícula de fluido em questão,  $j$  as partículas de fluido e  $k$  as partículas fantasmas. Como as partículas fantasmas não possuem massa, a massa da partícula de fluido é utilizada. Como mencionado na Seção 3.2.2, a densidade calculada usando a Equação (3.3b) não é consistente em todo o volume do fluido. Schechter e Bridson [2012] argumentam que utilizar as partículas fantasmas no cálculo da densidade resolve esse problema.

Para verificar o resultado acima, um teste hidrostático foi realizado em [Schechter e Bridson 2012]: um cubo de fluido é simulado em gravidade zero. No caso ideal, o fluido deve manter-se em equilíbrio estático. No entanto, com outros métodos SPH que utilizam a Equação (3.3b) para a densidade, isso não acontece. A Figura 3.6 ilustra o resultado obtido pelas partículas fantasmas.

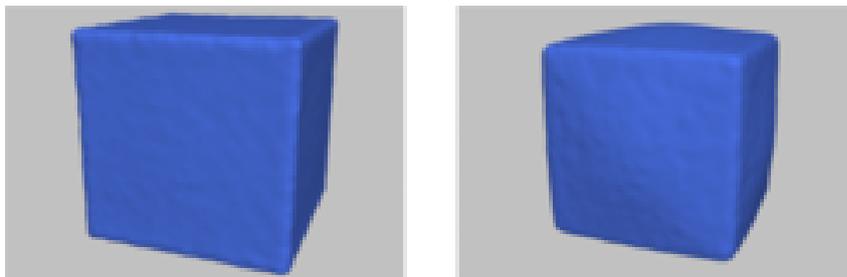


Figura 3.6: Teste hidrostático: comparação do uso de partículas fantasma (esquerda) e a falta de partículas fantasma (direita). Fonte: [Schechter e Bridson 2012].

A partir da densidade do fluido, a densidade nas partículas fantasmas são extrapoladas. A

densidade de cada partícula fantasma é igual à densidade da partícula de fluido mais próxima. A pressão em todas as partículas (fluido e fantasma) pode então ser calculada como no método WCSPH.

O fluido é considerado não viscoso, e a aceleração resultante de cada partícula de fluido  $i$  é:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_{p,f}, \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{a}_e$  é a aceleração na partícula  $i$  devido às forças externas,  $\mathbf{a}_p$  a aceleração devido à pressão do fluido, e  $\mathbf{a}_{p,f}$  é a aceleração devido à pressão das partículas fantasmas da fronteira. Assim como no método de forças diretas, as forças externas não incluem influência de sólidos. A aceleração devido à pressão do fluido também é calculada como no método WCSPH.

As partículas fantasmas da fronteira também influenciam o fluido na forma de pressão, e a aceleração é calculada de maneira semelhante à pressão entre duas partículas de fluido: o gradiente da pressão entre fluido e fronteira é calculado, introduzindo forças no fluido. O termo  $\mathbf{a}_{p,f}$  é calculado como:

$$\mathbf{a}_{p,f} = - \sum_k m_i \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_k}{\rho_k^2} \right) \nabla W_{i,k}. \quad (3.31)$$

Calculada a aceleração resultante de cada partícula, sua velocidade pode ser atualizada por integração de Euler:

$$\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i + \delta t \cdot \mathbf{a}_i, \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{u}_i^*$  é a nova velocidade da partícula de fluido  $i$ . Integração de Euler introduz erro numérico indesejado, e é recomendado evitá-la. No entanto, o método de partículas fantasmas utiliza viscosidade artificial para evitar problemas quanto à integração de Euler. O método de viscosidade artificial é denominado de *XSPH*.

*XSPH* modifica a velocidade de cada partícula de fluido de acordo com a média das velocidades das partículas mais próximas. Desse modo, partículas próximas tendem a seguir na mesma direção. Além do fluido, *XSPH* é utilizado para garantir a condição de contorno: as partículas fantasmas da fronteira entram no cálculo da viscosidade artificial.

Uma velocidade precisa ser atribuída a cada partícula fantasma de fronteira, calculada a partir da velocidade do fluido. Para cada partícula fantasma da fronteira  $k$ , a partícula de fluido  $i$  mais próxima é encontrada. A velocidade da partícula fantasma  $\mathbf{u}_k$  é:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k,N} + \mathbf{u}_{i,T}, \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{u}_{k,N}$  é sua componente normal à fronteira na posição  $\mathbf{x}_k$ , e  $\mathbf{u}_{i,T}$  a componente tangencial da velocidade da partícula de fluido  $i$ . Calculada a velocidade de cada partícula fantasma da

fronteira, é possível atualizar a velocidade de cada partícula de fluido com XSPH:

$$\mathbf{u}_i^{t+1} = \mathbf{u}_i^* + \varepsilon \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_j^* - \mathbf{u}_i^*) W_{i,j} + \varepsilon \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} (\mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_i^*) W_{i,k}, \quad (3.34)$$

onde as partículas  $j$  são partículas de fluido,  $k$  as partículas fantasma da fronteira, e  $\varepsilon$  a constante de viscosidade artificial dada pelo usuário. Ao atualizar a velocidade do fluido com a equação acima, a condição de contorno é tratada corretamente.

Finalmente, a velocidade nas partículas fantasmas de ar precisam ser calculadas. As partículas fantasmas de ar têm o objetivo de melhorar a estimativa da densidade na superfície do fluido, e, portanto, não entram no cálculo da pressão ou da viscosidade artificial. A velocidade de cada partícula fantasma de ar  $k$  é igual à velocidade da partícula de fluido  $i$  mais próxima:

$$\mathbf{u}_k^{t+1} = \mathbf{u}_i^{t+1}. \quad (3.35)$$

Desse modo, o ar move-se na mesma velocidade do fluido, evitando que partículas de ar sejam criadas a cada passo da simulação. Ao calcular a velocidade das partículas fantasmas de ar, a posição do fluido e das partículas fantasmas podem ser atualizadas. Novamente, integração de Euler é utilizada:

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i + \delta t \mathbf{u}_i^{t+1}, \quad (3.36)$$

onde  $i$  é a partícula (de fluido ou de ar) em questão. Apesar das partículas de ar moverem-se com o fluido, é recomendado recriar as partículas fantasmas com frequência, garantindo que sempre existam partículas fantasmas na superfície do fluido. Em [Schechter e Bridson 2012], as partículas fantasmas de ar são recriadas a cada 10 passos da simulação, e as partículas fantasmas da fronteira são criadas uma única vez no início da simulação.

A Figura 3.7 ilustra o maior realismo obtido com o método SPH com partículas fantasmas, quando comparado com o método WCSPH. Diferentemente do método de [Becker et al. 2009], este método não é capaz de simular a influência do fluido em sólidos, e as animações possíveis são limitadas. Além disso, os autores argumentam que as partículas fantasmas aumentam o custo computacional, mas que o custo é desprezível quando considerado o benefício do método em relação a outros métodos que utilizam SPH.

### 3.4 Considerações finais

Os trabalhos apresentados neste capítulo estão em duas categorias: simulação de fluido e condições de contorno. Os dois primeiros trabalhos apresentam diferentes métodos aproximativos



Figura 3.7: Comparação dos resultados obtidos com o método SPH com partículas fantasmas (linha superior) com aqueles obtidos com o WCSPH (linha inferior). Fonte: [Schechter e Bridson 2012].

para resolver a equação de Navier-Stokes. Os métodos apresentados são capazes de gerar animações convincentes de fluidos gerais.

Os trabalhos restantes apresentam métodos para tratar fronteiras sólidas: como o fluido deve agir sobre a ação de um sólido. Em especial, Becker et al. [2009] tratam da influência do sólido sobre o fluido e vice-versa, enquanto Schechter e Bridson [2012] procuram tratar da condição de contorno de maneira fisicamente correta.

No próximo capítulo, o sistema implementado é apresentado. Este sistema utiliza os métodos descritos neste capítulo. Além disso, detalhes específicos, como busca espacial e escolha dos parâmetros da simulação são discutidos.

## 4 Aspectos de implementação

### 4.1 Introdução

Este capítulo apresenta detalhes sobre o sistema implementado, e como os métodos apresentados no Capítulo 3 são utilizados. Além disso, detalhes sobre a fronteira, e a sua interação com o fluido são apresentadas. Para acelerar a simulação, uma estrutura de grade e busca espacial são apresentadas. Finalmente, detalhes sobre como escolher os parâmetros da simulação são apresentados.

### 4.2 Visão geral

No Capítulo 3, foram apresentados dois métodos para a simulação de fluidos gerais: **SPH interativo** [Müller et al. 2003] e **WCSPH** [Becker e Teschner 2007]. Ambos os métodos são capazes de simular fluidos gerais, e este trabalho utiliza esses dois métodos.

Cada etapa da simulação funciona de maneira semelhante: a densidade e a pressão de cada partícula é calculada, a aceleração devido à pressão e à viscosidade são calculadas, a aceleração resultante é calculada, e as partículas são atualizadas. Para cada etapa da simulação, o usuário pode escolher o método a ser utilizado (SPH interativo ou WCSPH). A Figura 4.1 apresenta a visão geral do sistema. Um método é escolhido entre os métodos que tratam a condição de contorno, e esta escolha modifica coerentemente as etapas que seguem.

O cálculo da densidade é feito utilizando a equação de aproximação do SPH (como no método SPH interativo) ou pela integração da equação de conservação de massa. No início da simulação, cada partícula possui densidade igual à densidade de repouso  $\rho_0$ . Caso a equação de aproximação seja utilizada, essa densidade não é aproveitada. Para o cálculo da pressão, a equação de Tait é utilizada:

$$p_i = R \left( \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (4.1)$$

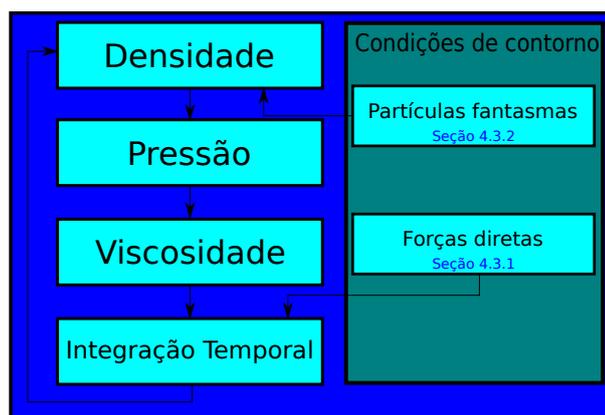


Figura 4.1: Visão geral do método. Os métodos de condição de contorno modificam o método de diferentes maneiras.

onde  $p_i$  é a pressão da partícula  $i$ ,  $\rho_i$  a sua densidade,  $R$  uma constante de rigidez, e  $\gamma$  uma constante de continuidade. Como mencionado no Capítulo 3, a equação de pressão utilizada em SPH interativa é equivalente à equação de Tait. Por isso, este trabalho utiliza a equação de Tait com valores iguais a 1 ou 7 para  $\gamma$ .

O cálculo da aceleração resultante de cada partícula, e o método de integração dependem do método de condição de contorno utilizado. Se o método de partículas fantasmas for utilizado, a integração funciona da maneira apresentada no Capítulo 3. Caso o método de forças diretas seja utilizado, o método *Leap-frog* é utilizado como no método SPH interativo. A seguir, detalhes sobre a implementação dos métodos de condição de contorno são apresentados.

## 4.3 Condição de contorno

Os métodos apresentados no Capítulo 3 para a condição de contorno possuem diferentes objetivos. O método de forças diretas [Becker et al. 2009] propõe calcular a influência que fluidos tem em sólidos, e vice-versa. O método de partículas fantasmas [Schechter e Bridson 2012] procura garantir a condição de contorno fisicamente correta.

Como os objetivos são diferentes, este trabalho utiliza apenas fronteiras estáticas; os sólidos não sofrem influência do fluido. Desse modo, ambos métodos podem ser utilizados e comparados.

### 4.3.1 Forças diretas

Em [Becker et al. 2009], um método para tratar a interação entre sólidos e fluidos é proposto. Esse método é capaz de tratar tanto sólidos pré-definidos, como sólidos que sofrem influência

do fluido. Esta seção apresenta simplificações ao método para fronteiras estáticas.

No início da simulação, a fronteira é inicializada por um conjunto de triângulos. Partículas auxiliares são então adicionadas à superfície de cada triângulo. Essas partículas são inicializadas no espaço paramétrico de modo que as partículas no espaço cartesiano sejam distribuídas com espaçamento uniforme igual a  $\frac{h}{2}$  na superfície do triângulo, onde  $h$  é o raio de influência do SPH. A Figura 4.2 apresenta as partículas auxiliares na superfície de um triângulo.

