

Carlos Vinícius Gomes Costa Lima

*Sobre b -coloração de grafos
com cintura pelo menos 6*

Fortaleza – CE

Fevereiro/2013

Carlos Vinícius Gomes Costa Lima

***Sobre b -coloração de grafos
com cintura pelo menos 6***

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Ceará.

Orientador:

Prof. Dr. Victor Almeida Campos

Coorientador:

Prof^a. Dr^a. Ana Shirley F. da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PARGO - PARALELISMO, GRAFOS E OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Fortaleza – CE

Fevereiro/2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

L697s Lima, Carlos Vinicius Gomes.
Sobre *b*- coloração de grafos com cintura pelo menos 6. / Carlos Vinicius Gomes Lima. – 2013.
59 f. : il. , enc. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Ciência da Computação.

Orientação: Prof. Dr. Victor Almeida Campos.

Coorientação: Profa. Dra. Ana Shirley F. da Silva.

1. Teoria dos grafos. 2. Representação dos grafos – coloração. I. Título.

“Eu poderia suportar, embora não sem dor, que tivessem morrido todos os meus amores, mas enlouqueceria se morressem todos os meus amigos!”

Vinícius de Moraes

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por tudo.

Várias pessoas contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Sou profundamente grato a todas, e dedico agradecimento especial a algumas delas:

Aos meus orientadores, Cláudia Linhares, Victor Campos e Ana Shirley, por todo o tempo dedicado, a paciência e a amizade. Eles realmente me guiaram em todos os momentos desta caminhada e estiveram presentes sempre que precisei.

À minha família, em especial aos meus pais, por sempre terem colocado a minha educação em primeiro lugar. Obrigada por todo o amor e dedicação, e pelos esforços de ambos em tornar o ambiente o mais favorável possível aos meus estudos. Espero estar retribuindo um pouco do que fizeram por mim.

Ao ParGO, grupo da qual fiz parte por um bom tempo e que me propiciou encontrar pessoas especiais, conhecimentos para a vida toda e professores que não são apenas professores, e sim amigos que eu posso contar daqui pra frente.

Aos meus amigos e companheiros de todas as horas, Marcio, Arthur, Lívia, Ticiane e Danusa, que são meus amigos de vida, desde a graduação, e que estiveram em cada momento até aqui, momentos de alegria, tristeza e desespero nas cadeiras. Guardo pra sempre a lembrança de cada um comigo e dos muitos bons momentos juntos. Além da Karol que estive conosco por um bom tempo e sempre deixa saudades quando está longe.

Aos meus novos amigos Tatiane, Rennan e Rafael pela companhia, curta, mas muito prazerosa.

Finalmente, ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelo financiamento da bolsa de estudos para a realização da presente dissertação.

Resumo

O problema de coloração está entre os mais estudados dentro da Teoria dos Grafos devido a sua grande importância teórica e prática. Dado que o problema de colorir os vértices de um grafo G qualquer com a menor quantidade de cores é NP-difícil, várias heurísticas de coloração são estudadas a fim de obter uma coloração própria com um número de cores razoavelmente pequeno.

Dado um grafo G , a heurística b de coloração se resume a diminuir a quantidade de cores utilizadas em uma coloração própria c , de modo que, se todos os vértices de uma classe de cor deixam de ver alguma cor em sua vizinhança, então podemos modificar a cor desses vértices para qualquer cor inexistente em sua vizinhança. Dessa forma, obtemos uma coloração c' com uma cor a menos que c .

Irving e Molove definiram a b -coloração de um grafo G como uma coloração onde toda classe de cor possui um vértice que é adjacente as demais classes de cor. Esses vértices são chamados b -vértices. Irving e Molove também definiram o número b -cromático como o maior inteiro k tal que G admite uma b -coloração por k cores. Eles mostraram que determinar o número b -cromático de um grafo qualquer é um problema NP-difícil, mas polinomial para árvores.

Irving e Molove também definiram o m -grau de um grafo, que é o maior inteiro $m(G)$ tal que existem $m(G)$ vértices com grau pelo menos $m(G) - 1$. Irving e Molove mostraram que o m -grau é um limite superior para número b -cromático e mostraram que o mesmo é igual a $m(T)$ ou a $m(T) - 1$, para toda árvore T , onde o número b -cromático é igual a $m(T)$ se, e somente se, T possui um conjunto bom.

Nesta dissertação, verificamos a relação entre a cintura, que é o tamanho do menor ciclo, e o número b -cromático de um grafo G . Mais especificamente, tentamos encontrar o menor inteiro g^* tal que, se a cintura de G é pelo menos g^* , então o número b -cromático é igual a $m(G)$ ou $m(G) - 1$. Mostrar que o valor de g^* é no máximo 6 poderia ser um passo importante para demonstrar a famosa Conjectura de Erdős-Faber-Lovasz, mas o melhor limite superior conhecido para g^* é 9. Caracterizamos os grafos cuja cintura é pelo menos 6 e não possuem um conjunto bom e mostramos como b -colori-los de forma ótima. Além disso, mostramos como b -colorir, também de forma ótima, os grafos cuja cintura é pelo menos 7 e não possuem conjunto bom.

PALAVRAS-CHAVE: b -Coloração, Cintura, Conjunto bom, Conjectura de Erdős-Faber-Lovász.

Abstract

The coloring problem is among the most studied in the Graph Theory due to its great theoretical and practical importance. Since the problem of coloring the vertices of a graph G either with the smallest amount of colors is NP-hard, various coloring heuristics are examined to obtain a proper colouring with a reasonably small number of colors.

Given a graph G , the b heuristic of colouring comes down to decrease the amount of colors in a proper colouring c , so that, if all vertices of a color class fail to see any color in your neighborhood, then we can change the color to any color these vertices nonexistent in your neighborhood. Thus, we obtain a coloring c' with a color unless c .

Irving and Molove defined the b -coloring of a graph G as a coloring where every color class has a vertex that is adjacent the other color classes. These vertices are called b -vertices. Irving and Molove also defined the b -chromatic number as the largest integer k , such that G admits a b -coloring by k colors. They showed that determine the value of the b -chromatic number of any graph is NP-hard, but polynomial for trees.

Irving and Molove also defined the m -degree of a graph, which is the largest integer $m(G)$ such that there are $m(G)$ vertices with degree at least $m(G) - 1$. Irving and Molove showed that the m -degree is an upper limit to the b -chromatic number and showed that it is $m(T)$ or $m(T) - 1$ to every tree T , where its value is $m(T)$ if, and only if, T has a good set.

In this dissertation, we analyze the relationship between the girth, which is the size of the smallest cycle, and the b -chromatic number of a graph G . More specifically, we try to find the smallest integer g^* such that if the girth of G is at least g^* , then the b -chromatic number equals $m(G)$ or $m(G) - 1$. Show that the value of g^* is at most 6 could be an important step in demonstrating the famous conjecture of Erdős-Faber-Lovász, but the best known upper limit to g^* is 9. We characterize the graphs whose girth is at least 6 and not have a good set and show how b -color them optimally. Furthermore, we show how b -color, also optimally, graphs whose girth is at least 7 and not have good set.

KEYWORDS: b -Colouring, Girth, Good set, Conjecture of Erdős-Faber-Lovász.

Lista de Figuras

1.1	Grafo de Petersen b -colorido com 3 cores.	p. 13
3.1	Aplicação da Estratégia a	p. 21
3.2	Aplicação da Estratégia b	p. 21
3.3	Exemplo de que $\Gamma(G) \ll \chi_b(G)$	p. 24
3.4	Exemplo de que $\Gamma(G) \gg \chi_b(G)$	p. 24
3.5	Exemplo que mostra que $\chi_b(G)$ pode ser arbitrariamente distante de $\chi(G)$	p. 25
3.6	Exemplo de árvore pivoteada.	p. 29
3.7	O conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ circula v , enquanto $\{a, b, c, e, f\}$ não.	p. 30
4.1	Grafo de Petersen.	p. 33
4.2	Produto lexicográfico.	p. 34
4.3	Produto lexicográfico $C_8(S_2)$	p. 35
5.1	Representação de um vértice circulado u e conjuntos N_1 e N_2	p. 41
5.2	Representação do caso 2 do Teorema 5.12.	p. 42
5.3	Representação do grafo H_i	p. 46
5.4	Coloração do caso 2 do Lema 5.16.	p. 48
6.1	Vértice circulado por $D(G)$	p. 53

Sumário

1	Introdução	p. 9
2	Notação e conceitos preliminares	p. 15
2.1	Conceitos básicos	p. 15
2.2	Coloração de vértices	p. 18
3	<i>b</i>-Coloração	p. 20
3.1	Definição	p. 20
3.2	Comparação com outros parâmetros de coloração	p. 22
3.3	Observações sobre a <i>b</i> -coloração	p. 25
3.4	O <i>m</i> -grau de um grafo	p. 26
3.5	Complexidade de encontrar o número <i>b</i> -cromático	p. 27
3.6	O número <i>b</i> -cromático de árvores	p. 29
4	<i>b</i>-Coloração de grafos regulares	p. 32
4.1	Quanto ao número de vértices	p. 32
4.2	Quanto ao diâmetro e à conectividade	p. 35
4.3	Quanto à cintura	p. 36
5	<i>b</i>-Coloração de grafos sem conjunto bom e cintura grande	p. 38
5.1	Introdução	p. 38
5.2	Grafos sem conjunto bom e com cintura pelo menos 6	p. 40
5.3	<i>b</i> -Coloração e emparelhamentos	p. 45

6 Conclusão	p. 52
Índice Remissivo	p. 54
Referências Bibliográficas	p. 56

1 Introdução

Seja k um inteiro positivo. Uma k -coloração própria de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição das cores $\{1, \dots, k\}$ aos vértices de G , de forma que uma mesma cor não é atribuída a dois vértices vizinhos. O problema clássico de coloração consiste em, dado um grafo G , encontrar o menor inteiro k para o qual G admite uma k -coloração própria. Esse valor é chamado de *número cromático* de G e é denotado por $\chi(G)$.

Várias aplicações práticas podem ser modeladas com coloração de grafos. Mais especificamente, esse problema é utilizado para modelar situações em que é necessário particionar um conjunto de objetos, de acordo com algum critério, minimizando o número de partes em que esses objetos são distribuídos, como no caso da alocação de produtos químicos em armazéns, onde os produtos que reagem causando explosões devem ficar em compartimentos diferentes, e deseja-se utilizar o menor número de compartimentos possível. Entre outros exemplos de situações práticas estão a atribuição de frequências às antenas de rádio, o agendamento de palestras em uma conferência e a alocação de registradores na etapa final de construção de compiladores [3, 5, 12]. O vasto número e a grande importância das aplicações são alguns dos motivos do problema de coloração ser exaustivamente estudado em teoria dos grafos.

Calcular o número cromático de um grafo arbitrário G é um problema NP-difícil [42]. De fato, mesmo a tarefa de encontrar uma boa aproximação para $\chi(G)$ é muito difícil. Especificamente, para qualquer $\varepsilon > 0$, o problema de coloração não pode ser aproximado por um fator menor que $n^{1-\varepsilon}$, a menos que $P = NP$ [48].

Nesse contexto, é natural que se busque alternativas que funcionem bem na prática, ou que resolvam o problema de maneira ótima para certas classes de grafos. Uma das alternativas mais utilizadas é também uma forma bastante intuitiva de colorir um grafo: colore-se os vértices um a um de modo que cada vértice receba a menor cor possível, isto é, a menor cor que não foi atribuída a nenhum de seus vizinhos já coloridos.

Mais precisamente, a *heurística gulosa de coloração* é executada sobre um grafo $G = (V, E)$ e uma ordem de $V(G)$, atribuindo a cor i a um vértice v se i é a menor cor tal que não existe

nenhum vizinho de v previamente colorido com a cor i . Christen e Selkow [15] definiram o *número de Grundy* de um grafo $G = (V, E)$, denotado por $\Gamma(G)$, como o maior inteiro k tal que existe uma ordem de $V(G)$ que, se utilizada pelo algoritmo guloso, leva-o a retornar uma coloração com k cores. Determinar $\Gamma(G)$ para um grafo qualquer G é um problema NP-difícil [54].

Outras alternativas se baseiam em modificar uma k -coloração própria $c = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ de modo a diminuir a quantidade de cores utilizadas, onde S_i representa a *classe de cor i* do grafo, que é o conjunto de vértices que recebem a cor i . Como exemplos, citamos as estratégias a e b de coloração. A *Estratégia a de coloração* é tal que enquanto existir duas classes de cor S_i e S_j tais que $S_i \cup S_j$ induz um *conjunto independente*, um conjunto de vértices não adjacentes, então substituímos S_i e S_j pela nova classe $S_i \cup S_j$. Obtemos, assim, uma nova coloração que utiliza uma cor a menos que a inicial. Já a *Estratégia b de coloração* é dada da seguinte maneira: se existe uma classe de cor S_i onde cada vértice não possui um vizinho em alguma das demais classes de cor, então podemos recolorir cada vértice $v \in S_i$ com uma cor que v não possui em sua vizinhança. Dessa forma, eliminamos a classe de cor S_i , diminuindo assim a quantidade de cores utilizadas.

Irving e Manlove [37] definiram o conceito de *b -coloração* de um grafo $G = (V, E)$, que é uma coloração própria onde cada classe de cor possui um vértice adjacente a algum vértice de cada uma das demais classes de cor. Note que não podemos aplicar a Estratégia b em uma b -coloração para reduzir o número de cores. Irving e Manlove [37] também introduziram o conceito de *número b -cromático* de um grafo G , denotado por $\chi_b(G)$, como o maior inteiro k para o qual G admite uma b -coloração com k cores.

b -Colorações têm se mostrado úteis nas áreas de *Clusterização* e *Data Mining*. Uma b -coloração pode ser vista como uma partição do grafo em *clusters* tal que cada *cluster* tem um *clusterhead* adjacente aos outros *clusters*. Essa propriedade é interessante para grandes sistemas distribuídos e redes. Por exemplo, Effantin e Kheddouci [21] propuseram um algoritmo de roteamento em redes baseado nessa propriedade enquanto que Dekar e Kheddouci [17] propuseram um sistema de classificação de *web services* baseado em b -coloração. Elghazel et al. [23] também utilizaram noções de b -coloração para resolver problemas de *clusterização* de dados. Gaceb [28] propôs um método, também baseado em b -coloração, para a classificação adequada de documentos de negócios para *layouts* complexos e com grande variabilidade, que diminui a taxa de rejeição do sistema de leitura automático de documentos proposto no mesmo trabalho.

De acordo com a definição de b -coloração dada por Irving e Manlove [37], em cada classe de cor, em uma b -coloração com k cores, existe pelo menos um vértice adjacente às $k - 1$ outras

cores. Motivados por isso, eles também definiram o parâmetro denominado de *m-grau* de um grafo G , denotado por $m(G)$, que é o maior inteiro tal que G possui pelo menos $m(G)$ vértices com grau pelo menos $m(G) - 1$. Eles demonstraram que $\chi_b(G) \leq m(G)$. Além disso, eles provaram que, dado um inteiro k , decidir se $\chi_b(G) \geq k$ é um problema NP-completo. Porém, eles apresentam um algoritmo polinomial que calcula $\chi_b(T)$, onde T é uma *árvore*, mostrando que $\chi_b(T)$ pode assumir apenas dois valores: $m(T)$ ou $m(T) - 1$.

Kratochvíl, Tuza e Voigt [46] mostraram que determinar se um dado grafo G pode ser b -colorido com $m(G)$ cores é um problema NP-completo, até mesmo se G for um *grafo bipartido* com $m(G)$ vértices de grau pelo menos $m(G) - 1$. Um resultado similar foi obtido por Havet, Linhares e Sampaio [33] para grafos ptolemaicos. Considerando algoritmos aproximativos para o problema, Corteel, Valencia-Pabon e Vera [16] provaram que $\chi_b(G)$ não pode ser aproximado por um fator $120/113 - \varepsilon$ em tempo polinomial a menos que $P=NP$, para qualquer $\varepsilon > 0$.

O número b -cromático também foi estudado para outras classes de grafos. Valores exatos foram obtidos para potências de caterpillars completas [18], potências de caminhos [19], potências de árvores d -árias completas [20], grafos de Kneser $K(n, k)$ para alguns valores de n e k [1, 40], hipercubos [44], grafos cúbicos [39], grafos $(q, q - 4)$ para q fixo [11], cactos [10] e grafos periplanares com cintura pelo menos 8 [52]. Limitantes inferiores e/ou superiores para o número b -cromático são conhecidos para potências de ciclos [19], produto cartesiano de grafos completos [13, 41], subgrafos com um vértice removido [50], grafos d -regulares [2, 7, 22], grafos livres de estrela e grafos bipartidos [45]. Kouider e Zaker obtiveram limitantes superiores para o número b -cromático de grafos em geral em função do tamanho da clique máxima e do número de partição em clique [45].

Hoàng e Kouider [36] introduziram e estudaram o conceito de grafos b -perfeitos. Um grafo G é b -perfeito se $\chi_b(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo induzido H de G . Hoàng, Maffray e Mechebbek [34] caracterizaram todos os grafos b -perfeitos por subgrafos induzidos proibidos.

Sabe-se que a distância entre $\chi_b(G)$ e $m(G)$ pode ser arbitrariamente grande. Por exemplo, $m(K_{n,n}) = n + 1$ e $\chi_b(K_{n,n}) = 2$. Como decidir se $\chi_b(G) = m(G)$ é um problema NP-completo e Irving e Manlove [37] demonstraram que algumas árvores T não podem ser b -coloridas com $m(T)$ cores, sendo seu número b -cromático igual a $m(T) - 1$, é interessante investigar propriedades ou classes de grafos que garantem que a distancia entre $\chi_b(G)$ e $m(G)$ seja limitada por uma constante. Em particular, temos interesse em investigar para quais grafos temos $\chi_b(G) \geq m(G) - 1$.

