



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FRANCISCO WAGNER VASCONCELOS DA COSTA

EFEITOS DE FLUXO GEOMÉTRICO SOBRE O  
CAMPO VETORIAL DE CALIBRE EM SEIS  
DIMENSÕES

FORTALEZA  
JANEIRO DE 2015

FRANCISCO WAGNER VASCONCELOS DA COSTA

# Efeitos de Fluxo Geométrico sobre o Campo Vetorial de Calibre em Seis Dimensões

Tese apresentada ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Fortaleza

Janeiro de 2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- C872e Costa, Francisco Wagner Vasconcelos da.  
Efeitos de fluxo geométrico sobre o campo vetorial de calibre em seis dimensões / Francisco Wagner Vasconcelos da Costa. – 2015.  
74 f. : il., p&b.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2015.  
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
1. Cenário de Branas. 2. Campo de Gauge. 3. Conifold resolvido. 4. Fluxo de Ricci. I. Título.
- CDD 530
-


**FRANCISCO WAGNER VASCONCELOS DA COSTA**


**EFEITOS DE FLUXO GEOMÉTRICO SOBRE O CAMPO VETORIAL DE CALIBRE  
EM SEIS DIMENSÕES**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 21 / 1 / 2015 .


**BANCA EXAMINADORA**


  
Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
Dr. José Abdalla Helayel Neto  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

  
Dr. Álvaro de Souza Dutra

 UNESP  


  
Dr. José Euclides Gomes da Silva  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

## RESUMO

Esta tese tem como objetivo principal fornecer uma contribuição ao cenário de branas. Para isso propomos dois cenários distintos que estendem modelos encontrados na literatura. A razão pela qual o cenário de branas tem sido bastante explorado nos últimos anos, deve-se principalmente ao fato de que este ramo está intimamente relacionado a questões fundamentais em física de partículas, tais como: o problema da hierarquia, a assimetria matéria e anti-matéria e o problema da constante cosmológica. Uma vez que a relação entre a Física e a geometria do espaço ambiente multidimensional no qual nosso mundo está imerso tem uma relação muito forte, torna-se de fundamental interesse verificar as possíveis influências que essa geometria pode ter sobre as propriedades físicas de nossa brana. Em princípio, não sabemos como os mais diversos campos do modelo padrão serão afetados por mudanças geométricas do espaço ambiente. O campo utilizado como objeto de estudo é o vetorial de calibre, uma vez que este não é originalmente localizado no modelo de Randall-Sundrum descrito por sua ação usual. Como primeira proposta, analisamos o comportamento do campo vetorial quando inserido em um espaço ambiente de seis dimensões em que a variedade transversa é uma seção do conifold resolvido. Este cenário representa uma extensão do cenário de branas denominado tipo corda e possui como principal característica a presença de um fator geométrico, o parâmetro de resolução, que pode ser utilizado para regular a singularidade na origem, os modos de massa e o potencial associado aos modos de Kaluza-Klein. A segunda proposta baseia-se numa solução estacionária do fluxo de Ricci conhecida como sóliton charuto de Hamilton. Este cenário, além de promover a suavização das soluções, satisfaz todas as condições de regularidade para a métrica na origem. Representando assim, uma solução interna e externa ao defeito do tipo corda.

**Palavras-chave:** Cenário de branas, Campo de gauge, Conifold resolvido, Fluxo de Ricci.

# ABSTRACT

This work aims to provide a contribution to the brane world scenario. In order to accomplish this, we propose two different scenarios that extend models already known in the literature. This issue has been extensively explored in recent years due to the fact that the field is closely related to fundamental questions in particle physics such as the problem of hierarchy, asymmetry matter and antimatter and the cosmological constant problem. Since the relationship between physics and geometry of the multidimensional spacetime has a very strong relationship, it is of fundamental interest to verify the possible influences that this geometry has on the physical properties of our brane. In principle, we do not know how the standard model fields are affected by geometrical changes in the environment space. The field used as the object of study is the vector one, since it is not originally localized in the Randall-Sundrum model described by its usual action. In the first proposal we analyze the vector field behavior in a spacetime built as a direct product of a 3-brane and a section of the resolved conifold. This scenario is an extension of the brane scenario called string-like and has a remarkable characteristic, the presence of a geometric factor, the resolution parameter, which can be used to regulate singularities at the origin, massive modes and the potential associated with the Kaluza-Klein modes. The second proposal is based on a steady-state solution of the Ricci flow known as Hamilton soliton cigar. This scenario, in addition to promoting the smoothing of solutions, fulfills all the conditions of regularity at the origin. Thus representing an internal and external solution to the default string-like type.

**Keywords:** Braneworld, Vector field, Resolved Conifold, Ricci Flow.

# AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Clevandira e Maia, irmãos, Fagner e Roberto pelo carinho, pelos momentos bons e o enorme apoio durante esta jornada. Em especial, a minha esposa Jaqueline e filha Karenina pela paciência sem limites.

Ao professor Carlos Alberto, pela valiosa orientação, amizade e pela confiança depositada na minha pessoa. Sem seu apoio não teria sido possível a concretização deste trabalho. Meu mais profundo agradecimento.

Aos membros da banca examinadora, por terem aceito o convite e disporem de seu tempo para análise deste trabalho.

Aos meus amigos do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes (LASSCO), pela amizade e inúmeras trocas de conhecimento: Alex, Davi, Diego, Euclides, Hudson, Ivan, Júlio, Luís, Luciana, Roberto, Samuel e Victor. Em especial meus mais sinceros agradecimentos ao Davi, Euclides e Victor pela constante troca de informações e incontáveis auxílios. Peço desculpas se por ventura deixei de mencionar alguém.

Aos amigos que fiz durante a graduação, em especial, aos meus colegas de graduação Aristeu Rosendo, Bruno Abagaro, Bruno Bastos, Claudio Lucas, Ednilson, Felipe Munarin, Francisco Franciné, Francisco Valderlan, Kátia Cristine, Karlo David, Leandro Ibiapina, Victor Hugo. Aprendi muito com vocês.

Aos meus professores pelo aprendizado, em especial, Antônio Siqueira, Carlos Alberto, Cleuton Freire, Eloneid Felipe, Ilde Guedes, José Evangelista, Júlio Auto, Maria Marlúcia, Maria José, Marcos Sasaki, Murilo Pereira, Newton Theóphilo, Ricardo Renan, Josué Mendes.

A coordenação do curso de Pós-Graduação em Física.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

*Aos meus pais, minha esposa e filha.*

*- Querido - disse Valentine -, o conde não acaba de nos dizer que a sabedoria humana cabe inteira em duas palavras?*

*"Esperar e ter esperança."*

Alexandre Dumas

# Sumário

<b>1</b>	<b>Motivações</b>	<b>5</b>
1.1	Por que estudar dimensões extras? . . . . .	6
1.2	O Modelo Padrão de Partículas . . . . .	8
1.3	O Problema da Hierarquia . . . . .	10
1.4	O Problema da Constante Cosmológica . . . . .	11
1.5	O Problema da Matéria Escura . . . . .	12
1.6	Mundo de Branas . . . . .	12
1.7	A Proposta da Tese . . . . .	13
1.8	Roteiro . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Kaluza Klein e Modelos de Branas</b>	<b>15</b>
2.1	Teoria de Kaluza-Klein(KK) . . . . .	15
2.2	O modelo ADD . . . . .	18
2.3	O modelo de Randall-Sundrum . . . . .	20
2.3.1	RS1 . . . . .	21
2.3.2	Resolvendo o problema da hierarquia . . . . .	24
2.3.3	RS2 . . . . .	25
2.4	Mundo em 5 Dimensões . . . . .	26
2.4.1	Campo de Gauge na Membrana Deformada . . . . .	26
2.4.2	Campo de Gauge com Acoplamento Geométrico . . . . .	28
2.5	Mundo em 6 Dimensões . . . . .	29
2.5.1	Modelo Ghergheta-Shaposhnikov . . . . .	29
2.5.2	Modelo Oda . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Conifold Resolvido</b>	<b>33</b>
3.1	Variedades Cônicas . . . . .	33
3.1.1	Conifold Singular . . . . .	33
3.1.2	Conifold Deformado . . . . .	36
3.1.3	Conifold Resolvido . . . . .	38
3.2	Construção do Cenário . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Campos de Gauge no Conifold Resolvido</b>	<b>46</b>
4.1	Sobre a Localização . . . . .	47
4.2	Modo Zero . . . . .	49
4.3	Modos Massivos . . . . .	51
4.4	Potencial Quântico . . . . .	52
4.5	Discussão dos Resultados . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Campos de Gauge em um Cenário do tipo Corda-Charuto</b>	<b>55</b>
5.1	Fluxo de Ricci: o que é? . . . . .	56
5.2	Sóliton charuto de Hamilton . . . . .	57
5.3	Construção do cenário corda-charuto . . . . .	59
5.3.1	Localização do Campo Vetorial de Calibre . . . . .	61
5.3.2	Modos não-massivos . . . . .	64
5.3.3	Modos massivos . . . . .	65
5.4	Discussão dos Resultados . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>68</b>
6.1	Sobre o cenário conifold resolvido . . . . .	68
6.2	Sobre o cenário corda-charuto . . . . .	69

# Lista de Figuras

2.1	Representação da compactificação cilíndrica proposta por Kaluza para a quinta coordenada. . . . .	16
2.2	Compactificação em círculo. Orbifold $S^1/Z_2$ com ponto fixo em $y = 0$ . . . .	17
2.3	Configuração do modelo de Randall-Sundrum com duas branas na presença de um espaço $AdS_5$ . . . . .	21
2.4	Descrição pictórica do modelos RS do tipo um. A brana em $y = L$ representa nosso universo observável e em $y = 0$ a brana escondida ou de Planck. O decaimento exponencial entre elas é responsável por ajustar as escalas de Planck e Eletrofraca. . . . .	24
2.5	$U^2(y)$ para alguns valores de $p$ . Os valores $p = 1$ (linha cheia), $p = 3$ (linha fina) e $p = 5$ (linha pontilhada) são exibidos. . . . .	28
3.1	O conifold deformado à esquerda se aproxima do conifold resolvido ao centro à medida que seu topo $S^3$ paralelo a base do cone é deformado continuamente até zero. O conifold resolvido a direita é obtido a partir do conifold singular ao centro por expansão de seu topo numa direção paralela a sua base $S^2$ . . . . .	34
3.2	Curvatura escalar para $\mathcal{C}_2$ para alguns valores de $a$ . Para $a = 1$ (linha cheia) e $a = 0.5$ (linha tracejada). . . . .	40
3.3	Mudança da coordenada radial no cone resolvido $\mathcal{C}_2$ . A inclinação do gráfico para $a = 10$ (linha cheia) é menor do que aquela para $a = 0$ (linha pontilhada). . . . .	41
3.4	Mudança de variável radial na transformação inversa. Para $a = 10$ (linha cheia) e $a = 0$ (linha tracejada). . . . .	41
3.5	Fator de <i>warp</i> para $c = 1$ (linha cheia). O fator de <i>warp</i> para corda fina(linha pontilhada) também foi incluído para efeito de comparação. . . .	43
3.6	Componente angular da métrica para $c = 1$ . Para $a = 0$ (linha tracejada) temos a singularidade cônica. Para $a = 1$ e $a = 2$ linhas fina e linha cheia, respectivamente, o comportamento é suave. O comportamento para corda fina(linha pontilhada) também foi incluído. . . . .	44
3.7	Curvatura escalar do espaço ambiente para $\hat{R} = 0$ e $c = 1$ . Note que a geometria é suave comportando-se assintoticamente como $AdS_6$ . . . . .	45

4.1	$\chi_0(r, a)$ para $c = 1$ e $a = 1$ (linha tracejada), $a = 0, 1$ (linha fina), $a = 0$ (linha cheia). Note que, a curva para modo zero de defeitos do tipo corda está presente para efeito de comparação (linha pontilhada). . . . .	50
4.2	$\chi(r, n)$ para alguns valores de $n$ . Para $n = 0$ (linha cheia), $n = 2$ (linha tracejada) e $n = 4$ (linha pontilhada). . . . .	52
4.3	$V(r, a)$ para alguns valores de $a$ e $c = 1$ . Os valores $a = 0$ (linha cheia), $a = 0.5$ (linha tracejada) e $a = 3$ (linha pontilhada) são exibidos. . . . .	54
5.1	Componente angular da métrica $\gamma(r, k)$ para um defeito tipo-corda fina (linha tracejada) e para a solução tipo corda-charuto (linha cheia). . . . .	60
5.2	Escalar de Ricci para o espaço ambiente $\mathcal{M}_6$ . A variedade é livre de singularidades e converge para um espaço $AdS_6$ assintoticamente. . . . .	61
5.3	Potencial $U_k(r)$ para alguns valores de $k$ . . . . .	64
5.4	Modos não massivos para o cenário corda-charuto e corda-fina (caixa menor) para alguns valores de $c$ , como indicado na figura. Note que tomamos $k = c$ , para o cenário corda-charuto, de modo a não sobrecarregar a figura. . . . .	65

# Capítulo 1

## Motivações

Uma vez que nossas experiências diárias parecem indicar que o mundo que nos cerca apresenta apenas quatro dimensões, três espaciais e uma temporal, e que não há indícios, pelo menos, aparentes, que dimensões espaciais adicionais (as novas coordenadas não necessariamente precisam ser espaciais) existam, somos levados à simples questão: Por que estudar dimensões extras?

Nos últimos anos, o assunto relacionado a dimensões extras voltou a despertar interesse entre os físicos, tornando-se uma área bastante ativa de pesquisa. Além disso, a possibilidade de modificar a dimensionalidade da natureza tem-se mostrado irresistivelmente atraente para os físicos com o passar dos anos. A principal razão para isto é que fenômenos novos podem se manifestar de maneira mais simples quando inseridos em estruturas de dimensões maiores do que a experimentada por nós, seres quadridimensionais. Embora um universo quadridimensional seja provido de características bem peculiares tais como a renormalizabilidade das teorias de gauge das interações fraca, eletromagnética e fraca, a maioria dos físicos concorda que uma nova Física deva existir além daquela descrita pelo Modelo Padrão [1]. Este último é capaz de uma descrição completa das partícula e forças que moldam nosso universo concedendo uma notável maneira de confrontar experimento e teoria.

Até o surgimento da teoria da relatividade, parecia fora de cogitação que o universo em que vivemos tivesse mais que três dimensões. Somente com o trabalho pioneiro de Kaluza-Klein e recentemente, com o advento da teoria de cordas o assunto relacionado a dimensões extras voltou a tona pois, esta última requer a existência de dez ou onze dimensões adicionais. Dessas dez, quatro são as dimensões conhecidas do espaço-tempo, enquanto as outras estão compactadas em uma escala da ordem do comprimento de Planck, ou seja,  $10^{-33}$ cm, de modo a acomodar tanto o eletromagnetismo quanto as forças nucleares. De maneira que todas essas forças poderiam se combinar, em princípio, com a gravitação em uma forma fundamental única.

Na verdade, uma série de modelos incorporando dimensões extras têm sido sugeridos e poderiam, em princípio, ser postos à prova nas próximas gerações de aceleradores, no LHC (*large hadron collider*) e ILC (*international linear collider*), por exemplo. Estes

modelos fornecem soluções para alguns problemas fundamentais presentes no Modelo Padrão, em especial, o problema da hierarquia. Nas próximas seções, nós consideraremos alguns destes destes problemas em maiores detalhes.

## 1.1 Por que estudar dimensões extras?

Ao longo dos séculos, o desenvolvimento em Física tem sido marcado por diversas unificações. Em termos atuais, por descobertas de simetrias mais fundamentais da Natureza. Diferentes fenômenos aparentemente não correlacionados foram reconhecidos como relacionados e teorias reajustadas de modo a refletir tal reconhecimento. A primeira pessoa que sem tem registro a mencionar que todos os fenômenos físicos deveriam possuir uma origem comum, isto é, são regidos pelas mesmas leis foi Al-Burini (973-1052) polímata que viveu no Afeganistão a cerca de mil anos atrás. Posteriormente, Galileu-Galilei (1564-1642) seis séculos mais tarde inspecionando as sombras de montanhas projetadas sobre a superfície da lua constatou que as mesmas, obedeciam a leis análogas as das sombras observadas na superfície da Terra (simetria galileana). Desse experimento resulta que os fenômenos ópticos não são alterados pelo movimento da Terra.

Já por volta do ano de 1680, Isaac Newton (1642-1727), estabeleceu a partir de um enunciado correto e claro que o tipo de interação que mantém os corpos conectados à Terra é de mesma origem que a que mantém os corpos celestes em movimento em torno do Sol. Em consequência, Isaac Newton acabou por introduzir uma nova constante fundamental da natureza simbolizada hoje em dia por  $G$ . Além disso, Newton despertou um movimento de pesquisa intensa no sentido de verificar se leis idênticas não existiriam noutros campos da Física. E assim o foi com as leis das cargas elétricas.

Até antes de 1820, eletricidade e magnetismo eram consideradas forças distintas. Somente 150 anos após Newton, Michael Faraday (1791-1862) e André-Marie Ampère (1775-1836) propuseram a maior unificação dos tempos modernos entre interações fundamentais. Esses foram os primeiros a mostrar que ambas não passavam de dois aspectos da mesma interação. A unificação da eletricidade e magnetismo serviu de fundamento para todo o desenvolvimento tecnológico do século XIX, cujos princípios básicos, baseavam-se em correntes elétricas e rotações de bobinas entre pólos de magnetos. Em consequência, o atraso em relação às máquinas a vapor foi rapidamente recuperado.

Por volta de 1860 o eletromagnetismo atingiu seu ápice com os trabalhos de James Clerk Maxwell (1831-1879) que forneceu uma unificação da própria óptica com o eletromagnetismo. Maxwell além de fornecer um conjunto consistente de equações que unificam eletricidade e magnetismo, foi capaz de mostrar que cargas aceleradas emitem radiação. Posteriormente, com o uso de aparato rudimentar pode verificar que a velocidade da luz poderia ser expressa em termos de duas constantes universais. Como consequência, o eletromagnetismo, cujo conceito de campo originalmente empregado como ferramenta matemática na mecânica Newtoniana passou a ocupar papel mais relevante na descrição

física de nosso mundo. Infelizmente, Maxwell, aluno do próprio Faraday, morreu antes que seus resultados fossem verificados experimentalmente, resultados estes demonstrados em 1887 por Heinrich-Hertz (1857-1894), dez anos após sua morte na Alemanha.

O eletromagnetismo serviu como peça fundamental na descoberta da Mecânica Quântica, pois este em conjunto com a termodinâmica era incapaz de fornecer a distribuição correta de energia em termos da frequência. O sucesso da mecânica quântica na descrição de fenômenos microscópicos deve-se aos esforços conjuntos de Erwin Schrödinger (1887-1961), Werner Heisenberg (1901-1976), Paul Dirac (1902-1984) e muitos outros. Esta última fornece quais as regras necessárias às teorias de modo a extrair previsões físicas.

Mais tarde, impulsionado pelo sucesso do eletromagnetismo uma vez que este possuía quase três séculos de previsões bem confirmadas, Albert Einstein (1879-1955) promoveu a fusão entre os conceitos de espaço e tempo em uma estrutura quadridimensional única. Sua teoria especial da relatividade de 1905 situa espaço e tempo em pé de igualdade. Esta notável unificação conceitual de noções aparentemente desconectadas fez com que a mecânica newtoniana fosse substituída pela mecânica relativística. Além disso, a noção de tempo absoluto e espaço absoluto foi então abandonada. Já em sua teoria da relatividade geral de 1915 Einstein foi ainda mais longe através de seu programa de geometrização da Física, no sentido de que, uma das quatro interações conhecidas (a gravitacional) hoje tem uma origem geométrica, a qual pode ser explicada a partir do que chamamos hoje de curvatura do espaço-tempo.

Embora fosse uma ideia nova para a maioria das pessoas na época, o pensamento de Einstein tinha um precedente. O próprio Friederich-Gauss (1777-1855), cem anos antes havia tentado através de experimentos com medidas de ângulos em triângulos, medir a curvatura do espaço. No entanto, encontrou um resultado nulo haja visto que trabalhou com distâncias de algumas milhas e não com distâncias estelares. A teoria da relatividade de Einstein fez reviver a ideia de que espaço e tempo eram curvos. O próximo passo foi dado pelo astrofísico russo Alexander Friedmann (1888-1925) que descobriu que um universo em expansão podia aparecer como uma solução das equações de Einstein. Esse último fato foi observado por Edwin Hubble (1889-1953), que constatou que galáxias distantes estão se afastando de nós. Mais tarde, em 1965 Penzias e Wilson descobriram uma radiação cósmica de fundo com temperatura de 2,7K [2], que aparentemente permeia todo o espaço. Este resultado foi interpretado como uma radiação originada após o início da vida do Universo, ou seja, acerca de  $2 \times 10^5$  anos. A expansão do universo teria resfriado a radiação, entre o momento que foi gerada e o de sua detecção.

Após o enorme sucesso do modelo proposto por Einstein e da maneira com que a relatividade geral explica a gravitação, o próprio Einstein começou a conjecturar se haveria uma ligação entre a gravidade e o eletromagnetismo. Seria o eletromagnetismo o aspecto geométrico de alguma teoria mais fundamental e que unificasse as duas forças da natureza? Anos antes, Faraday já havia realizado uma série de experimentos para tentar encontrar uma teoria comum entre a eletricidade e a gravitação. O experimento

conduzido por Faraday, buscava detectar correntes geradas por corpos em queda livre. Embora Faraday tenha falhado, o sonho de unificação da relatividade geral com o eletromagnetismo como uma teoria geométrica alimentou os trabalhos de Einstein durante o resto de sua vida. Posteriormente, em 1968, Dirac fez uma avaliação negativa sobre a possibilidade de unificação das forças fundamentais.

Uma tentativa na direção da unificação e que será discutida em maiores detalhes no decorrer deste trabalho, trata da que foi proposta na década de vinte por Theodor Kaluza (1885-1954) e aperfeiçoada mais tarde por Oscar Klein (1894-1977). Em 1919, através de uma carta enviada a Einstein, Kaluza propôs que para efeitos de unificação do eletromagnetismo com gravitação fazia-se necessário a introdução de uma dimensão espacial adicional capaz de gerar a força eletromagnética. Na verdade, no modelo proposto por Klein a dimensão extra considerada por Kaluza deveria estar enroscada numa escala de comprimento de cerca de  $10^{-33}$ cm (comprimento de Planck) de modo que a curvatura associada a quinta dimensão deveria corresponder ao valor da carga elétrica. Embora tenha apreciado a idéia, Einstein que havia sido encarregado de enviar o artigo de Kaluza para publicação teve dúvidas, de modo que esse artigo permaneceu engavetado por dois anos. Posteriormente, devido a uma série de inconsistências a teoria de Kaluza-Klein teve de ser abandonada. E finalmente, somente nos anos de 1970 e 1980, com um novo fôlego, teorias que envolvem dimensões adicionais receberam um novo interesse em virtude dos desenvolvimentos em supergravidade e supercordas. Para que essas teorias se apresentem consistentes faz-se necessário a introdução de dimensões extras extremamente pequenas, da ordem do comprimento de Planck, o que está além das possibilidades experimentais atuais.

## 1.2 O Modelo Padrão de Partículas

Atualmente o modelo que é um dos grandes triunfos da Física do início dos anos 1970 e que permaneceu praticamente inalterado nos últimos 40 anos é denominado Modelo Padrão (MP)[3]. O MP fornece uma descrição completa das partícula e forças conhecidas que moldam nosso Universo. A utilização deste modelo no estudo de processos elementares juntamente com a teoria quântica de campos (TQC) fornece uma elegante e poderosa ferramenta de investigação a nível microscópico de todas as partículas conhecidas (léptons, quarks e hádrons) e de três das quatro interações fundamentais conhecidas na Natureza. Listadas em ordem decrescente de intensidade estas são: interação forte (nuclear), eletromagnética, interação fraca (nuclear) e gravidade. Cada uma dessas interações está diretamente relacionada a uma propriedade fundamental da matéria a qual associamos uma grandeza que chamamos de carga: carga cor, carga elétrica, carga fraca e carga massa.