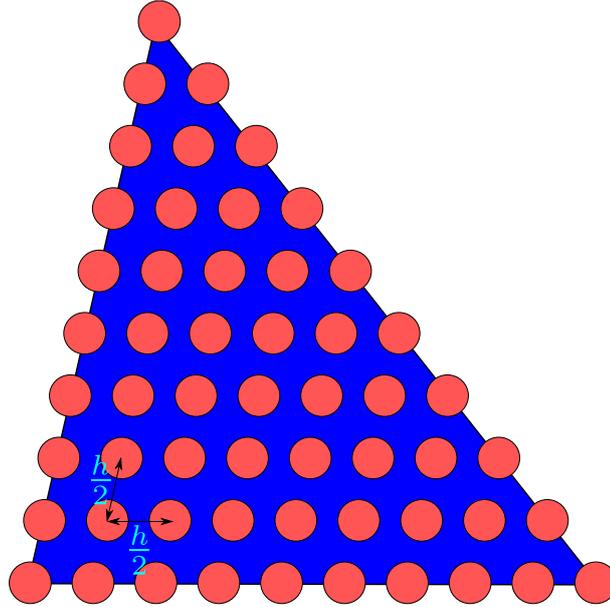


Figura 4.2: Exemplo de partículas geradas na superfície de triângulo.

A cada passo da simulação, a aceleração de cada partícula é:

$$\mathbf{a}_i^* = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{i,p} + \mathbf{a}_{i,v}, \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{a}_i^*$  é a aceleração resultante temporária,  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade,  $\mathbf{a}_{i,p}$  e  $\mathbf{a}_{i,v}$  a aceleração devido à pressão e à viscosidade, respectivamente. A velocidade intermediária da partícula  $\mathbf{u}_i^{t+\frac{3}{2}}$  após considerada  $\mathbf{a}_i^*$  é calculada:

$$\mathbf{u}_i^{t+\frac{3}{2}} = \mathbf{u}_i^{t+\frac{1}{2}} + \delta t \mathbf{a}_i^*. \quad (4.3)$$

Nesta etapa, a velocidade de cada partícula não é atualizada, mas apenas calculada.

A seguir, as colisões entre partículas de fluido e de fronteira são detectadas. Para auxiliar a detecção das colisões, as partículas auxiliares criadas na superfície da fronteira são utilizadas. Uma partícula de fluido  $i$  está em colisão com uma partícula auxiliar da fronteira  $j$  se, e somente se,  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \leq h$ .

Para cada par de partículas em colisão, a velocidade relativa entre as partículas deve ser contro-

lada, evitando que o fluido ultrapasse a fronteira. A velocidade relativa é calculada como:

$$\mathbf{u}_{rel} = \mathbf{u}_i^{t+\frac{3}{2}}. \quad (4.4)$$

As fronteiras são estáticas, e portanto a velocidade relativa não depende da velocidade da mesma. No método original, integração de Euler é suposta, e a velocidade da partícula é utilizada na velocidade relativa. No entanto, com *Leap-frog*, a velocidade relativa não é controlada corretamente com a velocidade da partícula: o fluido ultrapassa a superfície da fronteira. Por isso, a velocidade intermediária é utilizada ao invés da velocidade da partícula.

A velocidade relativa é então decomposta em suas duas componentes:

$$\mathbf{u}_N = (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{u}_{rel}) \mathbf{n}_j \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_{rel} - \mathbf{u}_N, \quad (4.5b)$$

onde  $\mathbf{n}_j$  é vetor unitária normal à fronteira na partícula  $j$ ,  $\mathbf{u}_N$  é a componente normal da velocidade e  $\mathbf{u}_T$  é a componente tangencial da velocidade. A velocidade relativa objetivo é calculada como no método original:

$$\mathbf{u}_{rel}^* = \alpha \mathbf{u}_T - \beta \mathbf{u}_N, \quad (4.6)$$

onde  $\alpha$  é o fator de atrito na fronteira, e  $\beta$  é o fator de elasticidade. Neste trabalho,  $\alpha$  é utilizado com valor igual a 1, e  $\beta$  com valor 0. Assim como em [Becker et al. 2009], para evitar fluido preso na fronteira de maneira não natural, caso  $\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{u}_N > 0$ , a velocidade relativa objetivo é:

$$\mathbf{u}_{rel}^* = \alpha \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_N. \quad (4.7)$$

Deseja-se então calcular a aceleração  $\mathbf{a}_f$  que leva a velocidade relativa de  $\mathbf{u}_{rel}$  para  $\mathbf{u}_{rel}^*$ . Assim como no método original,  $\mathbf{a}_f$  é:

$$\mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{u}_{rel}^* - \mathbf{u}_{rel}}{\delta t}. \quad (4.8)$$

A aceleração resultante final  $\mathbf{a}_i$  da partícula pode então ser calculada:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^* + \mathbf{a}_f. \quad (4.9)$$

Após consideradas todas as colisões, as partículas podem finalmente ser atualizadas, e o método *Leap-frog* é aplicado. A seguir, detalhes sobre o método de partículas fantasmas são apresentados.

### 4.3.2 Partículas fantasmas

O método proposto em [Schechter e Bridson 2012] simula fluidos de maneira mais realista, com uma condição de contorno correta. A condição de contorno correta, de acordo com [Schechter e Bridson 2012], é:

$$\mathbf{u}_{N,p}^f = \mathbf{u}_{N,p}^s, \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{u}_{N,p}^f$  é componente da velocidade do fluido normal à superfície do sólido no ponto  $\mathbf{p}$ , e  $\mathbf{u}_{N,p}^s$  é a componente da velocidade do ponto  $\mathbf{p}$  do sólido normal à superfície do sólido nesse ponto. Para simular fluidos assim, partículas fantasmas são utilizadas.

#### Método numérico

No início da simulação, as partículas fantasmas da fronteira são criadas. Como as fronteiras neste trabalho são estáticas, as partículas fantasmas da fronteira não precisam ser atualizadas. As partículas fantasmas de ar são recriadas a cada 20 passos da simulação. O método de criação das partículas fantasmas é descrito na próxima seção.

A densidade do fluido à semelhança do método original, é calculada com base na equação de aproximação do SPH:

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{i,j} + \sum_k m_i W_{i,k}, \quad (4.11)$$

onde  $i$  é a partícula de fluido em questão,  $j$  as partículas de fluido e  $k$  as partículas fantasmas. A densidade é extrapolada para as partículas fantasmas, e a pressão pode ser calculada. A pressão de cada partícula é calculada utilizando a equação de Tait, como descrito anteriormente.

O fluido é não viscoso, e a aceleração de cada partícula de fluido  $i$  é:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{g} + \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_{p,f}, \quad (4.12)$$

onde  $\mathbf{g}$  é a gravidade,  $\mathbf{a}_p$  a aceleração devido à pressão do fluido, e  $\mathbf{a}_{p,f}$  a aceleração devido à pressão das partículas fantasmas da fronteira.

As acelerações devido à pressão podem ser calculadas com o método SPH interativo ou WCSPH. Caso SPH interativo seja utilizado, essas são:

$$\mathbf{a}_p = - \sum_j \frac{m_j}{2\rho_i\rho_j} (p_i + p_j) \nabla W_{i,j} \quad (4.13a)$$

$$\mathbf{a}_{p,f} = - \sum_k \frac{m_j}{2\rho_i\rho_k} (p_i + p_k) \nabla W_{i,j}. \quad (4.13b)$$

Caso WCSPH seja utilizado, as acelerações são:

$$\mathbf{a}_p = - \sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} \right) \nabla W_{i,k} \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{a}_{p,f} = - \sum_k m_i \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} \right) \nabla W_{i,k}. \quad (4.14b)$$

Calculada a aceleração resultante de cada partícula, a sua velocidade pode ser atualizada por integração de Euler:

$$\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i + \delta t \cdot \mathbf{a}_i, \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{u}_i^*$  é a nova velocidade da partícula de fluido  $i$ . Como em [Schechter e Bridson 2012], viscosidade artificial deve ser aplicada às partículas de fluido. O resto do método funciona como no original: XSPH é aplicado no fluido, a velocidade é extrapolada para as partículas fantasmas de ar, e as partículas são atualizadas.

### Amostragem de Poisson

As partículas fantasmas são utilizadas, principalmente, durante o cálculo da densidade do fluido e viscosidade artificial. Portanto, é necessário criar partículas suficientes nas superfícies do fluido e da fronteira. Ao mesmo tempo, é desejável não criar partículas além do necessário. Devido propriedades da função peso, partículas com distância maior do que  $h$  de uma partícula de fluido não entram nos cálculos da mesma. Por isso, não é necessário criar partículas fantasmas com distância maior do que  $h$  para a superfície do fluido ou da fronteira.

É possível criar partículas fantasma de maneira uniforme nas superfícies. No entanto, erro numérico na superfície pode gerar inconsistências. A Figura 4.3 demonstra este problema. Para evitar isso, amostragem de Poisson é utilizada para a criação das partículas fantasmas. A posição de cada partícula fantasma é gerada aleatoriamente, e cada partícula fantasma deve ter distância mínima  $d$  para qualquer outra partícula fantasma. Neste trabalho,  $d$  possui valor igual a  $\frac{h}{2}$ .

Para acelerar a criação das partículas fantasmas de ar, é usada uma estrutura de grade alinhada aos eixos do sistema de coordenadas do mundo, cujos limites são calculados a partir dos limites do fluido: os pontos mínimo e máximo do fluido são utilizados nos pontos mínimo e máximo da grade, respectivamente. Cada célula da grade é um cubo de lado  $d$ . A grade é criada com células uniformes cúbicas de lado  $d$ .

Um valor é então dado a cada vértice da grade, calculado a partir das partículas de fluido. Um vértice da grade é dado valor 0, caso a distância de uma partícula de fluido ao vértice seja menor

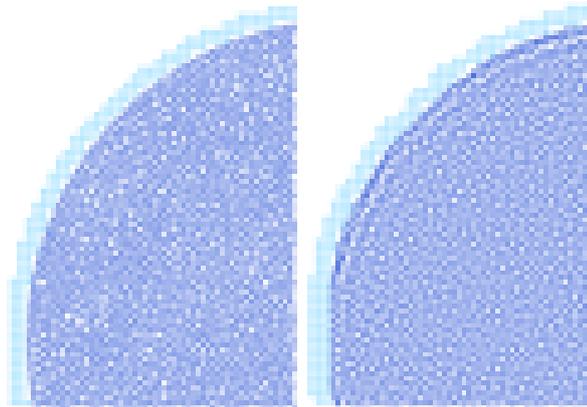


Figura 4.3: Imagem que demonstra amostragem uniforme das partículas fantasmas(esquerda). O erro numérico é visível na distribuição das partículas(direita). Fonte: [Schechter e Bridson 2012].

ou igual a  $d$ . Caso contrário, o vértice recebe valor 1. A Figura 4.4 demonstra um exemplo de grade, e vértices com diferentes valores.

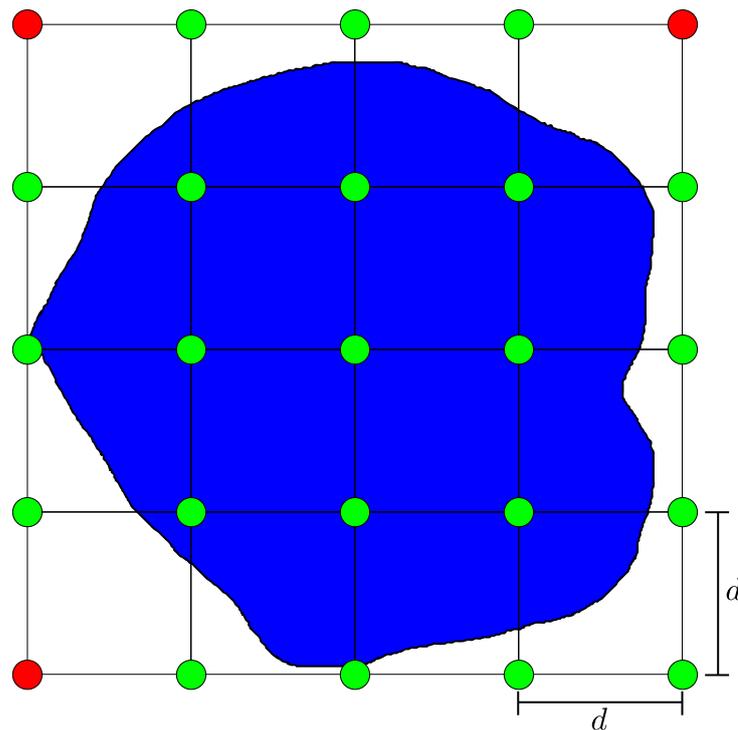


Figura 4.4: Imagem que demonstra exemplo de grade utilizada na criação das partículas fantasmas. O fluido é representado em azul, e vértices da grade são representados por círculos.

A seguir, cada célula é classificada como célula de superfície ou não. Uma célula é classificada como célula de superfície caso possua vértices com valores diferentes. Ou seja, uma célula não é de superfície se todos seus vértices possuem valor igual a 0 ou igual a 1.