Uma propriedade que tem se mostrado importante em vários estudos da literatura a fim de limitar o número b -cromático como desejamos se dá pela análise da *cintura* do grafo, que é o

tamanho do menor ciclo de um grafo G e é denotada por $g(G)$, onde $g(G) = \infty$ para grafos sem ciclos. Mais especificamente, o problema estudado nesta dissertação é o seguinte:

Problema 1.1 *Seja G um grafo com cintura de tamanho $g(G)$. Qual o menor inteiro g^* tal que, se $g(G) \geq g^*$, então $\chi_b(G) \geq m(G) - 1$?*

Na tese de doutorado de Silva [53] foi provado que $g^* \leq 11$. Mais recentemente, Campos, Farias e Silva [9] melhoraram este resultado mostrando que $g^* \leq 9$. Grafos *bipartidos completos* com partes de mesmo tamanho n possuem cintura 4 mas número b -cromático 2, enquanto $m(G) = n + 1$. Portanto $5 \leq g^* \leq 9$.

Dado um grafo G , dizemos que um vértice é *denso* se o seu grau é pelo menos $m(G) - 1$ e denotamos por $D(G)$ o conjunto de vértices densos de G .

Considere um grafo G tal que $|D(G)| = m(G)$ e o grau de cada vértice em $D(G)$ é $m(G) - 1$. Seja \mathcal{B}_m o conjunto de todos os grafos bipartidos G com uma parte igual a $D(G)$ e a outra igual a união das vizinhanças dos vértices de $D(G)$, tal que quaisquer duas dessas vizinhanças se intersectam em no máximo um vértice.

Havet, Sales e Sampaio [33] e Chang e Lin [47] propuseram a seguinte conjectura:

Conjectura 1.2 (*[33, 47]*) *Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $\chi_b(G) \geq m(G) - 1$.*

Denote por \mathcal{K}_m a classe de grafos $H = \bigcup_{i=1}^m K_m^i$, onde K_m^i é um grafo completo com m vértices e $|K_m^i \cap K_m^j| \leq 1$, para todo $1 \leq i < j \leq m$. A bem conhecida conjectura de Erdős-Faber-Lovász [24, 25] pode ser apresentada da seguinte forma:

Conjectura 1.3 (*Conjectura de Erdős-Faber-Lovász*) *Se $G \in \mathcal{K}_m$, então $\chi(G) = m$.*

Chang e Lin [47] provaram que se a Conjectura de Erdős-Faber-Lovász for verdadeira então, a Conjectura 1.2 também é verdadeira. Assim, provar a Conjectura 1.2 pode ser visto como um passo para provar a famosa Conjectura de Erdős-Faber-Lovász. Observe que qualquer grafo em \mathcal{B}_m possui cintura pelo menos 6. Assim, mostrar que $g^* \leq 6$ provaria a Conjectura 1.2.

A seguinte conjectura sobre grafos d -regulares, que tem recebido grande atenção da comunidade, também relaciona o número b -cromático com a cintura do grafo.

Conjectura 1.4 (*Blidia, Maffray e Zemir [2]*) *Todo grafo d -regular com cintura pelo menos 5, diferente do grafo de Petersen, possui uma b -coloração com $d + 1$ cores.*

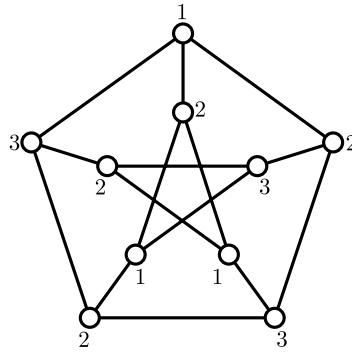


Figura 1.1: Grafo de Petersen b -colorido com 3 cores.

Observe que o grafo de Petersen não é um exemplo que implica $g^* > 5$, pois o mesmo pode ser b -colorido com $d = m(G) - 1$ cores, como mostra a Figura 1.1.

Cabello e Jakovac [7] provaram que, se G é d -regular com $g(G) = 5$, então $\chi_b(G) \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$. Observe que se provarmos que $g^* \leq 5$, melhoramos este limite para $\chi_b(G) \geq d$.

Irving e Manlove [37] definiram a estrutura de *árvore pivoteada* e mostraram que o número b -cromático de tais árvores T é igual a $m(T) - 1$. Dizemos que grafos que contém tais estruturas são grafos que não possuem o que chamamos de *conjunto bom*. Daremos as definições de árvore pivoteada e conjunto bom no Capítulo 3.

Na tese de doutorado de Silva [53], foram caracterizados de forma polinomial os grafos cuja cintura é pelo menos 8 e não possuem um conjunto bom. Também foi provado, no mesmo trabalho, que se G é um grafo tal que $g(G) \geq 8$ e G não possui um conjunto bom, então $\chi_b(G) = m(G) - 1$. Campos, Farias e Silva [9] utilizaram este resultado para mostrar que $g^* \leq 9$.

Nesta dissertação melhoramos os resultados de Silva [53], onde caracterizamos através de um algoritmo polinomial os grafos com cintura pelo menos 6 que não possuem conjunto bom. Nosso resultado principal é que se G é um grafo tal que $g(G) \geq 7$ e não possui um conjunto bom, então $\chi_b(G) = m(G) - 1$. Nossos resultados são passos importantes na tentativa de mostrar que $g^* \leq 7$. Porém, para mostrar que $g^* \leq 7$ resta mostrar como b -colorir os grafos G tal que $g(G) \geq 7$ e que possuem um conjunto bom com pelo menos $m(G) - 1$ cores.

O texto da dissertação está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, estabelecemos a terminologia de Teoria dos Grafos utilizada e outros conceitos necessários ao entendimento do trabalho; no Capítulo 3, apresentamos as definições e as características gerais em torno de b -colorações; no Capítulo 4, aprofundamos o estudo de b -colorações voltado aos grafos regulares, onde apresentamos os principais resultados obtidos até o momento que se relacionam com a Conjectura 1.4 de Blidia, Maffray e Zemir e que mostram que a dificuldade em obter melhorias nessa conjectura indicam também a dificuldade em mostrar que $g^* < 7$; no Capítulo 5,

apresentamos nossos resultados principais obtidos em relação ao número b -cromático de grafos com cintura pelo menos 6 e 7 e que não possuem conjunto bom. No Capítulo 6 apresentamos nossas conclusões acerca do trabalho desenvolvido e uma discussão sobre o Problema 1.1.

2 *Notação e conceitos preliminares*

Neste capítulo, são apresentadas as definições básicas de Teoria dos Grafos necessárias ao entendimento deste trabalho, bem como a notação utilizada. Conceitos mais específicos são dados ao longo do texto. A maior parte das definições foi retirada dos livros *Graph theory with applications* [4] e *Graph theory* [5], que podem ser consultados para informações adicionais.

2.1 Conceitos básicos

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ consistindo de um conjunto não-vazio $V(G)$ de *vértices* e um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de *arestas*, junto com uma função ψ_G que associa a cada aresta um par não ordenado de vértices de G . Comumente, usamos $G = (V, E)$ como notação de um grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E . Todo grafo admite uma representação gráfica onde cada vértice é representado por um ponto e cada aresta é representada por uma linha unindo os pontos correspondentes aos vértices associados a tal aresta. Por simplicidade, escrevemos $e = uv$ ao invés de $\psi_G(e) = \{u, v\}$, e, quando conveniente, utilizamos uv para nos referirmos à aresta e .

Se e é uma aresta e u e v são vértices tais que $e = uv$, dizemos que e *incide* em u e em v e que u e v *incidem* em e . Dizemos ainda que tais vértices são as *extremidades* de e , e que a aresta e *une* u e v .

Uma aresta e é um *laço* se as suas duas extremidades são iguais. Duas arestas são *múltiplas* se elas coincidem em ambas as extremidades. Um grafo G é *simples* se ele não possui arestas múltiplas nem laços, e o seu conjunto de vértices é finito. Neste trabalho, tratamos apenas de grafos simples, e as definições e resultados que seguem dizem respeito aos mesmos.

Duas arestas são *adjacentes* se elas possuem uma extremidade em comum (são incidentes a um mesmo vértice) e dois vértices são *adjacentes* se eles são incidentes a uma mesma aresta. A *vizinhança* $N_G(v)$ de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v . Definimos também a vizinhança de um conjunto de vértices S , $N_G(S)$, como a união das

vizinhanças de cada vértice em S menos os vértices do próprio S . O grau de um vértice v , $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes a v em G , isto é, o número de vértices adjacentes a v . Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o menor e o maior valor dos graus dos vértices de G , respectivamente. A vizinhança de arestas é definida de forma similar.

Chamamos de *trivial* o grafo com apenas um vértice. Um grafo G é *completo* se existe uma aresta entre cada par de vértices distintos. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices. Um grafo G é *vazio* se não possui arestas. O *complemento*, \bar{G} , de G é o grafo simples cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e cujas arestas são exatamente os pares de vértices não adjacentes em G .

Dizemos que o grafo H é um *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ e escrevemos $H \subseteq G$. Seja S um subconjunto não-vazio de V . O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é S e cujo conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que tem as duas extremidades em S é o subgrafo de G *induzido* por S e é denotado por $G[S]$. Dizemos também que $G[S]$ é um *subgrafo induzido* de G .

Um *emparelhamento* em um grafo G é um subconjunto de arestas não-adjacentes entre si. Se M é um emparelhamento, dizemos que as duas extremidades de cada aresta de M estão *emparelhadas* por M e cada vértice incidente a uma aresta de M está *coberto* por M . Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento em que todos os vértices de G estão cobertos.

Um subconjunto S de $V(G)$ é um *conjunto independente* ou *conjunto estável* de G se nenhum par de vértices de S é adjacente em G . Uma *clique* é um subconjunto K de $V(G)$ tal que $G[K]$ é completo. A cardinalidade do maior conjunto estável e da maior clique de um grafo G são denotadas, respectivamente, por $\alpha(G)$ e $\omega(G)$.

Um *caminho* em G é uma sequência finita e não nula $P = v_0v_1 \dots v_k$, tal que, para $1 \leq i \leq k$, $v_{i-1}v_i$ é uma aresta e todos os vértices de P são distintos. Dizemos que P é um caminho entre v_0 e v_k . Se existe um caminho $P = v_0v_1 \dots v_k$ entre v_0 e v_k e v_0v_k é uma aresta, dizemos que $C = v_0, v_1, \dots, v_k, v_0$ é um *ciclo*. O *tamanho* de um caminho P e de um ciclo C é a quantidade de arestas respectivamente de P e C . As arestas de G que unem dois vértices não sucessivos em um caminho ou em um ciclo são chamadas de *cordas*.

Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas e um *ciclo induzido* é um ciclo sem cordas. Um caminho com k vértices é denotado por P_k e um ciclo com k vértices é denotado por C_k .

Um grafo *acíclico* é um grafo que não possui ciclos. A *cintura* de um grafo G é o tamanho do menor ciclo induzido de G . Representamos a cintura de G por $g(G)$. Se G é um grafo acíclico então $g(G) = \infty$.

O conjunto dos *vértices intermediários* de um caminho $P = v_0v_1 \dots v_k$ em G é definido pelos vértices em $V(P) - \{v_0, v_k\}$, enquanto que v_0 e v_k são as *extremidades* de P . Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ dizemos que P é um *xy-caminho* em G .

Uma *partição* de um conjunto S é uma família de subconjuntos, também chamados *partes* ou *classes*, $\mathcal{P} = \{S_i \mid i \in I\}$, tais que $\bigcup_{i \in I} S_i = S$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$, para todo $i, j \in I$ onde $i \neq j$ e I é um conjunto qualquer.

Dois vértices u e v estão *conectados* se existe um caminho entre u e v em G . Todo grafo G admite uma partição de $V(G)$ em subconjuntos não-vazios V_1, V_2, \dots, V_l tal que dois vértices u e v estão conectados se e somente se ambos u e v pertencem ao mesmo subconjunto V_i . Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_l]$ são chamados de *componentes* de G . Se G tem exatamente uma componente, então G é dito *conexo*. Equivalentemente, dizemos que um grafo é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados. Caso contrário, o grafo é chamado de *desconexo*.

Em um grafo G , a *distância* entre dois vértices u e v é o tamanho do menor caminho entre u e v em G e é denotada por $dist(u, v)$. O *diâmetro* de um grafo G é o valor da maior distância entre qualquer par de vértices de G e é denotado por $diam(G)$. Se u e v pertencem a componentes distintas, então $dist(u, v) = \infty$.

Nos capítulos seguintes, quando estiver claro a que grafo estamos nos referindo, podemos omitir, nas notações dadas acima, o símbolo que indica um grafo específico. Por exemplo, ao invés de $V(G)$ e $N_G(v)$ escrevemos apenas V e $N(v)$.

Um grafo G é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y tais que toda aresta tem uma extremidade em X e outra em Y . Se todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y , então G é um *grafo bipartido completo* e é denotado por $K_{r,s}$, quando $r = |X|$ e $s = |Y|$. Os grafos $K_{1,s}$ são chamados *estrelas*.

Um grafo é bipartido se e somente se ele não possui ciclos de tamanho ímpar. Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Portanto, uma árvore é um grafo bipartido.

Dados $u \neq v$, dois *uv-caminhos* P e Q em G são *internamente disjuntos* se eles não possuem vértices internos em comum, ou seja, se $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$. A *conectividade local* entre vértices distintos u e v é o número máximo de *uv-caminhos* dois a dois internamente disjuntos, e é denotada por $p(u, v)$.

Um grafo não trivial G é *k-conexo* se $p(u, v) \geq k$ para quaisquer dois vértices disjuntos u e v . Por convenção, um grafo trivial é 0-conexo e 1-conexo, mas não é *k-conexo* para $k > 1$. A *conectividade* $\kappa(G)$ é o máximo valor de k para o qual G é *k-conexo*. Assim, para um grafo não

trivial G ,

$$\kappa(G) = \min\{p(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}.$$

Um grafo G é k -regular se $d(v) = k$ para todo $v \in V$. Dizemos que G é regular se G é k -regular para algum inteiro k . Os grafos 3-regulares também são referidos como *grafos cúbicos*.

Ao longo do texto usaremos a notação $[n]$ para representar o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

2.2 Coloração de vértices

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma coloração de vértices de G , ou simplesmente uma *coloração* de G , é uma função $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada vértice do grafo um número inteiro, denominado *cor*. Denotamos por $c(H)$ o conjunto das cores de uma coloração c de um grafo G utilizadas em um subgrafo H de G . Se uma coloração de um grafo G possui k cores, também podemos chamá-la de k -coloração de G . Habitualmente, escolhemos $\{1, 2, \dots, k\}$ para ser o conjunto de inteiros representativo das k cores de uma k -coloração.

Alternativamente, uma k -coloração c de um grafo G pode ser vista como uma partição $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ do conjunto de vértices de G em k partes onde cada parte S_i contém os vértices coloridos com a cor i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Os conjuntos S_i são as *classes de cor* da coloração c .

Dada uma coloração c de um grafo $G = (V, E)$, um vértice $v \in V$ é *adjacente a uma classe de cor* S_i ou *adjacente a cor* i se v é adjacente a algum vértice u , distinto de v , tal que $c(u) = i$.

Dizemos que uma coloração c é *própria* se uma mesma cor não é atribuída a dois vértices vizinhos. Em uma k -coloração própria, cada classe de cor é um conjunto estável. Como tratamos apenas de colorações próprias nesse texto, daqui em diante nos referiremos às mesmas apenas como colorações ou k -colorações.

Um grafo é k -colorível se admite um k -coloração. O menor inteiro k para o qual um grafo G é k -colorível é o *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$.

Em um grafo $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$, cada classe de cor possui no máximo $\alpha(G)$ cores, uma vez que são conjuntos estáveis. Dessa forma, temos o seguinte limitante inferior para o número cromático: $\chi(G) \geq \lceil n/\alpha(G) \rceil$. Um outro limite inferior para $\chi(G)$ é o tamanho da maior clique, já que todos os vértices de uma clique devem receber cores distintas. O Teorema de Brooks 2.1 estabelece um limite superior para o número cromático de grafos em geral.

Teorema 2.1 (Brooks [6]) *Seja G um grafo conexo. Então, $\chi(G) \leq \Delta(G)$, a menos que G seja*

um ciclo ímpar ou um grafo completo, situações em que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

É possível decidir em tempo polinomial se $\chi(G) = 1$ ou 2 . Entretanto, determinar se um grafo qualquer é k -colorível é um problema NP -completo para todo $k \geq 3$ [29, 42], mesmo considerando $k = 3$ e G um grafo sem triângulos e com grau máximo quatro [49]. Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ o problema de coloração não pode ser aproximado por um fator menor que $n^{1-\varepsilon}$, a menos que $P = NP$ [48].

3 *b*-Coloração

Neste capítulo apresentamos as definições, as propriedades e os resultados gerais relacionados à *b*-coloração de vértices.

3.1 Definição

Considere uma coloração própria c de um grafo G . Com o objetivo de diminuir a quantidade de cores utilizadas nessa coloração, várias estratégias podem ser propostas. Em particular, pode-se considerar as seguintes estratégias:

- **Estratégia a :** Se existem duas classes de cor X e Y tais que $X \cup Y$ é um conjunto independente, podemos recolorir os vértices de Y com a cor correspondente à classe X , eliminando assim uma classe de cor.
- **Estratégia b :** Se existe uma classe de cor X tal que cada vértice possui pelo menos uma cor (diferente da sua) que não é utilizada em sua vizinhança, podemos recolorir cada vértice em X com uma tal cor, eliminando portanto a classe de cor X .

