



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ ADRIANO FERNANDES DOS SANTOS

MATEMÁTICA APLICADA À GEOGRAFIA

FORTALEZA

2016

JOSÉ ADRIANO FERNANDES DOS SANTOS

MATEMÁTICA APLICADA À GEOGRAFIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S235m Santos, José Adriano Fernandes dos
Matemática aplicada à geografia / José Adriano Fernandes dos Santos. – 2016.
50 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Interdisciplinaridade. 2. Cartografia. 3. Variável de Mercator. I. Título.

JOSÉ ADRIANO FERNANDES DOS SANTOS

MATEMÁTICA APLICADA À GEOGRAFIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 19 / 05 / 2016.

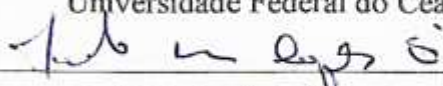
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Paulo Roberto Lopes Thiers
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus.

Aos meus pais Lucineide Fernandes, e Aluizio Rodrigues e minhas irmãs Aldeneide, Aldenizia e Arlene.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar, que me deu força, coragem e perseverança para me dedicar ao curso e concluí-lo com êxito.

A minha família que sempre acreditou em meus estudos. Em especial minha mãe Lucineide e Minha irmã Aldeneide que acompanham de perto minha evolução e conquistas.

Ao professor Dr. Marcelo Ferreira de Melo pela efetiva orientação realizada a este trabalho, me passando segurança e motivação, bem como por suas aulas ministradas no curso.

Aos professores Dr. Jonatan Floriano da Silva, Dr. José Afonso de Oliveira, Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho, Dr. Fabrício Siqueira Benevides, Dr. Marcos Ferreira de Melo, Dr. Joserlan Perote da Silva e Dr. Romildo José da Silva pelas aulas ministradas e apoio.

Aos meus colegas de turma, pela parceria, ajuda mútua e consequente aprendizado.

Aos meus colegas de trabalho Gilnar Lucas, Alverlucy Martins, Francisca Luiza e amigos pessoais, em especial minha amiga Dayani Duarte que de forma direta ou indireta foram parceiros e torceram por esta conquista.

À Universidade Federal do Ceará com o Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, os quais me senti lisonjeado em fazer parte, fornecendo estrutura necessária para meus estudos.

Aos professores da banca examinadora pela atenção a este trabalho.

Contudo, agradeço a todos e a todas que torceram pelo meu sucesso e conclusão deste Mestrado.

RESUMO

Partindo do cenário interdisciplinar em que a Matemática se encontra, este trabalho se resume a apresentar aplicações oriundas da Geografia dentro da contextualização matemática. Os PCN's (1998), documentos que regem a educação atual brasileira, deixa clara importância do trabalho interdisciplinar no ensino, bem como a relevância de um ensinamento contextualizado baseado na prática e vivência histórica do homem. Por sua vez, na Geografia foi visto que a cartografia traz contribuições relevantes à matemática, e que a trigonometria é uma das ferramentas principais utilizadas nesta conjuntura, tanto por parte da geometria euclidiana quanto da geometria não-euclidiana. Assim neste trabalho foram apresentadas algumas aplicações retiradas do estudo da cartografia que, com a ajuda da matemática e principalmente da trigonometria (plana e esférica) foram resolvidas. Dando sequência, ainda com foco na cartografia, especificamente no estudo de mapas e projeções, foi dada ênfase à *Projeção Cilíndrica de Mercator* e respectivas explicações matemáticas para a chamada arte de projetar num plano, no caso, à projeção da esfera num plano, com suas devidas explicações matemáticas para tal feito. Com o tempo e o surgimento do cálculo infinitesimal, foi mostrado aqui a determinação da chamada variável de Mercator, e sua origem. Em seguida com a ajuda da *Geometria Diferencial* dando ênfase aos estudos de Gauss, foi apresentada a não isometria entre o plano e a esfera, e que a curvatura gaussiana é a função definidora para tal fato. Através das *formas fundamentais* e do *Teorema egregio* aqui também apresentadas, os estudos de Gauss dentro da geometria diferencial foram definidores para a explicação mais atual da *variável de Mercator*, contribuindo assim para o esclarecimento da famosa projeção feita por Mercator que ficou na história por sua perfeição.

Palavras chave: Interdisciplinaridade. Cartografia. Variável de Mercator

ABSTRACT

From the interdisciplinary scenario in which mathematics is, this work comes down to present applications coming from Geography within the mathematical context. The NCP's (1998), documents governing the current Brazilian education, makes clear the importance of interdisciplinary work in education, and the importance of a contextualized teaching based on practical and historical experience of man. In turn, the geography was seen that mapping brings outstanding contributions to mathematics, and trigonometry is one of the main tools used in this context, both by the Euclidean geometry as the non-Euclidean geometry. So in this paper were presented some applications withdrawn from the study of cartography, with the help of mathematics and especially Trigonometry (flat and spherical) were resolved. Continuing, still focusing on cartography, specifically in the study of maps and projections, emphasis was given to Cylindrical Mercator projection and their mathematical explanations for the so-called art of designing a plan in case the projection of the sphere in a plane, with its appropriate mathematical explanations for such a feat. With time and the emergence of infinitesimal calculus, it was shown here to determine the variable called Mercator and its origin. Then with the help of differential geometry emphasizing Gauss studies, it was presented not isometry between the plane and the sphere, and the Gaussian curvature is the defining function for this fact. Through the fundamental forms and egregius Theorem here also presented the Gauss studies in differential geometry were defining for the most current explanation of Mercator variable, thus contributing to the clarification of the famous projection made by Mercator that went down in history for its perfection.

Keywords: interdisciplinarity. Cartography. Variable Mercator

FIGURAS

Figura 1: Matemático Tarco	17
Figura 2: Esquema idealizado por Tarco	18
Figura 3: Teodolito rústico	19
Figura 4: Teodolito Mecânico	19
Figura 5: Demonstrativo teodolito na prática	19
Figura 6: Ângulo num plano horizontal	20
Figura 7: Esquema para cálculo de altura da Pedra da Gávea.....	21
Figura 8: Esquema em curva de nível da montanha.....	22
Figura 9: Triângulo Plano.....	24
Figura 10: Triângulo Esférico	24
Figura 11: Terra esférica.....	26
Figura 12: Esquema triângulo esférico.....	27
Figura 13: Triângulo esférico no globo	28
Figura 14: Projeção cilíndrica	30
Figura 15: Esquema projeção de latitude e longitude no plano.....	31
Figura 16: Esquema deslocamentos elementares	33
Figura 17: Parametrização e mapa obtido pela aplicação composta	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	A MATEMÁTICA COM TRATAMENTO INTERDISCIPLINAR.....	11
3	A RELAÇÃO MATEMÁTICA E GEOGRAFIA	15
3.1	Aplicações da Trigonometria num contexto matemático-geográfico	17
3.2	Um pouco sobre a Geometria não-euclidiana	23
3.3	Tópicos da trigonometria esférica e suas aplicações	25
4	A VARIÁVEL DE MERCATOR.....	29
5	A GEOMETRIA DIFERENCIAL E AS PROJEÇÕES DE MERCATOR.....	35
5.1	A curvatura Gaussiana e o Teorema egrégio	35
5.2	O problema da Projeção Cilíndrica de Mercator e a resolução por Gauss	42
6	CONCLUSÃO.....	47
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

No âmbito geral de interdisciplinaridade no ensino de Matemática, este trabalho dará ênfase para as aplicações apoiadas à Geografia. Todavia, diante da diversidade de assuntos disponibilizados pela Geografia, a geometria é a que mais aparece pelo fato de alguns conceitos práticos serem oriundos dos estudos da cartografia e/ou outras áreas afins. Sem falar do contexto histórico da matemática e sua evolução estarem em parte interligadas ao estudo da terra e respectivas medições e mapeamentos. Em geometria, nas aplicações mais contextualizadas, observa-se a trigonometria como ponto alto na modelagem matemática para cálculos aproximados de distâncias inacessíveis, que vem de uma utilidade reconhecida e estudada desde os primórdios, ajudando na construção de uma engenharia mais acessível dentro dos estudos da geometria da Terra. Com isso, neste trabalho será feita uma abordagem tanto da geometria euclidiana, quanto da geometria não euclidiana, bem como suas contribuições e aplicações nessa *Matemática aplicada à Geografia*.