Para cada célula de superfície, procura-se criar partículas fantasmas em uma região de interesse.

Sendo  $(x, y, z)^T$  o ponto mínimo da célula de superfície em questão, a região de interesse é o cubo com ponto mínimo  $(x - d, y - d, z - d)^T$  e lado  $3d$ . A região de interesse deve ser maior do que a célula de superfície pois as partículas fantasmas devem cobrir toda a superfície do fluido.

Finalmente, pontos aleatórios são criados em cada região de interesse. Para cada ponto aleatório, as seguintes condições devem ser obedecidas: nenhuma outra partícula (de fluido ou fantasma) deve estar a distância menor do que  $d$ , e deve existir alguma partícula de fluido a distância menor do que  $h$ . Os pontos que não obedecem a essas condições são descartados. Para cada região de interesse, 60 pontos aleatórios são criados, o que é suficiente para cobrir a superfície do fluido.

O método acima é capaz de encontrar a superfície do fluido apenas quando a grade é suficientemente grande. Se a grade cobrir o menor volume possível, a superfície do fluido não é detectada corretamente. Por isso, a grade deve ser maior do que o volume do fluido. Seja  $(x, y, z)^T$  o ponto mínimo do fluido, o ponto mínimo da grade é  $(x - h, y - h, z - h)^T$ . O ponto máximo da grade é calculado de maneira semelhante. Este aumento da grade é suficiente para que a superfície do fluido seja detectada corretamente.

### **Partículas fantasmas da fronteira**

O método apresentado acima é utilizado para a criação das partículas fantasmas de ar, mas deve ser modificado para as partículas fantasmas da fronteira. Estas são criadas ao redor da superfície da fronteira, e devem possuir uma normal. Assim como as partículas de ar, as partículas fantasmas da fronteira são criadas com distância até  $h$  da fronteira.

Como no método de forças diretas, a fronteira é descrita por triângulos estáticos, e partículas auxiliares são criadas na superfície desses triângulos. As partículas auxiliares são utilizadas na criação das partículas fantasmas da fronteira, mas não são utilizadas na simulação.

Assim como as partículas de ar, uma grade é inicializada para detectar a superfície da fronteira. No entanto, os limites e valores das células são calculados em função das partículas auxiliares. Deste modo, as células de superfície detectadas serão criadas em relação a superfície da fronteira.

Pontos aleatórios são criados para cada região de interesse como as partículas de ar. No entanto, as condições são diferentes: nenhuma outra partícula fantasma da fronteira deve estar a distância menor do que  $d$ , e deve existir alguma partícula auxiliar a distância menor do que  $h$ . As partículas fantasmas da fronteira devem ser criadas independentemente do fluido a ser

simulado.

Como mencionado acima, cada partícula fantasma da fronteira precisa de uma normal igual a normal da partícula auxiliar mais próxima, e a normal da partícula auxiliar depende do triângulo em que essa partícula foi criada.

Após criadas as partículas fantasmas, o fluido pode ser simulado como descrito anteriormente. Resultados e comparações com o método de forças diretas são apresentados no Capítulo 5. A seguir, uma estrutura de dados utilizada para busca espacial é apresentada.

## 4.4 Busca espacial

Muitas das equações utilizadas para simular fluidos com SPH, utilizam a função peso  $W$ . Para uma simulação com menor erro numérico, é recomendado que esta função possua algumas propriedades. Uma dessas propriedades é:

$$|\mathbf{d}| \geq h \implies W(\mathbf{d}, h) = 0. \quad (4.16)$$

Ou seja, a função peso é 0 para pontos fora da esfera centrada na origem e de raio  $h$ . Isso tem implicações na solução da Equação de Navier-Stokes: uma partícula de fluido  $j$ , influencia a partícula  $i$  se, e somente se,  $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| < h$ . Cada partícula possui, então, um conjunto de partículas vizinhas que a influenciam, e esse conjunto pode ser calculado no início de cada passo da simulação, o que diminui o custo computacional do método.

Para calcular as partículas vizinhas, é possível utilizar estruturas de dados e busca espacial: estruturas que organizam as partículas e ajudam na busca das partículas vizinhas. A seguir, a estrutura utilizada neste trabalho é descrita.

### 4.4.1 Estrutura de grade

A estrutura utilizada para organizar as partículas é uma estrutura de grade uniforme. Cada célula desta grade é um cubo, alinhado aos eixos, e de lado  $h$ , o raio de influência do SPH. À medida que partículas são criadas ou atualizadas, células da grade podem ser criadas ou destruídas. A Figura 4.5 ilustra a estrutura de grade em duas dimensões, e algumas partículas de fluido.

Cada célula da grade é identificada por sua posição  $(i, j, k)$ , onde  $i, j$  e  $k$  são números inteiros. Uma célula na posição  $(i, j, k)$  possui ponto mínimo  $(h_i, h_j, h_k)^T$  e ponto máximo  $(h_i + h, h_j + h, h_k + h)^T$ . Cada célula guarda uma lista das partículas que estão em seu interior.

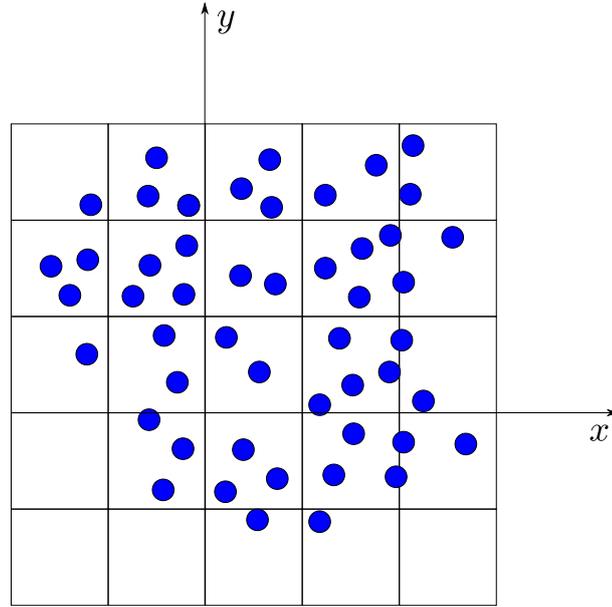


Figura 4.5: Exemplo de grade utilizada para busca espacial. Partículas de fluido em azul.

Cada partícula deve fazer parte de exatamente uma célula, a qual pode ser calculada como:

$$i = \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor \quad (4.17a)$$

$$j = \left\lfloor \frac{y}{h} \right\rfloor \quad (4.17b)$$

$$k = \left\lfloor \frac{z}{h} \right\rfloor, \quad (4.17c)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as componentes da posição  $\mathbf{x}$  da partícula. A cada passo da simulação, partículas podem mudar de célula, e a lista de partículas de cada célula devem ser atualizadas.

A estrutura de célula pode então ser utilizada para encontrar as partículas próximas a um ponto. Seja  $r$  o raio de busca e  $\mathbf{p}$  o ponto em questão, deseja-se encontrar o conjunto de partículas cuja distância de  $\mathbf{p}$  é menor ou igual a  $r$ . Utilizando a Equação (4.17), é possível calcular em qual célula o ponto  $\mathbf{p}$  está. A partir disso, é necessário saber quais células vizinhas à célula atual devem ser verificadas. Ignorando-se a posição relativa do ponto  $\mathbf{p}$  na célula, calcula-se:

$$d = \left\lceil \frac{r}{h} \right\rceil, \quad (4.18)$$

onde  $d$  é o número de células vizinhas que devem ser inspecionadas em uma direção. Ou seja, se  $\mathbf{p}$  está na célula  $(i, j, k)$ , as células entre  $(i - d, j - d, k - d)$  e  $(i + d, j + d, k + d)$  devem ser inspecionadas. Para cada célula verificada, as partículas  $j$  da célula onde  $|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}| \leq r$  fazem parte do conjunto procurado.

A estrutura de grade descrita acima é utilizada na busca das partículas vizinhas de cada partícula

de fluido, e na geração de partículas fantasmas como descrito na Seção 4.3.2. A seguir, detalhes sobre a criação dinâmica das células é apresentado.

#### 4.4.2 Hash

O método apresentado na seção anterior funciona bem para busca espacial mas apresenta problemas quanto à criação de células. A menos que o domínio de toda a simulação seja conhecido, um método para a inicialização das células é necessário: deseja-se criar o mínimo de células possível para qualquer animação. Uma estrutura de *hash* é utilizada por possuir baixo custo computacional e apresentar bons resultados.

A estrutura de *hash* é composta de um vetor de células. No início da animação, este vetor é inicializado com células vazias. À medida que células são necessárias durante a animação, células deste vetor são utilizados.

Para evitar alteração no tamanho desse vetor, uma função *hash* é utilizada para mapear uma célula  $(i, j, k)$  em uma posição  $h$  no vetor de células [Ihmsen et al. 2011]:

$$h \equiv (i \cdot 73856093) \oplus (j \cdot 19249663) \oplus (k \cdot 83492791) \pmod{N}, \quad (4.19)$$

onde  $\oplus$  é a operação de ou-exclusivo binária, e  $N$  é o tamanho do vetor de células; o vetor é referenciado com índices entre valores 0 e  $N - 1$ .

Ao referenciar células como descrito acima é possível que duas células  $(i_1, j_1, k_1)$  e  $(i_2, j_2, k_2)$  possuam o mesmo índice  $h$  no vetor de células. Este fenômeno é denominado de colisão. Nenhum tratamento especial é feito para evitar colisões, e caso duas células estejam em colisão, as suas partículas farão parte da mesma célula no vetor.

Apesar de possíveis, como mencionado em [Ihmsen et al. 2011], as colisões acontecem em menos de 2% do vetor, e pouco influenciam o tempo da simulação. O método para a busca espacial consiste, então, de encontrar um conjunto de células candidatas, encontrar a posição no hash para cada célula, e encontrar as partículas vizinhas a um ponto de cada célula. A seguir, detalhes sobre a escolha dos parâmetros da simulação são apresentados.

## 4.5 Escolha de parâmetros

Animações por SPH dependem de vários parâmetros para que a simulação seja estável e visualmente correta. Diferentes valores para esses parâmetros oferecem diferentes resultados visuais:

o fluido simulado é arbitrário. Os principais parâmetros: são a constante de rigidez do fluido (utilizada no cálculo da pressão), a viscosidade do fluido (cinemática ou artificial) e o passo da simulação. Além destes parâmetros, a posição inicial das partículas influencia o resultado da simulação.

### 4.5.1 Equações

O cálculo da pressão do fluido utiliza a equação de Tait, a qual depende da constante de rigidez do fluido, que é uma relação direta entre a velocidade do som no fluido e o erro numérico da simulação. Em [Becker e Teschner 2007], a seguinte equação é apresentada:

$$R = \frac{\rho_0 \cdot c_s^2}{\gamma}, \quad (4.20)$$

onde  $R$  é a constante de rigidez,  $\rho_0$  a densidade de repouso do fluido,  $c_s$  a velocidade do som no fluido, e  $\gamma$  o fator de continuidade da equação de Tait. Com essa relação, é possível calcular valores para a rigidez considerando a velocidade do som no fluido real. Utilizar o valor da velocidade do som real resulta em fluidos mais próximos ao real. Se o fluido no mundo real é pouco compressível, isso se reflete tanto na velocidade do som como na rigidez do fluido [Monaghan 1992].

No entanto, altos valores de rigidez exigem que o passo da simulação seja menor, o que aumenta o tempo da simulação. Altos valores de rigidez são utilizados quando se deseja simular fluidos incompressíveis, e baixos valores são utilizados em animações rápidas, onde o erro numérico é aceitável.

Além da rigidez do fluido, a viscosidade do fluido influencia o resultado da animação. No Capítulo 3, duas equações foram apresentadas para a viscosidade do fluido: viscosidade cinemática e viscosidade artificial. A primeira supõe que o fluido é viscoso e possui viscosidade cinemática. A segunda supõe que o fluido é não viscoso, e utiliza viscosidade artificial para aumentar a estabilidade. Além disso, o método apresentado na Seção 4.3.2 utiliza outro método de viscosidade artificial chamado de XSPH.

Apesar de diferentes, todas as equações de viscosidade utilizam um parâmetro de viscosidade dado pelo usuário. Portanto, com os valores certos para o parâmetro de viscosidade, as diferentes equações de viscosidade podem obter resultado visual semelhante. No Capítulo 5, testes são realizados com as diferentes equações possíveis para o método.

### 4.5.2 Inicialização das partículas

Além da escolha das equações para simular o fluido e seus parâmetros, a inicialização das partículas influencia tanto a simulação, como a renderização do fluido. Quanto mais partículas utilizadas para o mesmo volume, menor o erro numérico, e mais detalhada é a superfície renderizada. No entanto, muitas partículas exigem um menor passo da simulação. Por isso, um número razoável de partículas deve ser utilizado. Em [Becker et al. 2009], entre dez e cem mil partículas são recomendadas.