A TQC, nada mais é do que a aplicação conjunta da mecânica quântica e da teoria da relatividade especial a campos. Esta última, fornece o arcabouço teórico usado largamente

em física de partícula, matéria condensada, fenômenos críticos dentre outros. Originada na década de 1920, teve como ponto de partida as regras de quantização de Heisenberg aplicadas ao campo de radiação. Suas previsões para as interações entre elétrons e fótons tem-se mostrado corretas em uma parte em  $10^8$ . Além disso, essa é capaz de descrever de maneira formidável três das quatro interações conhecidas. O sucesso incontestável da TQC, no entanto, só se deu com o trabalho pioneiro de Dirac de 1927 que, fornecia a combinação da mecânica quântica com a teoria clássica da radiação. Desenvolvimentos posteriores levaram Dirac em 1928, na época já de posse de sua célebre equação para o elétron, a criar a eletrodinâmica quântica (QED). O formidável sucesso da QED se deu com a reprodução de uma série de resultados experimentais tais como o spin e o momento magnético do elétron. Já por volta de 1949, com o enorme sucesso da teoria da renormalização, várias informações físicas importantes foram extraídas da QED. Em especial, devido aos trabalhos de Tomonaga, Schwinger e Feynmann.

Posteriormente, um grande número de partículas que ainda não haviam sido detectadas quando o modelo padrão foi proposto foram encontradas e exibiam exatamente as propriedades prevista pelo mesmo. Dentre tais partículas, podemos citar os bósons vetoriais Z e W, o quark top e o neutrino do tau. Recentemente, a última partícula presente no MP e que fazia parte do quebra cabeça proposto por Peter Higgs em 1964 foi encontrada em 4 de Julho de 2012 em um dos instrumentos do LHC.

Embora o MP (não se trata apenas de um modelo e sim de uma teoria) tenha sido cuidadosamente testado experimentalmente existe uma série de questões não fundamentais que, infelizmente, este não consegue resolver (talvez associado ao inúmero conjunto de parâmetro livres que o modelo teórico possui). O modelo padrão é quântico e, portanto, impossível (aparentemente) de incorporar uma teoria da gravidade válida em todas as escalas de energia (o modelo a descreve a nível clássico). Este último fato é o sinal mais óbvio de que o MP não é uma teoria completa pois, este negligência a interação gravitacional. De modo a incluir tal interação uma descrição quântica da gravidade faz-se necessária.

A existência de quatro interações fundamentais e apenas três gerações de férmions as quais, são idênticas exceto por suas massas é outro problema do modelo. O porquê dos quarks existirem apenas confinados (o denominado problema do confinamento). A existência de escalas totalmente diferentes de energia (o denominado problema da hierarquia). O problema dos neutrinos solares. A assimetria matéria-antimatéria (no universo há mais matéria do que antimatéria). O problema da matéria e energia escura(constituíntes de nosso universo) que não são formadas por partículas do Modelo Padrão. O problema da violação da simetria CP nas interações fortes e o problema da constante cosmológica. Algumas considerações adicionais acerca dos problemas mencionados anteriormente serão discutidos nas próximas seções.

Embora se acredite que o modelo padrão esteja próximo de fornecer uma formulação mais completa da Natureza, a série de problemas que este exhibe é um forte indicativo

de que ele não representa uma teoria fundamental do Universo. Uma possibilidade, em princípio, mais atraente e que poderia resolver alguns ou até mesmo todos os problemas mencionados acima, seria promover uma extensão do modelo padrão de modo a incorporar o que chamamos de supersimetria. A supersimetria fornece uma estrutura matemática unificada que relaciona bósons e férmions, os quais de outro modo, nos pareceriam não correlacionados. A incorporação de dimensões espaciais extras além das já conhecidas também forneceria um cenário alternativo e promissor à solução de alguns destes problemas[4]. Contudo, haveria mais do que três dimensões espaciais e algum mecanismo presente no modelo faria com que tais dimensões permanecessem ocultas nas atuais escalas de energia. Tal mecanismo existe de fato e foi proposto originalmente por Oscar Klein em 1926 e será considerado em mais detalhes adiante.

### 1.3 O Problema da Hierarquia

Em nosso universo existe aparentemente duas escalas de energia fundamentais: a escala denominada eletrofraca,  $M_{ew} \sim 10^2 \text{Gev}$ , e a escala conhecida como de Planck,  $M_{pl} \sim 10^{19} \text{Gev}$ . Compreender o motivo pelo qual estas duas escalas apresentam tamanha disparidade, ou seja, diferem em várias ordens de grandeza, é em sua essência o problema da hierarquia. Este problema também pode ser posto da seguinte maneira: Por que a interação gravitacional é várias ordens de grandeza inferior se comparada as demais interações fundamentais (ver tabela abaixo para um comparativo)?

Interação	Intensidade Relativa	Alcance
Gravitação	$10^{-41}$	$\infty$
Nuclear Fraca	$10^{-15}$	$\ll 1\text{fm}$
Eletromagnética	$10^{-2}$	$\infty$
Nuclear Forte	1	$\approx 1\text{fm}$

Tabela 1.1: Comparação das interações conhecidas

Sabe-se hoje que a introdução de dimensões extras pode nos ajudar a resolver este problema [5, 6]. No entanto, como ainda não há evidências experimentais que comprovem (ainda) a existência de mais que quatro dimensões em nosso mundo, teorias com dimensões maiores que quatro necessitam de um mecanismo que camufle (esconda) estas dimensões adicionais. Como veremos, isto realmente não é necessário, uma vez que existem modelos na literatura que resolvem este problema com o uso de dimensões não compactas [5]. Nas conhecidas teorias de Kaluza-Klein (KK) as dimensões extras são invisíveis nas atuais escalas de energia, pois descrevem variedades compactas de pequenas dimensões (estas da ordem do comprimento de Planck).

## 1.4 O Problema da Constante Cosmológica

Evidências observacionais recentes sugerem que vivemos em um universo em expansão acelerada desde o Big Bang. Além disso, tais observações parecem indicar que de algum modo o principal componente do universo é dominado pelo que chamamos atualmente de energia escura. A constante cosmológica por preencher dados atuais é uma provável candidata a energia escura. Essa foi introduzida originalmente por Einstein em sua teoria da Relatividade Geral com intuito de incorporar a idéia de um universo estático e fechado. Posteriormente, Hubble descobriu que, o universo estava em expansão. Sendo assim, não havia mais a necessidade de uma constante cosmológica(segundo Einstein, a introdução desta constante foi o maior erro da vida dele). Embora em anos recentes outro candidato forte a representar a energia escura seja o que é conhecido na literatura como quintessência(campos escalares interagindo fracamente) a constante cosmológica continua sendo a quantidade mais provável a representa-la.

A dinâmica do universo é descrita pela teoria da relatividade geral. Em relatividade geral, matéria e geometria estão fortemente correlacionadas através das equações de Einstein [7]. Estas relacionam o conteúdo geométrico presente na forma do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ (mede a curvatura do espaço tempo), tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e do escalar de curvatura  $R$  com o conteúdo de matéria representada pelo tensor momento energia  $T_{\mu\nu}$ (engloba efeitos de pressão e densidade de energia) através de sua célebre equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $G_N$  é a constante gravitacional de Newton. Em 1917 Einstein aplicou suas equações a cosmologia de modo a incorporar a descrição de todo universo. No entanto, nenhuma solução estática de suas equações originais puderam ser encontradas, de modo que ele modificou suas equações adicionando um novo termo  $\Lambda$ (parâmetro livre), a constante cosmológica, de modo que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Agora, com  $\Lambda > 0$  se introduz um efeito repulsivo que balança a atração gravitacional. Embora uma constante cosmológica fosse necessária para a descrição de um universo estático, esta não se faz necessária para descrever um universo em expansão como realizado por Friedmann e independentemente por Lamaitre.

O problema da constante cosmológica tem sua origem na tremenda discrepância que existe entre as escalas típicas da física de partículas, portanto de todos os fenômenos que ocorreram no início do universo, e a densidade crítica de energia do universo, isto é,  $\rho_c \approx 10^{-48} \text{Gev}^4$ . Onde a densidade crítica de energia representa a densidade de energia compatível com a atual taxa de Hubble, isto é, a necessária para explicar a recessão da galáxias em universo plano sem constante cosmológica. É público e notório que a fronteira

limite para energia é fornecida por

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G_N}}, \quad (1.3)$$

onde  $m_{pl} \approx 10^{18} \text{Gev}$  é a escala de Planck introduzida em 1899. Esta é a escala a partir do qual os efeitos gravitacionais não são mais negligenciáveis do ponto de vista atômico. Fortes efeitos gravitacionais seriam esperados nesta escala de energia os quais poderiam distorcer nossa visão do espaço-tempo da maneira que o conhecemos, neste domínio é possível que a atual teoria de cordas reine. A razão entre as escalas mencionadas acima é a origem da famosa discrepância de 120 ordens de grandeza entre os valores teórico e observado da constante cosmológica[8].

## 1.5 O Problema da Matéria Escura

Observações cosmológicas indicam que a matéria ordinária do universo que é observada representa apenas 5% da matéria total presente no nosso universo. Ademais, outros 23% parece ser constituída de uma forma desconhecida de matéria. No entanto, nenhuma partícula presente na estrutura do modelo padrão possui características compatíveis com os dados experimentais obtidos para esta aparente anomalia. Este problema parece indicar a existência de uma nova física além do Modelo Padrão necessária para descrever esta partícula denominada Matéria Escura (ME). A supersimetria poderia fornecer uma explicação para ME, pois embora as partículas do MP não apresentem as características necessárias, suas super-parceiras exibem. O estudo da ME tem sua origem em 1933 com as observações de Fritz-Zwicky (1898-1974) da luz emitida por aglomerado de galáxias. Desde então, uma quantidade crescente de observações tem sido feitas dando suporte a hipótese da ME. Embora ME ainda não tenha sido observada diretamente, espera-se que o seja em breve, não somente no LHC, como nos atuais detectores de ME espalhados ao redor do mundo. Ademais, essa fornece um dos maiores desafios para física de partículas e representa hoje uma área bastante ativa de pesquisa em física de partículas, astrofísica e cosmologia [9, 10].

## 1.6 Mundo de Branas

Na teoria proposta por Kaluza-Klein [11, 12] na qual nosso universo possui um número maior de dimensões, as dimensões adicionais são extremamente pequenas (menores do que a menor escala de comprimento que pode ser explorada nos atuais aceleradores de partículas, isto é,  $10^{-16} \text{cm}$ ). No entanto, um cenário alternativo e aparentemente mais promissor surgiu nos anos de 1980. Esse baseia-se na idéia de que o nosso universo é uma p-brana, ou melhor, uma hiperfície mergulhada em um espaço-tempo de dimensão maior que quatro (na literatura esse espaço ambiente recebe o nome de *bulk*). A designação p-

brana tem sua origem em teoria de cordas e é usado para representar objetos estendidos em  $p$  dimensões espaciais. Neste novo cenário, o papel da geometria tem uma influência direta sobre nosso universo (geometria esta que pode ser fatorizável ou não-fatorizável), e o que chamamos de variedade transversa ao nosso mundo passa a regular diretamente a física dos novos modelos.

Com efeito, os modelos dos anos de 1990, com especial destaque para os modelos de Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali (ADD)[5] e posteriormente o de Lisa Randall-Ramann Sundrum (RS)[6, 13] fornecem respostas a questões fundamentais não resolvidas pelo Modelo Padrão. O modelo ADD fornece uma estrutura para solução do problema da hierarquia com número de dimensões  $n \geq 2$ , além disso, adota que todos os campos presentes no modelo padrão estão confinados a brana, com exceção da gravidade. Com uma ou duas branas descritas por uma geometria do tipo Minkowski imersas em espaço de dimensão maior denominado anti-de Sitter, o modelo de RS não somente explica o problema da hierarquia como prediz correções para o potencial Newtoniano. No próximo capítulo, as idéias envolvidas nos modelos citados serão apresentadas com uma riqueza maior de detalhes, pois servirão de base para os conceitos envolvidos em física multidimensional e de ponto de partida para o desenvolvimento de nosso trabalho.

## 1.7 A Proposta da Tese

Uma característica comum aos modelos de dimensões extras é sua estreita relação com a geometria. Em particular, no cenário de mundo de branas essa conexão com a física é muito forte. Partindo deste fato, torna-se muito importante estudar a influência, que a geometria pode ter sobre as características físicas dos mais diversos modelos existentes na literatura. Em princípio, não sabemos como os diversos campos do modelo padrão, vivendo no espaço ambiente multidimensional, conhecido na literatura como *bulk*, serão afetados por mudanças geométricas do modelo utilizado para descrever tais campos. Tais mudanças geométricas podem ser obtidas através do que que é conhecido na literatura por fluxo geométrico. O modelo geométrico escolhido aqui representa uma proposta de extensão aos encontrados na literatura e são denominados do tipo corda. No entanto, nosso modelo apresenta a característica particular de que a variedade transversa (a nossa brana) é parametrizada por meio de um parâmetro geométrico que pode ser utilizado (regulado) para gerar mudanças de características físicas dos campos.

O campo do MP escolhido como objeto de estudo foi o vetorial de calibre, haja visto que este não é um campo localizado originalmente no modelo de Randall Sundrum em cinco dimensões descrito por sua ação usual. Além disso, os cenários aqui utilizados, podem ser considerados como correções próximos a brana daqueles descritos por defeitos tipo corda fina, em geral, os modelos de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) [25] e Oda.

Neste trabalho investigaremos as características do campo vetorial em dois cenários distintos em seis dimensões. No primeiro cenário, utilizamos uma variedade de Calabi-

Yau conhecida como cone resolvido. Este último, possui uma geometria não fatorizável e é construída a partir do produto direto de uma 3-brana e uma seção do cone resolvido  $\mathcal{C}_2$  [14, 15, 16]. Este cenário permite avaliar o comportamento do campo vetorial de calibre quando a variedade transversa a brana evolui segundo um fluxo geométrico.

Num segundo momento, propomos uma geometria construída a partir de uma 3-brana e uma solução estacionária do que é conhecido como fluxo de Ricci. Além de promover a suavização das soluções, como veremos, este cenário satisfaz todas as condições de regularidade na origem como mostrado em [17]. Tais soluções representam, portanto, uma solução interna e externa ao defeito do tipo corda. Com efeito, o fluxo de Ricci muda as características do campo vetorial em torno do núcleo da brana promovendo a suavização dos modos de KK próximos a mesma e atuando diretamente nas características do potencial do tipo Schrödinger. Além disso, resultados esperados para um defeito do tipo corda são recuperados para grandes distâncias.

## 1.8 Roteiro

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. No segundo capítulo apresentamos uma breve revisão dos modelos de dimensão extra encontrados na literatura e que de alguma forma tiveram influência e serviram de base para o desenvolvimento do presente trabalho. Destaque especial é dado aos modelos de Kaluza-Klein (KK), Arkani-Divali-Dimopoulos(ADD) e Randall-Sundrum(RS). Além disso, tendo em vista que nosso trabalho é totalmente desenvolvido em seis dimensões, modelos que fazem uso do mesmo número de dimensões e serviram de referência para nosso estudo serão apresentados, em destaque, os modelos devidos a Gherghetta-Shaposhnikov e Oda.

No capítulo três, nós revisaremos as principais características do conifold singular, deformado e resolvido. Além disso, forneceremos detalhes da construção do cenário obtido como produto direto entre a 3-brana e a seção  $\mathcal{C}_2$  do conifold resolvido. As propriedades do fator de *warp* e da componente angular da métrica são apresentadas bem como as respectivas funções que as definem.

No capítulo quatro, as atenções se voltam para o campo vetorial, desta vez inserido no cenário descrito no capítulo anterior. Neste capítulo, as equações de movimento são obtidas de forma direta. Além disso, um estudo das soluções que correspondem aos modos massivos e não massivos para o campo vetorial é feito, revelando assim, os principais efeitos sobre este devido a ação do fluxo geométrico gerado pelo parâmetro de resolução.

No capítulo cinco, o cenário corda-charuto é introduzido com certos detalhes. Algumas características físicas e geométricas do cenário são apresentadas bem como, os efeitos do fluxo de Ricci sobre o campo vetorial.

No último capítulo, o de número seis, os principais resultados deste trabalho são apresentados de maneira clara. Além disso, algumas perspectivas e considerações finais as quais, podem levar a trabalhos futuros são destacadas.

# Capítulo 2

## Kaluza Klein e Modelos de Branas

Neste capítulo, iniciaremos uma discussão sobre os principais modelos que consideram dimensões extras e que de algum modo serviram de fonte de inspiração para nosso trabalho. Como veremos os primeiros modelos datam do começo do século XX, as chamadas teorias de Kaluza-Klein (nosso ponto de partida) e tinham como principal objetivo a unificação da eletricidade com o magnetismo. Dentre os diversos motivos para se estudar teorias com dimensões extras podemos citar a necessidade de explicar a velocidade com que estrelas orbitam o centro das galáxias e, como mencionado na introdução do presente trabalho, o motivo pelo qual a interação gravitacional apresenta-se tão fraca em nosso mundo. A ideia de vivermos em um mundo multidimensional não é nova e já foram consideradas por Dirac em 1962 [18] ao tentar descrever o elétron através de um modelo estendido e no mesmo ano por D.W. Joseph [19] que tentava encontrar o espectro de todas as partículas conhecidas em um espaço-tempo curvo. Este último, foi responsável pela ideia chave de que todos os campos do modelo padrão estariam presos ao nosso mundo devido a um potencial do tipo schrödinger oriundo da interação entre diferentes partículas. O mecanismo introduzido por Joseph é largamente usado em modelos de branas e também será utilizado na presente tese.

Em 1982, Akama [20] propôs um modelo em seis dimensões no qual a dinâmica de vórtices de Nielsen-Olesen foi utilizada para localizar nosso universo. Posteriormente, trabalhos semelhantes e que deram origem aos modelos de brana tipo-corda foram publicados. Recentemente, uma versão não compacta da teoria de Kaluza-Klein foi sugerida por Paul Wesson [21]. No modelo proposto por Wesson, o que chamamos de matéria, seria a manifestação geométrica de uma quinta dimensão não compacta, ou seja, tudo o que é observado por nós, seres quadridimensionais.

### 2.1 Teoria de Kaluza-Klein(KK)

Por volta dos anos de 1914, antes mesmo que Einstein tivesse concluído completamente a construção de sua teoria da Relatividade Geral, o físico finlandês Gunnar Nordström publicou uma teoria em termos de campos escalares da gravitação que tinha como obje-

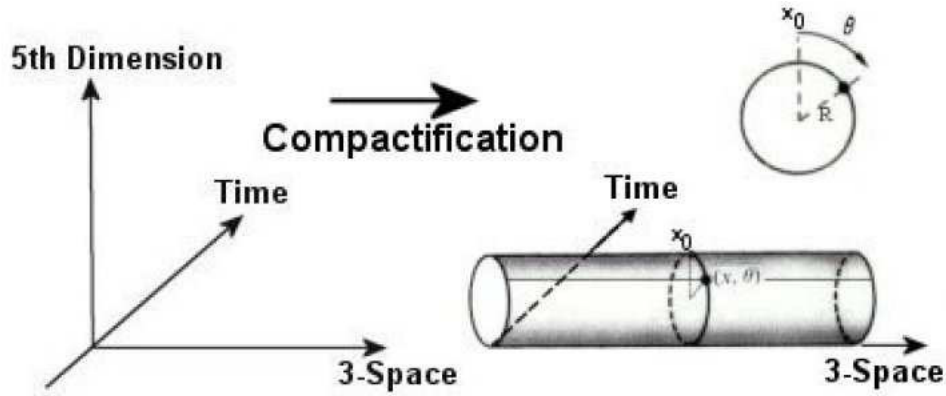


Figura 2.1: Representação da compactificação cilíndrica proposta por Kaluza para a quinta coordenada.

tivo unificar duas interações da natureza, a gravitação e o eletromagnetismo [22]. Embora o princípio da equivalência e o desvio para o vermelho das linhas espectrais do sol fossem reproduzidos pela teoria de Nordström, a mesma era incapaz de reproduzir a precessão de mercúrio tal como obtido pela teoria elaborada por Einstein. O resultado obtido por Nordström, no entanto, era compatível com aquele predito pelas leis de Newton. Além de tudo, a teoria de Nordström não era capaz de explicar a deflexão da luz por objetos massivos.

Com o sucesso da relatividade geral de Einstein, as ideias de Nordström tornaram-se obsoletas. Todavia, no mesmo ano da confirmação da teoria de Einstein por Stanley Eddington (1882-1944), Theodor Kaluza [11](1919) propôs uma teoria que unificava gravidade com eletromagnetismo baseada na Relatividade Geral estendida agora a cinco dimensões. As ideias de Kaluza adicionavam uma restrição à quinta coordenada, conhecida como condição cilíndrica, ver figura (2.1). Em virtude desta condição, as equações gerais obtidas da teoria de Kaluza quebravam-se em três partes, uma destas descrevia a teoria da gravidade de Einstein, a outra, as equações de Maxwell do eletromagnetismo e por último, um campo escalar conhecido como radion. Mais tarde, em 1926 para ser mais exato, uma teoria mais completa foi considerada de modo independente por Oscar Klein [12], em que a restrição sobre a coordenada extra era mais plausível do ponto de vista físico. No modelo de Klein, nosso universo era considerado como sendo um cilindro com raio pequeno  $R$  (dimensão extra enrolada e da ordem do comprimento de Planck  $\sim 10^{-35}\text{m}$ ). Como uma ilustração do modelo de Kaluza-Klein, considere o caso de uma teoria cinco dimensional com dimensão extra periódica  $y$ , isto é,

$$y \sim y + L, \quad (2.1)$$

onde  $y$  representa a quinta coordenada e  $L$  o perímetro da circunferência em  $S^1$ . Este procedimento é chamado de compactificação toroidal [23]. O espaço assim obtido é o produto direto do espaço de Minkowski tradicional e um círculo de raio  $R$ , denotado aqui

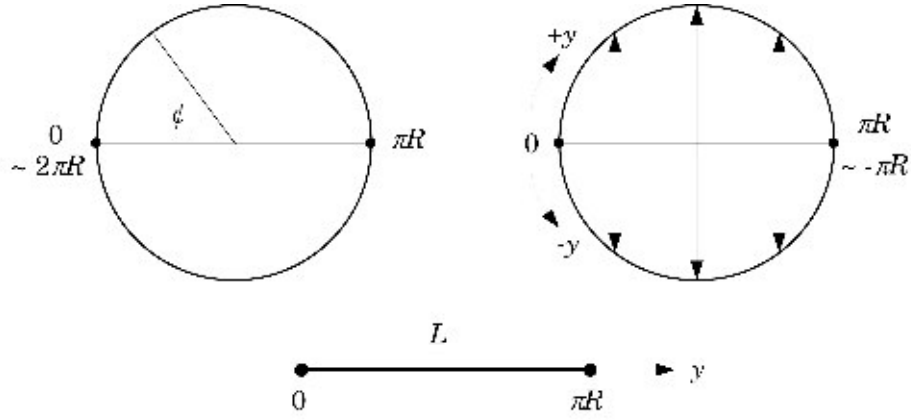


Figura 2.2: Compactificação em círculo. Orbifold  $S^1/Z_2$  com ponto fixo em  $y = 0$ .

por  $\mathcal{M}^4 \otimes S^1$ . A métrica deste espaço-tempo cinco dimensional se separa em  $\tilde{G}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu$ ,  $\tilde{G}_{\mu 5} = \tilde{G}_{5\mu} = \phi^2 A_\mu$  e  $\tilde{G}_{55} = \phi^2$ . Levando assim, ao seguinte elemento de arco quadrático

$$ds^2 = \tilde{G}_{MN} dX^M dX^N = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \tilde{G}_{55} (dy + A_\mu dx^\mu)^2, \quad (2.2)$$

onde  $M, N$ , denotam índices no espaço tempo D-dimensional e  $\mu, \nu$ , representam índices no espaço-tempo de Minkowski. Ademais, o quadrivetor  $A_\mu$  representa o potencial vetor eletromagnético e  $\phi$  um campo escalar. Se  $g_{\mu\nu}$ ,  $\phi^2$  e  $A_\mu$  apresentarem dependência em  $x^\mu$  e  $y$  a (2.2) representa a métrica mais geral possível em cinco dimensões. De modo a ver o efeito da dependência na coordenada periódica  $y$  vamos considerar um campo escalar  $\phi(x, y)$  onde as coordenadas  $x^\mu$  estão sendo representadas por  $x$ . A periodicidade na coordenada adicional  $y$  para o campo é ditada pela seguinte condição

$$\phi(x, y + L) = \phi(x, y), \quad (2.3)$$

onde  $y$  tem período  $L = 2\pi R$ , ver figura (2.2). A condição de periodicidade na coordenada adicional  $y$  permite representar o campo  $\phi$  por sua decomposição em série de Fourier, ou seja,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[ \phi_k(x) \cos\left(\frac{ky}{R}\right) + \hat{\phi}_k(x) \text{sen}\left(\frac{ky}{R}\right) \right], \quad (2.4)$$

onde  $\phi_0(x)$ , o modo zero, é independente da quinta dimensão. Os campos  $\phi_k(x)$  e  $\hat{\phi}_k(x)$  são conhecidos como estados excitados de Kaluza-Klein(KK), na literatura modos KK.