A Figura 3.1 ilustra a Estratégia a . Vemos que $S_2 \cup S_4$ é um conjunto independente. Logo podemos eliminar a classe S_4 ao recolorir todos os seus vértices com a cor de S_2 .

A Figura 3.2 ilustra a Estratégia b . Podemos ver que para cada vértice $v \in V$ da classe de cor S_2 existe uma cor que não é utilizada em $N(v)$. Recolorimos assim os vértices de S_2 de modo eles recebam alguma cor não utilizada em sua vizinhança. Os vértices escuros na coloração resultante possuem todas as cores restantes, exceto a sua, utilizadas em sua vizinhança.

Obviamente, existem casos em que essas estratégias não podem ser aplicadas. No caso da Estratégia b , não podemos aplicá-la se a coloração satisfaz:

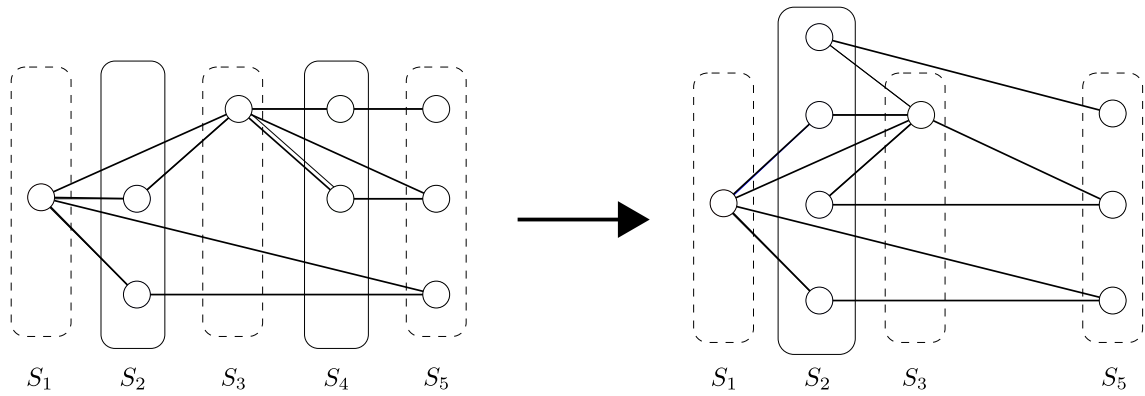


Figura 3.1: Aplicação da Estratégia *a*.

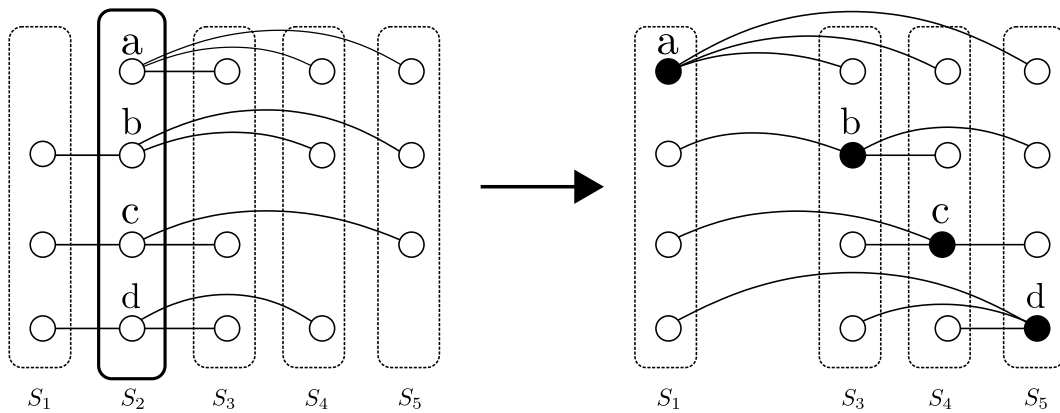


Figura 3.2: Aplicação da Estratégia *b*.

Definição 3.1 (*b-coloração*) Uma k -coloração c de um grafo $G = (V, E)$ é uma b -coloração se, para todo i ($1 \leq i \leq k$), existe $u_i \in S_i$ tal que, para todo j ($1 \leq j \leq k, i \neq j$), existe $v_j \in S_j$ com $u_i v_j \in E$ (dizemos que u_i é um b -vértice da cor i).

As colorações resultantes das Figuras 3.1 e 3.2 são exemplos de colorações em que não podemos mais aplicar a estratégia *a* e a estratégia *b*, respectivamente. Com isso, a Figura 3.2 mostra um exemplo de uma b -coloração. O seguinte parâmetro mede o pior caso de aplicação da estratégia *b*, com relação à distância ao número cromático:

Definição 3.2 (*Número b -cromático*) O número b -cromático de um grafo G , denotado por $\chi_b(G)$ é o maior inteiro k para o qual G possui uma b -coloração com k cores.

As definições de b -coloração e de número b -cromático foram primeiramente propostas por Irving e Manlove [37]. Eles mostraram que encontrar $\chi_b(G)$ é um problema NP-difícil em geral, mas que é polinomial para árvores.

Dado um grafo G , uma observação importante é representada pela desigualdade:

$$\chi(G) \leq \chi_b(G)$$

A desigualdade é verdadeira pois, claramente, toda coloração própria de G que utiliza $\chi(G)$ cores é uma b -coloração. O Algoritmo 1 mostra o funcionamento da Estratégia b de coloração que tenta diminuir o número de cores utilizadas em uma coloração própria qualquer, obtendo uma b -coloração do grafo de entrada.

Algoritmo 1: Algoritmo B de coloração

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ pré-colorido com uma k -coloração própria c' .

Saída: b -Coloração c de G .

```

1  $c = c'$ .
2 para todo  $i = k, \dots, 2$  faça
3   para todo  $v \in S_i$ , onde  $S_i$  é a classe de cor com a cor  $i$ , faça
4     se  $\exists l \in [k] - \{i\}$ , tal que  $l \notin c(N(v))$  e  $S_l \neq \emptyset$  então
5        $c(v) = l$ 
6 Retorne  $c$ .
```

3.2 Comparação com outros parâmetros de coloração

Como na estratégia b , os casos em que a Estratégia a não pode ser aplicada são aqueles em que a coloração encontrada satisfaz:

Definição 3.3 (*a -coloração*) Uma k -coloração c de um grafo $G = (V, E)$ é uma a -coloração se, para quaisquer $i, j (1 \leq i < j \leq k)$, existem u, v tais que $u \in S_i, v \in S_j$ e $uv \in E$.

Da mesma forma que o número b -cromático, o seguinte parâmetro mede o pior caso de aplicação da estratégia a , com relação à distância ao número cromático:

Definição 3.4 (*Número a -cromático*) O número a -cromático de um grafo G , denotado por $\chi_a(G)$ é o maior inteiro k para o qual G possui uma a -coloração com k cores.

O número a -cromático foi primeiramente definido por Harary et al. [31]. Em [8] é mostrado que o problema de determinar se $\chi_a(G) \geq k$ para um dado valor k é um problema NP-completo,

mesmo no caso em que G é uma árvore. Chaudhary e Vishwanathan [14] apresentaram um algoritmo aproximativo para o número a -cromático com fator de aproximação de $O(n/\sqrt{\log n})$.

Pelas definições de a -coloração e b -coloração podemos ver que toda b -coloração de um grafo G qualquer que utiliza $\chi_b(G)$ cores também é uma a -coloração de G . Dessa forma a seguinte desigualdade é válida:

$$\chi_b(G) \leq \chi_a(G)$$

Irving e Manlove [37] demonstraram formalmente a validade da desigualdade anterior. Podemos concluir, dessa forma, que

$$\chi(G) \leq \chi_b(G) \leq \chi_a(G)$$

Portanto, o parâmetro $\chi_b(G)$ é um refinamento de $\chi_a(G)$, se considerarmos esses parâmetros apenas como limites superiores para o número cromático de G . Por isso o número b -cromático e a b -coloração passaram a ter uma importância maior na Teoria dos Grafos.

O *número de Grundy* de um grafo G , primeiramente nomeado e estudado por Christen e Selkow [15], é o maior inteiro k tal que existe uma ordem de $V(G)$ que, se utilizada pelo *Algoritmo guloso de coloração*, leva-o a retornar uma coloração com k cores. O número de Grundy é denotado por $\Gamma(G)$. O Algoritmo 2 descreve o procedimento do Algoritmo guloso de coloração. Não é difícil perceber que o Algoritmo guloso gera uma coloração própria de G , ou seja, que todo vértice recebe uma cor que não é utilizada em sua vizinhança. Para cada vértice $v \in V(G)$, são utilizadas no máximo $\Delta(G)$ cores em sua vizinhança, eventualmente sendo necessário uma nova cor para v . Dessa forma, temos que $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$. Como em toda coloração própria utiliza-se pelo menos $\chi(G)$ cores, então $\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Algoritmo 2: Algoritmo guloso de coloração

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e ordem $\theta = v_1, v_2, \dots, v_n$ de V .

Saída: Coloração própria c de G .

- 1 **para todo** $i = 1, \dots, n$ **faça**
 - 2 $c(v_i) = k$, onde $k \in [n]$ é a menor cor não utilizada em $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.
 - 3 Retorne c .
-

O número b -cromático também se assemelha ao número de Grundy, já que ambos representam um limite superior para o número cromático. Entretanto, não é verdade que o parâmetro $\Gamma(G)$ sempre é um limite superior para $\chi_b(G)$ e nem o contrário.

Como podemos ver na Figura 3.3, o grafo G definido como a união de n estrelas disjuntas e_i , $i \in [n]$, tal que $e_i = K_{1,n-1}$, possui número b -cromático n , onde colorimos o vértice u_i com a cor i e os seus vizinhos com cores distintas em $[n] \setminus \{i\}$, de modo que u_i seja o b -vértice da cor i . No entanto temos que $\Gamma(G) = 2$, já que para qualquer estrela e_i , ao aplicarmos o Algoritmo 2 em qualquer ordem dos seus vértices, podemos ver que todos os vértices não adjacentes devem receber a mesma cor, enquanto u_i recebe uma segunda cor. Portanto $\chi_b(G)$ pode ser arbitrariamente maior que $\Gamma(G)$.

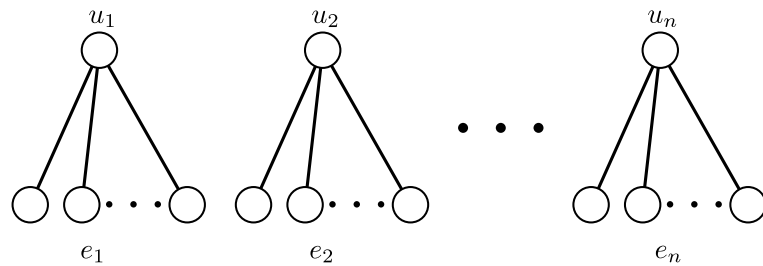


Figura 3.3: Exemplo de que $\Gamma(G) \ll \chi_b(G)$.

Suponha agora o grafo G obtido a partir de um grafo bipartido completo $K_{n,n}$, onde removemos um emparelhamento perfeito e incluímos novamente uma aresta removida. O mesmo pode ser visto na Figura 3.4. Suponha uma b -coloração c de G com pelo menos 3 cores. Sabemos que u_n e v_n devem possuir cores distintas e suponha que $c(u_n) = 1$ e $c(v_n) = 2$. Suponha sem perda de generalidade que o b -vértice da cor 3 é $u_i \in U$. Mas u_i não pode ser adjacente a algum vértice da cor 1, já que u_n é adjacente a todo vértice v_i , $i \in [n]$. Logo $\chi_b(G) = 2$. Seja agora a ordem $\theta = \langle u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n \rangle$ dada como entrada ao Algoritmo 2. Podemos ver que o par (u_i, v_i) será colorido com a cor i , para todo $i \in [n-1]$ e u_n recebe a cor n , enquanto v_n recebe a cor $n+1$. Como $\Delta(G) = n$, temos que $\Gamma(G) = n+1$. Portanto $\chi_b(G)$ pode ser arbitrariamente menor que $\Gamma(G)$.

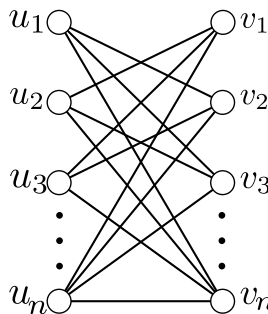


Figura 3.4: Exemplo de que $\Gamma(G) \gg \chi_b(G)$.

As seguintes desigualdades resumem essas considerações:

$$\chi(G) \leq \chi_b(G), \Gamma(G) \leq \Delta + 1$$

3.3 Observações sobre a b -coloração

Existem grafos cujo número cromático pode ser arbitrariamente distante do número b -cromático: considere o grafo G mostrado na Figura 3.5, que é obtido através do grafo bipartido completo $K_{n,n}$ removendo-se um emparelhamento perfeito. Fazendo $c(u_i) = c(v_i) = i$, $i \in [n]$ obtemos uma b -coloração com n cores. Como cada vértice possui grau $n - 1$, $\chi_b(G) = n$, porém $\chi(G) = 2$, pois G é um grafo bipartido.

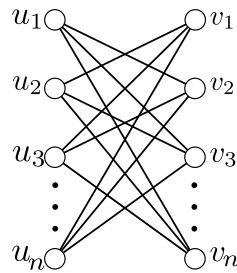


Figura 3.5: Exemplo que mostra que $\chi_b(G)$ pode ser arbitrariamente distante de $\chi(G)$.

Além da grande diferença que pode existir entre o número cromático e o número b -cromático de um grafo G , podemos observar que, quando $n = 4$, o grafo da Figura 3.5 possui uma b -coloração com 2 e 4 cores, mas não possui uma com 3 cores. O mesmo não ocorre com relação às a -colorações [32], pois sempre existe uma a -coloração com qualquer valor $\chi(G) \leq k \leq \chi_a(G)$. O *espectro b -cromático* de um grafo G é o conjunto de todos os inteiros k tal que existe uma b -coloração de G com k cores. Em sua tese, Faik [27] introduziu o conceito de *grafos b -contínuos*: um grafo G é b -contínuo se seu b -espectro é completo, ou seja, se G pode ser b -colorado com k cores para todo $k \in \{\chi(G), \dots, \chi_b(G)\}$. Faik provou que decidir se um grafo G é b -contínuo é NP-completo, mesmo se G é um grafo bipartido e seus números cromático e b -cromático são conhecidos. Kratochvíl et al. [46] mostraram a seguinte proposição que caracteriza a existência de um grafo G cujo espectro b -cromático é $\{2, n\}$:

Proposição 3.5 (Kratochvíl et al. [46]) *Para todo n , existe um grafo G tal que G possui uma b -coloração por k cores apenas para $k = 2$ e $k = n$.*

É também verdade que a diferença entre os números b -cromáticos de um grafo G e um subgrafo H de G pode ser arbitrariamente grande e, além disso, com H possuindo o número b -cromático maior:

Proposição 3.6 (Kratochvíl et al. [46]) *Para todo n , existe um grafo G e um subgrafo induzido H de G tal que $\chi_b(H) - \chi_b(G) > n$.*

Na demonstração da Proposição 3.6 utiliza-se o grafo bipartido completo $K_{n+4,n+4}$ onde removemos um emparelhamento de $n+3$ arestas. Esse grafo é similar ao grafo da Figura 3.4 e, como vimos, seu número b -cromático é igual a 2. Além disso, esse grafo possui um subgrafo induzido H , onde H é o grafo bipartido completo $K_{n+3,n+3}$ onde removemos um emparelhamento perfeito. Como vimos na Figura 3.5, o número b -cromático de H é igual a $n+3$. Logo $\chi_b(H) - \chi_b(G) = n+1$.

É fato conhecido que, se H é um subgrafo de G e $\chi(H) = k$, então $\chi(G) \geq k$. Um grafo G é k -crítico se ele é minimal com respeito à propriedade de G possuir número cromático k . Assim, qualquer grafo G que satisfaz $\chi(G) \geq k$, contém necessariamente um subgrafo k -crítico. A Proposição 3.6 inibe uma abordagem por meio de grafos críticos para o problema de b -coloração, como é feito na coloração tradicional.

3.4 O m -grau de um grafo

Podemos observar que, para um grafo G possuir uma b -coloração c com k cores, G deve conter pelo menos k vértices onde cada um recebe uma cor diferente em c e cujos graus são pelo menos $k-1$. Irving e Manlove [37] definiram um novo parâmetro baseados nessa observação:

Definição 3.7 (m -grau) Para um grafo $G = (V, E)$, suponha que os vértices de G , v_1, v_2, \dots, v_n , estão ordenados de modo que $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$. O m -grau de G , denotado por $m(G)$, é definido por:

$$m(G) = \max\{i : 1 \leq i \leq n, d(v_i) \geq i-1\}.$$

Pela própria Definição 3.7, podemos observar que $m(G)$ pode ser calculado em tempo polinomial e que $m(G) \leq \Delta(G) + 1$. Irving e Manlove [37] mostraram que o m -grau é um limite superior para o número b -cromático de um grafo G :

Lema 3.8 (Irving e Manlove [37]) Para qualquer grafo G , $\chi_b(G) \leq m(G)$.

Demonstração: Suponha que $\chi_b(G) > m(G)$ e seja c uma b -coloração com $\chi_b(G)$ cores. Temos que cada classe de cor de c possui um b -vértice que deve ter grau pelo menos $\chi_b(G) - 1 \geq m(G)$, uma contradição. \square

Dado um grafo G qualquer, se $u \in V(G)$ possui grau pelo menos $m(G) - 1$, dizemos que u é um vértice denso e representamos o conjunto de todos os vértices densos de G por $D(G)$.