Além dessa análise, uma continuidade deste trabalho estará com foco nos mapas de Mercator e sua projeção cilíndrica, um grande dilema que perpetuou por séculos pelo fato de sua perfeição matemática ao projetar o planeta Terra em um plano (mapa) que, contudo não houve as devidas explicações matemáticas, mas apenas legados com noções cartográficas apoiadas à geometria de projeção. Daí, por conseguinte, com a evolução dos estudos matemáticos e surgimento do Cálculo diferencial, surge a Geometria Diferencial, com fortes contribuições nos estudos das projeções trazendo, então, as devidas explicações para o tal dilema da projeção de Mercator, o que findará esta dissertação.

2 A MATEMÁTICA COM TRATAMENTO INTERDISCIPLINAR

A Matemática, em seu contexto histórico, sempre trouxe relevantes contribuições nas diversas áreas do conhecimento. E que partindo da necessidade dos sujeitos historicamente em desenvolvimento e curiosidade aplicacional, de forma crescente e dinâmica, transformou as mais simples formas de tratar e traduzir o mundo em que vivemos utilizando-se de descobertas, de métodos e, aos poucos, introduzindo notações matemática, num lógico processo de entendimento do concreto até que se pretende o domínio abstrato.

René Descartes em seus estudos onde contribuiu de forma significativa para toda a matemática desenvolvida até então, concebia o conhecimento simbolicamente como uma árvore e que *“a Matemática não era considerada um dos ramos do conhecimento, mas a condição de possibilidades do conhecimento, em qualquer ramo, como a seiva que percorre e alimenta todo o organismo representado”* MACHADO (1993, p.27).

Com o passar dos tempos, diante de um longo processo de estudos epistemológicos sobre a natureza da aprendizagem, ao instituir-se a Educação e o ensino, a matemática emerge em singular importância na formação do sujeito, contribuindo para a sua convivência em sociedade de forma mais ativa e crítica, gerando mais autonomia, fortalecendo desenvolvimento pessoal e intelectual do homem.

D'AMBRÓSIO (2005, p.102) em seus escritos sobre Sociedade, Cultura, Matemática e o seu ensino afirma que

[...] entendo matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.

[...]A disciplina denominada Matemática é na verdade uma Etnomatemática¹ que se originou e se desenvolveu na Europa Mediterrânea, tendo recebido algumas contribuições indianas e islâmicas e que chegou a forma atual nos séculos XVI e XVII, sendo a partir de então levada e imposta a todo o mundo. Hoje essa matemática adquire um caráter de universalidade, sobretudo ao predomínio das ciências e tecnologia modernas[...]

Dessa forma, a matemática conhecida na atualidade, é fruto de um longo processo de análise, observações, estudos e, sem dúvida, notória aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento. É aí que, diante de um complexo já dos tempos modernos, com a sistematização

¹ Batizada por D'Ambrósio como Programa Etnomatemática para significar que há várias maneiras, técnicas, habilidade (ticas) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (matema) distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etnos).

da Educação e do ensino, observa-se que a matemática vista de modo contextual, é de fácil “Interdisciplinaridade”. Ou seja, observa-se um fácil entrelaçado com outras disciplinas do contexto educacional vigente.

No Brasil, com a instituição das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN’s), normas que orientam o planejamento dos currículos nas escolas, a interdisciplinaridade assume o princípio de que

[...] todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, e que o ensino deve ir além da descrição e constituir nos estudantes a capacidade de analisar, explicar, prever e intervir, objetivos que são mais facilmente alcançáveis se as disciplinas, integradas em áreas do conhecimento, pudessem contribuir, cada uma com sua especificidade, para o estudo comum de problemas concretos, ou para o desenvolvimento de projetos de investigação e/ou de ação. (DCNs, 2013, p.28)

Assim, é notória a abertura para o traçado que se dá a Matemática como necessária para formação integral do sujeito em sociedade.

Observa-se, então, que diante do ensino, a interdisciplinaridade é algo novo, oriunda por volta da década de 70, afirma BITTENCOURT (2004), mas colocada em evidência somente nos anos 90 com o desenvolvimento da chamada integração curricular. Onde, após longas discussões diante do contexto educacional brasileiro fora observado que o ensino e aprendizagem não se dá disposto em “caixinhas”, mas que as disciplinas impostas pelo modelo educacional “conversam” entre si, diante de uma contextualização e observação natural do homem convivendo em sociedade.

Segundo MACHADO (1993, p.28):

[...] o significado curricular de cada disciplina não pode resultar de uma apreciação isolada do seu conteúdo, mas sim do modo como se articulam as disciplinas em seu conjunto; tal articulação é sempre tributária de uma sistematização filosófica mais abrangente, cujos princípios norteadores é necessário reconhecer.

Assim, diante dessa nova integração curricular discutida por BITTENCOURT (2004), a matemática surge com novas metodologias, derivadas de uma contextualização historicamente existente, no entanto limitada apenas à construção de conceitos que servia como pré-requisitos para solução de problemas práticos e não reconhecimento por tal necessidade como integração.

Nessa nova roupagem, surge uma série de procedimentos que ajudam nas resoluções de situações do cotidiano do homem, contribuindo para uma melhor tomada de decisão com mais convicção, aberta e precisa, denominada *modelagem matemática* segundo

BURAK(1987), uma metodologia moderna com forte sistematização, que contempla um ensino contextualizado mas com predominância à interdisciplinaridade.

Porém, é nos Parâmetros Curriculares Nacionais que a matemática ganha essa cara mais interdisciplinar, com a sugestão da possibilidade de integração com outras áreas do conhecimento, ressaltando uma posição mais maleável e flexível para o saber matemático.

No que diz respeito à formação dos sujeitos, observa-se a matemática como uma fonte que abre caminhos para outras capacidades, onde segundo os PCN's (2000, parte III, p.40):

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Em análise, surge também um outro ganho. Com esse vasto caminho de possibilidades que a educação matemática traz, e com interdisciplinaridade quase sempre em foco, entende-se também, como instrumento de formação profissional, caminho que deve ser traçado principalmente nos anos finais da educação básica segundo os PCN's (2000, parte III, p.40) afirma:

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

Portanto, não podemos esquecer do campo de abrangência profissional que se forma, diante da globalização da informação tecnológica, onde é necessária que o homem seja capaz de desenvolver habilidades matemáticas, algumas até bem sofisticadas como nas áreas de negócios ou comércio, onde de formas implícitas aparecem como necessárias para o desenvolvimento das mesmas.

Essa evolução tecnológica de mercado cada vez mais competitivo, exige trabalhadores criativos, autônomos e proativos para resolver problemas em equipe, conhecedores das diversas tecnologias e linguagens. Como contribuição, a matemática segundo SOARES e SCHEIDE (2004) deve desenvolver estratégias, comprovação e justificativa de

resultados, criatividade, trabalho em equipe bem como iniciativa pessoal por autonomia e capacidade de enfrentar desafios.