Com efeito, a ação que descreve a dinâmica para este campo escalar massivo em cinco dimensões em um espaço-tempo plano é dada por

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x dy \left( \partial^A \phi \partial_A \phi - m^2 \phi^2 \right), \quad (2.5)$$

onde  $A = 1, \dots, 5$ . Inserindo a decomposição de Fourier (2.4) em (2.5) e integrando sobre a dimensão extra encontramos

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int d^4x (\partial^\mu \phi_k \partial_\mu \phi_k - m_k^2 \phi_k^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int d^4x (\partial^\mu \hat{\phi}_k \partial_\mu \hat{\phi}_k - m_k^2 \hat{\phi}_k^2), \quad (2.6)$$

onde  $m_k^2 = m^2 + k^2/R^2$  representa a torre de massas de Kaluza-Klein. A quantidade  $m_k$  está associada com a quinta componente do momento uma vez que, partindo do seguinte invariante

$$p^A p_A = m^2, \quad (2.7)$$

e do fato que este pode ser reescrito em termos do momento em quatro dimensões

$$p^\mu p_\mu = m^2 + p_\perp^2, \quad (2.8)$$

onde  $p_\perp$  representa a componente momento na dimensão periódica, a qual está associada aos valores  $k/R$ , ou seja, representa as massas que serão quantizadas e são dependentes do raio da dimensão extra  $R$ .

Como mencionado anteriormente, a hipótese de uma dimensão extra pequena, ou seja, compacta torna possível a obtenção não somente das equações de Einstein bem como das equações de Maxwell a partir do modelo proposto por Kaluza-Klein. Além de que, é óbvio que a proposta inicial de Kaluza-Klein tinha como objetivo principal fornecer uma teoria unificada para descrever toda a Física conhecida na época, no entanto, apresentava certas inconsistências tais como: a massa e a carga do elétron não correspondiam aos valores conhecidos experimentalmente. Além disso, a teoria não incluía nenhuma das interações nucleares pois, eram desconhecidas na época.

Nas próximas seções consideraremos modelos de caráter mais geral com uma ou duas dimensões extras para os quais a condição de uma dimensão extra compacta não se faz mais necessária.

## 2.2 O modelo ADD

Em 1998 um modelo devido a Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e George Dvali (ADD) [5] forneceu a possibilidade de resolver o problema da hierarquia [5] sem a hipótese de que a dimensão extra tenha de ser extremamente pequena. Assume-se neste modelo que a única escala fundamental da Natureza é a escala da teoria eletrofraca (caracterizada aqui  $M_{ew}$ ) ao passo que a escala de Planck é uma quantidade derivada a partir desta. Além disso, supõe-se a existência de  $n$  dimensões extras compactas de raio  $R$ . Deste modo o problema da hierarquia muda sua natureza, passando a ser o de determinar qual mecanismo dinâmico que fixa o tamanho da dimensão extra  $R$ . Por se tratar de um cenário de branas é tomado como hipótese adicional que todos os campos do modelo padrão estão presos (localizados) ao nosso universo quadridimensional (nossa 3-brana).

Neste modelo, apenas a gravidade, a qual não faz parte do modelo padrão, está livre para se propagar através das demais dimensões (com sua intensidade reduzida devido a dispersão através das demais dimensões). No modelo ADD, as geometrias da brana e da variedade transversa são independentes, conhecida como geometria fatorizável (não *warped*), isto é,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + g_{ab}(y)dy^a dy^b. \quad (2.9)$$

Como uma consequência direta da fatorização da geometria o escalar de curvatura e o determinante da métrica do espaço multidimensional nesta teoria são separados da seguinte forma

$$R_{4+n} = R_4 + R_n, \quad (2.10)$$

com

$$\sqrt{-g_{4+n}} = \sqrt{-g_4} \sqrt{g_n}. \quad (2.11)$$

Partindo agora da ação de Einstein-Hilbert multidimensional, isto é,

$$S_{4+n} = K_{4+n} \int R_{4+n} \sqrt{g_{4+n}} d^4x, \quad (2.12)$$

esta última relação pode ser integrada nas dimensões extras resultando em

$$S_4 = K_{4+n} V_n \int R_4 \sqrt{g_4} d^4x, \quad (2.13)$$

com  $V_n$  sendo o volume do espaço compacto multidimensional e  $M_{PL}^2 = M^{n+2} V_n$  fornecendo a hierarquia entre as massas. De outro modo, basta lembrar que a intensidade do campo gravitacional entre duas massas testes  $m_1$  e  $m_2$  situadas a distância  $r \ll R$  oriundo desta estrutura é obtida a partir da lei de Gauss em  $(4+n)$  dimensões por

$$V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (2.14)$$

onde  $M_{Pl(4+n)}$  é a escala de Planck do espaço-tempo  $(4+n)$  dimensional com  $n$  dimensões extras compactas. Para massas situadas a distância  $r \gg R$  as linhas de fluxo não penetram na dimensão extra de modo que a lei de Gauss produz

$$V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{R^n r}, \quad (2.15)$$

o qual é o potencial esperado para um observador sobre a brana, ou seja, a expressão clássica com  $G = M_{Pl}^{-2}$  em unidades onde  $\hbar = c = 1$ . De modo que, a relação entre a  $M_{Pl}$  medida sobre a brana e a da variedade multidimensional  $M_{Pl(4+n)}$  fica dada por

$$M_{Pl(4+n)}^{n+2} R^n = M_{Pl}^2. \quad (2.16)$$

Se fixarmos como escala fundamental  $M_{Pl(4+n)} \sim M_{ew}$  os possíveis valores de  $R$  de modo a reproduzir a escala de Planck serão dados por

$$R \sim 10^{\frac{30}{n}-1} \times \left( \frac{1TeV}{M_{ew}} \right)^{1+\frac{2}{n}} \text{ cm.} \quad (2.17)$$

Para  $n = 1$  (cinco dimensões) o raio da dimensão extra (compacta) é  $R \sim 10^{13}$ cm o que implicaria desvios do potencial Newtoniano da ordem das distâncias solares (fora de questão devido a fatos empíricos). No entanto, se  $n = 2$  (seis dimensões) se obtém  $R \sim 0,1$ mm o que é consistente com todos os experimentos gravitacionais realizados. Dimensões maiores forneceriam valores cada vez menores para  $R$  (para  $n = 3$ , por exemplo, obteríamos  $R \sim 10^{-7}$ cm da ordem de comprimento da molécula de DNA e para  $n = 7$  obteríamos um valor para  $R \sim 10^{-13}$ cm da ordem do diâmetro do próton) que também seriam consistentes. Todavia, o caso  $n = 2$  torna-se promissor pois, é passível de verificação experimental nos atuais aceleradores de partículas disponíveis (no LHC por exemplo) ao investigar possíveis desvios do potencial Newtoniano em escalas menores que 0,1mm.

Embora o cenário ADD elimine o problema da hierarquia entre a escala fraca  $M_{ew}$  e a escala de Planck  $M_{pl}$ , este acaba por gerar uma nova hierarquia entre as escalas de compactificação dada por  $R^{-1}$  e a escala eletrofraca  $M_{ew}$  (substituição do problema). Este problema motivou Lisa Randall e Raman Sundrum (modelo RS) a explorar soluções alternativas para o problema da hierarquia dando origem a um novo cenário de dimensões extras. Na verdade, há dois modelos, RS1 e RS2 que serão discutidos na próxima seção.

## 2.3 O modelo de Randall-Sundrum

O trabalho de Lisa Randall e Raman Sundrum representa sem sombra de dúvidas um marco no desenvolvimento do cenário de dimensões extras pois, é usado como referência na descrição de vários fenômenos ditados pelo Modelo Padrão. Este modelo que, em princípio, fornecia uma teoria cinco dimensional para gravidade rapidamente foi modificado de modo a incorporar mais dimensões [24, 25, 26]. Em particular, em nosso trabalho, consideraremos um modelo em seis dimensões no qual o campo vetorial de calibre será analisado. Nossa proposta apresenta-se como uma generalização do modelo RS tendo como motivação inicial alguns problemas presentes no modelo de RS. Um destes problemas, repousa no fato de que o modelo RS, em sua forma usual, não suporta localização de modo zero para o campo vetorial de calibre. Além disso, a localização de campos fermiônicos não massivos se faz com auxílio de um acoplamento do tipo Yukawa.

Em um contexto alternativo, considera-se cenários de branas modeladas por defeitos topológicos em que o problema da não localização do modo zero para o campo vetorial de calibre é contornado. Em particular, em uma modelagem de membranas gerada por kink, o acoplamento com o dilatón torna a localização do modo zero possível [27]. Neste tese, dedicaremos uma atenção especial ao campo vetorial e calibre, em particular, na

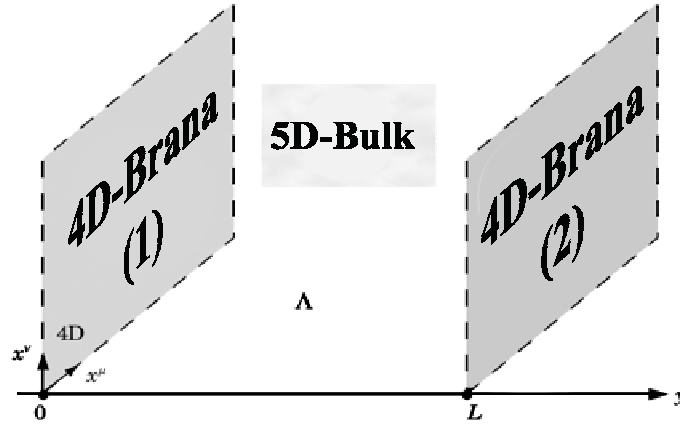


Figura 2.3: Configuração do modelo de Randall-Sundrum com duas branas na presença de um espaço  $AdS_5$ .

localização do mesmo quando inserido em um cenário em que a variedade transversa varia segundo um fluxo geométrico.

Nas próximas seções uma descrição detalhada do modelo Randall-Sundrum será fornecida bem como algumas extensões do modelo para seis dimensões serão considerados. Além disso, tendo em vista que modelos em cinco e seis dimensões serão mencionados com frequência, faremos uma descrição pormenorizada de alguns conceitos e da notação que será usada posteriormente.

### 2.3.1 RS1

Em 1999 Lisa Randal e Raman Sundrum apresentaram um modelo para nosso universo com cinco dimensões. Neste modelo nossa brana quadridimensional está imersa em um espaço de dimensão cinco [6, 13]. No primeiro modelo temos duas branas, a escondida onde a constante gravitacional seria mais intensa e a visível com uma constante gravitacional mais tênue (nosso mundo), ver figura (2.3). Neste modelo a métrica é dita não-fatorizável com a presença de um termo exponencial responsável pela hierarquia entre as escalas de Planck e Eletrofraca. A métrica  $G_{MN}$ , que representa todo espaço-tempo multidimensional neste modelo é dada por

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{vis} &= G_{\mu\nu}(y=0), \\ g_{\mu\nu}^{hid} &= G_{\mu\nu}(y=L), \end{aligned} \quad (2.18)$$

com a métrica não fatorizável dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N \\ &= e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  é a métrica de Minkowski quadridimensional. O fator  $A(y)$  presente no termo exponencial é denominado fator de *warp*, este último é o responsável por intercalar termos da dimensão extra com termos do nosso mundo. De modo a determinar a forma de  $A(y)$ , nós precisamos calcular as equações de Einstein, ou seja,

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = \kappa^2 T_{MN} + g_{MN}\Lambda, \quad (2.20)$$

onde a constante de Newton cinco dimensional é definida como

$$\kappa^2 = \frac{1}{4M^3}, \quad (2.21)$$

e o tensor momento energia é dado como usual

$$T_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{MN}}. \quad (2.22)$$

Ademais, a ação de Einstein-Hilbert para este modelo é constituída de três termos

$$S = S_{grav} + S_{esc} + S_{vis}, \quad (2.23)$$

onde o termo que se refere à ação da gravidade é dado por

$$S_{grav} = \int d^4x \int_{y=0}^{y=L} \sqrt{-g} (M^3 R - \Lambda) dy, \quad (2.24)$$

com  $g$  representando o determinante da métrica,  $M$  é a escala de massa fundamental em cinco dimensões responsável por manter a ação adimensional e  $R$  o escalar de curvatura. Além disso, as ações da brana visível e de sua vizinha (brana escondida) são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (\mathcal{L} + \mathcal{V})_{vis}, \\ S_{esc} &= \int d^4x \sqrt{-g_{esc}} (\mathcal{L} + \mathcal{V})_{esc}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde a presença de um termo na ação do tipo  $\sqrt{-g}\mathcal{V}$  com  $\mathcal{V}$  constante corresponde a um termo  $\mathcal{V}g_{MN}$  no tensor momento energia. Este último é dado neste cenário por

$$T_{MN} = \delta_M^\mu \delta_N^\nu (\mathcal{V}_{vis} g_{\mu\nu}^{vis} \delta(y-L) + \mathcal{V}_{esc} g_{\mu\nu}^{esc} \delta(y)). \quad (2.26)$$

A componente  $yy$  das equações de Einstein fornece

$$\begin{aligned} G_{yy} &= \frac{-\Lambda}{4M^3}, \\ 6A'^2 &= \frac{-\Lambda}{4M^3}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

Note que uma solução real para  $A$  só será possível se a constante cosmológica  $\Lambda$  for negativa, ou seja, o espaço entre as branas é anti-deSitter. O caso em que  $A$  é imaginário puro fornece um fator de *warp* oscilante o qual não apresenta relevância no modelo RS. Da equação(2.27), vemos que  $A'^2$  é uma constante, a qual chamaremos de  $k$

$$A'^2 = \frac{-\Lambda}{24M^3} = k^2, \quad (2.28)$$

esta última quando integrada em  $y$  fornece a expressão para  $A$

$$A(y) = k|y|, \quad (2.29)$$

onde a presença do módulo representa uma invariância com respeito a transformação  $y \rightarrow -y$ (simetria  $Z_2$ ). Finalmente, a métrica no modelo Randall-Sundrum passa a ser

$$ds^2 = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.30)$$

Se observarmos a componente  $\mu\nu$  obtida a partir das das equações de Einstein para  $G_{MN}$  obtemos

$$G_{\mu\nu} = (6A'^2 - 3A'')g_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

onde a segunda derivada de  $A$  é dada por

$$A'' = \frac{1}{12M}[\mathcal{V}_{vis}\delta(y) + \mathcal{V}_{esc}\delta(y - L)], \quad (2.32)$$

onde usamos o fato de que  $A' = \text{sgn}(y)k$ . Além disso, a função  $\text{sgn}(y)$  pode ser escrita como uma combinação de funções de Heaviside, isto é,  $\text{sgn}(y) = \theta(y) - \theta(-y)$ . A presença das funções delta em (2.32) deve-se ao fato de  $A'$  apresentar uma descontinuidade na origem  $y = 0$  e em  $y = L$ . De modo a satisfazer as equações de Einstein precisamos impor a seguinte relação

$$\mathcal{V}_{esc} = -\mathcal{V}_{vis} = 24M^3k. \quad (2.33)$$

Além disso, da definição de  $k$  temos

$$\Lambda = -\frac{\mathcal{V}_{esc}^2}{24M^3} = -\frac{\mathcal{V}_{vis}^2}{24M^3}. \quad (2.34)$$

As duas últimas relações são uma forma de ajuste fino entre as tensões nas branas(densidades de energia). Estas relações fornecem de maneira imediata a descrição de um universo quadridimensional plano e estático. Além disso, as fontes presentes neste universo quadridimensional são modeladas por uma constante cosmológica de um universo multidimensional(*bulk*) de modo a produzir uma constante efetivamente nula.

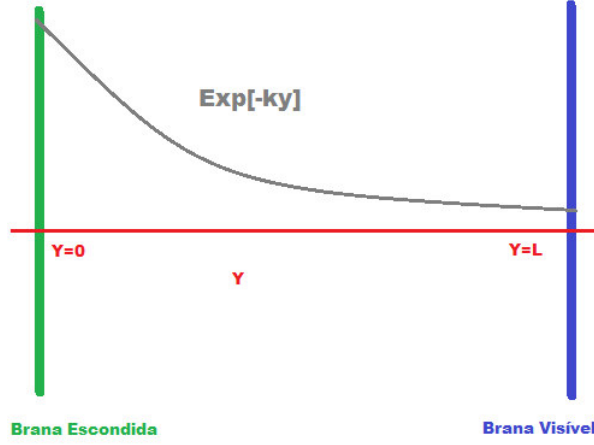


Figura 2.4: Descrição pictórica do modelos RS do tipo um. A brana em  $y = L$  representa nosso universo observável e em  $y = 0$  a brana escondida ou de Planck. O decaimento exponencial entre elas é responsável por ajustar as escalas de Planck e Eletrofraca.

### 2.3.2 Resolvendo o problema da hierarquia

Tendo apresentado as principais características do modelo de Randall-Sundrum bem como a forma do fator de *warp* para o modelo, gostaríamos de investigar qual a relação entre as escalas físicas de energia neste cenário. A brana fixada em  $y = 0$  é, em geral, denominada brana de *Planck*, enquanto a que está situada em  $y = L$  é conhecida como brana de Tev (associada a escala eletrofraca), ver figura (2.4).

De modo a verificar se o termo exponencial presente na métrica é um forte candidato ao endereçarmos o problema da hierarquia, devemos conhecer a ação efetiva do modelo. Esta informação é obtida da ação cinco dimensional via integração da dimensão adicional. Além disso, a presença de um fator exponencial na métrica faz com que um grande raio de compactificação não seja necessário de modo a gerar a hierarquia entre as escalas de massa, o que é um ponto positivo deste modelo em relação ao fornecido pelo cenário ADD. Além disso, é feita a hipótese adicional de que os diversos campos do modelo padrão estão presos à brana, com exceção da gravidade, a qual possui livre acesso à dimensão extra. A presença de uma geometria como a descrita por (2.30), isto é, não-fatorizável faz com que tenhamos

$$R = e^{-2k|y|} R_4 + f(y), \quad (2.35)$$

com a seguinte decomposição para o determinante da métrica

$$\sqrt{-g} = e^{-2k|y|} \sqrt{-g_4}. \quad (2.36)$$

Sendo assim, a ação de Einstein-Hilbert

$$S = M^3 \int_{y=0}^{y=L} e^{-2k|y|} dy \int R_4 \sqrt{-g_4} d^4x,$$

$$= M^3 \frac{1 - e^{-2kL}}{k} \int R_4 \sqrt{-g_4} d^4x. \quad (2.37)$$

De modo que, a relação entre a escala de Planck observada e a escala de Planck do espaço multidimensional é dada por [6]

$$M_4^2 = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2ky_c}). \quad (2.38)$$

A última relação realça a fraca dependência da dimensão extra no ajuste entre as escalas uma vez que o produto  $kL$  pode ser tomado muito grande. Vale a pena lembrar, que a relação entre as massas no modelo RS1 e a relação do modelo ADD diferem em forma pois, a primeira é exponencial na dimensão extra enquanto que a segunda é do tipo polinomial. Assim, a solução do modelo ADD depende crucialmente do raio da dimensão extra enquanto que no modelo RS1 é dependente de  $kL$ , realçando assim, a influência da geometria e do tamanho da dimensão extra.

### 2.3.3 RS2

O segundo modelo de Randall Sundrum (RS2) começa de modo similar ao anterior, ou seja, com as duas branas. Neste cenário, no entanto, a segunda brana pode ser removida ( $L \rightarrow \infty$ ), ou seja, o tamanho da dimensão extra pode se tornar infinita. Devido ao fato de que agora a dimensão extra pode tomar valores cada vez maiores, infinita em princípio, pode-se computar o potencial gravitacional  $\Phi(r)$  entre duas partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$  sobre nosso mundo  $y = 0$ . O potencial estático medido por um observador sobre a brana o qual, é gerado pela troca de modos zero e pela torre contínua de modos de KK representa uma correção do potencial Newtoniano [13]. Esta correção é dada por

$$\Phi(r) \propto G_N \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{G_N}{k} m_1 m_2 \int_0^\infty dm \frac{m e^{-mr}}{k r}. \quad (2.39)$$

Na última expressão note a presença de um termo de correção oriundo de um potencial do tipo Yukawa, bem como a presença de um termo extra  $m/k$  oriundo dos modos de KK para  $m^2 \neq 0$ . Ao realizar a integração sobre  $r$ , obtemos correções da  $O(1/r^3)$  para o potencial Newtoniano

$$V(r) \propto G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right), \quad (2.40)$$

onde  $k$  é uma constante com valor da mesma ordem que a escala de Planck. Esta correção surge em virtude dos modos massivos de Kaluza-Klein. A (2.40) serve para realçar também que desvios do potencial Newtoniano poderiam ser encontrados, no entanto, estes não são esperados pelo menos até a ordem de  $100\mu\text{m}$ .

## 2.4 Mundo em 5 Dimensões

### 2.4.1 Campo de Gauge na Membrana Deformada

É fato notório que o campo vetorial de calibre com simetria  $U(1)$ , descrito por sua ação usual em cinco dimensões, não pode ser localizado no cenário de Randall-Sundrum [28, 29, 30] com dimensão extra infinita. Nesta seção faremos uma breve análise do campo vetorial de calibre em cenários de membrana espessa deformada. Construída com o intuito de ilustrar tal dificuldade, esta seção apresentada a impossibilidade de garantir a existência de modo zero localizado para o campo vetorial de calibre, fato este que nos serviu de motivação para buscar uma alternativa ao problema.

Em cinco dimensões (5D), o campo vetorial de calibre  $A_M$  com simetria  $U(1)$  e acoplado com a gravidade é descrito pela seguinte ação

$$S \sim \int d^5x \sqrt{-G} F_{MN} F^{MN}, \quad (2.41)$$

onde  $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$  e  $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$  representam as coordenadas do *bulk*. As equações de movimento resultantes de (2.41) são

$$\partial_Q [\sqrt{-G} G^{QM} G^{RN} F_{MN}] = 0. \quad (2.42)$$

As condições de calibre  $\partial_\mu A^\mu = A_y = 0$ , levam à seguinte equação para  $A_\mu$

$$\partial_y^2 A_\mu + \partial_y [e^{2A(y)} \partial_y A_\mu] = 0. \quad (2.43)$$

A decomposição usual para  $A_\mu$  é feita da seguinte forma

$$A_\mu(x^M) = a_\mu(x^\mu) U(y), \quad (2.44)$$

onde  $x^\mu$  representam as coordenadas sobre a membrana. Com a decomposição fornecida acima a equação diferencial satisfeita por  $U(y)$  fica dada por

$$-\frac{d^2 U(y)}{dy^2} - 2A'(y) \frac{dU(y)}{dy} = m^2 e^{A(y)} U(y). \quad (2.45)$$

Para os modos não massivos, isto é, os modos dados por  $m = 0$ , é obvio que uma solução constante é possível para  $U$ . No entanto, uma análise da ação efetiva do modelo nos leva a

$$S \sim \int d^5x \sqrt{-G} F_{MN} F^{MN} = \int dy U(y)^2 \int \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}, \quad (2.46)$$

onde,  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ . A hipótese de uma solução com  $U$  constante, infelizmente, leva a uma ação efetiva divergente. De modo que, nenhuma garantia de localização de modo zero para o campo vetorial pode ser dada com base neste tipo de solução. No entanto,

soluções mais gerais para  $U(y)$  podem ser construídas via

$$U(y) = k \int e^{-2A(y)} dy, \quad (2.47)$$

onde  $k$  é uma constante e  $A(y)$  é obtido através do método do superpotencial [31, 32] via deformação do mesmo. Nesta técnica, o potencial escalar presente na densidade de Lagrangeana da teoria  $V(\phi)$  é dado em função de uma função  $W(\phi)$  como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{3} W(\phi)^2, \quad (2.48)$$

onde  $W(\phi)$  é denominado função superpotencial. Este último sendo definido por

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = \phi'. \quad (2.49)$$

O procedimento de deformação como descrito em [33, 34, 35] fornece a função deformada  $W_p(\phi)$

$$W_p(\phi) = \frac{p}{2p-1} \phi^{\frac{2p-1}{p}} - \frac{p}{2p+1} \phi^{\frac{2p+1}{p}}, \quad (2.50)$$

onde  $p$  é um inteiro ímpar. A partir do método descrito acima e da equação de primeira ordem para o potencial deformado  $W_p = -3A'_p$ , é possível encontrar uma solução implícita para a função  $A_p(y)$ [34]. Esta última, está presente na métrica do modelo de Randall Sundrum sob a forma  $e^{2A_p(y)}$ . Analiticamente, as soluções são

$$A_p(y) = -\frac{1}{6} \frac{p}{2p+1} \tanh^{2p} \left( \frac{y}{p} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{p^2}{2p-1} - \frac{p^2}{2p+1} \right) \left\{ \ln \left[ \cosh \left( \frac{y}{p} \right) \right] - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{2n} \tanh^{2n} \left( \frac{y}{p} \right) \right\}. \quad (2.51)$$

Com o resultado acima, é possível avaliar a contribuição de  $U(y)^2$  para ação efetiva do modelo. Os valores de  $U(y)^2$  obtidos a partir de (2.47) para alguns valores de  $A_p(y)$  podem ser visualizados na figura (2.5). Infelizmente, como pode ser observado do gráfico para  $U(y)$ , a ação se tornará divergente devido a presença do termo quadrático deste potencial; de maneira que uma vez mais, não podemos garantir modo zero localizado para o campo vetorial de calibre.