Podemos ver que todo b -vértice de uma b -coloração c , com $m(G)$ cores, de um grafo G é um vértice denso. Claramente o contrario não é verdade, já que em um grafo d -regular, por exemplo, todos os vértices são densos, visto que $m(G) = d + 1$, mas toda b -coloração de G possui no máximo $m(G)$ vértices, pelo Lema 3.8. Ou seja, a quantidade de vértices densos em um grafo qualquer G pode ser bem maior que $m(G)$. Um conjunto contendo um b -vértice de cada cor distinta de uma b -coloração c é chamado de uma *base da b -coloração c* .

O limite superior $m(G)$ é um limite justo: uma clique G com n vértices possui $m(G) = n$, já que G é $(n - 1)$ -regular, e, claramente, toda coloração própria de G possui $m(G)$ cores. Por outro lado, o número b -cromático pode ser arbitrariamente distante de $m(G)$, como acontece nos grafos bipartidos completos $K_{n,n}$. Seja G um grafo bipartido completo com partes $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Vemos que $m(G) = n + 1$, porém, $\chi_b(G) = 2$. De fato, suponha que existe uma b -coloração c de G que possui 3 b -vértices. Logo, pelo menos uma das partes possui pelo menos dois b -vértices de cores diferentes, digamos $u_1, u_2 \in U$. Por definição, u_2 deve possuir um vizinho w_i tal que $c(w_i) = c(u_1)$. Porém, w_i é adjacente a u_1 , um absurdo.

3.5 Complexidade de encontrar o número b -cromático

Os seguintes problemas são considerados nesta seção:

B-COLORAÇÃO

Instância: Grafo $G = (V, E)$ e inteiro k .

Questão: Existe uma b -coloração de G que utiliza k cores?

NÚMERO B-CROMÁTICO

Instância: Grafo $G = (V, E)$ e inteiro k .

Questão: $\chi_b(G) \geq k$?

Claramente NÚMERO B-CROMÁTICO se reduz a B-COLORAÇÃO, afinal responder se $\chi_b(G) \geq k$ equivale a questionar se existe uma b -coloração com l cores, para cada valor de l que satisfaça $k \leq l \leq m(G)$. Entretanto, não é óbvio se conhecer $\chi_b(G)$ ajuda a decidir se G possui uma b -coloração com k cores, quando $k < \chi_b(G)$. Portanto, uma maneira mais fácil de mostrar que ambos os problemas são NP-completos, seria mostrar que NÚMERO B-CROMÁTICO é NP-completo:

Teorema 3.9 (Irving e Manlove [37]) NÚMERO B-CROMÁTICO é NP-completo.

A demonstração do Teorema 3.9 não será apresentada neste texto. Irving e Manlove utilizaram uma redução polinomial do seguinte problema a NÚMERO B-CROMÁTICO:

COBERTURA EXATA POR 3-CONJUNTOS (X3C)

Instância: Conjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, onde $n = 3k$ para algum inteiro k , e uma coleção $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ de subconjuntos de S , onde $|T_i| = 3$ para cada i .

Questão: T possui uma cobertura exata para S ? Ou seja, existe um conjunto $T' \subseteq T$ de conjuntos dois-a-dois disjuntos cuja união seja S ?

Uma vez que X3C é NP-completo [29], NÚMERO B-CROMÁTICO e B-COLORAÇÃO também o são. Além disso, a redução apresentada por Irving e Manlove implica que é NP-completo decidir se $\chi_b(G) = m(G)$ para um grafo G qualquer, um indício de que os grafos com $\chi_b(G) = \chi(G)$ não possuem uma estrutura fácil de ser reconhecida. Esse fato motivou o estudo dos grafos G tal que $\chi_b(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo induzido H de G . Tais grafos são chamados de *b-perfeitos*, que foram primeiramente estudados por Hoàng e Kouider [36]. Hoàng, Maffray e Mechebbek [34] caracterizaram todos os grafos *b-perfeitos* por subgrafos induzidos proibidos.

Kratochvíl et al. [46] provaram que NÚMERO B-CROMÁTICO e B-COLORAÇÃO são difíceis mesmo quando restritos a grafos bipartidos conexos:

Teorema 3.10 (Kratochvíl et al. [46]) B-COLORAÇÃO é NP-completo para $k = m(G)$ mesmo para grafos bipartidos conexos e $m(G) = \Delta(G) + 1$.

Obviamente, o problema B-COLORAÇÃO pertence a NP. Para mostrar sua NP-completude os autores mostraram uma redução polinomial do seguinte problema, que é NP-completo [35], para B-COLORAÇÃO:

3-COLORABILIDADE DE ARESTAS (3CA)

Instância: Grafo 3-regular $G = (V, E)$.

Questão: G admite uma coloração das arestas com 3 cores?

Como NÚMERO B-CROMÁTICO é NP-completo, é natural abordar este problema por meio de algoritmos aproximativos. Entretanto, até o momento não se conhece nenhum algoritmo aproximativo para o problema. Corteel, Valencia-Pabon, e Vera [16] provaram o seguinte teorema.

Teorema 3.11 (Corteel, Valencia-Pabon, e Vera [16]) *O número b -cromático de um grafo não é aproximável por um fator $120/113 - \varepsilon$ em tempo polinomial a menos que $P=NP$, para qualquer $\varepsilon > 0$.*

3.6 O número b -cromático de árvores

Diversos problemas em grafos, que são NP-completos em suas formulações originais, são polinomiais quando suas instâncias são restritas às árvores. O problema de determinar o número b -cromático de um grafo não é uma exceção, como veremos. Dada uma árvore T , Irving e Manlove [37] demonstraram que $\chi_b(T) \in \{m(T) - 1, m(T)\}$ e que as únicas árvores que satisfazem $\chi_b(T) = m(T) - 1$ são aquelas que se enquadram na seguinte definição.

Definição 3.12 (Irving e Manlove [37]) (*Árvore pivoteada*). *Uma árvore $T = (V, E)$ é pivoteada se T possui exatamente $m(T)$ vértices densos e um vértice especial v , que chamamos de pivô, satisfazendo:*

1. v não é denso;
2. Todo vértice denso é adjacente a v ou a um vértice denso adjacente a v ;
3. Qualquer vértice denso adjacente a v e a outro vértice denso tem grau $m(T) - 1$.

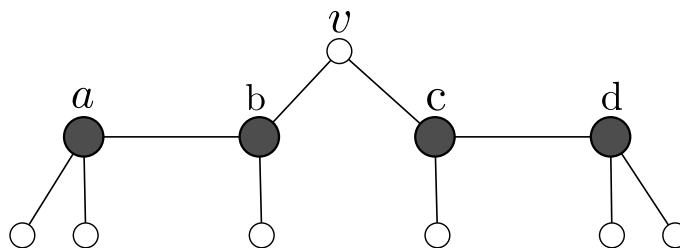


Figura 3.6: Exemplo de árvore pivoteada.

Na Figura 3.6 temos um exemplo de árvore pivoteada, onde os vértices escuros representam os vértices densos de T . Notemos que não pode haver dois pivôs em uma árvore, pois isso implica na existência de um ciclo na mesma. No seguinte resultado, Irving e Manlove [37] determinaram o número b -cromático das árvores pivoteadas:

Teorema 3.13 (Irving e Manlove [37]) *Se T é uma árvore pivoteada, então $\chi_b(T) = m(T) - 1$.*

Resta examinar o que ocorre em uma árvore não-pivoteada T . Pode ocorrer, neste caso, que existam mais de $m(T)$ vértices densos e, portanto, pode-se realizar diferentes escolhas de conjuntos de $m(T)$ vértices densos que serão uma base em uma b -coloração com $m(T)$ cores. Dependendo da escolha realizada, podemos recair em uma situação similar a que ocorre nas árvores pivoteadas. Por exemplo, o grafo da Figura 3.7 satisfaz $m(T) = 5$, mas existem seis vértices densos, $\{a, b, c, d, e, f\}$. Porém, os vértices densos a, b, c, d, e não podem ser uma base de uma b -coloração com 5 cores, pois neste caso não há nenhuma escolha de cor para o vértice v que leve a uma b -coloração de T com $m(T)$ cores (observe que 4 cores diferentes devem aparecer nas vizinhanças de b e d). Porém, uma b -coloração por 5 cores de T existe tomando ou $\{a, b, c, e, f\}$ ou $\{a, c, d, e, f\}$ como os b -vértices.

Dessa forma, uma escolha criteriosa dos vértices densos pode ser necessária para se alcançar uma b -coloração com $m(T)$ cores. A seguir, definimos uma escolha “ruim” de vértices densos em uma árvore não-pivoteada:

Definição 3.14 (Irving e Manlove [37]) (**Vértice circulado**). *Seja $T = (V, E)$ uma árvore e V' um subconjunto de $D(T)$ com cardinalidade $m(T)$. Então V' circula algum vértice $v \in V \setminus V'$ se:*

1. *Cada vértice em V' é adjacente a v , ou a um vértice em V' adjacente a v ; e*
2. *Qualquer vértice em V' adjacente a v e a outro vértice em V' têm grau $m(T) - 1$.*

Nos referimos a v como um vértice circulado por V' .

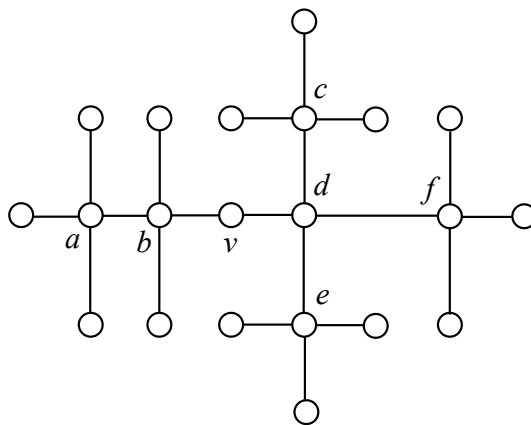


Figura 3.7: O conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ circula v , enquanto $\{a, b, c, e, f\}$ não.

Similarmente ao que ocorre nas árvores pivoteadas, se, em uma árvore não-pivoteada T , um vértice v é circulado por um conjunto V' ($|V'| = m(T)$) de vértices densos, então os vértices em V' não são uma base de uma b -coloração de T com $m(T)$ cores. Porém, como T é não-pivoteada, o único caso em que isso é possível é quando temos uma quantidade maior do que $m(T)$ de vértices densos (caso contrário, V' é o conjunto dos vértices densos de T , e v se enquadra na definição de pivô, contradizendo o fato de que T é não-pivoteada), e podemos escolher outro conjunto de vértices densos para desempenhar o papel de b -vértices. A seguinte definição caracteriza uma “boa” escolha dos vértices densos de uma árvore não-pivoteada:

Definição 3.15 (Irving e Manlove [37]) (**Conjunto bom**). *Seja $T = (V, E)$ uma árvore e $V' \subseteq D(T)$ com cardinalidade $m(T)$. Então V' é um conjunto bom com respeito a T se:*

1. V' não circula nenhum vértice em $V \setminus V'$; e
2. Qualquer vértice $u \in V \setminus V'$ tal que $d(u) \geq m(T)$ é adjacente a algum $v \in V'$.

Na Figura 3.7, o conjunto $\{a, c, d, e, f\}$ é um exemplo de conjunto bom. Irving e Manlove [37] utilizaram o seguinte lema para demonstrar o Teorema 3.17.

Lema 3.16 (Irving e Manlove [37]) *Se $T = (V, E)$ é uma árvore não-pivoteada então podemos construir um conjunto bom para T .*

Teorema 3.17 (Irving e Manlove [37]) *Se $T = (V, E)$ é uma árvore não-pivoteada, então $\chi_b(T) = m(T)$.*

Como verificar se uma árvore T é pivoteada ou não pode ser feito em tempo polinomial, temos que NÚMERO B-CROMÁTICO é polinomial em árvores. Além disso, as demonstrações, que não são apresentadas aqui, fornecem algoritmos polinomiais para a construção de b -colorações com $m(T) - 1$ e com $m(T)$ cores, respectivamente no caso de árvores pivoteadas e não-pivoteadas.

Em relação ao problema B-COLORAÇÃO, Faik e Kara et al. [26, 38] demonstraram que, dado um grafo cordal G , um grafo livre de ciclos induzidos de tamanho pelo menos 4, e uma b -coloração do mesmo com k cores, pode-se obter, em tempo polinomial, uma b -coloração de G com $k - 1$ cores se $k \geq \chi(G) + 1$. As árvores são grafos cordais. Logo, dados uma árvore T e um valor k , para responder se T admite uma b -coloração com k cores basta determinar o valor de $\chi_b(T)$ e verificar se $2 \leq k \leq \chi_b(T)$. Consequentemente, B-COLORAÇÃO é polinomial em árvores.

4 *b*-Coloração de grafos regulares

Neste capítulo, apresentamos algumas abordagens de como *b*-colorir grafos regulares e os principais resultados obtidos a partir das mesmas. Essas abordagens são baseadas em diferentes parâmetros do grafo, como veremos.

4.1 Quanto ao número de vértices

Como vimos no capítulo 3, as desigualdades a seguir são válidas para todo grafo G :

$$\chi(G) \leq \chi_b(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Como vimos, também no Capítulo 3, Hoàng, Maffray e Mechebbek [34] caracterizaram todos os grafos *b*-perfeitos por subgrafos induzidos proibidos. Um problema importante é caracterizar aqueles grafos G tais que $\chi_b(G) = \Delta(G) + 1$, já que este é o limite superior para o número *b*-cromático de qualquer grafo. Kratochvil, Tuza e Voigt [46] provaram o seguinte teorema:

Teorema 4.1 (Kratochvil, Tuza e Voigt [46]) *Seja G um grafo contendo vértices $v_1, v_2, \dots, v_{\Delta(G)+1}$ tais que $d(v_i) = \Delta(G)$, para todo i , e $\text{dist}(v_i, v_j) \geq 4$ para todo $i \neq j$. Então $\chi_b(G) = \Delta(G) + 1$.*

Demonstração: Denotaremos $\Delta(G) = \Delta$. Iremos construir uma *b*-coloração de G com $\Delta + 1$ cores. Para todo $i \in [\Delta + 1]$ colorimos v_i com a cor i e sua vizinhança com a cores $[\Delta + 1] \setminus \{i\}$ tal que todas as Δ cores são utilizadas na vizinhança. Até agora essa é uma coloração própria de G , pois a restrição de distância implica que não existem vértices adjacentes com a mesma cor e cada um dos vértices v_i é um *b*-vértice. Além disso, a pré-coloração pode ser estendida ao grafo todo utilizando o Algoritmo 2. Note que, isso é possível pois, todo vértice tem grau no máximo Δ e temos $\Delta + 1$ cores disponíveis. Assim, $\chi_b(G) = \Delta + 1$. \square

Claramente se G é um grafo d -regular satisfazendo a restrição de distância do Teorema 4.1,

então $\chi_b(G) = d + 1$. A ideia também pode ser utilizada para provar o seguinte resultado acerca dos grafos regulares:

Corolário 4.2 (Kratochvil, Tuza e Voigt [46]) *Seja G um grafo d -regular ($d \geq 2$) com pelo menos d^4 vértices. Então $\chi_b(G) = d + 1$.*

Demonstração: Pretendemos encontrar $d + 1$ vértices v_1, \dots, v_{d+1} onde $\text{dist}(v_i, v_j) \geq 4$ para todo $i \neq j$. Tome arbitrariamente um vértice como v_1 e seja G_1 o grafo obtido ao remover v_1 junto com sua primeira, segunda e terceira vizinhanças em G . O número de vértices removidos é no máximo $1 + d + d(d - 1) + d(d - 1)^2 = d^3 - d^2 + d + 1 < d^3$. Da mesma forma, elegemos um novo vértice de G_1 como v_2 e removemos suas vizinhanças primeira, segunda e terceira, gerando um novo grafo G_2 . Observe que também removemos menos que d^3 vértices de G_1 a G_2 . Continuamos o processo até obtermos o grafo G_{d+1} . A soma dos vértices removidos é menor do que d^4 e, portanto, existe pelo menos um vértice v_{d+1} . Além disso, $\text{dist}(v_i, v_j) \geq 4$ para todo $i \neq j$. Como G é d -regular, tais v_1, \dots, v_{d+1} satisfazem as condições do Teorema 4.1. \square

Para $d = 2$, somente os grafos consistindo de um ou dois ciclos de tamanho 4 possuem número b -cromático 2 e todos os demais grafos 2-regulares possuem número b -cromático 3.

O Corolário 4.2 significa que, para um dado d , existe um número finito de grafos d -regulares G com $\chi_b(G) < d + 1$. É mostrado em [39] que existem exatamente 4 grafos cúbicos com $\chi_b(G) < \Delta(G) + 1$, onde um deles é o grafo da Figura 4.1. Todas as exceções possuem não mais que 10 vértices.

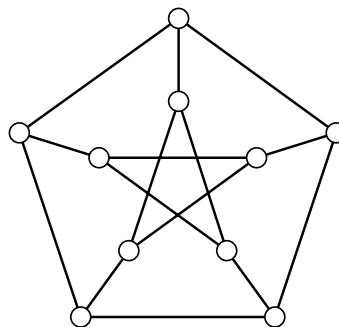


Figura 4.1: Grafo de Petersen.

Cabello e Jakovac [7] diminuíram o limite do Corolário 4.2.