Diante disso, um caminho a percorrer é o intermédio para as possibilidades de integração entre as disciplinas e o desenvolvimento de uma matemática mais contextualizada com aplicabilidade mais objetiva. Para isso, é necessário o desenvolvimento de um conhecimento mais consistente acerca da realidade, de forma que essa interdisciplinaridade aconteça com propósitos de uma formação sólida e direcionada de acordo com as necessidades sociais existentes.

Dessa forma, não tirando o foco da interdisciplinaridade, D'AMBRÓSIO (2005, p.117) aborda o importante caráter da contextualização

O acesso a um maior número de instrumentos e de técnicas intelectuais dão, quando devidamente contextualizadas, muito maior capacidade de enfrentar situações e de resolver problemas novos, de modelar adequadamente uma situação real para, com esses instrumentos, chegar a uma possível situação ou curso de ação.

Contudo, a busca por estes instrumentos de mediação para contextualização matemática, perpassa conseqüentemente pela interdisciplinaridade. Conceitos retirados de diferentes realidades, porém estudados e analisados por outras ciências, podem dar vida a uma matemática muitas vezes “seca” e sem aplicação.

Um resgate a história da matemática traz consigo forte contextualização conseqüente a interdisciplinaridade, pois a matemática nasceu da aplicação, oferecendo análise da realidade, da necessidade do homem em sociedade, que até mesmo sem a percepção, emergia de situações das diversas áreas do conhecimento ou do inverso, de outros campos de estudos onde eram necessárias aplicações matemáticas. Dito isto, dentro da história deste vasto conhecimento de tudo que existe hoje, terem existido idealizadores conhecedores de diversas áreas como filósofos e matemáticos a exemplo de Aristóteles e Platão e muitas outras situações equivalentes.

Para este trabalho, um resgate importante dentro da história, diz respeito ao desenvolvimento da cartografia, que numa saga de grandes estudiosos para o assunto, o grande desafio era o feito das projeções, ou seja transpor a superfície esférica (forma do nosso planeta) para uma superfície plana. Assim, observamos conhecimentos e descobertas dentro do campo da Geografia, porém com necessidade do auxílio matemático, um prato cheio para promoção da interdisciplinaridade no trato com a geometria e álgebra em si, o que veremos a seguir.

3 A RELAÇÃO MATEMÁTICA E GEOGRAFIA

No bojo das discussões a respeito da interdisciplinaridade no ensino de matemática e sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, analisaremos, a partir de agora, uma em específica: a relação entre a matemática e a Geografia.

De modo geral, este trabalho se dará em averiguar a diversidade de dados disponibilizados pela Geografia na elaboração de situações problemas que conduzam para a aplicação da matemática. Para isso, é necessária uma melhor investigação a respeito de alguns dados de estudo da geografia, e entender o porquê da necessidade de problematiza-lo matematicamente para chegar num produto final. Nesta Ligação, pude perceber que ao longo da história, acontecia de forma natural como necessária para tais conclusões.

Segundo o IBGE “*Geografia é a ciência que estuda a superfície da Terra. Ela descreve e analisa como os fenômenos físicos, biológicos e humanos variam no espaço. Para dar conta de tudo isso, é necessário percorrer, medir e estudar o território*”. Logo, no contexto geral dos estudos na Geografia, observamos margens que necessitam ser apoiadas pela matemática, para desenvolver conceitos mais precisos como *medições e localizações* por exemplo, fazem-se necessários conhecimentos de geometria. E, para isso, uma estratégia que vem sendo usada desde os tempos remotos, por tornar a superfície terrestre mais acessível aos olhos do homem é a sua planificação, onde os estudos mostram aproximações cada vez mais precisas na forma de *mapas*.

Historicamente, foi a Cartografia que introduziu necessidades de conceitos matemáticos para sua interpretação e análise. A cartografia definida como *a ciência e arte de fazer mapas*, teve sua origem em tempos bem antes de cristo. Mas foi somente durante o século XVI que se deu um estudo mais complexo e preciso a respeito. Mercator foi um dos grandes idealizadores desses estudos, o qual dedicaremos uma análise mais detalhada sobre suas descobertas e proposições nos próximos capítulos.

Para uma análise mais criteriosa e de pura aplicação matemática na cartografia é de fundamental importância conhecimentos e estudos a respeito das projeções cartográficas.

A PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA segundo o Wikipédia é:

[...] um tipo de traçado sistemático de linhas numa superfície plana, destinado à representação de paralelos e meridianos da Terra ou de parte dela, sendo a base para a construção dos mapas. A representação da superfície terrestre em mapas será sempre diferente e nunca será verdadeira pois sempre será possível ser modificada e nunca

será isenta de distorções. Nesse sentido, as projeções cartográficas são desenvolvidas para minimizarem as imperfeições dos mapas e proporcionarem maior rigor científico à cartografia”.

Que, para isso, serão necessários conhecimentos geométricos não Euclidianos, os quais ajudarão a entender como são feitas essas projeções.

A matemática ao longo da história, sempre contribuiu para os estudos das diferentes representações da Terra, no intuito de compreender a elaboração de cartas e mapas, auxiliando e redefinindo as diversas técnicas cartográficas na evolução dessas produções.

ROCHA e SODRÉ (2015, p.4-5) afirmam a importância da matemática no trato com as projeções cartográficas

O estudo das projeções geográficas torna-se elemento importante para se trabalhar a matemática, uma vez que é consenso entre os cartógrafos que o maior drama por eles vivido é transferir tudo o que existe numa superfície curva, que é a Terra, para uma superfície plana que é o mapa [...] Os sistemas de projeções constituem-se de formulações matemáticas que transformam as coordenadas geográficas, a partir de uma superfície esférica (elipsoidal), em coordenadas planas, mantendo correspondência entre elas. O uso deste artifício geométrico das projeções conseguem reduzir as deformações, mas nunca eliminá-las.

Em sumo, a relação entre a matemática e a geografia se dá de diversas formas. Poderíamos citar algumas aplicabilidades em que a geografia enriquece a contextualização matemática, como um simples ponto em um sistema de coordenadas cartesianas pode ser representado na forma de coordenadas geográficas definidas por paralelos e meridianos sobre a superfície terrestre. Os fusos horários, que constituem faixas imaginárias que divide a Terra em 24 faixas idênticas obedecendo os intervalos de tempo de rotação do planeta Terra determinando a hora dia e a hora noite, tendo o Meridiano de Greenwich como marco inicial, inicial onde envolve operação com números inteiros.

Porém nos concentraremos na relação entre a cartografia e a matemática, numa análise mais específica das projeções, em especial as concepções de Mercator, considerando suas ideias oriundas no século XVI, até os novos conceitos matemáticos de projeções que aperfeiçoaram o trabalho de Mercator, porém sempre baseadas em seu trabalho, pois o mesmo não havia desenvolvido técnicas matemática que explicassem sua projeção.

Em relação ao ensino e uma contribuição desta junção, a cartografia sempre levará a matemática como base, a qual pode-se fazer uso para seu ensino e tornando seu aprendizado bem mais significativo.

3.1 Aplicações da Trigonometria num contexto matemático-geográfico

Como vimos anteriormente neste trabalho, as maiores aplicações da geografia em matemática dizem respeito a “medições”, onde, partindo da premência do homem de ir em busca do desconhecido até então, por questão de sobrevivência ou até mesmo de apropriação principalmente em termos de cálculos de distâncias inacessíveis, que requeria métodos eficazes capazes de transpor resultados. A astronomia, a agrimensura e a navegação foram as áreas que impulsionaram estudos matemáticos nesse sentido, e que tiveram como consequência o nascimento da Trigonometria, uma área da matemática que relaciona os ângulos e as medidas dos lados de um triângulo.