Como ficou claro nesta seção, algum mecanismo adicional tem que ser introduzido no cenário de RS de modo que a localização do campo vetorial seja possível. A localização de alguns campos do modelo padrão no cenário RS só é possível com a introdução de campos auxiliares, como mostrado em [36, 37, 38] num contexto de branas modeladas por defeitos topológicos, a introdução do dÍlton torna possível a localização de modo zero para o campo vetorial de calibre. Este último fato, sem sombra de dúvidas, motivou a busca por outros modelos de branas capazes de localizar os diversos campos do modelo padrão através da interação gravitacional, somente.

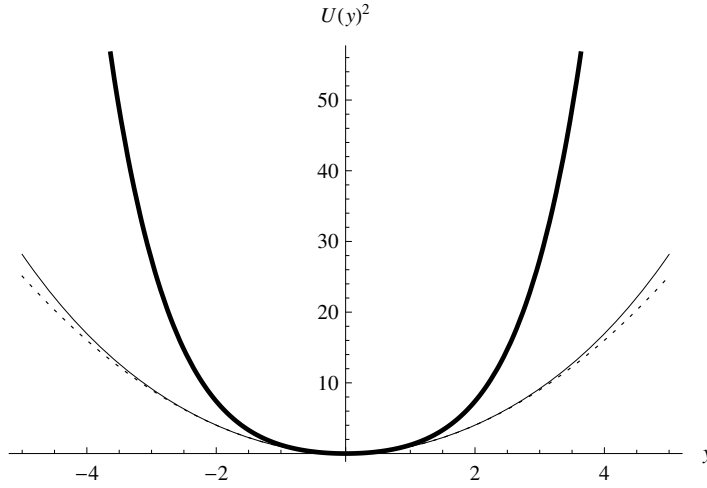


Figura 2.5:  $U^2(y)$  para alguns valores de  $p$ . Os valores  $p = 1$  (linha cheia),  $p = 3$  (linha fina) e  $p = 5$  (linha pontilhada) são exibidos.

## 2.4.2 Campo de Gauge com Acoplamento Geométrico

Recentemente, uma nova proposta de localização para o campo vetorial de calibre com simetria  $U(1)$  surgiu, esta é baseada na inclusão de um termo adicional a ação usual em cinco dimensões [39]. Partindo do seguinte elemento de linha

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N, \\ &= e^{2\alpha} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \end{aligned} \quad (2.52)$$

com  $\exp(2\alpha)$  sendo o fator de *warp* e  $\alpha(y)$  uma função da dimensão extra somente. A ação neste modelo é modificada pela inclusão de um termo de massa da seguinte forma

$$S = \int d^4x dy \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4} g^{MN} g^{RS} F_{MR} F_{NS} - \frac{1}{2} \mathcal{M}^2 g^{MN} A_M A_N \right), \quad (2.53)$$

onde  $M^2$  está relacionado com o escalar de curvatura  $\mathcal{R}$  do espaço ambiente por meio de

$$\mathcal{M}^2 = -\frac{1}{16} \mathcal{R}. \quad (2.54)$$

Com a métrica definida (2.52), o escalar de curvatura pode ser escrito em termos do fator de *warp*  $\alpha(y)$  como

$$\mathcal{R} = -4(5\alpha'^2 + 2\alpha''). \quad (2.55)$$

A ação introduzida em (2.52) faz com que o campo  $A_M$  tenha a seguinte equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M (\sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} F_{NS}) - \mathcal{M}^2 g^{MR} A_M = 0. \quad (2.56)$$

A decomposição KK usual  $A_\mu = \sum A_\mu^{(n)} \chi_n(y)$  juntamente com  $A_4 = 0$  fornece a ação efetiva do modelo [39]. A localização dos modos KK requer que

$$\int \chi_n^2(y) dy < \infty. \quad (2.57)$$

A localização do modo zero neste modelo [39] faz uso do comportamento assintótico ( $y \rightarrow \pm\infty$ ) da função  $\chi$ , comportamento este, que garantirá a convergência da integral em (2.57). A presença de um espaço-tempo do tipo  $AdS_5$ , como é caso do modelo RS do tipo dois, garante que o modo zero seja localizado.

## 2.5 Mundo em 6 Dimensões

Embora seja notório o sucesso dos modelos apresentados até aqui, em especial, o de Randall-Sundrum o qual, fornece uma solução simples para o problema da hierarquia, existem cenários em que os autores consideram mais que cinco dimensões [40, 25, 26]. Ao levar-se em conta duas dimensões extras adicionais, que podem ou não ser compactas, estamos diante de um cenário de branas em seis dimensões.

Dentre os diversos cenários em seis dimensões existentes na literatura, estão aqueles em que a brana além de ser estática exibe simetria cilíndrica com respeito às demais dimensões. Tais cenários recebem a designação de branas tipo-corda em analogia com objetos topológicos conhecidos na literatura como cordas cósmicas. Uma solução métrica seis dimensional em que a gravidade é localizada em um defeito tipo corda, é fornecida pelo modelo de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) e será considerado a seguir.

### 2.5.1 Modelo Gherghetta-Shaposhnikov

O modelo Gherghetta-Shaposhnikov possui métrica cilíndrica não-fatorizável seis dimensional com uma constante cosmológica negativa. Somados a este modelo, uma vasta gama de soluções que exibem simetria radial podem ser encontrados na literatura [41, 42]. Além disso, em contraste com o modelo apresentado em [6], neste modelo não há necessidade de ajuste para a tensão na brana de modo a obter localização das partículas do modelo padrão sobre a mesma. Este modelo é munido da seguinte métrica

$$ds^2 = \sigma(r)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2 - \gamma(r)d\theta^2, \quad (2.58)$$

onde  $\sigma(r) = \exp(-cr)$  é uma extensão daquele apresentado por [6, 13] e  $c = \sqrt{2(-\Lambda)/5M_6^4}$ . Além disso, as variáveis  $r$  e  $\theta$  estão definidas no intervalo  $0 \leq r \leq \infty$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , com  $r$  medido na direção transversa à brana e a partir desta. A função  $\gamma(r)$  presente em (2.58) é definida por

$$\gamma(r) = R_0^2 \sigma(r), \quad (2.59)$$

onde  $R_0$  é uma constante com dimensão de comprimento. As equações de Einstein em seis dimensões com uma constante cosmológica  $\Lambda$  do *bulk* e tensor momento-energia  $T_{AB}$  são fornecidas por

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = \frac{1}{M_6^4}(\Lambda g_{AB} + T_{AB}), \quad (2.60)$$

onde  $M_6$  é massa de Planck do *bulk*. Usando a métrica como definida em (2.58), as equações de Einstein para  $\sigma(r)$  e  $\gamma(r)$  quaisquer fornecem

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{3}{4}\frac{\sigma'\gamma'}{\sigma\gamma} - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma''}{\gamma} &= -\frac{1}{M_6^4}(\Lambda + f_0(r)) + \frac{1}{M_p^2}\frac{\Lambda_{phys}}{\sigma}, \\ \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{\sigma'\gamma'}{\sigma\gamma} &= -\frac{1}{M_6^4}(\Lambda + f_r(r)) + \frac{1}{M_p^2}\frac{2\Lambda_{phys}}{\sigma}, \\ 2\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 &= -\frac{1}{M_6^4}(\Lambda + f_\theta(r)) + \frac{1}{M_p^2}\frac{\Lambda_{phys}}{\sigma} \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde usamos o fato de que as componentes não nulas do tensor momento-energia são dadas por

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= f_0(r)\delta_\nu^\mu, \\ T_\rho^\rho &= f_r(r), \\ T_\theta^\theta &= f_\theta(r), \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde os termos de fonte  $f_0, f_\rho$  e  $f_\theta$  dependem apenas da coordenada  $r$ . Na ausência de termos de fontes, soluções do conjunto de equações (2.61) pode ser encontrado na literatura [43] para diversos valores de  $\Lambda_{phys}$  e  $\Lambda > 0$ . A constante  $\Lambda_{phys}$  em (2.61) representa a constante cosmológica em quatro dimensões, em que

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2}g_{\mu\nu}\Lambda_{phys}, \quad (2.63)$$

onde  $\tilde{R}$  representa o escalar de curvatura da brana. Este último relaciona-se com a curvatura do espaço ambiente através de

$$R(r) = \frac{\tilde{R}}{\sigma} - \left[ 4\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' + 2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 + 2\frac{\sigma'\gamma'}{\sigma\gamma} \right]. \quad (2.64)$$

Para que o escalar de curvatura do espaço ambiente em (2.64) reproduza a curvatura da brana para um observador sobre a mesma, isto é,  $R(0) = \tilde{R}$  (condição de contorno na origem) deve-se tomar

$$\begin{aligned} \sigma' |_{r=0} &= 0, \\ (\sqrt{\gamma})' |_{r=0} &= 1. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Além destas condições, é necessário que a geometria do *bulk* reproduza a geometria da

brana para um observador sobre a brana, ou seja, esta deve ser efetivamente quadridimensional, de modo que precisamos ter

$$\begin{aligned}\sigma|_{r=0} &= 1 \\ \gamma|_{r=0} &= 0.\end{aligned}\tag{2.66}$$

O conjunto de condições de contorno para os coeficientes métricos exibidas em (2.65) e (2.66) são referidas como condições de regularidade da geometria [25]. Como pode ser observado, o modelo GS não satisfaz a estas condições uma vez que  $\sigma|_{r=0} = A$ , onde  $A$  é uma constante e  $\sigma'|_{r=0} = 0$  para este modelo, como já observado em [44]. Além disso, outro resultado intrigante deste modelo é a localização do graviton [25] e uma correção que este gera para o potencial gravitacional dada por

$$\Delta V(r) \simeq \frac{32G_N m_1 m_2}{3\pi c^3 r^4},\tag{2.67}$$

onde  $G_N$  é a constante de Newton. A correção para o potencial em (2.67) é mais fraca do que aquela apresentada em [13] devido a presença de uma dimensão extra adicional deste modelo. Generalizações do modelo GS para mais dimensões [45, 46] podem ser encontradas na literatura bem como conexões deste com a correspondência AdS/CFT [47].

## 2.5.2 Modelo Oda

Após o sucesso do modelo GS no tocante à localização de gravidade em um espaço ambiente seis dimensional com constante cosmológica negativa, Oda através de uma derivação mais concisa em [48], propôs um mecanismo de localização novo de modo a incluir diversos campos do modelo padrão. Com o uso exclusivo da interação gravitacional, Oda considerou a localização de campos de spin 0, 1 e 2 com fator de *warp* decrescente em defeitos tipo corda [24]. Ademais, campos de spin 1/2 e 3/2 também são localizados sem a necessidade de interações adicionais em tais defeitos com fator de *warp* decrescente. A ação utilizada no modelo é a de Einstein-Hilbert usual [49] em  $D$  dimensões

$$S = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^D x \sqrt{-g} L_m,\tag{2.68}$$

onde  $\kappa_D = 8\pi G_N$  é a constante gravitacional em  $D$  dimensões. De modo a encontrar soluções com simetria esférica para o espaço ambiente, adota-se o seguinte *Ansatz* para a métrica

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N, \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + g_{mn} dy^m dy^n, \\ &= e^{-A(r)} \hat{g}_{\mu\nu} + dr^2 + e^{-B(r)} d\Omega_{n-1}^2.\end{aligned}\tag{2.69}$$

onde índices latinos maiúsculos representam o espaço-tempo  $D$  dimensional, índices gregos, refere-se a brana  $p$  dimensional e índices latinos minúsculos, relacionam-se com as  $(n - 1)$  dimensões espaciais, de onde vem que  $D = p + n$ . O termo  $d\Omega_{n-1}^2$  presente na métrica representa o elemento de área da superfície esférica unitária  $n - 1$  dimensional, isto é,

$$d\Omega_{n-1}^2 = d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\theta_3^2 + \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3 d\theta_4^2 + \dots + \prod_{i=2}^{n-1} \sin^2\theta_i d\theta_n^2. \quad (2.70)$$

Além disso, toma-se o seguinte *Ansatz* para as componentes do tensor momento energia

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= t_0(r)\delta_\nu^\mu, \\ T_r^r &= t_r(r), \\ T_{\theta_i}^{\theta_i} &= t_\theta(r), \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde  $i = 2, \dots, n$  e  $t_0$ ,  $t_r$  e  $t_\theta$  são funções de  $r$  apenas. A partir das informações acima, as equações de Einstein seguem de maneira imediata

$$\begin{aligned} 2\Lambda - 2\kappa_D^2 t_r &= e^A \hat{R} - \frac{p(n-1)}{2} A' B' - \frac{p(p-1)}{4} (A')^2 \\ &\quad - \frac{(n-1)(n-2)}{4} (B')^2 + (n-1)(n-2) e^B, \\ 2\Lambda - 2\kappa_D^2 t_\theta &= e^A \hat{R} + (n-2) B'' - \frac{p(n-2)}{2} A' B' - \frac{(n-2)(n-1)}{4} (B')^2 \\ &\quad + (n-2)(n-3) e^B + p A'' - \frac{p(p+1)}{4} (A')^2, \\ 2\Lambda - 2\kappa_D^2 t_0 &= \frac{p-2}{p} e^A \hat{R} + (p-1) \left( A'' - \frac{n-1}{2} A' B' \right) - \frac{p(p-1)}{4} (A')^2 \\ &\quad + (n-1) \left[ B'' - \frac{n}{4} (B')^2 + (n-2) e^B \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde  $(\hat{\cdot})$  denota diferenciação com respeito a  $r$ . Uma vasta classe de soluções das equações acima para alguns valores de  $n$  (defeitos globais) e  $\Lambda \neq 0$  podem ser encontradas em [48]. Em especial, para  $n = 1$  e  $\Lambda < 0$  temos soluções do tipo parede de domínio, para  $n = 2$  e  $\Lambda < 0$  defeitos tipo corda [26]. Ademais, a lei de conservação para o tensor momento energia, ou seja,  $\nabla^M T_{MN} = 0$  fornece

$$t_r' = \frac{p}{2} A' (t_r - t_\theta) + \frac{n-1}{2} B' (t_r - t_\theta). \quad (2.73)$$

Oda investigou soluções das equações de Einstein acima para  $n = 2$  (defeito tipo corda) e com um fator de *warp*  $A(r) = cr$  com  $c > 0$  e  $\Lambda < 0$  [50]. Além disso, soluções especiais são encontradas para os casos sem fonte, ou seja,  $t_i = 0$  e com quebra espontânea de simetria  $t_r = t_\theta$  [48]. Nos próximos capítulos, as ferramentas necessárias para a construção de um cenário mais geral do que os apresentados por GS e Oda serão desenvolvidas.

# Capítulo 3

## Conifold Resolvido

Neste capítulo, daremos os ingredientes necessários para a construção de um cenário de branas em seis dimensões cuja variedade transversa à nossa brana é gerada a partir de uma seção do conifold resolvido  $\mathcal{C}_2$  [15]. Este último, apresenta um parâmetro geométrico que controla a singularidade do cone bem como as propriedades físicas dos campos do modelo padrão que vivem neste espaço ambiente [16, 15].

O conifold é um espaço dito cônico de seis dimensões, compacto em cinco dimensões e não compacto em uma dimensão. Por possuir tais características o conifold serve de espaço base para modelos do tipo mundo de branas tais como os descritos no capítulo anterior pelo modelo de Randall-Sundrum. Além disso, o conifold por ser um espaço cônico possui a característica de ser singular na origem. Efeitos desta singularidade já foram considerados em teorias de campos por Klebanov e Strassler [51]. Existem dois parentes próximos do conifold singular, os quais são obtidos por suavização da singularidade em torno da origem, o conifold resolvido e o conifold deformado [52]. O primeiro, o conifold resolvido, é obtido via método de resolução por substituição da região em torno da singularidade por  $S^2$ , já o segundo, o conifold deformado, é obtido via método de deformação por substituição da mesma região por  $S^3$ . Em 1990 foi mostrado por Candelas e de la Ossa [52] que todas as três variedades mencionadas possuem uma métrica de Kähler e são Ricci-plana. Além disso, pode-se passar continuamente de uma geometria para outra através do que chamamos de transições cônicas conforme a ilustração (3.1).

### 3.1 Variedades Cônicas

#### 3.1.1 Conifold Singular

Dada uma variedade  $\mathcal{M}$  e um grupo discreto  $G$ , a ação de  $G$  sobre  $\mathcal{M}$  torna certos pontos de  $\mathcal{M}$  equivalentes. Se houver um ponto de  $\mathcal{M}$  que seja permaneça fixo sobre ação de  $G$ , o espaço dito quociente  $\mathcal{M}/G$  é cônico. O plano complexo, por exemplo, sob ação da simetria  $Z_2$  leva o plano superior num cone cuja a singularidade é a origem (ponto fixo). Este último é a singularidade do cone.

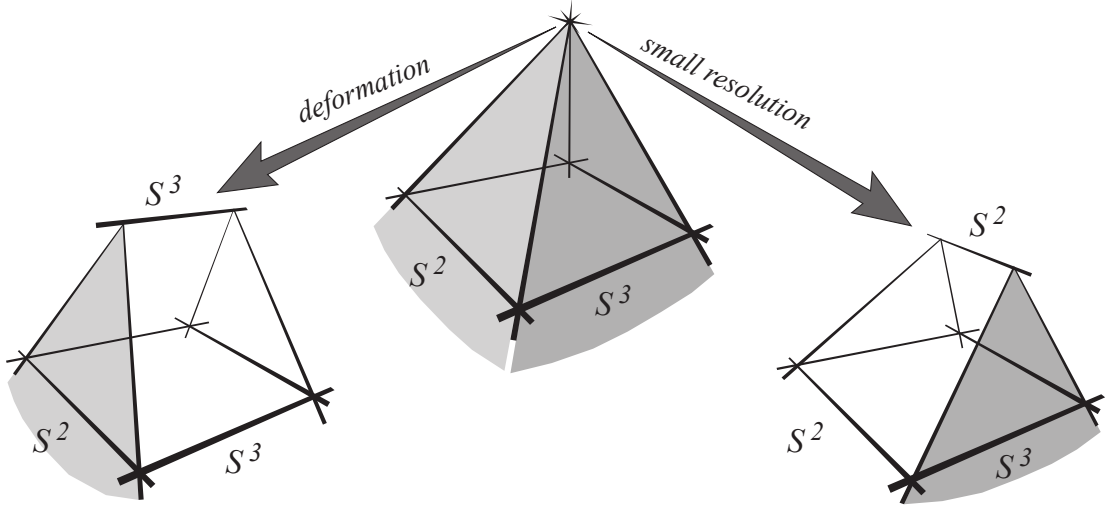


Figura 3.1: O conifold deformado à esquerda se aproxima do conifold resolvido ao centro à medida que seu topo  $S^3$  paralelo a base do cone é deformado continuamente até zero. O conifold resolvido a direita é obtido a partir do conifold singular ao centro por expansão de seu topo numa direção paralela a sua base  $S^2$ .

Podemos definir uma variedade cônica seis dimensional  $\mathcal{C}_6$  por meio de uma equação polinomial que possua a simetria  $Z_2$ . De modo que,  $\mathcal{C}_6 \subset \mathbb{C}^4$  é uma solução da quádrlica [52]

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0. \quad (3.1)$$

Esta última descreve uma superfície que é suave  $Z_i = 0$ . Note também a presença de uma simetria de escala dada pela transformação  $z_i \rightarrow \lambda z_i$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ao tomar  $z_i = x_i + iy_i$ , nós podemos escrever (3.1) como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_i y_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 (x_i^2 - y_i^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

As coordenadas  $x_i$  descrevem uma três esfera para qualquer  $y_i$ , com raio se anulando em  $y_i = 0$  e com as coordenadas  $y_i$  ortogonais às primeiras. De modo a encontrarmos um espaço base do conifold, tomamos sua intersecção com uma três esfera de raio  $r$ , isto é,

$$\sum_{i=1}^4 |z_i|^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i^2 + y_i^2) = r^2, \quad (3.3)$$

a qual remove a simetria de escala  $z_i \rightarrow \lambda z_i$ . O espaço resultante é cinco dimensional, ademais, é um espaço base comum em teoria de cordas conhecido como espaço de Sasaki-Einstein denotado por  $T^{1,1}$  [23, 51]. Além disso,  $T^{1,1}$  tem um espaço quociente dado por

$SU(2) \times SU(2)/U(1)$ . Para ver isso, define-se

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \sigma^n z_n, \quad (3.4)$$

onde  $\sigma^n$  são as matrizes de Pauli para  $n = 1, 2, 3$  e  $\sigma^4 = i\mathbf{1}$  tal que

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z_3 + iz_4 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & -z_3 + iz_4 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Então a equação que define o conifold a partir de (3.1) pode ser escrita como

$$\det(W) = 0, \quad (3.6)$$

com a equação para base (3.3) ficando dada por

$$r^2 = \text{tr}(WW^\dagger). \quad (3.7)$$

Em termos de uma nova variável  $Z = W/r$  estas se tornam

$$\begin{aligned} \det Z &= 0, \\ \text{tr} Z^\dagger Z &= 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De modo que uma solução mais geral para  $Z$  pode ser escrita como

$$Z = LZ_0R^\dagger, \quad (3.9)$$

onde  $Z_0$  é uma solução particular, em geral  $Z_0 = (\sigma_1 + i\sigma_2)/2$  [53] e  $L, R$  são matrizes de  $SU(2)$  com

$$L = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} k & -\bar{l} \\ l & \bar{k} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Como mencionado o conifold é uma variedade de Kähler compacta também conhecida como espaços de Calabi-Yau [23]. Uma métrica definida sobre uma variedade complexa é Kähler se esta pode ser escrita em termos de

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{F}, \quad (3.11)$$

onde  $\mathcal{F}$  é denominado potencial de Kähler. Este último será invariante sobre ação  $SU(2) \times SU(2)$  se for função de  $r^2$  apenas. De modo que

$$g_{\mu\bar{\nu}} = (\partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} r^2) \mathcal{F}' + (\partial_\mu r^2) (\partial_{\bar{\nu}} r^2) \mathcal{F}'', \quad (3.12)$$

assim a métrica canônica para a variedade cônica em termos de  $W$  fica dada por

$$ds^2 = \mathcal{F}' Tr(dW^\dagger dW) + \mathcal{F}'' |Tr W^\dagger dW|^2. \quad (3.13)$$

A fim de encontrar a condição sobre nossa métrica de modo que esta seja Ricci plana tomemos

$$\gamma(r) = r^2 \mathcal{F}', \quad (3.14)$$

onde o tensor de Ricci definido sobre a variedade de Kähler tem a seguinte forma  $R_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \ln(\det g_{\mu\nu})$ . A condição de que esta seja Ricci plana produz

$$\gamma(r) = r^{4/3}, \quad (3.15)$$

que após uma mudança de escala  $r \rightarrow \sqrt{3/2} r^{2/3}$  leva a uma métrica da forma

$$ds_6^2 = dr^2 + r^2 ds_{base}^2. \quad (3.16)$$

Note que a métrica assim definida em  $C_6 \subset \mathbb{C}^4$  é singular em  $r = 0$ . A métrica definida em (3.16) pode ser colocada em uma forma extremamente útil [23, 51] se fizermos uso dos ângulos de Euler. A escolha dos parâmetros nas matrizes  $L$  e  $R$  definidas anteriormente é feita assim

$$\begin{aligned} a &= e^{\frac{i}{2}(\psi_1 + \phi_1)} \cos \frac{\theta_1}{2}, \\ b &= e^{\frac{i}{2}(\psi_1 - \phi_1)} \sen \frac{\theta_1}{2}, \\ k &= e^{\frac{i}{2}(\psi_2 + \phi_2)} \cos \frac{\theta_2}{2}, \\ l &= e^{\frac{i}{2}(\psi_2 - \phi_2)} \sen \frac{\theta_2}{2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\psi_i$ ,  $\phi_i$  e  $\theta_i$  são os ângulos de Euler. De modo que, em teoria de cordas o que denominamos espaço base  $T^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1)$  passa a ter métrica dada por [23, 51]

$$\begin{aligned} ds_{base}^2 &= \frac{1}{9} (d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2)^2 \\ &+ \frac{1}{6} (d\theta_1^2 + \sen^2 \theta_1 d\phi_1^2 + d\theta_2^2 + \sen^2 \theta_2 d\phi_2^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Conifold Deformado