Teorema 4.3 (Cabello e Jakovac [7]) *Seja G um grafo d -regular com pelo menos $2d^3$ vértices. Então $\chi_b(G) = d + 1$.*

Assim, qualquer grafo d -regular com pelo menos $2d^3$ vértices possui número b -cromático $d + 1$. A demonstração do Teorema 4.3 não será apresentada aqui. Cabello e Jakovac [7] também mostraram que o limite $2d^3$ não pode ser reduzido abaixo de d^2 em geral. Para demonstrar isso usaremos a definição de produto lexicográfico:

Definição 4.4 *Dados grafos G e H , chamamos de produto lexicográfico de G por H , denotado por $G[H]$, o grafo cujo conjunto de vértices é formado pelos elementos de $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas é $E(G[H]) = \{(a,x), (b,y) \mid ab \in E(G), \text{ ou } a = b \text{ e } xy \in E(H)\}$.*

O produto lexicográfico de G por H pode ser visto como se cada vértice v de G fosse substituído por uma cópia de H e vértices de cópias diferentes H_1 e H_2 são conectados quando os respectivos vértices substituídos v_1 e v_2 são adjacentes em G . Claramente o produto lexicográfico não é uma operação comutativa, como podemos notar na Figura 4.2:

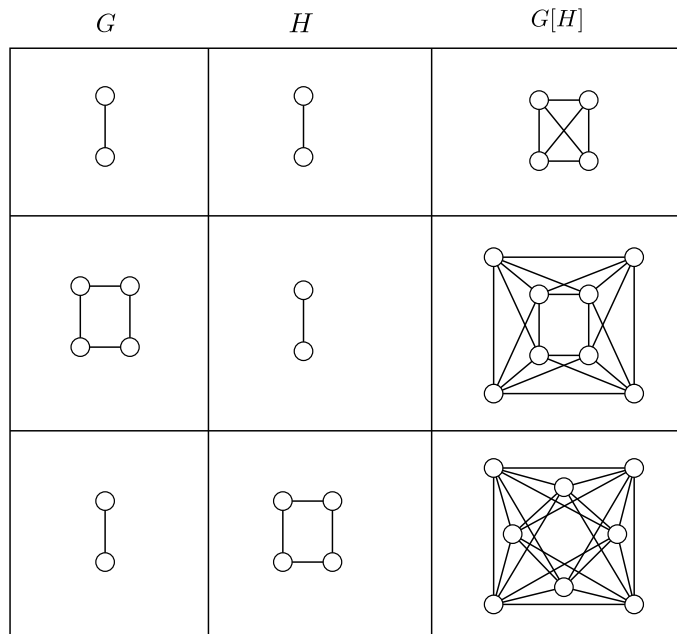


Figura 4.2: Produto lexicográfico.

Seja $d \geq 2$ um inteiro positivo e par e seja $S_{d/2}$ um conjunto independente com $\frac{d}{2}$ vértices. O grafo $C_{2d}[S_{d/2}]$, onde C_{2d} é um ciclo de tamanho $2d$, é um grafo d -regular com exatamente $2d \cdot \frac{d}{2} = d^2$ vértices. A Figura 4.3 mostra o grafo 4-regular $C_8[S_2]$. Cabello e Jakovac [7] apresentaram o seguinte resultado.

Proposição 4.5 (Cabello e Jakovac [7]) *Seja $d \geq 2$ par e positivo. Então $\chi_b(C_{2d}[S_{d/2}]) \leq d$.*

Demonstração: Os vértices de $C_{2d}[S_{d/2}]$ cuja primeira coordenada é a mesma formam uma

cópia do conjunto independente $S_{d/2}$, chamada de *fibra*. Existem, assim, $2d$ $S_{d/2}$ -fibras diferentes, e elas formam uma partição do conjunto de vértices do grafo.

Considere uma b -coloração do grafo $C_{2d}[S_{d/2}]$ com $\chi_b(C_{2d}[S_{d/2}])$ cores. Considere um b -vértice com a cor i e seja F o conjunto de $S_{d/2}$ -fibras que contém um b -vértice com a cor i . A figura 4.3 mostra o exemplo onde $i = 1$ para o grafo $C_8[S_2]$. As cores $[d + 1] \setminus \{i\}$ devem ser usadas nas duas vizinhanças de cada $S_{d/2}$ -fibras. Entretanto, isso implica que todos os vértices de F devem ter a cor i . Assim, nenhum dos vértices de F ou da vizinhança de F podem ser b -vértices de qualquer cor de $[d + 1] \setminus \{i\}$. Isto significa que as $S_{d/2}$ -fibras que possuem um b -vértice devem estar a distância pelo menos dois uma da outra. Como existe somente $2d$ dessas fibras, então no máximo d cores podem ser utilizadas, e assim, $\chi_b(C_{2d}[S_{d/2}]) \leq d$. \square

Com este resultado obtém-se um grafo d -regular, para qualquer d par, que possui d^2 vértices e cujo número b -cromático não é $d + 1$.

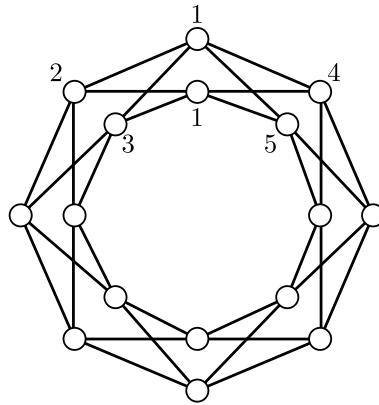


Figura 4.3: Produto lexicográfico $C_8[S_2]$.

4.2 Quanto ao diâmetro e à conectividade

Cabello e Jakovac [7] analisaram o estudo de b -colorações de grafos d -regulares que possuem diâmetro grande e não possuem ciclos de tamanho 4. Eles provaram o seguinte teorema:

Teorema 4.6 (Cabello e Jakovac [7]) *Seja G um grafo d -regular sem C_4 induzidos e $\text{diam}(G) \geq d$. Então $\chi_b(G) = d + 1$.*

O grafo $C_{2d}[S_{d/2}]$ apresentado na Figura 4.3, onde d é par, é d -regular e possui diâmetro d , mas seu número b -cromático não é $d + 1$. Isso mostra que a restrição sobre os ciclos de tamanho 4 é necessária.

Shaebani [51] melhorou o resultado anterior para grafos cujo diâmetro é pelo menos 6:

Teorema 4.7 (Shaebani [51]) *Seja G um grafo d -regular sem C_4 e $\text{diam}(G) \geq 6$. Então $\chi_b(G) = d + 1$.*

Shaebani [51] também mostrou uma nova condição suficiente para um grafo d -regular apresentar número b -cromático $d + 1$:

Teorema 4.8 (Shaebani [51]) *Seja G um grafo d -regular sem C_4 . Se $\kappa(G) \leq \frac{d+1}{2}$ então $\chi_b(G) = d + 1$.*

Esse limite superior para a conectividade de vértices não se aplica ao grafo de Petersen 4.1 já que a conectividade de vértices do grafo de Petersen é $\frac{d+1}{2} + 1$ e seu número b -cromático não é $d + 1$.

4.3 Quanto à cintura

Para um grafo d -regular G cuja cintura é pelo menos 6, M. Kouider [43] mostrou que o número b -cromático de G é igual a $d + 1$:

Teorema 4.9 (M. Kouider [43]) *Seja G um grafo d -regular com $g(G) \geq 6$. Então $\chi_b(G) = d + 1$.*

Demonstração: Seja v um vértice de G e sejam v_1, v_2, \dots, v_d seus vizinhos. Para cada $i = 1, \dots, d$ seja $N_i = N(v_i) \setminus \{v\}$. Então cada N_i é um conjunto independente, pois caso contrário G conteria um C_3 induzido. Então quaisquer dois N_i 's são disjuntos, pois caso contrário G poderia conter um ciclo de tamanho 4; e não existe aresta entre essas vizinhanças, pois caso contrário G poderia conter um ciclo de tamanho 5. Construímos uma coloração com $d + 1$ cores em $[d + 1]$ como segue. Associamos a cor $d + 1$ a v , colorimos v_i com a cor i e associamos cores distintas aos vértices de N_i no conjunto $[d] \setminus \{i\}$. Finalmente colorimos os vértices restantes utilizando o Algoritmo 2. Claramente obtemos uma b -coloração com $d + 1$ cores onde os vértices v, v_1, \dots, v_d são b -vértices. \square

El-Sahili e Kouider [22] mostraram que todo grafo d -regular G cuja cintura é pelo menos 5 e que não contém ciclos de tamanho 6 possui número b -cromático igual a $d + 1$.

Teorema 4.10 (El-Sahili e Kouider [22]) *Seja G um grafo d -regular com $g(G) \geq 5$ e livre de C_6 . Então $\chi_b(G) = d + 1$.*

Dessa forma, eles propuseram a seguinte questão:

Questão 4.11 (El-Sahili e Kouider [22]) *O número b -cromático de um grafo d -regular de cintura 5 é igual a $d + 1$?*

Porém é mostrado em [2] que o grafo de Petersen, que é 3-regular, possui número b -cromático igual a 3, o que responde negativamente à Questão 4.11. Em [2] também é mostrado o seguinte resultado:

Teorema 4.12 (Blidia, Maffray e Zemir [2]) *Seja G um grafo d -regular tal que $g(G) \geq 5$, diferente do grafo de Petersen, e com $d \leq 6$. Então $\chi_b(G) = d + 1$.*

No mesmo artigo, a seguinte conjectura é proposta:

Conjectura 4.13 (Blidia, Maffray e Zemir [2]) *Seja G um grafo d -regular tal que $g(G) \geq 5$, diferente do grafo de Petersen. Então G possui uma b -coloração com $d + 1$ cores.*

A demonstração do Teorema 4.12, porém, é longa e faz uma análise para cada valor de $d \in [6]$. Com isso, essa demonstração passa a ser inviável para valores maiores de d , sendo necessários métodos de prova alternativos para demonstrar a Conjectura 4.13.

Cabello e Jakovac [7] apresentaram um limitante inferior para o número b -cromático de um grafo com cintura pelo menos 5.

Teorema 4.14 (Cabello e Jakovac [7]) *Seja G um grafo d -regular com cintura pelo menos 5. Então $\chi_b(G) \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$.*

Shaebani [51] melhorou o resultado anterior, onde obtém um limite inferior justo para o grafo de Petersen.

Teorema 4.15 (Shaebani [51]) *Seja G um grafo d -regular que não contém C_4 . Então $\chi_b(G) \geq \lfloor \frac{d+3}{2} \rfloor$. Além disso, se G possui um triângulo, então $\chi_b(G) \geq \lfloor \frac{d+4}{2} \rfloor$.*

Observe que mostrar que $g^* = 5$ implica mostrar que $\chi_b(G) \geq d$, para grafos d -regulares G . Esse seria um avanço bastante considerável no sentido de mostrar que a Conjectura de Blidia, Maffray e Zemir é verdadeira, em vista dos resultados atuais dados pelo Teorema 4.15.

5 *b*-Coloração de grafos sem conjunto bom e cintura grande

Neste capítulo, apresentamos melhorias em alguns resultados obtidos por Silva [53], em sua tese, acerca de *b*-colorações de grafos com cintura pelo menos 6 e que não possuem um conjunto bom, cuja definição generaliza a Definição 3.15 de árvores para grafos em geral, e apresentamos nosso resultado principal. Em sua tese, Silva [53] generalizou algumas definições e alguns resultados de Irving e Manlove [37] de modo a ser aplicável a qualquer inteiro positivo $1 \leq k \leq m(G)$, não somente a $m(G)$.

5.1 Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $u \in V$. Seja $X \subseteq V$, denotamos $N_X(u)$ como o conjunto $N(u) \cap X$. Dizemos que u é um vértice *k*-denso se $d(u) \geq k - 1$ e denotamos por $D_k(G)$ o conjunto de todos os vértices *k*-densos de G .

Definimos agora uma estrutura “ruim” com respeito a obter uma *b*-coloração com *k* cores.

Definição 5.1 (Vértice circulado). *Seja $G = (V, E)$ um grafo e $W \subseteq D_k(G)$ com cardinalidade k . Então W circula algum vértice $u \in V \setminus W$ se:*

1. *Todo vértice em W é adjacente a u , ou a um vértice em W adjacente a u ; e*
2. *Qualquer vértice de W não adjacente a u possui um vizinho em $W \cap N(u)$ com grau $k - 1$.*

Nos referimos a u como um vértice *circulado* por W . Além disso, denotamos todo vértice $v \in W$ como *alcançado* por u em W , ou que u *alcança* v por W .

Definimos agora um conjunto “bom” de um grafo G no sentido de obter uma *b*-coloração de G com $m(G)$ cores.

Definição 5.2 (Conjunto bom). *Seja um grafo $G = (V, E)$ e $W \subseteq D(G)$ com cardinalidade $m(G)$. Então W é um conjunto bom com respeito a G se:*

1. W não circula nenhum vértice em $V \setminus W$; e
2. Todo vértice $u \in V \setminus W$, com $d(u) \geq m(G)$, é adjacente a algum vértice $v \in W$.

Se ψ é uma b -coloração de $G = (V, E)$ com k cores e $W \subseteq V$ um conjunto que contém exatamente um b -vértice de cada classe de cor de ψ , então, como definimos anteriormente, W é uma base de ψ . Por outro lado, se W é uma base de uma b -coloração ψ de G e $|W| = k$, então W é chamado de uma k -base de ψ .

Lema 5.3 (Irving e Manlove [37]) *Seja G um grafo e $W \subseteq D_k(G)$ com cardinalidade k . Se $u \in V(G) \setminus W$ é um vértice circulado por W , então W não é uma k -base de G .*

Demonstração: Suponha que $W = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é uma k -base de G e assumamos uma b -coloração c em que v_i tem a cor i , para todo $i \in [k]$. Seja v_i o b -vértice em W tal que $c(u) = i$. Claramente v_i é não adjacente a u . Como u é circulado por W , existe um vértice $v_j \in W$, $j \neq i$, com grau $k - 1$ e vizinho de u e v_i . Como v_j é um b -vértice em c e seu grau é $k - 1$, todos os seus vizinhos devem possuir cores distintas entre si e diferentes de j , uma contradição. \square

Dado um grafo G , o lema anterior mostra que, se qualquer conjunto $W \in D(G)$ com cardinalidade $m(G)$ circula algum vértice e , portanto, G não possui um conjunto bom, então G não admite uma b -coloração por $m(G)$ cores. Silva [53] demonstrou o seguinte lema que relaciona a cintura de um grafo com o fato de ele não possuir um conjunto bom. Esse lema é utilizado para provar o Teorema 5.5.

Lema 5.4 (Silva [53]) *Seja G um grafo com cintura pelo menos 8. Então G não possui um conjunto bom se e somente se $|D(G)| = m(G)$ e $D(G)$ circula algum vértice de $V(G) \setminus D(G)$. Além disso, um conjunto bom de G (se algum existe) pode ser encontrado em tempo polinomial.*

Teorema 5.5 (Silva [53]) *Seja G um grafo com cintura pelo menos 8. Se G não possui um conjunto bom, então $\chi_b(G) = m(G) - 1$.*

O Teorema 5.5 mostra que podemos obter uma b -coloração de um grafo G , cuja cintura é pelo menos 8 e sem conjunto bom, com a máxima quantidade de cores. Resta saber o valor do número b -cromático quando G possui um conjunto bom. Campos, Farias e Silva [9] demonstraram o seguinte resultado com esse objetivo.

Teorema 5.6 (Campos, Farias e Silva [9]) *Seja G um grafo com cintura pelo menos 9. Se G possui um conjunto bom, então $\chi_b(G) = m(G)$.*

Combinando o resultado anterior com o Teorema 5.5, obtemos o resultado geral em relação ao número b -cromático de grafos com cintura pelo menos 9, mostrando que $g^* \leq 9$ em relação ao Problema 1.1.

Teorema 5.7 (Campos, Farias e Silva [9]) *Se G é um grafo com cintura pelo menos 9, então $\chi_b(G) \geq m(G) - 1$.*

Apresentamos na próxima seção uma caracterização dos grafos com cintura pelo menos 6 que não possuem um conjunto bom, melhorando o resultado do Lema 5.4. A demonstração é similar a usada por Silva na demonstração do Lema 5.4. Para finalizar esta seção apresentamos uma proposição simples.

Proposição 5.8 (Silva [53]) *Seja G um grafo e $W \subseteq D_k(G)$ com cardinalidade k . Se $u \in V(G) \setminus W$ é um vértice circulado por W , tal que $d(u) < k$, então $|N_W(u)| \geq 2$ e $|W \setminus N(u)| \geq 1$.*

Demonstração: Como $d(u) < k = |W|$, existe um vértice v em $W \setminus N(u)$. Como v deve ser alcançado por u por W , então existe $w \in N_W(u) \cap N_W(v)$ cujo grau é $k - 1$. Se w é o único vizinho de u em W , então, como W circula u , todo vértice de $W \setminus w$ deve ser adjacente a w . Mas então $d(w) \geq k$, uma contradição. Logo u possui pelo menos dois vizinhos em W . \square

5.2 Grafos sem conjunto bom e com cintura pelo menos 6

Seja G um grafo com cintura pelo menos 6 e $W \subseteq D(G)$ um conjunto que circula algum vértice $u \in V(G) \setminus W$. Denotamos por $N_1 = N_W(u)$ e por $N_2 = W \setminus N_1$. A Figura 5.1 mostra uma representação de um vértice circulado u e os conjuntos N_1 e N_2 (vértices escuros). Note que, como G possui cintura pelo menos 6, os conjuntos N_1 e N_2 são conjuntos independentes e todo vértice de N_2 possui exatamente um vizinho em N_1 . Além disso, por definição de vértice circulado, todo vértice de N_1 adjacente a algum vértice de N_2 possui grau exatamente $m(G) - 1$. Note também que a vizinhança de u pode conter vértices que não pertencem a W .

Apresentamos agora alguns lemas úteis que, juntamente com a Proposição 5.8, nos ajudarão na caracterização dos grafos com cintura pelo menos 6 e que não possuem conjunto bom.