Para MATOS (2012, p.4)

A trigonometria influenciou e influencia na vida do ser humano basta procurar os seus fundamentos por meio da história que vamos nos deparar com aplicações que nos mostram a sua importância na Astronomia, na Cartografia e na navegação oceânica, e assim consegue viabilizar e facilitar os cálculos de triangulações topográficas e geodésicas entre outras aplicações.

Aristarco, que viveu no século III A.C., em Samos da Grécia, foi considerado o pai da Trigonometria Astrônomo de grande porte na época Tarco, como assim ficou conhecido, calculou a razão entre as distâncias da Terra ao sol e da Terra a lua, usando métodos geométricos apoiados a ideias de trigonometria.

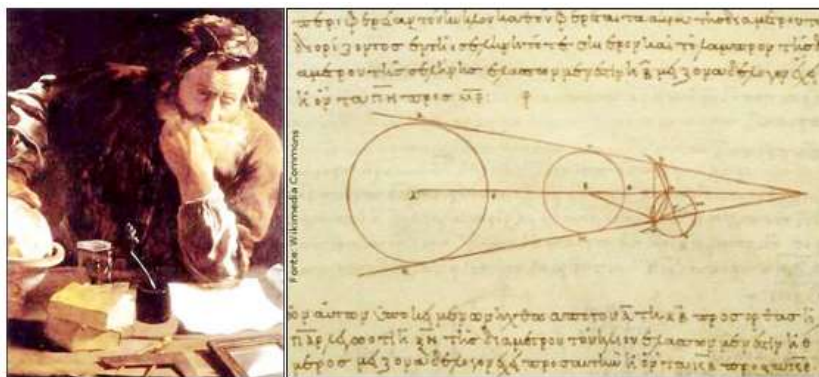


Figura 1: Matemático Tarco

Fonte: <http://www.fq.pt/biografias/58-aristarco-de-samos>

Segundo estudos de Tarco, quando a lua está em seu quarto crescente, ou seja, quando a mesma está exatamente a metade iluminada pelo sol, que daí pondo um observador em terra T na direção ao centro da Lua L com um terceiro vértice no centro do sol S, forma um triângulo retângulo em L, como mostra a ilustração

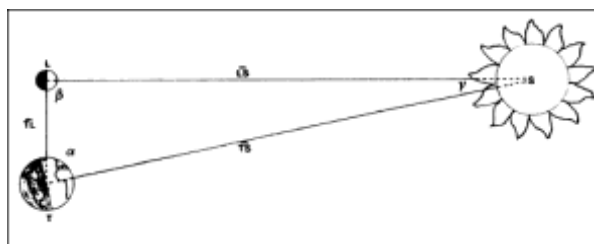


Figura 2: Esquema idealizado por Tarco

Assim, usando alguns instrumentos e conhecimentos da época, Tarco descobriu que o ângulo γ teria uma medida de 3° , e sabendo-se que a razão entre o cateto oposto a este ângulo e a medida da hipotenusa é de aproximadamente 0,052, ele encontrou uma razão para $\frac{TS}{TL}$ que girava entre 18 e 20. Seu raciocínio foi perfeito em termos de instrumentos utilizados na época, mas hoje sabe-se que esse valor é bem maior, em torno de 390.

Em uma outra abordagem, LIMA (2012, p.245) faz um histórico do surgimento da trigonometria

A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam orbitas circulares em redor da terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo e r é o raio da circunferência então $c = 2r \text{ sen}(\alpha/2)$. Esta é a origem da palavra seno, que provem da tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo jiba (corda) com jaib (sinus em latim).

Agora, é importante analisar de que forma dentro da história da matemática se elaborou estratégias e instrumentos capazes de fazerem tais medidas. Pois, como percebemos, desde a antiguidade houve a necessidade de cálculo de grandes distancias, aliás, poucas são as situações que podem ser mensurados diretamente com o auxílio de instrumentos simples de medida como uma trena. Em termos de estratégia, foi com o auxílio da Trigonometria que tudo isso tornou-se possível. Tudo é baseado com o traço de um triangulo, onde na observância de seus principais elementos que são seus lados e ângulos, e tendo conhecidos três dos mesmos (exceto os três ângulos), podemos descobrir soluções para situações problemas que, dependendo do contexto serão possíveis e determinadas.

Em questão de instrumentos para medição de ângulo, pode-se fazer uso do *Teodolito*, um instrumento em formato de luneta apoiado em um tripé, capaz de encontrar ângulos tanto em plano vertical, quanto horizontal.



Figura 3: Teodolito rústico



Figura 4: Teodolito Mecânico

Fonte (Fig 3 e 4): heurekamatematica.blogspot.com.br/2012/03/teodolito.html

É com a sofisticação desse instrumento feita com o passar dos tempos, que se vem dando precisão aos cálculos de grandes distancias, pois o rigor dessas medidas tem dado aproximações cada vez mais perto do real.

Em sua utilização, podemos conseguir os seguintes elementos:

1. Dado um observador M que constata um objeto N, com o teodolito pode-se determinar o ângulo que o segmento MN forma com o plano horizontal.

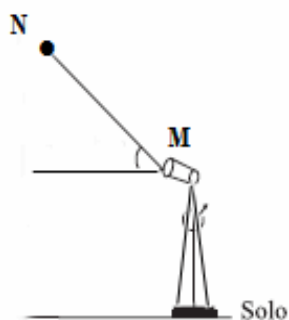


Figura 5: Demonstrativo teodolito na prática

2. Ou dado um observador M que vê um objeto P e virando a luneta vê um objeto Q, no mesmo plano horizontal, então o teodolito poderá determinar o ângulo PMQ.

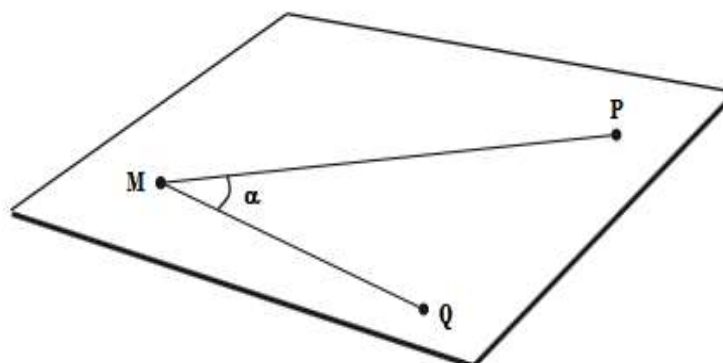


Figura 6: Ângulo num plano horizontal

Em que nessas aplicações poderemos fazer uso de definições específicas da Trigonometria como o das funções seno, cosseno e tangente. Observando sempre que ao calcular o $\sin 30^\circ$ por exemplo, estaremos calculando o seno do ângulo cuja medida remete a 30° . Quando se tratar de ângulos agudos, essas funções serão definidas pelas razões dos lados de um triângulo retângulo e para ângulos no intervalos de 90° a 180° . Assim conhecidos como obtusos, consideraremos que o $\sin x = \sin (180^\circ - x)$ e que o $\cos x = -\cos (180^\circ - x)$.