Uma maneira de remover a singularidade de um conifold consiste em modificar a equação que o define. Ao invés de utilizar (3.1), esta é trocada por

$$\sum_{i=1}^4 z_i^2 = \mu^2. \quad (3.19)$$

Novamente se tomarmos a intersecção com a três esfera, achamos  $2x_i^2 = \mu^2 + r^2$ , que mesmo em  $r = 0$  permanece uma 3-esfera. Em termos da matriz  $W$ , o conifold deformado é dado por

$$\det W = \frac{\mu^2}{2}, \quad (3.20)$$

que com a definição da coordenada radial  $r^2 = \text{tr}(W^\dagger W)$  separa  $z_i$  em duas partes, uma real e outra imaginária, assim

$$r^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i^2 + y_i^2), \quad \mu^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i^2 - y_i^2), \quad (3.21)$$

e como  $\mu \leq r < \infty$ , então para  $\mu > 0$  temos a remoção da singularidade. Uma solução particular pode ser encontrada

$$Z_0 = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\sqrt{2}} & \sqrt{r^2 - \mu^2} \\ 0 & -\frac{\mu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

e a solução geral é obtida ao parametrizar  $W = LZ_0R^\dagger$ . Note que, para  $r = \mu$  a matriz  $Z_0$  é proporcional a  $\sigma_3$ , conseqüentemente, invariante sobre  $SU(2)$ . Novamente, ao definirmos um potencial de Kähler  $\mathcal{F}$  e  $\hat{\gamma}(r) = r^2\mathcal{F}$ , a métrica será dada novamente por

$$ds^2 = \mathcal{F}' \text{Tr}(dW^\dagger dW) + \mathcal{F}'' |\text{Tr} W^\dagger dW|^2, \quad (3.23)$$

onde a condição de ser Ricci plana [52] leva diretamente a

$$r^2(r^4 - \mu^4)(\hat{\gamma}^3)' + 3\mu^4\hat{\gamma}^3 = 2r^8, \quad (3.24)$$

que ao ser integrada mostra que  $\hat{\gamma} \rightarrow r^{4/3}$  quando  $r \rightarrow \infty$ , ou seja, concorda com o caso singular discutido na seção anterior. Em termos dos ângulos de Euler a métrica é dada explicitamente por [54, 53, 55]

$$\begin{aligned} ds_{deformado}^2 &= [(r^2\hat{\gamma}' - \hat{\gamma})(1 - \mu^4/r^4) + \hat{\gamma}] \left[ \frac{dr^2}{r^2(1 - \mu^4/r^4)} + \frac{1}{4} (d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{4} \hat{\gamma} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \text{sen}^2 \theta_i d\phi_i^2) \\ &+ \frac{\hat{\gamma}\mu^2}{2r^2} [\cos \psi (d\theta_1 d\theta_2 - \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 d\phi_1 d\phi_2)] \\ &+ \frac{\hat{\gamma}\mu^2}{2r^2} [\text{sen} \psi (\text{sen} \theta_1 d\phi_1 d\theta_2 + \text{sen} \theta_2 d\phi_2 d\theta_1)]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A versão suavizada dessa variedade cônica conhecida como variedade cônica resolvida é obtida ao explorar outras soluções da (3.6). A métrica para a variedade cônica resolvida [56, 57] será considerada em mais detalhes na próxima seção.

### 3.1.3 Conifold Resolvido

De modo a obter a métrica para versão suavizada partimos de um conjunto de novas variáveis  $x, y, u$  e  $v$  que serão essenciais para remoção da singularidade do conifold. Estas são definidas do seguinte modo

$$\begin{aligned}x &= z_1 + iz_2, \\y &= z_2 + iz_1, \\u &= z_3 - iz_4, \\v &= z_4 - iz_3,\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde a equação antes definida por (3.1) torna-se então

$$xy - uv = 0.\tag{3.27}$$

Esta última é equivalente à equação matricial

$$\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0,\tag{3.28}$$

onde as constantes  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  são ambas não nulas. Para  $(u, v, x, y) \neq 0$  qualquer par  $(\lambda_1, \lambda_2)$  satisfaz a equação matricial. Além disso, a liberdade de escala  $(\lambda_1, \lambda_2) \sim (\xi\lambda_1, \xi\lambda_2)$  gera uma solução do tipo dois esfera  $\mathbb{CP}^1 \sim S^2$  no ápice do cone (ponto onde antes havia a singularidade). Nós estamos interessados em percursos sobre a singularidade onde  $\xi = \lambda_1/\lambda_2$ . Sendo assim, podemos reescrever  $W$  como

$$W = \begin{pmatrix} -u\xi & u \\ -y\xi & y \end{pmatrix}.\tag{3.29}$$

A coordenada radial definida por  $r^2 = \text{tr}(WW^\dagger)$  fica então

$$r^2 = (1 + \xi^2)(u^2 + y^2).\tag{3.30}$$

O potencial de Kähler  $\mathcal{K}$  neste caso deixa de ser uma função apenas de  $r^2$  e passa a ser

$$\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{F}} + 4a^2 \ln(1 + \xi^2),\tag{3.31}$$

com  $\tilde{\mathcal{F}}$  uma função de  $r^2$  e  $a \in \mathbb{R}^+$  uma constante com dimensão de comprimento conhecida como parâmetro de resolução. Como veremos  $a$  representa o raio da esfera presente no nodo do cone ao tomarmos o limite  $r \rightarrow 0$ . A métrica agora parametrizada por  $a$  passa a ser dada por

$$ds^2 = \tilde{\mathcal{F}}' \text{Tr}(dW^\dagger dW) + \tilde{\mathcal{F}}'' |\text{Tr} W^\dagger dW|^2 + 4a^2 \frac{|d\xi|^2}{(1 + \xi^2)^2}.\tag{3.32}$$

A expressão acima reproduz a do conifold singular no caso  $a \rightarrow 0$ . Novamente, se definirmos uma função  $\tilde{\gamma} = r^2 \tilde{\mathcal{F}}$ , a condição de que a métrica seja Ricci plana fornece

$$\tilde{\gamma}' \tilde{\gamma} (\tilde{\gamma} + 4a^2) = 2r^2/3, \quad (3.33)$$

onde  $\tilde{\gamma}' = d\tilde{\gamma}/dr^2$ . A equação acima pode ser integrada de forma direta fornecendo

$$\tilde{\gamma}^3 + 6a^2 \tilde{\gamma}^2 - r^4 = 0, \quad (3.34)$$

onde tomamos  $\tilde{\gamma}(0) = 0$ . Além disso,  $\tilde{\gamma} = r^{4/3}$  para  $a = 0$ . Finalmente, o uso dos ângulos de Euler em conjunto com  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  deixa a métrica com simetria  $SU(2) \times SU(2)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} ds_{\text{resolvido}}^2 &= \tilde{\gamma}' dr^2 + \frac{1}{4} \tilde{\gamma}' r^2 (d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i)^2 \\ &+ \frac{1}{4} \tilde{\gamma} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \text{sen}^2 \theta_i d\phi_i^2) + a^2 (d\theta_2^2 + \text{sen}^2 \theta_2 d\phi_2^2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

O resultado acima realça de maneira clara que a única parte da métrica que permanece finita ao nos aproximarmos do nodo do cone, isto é, de  $r = 0$  é a esfera  $(\theta_2, \phi_2)$ . Sendo assim

$$\lim_{r \rightarrow 0} ds_{\text{resolvido}}^2 = a^2 (d\theta_2^2 + \text{sen}^2 \theta_2 d\phi_2^2). \quad (3.36)$$

Uma vez que  $\tilde{\gamma}' d(r^2) = d\tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\gamma}' = 2r^2/(3\tilde{\gamma}^2 + 12a^2\tilde{\gamma})$ , fica mais confortável considerar uma nova coordenada radial [56] definida por

$$\tilde{\rho}^2 = \frac{3}{2} \tilde{\gamma}. \quad (3.37)$$

Com uso da nova coordenada radial definida acima, a métrica (3.35) para o conifold resolvido pode ser escrita simplesmente como

$$\begin{aligned} ds_{\text{resolvido}}^2 &= \kappa^{-1}(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho}^2 + \frac{1}{9} \kappa(\tilde{\rho}) \tilde{\rho}^2 (d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i)^2 \\ &+ \frac{1}{6} \tilde{\rho}^2 (d\theta_1^2 + \text{sen}^2 \theta_1 d\phi_1^2) \\ &+ \frac{\tilde{\rho}^2 + 6a^2}{6} (d\theta_2^2 + \text{sen}^2 \theta_2 d\phi_2^2), \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$\kappa(\tilde{\rho}) = \frac{\tilde{\rho}^2 + 9a^2}{\tilde{\rho}^2 + 6a^2}. \quad (3.39)$$

A métrica como apresentada em (3.38) será muito útil no decorrer de nosso trabalho, uma vez que esta é utilizada como espaço transversal para construção do cenário adotado neste trabalho. Além disso, a adoção de uma seção da métrica do conifold resolvido como

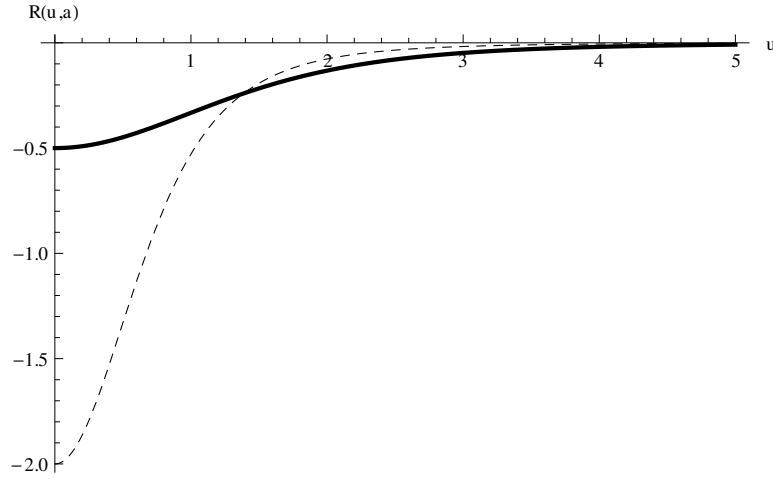


Figura 3.2: Curvatura escalar para  $\mathcal{C}_2$  para alguns valores de  $a$ . Para  $a = 1$ (linha cheia) e  $a = 0.5$ (linha tracejada).

cenário, fornece uma extensão de modelos com simetria esférica encontrados na literatura [58, 26, 59, 24].

De modo a investigar o comportamento físico dos campos do modelo padrão sob ação de um fluxo geométrico (gerado pelo parâmetro de resolução  $a$ ), vamos tomar como variedade transversa a seção bidimensional  $\mathcal{C}_2$  do conifold resolvido com métrica dada por

$$ds_2^2 = \left( \frac{r^2 + 6a^2}{r^2 + 9a^2} \right) dr^2 + \frac{1}{6}(r^2 + 6a^2)d\theta^2, \quad (3.40)$$

onde fizemos  $\tilde{\rho} \rightarrow r$  em (3.38). Note a singularidade cônica para  $a = 0$  presente na componente angular da métrica (3.40). O escalar de curvatura de  $\mathcal{C}_2$  é

$$R(r, a) = -\frac{6a^2(r^2 + 18a^2)}{(r^2 + 6a^2)^3}. \quad (3.41)$$

O esboço de  $R(r, a)$  para alguns valores de  $a$  está na figura (3.2) e é similar ao encontrado em outras variedades com simetria axial [60, 61, 15, 17]. Ademais,  $R = 0$  para  $r \neq 0$  quando  $a = 0$ , o que realça o comportamento cônico.

Para conveniências futuras e com intuito de compararmos a fonte desta geometria com as do tipo-corda geradas por vórtices abelianos [62], faremos a seguinte mudança de variável radial [14, 16]

$$\rho_a = \int^r \sqrt{\frac{(u'^2 + 6a^2)}{u'^2 + 9a^2}} du', \quad (3.42)$$

onde o índice  $a$  indica dependência do parâmetro de resolução. O uso de (3.42) deixa a métrica (3.40) da seguinte forma

$$ds_2^2 = d\rho^2 + \beta(\rho, a)d\theta^2. \quad (3.43)$$

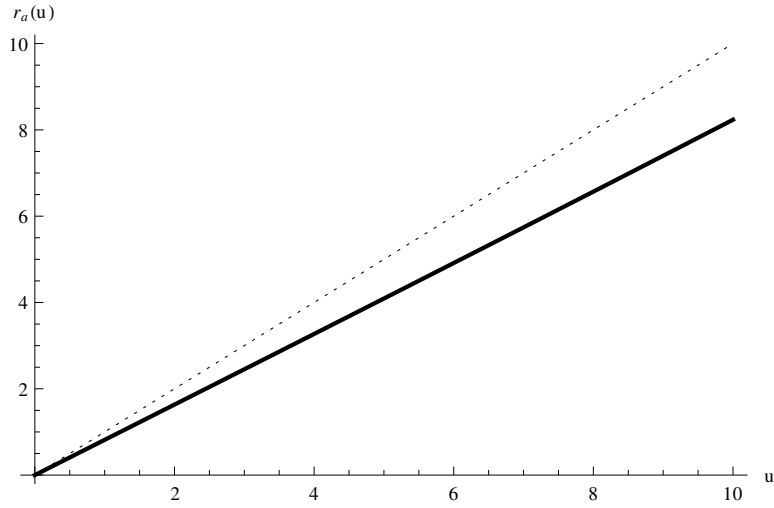


Figura 3.3: Mudança da coordenada radial no cone resolvido  $\mathcal{C}_2$ . A inclinação do gráfico para  $a = 10$  (linha cheia) é menor do que aquela para  $a = 0$  (linha pontilhada).

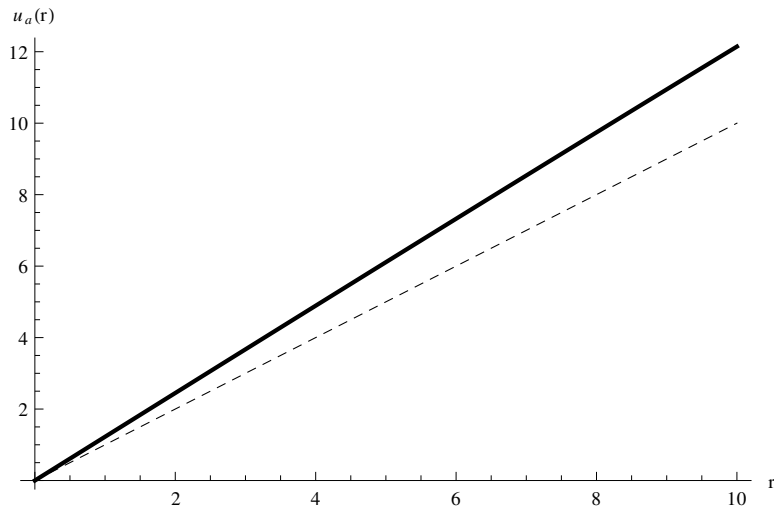


Figura 3.4: Mudança de variável radial na transformação inversa. Para  $a = 10$  (linha cheia) e  $a = 0$  (linha tracejada).

A mudança de variável (3.42) pode ser sintetizada do seguinte modo

$$\rho_a(u) = \begin{cases} u & , a = 0, \\ -i\sqrt{6}aE\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{i}{3a}u\right), \frac{3}{2}\right) & , a \neq 0, \end{cases}$$

onde  $E$  representa a integral elíptica de segundo tipo. A transformação inversa fica dada por

$$u_a(\rho) = \begin{cases} \rho & , a = 0, \\ -i\sqrt{6}aE\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{i}{\sqrt{6}a}\rho\right), \frac{2}{3}\right) & , a \neq 0. \end{cases}$$

O gráfico das mudanças estão mostrados nas figuras (3.3) e (3.4) respectivamente.

## 3.2 Construção do Cenário

Na seção anterior estabelecemos as principais características geométricas do conifold resolvido, características estas que serão úteis para a construção de nosso cenário. A ação para o campo gravitacional deste espaço-tempo seis-dimensional  $\mathcal{M}_6 = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{M}_2$ , onde  $\mathcal{C}_2$  representa a seção do conifold resolvido e  $\mathcal{M}_4$  é a nossa 3-brana, que é dada por

$$S_g = \frac{1}{2\kappa_6^2} \int_{\mathcal{M}_6} d^6x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int_{\mathcal{M}_6} dx^6 \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (3.44)$$

onde  $\kappa_6^2 = 8\pi/M_6^4$  e  $M_6^4$  é a massa de Planck de  $\mathcal{M}_6$ .

A métrica estática e com simetria axial que vamos utilizar consiste de uma 3-brana  $\mathcal{M}_4$  e de uma seção do conifold resolvido  $\mathcal{C}_2$  dada por

$$ds_6^2 = W(r, c) \hat{g}_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu + dr^2 + \gamma(r, c, a) d\theta^2. \quad (3.45)$$

onde  $W(r, c)$  é conhecido como fator de *warp*. De agora em diante, utilizaremos um fator de *warp* capaz de suavizar a geometria dado por [14, 16]

$$W(r, c) = e^{-(cr - \tanh cr)}, \quad (3.46)$$

onde  $c$  é uma constante real com dimensão de inverso de comprimento. A função (3.46) tem duas importantes características. Primeiramente, esta comporta-se assintoticamente do mesmo modo que o fator de *warp* em teorias do tipo corda [63, 48, 25, 24]. Além disso, diferentemente dos casos que envolvem geometria do tipo corda fina [25, 24], esta satisfaz as seguintes condições de regularidade na origem

$$\begin{aligned} W(r, c)|_{r=0} &= 1, \\ W'(r, c)|_{r=0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde  $(')$  denota a derivada com respeito a variável  $r$ . A presença do termo  $\tanh(cr)$  gera tais características, promovendo uma suavização do modelo próximo à origem recuperando o comportamento análogo dos defeitos do tipo corda para grandes valores de  $r$ . O comportamento do fator de *warp* exibido na figura (3.5) pode ser compreendido como uma correção próxima à brana para os modelos do tipo corda fina.

A componente angular  $\gamma(r, c, a)$  foi escolhida através do seguinte *Ansatz*

$$\begin{aligned} \gamma(r, c, a) &= W(r, c) \beta(r, a), \\ &= e^{-(cr - \tanh cr)} \left[ \frac{u(r, a)^2 + 6a^2}{6} \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

De maneira análoga ao comportamento exibido em modelos de corda fina, a componente angular da métrica (3.48) vai a zero no infinito [63, 48, 25, 24], com efeito, uma nova

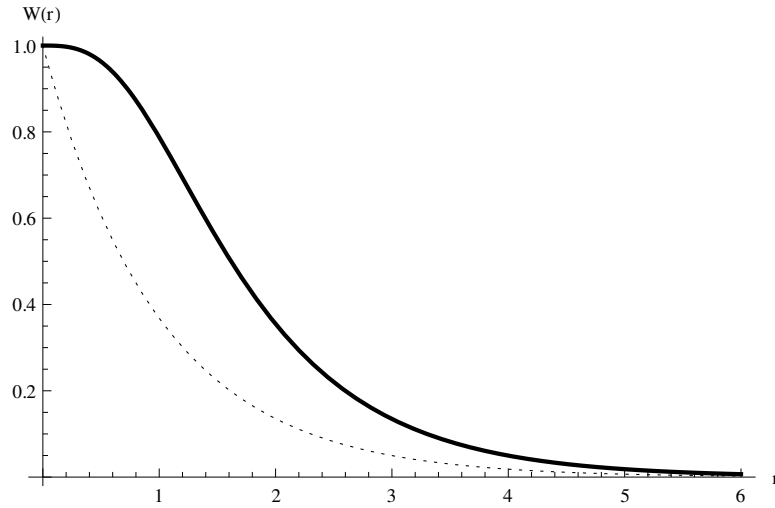


Figura 3.5: Fator de *warp* para  $c = 1$  (linha cheia). O fator de *warp* para corda fina (linha pontilhada) também foi incluído para efeito de comparação.

característica surge

$$\gamma(r, c, a)|_{r=0} = a^2. \quad (3.49)$$

Para o conifold resolvido, a componente angular da métrica exibe uma simetria  $Z_2$  pois, sua derivada se anula na origem. Além disso, para  $a = 0$ , esta componente apresenta um comportamento cônico conforme pode ser observado na figura (3.6), comportamento este, esperado em geometrias do tipo corda. Em geometrias do tipo corda a condição usual de regularidade é  $\gamma(0) = 0$  [25, 44, 64, 65] a qual, não é satisfeita para soluções exteriores à corda [25, 24], isto é,

$$\gamma(r) = R_0 e^{-cr}. \quad (3.50)$$

Note que para  $r = 0$  a métrica em (3.45) não gera  $\mathcal{M}_4$ , na verdade, temos uma  $\mathcal{M}_5$  dada por

$$ds_5^2 = \hat{g}_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu + a^2 d\theta^2. \quad (3.51)$$

De modo que o fluxo geométrico do conifold resolvido leva a uma redução dimensional  $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_5$  na origem. Além disso,  $\mathcal{M}_4 \subset \mathcal{M}_5 = \mathcal{M}_4 \times S_a^1$ , onde  $S_a^1$  representa o círculo de raio  $a$  e  $\mathcal{M}_4$  sendo reproduzido quando  $a = 0$  (caso cônico). No próximo capítulo faremos a localização do campo vetorial de calibre neste cenário, na ocasião o caso cônico será excluído uma vez que o campo vetorial de calibre apresenta um comportamento não físico para  $\gamma(0) = 0$ .

As equações de Einstein em seis dimensões com constante cosmológica  $\Lambda$  do *bulk* e tensor momento energia  $T_{ab}$  são fornecidas por

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = -\kappa_6 (\Lambda_{ab} + T_{ab}), \quad (3.52)$$

onde

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{ab}}. \quad (3.53)$$

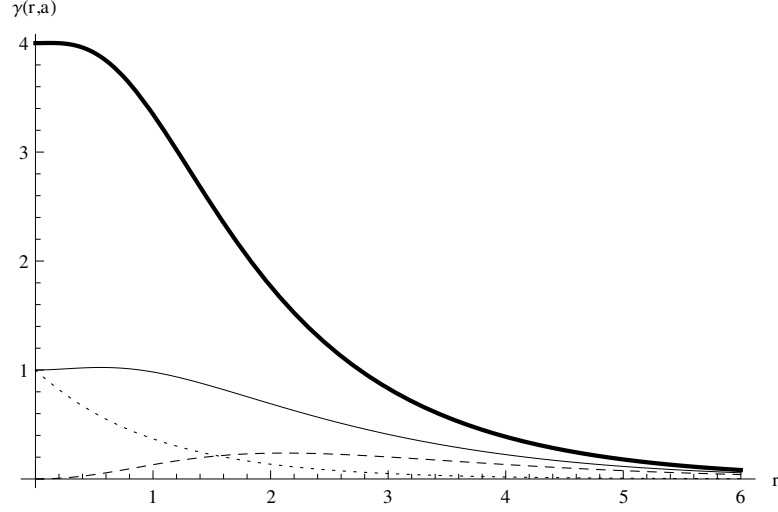


Figura 3.6: Componente angular da métrica para  $c = 1$ . Para  $a = 0$  (linha tracejada) temos a singularidade cônica. Para  $a = 1$  e  $a = 2$  linhas fina e linha cheia, respectivamente, o comportamento é suave. O comportamento para corda fina (linha pontilhada) também foi incluído.