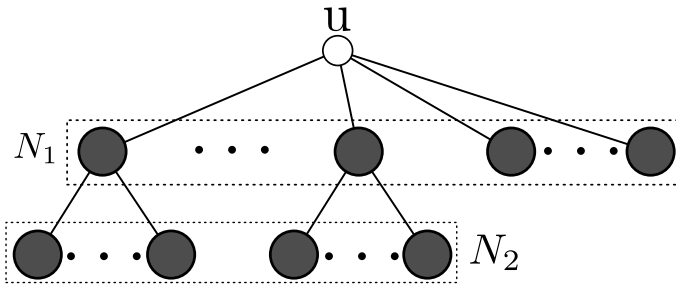


Figura 5.1: Representação de um vértice circulado u e conjuntos N_1 e N_2 .

Lema 5.9 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 6 e $W \subseteq D(G)$ um conjunto com cardinalidade $m(G)$ que circula algum vértice $u \in V(G) \setminus W$. Então, para todo vértice $x \in V(G) \setminus (W \cup \{u\})$, vale:*

(i) $|N_{N_1 \cup \{u\}}(x)| \leq 1$;

(ii) Se $N_{N_2}(x) \neq \emptyset$, então $N_{N_1 \cup \{u\}}(x) = \emptyset$;

(iii) Se $|N_{N_2}(x)| \geq 2$, então, para todo par de vértices $v_i, v_j \in N_{N_2}(x)$, $N_{N_1}(v_i) \neq N_{N_1}(v_j)$.

Demonstração: Seja $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m(G)}\}$. Suponha por contradição que (i) é falso. Se x é adjacente a u e a $v_i \in N_1$ então $\langle x, u, v_i, x \rangle$ induz um C_3 em G . Se x é adjacente a dois vértices $v_i, v_j \in N_1$, então $\langle x, v_i, u, v_j, x \rangle$ induz um C_4 em G . Suponha agora que (ii) é falso e sejam $v_i \in N_1$ e $v_j \in N_2$ vizinhos de x . Se v_i e v_j são adjacentes então os mesmos induzem um C_3 em G , juntamente com x . Senão, seja v_l o vizinho de v_j em N_1 . Então $\langle x, v_i, u, v_l, v_j, x \rangle$ induz um C_5 em G . Se x é adjacente a u e a algum $v'_j \in N_2$ tal que $v'_j v'_i \in E(G)$ e $v'_i \in N_1$, então $\langle x, v'_i, v'_j, u, x \rangle$ induz um C_4 em G . Finalmente suponha que (iii) é falso. Se x é adjacente a $v_p, v_q \in N_2$ tal que $v_p v_l, v_q v_l \in E(G)$ e $v_l \in N_1$, então $\langle x, v_p, v_l, v_q, x \rangle$ induz um C_4 em G . Obtemos contradições em todos os casos, logo (i), (ii) e (iii) são válidos. \square

Observação 5.10 *Dado um grafo G , pela definição de $m(G)$, sabemos que existe no máximo $m(G)$ vértices cujo grau é maior que $m(G)$.*

Lema 5.11 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 6 e suponha que $|D(G)| > m(G)$. Seja $W \subseteq D(G)$ um conjunto com cardinalidade $m(G)$ que circula algum vértice $u \notin D(G)$ e que possui todos os vértices de G cujos graus são pelo menos $m(G)$. Se existe $v \in N_1$ tal que $|N_{N_2}(v)| \geq 2$, então G possui um conjunto bom.*

Demonstração: Seja $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m(G)}\}$ e considere N_1 e N_2 referentes a u e W . Tome $w \in D(G) \setminus (W \cup \{u\})$ e $v_i \in N_1$, tal que $v_j, v_k \in N_{N_2}(v_i)$. O vértice w existe, já que $|D(G)| > m(G)$ e

$u \notin D(G)$. Seja $W' = (W \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$. Se W' não circula qualquer vértice, então o lema segue, já que $d(v_i) = m(G) - 1$. Então seja u' um vértice circulado por W' . Pela Proposição 5.8, existe $v'_i \in N_1$ tal que $v_i \neq v'_i$. Claramente $u' \neq v_i$, pois, caso contrário o único caminho de tamanho dois entre v_i e v'_i por W' deve conter w , uma contradição pelo Lema 5.9. Como v_j e v_k são não adjacentes a qualquer vértice de $(W' \setminus \{w\}) \cup \{u\}$, então u' deve alcançar v_j e v_k por w em W' , uma contradição pelo Lema 5.9. Então u' não existe e W' é um conjunto bom de G . \square

Utilizando os lemas anteriores, provamos o seguinte resultado que caracteriza os grafos com cintura pelo menos 6 e que não possuem um conjunto bom.

Teorema 5.12 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 6 e $u, u' \in V(G) \setminus D(G)$. Então G não possui um conjunto bom se e somente se:*

1. $|D(G)| = m(G)$ e $D(G)$ circula algum vértice de $V(G) \setminus D(G)$.
2. $|D(G)| = m(G) + 1$, $d(v) = m(G) - 1$ para todo $v \in D(G)$ e $D(G)$ induz um emparelhamento com partes X_1 e X_2 , tal que u é adjacente a todo X_1 e u' a todo X_2 .

Além disso, um conjunto bom, se existe, pode ser encontrado em tempo polinomial.

A Figura 5.2 representa a estrutura definida no caso 2 do Teorema 5.12.

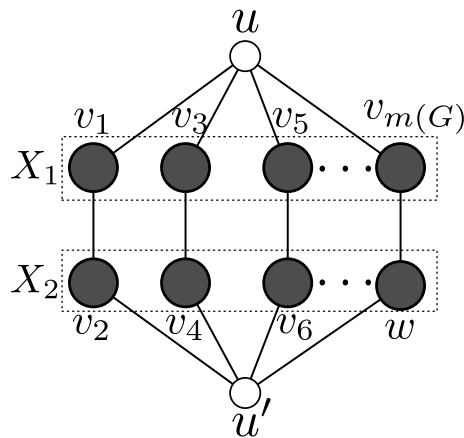


Figura 5.2: Representação do caso 2 do Teorema 5.12.

Demonstração: Aqui demonstramos um algoritmo polinomial que determina um conjunto bom em G , se existe algum.

Primeiro, suponha que $|D(G)| = m(G)$. Então o único subconjunto de $D(G)$, cujo tamanho é $m(G)$, é ele próprio $D(G)$. Se $D(G)$ circula algum vértice, então $D(G)$ não é um conjunto

bom e o algoritmo retorna que G não possui um conjunto bom. Senão, o algoritmo retorna o conjunto bom $D(G)$.

Suponha agora que $|D(G)| > m(G)$. Seja $W \subseteq D(G)$ tal que $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m(G)}\}$ contém todos os vértices com grau pelo menos $m(G)$, que existe de acordo com a Observação 5.10. Se W não circula qualquer vértice, então ele é um conjunto bom e o algoritmo o retorna. Senão, seja u um vértice circulado por W . Sejam N_1 e N_2 como definidos anteriormente em relação a u e W . Pela Proposição 5.8, $|N_1| \geq 2$, $|N_2| \geq 1$. Tome $v_2 \in N_2$ e seja v_1 seu vizinho em N_1 . Também, seja $v_3 \in N_1 \setminus \{v_1\}$ (o mesmo existe pois $|N_1| \geq 2$). Como u é circulado por W , sabemos que $d(v_1) = m(G) - 1$.

Caso 1: $u \in D(G) \setminus W$.

Seja $W_1 = (W \setminus \{v_2\}) \cup \{u\}$. Se W_1 não circula qualquer vértice então W_1 é um conjunto bom e o algoritmo o retorna, já que $v_1 v_2 \in E(G)$. Senão, seja $u' \in V(G) \setminus W_1$ circulado por W_1 . Claramente $u' \neq v_2$, pois o único vizinho de v_2 em W_1 é v_1 e, pela Proposição 5.8, v_2 não pode ser circulado por W_1 . Pelo Lema 5.9, a desigualdade $|N_{W_1}(u')| \geq 2$ ocorre somente se u' é adjacente a apenas vértices de N_2 . Dessa forma, u' não alcança u por W_1 , uma contradição.

Caso 2: $u \notin D(G)$.

Temos que $d(u) < m(G) - 1$. Portanto, $|N_2| \geq 2$ e seja $v_4 \in N_2 \setminus \{v_2\}$. Seja também $w \in D(G) \setminus (W \cup \{u\})$, que existe pois $|D(G)| > m(G)$ e u não é denso. Pelo Lema 5.11, suponha que $|N_{N_2}(v_i)| \leq 1$, para todo $v_i \in N_1$ e seja $W_2 = (W \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$. Se W_2 não circula qualquer vértice então W_2 é um conjunto bom e o algoritmo o retorna, já que $d(v_1) = m(G) - 1$. Senão, seja $u' \in V(G) \setminus W_2$ circulado por W_2 . Se $u' = v_1$, então, como o único caminho de tamanho dois entre v_1 e v_3 por W_2 deve passar por w , temos uma contradição pelo Lema 5.9. Se $u' = u$, então, como v_2 não possui vizinho em $(W_2 \setminus \{w\}) \cup \{u\}$, u deve alcançá-lo por w , uma contradição também pelo Lema 5.9. Assim, u' é diferente de v_1 e de u e, portanto, $u' \in V(G) \setminus (W \cup \{u, w\})$.

Suponha que u' possui um vizinho $v_i \in N_1$. Então, pelo Lema 5.9, $N_{W \cup \{u\}}(u') = \{v_i\}$. Logo, pela Proposição 5.8, $u'w \in E(G)$ e u' deve alcançar v_2 por w em W_2 . Portanto $i \neq 1$. Além disso, todos os demais vértices de N_1 devem ser alcançados por u' através de w . Mas, como $wv_2 \in E(G)$, pelo Lema 5.9, $N_{N_1 \cup \{u\}}(w) = \emptyset$ e, portanto, $N_1 = \{v_1, v_3\}$, $i = 3$, $v_3 v_4 \in E(G)$ e $m(G) = 4$. Neste caso, seja $W_3 = (W \setminus \{v_4\}) \cup \{w\}$. Se W_3 é um conjunto bom então o algoritmo o retorna. Senão, seja $u'' \in V(G) \setminus W_3$ circulado por W_3 , já que $v_3 v_4 \in E(G)$. Como u não alcança w , e u' e v_4 não alcançam v_1 através de W_3 , então $u'' \neq u, u', v_4$. Também, como v_3 não possui vizinho em W_3 , então $u'' v_3 \in E(G)$. Assim, pelo Lema 5.9, u'' não possui mais nenhum vizinho em $W_3 \setminus \{w\}$, como a cintura é ao menos 6, u'' também não é vizinho de w ,

contradizendo a Proposição 5.8. Portanto, assumiremos que $N_{N_1}(u') = \emptyset$.

Suponha que u' alcança v_2 por w em W_2 . Se existe algum vértice $v_i \in N_1 \setminus \{v_1\}$ tal que $N_{N_2}(v_i) = \emptyset$, como $u'v_i \notin E(G)$, então u' deve alcançar v_i por w em W_2 , uma contradição pelo Lema 5.9. Seja então $z_i \in N_2 \setminus \{v_2\}$ tal que $v_i z_i \in E(G)$, para cada $v_i \in N_1 \setminus \{v_1\}$. Como u' deve alcançar v_i em W_2 e nem w nem u' tem vizinhos em N_1 , então u' alcança v_i por z_i em W_2 . Portanto, todos os vértices de $N_2 \setminus \{v_2\}$ são adjacentes a u' . Seja $W_4 = (W \setminus \{v_2\}) \cup \{w\}$. Se W_4 é um conjunto bom então o algoritmo o retorna. Senão, W_4 circula algum vértice $u'' \in V(G) \setminus W_4$, pois $wv_2 \in E(G)$. Temos que $u'' \neq u$, pois u não alcança w em W_4 e $u'' \neq u'$, pois u' não alcança v_1 em W_4 . Além disso $u'' \neq v_2$, pois v_2 não alcança v_3 em W_4 , já que o caminho $\langle v_2, v_1, u, v_3 \rangle$ juntamente com um caminho de tamanho no máximo 2 em W_4 induziria um ciclo de tamanho no máximo 5 em G . Logo, como $u'' \in V(G) \setminus (W_4 \cup \{u, u', v_2\})$, pelo Lema 5.9 aplicado a N_1 e N_2 com relação a u e aplicado a $N_{W_4}(u'')$ e $N(N(u'')) \cap W_4$, u'' possui no máximo um vizinho em W_4 , uma contradição pela Proposição 5.8.

Considere agora que $u'v_2 \in E(G)$ e $u'w \notin E(G)$. Como u' alcança w em W_2 , existe um vértice $z \in N(w) \cap N(u')$ tal que $z \in N_2$. Como w está à distância dois de u' e u' é não adjacente a todo vértice de N_1 , então $N_{N_2}(v_i) \neq \emptyset$, para todo $v_i \in N_1 \setminus \{v_1\}$ e, assim, temos o caso análogo ao anterior, onde W_4 é um conjunto bom.

Finalmente, considere que $u'v_2, u'w \in E(G)$. Seja $z_i \in N_2$ e $v_i \in N_1$ tal que $v_i z_i \in E(G)$. Temos que v_i não pode ser alcançado por u' através de w , pois, caso contrário, existiria o caminho $\langle u', w, v_i, z_i \rangle$ de tamanho 3 entre u' e z_i . Logo, z_i é o único vizinho de v_i em W_2 e como $u'v_i \notin E(G)$, então $u'z_i \in E(G)$ para todo $z_i \in N_2$. Se existe um vértice $v_i \in N_1$ tal que $N_{N_2}(v_i) = \emptyset$, então u' alcança v_i através de w em W_2 e, pelo Lema 5.9, v_i é único. Senão, então w não possui vizinho em $W_2 \cup \{u\}$. Se $u' \in D(G)$, o conjunto $W_5 = (W \setminus \{v_2\}) \cup \{u'\}$ é um conjunto bom e a demonstração é análoga a do *Caso 1*. Então suponha que $u' \notin D(G)$. Considere então W_4 , como definido anteriormente. Se W_4 é um conjunto bom, então o algoritmo o retorna. Senão, seja u'' um vértice circulado por W_4 , já que $v_1 v_2 \in E(G)$. Claramente $u'' \neq u'$, pois u' não alcança v_1 por W_4 . Também $u'' \neq v_2$, pois v_2 não alcança w por W_4 . Portanto $u'' \in V(G) \setminus (W_4 \cup \{u', v_2\})$. Como v_1 não possui vizinho em W_4 , então $u''v_1 \in E(G)$ e, pelo Lema 5.9, $N_{N_2 \cup \{w\}}(u'') = \emptyset$. Portanto, u'' deve alcançar w através de um vértice $v_i \in N_1 \setminus \{v_1\}$ em W_4 . Como nenhum vértice em $V(G) \setminus (W \cup \{u\})$ pode ter dois vizinhos em N_1 , então $u'' = u$.

Portanto, W_4 circula u , W_2 circula u' e ambos u e u' são vértices não densos. Note que todos os vértices de $W \cup \{w\}$ possuem grau $m(G) - 1$ e induzem um emparelhamento em G , onde u é adjacente a todos os vértices de N_1 e u' é adjacente a todos os vértices de $N_2 \cup w$. Resta mostrar apenas que $D(G) = W \cup \{w\}$.

Seja $w' \notin (W \cup \{w\})$ um vértice denso. Considere o conjunto $W_6 = (W \setminus \{v_1, v_4\}) \cup \{w'\}$. Se W_6 é um conjunto bom, então o algoritmo o retorna. Senão, seja u'' um vértice circulado por W_6 , já que $d(v_1) = d(v_4) = m(G) - 1$. Como v_2 e v_3 não possuem vizinhos em $W_6 \setminus \{w'\}$, então w' deve ser adjacente a v_2 e v_3 . Logo $w' \neq u, u'$ e, assim, pelo Lema 5.9 aplicado a W e u , temos uma contradição e a prova termina. \square

5.3 b -Coloração e emparelhamentos

Com a caracterização da seção anterior dos grafos com cintura pelo menos 6 e sem conjunto bom, dada pelo Teorema 5.12, mostraremos nesta seção nosso resultado principal deste capítulo, que é uma melhoria do Teorema 5.5.

Teorema 5.13 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 7. Se G não possui um conjunto bom então $\chi_b(G) = m(G) - 1$.*

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 5.13, vamos fazer algumas observações. Uma estratégia para mostrar que conseguimos obter uma b -coloração de um grafo G com pelo menos k cores, consiste em mostrar que existe um subconjunto W de $D(G)$, com cardinalidade pelo menos k , onde conseguimos atribuir cores distintas a cada vértice w_i de W e distribuimos as demais $k - 1$ cores na vizinhança não colorida de cada w_i , de modo que a coloração resultante seja própria. Além disso, devemos mostrar que os demais vértices v_i , cujos graus são maiores que $k - 1$, podem ser coloridos propriamente de modo que sua vizinhança seja colorida com no máximo $k - 1$ cores, restando uma cor que pode ser utilizada por v_i . Os demais vértices não coloridos podem ser coloridos utilizando o Algoritmo 2.

A escolha do conjunto $W \subseteq D(G)$ de cardinalidade k , a fim de obter uma b -coloração com k cores, pode ser um problema, visto que pode existir um número exponencial de tais conjuntos W em $D(G)$, como no caso dos grafos d -regulares.

Dado um grafo G qualquer, encontrar uma b -coloração ψ de G por k cores pode ser resolvido da seguinte forma: encontrar um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de vértices densos tal que $\psi(v_i) = i$ e colorir iterativamente a vizinhança de cada v_i de modo que possuam todas as demais cores. Podemos, portanto, entender o problema de b -colorir um grafo com k cores como o de encontrar uma associação do conjunto de cores $C_i = [k] \setminus \{i\}$ ao conjunto $N(v_i)$, para cada v_i , de modo que todo vértice em $N(v_i)$ possui uma cor de C_i e toda cor de C_i é utilizada por um vértice de $N(v_i)$.