Como exemplo prático do uso do teodolito para o cálculo de alturas inacessíveis com vista nos modos 1 e 2 mencionados anteriormente, podemos citar um dos problemas proposto pelo PAPMEM² (2014) sobre abordagens de trigonometria na prática

Exemplo 1. *A pedra da Gávea é um importante monólito de granito situado no Rio de Janeiro, bem perto do mar. Neste exercício, você vai calcular a sua altura com os dados que foram medidos especialmente para essa atividade. Felizmente, existe um plano horizontal próximo, o Gávea Golf Club, que nos permitiu obter duas medidas em dois pontos A e B com a ajuda de um teodolito. Na figura 6 a seguir, o ponto mais alto da pedra da Gávea é o ponto C e, sua projeção sobre o plano horizontal H onde foram feitas as medidas, é o ponto P.*

² PAPMEM é um Programa de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio promovido pela UFMG em parceria com o IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

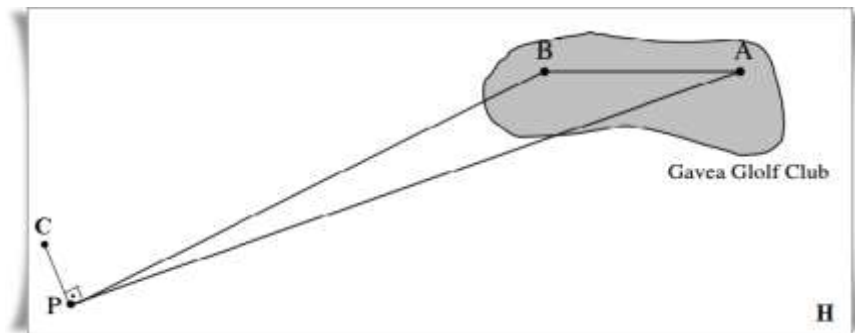


Figura 7: Esquema para cálculo de altura da Pedra da Gávea

Dados:

$$AB = 700 \text{ m}, \hat{C}AP = 17,24^\circ, \hat{C}BP = 22,02^\circ, \hat{A}BP = 150,22^\circ \text{ e } \hat{B}AP = 22,39^\circ$$

Obs.: Use quatro casas decimais para as funções trigonométricas.

Observando os dados, calculamos primeiramente o ângulo $\hat{A}PB = 7,39^\circ$. O caminho a percorrer, nos conduz a usar a Lei dos Senos para calcular o segmento PB, e em seguida pela tangente simples no triângulo Retângulo CPB encontrar PC que seria um dos caminhos para nossa altura desejada, assim

$$\frac{PB}{\text{sen } 22,39^\circ} = \frac{700}{\text{sen } 7,39^\circ}$$

que, com o uso de uma calculadora científica e algumas transformações em radianos teremos $PB = 2073,3 \text{ m}$

No triângulo CPB temos que

$$\text{tg } 22,02^\circ = \frac{PC}{2073,3}$$

$$PC = 838,5 \text{ m}$$

O autor do problema ainda faz uma observação de que o plano onde se encontra o *Gávea Golf Club* está a 3 m acima do nível do mar, logo a altura da Pedra da Gávea é aproximadamente 842 m .

Uma outra situação problema, retirado do Livro *Temas e Problemas*, no capítulo *Aplicações da trigonometria – exercícios complementares*, diz respeito ao alinhamento que direcionam dois pontos que não são visíveis nem acessíveis, vejamos o que diz

Exemplo 2. Uma estrada que está sendo construída em um plano horizontal e será formada pelos trechos retos XP , PQ e QY como mostra a Figura 8. No trecho PQ será construído um túnel para atravessar a montanha. Os engenheiros devem saber tanto em P quanto em Q , que direção devem tomar para construir o túnel AB de forma que o trecho $PABQ$ seja reto. Eles então fixaram um ponto C do plano horizontal, visível tanto de P quanto de Q e determinaram as seguintes medidas: $CP = 1,2\text{km}$, $CQ = 1,8\text{km}$ e $\angle PCQ = 27^\circ$. Calcule os ângulos $\angle CPQ$ e $\angle CQP$.

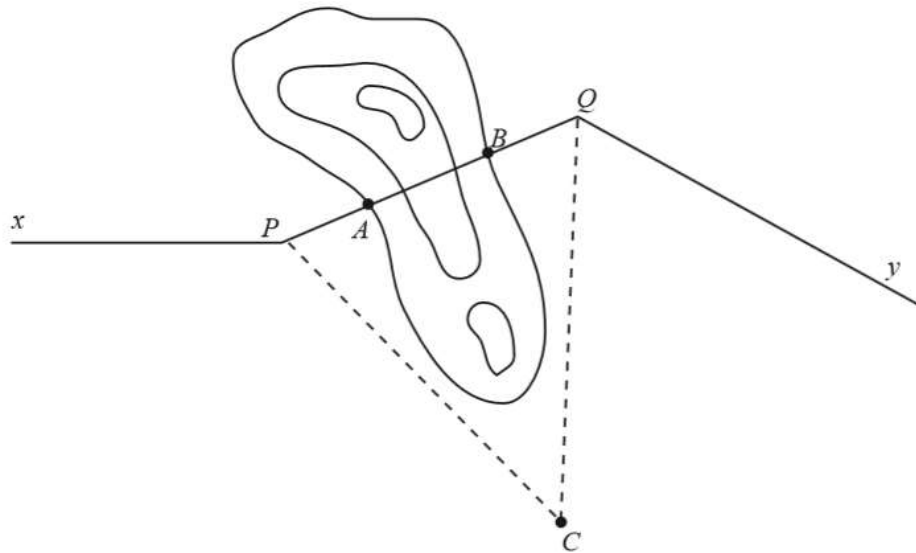


Figura 8: Esquema em curva de nível da montanha

Inicialmente faz-se necessário o cálculo do lado PQ (usarei aqui uma aproximação para 2 casas decimais), para isso usaremos a *Lei dos Cossenos*, logo

$$PQ^2 = 1,2^2 + 1,8^2 - 2 \cdot (1,2) \cdot (1,8) \cdot \cos 27^\circ, \text{ o que nos dá } PQ \cong 0,91\text{km}$$

Agora façamos a *Lei dos Senos* para o cálculo do ângulo oposto ao lado CP , ou seja, o ângulo $\angle CQP$

$$\frac{1,2}{\sin Q} = \frac{0,91}{\sin 27^\circ}$$

onde fazendo uso de uma tabela trigonométrica teremos $\angle CQP \cong 37^\circ$, por seguinte sabendo-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° , teremos que

$$\angle CPQ \cong 116^\circ.$$

3.2 Um pouco sobre a Geometria não-euclidiana

Toda a origem da Geometria Plana que conhecemos hoje foi baseada nos estudos de Euclides, um matemático grego que haveria publicado em sua obra *Os Elementos*, um dos maiores trabalhos científicos já difundido de todos os tempos. Expandido em 13 volumes, a obra de Euclides tomara toda a matemática conhecida até então.

Em seu primeiro volume, Euclides define os cinco *postulados*, o qual são afirmações lógicas consideradas verdades segundo o autor, sem a necessidade de provas ou demonstrações matemáticas, os que embasaria toda a geometria plana. Dentre tais, o quinto postulado arrastou críticas e várias contestações desde sua criação. Conhecido na atualidade como axioma das paralelas, o quinto postulados foi alvo de estudos de grandes matemáticos que, tentando provar o contrário para o caso, ou seja, a sua negação, ocasionou no surgimento de uma nova geometria denominada *Geometria Não Euclidiana*.

Podemos citar aqui um pouco da trajetória desses estudos, mencionando alguns grandes matemáticos responsáveis por ousarem e contestarem tais descobertas tão famosas e até então tidas com tamanha exatidão. Em destaque o italiano Saccheri, o húngaro János Bolyai e o russo Lobachevski, com fortes contribuições e estudos de Rieman, Gauss e Maldbrot. Cada um viria a auxiliar de alguma forma para a construção de um novo tipo de geometria desconhecida desde os primórdios.

Vamos então a análise e discussão a respeito desse quinto postulado e o que nos interessa a este trabalho.

O quinto postulado de Euclides segundo (COUTINHO,2001) diz que,

Se uma reta secante a duas outras formam ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menos que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado. [...] A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre dois ângulos retos.