As partículas são influenciadas por dois parâmetros do usuário: o raio de influência  $h$ , e a massa de cada partícula  $m$ . Devido as propriedades da função peso, o espaçamento entre partículas deve ser menor do que  $h$ ; as partículas são inicializadas com distância mínima  $d$  entre si, com  $d$  menor do que  $h$ .

A massa de cada partícula deve ser escolhida de modo a não introduzir erro numérico na simulação. Até o momento, métodos para esta escolha são desconhecidos. Neste trabalho, a massa de cada partícula é calculada como:

$$m = \frac{\rho_0}{\rho_M}, \quad (4.21)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade de descanso. Uma densidade temporária para cada partícula é calculada utilizando a Equação (3.3b), supondo massa 1kg para as mesmas. O valor de  $\rho_M$  é a média aritmética das densidades temporárias. A densidade temporária é utilizada apenas para o cálculo da massa das partículas, e não é utilizada na simulação.

Além da massa e raio de influência, a simulação também é influenciada pela posição inicial das partículas. Ou seja, diferentes configurações podem gerar diferentes resultados visuais. Por isso, dois métodos para a inicialização das partículas são comparados: inicialização uniforme e amostragem de Poisson. Em ambos os métodos, um volume finito é dado como volume inicial do fluido.

A inicialização uniforme gera partículas alinhadas aos eixos. Estas partículas possuem distância  $d$  entre si em cada direção. A amostragem de Poisson funciona de maneira semelhante à geração de partículas fantasmas. Pontos candidatos são gerados aleatoriamente no volume inicial do fluido. Para cada ponto candidato, verifica-se a existência de partículas no interior de uma esfera de raio  $d$  centrada naquele ponto, e, se alguma partícula for encontrada, o ponto é descartado; caso contrário, uma partícula é criada no ponto candidato. O número de pontos candidatos a serem gerados é dado pelo usuário.

O número de partículas geradas através da técnica de amostragem de Poisson, devido à sua natureza aleatória, geralmente é menor do que aquele obtido por inicialização uniforme. No

entanto, espera-se que isto não influencie muito o resultado final. No Capítulo 5, os diferentes métodos de inicialização são comparados.

### 4.5.3 Passo da simulação

O passo da simulação é o parâmetro mais importante, pois é ele que dita se a simulação funciona corretamente ou não. Por exemplo, não é possível utilizar altos valores de rigidez (na ordem de  $10^6$ ) com altos valores de passo (na ordem de  $10^{-2}$ ); o erro numérico devido à integração temporal é muito alto e a simulação não funciona. Por isso, é interessante encontrar relações do passo com valores da simulação.

De acordo com [Monaghan 1992], o passo pode ser relacionado com forças e velocidades da simulação. Em [Monaghan 1994], a seguinte equação é apresentada para o cálculo do passo ideal:

$$\delta t = \min_i \left( 0.25 \frac{h}{\mathbf{f}_i}, 0.4 \frac{h}{\mathbf{u}_i} \right), \quad (4.22)$$

onde  $\delta t$  é o passo da simulação,  $i$  as partículas de fluido,  $h$  o raio de influência do SPH,  $\mathbf{f}_i$  a maior força aplicada em  $i$  durante toda a simulação, e  $\mathbf{u}_i$  a maior velocidade da partícula em toda a simulação. Portanto, se for possível calcular a força e a velocidade máximas de um fluido, é possível calcular o passo da simulação ideal.

No entanto, isto não é possível para fluidos gerais. A menos que sejam casos específicos, não é possível calcular com antecedência a força máxima ou velocidade máxima do fluido. Por isso, é necessário executar vários testes com diferentes parâmetros até que a simulação seja suficientemente estável. Neste trabalho, o passo dos vários testes são valores arbitrários, e não são calculados utilizando a equação acima.

## 4.6 Considerações finais

Neste capítulo, foi apresentado o método *Smoothed Particle Hydrodynamics*, ou SPH, na forma utilizada neste trabalho para a simulação de fluidos, que se baseou nos métodos apresentados no Capítulo 3.

Posteriormente, a condição de contorno e métodos de como resolvê-la foram apresentados. Esses métodos são denominados **Método das forças diretas** e **Método das partículas fantasmas**. Ambos os métodos são capazes de simular a interação entre fluidos e fronteiras estáticas.

O método SPH pode ter um custo computacional muito alto, e por isso é recomendado utili-

zar busca espacial. Para cada partícula de fluido, apenas um pequeno conjunto de partículas vizinhas entram no cálculo da partícula em questão. Busca espacial pode ser utilizada para acelerar esse cálculo. Além disto, busca espacial pode ser utilizada na criação de partículas fantasmas.

Finalmente, detalhes sobre os parâmetros utilizados na simulação e como escolhê-los foram apresentados. Estes parâmetros incluem a rigidez e a viscosidade do fluido, a massa de cada partícula, a distância entre cada partícula, o método de inicialização das partículas, e o passo da simulação. No próximo capítulo, são apresentados os testes realizados para comparar os diferentes métodos e equações apresentados neste capítulo.

## 5 Resultados

### 5.1 Introdução

Este capítulo apresenta diversos testes para comparar os métodos de simulação apresentados nos capítulos 3 e 4. Os testes são divididos em três categorias: condição de contorno, escolha das equações e inicialização das partículas. Cada categoria possui objetivos e métodos de simulação diferentes. As renderizações e malhas utilizadas foram todas geradas pelo programa *Blender* [Blender Foundation 2013].

### 5.2 Condição de contorno

Nesta seção, testes realizados com os diferentes métodos para a condição de contorno são apresentados. O objetivo destes testes é validar os métodos, e identificar possíveis problemas com os mesmos. Os testes realizados usam os mesmos parâmetros e equações na medida do possível. As equações utilizadas são:

- **Densidade:** O método das partículas fantasmas exige que o cálculo seja feito a partir da equação de aproximação do SPH. A equação de densidade para cada partícula é:

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{i,j}$$

- **Pressão:** A equação de Tait é utilizada com  $\gamma = 7$ .
- **Aceleração devido à pressão:** A equação de WCSPH é utilizada para ambos os métodos:

$$\mathbf{a}_{i,p} = - \sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{i,j}$$

- **Aceleração devido à viscosidade:** O método de partículas fantasmas utiliza XSPH para a

viscosidade, e portanto não inclui esse termo de aceleração. No método de forças diretas, a equação de WCSPH é utilizada:

$$\mathbf{a}_{i,v} = \sum_j m_j \Pi_{i,j} \nabla W_{i,j}$$

### 5.2.1 Descrição dos testes

#### Teste hidrostático

Este teste tem como objetivo verificar umas das contribuições apresentadas em [Schechter e Bridson 2012]: as partículas fantasmas de ar são suficientes para garantir que um cubo em equilíbrio estático continue em equilíbrio estático.

O volume inicial do fluido é um cubo de lado 1,8 m, e centrado na origem. As partículas do fluido são inicializadas de maneira uniforme, com distância em cada direção igual a 0,1 m. A gravidade do mundo é inicializada com o vetor nulo. Como o fluido deve manter-se estático, nenhuma fronteira é criada. As constantes da simulação utilizadas são apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Tabela de constantes utilizadas no teste hidrostático.

Constante	Valor
Número de partículas	6.859 partículas
Massa de cada partícula	1,3 kg
Densidade de repouso ( $\rho_0$ )	$1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Raio de influência ( $h$ )	0,2 m
Passo da simulação ( $\delta t$ )	$5 \times 10^{-5}$ s
Rigidez	$10.000 \text{ s}^{-2}$
Velocidade do som no fluido	$100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Viscosidade artificial ( $\alpha$ )	0,05
Constante XSPH ( $\epsilon$ )	0,05
Tempo de animação	3 s

#### Torneira sobre esfera

Este teste procura verificar se o método proposto em [Schechter e Bridson 2012] obedece à condição de contorno corretamente. De acordo com os autores, o fluido não deve se soltar da fronteira a menos que outro material, como o ar, possa entrar em seu lugar. O teste realizado é semelhante ao teste realizado pelos autores.

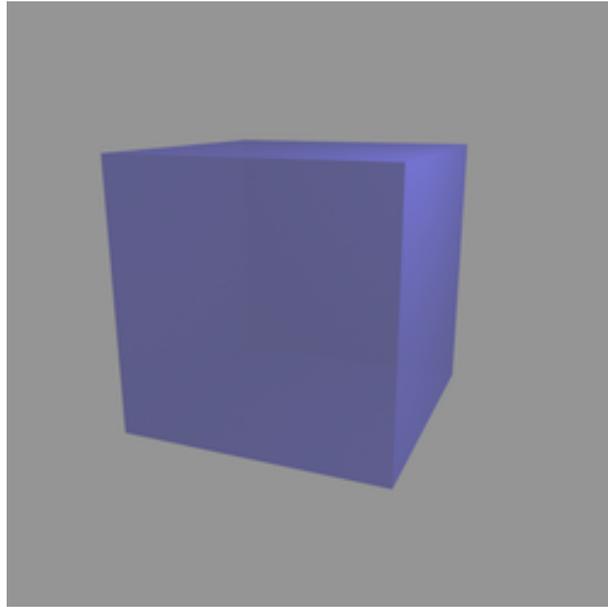


Figura 5.1: Volume inicial do teste hidrostático.

O volume inicial do fluido é um cubo de lado 1 m, centrado no ponto  $(0;2;0)^T$ . As partículas do fluido são inicializadas de maneira uniforme, com distância em cada direção igual a 0,1 m. A velocidade inicial do fluido é nula. A fronteira é inicializada por uma esfera de raio 2 m e centrada na origem.

A cada 0,02 segundos da simulação, e até 2 segundos no tempo da simulação, novas partículas podem ser adicionadas. Essas partículas são tentativamente adicionadas no mesmo volume inicial do fluido. Uma partícula é adicionada ao sistema se nenhuma outra partícula de fluido está a distância menor do que 0,1 m. As partículas tentativas também são criadas de maneira uniforme, da mesma maneira que o volume inicial. As constantes da simulação utilizadas são apresentadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Tabela de constantes utilizadas no teste da torneira sobre esfera.

Constante	Valor
Massa de cada partícula	1,434kg
Densidade de descanso ( $\rho_0$ )	$1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Raio de influência ( $h$ )	0,2 m
Passo da simulação ( $\delta t$ )	$5 \times 10^{-5}$ s
Rigidez	$10.000 \text{ s}^{-2}$
Velocidade do som no fluido	$100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Viscosidade artificial ( $\alpha$ )	0,05
Constante XSPH ( $\epsilon$ )	0,05
Tempo de animação	3 s

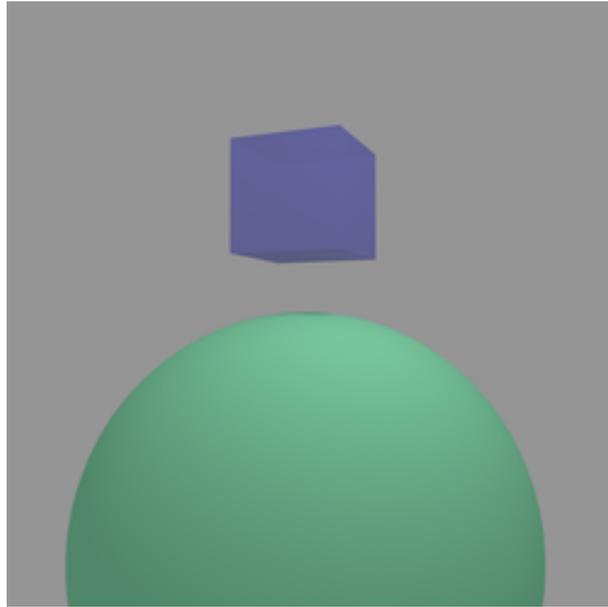


Figura 5.2: Volume inicial do teste da torneira sobre esfera.

### 5.2.2 Discussão

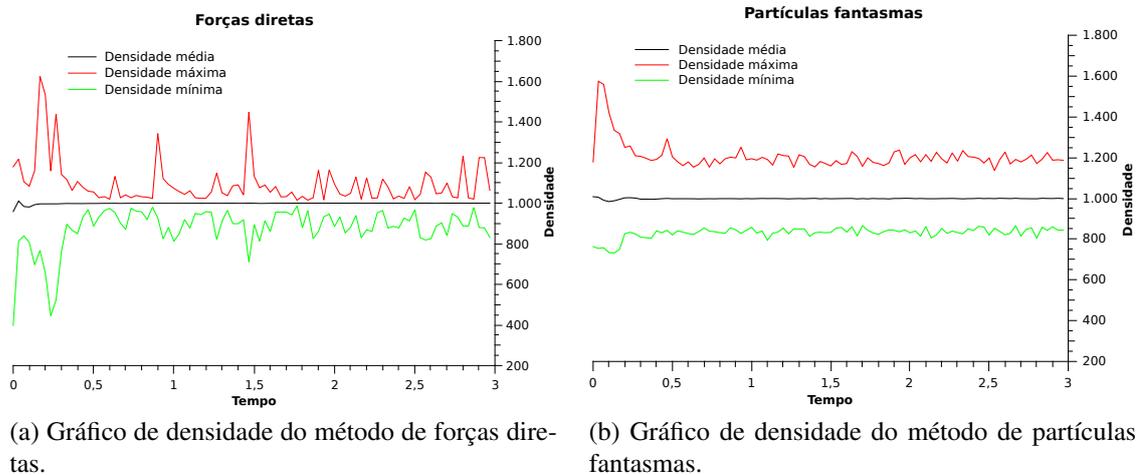


Figura 5.3: Gráficos de resultado do teste hidroestático.