Usando a métrica como definida em (3.45), as equações de Einstein fornecem

$$\begin{aligned}
-\kappa_6(\Lambda + t_0(r)) + \kappa_4 \frac{\Lambda_4}{W} &= 2 \left( \frac{W'}{W} \right)' + \frac{5}{2} \left( \frac{W'}{W} \right)^2 + \frac{5}{4} \frac{W'}{W} \frac{\beta'}{\beta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta'}{\beta} \right)' + \frac{1}{4} \left( \frac{\beta'}{\beta} \right)^2, \\
-\kappa_6(\Lambda + t_r(r)) + 2\kappa_4 \frac{\Lambda_4}{W} &= \frac{5}{2} \left( \frac{W'}{W} \right)^2 + \frac{W'}{W} \frac{\beta'}{\beta}, \\
-\kappa_6(\Lambda + t_\theta(r)) + 2\kappa_4 \frac{\Lambda_4}{W} &= 2 \left( \frac{W'}{W} \right)' + \frac{5}{2} \left( \frac{W'}{W} \right)^2,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

onde usamos o fato de que as únicas componentes não nulas do tensor momento-energia são dadas por

$$\begin{aligned}
T_\nu^\mu &= t_0(r) \delta_\nu^\mu, \\
T_\rho^\rho &= t_r(r), \\
T_\theta^\theta &= t_\theta(r),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde os termos de fonte  $t_0$ ,  $t_r$  e  $t_\theta$  dependem exclusivamente de  $r$ . A constante  $\Lambda_4$  representa a constante cosmológica em quatro dimensões, esta satisfaz

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{\hat{R}}{2} g_{\mu\nu} = \kappa_4 g_{\mu\nu} \Lambda_4, \tag{3.56}$$

com  $\kappa_4 = 8\pi/M_4^2$  e  $\hat{R}$  é a curvatura da brana  $\mathcal{M}_4$ . A curvatura  $\mathcal{M}_6$  do espaço ambiente relaciona-se à curvatura  $\hat{R}$  da 3-brana  $\mathcal{M}_4$  através de

$$R(r) = \frac{\hat{R}}{W} - \left[ 4 \left( \frac{W'}{W} \right)' + 2 \left( \frac{W'}{W} \right)^2 + \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + 2 \frac{W'}{W} \frac{\gamma'}{\gamma} \right]. \tag{3.57}$$

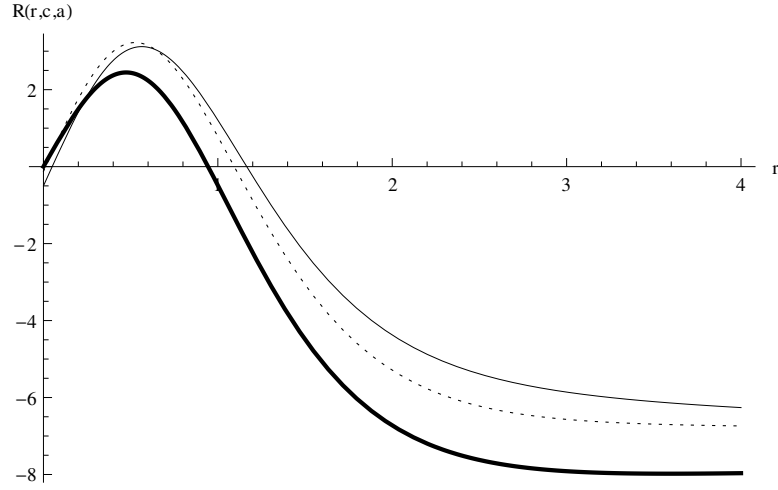


Figura 3.7: Curvatura escalar do espaço ambiente para  $\hat{R} = 0$  e  $c = 1$ . Note que a geometria é suave comportando-se assintoticamente como  $AdS_6$ .

Este último está esboçado em (3.7) para  $\hat{R} = 0$ . A partir das equações de Einstein e da métrica (3.45) é possível obter as componentes do tensor momento-energia da fonte. No entanto, deve-se distinguir entre os valores de  $t_0$  e  $t_r$  destas componentes para  $a = 0$  e  $a \neq 0$ . Para  $a = 0$ , os valores destas componentes são

$$\begin{aligned} t_0(r, c) &= \frac{1}{\kappa_6} \left[ c^2 \left( 5\text{sech}^2 cr + 4\text{sech}^2 cr \tanh cr - \frac{5}{2}\text{sech}^4 cr \right) + \frac{5c \tanh cr^2}{2r} \right], \\ t_r(r, c) &= \frac{1}{\kappa_6} \left[ c^2 \left( 5\text{sech}^2 cr - \frac{5}{2}\text{sech}^4 cr \right) + c \left( \tanh^2 cr \frac{2}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Para  $a \neq 0$  encontramos que

$$\begin{aligned} t_0(r, c, a) &= \frac{1}{\kappa_6} \left[ c^2 \left( 5\text{sech}^2 cr + 4\text{sech}^2 cr \tanh cr - \frac{5}{2}\text{sech}^4 cr \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{2} \frac{u}{u^2 + 6a^2} \tanh cr^2 \sqrt{\frac{r^2 + 9a^2}{r^2 + 6a^2}} + 3a^2 \frac{u}{u^2 + 6a^2} \frac{r}{(r^2 + 6a^2)^{\frac{3}{2}} (r^2 + 9a^2)^{\frac{1}{2}}} \right], \\ t_r(r, c, a) &= \frac{1}{\kappa_6} \left[ c^2 \left( 5\text{sech}^2 cr - \frac{5}{2}\text{sech}^4 cr \right) + c \left( \tanh^2 cr \frac{2u}{u^2 + 6a^2} \sqrt{\frac{r^2 + 9a^2}{r^2 + 6a^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Finalmente a componente  $t_\theta$  independe de  $a$  e é dada por

$$t_\theta(r, c) = \frac{c^2}{\kappa_6} \left( 5\text{sech}^2 cr + 4\text{sech}^2 cr \tanh cr - \frac{5}{2}\text{sech}^4 cr \right). \quad (3.60)$$

Devemos acrescentar aqui que a fonte, como descrita acima, satisfaz todas as condições de energia para  $a = 0$  [66], ou seja, é positiva (condição fraca), maior que as outras componentes (condição forte) e maior do que a soma das demais (condição dominante) [14].

# Capítulo 4

## Campos de Gauge no Conifold

### Resolvido

O estudo do comportamento dos campos do modelo padrão em cenários de branas com variedades transversas não triviais pode ser encontrado na literatura [8]. Neste tipo de cenário, a singularidade cônica serve como poderoso método para ajuste de parâmetros físicos [8]. Neste capítulo, estudaremos o comportamento do campo vetorial de calibre quando inserido em um cenário em que a variedade transversa à brana é construída a partir de uma seção  $\mathcal{C}_2$  do conifold resolvido descrito no capítulo anterior. Outra solução será considerada no próximo capítulo, onde o espaço transversal tem forma cilíndrica longe da brana com o raio do cilindro se anulando sobre a brana, tal solução é conhecida como sóliton charuto de Hamilton [67].

Em virtude da geometria considerada aqui ser não trivial, faremos a suposição adicional de que a componente sobre a brana do campo vetorial de calibre não exibe dependência na coordenada radial. Com a adoção desta condição, seremos conduzidos imediatamente a uma equação diferencial homogênea para os modos de Kaluza-Klein, os quais só são válidos para estados de onda  $s$ , ou seja, para  $l = 0$  em nossas equações. Para esse caso, os modos não massivos exibem uma simetria  $Z_2$  e estão aprisionados à brana qualquer que seja o valor de  $a \neq 0$ . Todavia, para  $a = 0$ , os modos não massivos desaparecem sobre a brana em virtude do comportamento cônico dessa geometria. De modo que, o parâmetro de resolução  $a$ , pode e será utilizado para definir o modo zero do campo vetorial de calibre sobre a brana.

Como será observado no decorrer deste capítulo, os modos de Kaluza-Klein são bem comportados próximos a brana, convergindo assintoticamente para o espectro característico dos encontrados em cenários do tipo corda. Além disso, o parâmetro de resolução  $a$  evita o surgimento de um poço infinito sobre a brana, o qual surge para espaços ditos cônicos, isto é, para  $a = 0$ . Desta forma, o parâmetro de resolução pode ser utilizado para controlar a altura da barreira bem como a profundidade do poço de potencial em torno da brana.

## 4.1 Sobre a Localização

A seguir, vamos voltar nossas atenções para o caso do campo vetorial de calibre. Nosso ponto de partida é a ação usual para o campo vetorial de calibre com simetria  $U(1)$  acoplado com gravidade,

$$S_A = \int d^6x \sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} F_{MR} F_{NS}, \quad (4.1)$$

onde os índices capitais assumem valores sobre os espaço ambiente, isto é,  $M = (\mu, 5, 6)$ , com  $\mu$ , representando índices sobre a brana. O tensor intensidade de campo  $F_{MN} = \nabla_M A_N - \nabla_N A_M$  é definido como usual. A partir da ação definida em (4.1) as equações de movimento resultantes obtidas por cálculo direto são dadas por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_R (\sqrt{-g} g^{RM} g^{LN} F_{MN}) = 0. \quad (4.2)$$

Com a métrica definida por

$$ds_6^2 = W(r, c) \hat{g}_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu + dr^2 + \gamma(r, c, a) d\theta^2, \quad (4.3)$$

onde  $W(r, c)$  e  $\gamma(r, c, a)$  estão definidos em (3.46) e (3.48), respectivamente. As equações de movimento obtidas a partir de (4.2) por meio da fixação do índice livre  $L$  fornecem

$$\left[ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{W(r, c)}{\gamma(r, c, a)} \partial_\theta^2 \right] A_r = 0, \quad (4.4)$$

onde esta última foi obtida fixando  $L = r$  (coordenada transversa a nossa brana). Além disso, com  $L$  fixado a  $\theta$  chegamos a

$$\partial_r \left[ \frac{W^2(r, c) \sqrt{\gamma(r, c, a)}}{\gamma(r, c, a)} \partial_\theta A_r \right] = 0, \quad (4.5)$$

e finalmente para  $L = \mu$  (índice da brana) obtemos

$$\left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{W}{\gamma} \partial_\theta^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_r W \sqrt{\gamma} \partial_r \right) A_\lambda - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_r (W \sqrt{\gamma} \partial_\lambda A_r) = 0. \quad (4.6)$$

Para todas as equações anteriores nós fizemos uso das condições usuais de gauge como apresentadas em [24, 68], ou seja, estamos interessados em soluções obtidas por meio da fixação

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0, \\ A_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De modo a promover uma separação de variáveis nas equações anteriores vamos tomar a

seguinte decomposição para os modos de Kaluza-Klein

$$A_\mu(x^M) = \sum_{l=0}^{\infty} A_\mu^{(l)}(x^\mu) \chi(r) Y_l(\theta), \quad (4.8)$$

e

$$A_r(x^M) = \sum_{l=0}^{\infty} A_r^{(l)}(x^\mu) \xi(r) Y_l(\theta). \quad (4.9)$$

Na decomposição acima, o termo  $Y_l(\theta)$  representa as auto-funções do operador Laplaciano escalar  $\Delta$ , esse último quando tomado sobre a esfera unitária apresenta autovalor  $l^2$ , de forma que podemos escrever

$$\Delta Y_l(\theta) = l^2 Y_l(\theta), \quad (4.10)$$

com  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Ademais, as funções  $Y_l(\theta)$  satisfazem a seguinte condição de ortogonalidade

$$\int_0^{2\pi} d\theta Y_l(\theta) Y_{l'}(\theta) = \delta_{ll'}. \quad (4.11)$$

Então, da Eq. (4.4) obtemos

$$(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - \frac{W}{\gamma} l^2) A_r^{(l)}(x^\mu) = 0. \quad (4.12)$$

De modo que Eq. (4.5) nos leva a uma solução geral para  $\xi(r)$  dada por

$$\xi(r) = \alpha \gamma^{1/2} W^{-2}, \quad (4.13)$$

com  $\alpha \in \mathbb{R}$  sendo uma constante de integração. A função  $\xi(r)$  na (4.13) é uma extensão direta da análoga obtida por Oda [68].

Finalmente, com o uso de (4.8) e (4.9) vemos que a (4.6) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\left[ m^2 - \frac{W}{\gamma} l^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_r (W \sqrt{\gamma} \partial_r) \right] A_\lambda^{(l)}(x^\mu) \chi(r) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\lambda A_r^{(l)}(x^\mu) \partial_r (W \sqrt{\gamma} \xi(r)), \quad (4.14)$$

onde os  $A_\lambda^{(l)}(x^\mu)$  devem satisfazer a seguinte relação

$$(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2) A_\lambda^{(l)}(x^\mu) = 0. \quad (4.15)$$

A eq. (4.14) difere daquela obtida por Oda em [68] em virtude da presença do termo não homogêneo situado no segundo membro da equação. Essa diferença surge devido ao fato da função  $\xi(r)$  obtida neste trabalho ser mais geral do que aquela obtida em [68], isto é,

$$\xi(r) = \alpha e^{\frac{3}{2}cr}, \quad (4.16)$$

onde  $c$  e  $\alpha$  são constantes reais. De modo a avançarmos em nosso desenvolvimento vamos

restringir nossa atenção aos casos em que

$$\partial_\lambda A_r^{(l)}(x^\mu) = 0. \quad (4.17)$$

A condição (4.17) produz a seguinte equação diferencial homogênea

$$\left[ m^2 - \frac{W}{\gamma} l^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_r (W \sqrt{\gamma} \partial_r) \right] \chi(r) = 0, \quad (4.18)$$

a condição adicional sobre o campo vetorial de calibre pode ser posta da seguinte maneira,  $A_r(x^\mu, r, \theta) = C \sum_{l=0} \xi(r) Y_l(\theta)$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ . Sem perda de generalidade, assumimos  $C = 1$  por simplicidade, deste modo a condição (4.17) estabelece que a componente radial do campo de calibre não tem dependência nas coordenadas da brana. Note que, de modo a mantermos a condição (4.17) em concordância com a (4.12), é necessário de agora em diante fixarmos a atenção em  $l = 0$ , conhecido como estados de onda  $s$ .

Neste caso a eq.(4.18) transforma-se em uma do tipo Sturm-Liouville. Além disso, vamos procurar por soluções que satisfazem as seguintes condições de contorno [25, 62, 68]

$$\chi'(0) = \lim_{r \rightarrow \infty} \chi'(r) = 0. \quad (4.19)$$

Denominando as soluções da eq. (4.18) como  $\chi_i(r)$  and  $\chi_j(r)$ , a relação de ortogonalidade entre elas é dada em analogia com [25] por

$$\int_0^\infty \sqrt{W(r, c)\beta(r, a)} \chi_i^* \chi_j dr = \delta_{ij}. \quad (4.20)$$

De modo que agora podemos reescrever a eq. (4.18) do seguinte modo

$$\chi''(r) + \left( \frac{3}{2} \frac{W'}{W} + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \right) \chi'(r) + \frac{m^2}{W} \chi(r) = 0. \quad (4.21)$$

A análise das soluções da equação(4.21) fornecerá o comportamento dos modos massivo e não massivos próximos à brana bem como seu comportamento assintótico. Esta análise será realizada em duas etapas como descrito a seguir.

## 4.2 Modo Zero

Iremos nesta seção estudar as soluções para os modos não massivos do campo vetorial de calibre. Note que para  $m = 0$ , uma função constante  $\hat{\xi}_0$  é solução particular da (4.21). Uma vez que a função peso  $\sqrt{W(r, c)\beta(r, a)}$  possui suporte compacto em torno da origem, a função  $\hat{\xi}_0$  é uma solução normalizada da (4.21). De modo que, da relação de ortogonalidade (5.44), nós podemos construir uma solução de modo zero normalizada da

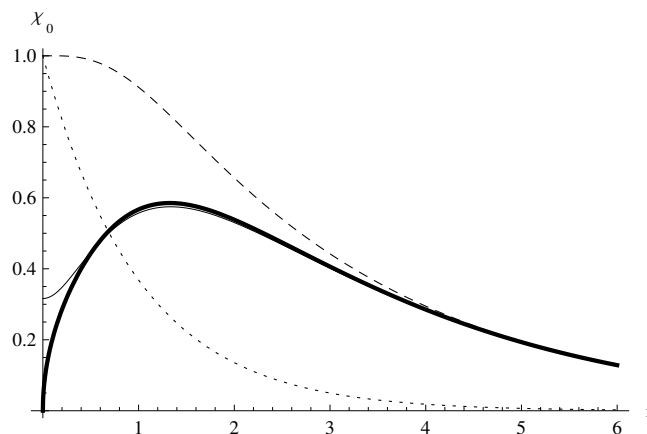


Figura 4.1:  $\chi_0(r, a)$  para  $c = 1$  e  $a = 1$  (linha tracejada),  $a = 0, 1$  (linha fina),  $a = 0$  (linha cheia). Note que, a curva para modo zero de defeitos do tipo corda está presente para efeito de comparação (linha pontilhada).

mesma maneira que a encontrada em [25, 68], ou seja,

$$\chi_0(r, a, c) = NW(r, c)^{\frac{1}{2}}\beta(r, a)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.22)$$

onde  $N$  é uma constante de normalização dada por

$$N^2 = \int_0^\infty W(r, c)^{\frac{3}{4}}\beta(r, a)dr. \quad (4.23)$$

O modo zero (4.22) está representado graficamente em (4.1). Como veremos na próxima seção, o modo zero (4.22) satisfaz uma equação análoga a equação de Schrödinger para  $m = 0$ . Da figura (4.1) podemos notar a influência do parâmetro de resolução  $a$  na suavização das soluções de modo zero na origem. Para  $a = 0$ , linha cheia no gráfico, o modo zero se anula na origem. Este último fato realça que em geometrias do tipo-corda em que a condição de regularidade  $\gamma(0) = 0$  se apresenta, o modo zero está mal definido. Esta característica não surge em modelos do tipo corda (linha pontilhada) pois, em tais geometrias somente soluções exteriores são consideradas, ou seja,  $\beta$  constante [24]. Para  $a = 0, 1$  (linha cheia), o modo zero é suavizado e exibe um comportamento cônico próximo a origem(valor constante e não nulo).

O comportamento suave fornece uma simetria  $Z_2$  ao modo zero. Além do mais, todas as curvas são suaves e satisfazem as condições de contorno na origem. Note que para efeito de comparação o comportamento exponencial que esta presente no gráfico, em linha pontilhada, é exatamente aquele encontrado na literatura para defeitos do tipo-corda [24, 68].

### 4.3 Modos Massivos

Nesta seção vamos estudar as propriedades da equação (4.21) para  $m \neq 0$ , ou seja, buscamos soluções para os modos massivos do campo vetorial de calibre. Usando as expressões para os respectivos fatores métricos, isto é,  $W(r, c)$  e  $\gamma(r, c, a)$  obtemos após algumas simplificações

$$\chi'' + \left[ -\frac{3}{2}c \tanh(cr)^2 + 2u \frac{(u^2 + 9a^2)^{1/2}}{(u^2 + 6^2)^{3/2}} \right] \chi' + \exp(cr - \tanh cr) m^2 \chi = 0. \quad (4.24)$$

O comportamento exibido pela equação (5.56) quando  $r \rightarrow \infty$  é aquele encontrado na literatura e corresponde ao característico dos cenários do tipo corda, ou seja,

$$\chi'' - \frac{3}{2}c \chi' + m^2 e^{cr-1} \chi = 0, \quad (4.25)$$

de modo que podemos declarar que assintoticamente o comportamento do campo apresenta as mesmas características que aqueles encontrados em defeitos do tipo corda com uma deformação no termo de massa dada por  $m \rightarrow e^{-1/2} m$  [24, 68].

Voltando a equação (4.25) verificamos que suas soluções podem ser expressas em termos das funções de Bessel de primeira e segunda espécies como apresentadas em [24, 68]

$$\chi(r) = e^{\frac{3cr}{4}} \left[ C_1 J_{\frac{3}{2}} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{cr-1}{2}} \right) + C_2 Y_{\frac{3}{2}} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{cr-1}{2}} \right) \right], \quad (4.26)$$

de maneira que, o espectro de Kaluza-Klein correspondente é aquele encontrado em defeitos do tipo corda.

Na vizinhança da brana, isto é, quando tomamos  $r \rightarrow 0$  e  $a \neq 0$ , a (5.56) vai imediatamente em

$$\chi'' + \frac{r}{4a^2} \chi' + m^2 \chi = 0. \quad (4.27)$$

Após algumas investigações, verifica-se que as soluções da eq. (4.27) podem ser escritas em termos dos polinômios de Hermite e das funções de Kummer de primeira espécie, ambas de ordem  $n$ , onde  $n$  está relacionado com o parâmetro de resolução através de

$$n = -1 + 4a^2 m^2, \quad (4.28)$$

com  $\xi(r)$  neste caso dado pela seguinte combinação

$$\chi(r) = e^{-\frac{r^2}{8a^2}} \left[ C_1 H_n \left( \frac{r}{2\sqrt{2}a} \right) + C_2 {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, \frac{r^2}{8a^2} \right) \right]. \quad (4.29)$$

As soluções próxima a brana para alguns valores de  $n$  são exibidas na figura (4.2). Podemos verificar a partir do gráfico que os modos KK são bem definidos e suaves próximo a origem. De modo que, podemos declarar que o parâmetro de resolução altera ligeiramente os modos de KK próximos a brana fornecendo assintoticamente os mesmo

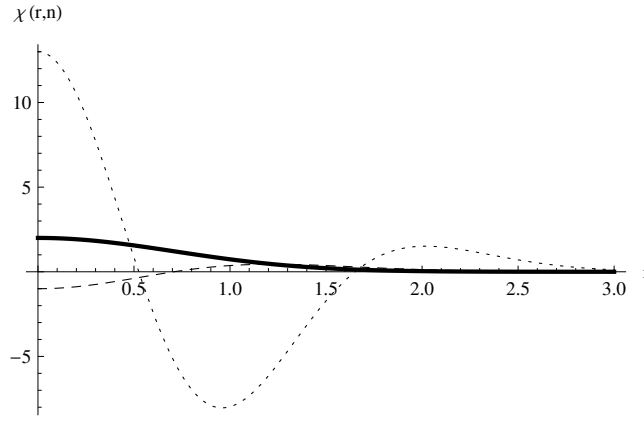


Figura 4.2:  $\chi(r, n)$  para alguns valores de  $n$ . Para  $n = 0$  (linha cheia),  $n = 2$  (linha tracejada) e  $n = 4$  (linha pontilhada).

modos que os encontramos em modelos do tipo corda [24].

## 4.4 Potencial Quântico

Nesta seção vamos nos dedicar ao estudo dos modos de Kaluka-Klein levando nosso modelo a um análogo quântico. Este procedimento fornecerá um estudo qualitativo do problema descrito na seção anterior uma vez que, só obtemos soluções em regimes próximo e longe da brana. Tal método consiste em transformar a equação(4.21) em uma do tipo Schrödinger e estudar o potencial quântico análogo daí obtido. Para este fim, vamos começar com a seguinte mudança de variável  $r \Rightarrow z = f(r)$ , onde  $z(r)$  é tal que

$$\frac{dz}{dr} = v(r). \quad (4.30)$$

Essa última nos leva a seguinte equação na variável auxiliar

$$\ddot{\chi} + \left( \frac{3\dot{W}}{2W} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{v}}{v} \right) \dot{\chi} + m^2 \frac{\chi}{v^2 W} = 0, \quad (4.31)$$

onde o ponto sobre  $\xi$ ,  $W$ ,  $\beta$  e  $v$  denota uma derivada com respeito a variável  $z$ . Além disso, com a escolha adicional de que  $v^2 W = 1$ , obtemos que  $z$  é dado em termos de  $W$  por

$$z = z(r) = \int^r W^{-1/2} dr'. \quad (4.32)$$

Com o uso da mudança de variável descrita em (5.45) diretamente na (4.31), chegamos após algumas simplificações a

$$\ddot{\chi}(z) + \left( \frac{\dot{W}}{W} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \dot{\chi}(z) + m^2 \chi(z) = 0. \quad (4.33)$$

A última equação pode ser simplificada com auxílio da função  $\Omega$  auxiliar, onde  $\Omega$

relaciona-se  $\chi(z)$  através de

$$\chi(z) = \Omega(z)\Psi(z). \quad (4.34)$$

Com esta mudança e após alguns ajustes a equação (4.33) pode ser posta da seguinte forma

$$\ddot{\Psi} + \left(2\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{W}}{W} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\dot{\Psi} + \left[m^2 + \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \left(\frac{\dot{W}}{W} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right]\Psi = 0. \quad (4.35)$$

Finalmente, escolhemos  $\dot{\Omega}/\Omega$  de tal maneira que

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{W}}{W} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right). \quad (4.36)$$

A condição anterior faz com que  $\Psi(z)$  passe a satisfazer uma equação do tipo

$$-\ddot{\Psi}(z) + V(z)\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (4.37)$$

que nada mais é que uma equação análoga a de Schrödinger encontrada em mecânica quântica com a função  $V(z)$  dado por explicitamente por

$$V(z) = \frac{1}{2}\frac{\ddot{W}}{W} - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{W}}{W}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{3}{16}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\dot{\beta}}{\beta}\frac{\dot{W}}{W}. \quad (4.38)$$

De modo a fazer uma análise qualitativa a partir do gráfico do potencial obtido  $V(Z)$  faz-se necessário retornar a variável original  $r$ . De modo que ao final de todo processo chegamos a seguinte expressão para  $V$  em termos de  $r$

$$V(r, c, a) = \frac{1}{4}W \left[ \left(\frac{W'}{W} + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\right)^2 + 2\left(\frac{W'}{W} + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\right)' + \frac{W'}{W}\left(\frac{W'}{W} + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\right) \right]. \quad (4.39)$$

Esta última expressão é o que chamamos de potencial do tipo Schrödinger e está representado na figura (4.3). Note que as soluções exibidas em (4.21) para os modos não massivos satisfazem a equação Schrödinger (4.37) para  $m = 0$ , como requerido em [63, 69, 70]. O parâmetro de resolução  $a$  controla aspectos gerais do poço tais como altura e profundidade bem como seu valor na origem.