Assim, observando confusa definição no sentido de que particularmente habitamos em um sistema *curvo* como é a superfície da Terra, tal afirmação pode ser de tamanha observância sinuosa, no sentido de que os postulados de Euclides, descritos até então, não seriam suficientes para sustentá-la nesse sentido. Por esse motivo, por séculos vários matemáticos dedicaram estudos no intuito de tentar provar este quinto postulado. Poderíamos citar aqui, os estudos do matemático italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), que tentara provar o quinto postulado de Euclides pela redução ao absurdo, onde pretendendo chegar a uma

contradição, apresenta uma série de teoremas um tanto indiferentes³, ou seja, fora dos conceitos pretendidos pela geometria Euclidiana. Porém, Saccheri estava tão focado em provar a veracidade do quinto postulado, que não se deu conta que surgira a possibilidade da descoberta de uma nova geometria. Uma geometria que seria exatamente a negativa ao quinto postulado (ÁVILA, 2010).

É nesse sentido que então surge a Geometria Esférica baseada em modelos de visualização sobre uma superfície esférica. Conhecida desde então como *geometria não euclidiana*.

Como exemplo desse estudo, podemos observar a diferença na ilustração a seguir, pressupondo um triângulo em sua forma plana e um outro sobre uma superfície esférica

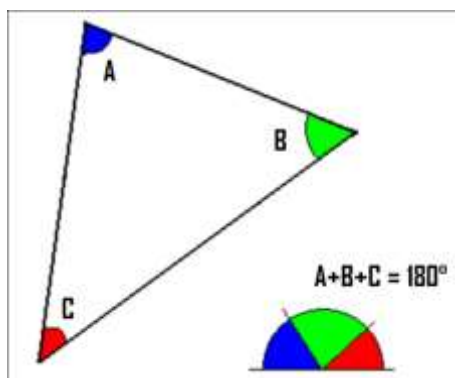


Figura 9: Triângulo Plano

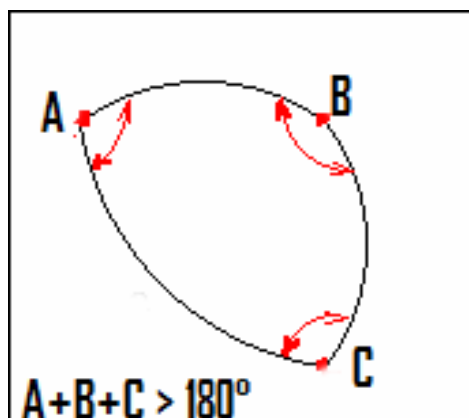


Figura 10: Triângulo Esférico

³ Hipóteses absolutamente falsas por serem opostas à natureza da linha reta.

Nessa geometria segundo THOMAZ e FRANCO (2010) observa-se que

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois retos;
- O plano é uma superfície esférica, e a reta uma geodésica, ou circunferência de círculo máximo;
- Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, se interceptam;
- Uma reta não é dividida em duas por um ponto;
- A área de um triângulo é proporcional ao excesso da soma dos seus ângulos;
- Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes;

A principal característica a se observar, sendo ela a que mais contradiz o quinto postulado de Euclides, é o fato de que a reta não é mais infinita, mas sim ilimitada. A explicação está no fato de que a definição de uma reta num modelo esférico seria um círculo máximo, que por parecer finita, uma curva de superfície não a retém. Por este fato, tais retas são denominadas *linhas geodésicas*.

Entende-se então mais uma estreita relação entre a matemática e a geografia, e que o conhecimento desse novo modelo de geometria vai de encontro com uma análise mais criteriosa sobre o estudo da superfície terrestre, bem como entender como se daria uma projeção em relação a um modelo de representação plana, suas características e peculiaridades.

3.3 Tópicos da trigonometria esférica e suas aplicações

Considerando a terra em sua forma esférica, e o cálculo de distâncias inacessíveis em seu entorno, é que dentro dos estudos cartográficos, com o auxílio de matemática, se encontra mais uma aplicação importante: a trigonometria esférica. Diferente da plana, ela considera os espaços curvos que surgem, quando são analisados a distância entre dois pontos numa superfície esférica por exemplo. Aplicando propriedades mencionadas neste capítulo no tópico 3.2 como “*a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois retos*”, essa trigonometria esboça conceitos específicos para esse estudo.

Sendo a terra uma superfície esférica, com sua forma homogênea, de constante densidade e distribuição de massas, cujo raio se mede, aproximadamente 6372 km, que faz sentido o estudo da trigonometria esférica nessas características. Em um contexto cartográfico, podemos perceber a Terra esférica com os elementos:

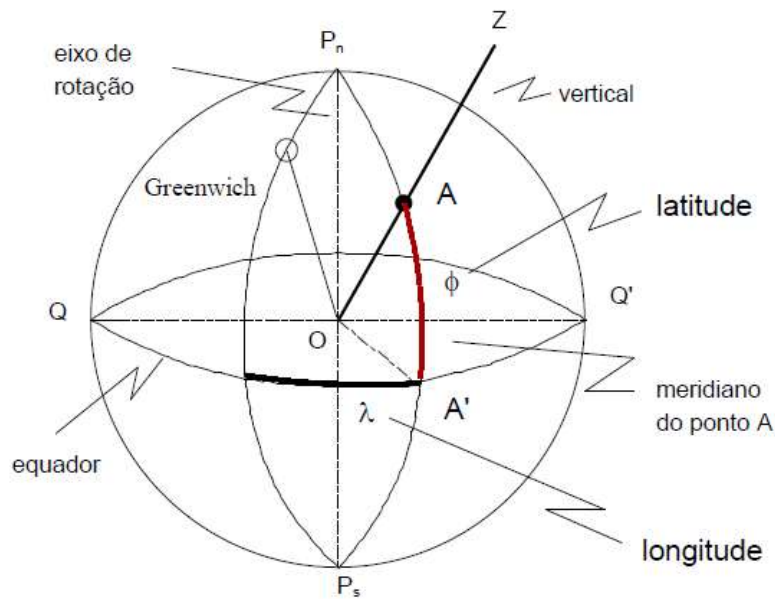


Figura 11: Terra esférica

A distância entre dois pontos nesta esfera é dado pela medida do arco de circunferência máxima que une tais pontos. Sendo que a posição dos pontos nesta superfície são definidos pela latitude e longitude, considerando os hemisferios de localização, bem como o meridiano de Greenwich. Por sua vez, os denominados triângulos esféricos, a base aplicacional da trigonometria (já que o estudo da mesma relaciona lados e ângulos de um triângulo) são regidos sobre algumas características que, segundo SILVA (1996), deve-se considerar alguns ângulos e ou lados como variáveis e outros como constantes, determinando as diferenciais dessas medidas, não considerando a grandeza absoluta dos lados, mas somente o número de graus que eles contêm. Estes triângulos possuem propriedades tais como:

- I. A soma da medida de dois lados quaisquer é maior que a medida do terceiro lado;
- II. A soma de seus lados é menor que 2π rad
- III. Dois lados iguais resultam em ângulos opostos iguais e vice versa
- IV. Dois lados desiguais resultam em ângulos opostos desiguais sendo que o maior ângulo ficará oposto ao maior lado e vice versa
- V. Sendo x a soma dos seus ângulos internos então $180^\circ < x < 540^\circ$

Outro ponto a se observar, diferenciando da trigonometria plana é que para solucionar triângulos esféricos, são necessários três elementos (três lados, três ângulos, dois ângulos e um lado ou dois lados e um ângulo).

Para fins de aplicação na Astronomia de Posição, é usada a Formula Fundamental especifica para triângulos esféricos também conhecida como *Formula dos Quatro Elementos*.