Na Figura 5.3, dois gráficos de densidade do teste hidroestático são apresentados. Esses gráficos apresentam a densidade mínima, máxima e média da simulação em vários instantes de tempo. A densidade mínima é calculada como a menor densidade entre todas as partículas naquele instante de tempo. As outras densidades são calculadas de maneira semelhante. A Figura 5.4 apresenta gráficos de densidade do teste da torneira sobre esfera.

É possível notar nos gráficos que a densidade média com ambos os métodos é próxima da densidade de repouso. Ou seja, ambos os métodos procuram obedecer à densidade de repouso, como esperado. No entanto, a densidade máxima e mínima apresentam comportamentos dife-

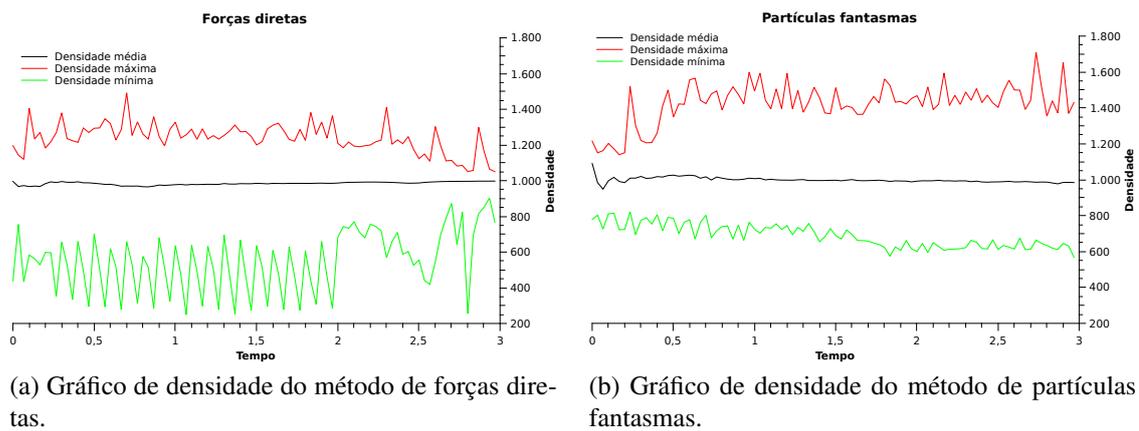


Figura 5.4: Gráficos de resultado do teste da torneira sobre esfera.

rentes.

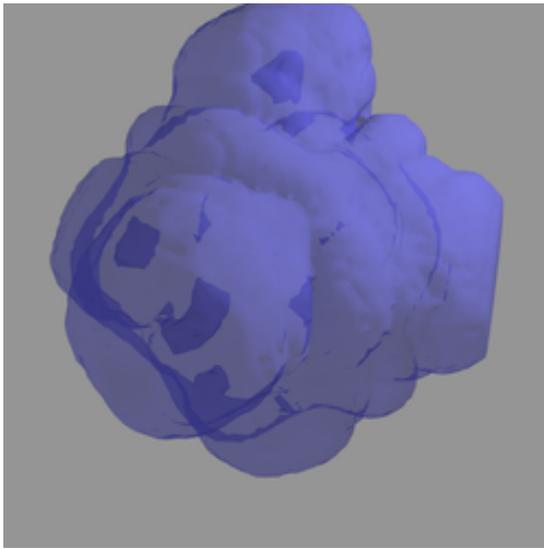
As partículas no método de partículas fantasmas não procuram garantir sua densidade igual a densidade de repouso. Por isso, a densidade máxima no teste hidrostático está sempre próxima de  $1,200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . O mesmo acontece com a densidade mínima no teste hidrostático. No entanto, isso não acontece no teste da torneira sobre esfera, e a densidade máxima aumenta ao longo da simulação, enquanto a densidade mínima diminui; isso acontece devido à constante adição de partículas.

Em contraste, o método de forças diretas procura garantir à densidade das partículas igual a densidade de descanso. Isso resulta na densidade máxima cada vez menor, exceto em alguns picos, ao longo da simulação. O mesmo acontece com a densidade mínima do teste hidrostático. No entanto, isso não acontece no teste da torneira sobre esfera: como as partículas não procuram ficar próximas à fronteira, as partículas não são capazes de estabilizar.

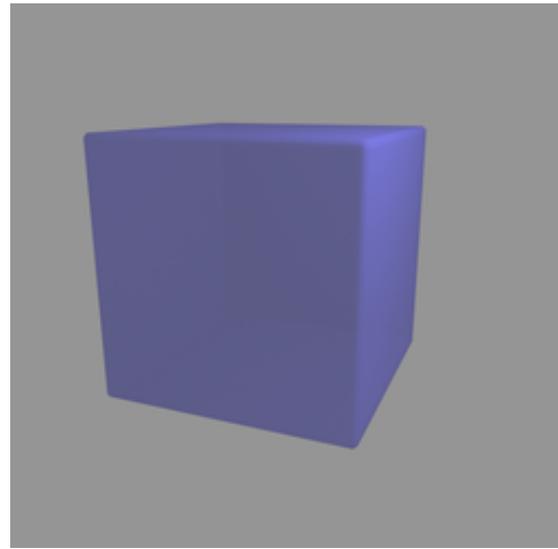
A Figura 5.5 apresenta o resultado da simulação do teste hidrostático ao final da simulação. Como descrito em [Schechter e Bridson 2012], o método de partículas fantasmas é capaz de manter o cubo de fluido estático, apesar do método de cálculo da densidade. Em contraste, o cubo está deformado ao final da simulação com o método de forças diretas.

A Figura 5.6 apresenta o resultado após 1,5 segundos de simulação do teste da torneira sobre esfera. Como esperado, o método de forças diretas não é capaz de manter o fluido próximo à superfície da esfera. O método de partículas fantasmas mantêm o fluido próximo à superfície da esfera. No entanto, o fluido não está distribuído uniformemente pela esfera.

Por causa do raio de influência utilizado, as partículas de fluido possuem volume grande em comparação com a esfera, o que ajuda a não distribuir as partículas por toda a superfície. Além disso, o método XSPH modifica a velocidade das partículas de fluido diretamente e, por isso,

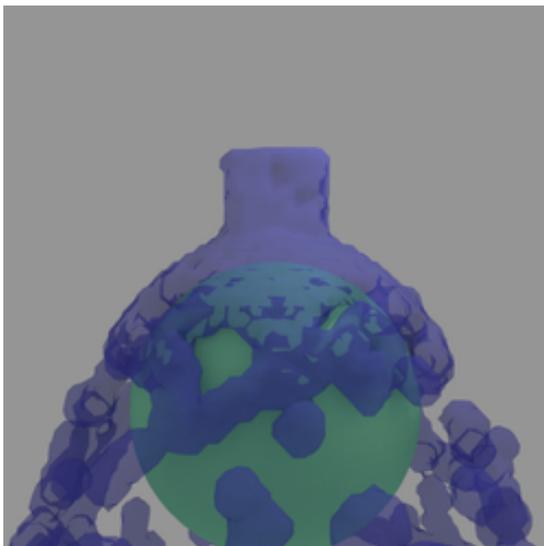


(a) Resultado do método de forças diretas.

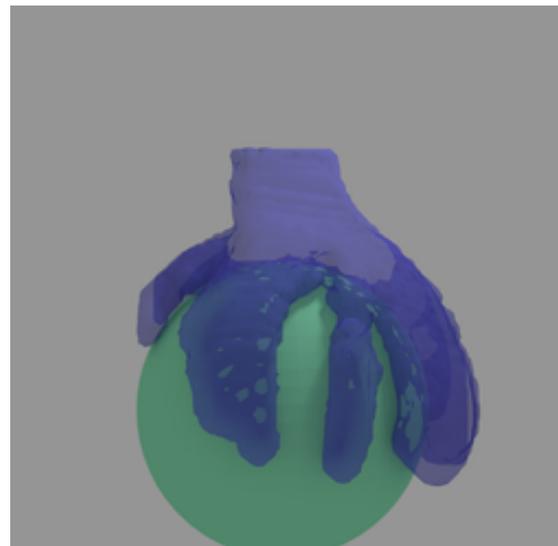


(b) Resultado do método de partículas fantasmas.

Figura 5.5: Imagens de resultado após 3 segundos de animação do teste hidrostático.



(a) Resultado do método de forças diretas.



(b) Resultado do método de partículas fantasma.

Figura 5.6: Imagens de resultado após 1,5 segundos de animação do teste da torneira sobre esfera.

um grande número de partículas segue na mesma direção.

## 5.3 Escolha das equações

Nesta seção, alguns testes são realizados para comparar os diferentes métodos de simulação de fluidos gerais. Esses métodos são, em parte, semelhantes aos métodos originais apresentados em [Müller et al. 2003] e [Becker e Teschner 2007]. Para todos os métodos, o método de forças diretas é utilizado para tratar a condição de contorno. Quatro variações dos métodos são utilizadas e comparadas:

- **SPH interativo A:** Método idêntico ao apresentado em [Müller et al. 2003].
- **SPH interativo B:** Assim como o método acima, baseado no método de [Müller et al. 2003]. No entanto, a densidade de cada partícula é atualizada pela equação de conservação de massa de [Becker e Teschner 2007].
- **WCSPH A:** Método semelhante ao WCSPH de [Becker e Teschner 2007]. No entanto, a equação de aproximação do SPH de [Müller et al. 2003] é utilizada para o cálculo da densidade.
- **WCSPH B:** Método idêntico ao apresentado em [Becker e Teschner 2007].

### 5.3.1 Descrição dos testes

#### Quebra de barragem

Este é um teste comumente utilizado para verificar a corretude de sistemas de simulação de fluidos, e por isso é inclusa. No entanto, nenhuma comparação é realizada com resultados laboratoriais.

A fronteira é inicializada por um cubo, cujo lado mede 4m e cujo centro encontra-se na origem do sistema de coordenadas. O volume inicial do fluido é inicializado por uma caixa alinhada aos eixos, cujo ponto mínimo é  $(-1,9; -1,9; -1,9)^T$  e ponto máximo é  $(-1,5; 1,9; 1,9)^T$ . Para garantir que o fluido não ultrapasse a fronteira, é necessário que ele não seja inicializado muito próximo da mesma. O volume do fluido é inicializado uniformemente, com distância em cada direção igual a 0,1m. A velocidade inicial do fluido é nula. A Tabela 5.3 apresenta os parâmetros utilizados na simulação.

Tabela 5.3: Tabela de constantes utilizadas no teste da quebra de barragem.

Constante	Valor
Número de partículas	7.605 partículas
Massa de cada partícula	1,429 kg
Densidade de repouso ( $\rho_0$ )	$1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Raio de influência ( $h$ )	0,2 m
Passo da simulação ( $\delta t$ )	$5 \times 10^{-5}$ s
Rigidez	$10.000 \text{ s}^{-2}$
Velocidade do som no fluido	$100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Viscosidade artificial ( $\alpha$ )	0,02
Viscosidade cinemática ( $\nu$ )	$0,02 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
Tempo de animação	5 s

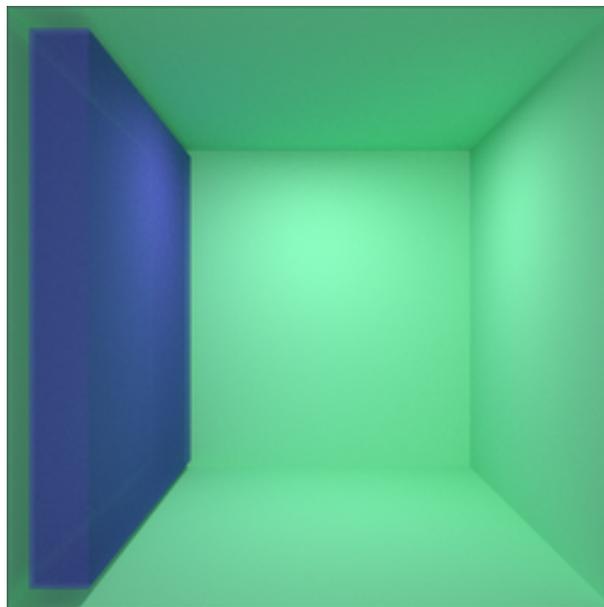


Figura 5.7: Volume inicial do teste da quebra de barragem.