Além disso, deve se observar que o potencial diverge na origem para  $a = 0$  possibilitando a existência de modos vetoriais taquiônicos sobre a brana. Por outro lado, para  $a \neq 0$  o potencial é estritamente positivo na origem. De modo que o parâmetro de resolução  $a$  nos permite lidar com a existência ou não de modos taquiônicos sobre a brana.

## 4.5 Discussão dos Resultados

Neste cenário, analisamos as características dos modos não massivos e massivos para o campo vetorial de calibre. Na análise dos estados de onda s nós obtemos um modo não

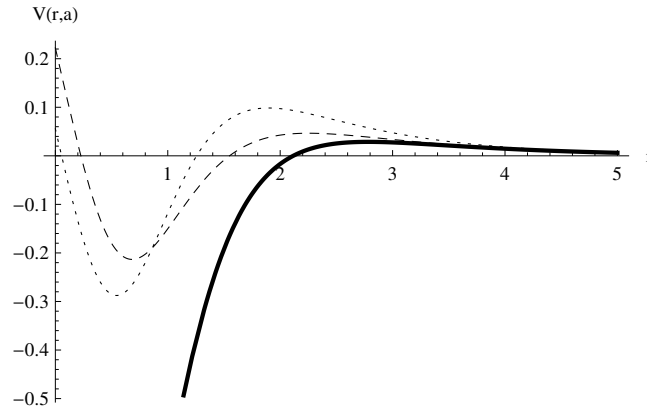


Figura 4.3:  $V(r, a)$  para alguns valores de  $a$  e  $c = 1$ . Os valores  $a = 0$  (linha cheia),  $a = 0.5$  (linha tracejada) e  $a = 3$  (linha pontilhada) são exibidos.

massivo normalizado e uma torre de estados de Kaluza-Klein próximos a brana. Além disso, encontramos que o parâmetro de resolução fornece uma simetria  $Z_2$  para o modo zero, bem como evita que o mesmo se anule sobre a brana. Podemos inferir então que, o parâmetro de resolução fornece um mecanismo de suavização para os modos vetoriais na vizinhança da brana e estes por sua vez exibem o comportamento característico daqueles encontrados em cenários do tipo-corda para pontos distantes da brana.

Além disso, como pode ser facilmente verificado o modo zero satisfaz a equação do tipo Schrödinger para  $m = 0$ , como haveria de ser. Ainda, oriundo da equação do tipo Schrödinger o potencial obtido via manipulação da equação diferencial apresenta um poço infinito para  $a = 0$ , levando a existência de modos taquiônicos sobre a brana. No entanto, para  $a \neq 0$ , o potencial apresenta a característica de ser positivo e repulsivo na origem.

Com efeito, como verificado do gráfico para o potencial, os modos massivos são suaves próximos a brana e tem o comportamento característico dos do tipo-corda assintoticamente. Além de que, o parâmetro de resolução  $a$  nos permite definir um modo zero bem definido sobre a brana, podendo ser utilizado para eliminar modos taquiônicos sobre a mesma. Finalmente, um apanhado dos resultados deste capítulo deram origem a uma publicação [14].

# Capítulo 5

## Campos de Gauge em um Cenário do tipo Corda-Charuto

No capítulo anterior, vimos como as propriedades do campo vetorial de calibre são influenciadas de forma direta pela ação de um fluxo geométrico. Na ocasião, a variedade transversa à nossa 3-brana foi tomada como sendo uma seção  $\mathcal{C}_2$  do conifold resolvido onde o fluxo geométrico era gerado a partir de mudanças no parâmetro de resolução  $a$  do cone. Como observado, o fluxo geométrico mostrou-se útil na localização do modo zero para o campo vetorial de calibre sobre a brana. Além disso, de definir o campo sobre a brana bem como na eliminação de no processo de suavização da geometria. Contudo, não há nenhum motivo em particular para detemos nossas atenções unicamente sobre o fluxo geométrico como descrito no capítulo anterior. De modo que, neste capítulo iremos considerar novamente a ação de um fluxo geométrico sobre o campo vetorial de calibre só que desta vez gerado a partir do fluxo de Ricci.

O interesse em fluxos geométricos não é de hoje, com efeito, outros fluxos podem ser encontrados na literatura que não o de Ricci. Em 1956 Mullins [71] propôs um fluxo para modelar o movimento do contorno de grãos. Já em 1964, Eells e Sampson [72] introduziram a idéia de fluxo de calor no estudo de mapeamentos harmônicos. Em 1974 Firey [73] propôs o fluxo de curvatura de Gauss com o objetivo de modelar a forma de desgaste em rochas. Em 1978, Brakke [74] estudou o fluxo de curvatura média provando propriedades de regularidade para esta. Além das já citadas, versões discretas do fluxo de Ricci têm sido empregadas na literatura no processo de formação de imagens, parametrização de superfícies e análise de formas [75].

Neste capítulo, vamos utilizar como espaço transversal à nossa 3-brana do tipo-corda a geometria do sóliton charuto de Hamilton, isto é, neste capítulo descreveremos o cenário conhecido como corda charuto [17]. O termo charuto realça a simetria cilíndrica presente neste cenário, em que o raio desse desaparece sobre a brana e converge assintoticamente para um cilindro para pontos distantes da mesma [67].

## 5.1 Fluxo de Ricci: o que é?

Entre 1980 e 1990, Richard Streit Hamilton desenvolveu um programa baseado no fluxo de Ricci o qual, leva a conjectura de Jules Poincaré (1854-1912). A conjectura Poincaré (1904) permaneceu como um dos problemas fundamentais da matemática sem solução por quase um século mesmo após o tremendo desenvolvimento na área da topologia durante o século XX . De forma simplificada, este estabelece que qualquer espaço sem furos seria equivalente a uma esfera deformada. No entanto, somente por volta de 2003, após uma séries de trabalhos originais postados pelo matemático russo Grigori Yakovlevich Perelman (agraciado com a medalha fields em 2006) o problema foi finalmente resolvido.

Nosso ponto de partida é uma variedade suave  $\mathcal{M}$ , munida de métrica Riemanniana  $g_\lambda$ , caracterizada pelo parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Para cada  $\lambda$  obtemos uma família de variedades  $\mathcal{M}_D$  com estruturas geométricas distintas. O fluxo de Ricci deforma variedades Riemannianas via tensor de Ricci produzindo uma nova estrutura geométrica caracterizada por  $(\mathcal{M}, g'_\lambda)$ . O processo de deformação da métrica  $g$  é obtido ao permitir que esta evolua de acordo com a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial g_{ij}(\lambda)}{\partial \lambda} = -2R_{ij}(\lambda), \quad (5.1)$$

onde  $R_{ij}$  é o tensor de Ricci associado à métrica  $g_{ij}$ . O fluxo dado por (5.1) é conhecido como fluxo de Ricci em virtude de o tensor de Ricci ser o responsável pela geração do fluxo. Outros fluxos geométricos são possíveis, desde que o gerador de fluxo seja outro, por exemplo, se ao invés do tensor de Ricci tomarmos o escalar de curvatura como gerador obtemos o fluxo de Yamabi.

As propriedades analíticas da (5.1) podem ser melhor investigadas se recordarmos que a equação que governa o fluxo de calor, a qual é do tipo difusão, para um corpo isolado é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \quad (5.2)$$

Com a temperatura tornando-se uniforme a medida que o parâmetro tempo evolui. A relação de (5.1) com a equação do calor é feita por uso de coordenadas especiais denominadas harmônicas, isto é,  $\Delta x^i = 0$ , de modo que para todo  $i$  e  $j$ , temos [61]

$$R_{ij} \approx -\frac{1}{2} \Delta g_{ij}. \quad (5.3)$$

Hamilton propôs tal equação pois sabe-se da teoria do calor, que essa tende a remover eventuais singularidades iniciais. De forma que, o fluxo de Ricci pode ser compreendido como um fluxo análogo ao de calor sobre a variedade, onde a métrica de forma análoga a temperatura tende a tornar-se simétrica (a curvatura de Ricci torna-se constante) com o decorrer do tempo. Além disso, o fluxo pode ser usado para obter informações sobre a estabilidade das soluções e a formação de singularidades [60, 76, 61]. Em geral, estamos interessados em soluções para valores de  $t$  relativamente longos (note aqui a substituição

do parâmetro  $\lambda$  pela variável tempo). De modo que é bastante interessante procurar por equações que fornecem a evolução no tempo de quantidades tais como: o tensor de Riemann, tensor de Ricci, o escalar de curvatura bem como outras quantidades geométricas. Por ser a mais fácil, a equação que fornece a evolução no tempo do escalar de curvatura é dada por [77]

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \Delta R + 2|Rc|^2, \quad (5.4)$$

esta última apresenta uma maior similaridade com a equação do calor (5.2). Outra propriedade fundamental do fluxo de Ricci é a sua invariância de escala, a qual se mostra bastante útil na análise de singularidades [61]. De fato, dado  $\lambda > 0$ , se definirmos um novo fluxo reescalando o tempo por  $\lambda$  e as distâncias por  $\lambda^{1/2}$  temos

$$\tilde{g}(x, t) = \lambda g\left(x, \frac{t}{\lambda}\right), \quad (5.5)$$

para  $t \in [0, \lambda T]$  e com  $g(t)$  uma família de métricas suaves definidas no intervalo  $[0, T]$  chegamos a

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \lambda}(x, t) = \frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, t/\lambda), \quad (5.6)$$

de modo que  $\tilde{g}$  também é um fluxo de Ricci. A ação deste reescalamento deixa o tensor de Ricci invariante mas altera o escalar de curvatura por um fator  $\lambda^{-1}$  preservando o fluxo.

## 5.2 Sóliton charuto de Hamilton

Uma solução particularmente interessante da (5.1) e que será usada mais a frente, é conhecida como *sóliton charuto*  $\mathcal{H}_2$ . Essa é uma solução estacionária e bidimensional proposta em [78] para o fluxo de Ricci. Conhecida também como solução eterna [60, 78, 79, 61], essa possui a seguinte métrica em coordenadas polares

$$ds_\lambda^2 = \frac{1}{(e^{4\lambda} + r^2)}(dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (5.7)$$

onde  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ . De modo a ver que a métrica em 5.7 é uma solução para o fluxo de Ricci, precisamos determinar o tensor de Ricci para a mesma. Lembrando que os símbolos de Christoffel são obtidos através

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (5.8)$$

De modo que através de cálculo direto

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -\frac{x}{e^{4\lambda} + x^2 + y^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -\frac{y}{e^{4\lambda} + x^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2$ . Em termos dos símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci tem suas componentes dadas por

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{k\sigma}^k \Gamma_{ij}^\sigma - \Gamma_{j\rho}^k \Gamma_{ik}^\rho. \quad (5.10)$$

Com o uso dos símbolos de Christoffel para  $g_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}(e^{4\lambda} + x^2 + y^2)^{-1}$  obtemos

$$R_{ij} = \frac{2e^{4\lambda}}{(e^{4\lambda} + x^2 + y^2)^2} \delta_{ij}. \quad (5.11)$$

Por outro lado, temos

$$g'_{ij} = -\frac{4e^{4\lambda}}{(e^{4\lambda} + x^2 + y^2)^2} \delta_{ij} \quad (5.12)$$

onde  $(\cdot)$  denota diferenciação com respeito a  $\lambda$ . O escalar de curvatura desta variedade (*soliton cigar*) é dado por

$$R = 4 \frac{e^{4\lambda}}{r^2 + e^{4\lambda}}. \quad (5.13)$$

Esse é sempre positivo para  $r \in [0, \infty)$  e converge assintoticamente para um cilindro. Note que a métrica como definida em (5.7) não está com a dimensão correta, ou seja,  $[g] = L^2$ , em virtude do termo presente no denominador. Introduziremos constantes  $C_1$  e  $C_2$ , com dimensão de comprimento, de modo a produzir a dimensão correta [17] da mesma

$$ds_\lambda^2 = \frac{C_1^2}{C_2^2 e^{4\lambda} + r^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2). \quad (5.14)$$

De modo a produzir uma métrica mais simples em forma e que se mostrará bastante útil deste ponto em diante, adotaremos a seguinte mudança de variável [60],[79]

$$r = a \sinh(k\rho) \quad (5.15)$$

onde  $a$  tem dimensão de  $[a] = L$  e  $k = C_1^{-1}$  [17]. Com efeito,  $a$  define um fluxo de uma variedade em outra. Contudo, de modo a obter apenas um parâmetro livre gerador do fluxo, devemos relacionar  $a$  com  $k$ . A identificação  $C_1 = C_2 e^{4\lambda} = a$  deixa a métrica (5.14) assim

$$ds_k^2 = d\rho^2 + \frac{1}{k^2} \tanh^2(k\rho) d\theta^2, \quad (5.16)$$

onde  $k$  será identificado como parâmetro de evolução. Na verdade,  $k$  está diretamente relacionado à constante cosmológica do espaço ambiente  $\Lambda$  [25, 24] através da relação

$$k^2 = -\frac{2}{5} \kappa_6 \Lambda. \quad (5.17)$$

A seguir serão fornecidos detalhes para construção do cenário corda charuto. Em seguida, os efeitos físicos que esse espaço transversal pode gerar sobre o campo vetorial ao evoluir será investigado.

### 5.3 Construção do cenário corda-charuto

Terminada a descrição da geometria do sóliton charuto na seção anterior, nosso intuito agora é utilizá-la como espaço transversal à nossa brana tipo-corda. Com efeito, a ação para o campo gravitacional deste espaço ambiente seis-dimensional não-fatorizável  $\mathcal{M}_6 = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{H}_2$  é a ação de Einstein-Hilbert usual com constante cosmológica  $\Lambda$ . Aqui  $\mathcal{H}_2$  representa o sóliton charuto descrito na seção anterior e  $\mathcal{M}_4$  a nossa brana. Com efeito, a ação com a presença do termo de fonte  $\mathcal{L}_m$  é

$$S_g = \int_{\mathcal{M}_6} \left( \frac{1}{2\kappa_6} R - \Lambda + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} d^6x \quad (5.18)$$

onde,  $\kappa_6 = 8\pi/M_6^4$  e  $M_6^4$  é a massa de Planck de  $\mathcal{M}_6$ . Além disso, a métrica com simetria axial é fornecida pelo seguinte *Ansatz*

$$ds_6^2 = \sigma(r, k) \hat{g}_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu + dr^2 + \gamma(r, k) d\theta^2, \quad (5.19)$$

onde a função  $\sigma(r, k)$  conhecida como fator de *warp* já apareceu aqui antes ao tratarmos do conifold resolvido e é dada por

$$\sigma(r, k) = e^{-(kr - \tanh kr)}, \quad (5.20)$$

onde  $k$  é o parâmetro de evolução. E como já mencionado anteriormente,  $\sigma(r, k)$  satisfaz as condições de regularidade na origem. A componente angular da métrica é dada por,

$$\gamma(r, k) = \frac{1}{k^2} [\tanh(kr)]^2 \sigma(r, k), \quad (5.21)$$

onde  $\gamma(r, k)$  satisfaz as condições usuais de regularidade na origem, a saber,

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= 0, \\ (\sqrt{\gamma})'(0) &= 1, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde  $(\prime)$  denota derivada com respeito a variável  $r$ . Assim como no caso do conifold resolvido, a componente angular da métrica neste caso também exibe uma simetria  $Z_2$ . Além disso,  $\gamma(r, k)$  exibe um comportamento cônico próximo a brana com decaimento exponencial para pontos distantes conforme pode ser observado na figura (5.1).

As equações de Einstein em seis dimensões com constante cosmológica  $\Lambda$  do *bulk* e tensor momento energia  $T_{ab}$  são descritas por

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = -\kappa_6 (\Lambda g_{ab} + T_{ab}), \quad (5.23)$$

onde

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{ab}}. \quad (5.24)$$

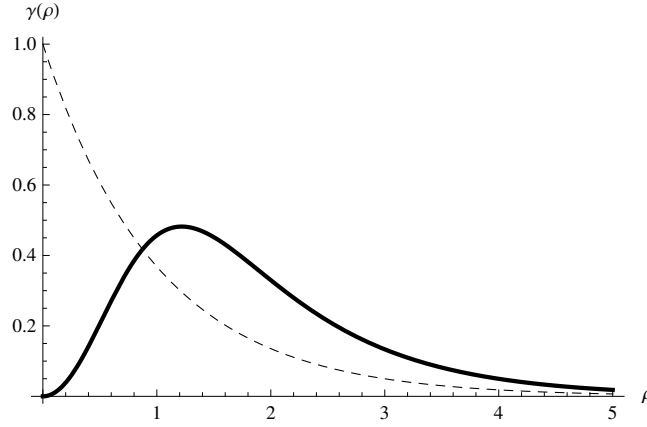


Figura 5.1: Componente angular da métrica  $\gamma(r, k)$  para um defeito tipo-corda fina (linha tracejada) e para a solução tipo corda-charuto (linha cheia).

De posse da métrica como definida em (5.19), as equações de Einstein produzem [25]

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)' + \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{3\sigma'\gamma'}{4\sigma\gamma} - \frac{1}{4} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)' &= -\kappa_6(\Lambda + t_0(r)) + \frac{\kappa_4\Lambda_4}{\sigma}, \\ \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma'\gamma'}{\sigma\gamma} &= -\kappa_6(\Lambda + t_r(r)) + \frac{2\kappa_4\Lambda_4}{\sigma}, \\ 2 \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)' + \frac{5}{2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 &= -\kappa_6(\Lambda + t_\theta(r)) + \frac{2\kappa_4\Lambda_4}{\sigma} \quad (5.25) \end{aligned}$$

onde assumimos que as componentes do tensor momento energia exibem uma simetria cilíndrica, isto é,

$$T_\nu^\mu = t_0(r)\delta_\nu^\mu, \quad (5.26)$$

$$T_r^r = t_r(r), \quad (5.27)$$

$$T_\theta^\theta = t_\theta(r). \quad (5.28)$$

O escalar de curvatura para a métrica como definida em (5.19) é dado por [17]

$$\begin{aligned} R &= \frac{\hat{R}}{\sigma} - \left[ 4 \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)' + 5 \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + 2 \frac{\sigma'\gamma'}{\sigma\gamma} \right] \\ &= \frac{\hat{R}}{\sigma} - k^2 \left[ \frac{15}{2} \tanh^4 k\rho - 16 \tanh k\rho \operatorname{sech}^2(k\rho) - 4 \operatorname{sech}^2(k\rho) \right] \quad (5.29) \end{aligned}$$

onde  $\hat{R}$  é a curvatura da brana. Este último tem seu esboço em (5.2) para  $\hat{R} = 0$ . Além disso,  $R$  converge assintoticamente para soluções do tipo corda exteriores [25, 62, 24].

A partir das equações de Einstein é possível obter as componentes do tensor momento energia para essa fonte [17]. Explicitamente

$$t_0(r, k) = -\frac{k^2}{\kappa_6} \left( \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 kr - 7 \operatorname{sech}^2 kr - \frac{13}{2} \operatorname{sech}^2 kr \tanh kr \right),$$

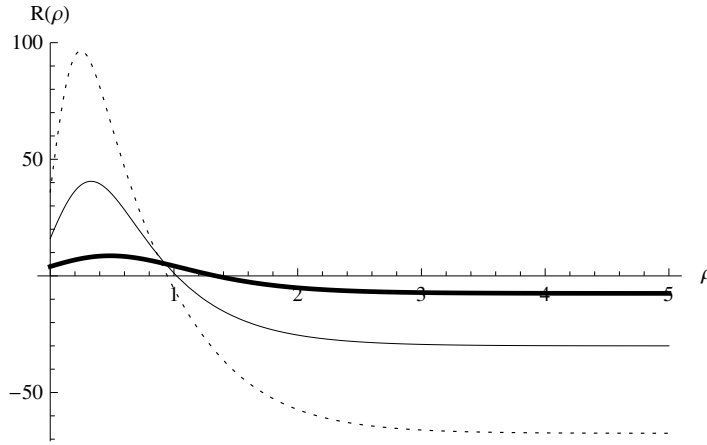


Figura 5.2: Escalar de Ricci para o espaço ambiente  $\mathcal{M}_6$ . A variedade é livre de singularidades e converge para um espaço  $AdS_6$  assintoticamente.

$$\begin{aligned}
t_r(r, k) &= -\frac{k^2}{\kappa_6} \left( \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 kr - 5 \operatorname{sech}^2 kr - 2 \operatorname{sech}^2 kr \tanh kr \right), \\
t_\theta(r, k) &= -\frac{k^2}{\kappa_6} \left( \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 kr - 5 \operatorname{sech}^2 kr - 4 \operatorname{sech}^2 kr \tanh kr \right).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Do mesmo modo que no caso do conifold descrito no capítulo anterior, as componentes acima descritas, satisfazem as condições de energia dominante, forte e fraca [17]. Este último fato não é compartilhado por modelos do tipo corda-fina [25].

### 5.3.1 Localização do Campo Vetorial de Calibre

Uma vez que estabelecemos e discutimos alguns pormenores relacionados à geometria do cenário corda-charuto, nos resta agora analisar o efeito que o fluxo geométrico gerado pelo fluxo de Ricci pode ter sobre o campo vetorial. Iniciamos com a ação usual para o campo vetorial com simetria  $U(1)$ , ou seja,

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} F_{MN} F_{RS}, \tag{5.31}$$

onde  $F_{MN} = \nabla_M A_N - \nabla_N A_M$ . A partir da ação como definida em (5.31), as equações de movimento são obtidas de forma direta

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_R (\sqrt{-g} g^{RM} g^{LN} F_{MN}) = 0. \tag{5.32}$$

Além disso, vamos considerar o gauge de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{5.33}$$

e uma configuração em que o campo é puramente radial, ou seja,  $A_\theta = 0$ , como usual [68, 24, 14]. Além disso, desde que nossa 3-brana seja efetivamente plana e apresente simetria axial, a componente radial do campo vetorial  $A_r$  não deve depender das coordenadas da

brana, isto é, [14]

$$A_r = A_r(r, \theta) \Rightarrow \partial_\lambda A_r(x^\mu) = 0. \quad (5.34)$$

Com o uso da métrica para o cenário corda-charuto definida anteriormente, e com a escolha do gauge descrito acima, as equações de movimento (5.32) adquirem a seguinte forma compacta

$$\left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{\sigma(r, c)}{\gamma(r, c)} \partial_\theta^2 \right) A_r = 0, \quad (5.35)$$

$$\partial_r \left( \frac{\sigma^2(r, c) \sqrt{\gamma(r, c)}}{\gamma(r, c)} \partial_\theta A_r \right) = 0, \quad (5.36)$$

além disso

$$\left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{\sigma}{\gamma} \partial_\theta^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_r \sigma \sqrt{\gamma} \partial_r \right) A_\lambda = 0. \quad (5.37)$$

Com a devida decomposição de Kaluza-Klein [68]

$$A_\mu(x^M) = \sum_{n,l=0}^{\infty} A_\mu^{(n,l)}(x^\mu) \chi_n(r) Y_l(\theta) \quad (5.38)$$

e

$$A_r(x^M) = \sum_{l=0}^{\infty} A_r^{(l)}(x^\mu) \xi(r) Y_l(\theta), \quad (5.39)$$

produzem a partir de (5.35) a relação

$$\left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - \frac{\sigma}{\gamma} l^2 \right) A_r^{(l)}(x^\mu) = 0. \quad (5.40)$$

De forma que, de agora em diante, para manter concordância entre (5.35) e (5.34), nos restringiremos aos estados de onda  $s$ , ou melhor, a valores de  $l = 0$  [14]. Além disso, a (5.36) leva-nos à seguinte solução geral para  $\xi(r)$

$$\xi(r) = k \gamma^{1/2} \sigma^{-2}, \quad (5.41)$$

onde  $k$  é uma constante de integração [14]. Devemos mencionar aqui que a função  $\xi(r)$  na expressão (5.41) é uma extensão direta daquela encontrada por Oda [68]. Finalmente, com o uso da (5.41), a expressão (5.37) se torna

$$\chi_n''(r) + \left( \frac{3\sigma'}{2\sigma} + \frac{1\beta'}{2\beta} \right) \chi_n'(r) + \frac{m_n^2}{\sigma} \chi_n(r) = 0, \quad (5.42)$$

onde  $\beta(r, c) = \gamma(r, c)/\sigma(r, c)$ . A expressão definida em (5.42) governa o comportamento do campo de gauge no espaço ambiente. Deve-se lembrar que esta equação é análoga à equação radial encontrada no estudo do comportamento do gráviton, bastando para isso a simples mudança do fator  $\frac{3}{2}$  por  $\frac{5}{2}$  [25].