Com isso, suponha uma b -coloração parcial ψ de um grafo G com b -vértices $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ tal que $\psi(w_i) = i$. Seja H_i um grafo bipartido, onde uma parte é definida pelos vértices não coloridos de $N(w_i)$ e a outra pelo conjunto de cores C_i , para cada $i \in [k]$. Um vértice $v \in N(w_i)$ é adjacente a cor $c \in C_i$ em H_i se, e somente se, v não está colorido e pode receber a cor c em ψ . Dessa forma, encontrar uma b -coloração de G com esse conjunto de b -vértices pode ser visto como encontrar, iterativamente em $i \in [k]$, um emparelhamento que cubra todo $N(w_i)$ em H_i . A Figura 5.3 mostra um vértice denso w_i (vértice escuro) e o grafo H_i associado ao mesmo. Essa estratégia foi utilizada por Cabello e Jakovac [7] na demonstração do Teorema 4.14.

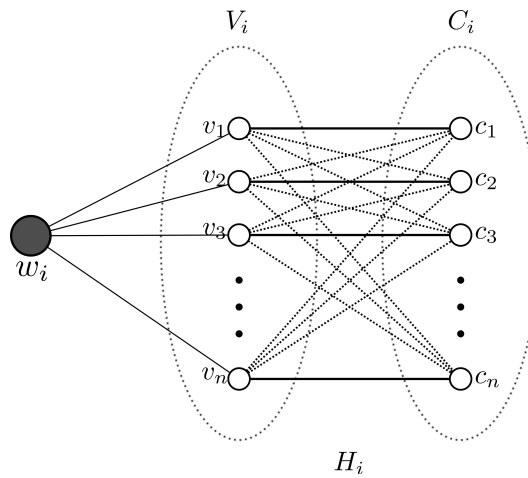


Figura 5.3: Representação do grafo H_i .

Hall [30] mostrou o famoso teorema, que ficou conhecido com seu nome, onde é dada a condição necessária e suficiente para que, em um grafo bipartido com partes X e Y , exista um emparelhamento que cubra todo Y .

Teorema 5.14 (Teorema de Hall [30]) *Seja H um grafo bipartido com partes X e Y . Existe um emparelhamento que cubra todos os vértices de Y em H se, e somente se, $|N(A)| \geq |A|$, para todo $A \subseteq Y$.*

Cabello e Jakovac [7] mostraram o seguinte lema com relação a grafos bipartidos com partes de mesmo tamanho.

Lema 5.15 (Cabello e Jakovac [7]) *Seja H um grafo bipartido com partes U e V tal que $|U| = |V|$ e seja u^* um vértice de U e v^* um vértice de V . Se $d(x) \geq |U|/2$ para todo $x \in U \cup V \setminus \{u^*, v^*\}$ e $d(u^*), d(v^*) > 0$, então H possui um emparelhamento perfeito.*

Demonstração: Seja $T \subseteq U$ um subconjunto não vazio de U . Mostraremos que $|N_H(T)| \geq |T|$. Temos quatro casos a considerar:

Caso 1: $|T| = 1$. Nesse caso $T = \{u\}$ para algum $u \in U$. Como $d_H(u) > 0$ temos que $|N_H(T)| = d_H(u) \geq 1 = |T|$.

Caso 2: $1 < |T| \leq \frac{|U|}{2}$. Então $|N_H(T)| \geq \max_{x \in T} \{d_H(x)\} \geq \frac{|U|}{2} \geq |T|$.

Caso 3: $\frac{|U|}{2} < |T| \leq |U| - 1$. Para todo $x \in V \setminus \{v^*\}$ temos que $d_H(x) \geq \frac{|U|}{2}$ e, assim, $N_H(x) \cap T \neq \emptyset$. Isso significa que $V \setminus \{v^*\} \subseteq N_H(T)$, que implica que $|N_H(T)| \geq |V| - 1 = |U| - 1 \geq |T|$.

Caso 4: $|T| = |U|$. Como $d_H(x) > 0$ para todo $x \in V$, segue que $|N_H(T)| = |V| = |T|$.

Combinando todos os casos e usando o *Teorema de Hall* completamos a prova. \square

Apresentamos em seguida dois lemas que utilizam o Lema 5.15 e que são usados para provar o Teorema 5.13.

Lema 5.16 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 6. Se $|D(G)| > m(G)$ e G não possui um conjunto bom, então $\chi_b(G) = m(G) - 1$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5.12, temos que $|D(G)| = m(G) + 1$. Mostraremos que G possui uma b -coloração com $m(G) - 1$ cores, obtendo uma b -coloração com a máxima quantidade de cores, de acordo com o Lema 5.3.

Sejam u e u' os vértices não densos circutados por subconjuntos de tamanho $m(G)$ de $D(G)$. Seja $k = \frac{|D(G)|}{2} - 1 = \frac{m(G)-1}{2}$ e $D(G) = N_1 \cup N_2$, tal que $N_1 = N_{D(G)}(u) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, x\}$ e $N_2 = N_{D(G)}(u') = D(G) \setminus N_1$. Dois vértices $v_i \in N_1$ e $v_j \in N_2$ são adjacentes se $j = i + k$, para todo $i \in [k]$ e $xx' \in E(G)$. Seja $V_i = N(v_i) \setminus (D(G) \cup \{u, u'\})$, para todo $i \in [2k]$. Como G tem cintura pelo menos 6, os conjuntos V_i e V_j são disjuntos dois a dois, para todo i diferente de j , e $V_i \cup V_j$ é um conjunto independente, para todo $v_i \in N_1$, para todo $v_j \in N_1 + v_{i+k}$, e para todo $v_i \in N_2$. Além disso, dados dois vértices não adjacentes $v_i \in N_1$ e $v_j \in N_2$, o grafo $G[V_i \cup V_j]$ define, no máximo, em relação a quantidade de arestas, um emparelhamento perfeito. A Figura 5.4 mostra os vértices densos (vértices escuros) organizados como descrito acima e suas respectivas vizinhanças.

Construímos uma coloração parcial ψ de G com $2k = m(G) - 1$ cores, de modo que v_i é o b -vértice da cor i , para todo $i \in [2k]$. Colorimos os pares (x, u') e (x', u) , respectivamente com as cores k e $2k$. Dessa forma, os vértices v_k, v_{2k}, x e x' possuem exatamente uma cor repetida em suas vizinhanças e, os demais vértices densos já coloridos, não possuem cores repetidas em suas vizinhanças em ψ .

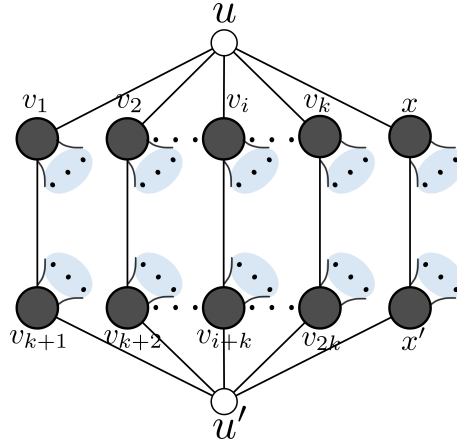


Figura 5.4: Coloração do caso 2 do Lema 5.16.

Vamos colorir agora os conjuntos V_i . Note que como $V_i \cup V_{i+k}$ é um conjunto estável, podemos colori-los de maneira independente. Como $d(v_i) = 2k$, para todo i , então V_k e V_{2k} devem ser coloridos com cores distintas em $C_k = C_{2k} = [2k] \setminus \{k, 2k\}$. Os demais conjuntos V_i devem ser coloridos com as cores em $C_i = [2k] \setminus \{i, 2k, i+k\}$, para $v_i \in N_1$, e com as cores $C_i = [2k] \setminus \{i, k, i-k\}$, para $v_i \in N_2$, de forma que exista uma única cor repetida em cada V_i . Assim, $|V_i| = 2k - 2$, para todo i , $|C_k| = |C_{2k}| = 2k - 2$ e $|C_i| = 2k - 3$, para todo $i \neq k, 2k$.

Distribuímos, iterativamente em $i = 1, \dots, k - 1$, simultaneamente as cores de C_i e C_{i+k} respectivamente aos vértices de V_i e V_{i+k} , de modo que algum $z_i \in V_i$ e algum $z'_{i+k} \in V_{i+k}$ permaneçam descoloridos. Assim, cada conjunto V_j , $j < i$, possuirá apenas um vértice não colorido e v_i será um b -vértice em ψ .

Assuma que estamos na i -ésima iteração e queremos colorir V_i (colorir V_{i+k} pode ser feito de maneira análoga). Já temos colorido $V_j \setminus \{z_j\}$ e $V_{j+k} \setminus \{z'_{j+k}\}$ para todo $j < i$. Considere o grafo bipartido H_i , onde uma parte consiste dos vértices $V_i \setminus \{z_i\}$, onde z_i é qualquer, e a outra parte consiste das cores C_i . Em H_i , um vértice $v \in V_i \setminus \{z_i\}$ é adjacente a cor $c \in C_i$ se e somente se v pode receber a cor c em ψ .

Em seguida, argumentamos que $d_{H_i}(v) \geq 2k - 2 - i$, para todo $v \in V(H_i)$. Como em G cada vértice $v \in V_i$ é adjacente a no máximo um vértice em V_{j+k} , para todo $j < i$, segue que v tem no máximo $i - 1$ vizinhos já coloridos com cores em C_i . Assim, $d_{H_i}(v) \geq (2k - 3) - (i - 1) = 2k - 2 - i$, para todo $v \in V_i$. Similarmente, para todo $j < i$, cada cor c aparece no máximo uma vez em cada V_{j+k} , pela construção da coloração parcial. Assim, cada cor c aparece em ψ na vizinhança de no máximo $i - 1$ vértices de V_i e, então, $d_{H_i}(c) \geq (2k - 3) - (i - 1) = 2k - 2 - i$.

Como o grau mínimo de H_i é $2k - 2 - i$ e cada classe da bipartição possui tamanho $2k - 3$, o Lema 5.15 garante que H_i possui um emparelhamento perfeito se $\delta(H_i) \geq 2k - 2 - i \geq (2k -$

3)/2. Essa condição é satisfeita quando $i \leq k - 1$. Com isso, até a $(k - 1)$ -ésima iteração, podemos encontrar um emparelhamento perfeito em H_i e usá-lo para colorir $V_i \setminus \{z_i\}$.

Resta colorirmos V_k e V_{2k} a fim de todos os vértices v_i se tornarem b -vértices. Considere H_k o grafo bipartido como definido anteriormente. Como cada vértice $v \in V_k$ é adjacente a no máximo um vértice em V_{j+k} , para todo $j < k$, então v tem no máximo $k - 1$ vizinhos já coloridos. Assim, $d_{H_k}(v) \geq (2k - 2) - (k - 1) = k - 1$, para todo $v \in V_k$. Analogamente, para todo $j < k$, cada cor c aparece no máximo uma vez em cada V_{j+k} e, assim, cada cor c é não adjacente a no máximo $k - 1$ vértices de V_k . Portanto, $d_{H_k}(c) \geq (2k - 2) - (k - 1) = k - 1$. Logo, $\delta(H_k) \geq k - 1$ e, utilizando o Lema 5.15, H_k possui um emparelhamento perfeito, já que $|V_k| = |C_k| = 2k - 2$ e $\delta(H_k) \geq k - 1 \geq (2k - 2)/2 = k - 1$. Portanto, podemos usar o emparelhamento obtido para colorir V_k . Da mesma forma podemos colorir V_{2k} .

Como os demais vértices não coloridos possuem grau no máximo $m(G) - 2$, a aplicação do procedimento guloso é suficiente para estender ψ ao grafo todo. Assim, obtemos uma b -coloração de G com $m(G) - 1$ cores, onde $D(G) \setminus \{x, x'\}$ é uma $(m(G) - 1)$ -base.

□

No próximo lema, iremos analisar o caso em que $|D(G)| = m(G)$ e o grafo não possui um conjunto bom, mas considerando que a cintura do grafo é pelo menos 7.

Lema 5.17 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 7. Se G não possui um conjunto bom e $|D(G)| = m(G)$, então $\chi_b(G) = m(G) - 1$.*

Demonstração:

Considere $m(G) = m$. Como $|D(G)| = m$ e G não possui um conjunto bom, então $D(G)$ circula algum vértice u . Pelo Lema 5.3, G não possui uma b -coloração com m . Mostraremos que G possui uma b -coloração com $m - 1$ cores. Defina $N_1 = N_{D(G)}(u)$ e $N_2 = D(G) \setminus N_1$. Seja ainda $D(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, tal que $v_1 \in N_2$ e $v_m \in N(v_1) \cap N_1$.

Seja $v_i \in D(G)$. Note que, como queremos obter uma b -coloração de G com $m - 1$ cores, alguns vértices na vizinhança de v_i podem ser coloridos facilmente, caso $d(v_i) > m - 1$ e os mesmos não estejam em um caminho de tamanho no máximo 3 entre vértices de $D(G)$. Portanto, vamos supor que $d(v_i) = m - 1$, para todo $i \in [m]$. Construimos uma b -coloração parcial ψ de G , de modo que $\psi(u) = 1$, $\psi(v_i) = i$, para todo $i \in [m] \setminus \{m\}$ e v_m recebe uma cor j para algum j tal que $v_j \in D(G) \setminus N(v_m)$ (tal j existe já que $d(v_m) = m - 1$ e $u \in N(v_m)$).

Sabemos que N_1 e N_2 são conjuntos estáveis e todo vértice de N_2 possui um único vizinho em N_1 . Seja $V_i = N(v_i) \setminus (D(G) \cup \{u\})$, para todo $i \in [m]$. Como G tem cintura pelo menos 7,

os conjuntos V_i são disjuntos dois a dois e, existe uma aresta entre $z \in V_i$ e $w \in V_j$, somente se $v_i, v_j \in N_2$ e $N_{N_1}(v_i) \neq N_{N_1}(v_j)$. Além disso, nenhuma outra aresta pode existir entre tais V_i e V_j . Podemos perceber também que cada vértice x em V_i tem no máximo um vizinho em $\bigcup_{v_j \in N(w)} V_j$, para todo v_i em N_2 e todo w em N_1 .

Defina $p = |N_2|$ e suponha, sem perda de generalidade, que $N_2 = \{v_1, \dots, v_p\}$. Seja ainda $A_i = \bigcup_{v_j \in N_2, j \neq i} V_j$, para todo $i \in [p]$. Escolhemos $z_i \in V_i$ que maximiza $|N_{A_i}(z_i)|$, para todo $i \in [p]$. Suponha, sem perda de generalidade, que existem $w_1, w_2, \dots, w_q \in N_1$ tais que $|N_{N_2}(w_i)| = p_i$ e que $v_{(1+\sum_{j<i} p_j)}, \dots, v_{(p_i-1+\sum_{j<i} p_j)} \subseteq N(w_i)$, para todo $i \in [q]$. Assim, podemos perceber que qualquer vértice $x \in V_j$, tal que $v_j \in N(w_i)$, possui no máximo $i-1$ vizinhos em $\bigcup_{k<j} V_k$.

Pelas observações anteriores, $|N_{A_i}(x)| \leq \lfloor m/2 \rfloor - 1 = \lfloor (m-2)/2 \rfloor$, para qualquer vértice $x \in \bigcup_{v_j \in N_2} V_j$, ocorrendo a igualdade somente quando cada vértice de N_1 possui um único vizinho em N_2 . Seja $V'_i = V_i \setminus \{z_i\}$ e considere o grafo bipartido H_i com partes V'_i e $C_i = [m-1] \setminus \{i, j\}$, onde $N_{N_1}(v_i) = \{v_j\}$. Primeiramente, vamos colorir os conjuntos V'_i com as cores de C_i , de modo que v_i se torne o b -vértice da cor i em ψ , para todo $i \in [p]$. Para isso, mostraremos que existe um emparelhamento perfeito em H_i utilizando o Lema 5.15.

Observe que $d_{H_i}(x) \geq m-3 - |N_{A_i}(x)|$, para todo H_i . Como vimos anteriormente, $|N_{A_i}(x)| \leq \lfloor (m-2)/2 \rfloor$, assim, se $|N_{A_i}(z_i)| \geq \lceil (m-3)/2 \rceil$, então $|N_{A_i}(x)| \leq \lfloor (m-2)/2 \rfloor - \lceil (m-3)/2 \rceil = 0$ e, caso contrário, pela escolha de z_i temos que $|N_{A_i}(x)| < \lceil (m-3)/2 \rceil$, para todo vértice $x \in V'_i$. Dessa forma, $|N_{A_i}(x)| < \lceil (m-3)/2 \rceil$, e, assim $d_{H_i}(x) \geq (m-3)/2$, para todo $x \in V'_i$. Logo, todo vértice x em V'_i é adjacente a no máximo $\lfloor (m-3)/2 \rfloor$ cores distintas de C_i em H_i .

Resta mostrar que as cores de C_i também satisfazem as restrições do Lema 5.15. Suponha que queremos colorir o conjunto V'_i e que já colorimos todos os conjuntos V'_j com as cores de C_j de modo que v_j se tornou o b -vértice da cor j , para todo $j < i$. Como cada cor $c \in C_i$ é utilizada no máximo uma vez em cada V'_j , temos que c é utilizada na vizinhança de no máximo $i-1$ vértices de V'_i . Se $i-1 > \lfloor (m-3)/2 \rfloor$, então todas as demais cores de C_i são utilizadas nas vizinhanças em menos de $\lfloor (m-3)/2 \rfloor$ vértices de V'_i . Portanto, $d_{H_i}(c') \geq (m-3)/2$, para todo $c' \neq c$. Resta mostrar que $d_{H_i}(c) > 0$. Suponha que $d_{H_i}(c) = 0$. Isso significa que, para todo vértice $x \in V'_i$, a cor c é utilizada em sua vizinhança e, assim, $|N_{A_i}(x)| \geq 1$. Assim, pela escolha de z_i , temos que $|N_{A_i}(z_i)| \geq 1$ e, portanto, todo o vértice de V_i , que possui cardinalidade $m-2$, possui um vizinho nos demais conjuntos V'_j . Mas, como existe no máximo $m-3$ outros tais conjuntos, temos que existe pelo menos duas arestas entre V'_i e algum V'_j , um absurdo.