### Torneira

Este teste adiciona partículas com frequência ao sistema, para garantir que a simulação seja suficientemente estável. A fronteira é inicializada por um cubo, cujo lado mede 4m e cujo centro encontra-se na origem do sistema de coordenadas.

O volume inicial do fluido é um cilindro, de raio 0,2m, altura 0,2m, e centro da base no ponto  $(0;0;0,9)^T$ . A cada 0,02 segundos de simulação (inclusive no início), partículas são adicionadas no volume inicial de maneira uniforme com distância em cada direção igual a 0,05m. Para evitar instabilidade na simulação, uma partícula é adicionada apenas se nenhuma outra partícula de fluido está localizada a uma distância menor do que 0,05m. As constantes da simulação são apresentadas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Tabela de constantes utilizadas no teste da torneira.

Constante	Valor
Massa de cada partícula	0,203 kg
Densidade de repouso ( $\rho_0$ )	$1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Raio de influência ( $h$ )	0,1 m
Passo da simulação ( $\delta t$ )	$5 \times 10^{-5}$ s
Rigidez	$10.000 \text{ s}^{-2}$
Velocidade do som no fluido	$100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Viscosidade artificial ( $\alpha$ )	0,02
Viscosidade cinemática ( $\nu$ )	$0,02 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
Tempo de animação	5 s

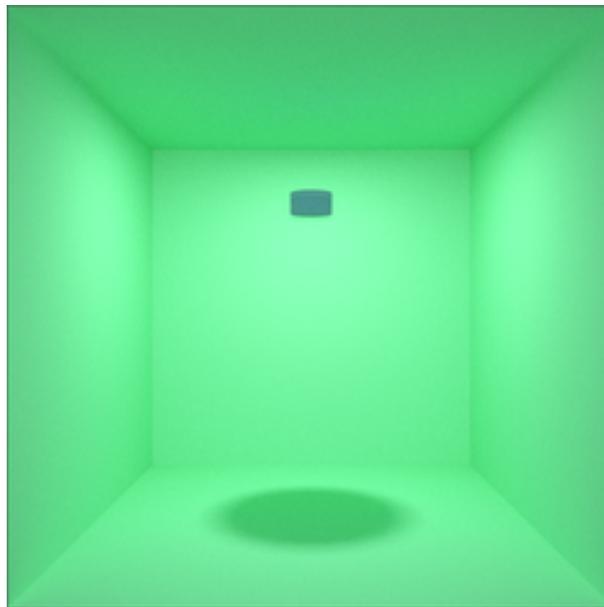


Figura 5.8: Volume inicial do teste da torneira.

### 5.3.2 Discussão

As Figuras 5.9 e 5.10 apresentam os gráficos de densidade dos dois testes realizados com os diversos métodos. Em ambas as figuras, a densidade do fluido no método SPH é normalmente maior do que no método WCSPH. Apesar da densidade do fluido errada, a simulação é estável. Além disso, os picos em densidade acontecem devido à alta rigidez, e partículas de fluido ficam muito próximas umas das outras. Isso acontece pois o método SPH é incapaz de simular fluidos com baixa velocidade inicial.

Em ambos os testes, os métodos WCSPH são capazes de manter a densidade próxima da densidade de repouso. No teste da quebra de barragem, a densidade mínima do fluido está constantemente distante da densidade de repouso; o valor da rigidez não é suficiente para controlar a variação da densidade. No teste da torneira, a densidade do fluido não estabiliza com facilidade

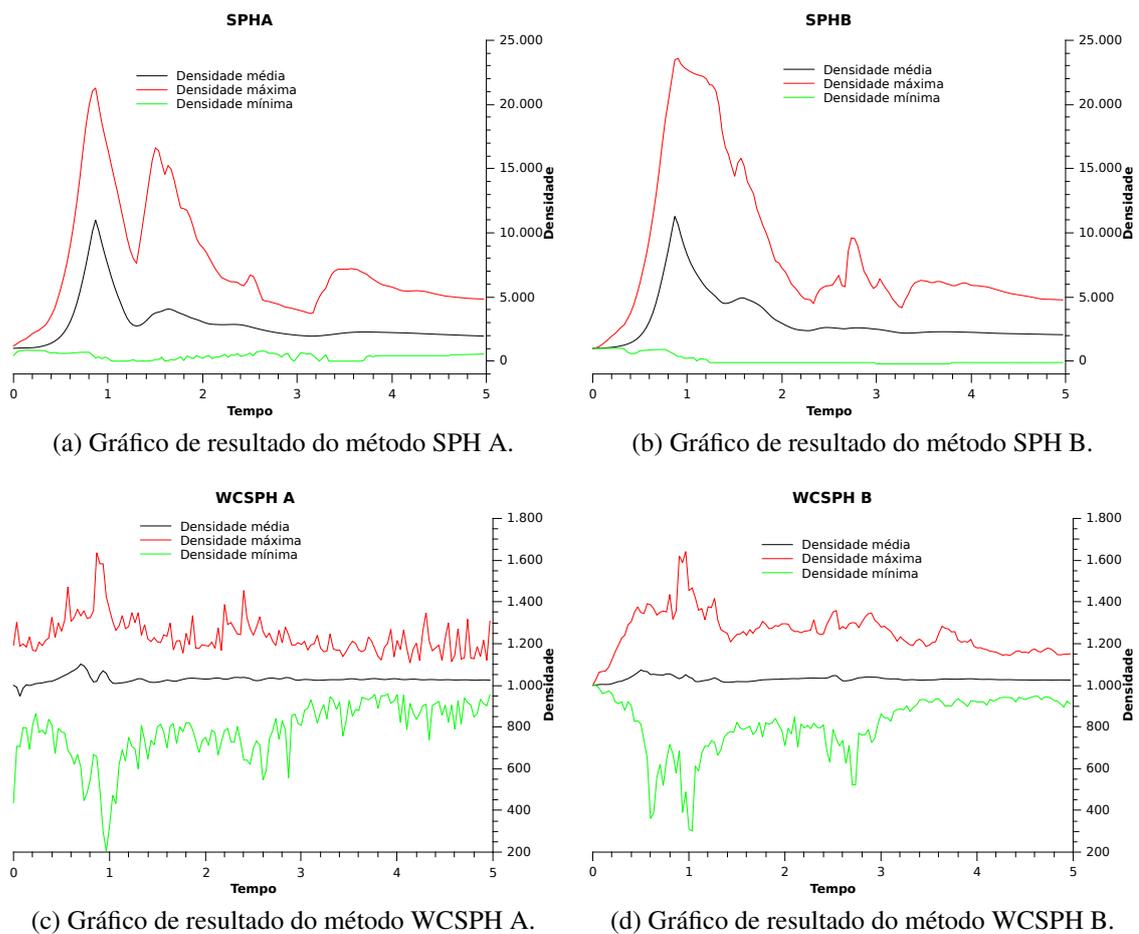
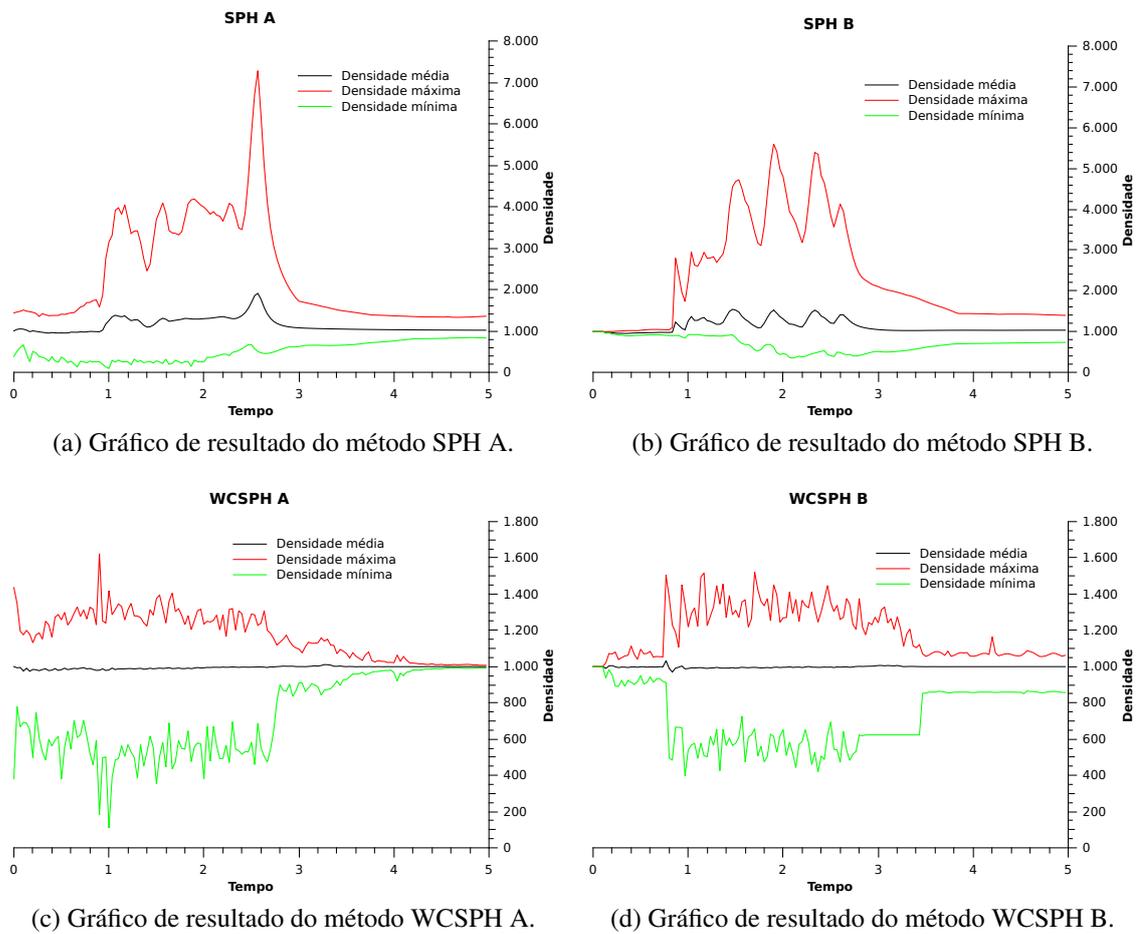


Figura 5.9: Gráficos de resultado do teste da quebra de barragem.

devido à constante adição de novas partículas.

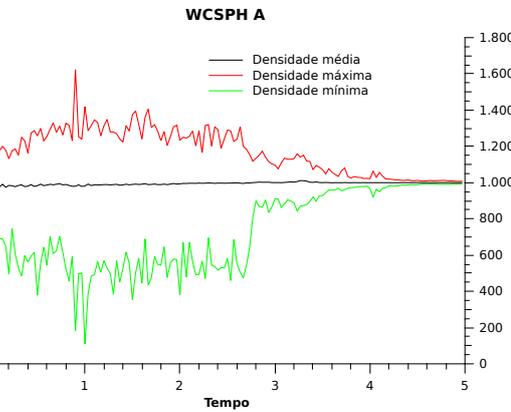
A Figura 5.11 apresenta o resultado da simulação do teste da barragem com os quatro métodos. A imagem foi gerada com o resultado após 1,2 segundos de simulação. É possível notar que as imagens dos métodos SPH possuem partículas muito próximas umas das outras. Além disso, o fluido na região esquerda não aparenta realista. Em contraste, os métodos WCSPH não apresentam esses problemas, e as imagens são visualmente melhores.

A Figura 5.12 apresenta o resultado da simulação do teste da torneira após 2,2 segundos de simulação. Com o método SPH A, o fluido movimenta-se para a direita, o que não é correto. Em contraste, o método SPH B não apresenta esse problema, mas o fluido não se espalha muito. Esses resultados dos métodos SPH são atribuídos devido a alta rigidez, a inicialização uniforme das partículas e limitações dos métodos. Os métodos WCSPH não aparentam esses problemas, e o fluido se espalha como esperado.

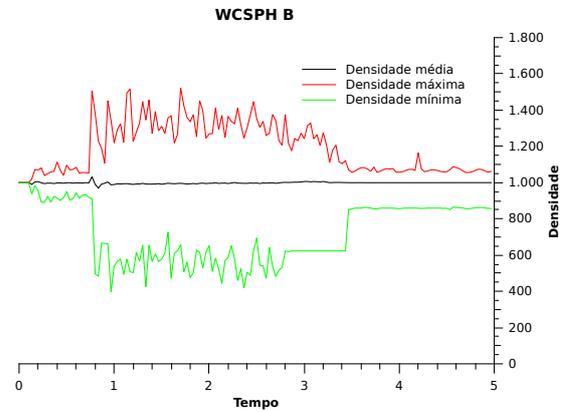


(a) Gráfico de resultado do método SPH A.