Além disso, vamos impor as condições de contorno [68, 25, 62]

$$\chi'_n(0) = \lim_{r \rightarrow \infty} \chi'_n(r) = 0, \quad (5.43)$$

produzindo assim, a relação de ortogonalidade entre  $\chi_i$  e  $\chi_j$  como dada por [25]

$$\int_0^\infty \sigma(r, c)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta(r, c)} \chi_i \chi_j dr = \delta_{ij}. \quad (5.44)$$

É possível transformar a equação KK como definida por (5.42) em uma do tipo Schrödinger. Para isso, vamos considerar a seguinte mudança de variável independente [17]

$$z = z(r) = \int^r \sigma^{-1/2} dr' \quad (5.45)$$

e de variável dependente

$$\chi_n(z) = \Omega(z) \Psi_n(z), \quad (5.46)$$

onde  $\Omega = C_1 \sigma^{-1/2} \beta^{-1/4}$ , com  $C_1$  uma constante. As escolhas de (5.45) e (5.46) como mudança de variável levam a expressão (5.42) em uma do tipo Schrödinger com  $\Psi_n(z)$  satisfazendo a equação

$$-\ddot{\Psi}_n(z) + U(z) \Psi_n(z) = m_n^2 \Psi_n(z), \quad (5.47)$$

onde  $U(z)$  é dado por

$$U(z) = \frac{1}{4} \left[ 2 \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} - \left( \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right)^2 + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 + \frac{\dot{\sigma} \dot{\beta}}{\sigma \beta} \right]. \quad (5.48)$$

Através de cálculo direto é possível reescrever o potencial  $U(z)$  em termos da variável original  $r$ . Com efeito, temos

$$U_k(r) = \frac{\sigma}{4} \left[ \left( \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \right)' + \frac{\sigma'}{\sigma} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \right) \right]. \quad (5.49)$$

O potencial acima está ilustrado na figura (5.3) para  $l = 0$  e indica a possibilidade de encontrar modos ressonantes sobre a brana. Como pode ser observado, o parâmetro  $k$  controla alguns aspectos geométricos do potencial próximo à brana tais como a altura e largura da barreira. Além do que, o potencial diverge na origem para qualquer valor de  $k$  em virtude do comportamento cônico. Este comportamento cônico não pode ser evitado com a simples exclusão de algum valor particular de  $k$  como no caso do conifold resolvido [14].

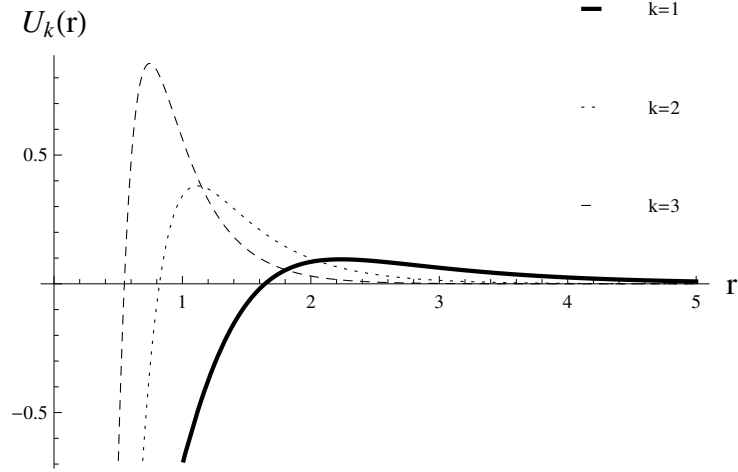


Figura 5.3: Potencial  $U_k(r)$  para alguns valores de  $k$ .

### 5.3.2 Modos não-massivos

Para  $m = 0$ , uma solução da equação (5.42) é fornecida pela seguinte combinação linear

$$\chi_0(r) = C + \tilde{C} \int^r \sigma^{-\frac{3}{2}} \beta^{-\frac{1}{2}} dr', \quad (5.50)$$

onde  $C$  e  $\tilde{C}$  são constantes de integração. Uma vez que a segunda função não satisfaz a condição de ortogonalidade (5.44), nos fixaremos na função  $\chi_0 = C$  como solução da (5.42). Para o cenário do tipo corda fina [68], equação de Schrödinger análoga é

$$-\ddot{\Psi}_n + \frac{2}{z^2} \Psi_n = m_n^2 \Psi_n, \quad (5.51)$$

onde  $z = \frac{2}{c} e^{\frac{c}{2}r}$ . Para  $m = 0$ , a solução da equação acima é dada por

$$\Psi_0(z) = A_1 z^{-1} + A_2 z^2. \quad (5.52)$$

Ao tomar  $A_2 = 0$  em (5.52) obtemos um modo não massivo normalizado análogo ao encontrado no estudo de grávitons [25]

$$\Psi_0(r) = \sqrt{\frac{c}{2R_0}} e^{-\frac{c}{2}r}, \quad (5.53)$$

onde neste caso  $\sigma(r) = e^{-cr}$  e  $\gamma(r) = R_0^2 \sigma(r)$  [25]. A partir da equação do tipo Schrödinger (5.47) para  $m = 0$ , a solução em concordância com a condição de ortogonalidade (5.44) é dada por

$$\psi_0(r, c) = N \sigma(r, k)^{\frac{1}{2}} \beta(r, k)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.54)$$

onde

$$N^2 = \frac{1}{\int_0^\infty \sigma(r, k)^{\frac{5}{2}} \beta(r, k) dr} \quad (5.55)$$

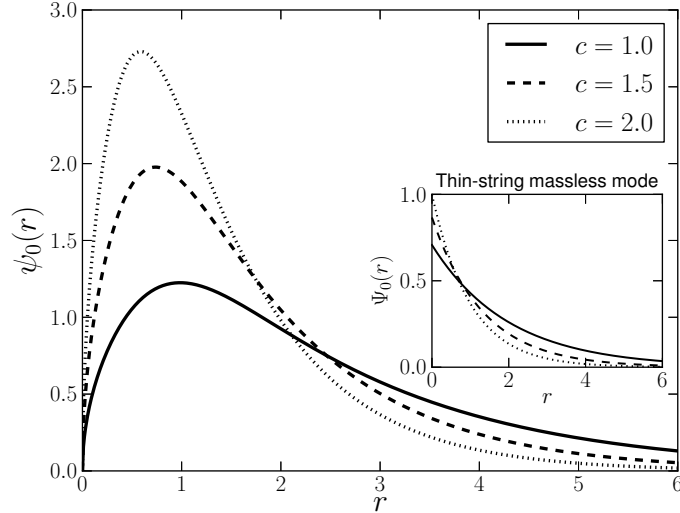


Figura 5.4: Modos não massivos para o cenário corda-charuto e corda-fina (caixa menor) para alguns valores de  $c$ , como indicado na figura. Note que tomamos  $k = c$ , para o cenário corda-charuto, de modo a não sobrecarregar a figura.

representa uma constante de normalização.

Os modos não massivos para este cenário estão representados na figura (5.4) juntamente com os modos do cenário do tipo corda-fina. Estes modos são responsáveis efetivamente pelo campo de gauge sentido sobre a nossa brana. Além disso, os modos não massivos estão mais concentrados próximos a origem se comparados aos dos modos gravitacionais não massivos [25, 17]. Note também que há um deslocamento a partir da origem dos modos não massivos neste cenário, este comportamento segue o mesmo padrão que o da densidade de energia, como mostrado em [17]. Longe do ponto de maior densidade de energia, denominado núcleo, o comportamento exponencial prevalece ao passo que próximo a origem o comportamento cônico característico deste cenário torna nulo o modo. Conectando estes dois regimes se faz presente um pico suave em torno do núcleo da brana que aumenta a medida que  $k$  aumenta, e portanto, o valor da constantes cosmológica do espaço ambiente. Além disso, note que a medida que  $k$  aumenta o comportamento se aproxima daquele exibido pelo modo não massivo em cenários de corda fina.

### 5.3.3 Modos massivos

A partir da expressão para os fatores métricos nós obtemos a equação para os modos KK para  $m \neq 0$  na forma

$$\chi_n'' + c \left[ -\frac{3}{2} \tanh^2 cr + \frac{\text{sech}^2 cr}{\tanh cr} \right] \chi_n' + e^{(cr - \tanh cr)} m_n^2 \chi_n = 0. \quad (5.56)$$

A expressão acima exhibe, assintoticamente, o comportamento presente em modelos de

corda-fina, como apresentado em [68], ou seja,

$$\chi_n''(r) - \frac{3}{2}c\chi_n'(r) + e^{cr}m_n\chi_n(r) = 0, \quad (5.57)$$

cujas soluções gerais são

$$\chi_n(r) = \frac{1}{N_n}e^{\frac{3}{4}cr} \left[ J_{3/2} \left( \frac{2m_n e^{\frac{c}{2}r}}{c} \right) + \alpha_n Y_{3/2} \left( \frac{2m_n e^{\frac{c}{2}r}}{c} \right) \right], \quad (5.58)$$

onde os  $N_n$  representam constantes de normalização e os  $\alpha_n$  coeficientes constantes determinados a partir das condições de contorno. Se consideramos o caso gravitacional [25], as flutuações para o gráviton  $\phi$ , por sua vez, tem o seguinte comportamento

$$\phi_n(r) = e^{\frac{5}{4}cr} \left[ B_1 J_{5/2} \left( \frac{2m_n e^{\frac{1}{2}cr}}{c} \right) + B_2 Y_{5/2} \left( \frac{2m_n e^{\frac{1}{2}cr}}{c} \right) \right], \quad (5.59)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são constantes arbitrárias. De modo que os modos massivos do campo vetorial tem uma amplitude maior próximos à brana, embora se espalhe bem menos através do espaço ambiente se comparados aos grávitons.

Para o modelo do tipo corda-fina, encontramos que as soluções para os modos KK da equação do tipo Schrödinger tomam a forma

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \left[ \frac{(mAz - B)\text{sen}(z) - (A + mBz)\text{cos}(z)}{z} \right], \quad (5.60)$$

com  $A, B$  constantes de integração. Vale a pena mencionar que as soluções acima não estão definidas para  $m = 0$ . Sendo assim, deve haver uma descontinuidade na massa entre o modo não massivo e o massivo nos cenários do tipo corda-fina.

## 5.4 Discussão dos Resultados

Neste capítulo, o que se propôs com a introdução do cenário corda-charuto foi fornecer uma extensão direta do modelo GS para corda-fina. Com a vantagem de que nosso modelo satisfaz todas as condições de regularidade para os coeficientes métricos sobre a brana. Como realçado em [17], o núcleo da brana se apresenta deslocado da origem em virtude da correção cônica promovida pelo modelo. Sendo assim, nosso cenário pode ser considerado como uma solução do tipo-corda espessa pois engloba soluções internas e externas. Além disso, o comportamento do modelo GS é recuperado para grandes distâncias ou no regime de grandes valores de  $k$ .

A análise dos efeitos deste fluxo sobre o campo vetorial foi feita para estados de onda  $s$ , ou seja, para  $l = 0$ . Como observado, os modos não massivos se apresentam deslocados da origem do mesmo modo que a densidade de energia [17]. Assintoticamente o comportamento exponencial é recuperado, ao passo que próximo ao núcleo, os modos não massivos se apresentam suavizados. Além disso, o potencial obtido apresenta a forma

vulcão bem conhecida na literatura com suas características geométricas controladas pelo parâmetro de evolução  $k$  divergindo na origem independente do valor desse.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Nesta trabalho propusemos dois cenários distintos capazes de suportar a localização do campo vetorial. A presença de um parâmetro geométrico em cada um dos cenários influenciou de forma direta características geométricas e físicas de cada modelo. Tais mudanças tornaram-se aparentes quando a variedade transversa passou a evoluir sob ação de um fluxo geométrico. A seguir, um sumário dos principais resultados obtidos aqui será feito juntamente com as perspectivas de trabalhos futuros.

### 6.1 Sobre o cenário conifold resolvido

Na análise de estados de onda  $s$  para o campo vetorial neste cenário, conseguimos construir modos não massivos normalizados e modos de Kaluza Klein próximos à brana. O parâmetro de resolução foi capaz de prevenir modos zeros mal definidos sobre a brana (desaparecendo sobre a mesma) munindo este de uma simetria  $Z_2$ . De modo que este pode ser usado para suavizar os modos vetoriais próximos à brana. Além disso, os resultados estão em concordância com os modos não massivos encontrados em defeitos do tipo corda no regime assintótico.

Deve-se destacar também que o modo zero satisfaz a equação do tipo Schrödinger para  $m = 0$ , como requerido, em geral. O potencial do tipo Schrödinger exibe um poço infinito para  $a = 0$  (caso cônico) levando a existência de possíveis modos taquiônicos, esses podem ser eliminados com a escolha adequada de  $a$ . Para  $a \neq 0$  o potencial é positivo e exibe caráter repulsivo na origem. Os modos massivos apresentam-se suaves na vizinhança da brana exibindo o mesmo comportamento que em defeitos do tipo corda no regime assintótico. Além disso, a ação do fluxo altera de forma direta características geométricas do potencial tais como altura e largura.

Finalmente, os resultado aqui reportados foram submetidos e aceitos para publicação e podem ser encontrado em [14]. Como perspectiva futura pretendemos investigar o comportamento do campo de gauge para estados que não sejam o de onda  $s$ , ou seja, ( $l \neq 0$ ). Além de que, investigar a localização de outros campos do modelo padrão neste cenário bem como, possíveis extensões não comutativas do mesmo.

## 6.2 Sobre o cenário corda-charuto

Novamente, na análise restrita aos estados de onda  $s$  encontramos um modo não massivo deslocado da origem com seu máximo em torno do núcleo da brana. Este último fato também é compartilhado pela densidade de energia [17]. Além de que, estes modos exibem o comportamento suavizado se comparado ao modo não massivo em cenários do tipo-corda fina. Para os modos massivos, as soluções apresentam amplitudes maiores próximas a brana neste cenário se comparadas com aquelas obtidas em cenários de corda-fina. Além disso, todos os modos convergem para o mesmo valor na origem e exibem assintoticamente o comportamento do tipo corda-fina.

Através do potencial do tipo Schrödinger nós obtemos neste cenário um visual bem característico, o do tipo vulcão, com sua largura e altura controladas pelo parâmetro de evolução. Além disso, o comportamento cônico próximo a brana produz um poço infinito que independe do parâmetro de evolução.

Finalmente, parte dos resultados obtidos no capítulo cinco foram publicados em [80]. Como perspectiva futura, pretendemos investigar o comportamento de outros campos do modelo padrão neste cenário, o campo de Kalb-Ramond, por exemplo. Outro ponto relevante seria a análise para ( $l \neq 0$ ) e como este altera os modos massivos de KK.

# Referências Bibliográficas

- [1] T. G. Rizzo, eConf C **040802**, L013 (2004) [hep-ph/0409309].
- [2] Penzias, A. and Wilson, R. *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [3] S. F. Novaes, In \*Sao Paulo 1999, Particles and fields\* 5-102 [hep-ph/0001283].
- [4] V. A. Rubakov, *Phys. Usp.* **44**, 871 (2001) [*Usp. Fiz. Nauk* **171**, 913 (2001)] [hep-ph/0104152].
- [5] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315].
- [6] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].
- [7] Weinberg, S. New York, Usa: Wiley (1972) 657p
- [8] A. Kehagias, *Phys. Lett. B* **600**, 133 (2004) [arXiv:hep-th/0406025].
- [9] T. Appelquist, H. C. Cheng and B. A. Dobrescu, *Phys. Rev. D* **64**, 035002 (2001) [hep-ph/0012100].
- [10] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, *Nucl. Phys. B* **565**, 269 (2000) [hep-th/9905012].
- [11] Th. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, K1 966 (1921).
- [12] O. Klein, *Z. Phys.* **37** (1926) 895; *Arkiv. Mat. Astron. Fys. B* **34A** (1946).
- [13] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].
- [14] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **87**, 125010 (2013) [arXiv:1304.7825 [hep-th]].
- [15] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **84**, 085027 (2011) [arXiv:1110.1597 [hep-th]].
- [16] D. M. Dantas, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* **725**, 425 (2013) [arXiv:1307.2317 [hep-th]].

- [17] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, *Class. Quant. Grav.* **30**, 025005 (2013) [arXiv:1208.2364 [hep-th]].
- [18] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. Lond. A* **268**, (1962).
- [19] D. W. Joseph, *Phys. Rev. D* **126**, 319 (1962).
- [20] K. Akama, *Lect. Notes Phys.* **176**, 267 (1982) [hep-th/0001113].
- [21] P. S. Wesson, *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 1721 (2003).
- [22] G. Nordstrom, physics/0702223 [PHYSICS].
- [23] J. Polchinski, *String theory and beyond*, vol.2, Cambridge University press.
- [24] I. Oda, *Phys. Lett. B* **496**, 113 (2000) [arXiv:hep-th/0006203].
- [25] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 240 (2000) [hep-th/0004014].
- [26] R. Gregory, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2564 (2000) [hep-th/9911015].
- [27] W. T. Cruz, A. R. P. Lima and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **87**, 045018 (2013) [arXiv:1211.7355 [hep-th]].
- [28] B. Bajc and G. Gabadadze, *Phys. Lett. B* **474**, 282 (2000) [hep-th/9912232].
- [29] A. Pomarol, *Phys. Lett. B* **486**, 153 (2000) [hep-ph/9911294].
- [30] A. E. R. Chumbes, J. M. Hoff da Silva and M. B. Hott, *Phys. Rev. D* **85**, 085003 (2012) [arXiv:1108.3821 [hep-th]].
- [31] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, *Phys. Rev. D* **62**, 046008 (2000) [hep-th/9909134].
- [32] K. Skenderis and P. K. Townsend, *Phys. Lett. B* **468**, 46 (1999) [hep-th/9909070].
- [33] D. Bazeia, J. Menezes and R. Menezes, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 241601 (2003) [hep-th/0305234].
- [34] D. Bazeia, C. Furtado and A. R. Gomes, *JCAP* **0402**, 002 (2004) [hep-th/0308034].
- [35] D. Bazeia, M. A. Gonzalez Leon, L. Losano and J. Mateos Guilarte, *Phys. Rev. D* **73**, 105008 (2006) [hep-th/0605127].
- [36] A. Kehagias and K. Tamvakis, *Phys. Lett. B* **504**, 38 (2001) [hep-th/0010112].
- [37] K. Ghoroku, M. Tachibana and N. Uekusa, *Phys. Rev. D* **68**, 125002 (2003) [hep-th/0304051].

- [38] D. Youm, Nucl. Phys. B **589**, 315 (2000) [hep-th/0002147].
- [39] Z. H. Zhao, Q. Y. Xie and Y. Zhong, arXiv:1406.3098 [hep-th].
- [40] W. T. Cruz, M. O. Tahim and C. A. S. Almeida, Europhys. Lett. **88**, 41001 (2009) [arXiv:0912.1029 [hep-th]].
- [41] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood and Y. Shirman, Nucl. Phys. B **581**, 309 (2000) [hep-th/0001033].
- [42] J. W. Chen, M. A. Luty and E. Ponton, JHEP **0009**, 012 (2000) [hep-th/0003067].
- [43] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125**, 139 (1983).
- [44] P. Tinyakov and K. Zuleta, Phys. Rev. D **64**, 025022 (2001) [hep-th/0103062].
- [45] T. Gherghetta, E. Roessl and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **491**, 353 (2000) [hep-th/0006251].
- [46] E. Roessl and M. Shaposhnikov, Phys. Rev. D **66**, 084008 (2002) [hep-th/0205320].
- [47] E. Ponton and E. Poppitz, JHEP **0102**, 042 (2001) [hep-th/0012033].
- [48] I. Olasagasti and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **62**, 044014 (2000) [hep-th/0003300].
- [49] R. M. Wald, Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p
- [50] I. Oda, Phys. Rev. D **64**, 026002 (2001) [hep-th/0102147].
- [51] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, JHEP **0008**, 052 (2000) [arXiv:hep-th/0007191].
- [52] P. Candelas and X. C. de la Ossa, Nucl. Phys. B **342**, 246 (1990).
- [53] G. Papadopoulos and A. A. Tseytlin, Class. Quant. Grav. **18**, 1333 (2001) [hep-th/0012034].
- [54] R. Minasian and D. Tsimpis, Nucl. Phys. B **572**, 499 (2000) [hep-th/9911042].
- [55] K. Ohta and T. Yokono, JHEP **0002**, 023 (2000) [hep-th/9912266].
- [56] L. A. Pando Zayas and A. A. Tseytlin, JHEP **0011**, 028 (2000) [arXiv:hep-th/0010088].
- [57] M. Cvetič, H. Lu and C. N. Pope, Nucl. Phys. B **600**, 103 (2001) [hep-th/0011023].
- [58] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **470**, 52 (1999) [hep-th/9910132].
- [59] T. Gherghetta and A. Pomarol, Nucl. Phys. B **586**, 141 (2000) [hep-ph/0003129].
- [60] B. Chow, P. Lu, L. Ni, Hamilton's Ricci flow, Science Press, 2006.

- [61] P. Topping, Lectures on the Ricci flow, London Mathematical Society, Lecture note series 325, Cambridge university press.
- [62] M. Giovannini, H. Meyer and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **619**, 615 (2001) [hep-th/0104118].
- [63] Y. X. Liu, L. Zhao and Y. S. Duan, JHEP **0704**, 097 (2007) [hep-th/0701010].
- [64] P. Bostock, R. Gregory, I. Navarro and J. Santiago, Phys. Rev. Lett. **92**, 221601 (2004) [hep-th/0311074].
- [65] S. Kanno and J. Soda, JCAP **0407**, 002 (2004) [hep-th/0404207].
- [66] S. M. Carroll, San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p
- [67] B. de Carlos and J. M. Moreno, JHEP **0311**, 040 (2003) [arXiv:hep-th/0309259].
- [68] I. Oda, Phys. Rev. D **62**, 126009 (2000) [hep-th/0008012].
- [69] Y. X. Liu, C. E. Fu, H. Guo and H. T. Li, Phys. Rev. D **85**, 084023 (2012) [arXiv:1102.4500 [hep-th]].
- [70] Y. X. Liu, F. W. Chen, Heng-Guo and X. N. Zhou, JHEP **1205**, 108 (2012) [arXiv:1205.0210 [hep-th]].
- [71] W. W. Mullins, "Two Dimensional Motion of Idealized GrainBoundaries:"J. Appl. Phys. 27, 900 (1956).
- [72] James Eells, Jr. and J. H. Sampson American Journal of Mathematics Vol. 86, No. 1 (Jan., 1964), pp. 109-160.
- [73] William J. Firey (1974). Shapes of worn stones. *Mathematika*, 21, pp 1-11.
- [74] K. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Princeton University Press, 1978.
- [75] Yang, Y.-L., Guo, R., Luo, F., Hu, S.-M. and Gu, X. (2009), Generalized Discrete Ricci Flow.
- [76] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math/0211159v1.
- [77] R. Müller, *Differential Harnack Inequalities and the Ricci Flow*, European Mathematical Society, 2006.
- [78] R.S. Hamilton, The Ricci flow on surfaces, *Contemporary Mathematics* 71 (1988), 237-261.

- [79] H.D.Cao, B.Chow, Recent progress on Ricci solitons, Bulletin of american mathematical society, 36 (1999).
- [80] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **747**, 517 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.06.042 [arXiv:1501.00632 [hep-th]].
- [81] I. R. Klebanov and A. Murugan, JHEP **0703**, 042 (2007) [hep-th/0701064].
- [82] Y. -X. Liu, X. -H. Zhang, L. -D. Zhang and Y. -S. Duan, JHEP **0802**, 067 (2008) [arXiv:0708.0065 [hep-th]].