Teorema 1: Seja ABC um triângulo esférico, com ângulos internos A, B e C e com lados a, b e c, de acordo com a figura a seguir

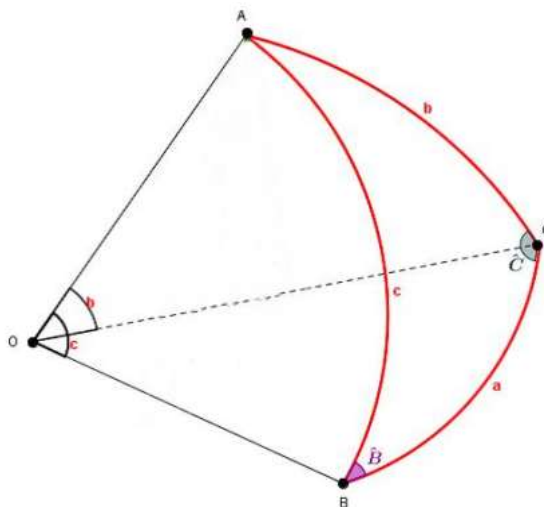


Figura 12: Esquema triângulo esférico

Assim, temos que as Leis dos Cossenos e Lei dos Senos serão respectivamente

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(b)\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)\cos(A) \\ \cos(b) &= \cos(a)\cos(c) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(c)\cos(B) \\ \cos(c) &= \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\cos(C)\end{aligned}$$

e

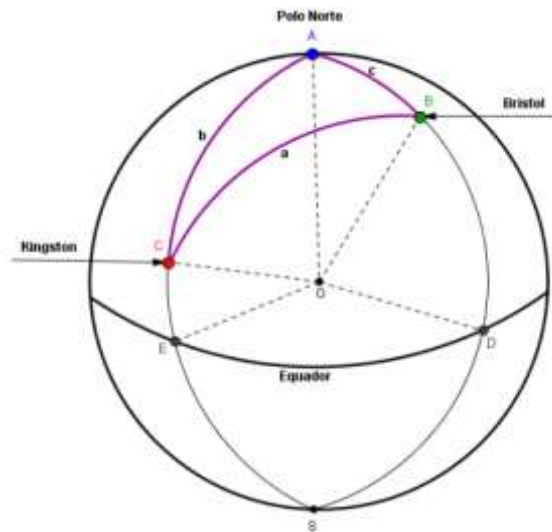
$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(C)}$$

Cujas demonstrações não é o objetivo deste trabalho, sendo observado apenas as suas aplicações no contexto da Geometria não-euclidiana.

Como aplicação, consideremos uma atividade proposta por ZANELLA (2013) sobre geometria esférica

Exemplo 3: A cidade de Kingston, Jamaica, tem as seguintes coordenadas geográficas: latitude $18^{\circ}5'N$ e longitude $76^{\circ}58'W$, enquanto que a cidade de Bristol, Inglaterra, tem latitude $51^{\circ}26'N$ e longitude $2^{\circ}35'W$. De posse desses dados, determine a distância entre Kingston e Bristol.

Considerando o globo terrestre com um dos vertices do triangulo esferico sobre o polo norte (pois conhecendo-se a latitude e longitude dos pontos B e C, nos possibilita determinar os valores de b e c e do ângulo \hat{A}) como mostra a figura



5

Figura 13: Triângulo esférico no globo

Como o arco AD tem 90° e o arco BD tem $51^\circ 26'$ (latitude de Bristol), então

$$c = 90^\circ - 51^\circ 26' = 38^\circ 34'. \text{ Analogamente, temos } b = 71^\circ 55'.$$

Por outro lado, o ângulo A está associado ao arco DE. Então, para determiná-lo, basta fazer a diferença entre as longitudes

$$A = -2^\circ 35' - (-76^\circ 58') = 74^\circ 23'.$$

Agora é só aplicar os dados na fórmula fundamental

$$\cos(a) = \cos(71^\circ 55') \cos(38^\circ 34') + \operatorname{sen}(71^\circ 55') \operatorname{sen}(38^\circ 34') \cos(74^\circ 23')$$

$$\cos(a) = 0,40223$$

$$a = \arccos(0,40223)$$

$$a = 66,28^\circ$$

Assim, como 1° de circunferência máxima corresponde na superfície terrestre a aproximadamente 111,12km, temos que a distância entre Kingston e Bristol é aproximadamente

$$66,28 \times 111,17 \text{ km} = 7368,35 \text{ km}.$$

4 A VARIÁVEL DE MERCATOR

Por questões de sobrevivência inicialmente e depois por conquistas do homem, surgiram as necessidades de deslocamentos na superfície terrestre cada vez maiores, e que aos poucos atingiram distâncias em grandes proporções, tanto por terra quanto, principalmente, pelo mar, onde por séculos era algo obscuro, mas que se desvendava aos poucos. Com isso era necessário algo que guiasse e orientasse, surgindo, assim, estudos e traços de mapas para tal destino. Este trabalho, teve contribuição de grandes matemáticos, fazendo jus a uma preocupação principal: traçar uma planificação de uma superfície esférica em que se identificasse distâncias proporcionais aproximadas, afim de uma orientação mais precisa no deslocamento.

Uma navegação partindo do Brasil até a costa africana em linha reta na direção oeste, é o jeito mais simples para um descolamento rápido e direto dessa viagem (Melo 2012). A facilitação do deslocamento em alto mar com o uso do traço de linhas imaginaria, é algo antigo, porém só no século XVI que o grande matemático belga Gerard Mercator tornou isso mais claro. Mesmo tendo feito um trabalho de consolidação de outros cartógrafos e matemáticos da época, se revolucionou por suas habilidades espaciais de projeções loxodromiais.

Em um contexto relativo as grandes navegações, momento em que a Europa estabilizava seu poder sobre suas colônias até então conquistadas, as consolidações de Mercator foram aos poucos vistas como vantajosas, uma vez que facilitava a navegação pelas chamadas *linhas de rumo*.

Mercator conseguiu esticar a esfera terrestre em um plano, traçando linhas imaginarias em paralelos e meridianos perpendiculares entre si, ou seja, com ângulos em concorrência de 90° propícias para traços em loxodrômicas – as chamadas *linhas de rumo* que no mapa eram retas fazendo ângulos constantes com os meridianos (ÁVILA 2010).

Segundo GURGEL:

A conformidade⁴ e a representação das linhas de remo por segmentos de reta, faz com que esta projeção seja particularmente apropriada para apoiar a navegação marítima: rumos e azimutes são medidos diretamente na carta, através de transferidores ou das rosas-dos-ventos aí impressas, e as correspondentes direções podem facilmente ser transferidas para outros locais da carta, utilizando um par de esquadros de navegação.

⁴ Aplicações *Conformes* acontece quando a escala máxima é igual a escala mínima em todas as partes do mapa, preservando ângulos e pequenas formas.

Saindo de uma análise técnica, pode-se ver o feito de Mercator de outra maneira, pois ele conseguiu o feito de realizar a quadratura do círculo, isto é, de transformar a esfera terrestre em um plano retangular. Fez do globo algo que se podia colocar espalhado sobre uma mesa.