(b) Gráfico de resultado do método SPH B.



(c) Gráfico de resultado do método WCSPH A.



(d) Gráfico de resultado do método WCSPH B.

Figura 5.10: Gráficos de resultado do teste da torneira.



(a) Resultado do método SPH A.



(b) Resultado do método SPH B.



(c) Resultado do método WCSPH A.



(d) Resultado do método WCSPH B.

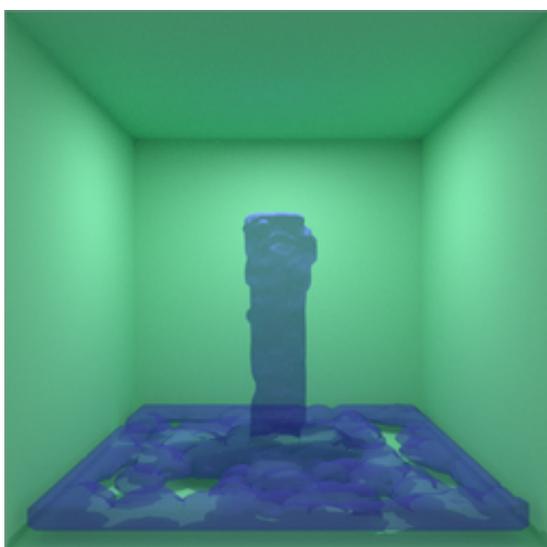
Figura 5.11: Imagens de resultado após 1,2 segundos de animação do teste da quebra de barragem.



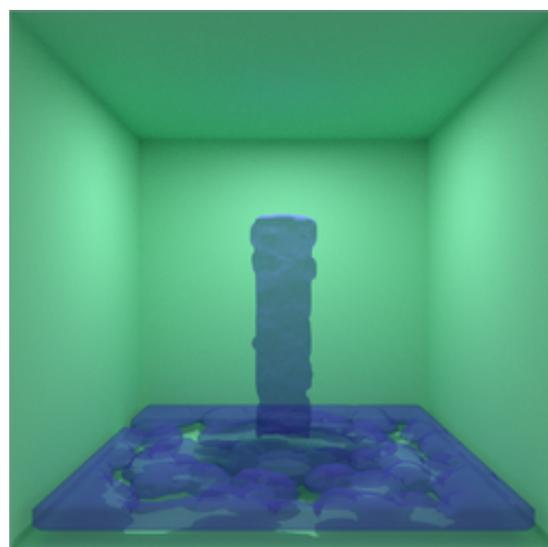
(a) Resultado do método SPH A.



(b) Resultado do método SPH B.



(c) Resultado do método WCSPH A.



(d) Resultado do método WCSPH B.

Figura 5.12: Imagens de resultado após 2,2 segundos de animação do teste da torneira.

## 5.4 Inicialização das partículas

Nesta seção, testes com diferentes métodos de inicialização das partículas são discutidos. O método de comparação é o método WCSPH, como proposto em [Becker e Teschner 2007]. Para a condição de contorno, o método de forças diretas é utilizado. Para a inicialização das partículas, os métodos de inicialização uniforme e de inicialização por amostragem de Poisson são comparados.

Os testes realizados são os mesmos testes descritos na Seção 5.3.1: **quebra de barragem e torneira**. Os testes com inicialização uniforme não são modificados. Os testes com inicialização por amostragem de Poisson utilizam o método apresentado na Seção 4.5.2: partículas são criadas aleatoriamente, mas cada partícula só será efetivamente criada se nenhuma partícula de sua vizinhança ficar no interior de uma esfera de raio  $\frac{h}{2}$  centrada na posição da partícula a ser criada.

### 5.4.1 Discussão

As Figuras 5.13 e 5.14 apresentam os gráficos de densidade obtidos em ambos os testes. Em geral, o método é capaz de garantir uma baixa variação na densidade com ambos os métodos de inicialização. Devido ao espalhamento das partículas, menos picos são visíveis nos resultados de amostragem de Poisson.

Na Figura 5.15, as imagens de resultado do teste de quebra de barragem são apresentados. Em ambos os métodos, os fluidos possuem forma semelhante, e não possível decidir qual possui resultado visual melhor. Os resultados do teste da torneira, apresentados na Figura 5.16, são muito semelhantes para permitir uma comparação que favoreça qualquer um dos métodos.

Apesar da semelhança dos dois métodos, o número de partículas utilizadas é diferente. No teste da quebra de barragem, 7.605 partículas foram geradas com o método de inicialização uniforme, enquanto que 4.247 foram geradas com o método de amostragem de Poisson. No teste da torneira, foram 2.793 partículas geradas com o método de inicialização uniforme, contra 2.811 partículas geradas pelo método de amostragem de Poisson.

Para volumes grandes, como o teste da quebra de barragem, o número de partículas utilizadas em amostragem de Poisson é muito menor, o que diminui consideravelmente o tempo de simulação. Isso significa que apesar do menor número de partículas, o fluido segue o mesmo caminho e forma do que inicialização uniforme. A diferença no teste da torneira é desprezível.

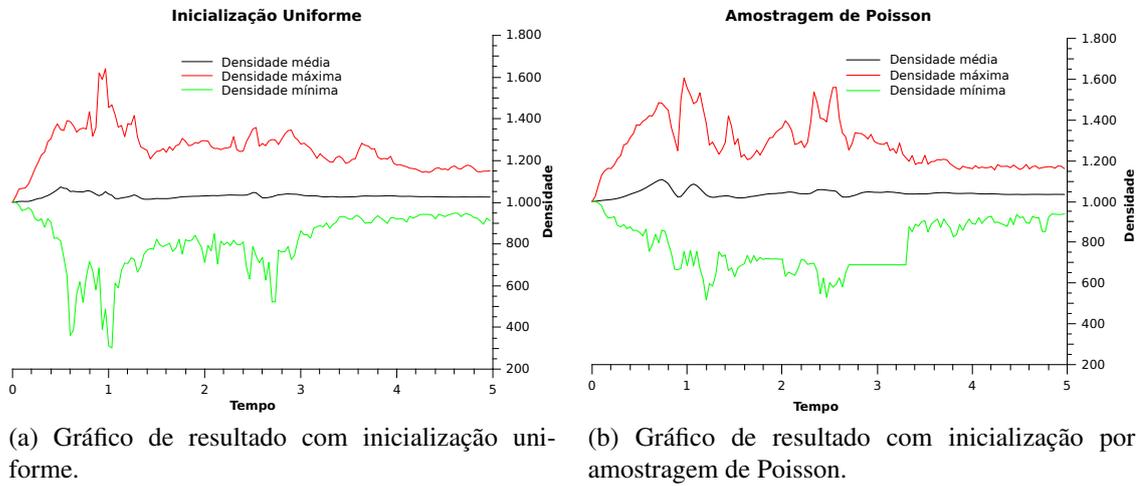


Figura 5.13: Gráficos de resultado do teste da quebra de barragem.

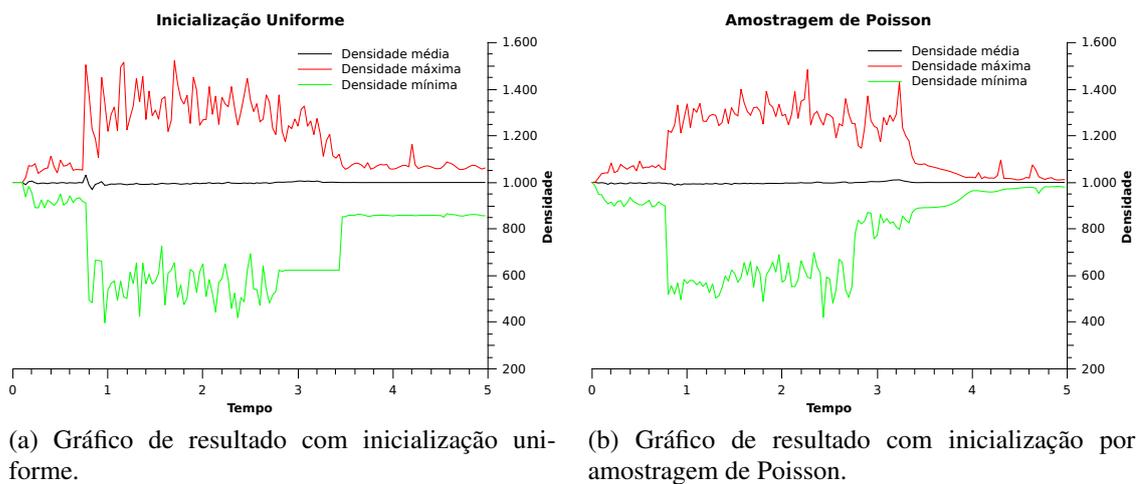
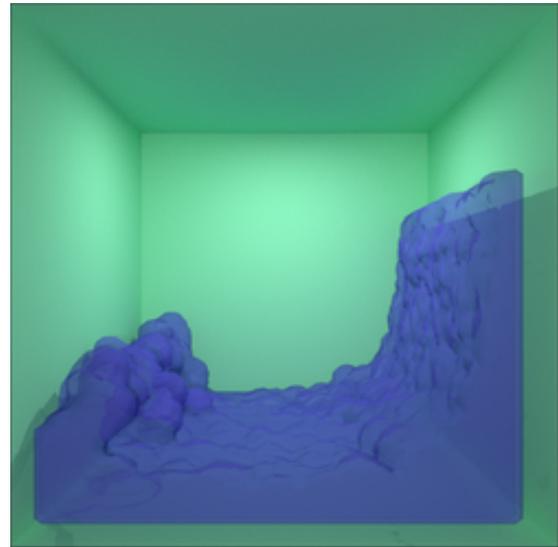


Figura 5.14: Gráficos de resultado do teste da torneira.

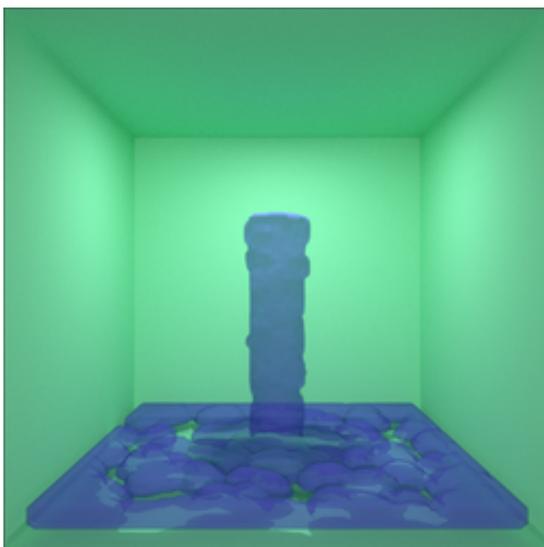


(a) Resultado com inicialização uniforme.

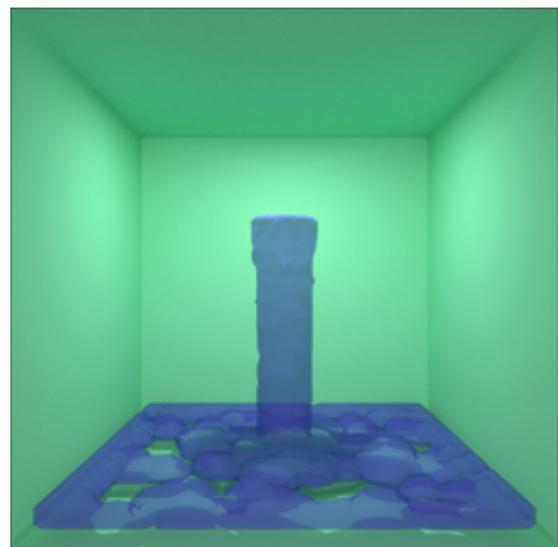


(b) Resultado com inicialização por amostragem de Poisson.

Figura 5.15: Imagens de resultado após 1,2 segundos de animação do teste da quebra de barragem.



(a) Resultado com inicialização uniforme.



(b) Resultado com inicialização por amostragem de Poisson.

Figura 5.16: Imagens de resultado após 2,2 segundos de animação do teste da torneira.

## 5.5 Considerações finais

Neste capítulo, foram apresentados diversos testes de comparação dos métodos apresentados nos capítulos anteriores. Na Seção 5.2, os métodos de forças diretas e o método de partículas fantasmas foram comparados. Os testes utilizados foram os testes de [Schechter e Bridson 2012], descritos para comprovar os resultados do método de partículas fantasmas. Apesar de funcionar como descrito, o método de partículas fantasmas aparenta problemas quanto à viscosidade do fluido.

Na Seção 5.3, os diferentes métodos de simulação de fluidos gerais são comparados. Em especial, os métodos baseados no método de Müller et al. [2003] aparentam problemas na simulação de fluidos realistas.