Portanto, cada cor c' de C_i possui grau pelo menos $(m-3)/2$ em H_i , exceto por uma cor c , que possui grau positivo em H_i . Logo, pelo Lema 5.15, existe um emparelhamento perfeito em

todo H_i e podemos utilizá-lo para colorir V'_i , para todo $i \in [p]$

Os demais conjuntos V_i , tal que $v_i \in N_1 \setminus \{v_m\}$, podem ser coloridos de maneira independente de forma que todas as cores de $C_i = [m-1] \setminus \{1, i\}$ sejam utilizadas. Como os demais vértices não coloridos possuem grau no máximo $m-2$, a aplicação do procedimento guloso é suficiente para estender ψ ao todo G . Assim, obtemos uma b -coloração de G com $m-1$ cores, onde $D(G)$ é uma $(m-1)$ -base. \square

A demonstração do Teorema 5.13 passa a ser uma consequência dos Lemas 5.16 e 5.17.

Demonstração do Teorema 5.13 Como o grafo da Figura 5.2, abordado pelo Lema 5.16, não possui C_7 , temos que $\chi_b(G) = m(G) - 1$ se $|D(G)| > m(G)$ e, pelo Lema 5.17, temos o caso complementar em relação à cardinalidade de $D(G)$. Logo o resultado segue. \square

6 Conclusão

Neste trabalho, analisamos o problema de b -coloração de grafos, voltado aos grafos cuja cintura é grande. Com o objetivo de encontrar o valor de g^* no Problema 1.1, possibilitando obter resultados fortes em relação à famosa conjectura de Erdős-Faber-Lovász, analisamos os grafos que possuem um vértice circulado e cintura grande, grafos estes que, como vimos, não podem ser b -coloridos com $m(G)$ cores.

Conseguimos obter resultados parciais que avançam na pretensão de diminuir o valor conhecido atualmente de g^* de 9, provado por Campos, Farias e Silva [9], para 7, onde caracterizamos os grafos com cintura pelo menos 6 e que não possuem um conjunto bom. Mostramos que tal caracterização permitia apenas duas situações com respeito à cardinalidade do conjunto $D(G)$ de vértices densos de um grafo G : $D(G) = m(G)$ ou $D(G) = m(G) + 1$ e, neste último caso, o grafo $G[D(G)]$ possui uma estrutura muito particular, mostrada na Figura 5.2, que facilita sua análise.

Mostramos como b -colorir com $m(G) - 1$ cores, ou seja, de maneira ótima, os grafos com cintura pelo menos 6 e sem conjunto bom, restritos ao caso em que $|D(G)| = m(G) + 1$. Como vimos, a estrutura encontrada nesta situação, onde a vizinhança de um vértice denso v_i pode ter emparelhamentos a no máximo $\lfloor \frac{m(G)-1}{2} \rfloor$, possibilitou utilizarmos uma estratégia de coloração semelhante à utilizada por Cabello e Jakovac [7] para grafos d -regulares.

Já no caso em que $|D(G)| = m(G)$, a mesma garantia sobre as relações entre as vizinhanças de vértices densos não existe. Ou seja, dado um vértice denso v_i , pode existir emparelhamentos entre a vizinhança de v_i e mais do que $\lfloor \frac{m(G)-1}{2} \rfloor$ vizinhanças de outros vértices densos. Podemos ver isso na Figura 6.1 em relação a vizinhança de v_1 e as demais $m(G) - 2$.

Ao analisarmos os grafos G com cintura pelo menos 7 e que não possuem um conjunto bom, conseguimos b -colorir tais grafos com $m(G) - 1$, portanto, também de maneira ótima. Combinando os dois resultados parciais anteriores, mostramos nosso resultado principal, podemos b -colorir os grafos G com cintura pelo menos 7 e sem conjunto bom com $m(G) - 1$ cores.

Nosso resultado é um passo importante para diminuir o valor de g^* para 7. Porém, resta

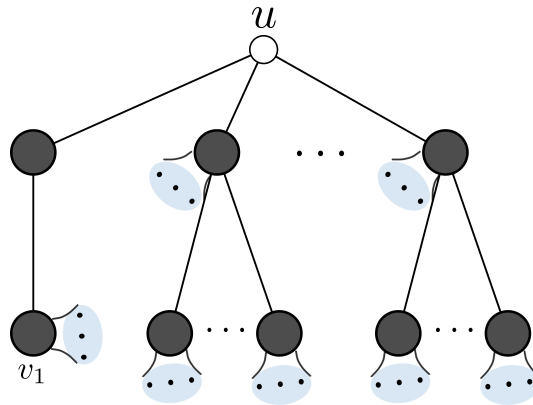


Figura 6.1: Vértice circulado por $D(G)$.

analisar o caso em que tais grafos G possuem um conjunto bom W . Denotando $L = \{v \in V(G) \setminus W : |N_W(v)| \geq 2\}$, acreditamos que exista uma ordem de coloração dos vértices de L , de modo que podemos colorir $G[W \cup L]$ tal que $w_i \in W$ é colorido com a cor i , para todo $i \in [m(G)]$ e nenhuma cor é repetida na vizinhança de w_i (essa última suposição é necessária, já que os vértices de W podem ter grau $m(G) - 1$). Além disso, essa coloração parcial pode ser estendida de modo a colorir as vizinhanças dos vértices w_i , de modo que w_i seja o b -vértice da cor i . Encontrar essa ordem e tentar diminuir o valor de g^* para 6 ou 5 é um trabalho futuro.

Índice Remissivo

- a*-coloração, 22
- b*-coloração, 10, 21
- b*-vértice, 21
- m*-grau, 26
- árvore, 11, 17
 - pivoteada, 29
- Algoritmo guloso de coloração, 23
- arestas, 15
 - adjacentes, 15
 - emparelhadas, 16
 - incidentes a um vértice, 15
 - múltiplas, 15
- base de uma *b*-coloração, 27
- caminho, 16
 - xy*-caminho, 17
 - induzido, 16
 - internamente disjunto, 17
- ciclo, 16
 - induzido, 16
- cintura, 11, 16
- classe de cor, 10, 18
- clique, 16
- coloração, 18
 - própria, 9, 18
- complemento de um grafo, 16
- componentes de um grafo, 17
- conectividade, 17
 - local, 17
- conjunto
 - bom, 31, 39
 - estável, 16
 - independente, 16
- Conjunto bom, 39
- conjunto independente, 10
- cor, 18
- corda, 16
- diâmetro, 17
- distância, 17
- emparelhamento, 16
 - perfeito, 16
- espectro *b*-cromático, 25
- Estratégia
 - a* de coloração, 10
 - b* de coloração, 10
- extremidades de uma aresta, 15
- grafo, 15
 - b*-contínuo, 25
 - b*-perfeito, 28
 - k*-conexo, 17
 - acíclico, 16
 - bipartido, 11, 17
 - bipartido completo, 17
 - cúbico, 18
 - completo, 16
 - conexo, 17
 - cordal, 31
 - crítico, 26
 - de Petersen, 12
 - desconexo, 17
 - estrela, 17
 - regular, 18
 - simples, 15
 - trivial, 16
 - vazio, 16
- grau de um vértice, 16
- Heurística
 - gulosa de coloração, 9
- laço, 15
- número
 - a*-cromático, 22
 - b*-cromático, 10, 21

- cromático, 9, 18
- de Grundy, 10, 23
- partição de um conjunto, 17
- problema
 - 3-COLORABILIDADE DE ARESTAS, 28
 - B-COLORAÇÃO, 27
 - COBERTURA EXATA POR 3-CONJUNTOS, 28
 - NÚMERO B-CROMÁTICO, 27
- produto lexicográfico, 34
- subgrafo, 16
 - induzido, 16
- tamanho de um
 - caminho, 16
 - ciclo, 16
- vérice
 - denso, 12
- vértice
 - adjacente a uma classe de cor, 18
 - adjacente a uma cor, 18
 - alcançado, 38
 - circulado, 30, 38
 - coberto, 16
 - denso, 26
 - pivô, 29
- vértices, 15
 - adjacentes, 15
 - conectados, 17
 - extremidades, 17
 - incidentes a uma aresta, 15
 - intermediários, 17
- vizinhança, 15

Referências Bibliográficas

- [1] BALAKRISHNAN, R., AND KAVASKAR, T. b -coloring of Kneser graphs. *Discrete Appl. Math.* 160, 1-2 (2012), 9–14.
- [2] BLIDIA, M., MAFFRAY, F., AND ZEMIR, Z. On b -colorings in regular graphs. *Discrete Appl. Math.* 157, 8 (2009), 1787–1793.
- [3] BOLLOBÁS, B. *Modern graph theory*, vol. 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [5] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph theory*, vol. 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [6] BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37 (1941), 194–197.
- [7] CABELLO, S., AND JAKOVAC, M. On the b -chromatic number of regular graphs. *Discrete Appl. Math.* 159, 13 (2011), 1303–1310.
- [8] CAIRNIE, N., AND EDWARDS, K. Some results on the achromatic number. *J. Graph Theory* 26, 3 (1997), 129–136.
- [9] CAMPOS, V., FARIAS, V., AND SILVA, A. b -coloring graphs with large girth. *Journal of the Brazilian Computer Society* 18 (2012), 375–378.
- [10] CAMPOS, V., SALES, C. L., MAFFRAY, F., AND SILVA, A. b -chromatic number of cacti. In *LAGOS'09—V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*, vol. 35 of *Electron. Notes Discrete Math.* Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009, pp. 281–286.
- [11] CAMPOS, V., SALES, C. L., MAIA, A., AND SAMPAIO, R. On b -colorings of graphs with few P_4 's. In *Annals of 8th French Combinatorial Conference* (Orsay, France, 2010), pp. 1–1.
- [12] CHAITIN, G. J., AUSLANDER, M. A., CHANDRA, A. K., COCKE, J., HOPKINS, M. E., AND MARKSTEIN, P. W. Register allocation via coloring. *Computer Languages* 6, 1 (1981), 47 – 57.
- [13] CHAOUICHE, F. A., AND BERRACHEDI, A. Some bounds for the b -chromatic number of a generalized Hamming graphs. *Far East J. Appl. Math.* 26, 3 (2007), 375–391.
- [14] CHAUDHARY, A., AND VISHWANATHAN, S. Approximation algorithms for the achromatic number. *J. Algorithms* 41, 2 (2001), 404–416.

- [15] CHRISTEN, C. A., AND SELKOW, S. M. Some perfect coloring properties of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 27, 1 (1979), 49–59.
- [16] CORTEEL, S., VALENCIA-PABON, M., AND VERA, J.-C. On approximating the b -chromatic number. *Discrete Appl. Math.* 146, 1 (2005), 106–110.
- [17] DEKAR, L., AND KHEDDOUCI, H. A graph b -coloring based method for composition-oriented web services classification. In *Proceedings of the 17th international conference on Foundations of intelligent systems* (Berlin, Heidelberg, 2008), ISMIS'08, Springer-Verlag, pp. 599–604.
- [18] EFFANTIN, B. The b -chromatic number of power graphs of complete caterpillars. *J. Discrete Math. Sci. Cryptogr.* 8, 3 (2005), 483–502.
- [19] EFFANTIN, B., AND KHEDDOUCI, H. The b -chromatic number of power graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 6, 1 (2003), 45–54.
- [20] EFFANTIN, B., AND KHEDDOUCI, H. Exact values for the b -chromatic number of a power complete k -ary tree. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography* 8, 1 (2005), 117–129.
- [21] EFFANTIN, B., AND KHEDDOUCI, H. A distributed algorithm for a b -coloring of a graph. In *Proceedings of the 4th international conference on Parallel and Distributed Processing and Applications* (Berlin, Heidelberg, 2006), ISPA'06, Springer-Verlag, pp. 430–438.
- [22] EL SAHILI, A., AND KOUIDER, M. About b -colouring of regular graphs. *Util. Math.* 80 (2009), 211–215.
- [23] ELGHAZEL, H., DESLANDRES, V., HACID, M.-S., DUSSAUCHOY, A., AND KHEDDOUCI, H. A new clustering approach for symbolic data and its validation: Application to the healthcare data. In *Foundations of Intelligent Systems*, F. Esposito, Z. Raś, D. Malerba, and G. Semeraro, Eds., vol. 4203 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 2006, pp. 473–482.
- [24] ERDŐS, P. Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. In *Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977)*. Academic Press, New York, 1979, pp. 153–163.
- [25] ERDŐS, P. On the combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica* 1, 1 (1981), 25–42.
- [26] FAIK, T. About the b -continuity of graphs (extended abstract). In *Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, vol. 17 of *Electron. Notes Discrete Math.* Elsevier, Amsterdam, 2004, pp. 151–156 (electronic).
- [27] FAIK, T. *La b -continuité des b -colorations: complexité, propriétés structurelles et algorithmes*. PhD thesis, Université Paris XI, Orsay, 2005.
- [28] GACEB, D., EGLIN, V., LEBOURGEOIS, F., AND EMPTOZ, H. Graph b -coloring for automatic recognition of documents. In *Proceedings of the 2009 10th International Conference on Document Analysis and Recognition* (Washington, DC, USA, 2009), ICDAR '09, IEEE Computer Society, pp. 261–265.

- [29] GAREY, M. R., AND JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.
- [30] HALL, P. On representatives of subsets. *Journal of the London Mathematical Society s1-10*, 1 (1935), 26–30.
- [31] HARARY, F., AND HEDETNIEMI, S. The achromatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Theory* 8, 2 (1970), 154 – 161.
- [32] HARARY, F., HEDETNIEMI, S., AND PRINS, G. An interpolation theorem for graphical homomorphisms. *Portugal. Math.* 26 (1967), 453–462.
- [33] HAVET, F., LINHARES SALES, C., AND SAMPAIO, L. b -coloring of tight graphs. *Discrete Appl. Math.* 160, 18 (2012), 2709–2715.
- [34] HOÀNG, C. T., MAFFRAY, F., AND MECHEBBEK, M. A characterization of b -perfect graphs. *J. Graph Theory* 71, 1 (2012), 95–122.
- [35] HOLYER, I. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.* 10, 4 (1981), 718–720.
- [36] HOÀNG, C. T., AND KOUIDER, M. On the b -dominating coloring of graphs. *Discrete Applied Mathematics* 152, 1–3 (2005), 176 – 186.
- [37] IRVING, R. W., AND MANLOVE, D. F. The b -chromatic number of a graph. *Discrete Appl. Math.* 91, 1-3 (1999), 127–141.
- [38] J. KÁRA, J. KRATOCHVÍL, M. V. b -continuity. Tech. Rep. M14/04, Faculty for Mathematics and Natural Science, Technical University Ilmenau, 2004.
- [39] JAKOVAC, M., AND KLAVŽAR, S. The b -chromatic number of cubic graphs. *Graph. Comb.* 26, 1 (Jan. 2010), 107–118.
- [40] JAVADI, R., AND OMOOMI, B. On b -coloring of the kneser graphs. *Discrete Mathematics* 309, 13 (2009), 4399 – 4408.
- [41] JAVADI, R., AND OMOOMI, B. On b -coloring of cartesian product of graphs. *Ars Combinatoria* (2011). To appear.
- [42] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972)*. Plenum, New York, 1972, pp. 85–103.
- [43] KOUIDER, M. b -chromatic number of a graph, subgraphs and degrees. *Res. Rep.* 1392 (2004).
- [44] KOUIDER, M., AND MAHÉO, M. Some bounds for the b -chromatic number of a graph. *Discrete Math.* 256, 1-2 (Sept. 2002), 267–277.
- [45] KOUIDER, M., AND ZAKER, M. Bounds for the b -chromatic number of some families of graphs. *Discrete Mathematics* 306, 7 (2006), 617 – 623.

- [46] KRATOCHVÍL, J., TUZA, Z., AND VOIGT, M. On the b -chromatic number of graphs. In *Graph-theoretic concepts in computer science*, vol. 2573 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* Springer, Berlin, 2002, pp. 310–320.
- [47] LIN, W.-H., AND CHANG, G. J. b -coloring of tight bipartite graphs and the erdős–faber–lovász conjecture. *Discrete Applied Mathematics* (2012). In Press.
- [48] LUND, C., AND YANNAKAKIS, M. On the hardness of approximating minimization problems. *J. Assoc. Comput. Mach.* 41, 5 (1994), 960–981.
- [49] MAFFRAY, F., AND PREISSMANN, M. Sequential colorings and perfect graphs. *Discrete Appl. Math.* 94 (May 1999), 287–296.
- [50] MAFFRAY, F., AND SILVA, A. b -colouring outerplanar graphs with large girth. *Discrete Math.* 312, 10 (2012), 1796–1803.
- [51] RAJ, S. F., AND BALAKRISHNAN, R. Bounds for the b -chromatic number of vertex-deleted subgraphs and the extremal graphs. In *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009)*, vol. 34 of *Electron. Notes Discrete Math.* Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009, pp. 353–358.
- [52] SHAEBANI, S. On the b -chromatic number of regular graphs without 4-cycle. *Discrete Appl. Math.* 160, 10-11 (2012), 1610–1614.
- [53] SILVA, A. S. F. *The b -chromatic number of some tree-like graphs*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, Grenoble, 2010.
- [54] ZAKER, M. Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australas. J. Combin.* 31 (2005), 325–329.