Na Seção 5.4, inicialização uniforme e inicialização por amostragem de Poisson são comparados. O método de simulação foi baseado no método de Becker e Teschner [2007]. Ambos os métodos de inicialização obtêm resultados visuais semelhantes, mas a amostragem de Poisson pode gerar menos partículas, o que diminui o tempo de simulação. No próximo capítulo, conclusões sobre este trabalho são apresentadas.

## 6 *Conclusão*

### 6.1 **Discussão**

Nesta dissertação, foram apresentados quatro trabalhos sobre simulação de fluidos utilizando *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Os métodos propostos em [Müller et al. 2003] (SPH iterativo) e [Becker e Teschner 2007] (WCSPH) foram desenvolvidos para simular fluidos gerais. Os métodos apresentados em [Becker et al. 2009] (forças diretas) e [Schechter e Bridson 2012] (partículas fantasmas) foram propostos para simular a interação do fluido com sólidos corretamente.

Como forma de acelerar a simulação do fluido, foi apresentado um método de busca espacial que utiliza uma estrutura de grade uniforme para organizar as partículas de fluido. Essa estrutura também é utilizada na criação das partículas fantasmas no método de partículas fantasmas. O método de criação dessas partículas foi diferente daquele apresentado em [Schechter e Bridson 2012], mas garantiu resultados semelhantes.

A escolha dos parâmetros da simulação e os métodos de aproximação também foram discutidos. Cada parâmetro da simulação é capaz de modificar o resultado final, e deve ser escolhido de acordo com o que é desejado pelo usuário.

Finalmente, diversos testes foram realizados para verificar e comparar os métodos apresentados. Os métodos de forças diretas e de partículas fantasmas foram comparados em dois testes propostos em [Schechter e Bridson 2012], e foi possível verificar que o método de partículas fantasmas é capaz de garantir as condições de contorno corretas como apresentado pelos autores. O método de forças diretas funciona bem para casos gerais, mas não simula corretamente os testes apresentados.

No entanto, o método de partículas fantasmas apresenta problemas quanto ao XSPH, o método de viscosidade artificial. O fluido simulado pode seguir todo em uma direção, o que não é desejado. Isso acontece pois o método XSPH modifica a velocidade de cada partícula de fluido, introduzindo erro numérico. No entanto, o método XSPH é essencial para garantir as condições

de contorno no método.

A seguir, testes de comparação entre os métodos SPH interativo e WCSPH foram apresentados. A partir dos testes, foi possível notar que o método SPH interativo não é capaz de simular fluidos de forma realista, apresentando partículas muito próximas umas das outras e movimento irreal. O método WCSPH é capaz de simular fluidos de maneira realista se os parâmetros de simulação forem escolhidos corretamente. Os testes realizados não comprovaram o realismo do fluido, mas isso pode ser feito com maiores valores de rigidez.

Os métodos de inicialização das partículas foram então comparados utilizando WCSPH. Foi possível notar que apesar do menor número de partículas, inicialização por amostragem de Poisson possui resultados semelhantes àqueles obtidos com inicialização uniforme. Além disso, apesar da configuração aleatória das partículas, a superfície do fluido pode ser bem aproximada.

Portanto, para simulações de fluidos visualmente convincentes, os métodos WCSPH juntamente com o método de forças diretas podem ser utilizados. O método de partículas fantasmas pode ser utilizado, mas os parâmetros da simulação devem ser bem controlados. Além disso, para obter simulações mais rápidas, é recomendado utilizar amostragem de Poisson para a criação das partículas. Apesar de não apresentado neste trabalho, simulações por SPH podem ser paralelizadas, diminuindo mais ainda o tempo de simulação.

## **6.2 Trabalhos Futuros**

A simulação de fluidos gerais com SPH pode ser bem resolvida com o método WCSPH. No entanto, as condições de contorno são um problema em aberto. O método de partículas fantasmas procura resolver isso, mas é sensível aos parâmetros escolhidos. Além disso, esse método não é capaz de simular sólidos que sofrem a influência do fluido.

No caso ideal, uma simulação por SPH deve ser capaz de garantir as condições de contorno corretas, ser capaz de simular a interação entre sólidos e fluidos, e ser pouco sensível aos parâmetros da simulação. Além disso, é desejável que o método seja paralelizável, podendo ser executado em computadores de alto desempenho. Portanto, deve-se investigar como o método de forças diretas pode ser modificado, garantindo as condições de contorno corretas.

O método WCSPH é capaz de simular fluidos gerais, mas o fluido não é suposto incompressível. Outros métodos [Stam 1999] para a simulação de fluido, supõem o fluido incompressível, o que é capaz de gerar resultados mais convincentes. Portanto, deve-se investigar como o método

SPH pode ser utilizado para a simulação de fluidos incompressíveis, e se isso é mais rápido ou realista do que WCSPH.

Apesar de não discutido neste trabalho, a simulação realista de fluidos a partir de um conjunto de partículas é um problema em aberto. Pode ser interessante investigar diferentes métodos de simulação, e se estes podem ser utilizados para a renderização em tempo real do fluido. Em especial, fluidos representados por poucas partículas também devem ser considerados.

## *Referências Bibliográficas*

- ADAMS, B.; PAULY, M.; KEISER, R.; GUIBAS, L. J. Adaptively sampled particle fluids. In: *ACM SIGGRAPH 2007 papers*. New York, NY, USA: ACM, 2007. (SIGGRAPH '07). Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1275808.1276437>>.
- AKINCI, G.; IHMSEN, M.; AKINCI, N.; TESCHNER, M. Parallel surface reconstruction for particle-based fluids. *Computer Graphics Forum*, Blackwell Publishing Ltd, p. no–no, 2012. ISSN 1467-8659. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.02096.x>>.
- AKINCI, N.; IHMSEN, M.; AKINCI, G.; SOLENTHALER, B.; TESCHNER, M. Versatile rigid-fluid coupling for incompressible sph. *ACM Trans. Graph.*, ACM, New York, NY, USA, v. 31, n. 4, p. 62:1–62:8, jul. 2012. ISSN 0730-0301. Disponível em: <<http://doi.acm.org/http://doi.acm.org/10.1145/2185520.2185558>>.
- BAGAR, F.; SCHERZER, D.; WIMMER, M. A layered particle-based fluid model for real-time rendering of water. *Computer Graphics Forum*, Blackwell Publishing Ltd, v. 29, n. 4, p. 1383–1389, 2010. ISSN 1467-8659. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2010.01734.x>>.
- BARAFF, D. Rigid body simulation. In: *SIGGRAPH 95 Course Note 34. ACM SIGGRAPH*. [S.l.: s.n.], 1992.
- BECKER, M.; TESCHNER, M. Weakly compressible sph for free surface flows. In: *Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2007. (SCA '07), p. 209–217. ISBN 978-1-59593-624-0. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1272690.1272719>>.
- BECKER, M.; TESSENDORF, H.; TESCHNER, M. Direct forcing for lagrangian rigid-fluid coupling. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, IEEE Educational Activities Department, Piscataway, NJ, USA, v. 15, n. 3, p. 493–503, maio 2009. ISSN 1077-2626. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2008.107>>.
- Blender Foundation. *Blender*. 2 2013. Disponível em: <<http://www.blender.org>>.
- BODIN, K.; LACOURSIERE, C.; SERVIN, M. Constraint fluids. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, IEEE Educational Activities Department, Piscataway, NJ, USA, v. 18, n. 3, p. 516–526, mar. 2012. ISSN 1077-2626. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2011.29>>.
- DALRYMPLE, R.; ROGERS, B. Numerical modeling of water waves with the sph method. *Coastal Engineering*, v. 53, n. 2–3, p. 141 – 147, 2006. ISSN 0378-3839. <ce:title>Coastal Hydrodynamics and Morphodynamics</ce:title> <xocs:full-name>Symposium celebrating the academic closing address of Jurjen A. Battjes</xocs:full-name>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378383905001304>>.

- FRAEDRICH, R.; AUER, S.; WESTERMANN, R. Efficient high-quality volume rendering of sph data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, IEEE Educational Activities Department, Piscataway, NJ, USA, v. 16, n. 6, p. 1533–1540, nov. 2010. ISSN 1077-2626. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2010.148>>.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed Particle hydrodynamic: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 181, p. 375–389, 1977.
- GRANGER, R. A. *Fluid Mechanics*. [S.l.]: Dover Publications, 1995.
- IHMSEN, M.; AKINCI, N.; BECKER, M.; TESCHNER, M. A parallel sph implementation on multi-core cpus. *Computer Graphics Forum*, Blackwell Publishing Ltd, v. 30, n. 1, p. 99–112, 2011. ISSN 1467-8659. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2010.01832.x>>.
- LAAN, W. J. van der; GREEN, S.; SAINZ, M. Screen space fluid rendering with curvature flow. In: *Proceedings of the 2009 symposium on Interactive 3D graphics and games*. New York, NY, USA: ACM, 2009. (I3D '09), p. 91–98. ISBN 978-1-60558-429-4. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1507149.1507164>>.
- LENAERTS, T.; ADAMS, B.; DUTRÉ, P. Porous flow in particle-based fluid simulations. In: *ACM SIGGRAPH 2008 papers*. New York, NY, USA: ACM, 2008. (SIGGRAPH '08), p. 49:1–49:8. ISBN 978-1-4503-0112-1. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1399504.1360648>>.
- LORENSEN, W. E.; CLINE, H. E. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. In: *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. New York, NY, USA: ACM, 1987. (SIGGRAPH '87), p. 163–169. ISBN 0-89791-227-6. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/37401.37422>>.
- LUCY, L. B. A Numerical Approach to Testing the Fission Hypothesis. *The Astronomical Journal*, v. 82, n. 12, p. 1013–1924, 1977.
- MONAGHAN, J. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of computational physics*, Elsevier Science, v. 110, n. 2, p. 399–406, 1994.
- MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 30, p. 543–574, 1992.
- MÜLLER, M.; CHARYPAR, D.; GROSS, M. Particle-based fluid simulation for interactive applications. In: *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2003. (SCA '03), p. 154–159. ISBN 1-58113-659-5. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=846276.846298>>.
- MÜLLER, M.; SCHIRM, S.; TESCHNER, M.; HEIDELBERGER, B.; GROSS, M. Interaction of fluids with deformable solids: Research articles. *Comput. Animat. Virtual Worlds*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, v. 15, n. 3-4, p. 159–171, jul. 2004. ISSN 1546-4261. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/cav.v15:3/4>>.
- MÜLLER, M.; SOLENTHALER, B.; KEISER, R.; GROSS, M. Particle-based fluid-fluid interaction. In: *Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on*

*Computer animation*. New York, NY, USA: ACM, 2005. (SCA '05), p. 237–244. ISBN 1-59593-198-8. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1073368.1073402>>.

SCHECHTER, H.; BRIDSON, R. Ghost sph for animating water. *ACM Trans. Graph.*, ACM, New York, NY, USA, v. 31, n. 4, p. 61:1–61:8, jul. 2012. ISSN 0730-0301. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/2185520.2185557>>.

SOLENTHALER, B.; GROSS, M. Two-scale particle simulation. *ACM Trans. Graph.*, ACM, New York, NY, USA, v. 30, n. 4, p. 81:1–81:8, ago. 2011. ISSN 0730-0301. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/2010324.1964976>>.

SOLENTHALER, B.; PAJAROLA, R. Density contrast sph interfaces. In: *Proceedings of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2008. (SCA '08), p. 211–218. ISBN 978-3-905674-10-1. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1632592.1632623>>.

SOLENTHALER, B.; PAJAROLA, R. Predictive-corrective incompressible sph. In: *ACM SIGGRAPH 2009 papers*. New York, NY, USA: ACM, 2009. (SIGGRAPH '09), p. 40:1–40:6. ISBN 978-1-60558-726-4. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1576246.1531346>>.

SOLENTHALER, B.; SCHLÄFLI, J.; PAJAROLA, R. A unified particle model for fluid–solid interactions. *Computer Animation and Virtual Worlds*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 18, n. 1, p. 69–82, 2007. ISSN 1546-427X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/cav.162>>.

STAM, J. Stable fluids. In: *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. New York, NY, USA: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1999. (SIGGRAPH '99), p. 121–128. ISBN 0-201-48560-5.

SUN, H.; HAN, J. Particle-based realistic simulation of fluid–solid interaction. *Computer Animation and Virtual Worlds*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 21, n. 6, p. 589–595, 2010. ISSN 1546-427X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/cav.379>>.

THÜREY, N.; KEISER, R.; PAULY, M.; RÜDE, U. Detail-preserving fluid control. In: *Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2006. (SCA '06), p. 7–12. ISBN 3-905673-34-7. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1218064.1218066>>.

YU, J.; WOJTAN, C.; TURK, G.; YAP, C. Explicit mesh surfaces for particle based fluids. *Computer Graphics Forum*, Blackwell Publishing Ltd, v. 31, n. 2pt4, p. 815–824, 2012. ISSN 1467-8659. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03062.x>>.