Assim, sua planificação ficou conhecida como projeção cilíndrica, em que o globo é projetado sobre um cilindro tangente ao mesmo, na forma normal ou equatorial, ou seja, cuja forma beneficiava a região central do equador – características equatoriais, porem distorcendo as partes mais altas do globo a medida que as latitudes se distanciavam em direção aos polos – distorção nos paralelos, cabendo ainda características gnômônicas (ou projeção central, é a projeção de uma esfera sobre uma superfície tangente a partir do seu centro). Assim, convém uma análise mais específica de matemática, quanto à sua mudança da forma esférica para plana, que Mercator não havia elucidado principalmente em detrimento das distorções, mesmo existindo conceitos matemáticos conhecidos até então para tal explicação. A ilustração a seguir, mostra como se deu a projeção empírica⁵ de Mercator

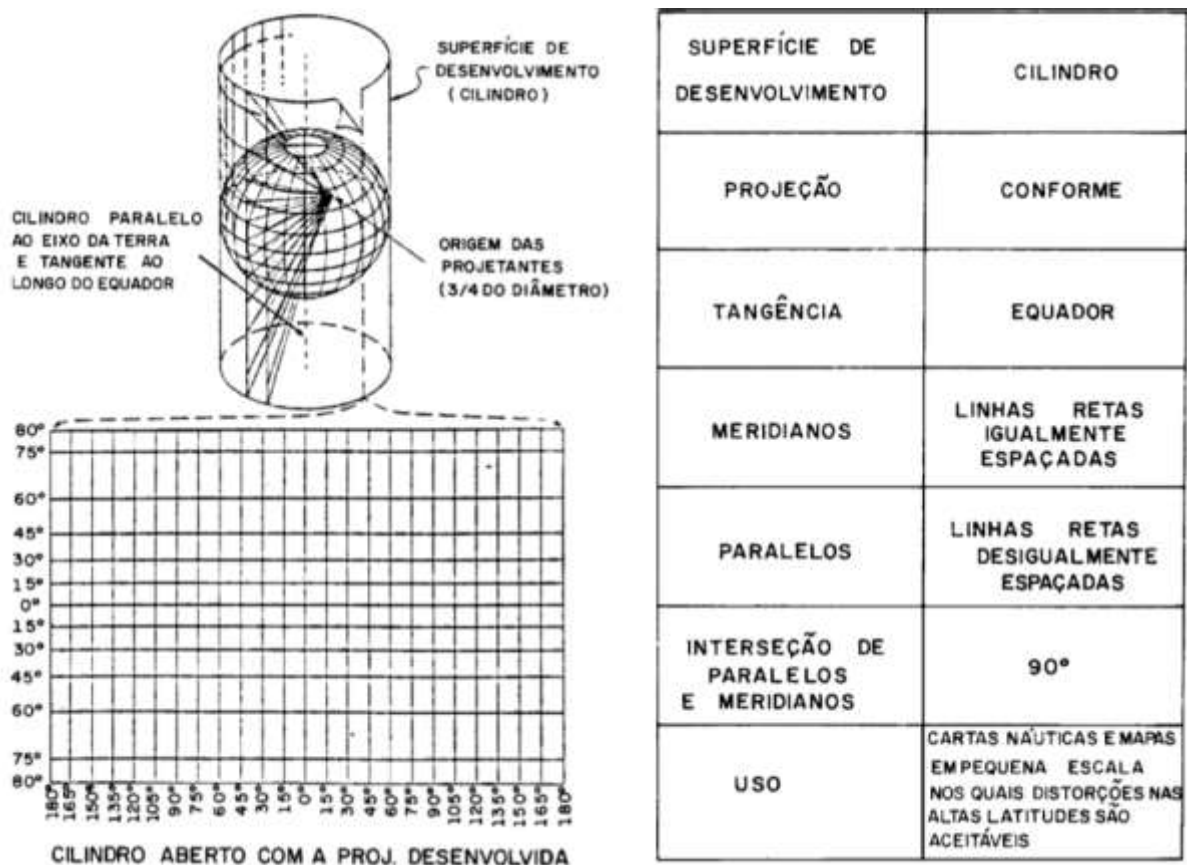


Figura 14: Projeção cilíndrica

Fonte: SOUZA E GARNÉS (2012, p.2)

⁵ Que resulta da prática, da observação e não da teoria.

Observado o quadro de projeção, uma conclusão a tirar de acordo com TIMBÓ (2001, p.20) é

A transformação dos pontos terrestres para o plano de projeção requer o estabelecimento de sistemas de coordenadas para garantir uma correspondência em ambas as superfícies. As coordenadas no modelo elipsóidico terrestre são expressas em termos de latitudes e longitudes geodésicas. As coordenadas no plano de projeção são expressas em um sistema cartesiano retangular com o eixo X positivo apontado para Leste e eixo Y positivo apontado para norte. A relação entre as coordenadas elipsóidicas e as coordenadas no plano são dadas pela lei matemática da projeção que é característica de cada sistema particular de projeção.

Na projeção cilíndrica idealizada por Mercator procurou-se manter uma escala axiomática ao longo do Equador, onde através de leis matemática, é explicada como se dá uma transformação dessa projeção no sentido de esclarecer as devidas distorções e sua reflexão na superfície plana, quanto as regiões que se distanciavam da linha do equador em direção aos polos.

Porém, mesmo sendo matemático, não se sabe por qual motivo Mercator não haveria explicado matematicamente o problema de sua projeção. Todavia despertou curiosidade pela aproximação e, conseqüentemente, adeptos aos estudos matemático deste caso. Foi então que o cartógrafo e matemático **Edward Wright**⁶ em 1599 na sua primeira publicação, esboça um mapa que respeita as características das Projeções de Mercator, relatando uma solução matemática relativa a tal modelo.

O cálculo de **Wright** com a ajuda de conceitos geográficos é baseado na projeção de longitudes e latitudes no plano. Para isso, consideremos a figura abaixo como análise da maneira em que Wright apresentaria a relação superfície esférica – superfície plana.

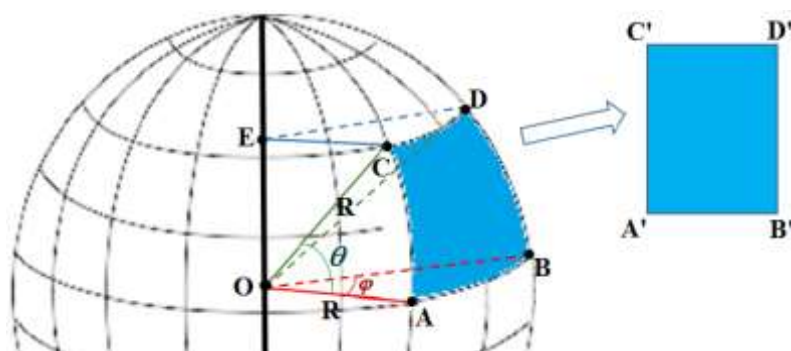


Figura 15: Esquema projeção de latitude e longitude no plano

Fonte: Elaborado pelo autor

⁶ Edward Wright – matemático e cartógrafo inglês nascido em 1561. Autor de muitas obras na área da cartografia e navegação, foi o primeiro a produzir um mapa-múndi fazendo uso da Projeção de Mercator .

Consideraremos aqui uma esfera de centro O e raio R, conveniente a determinada escala, em que os comprimentos ao longo da linha do equador permaneçam inalteradas na sua projeção do mapa plano. Tomemos então dois segmentos de paralelos AB sobre o equador e CD sobre um paralelo de latitude θ , ambos entre os mesmos meridianos. De acordo com tal projeção, são representados por A'B' e C'D' quando projetados em um mapa plano. Os arcos AB e CD tem tamanhos diferente, e recorrendo a conhecimentos de Geometria Plana temos as seguintes relações

$$CD = EC \cdot \varphi$$

$$EC = OC \cdot \cos \theta$$

e

$$OA = OB = OC = OD = R$$

$$\text{Logo, } CD = AB \cdot \cos \theta$$

Pois, nota-se que CD se distancia da linha do equador em direção aos polos, tendo seu comprimento diminuído tendendo para zero na medida que θ tende para 90° . Por outro lado, de acordo com a projeção na figura 15

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{AB}{AB \cdot \cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$\text{Logo, } \frac{C'D'}{CD} = \sec \theta \text{ e } C'D' = CD \cdot \sec \theta$$

Sendo $\sec \theta > 1$ no intervalo de $0^\circ < \theta < 90^\circ$, concluímos que o comprimento ao longo dos paralelos deverá ser aumentado pelo fator $\sec \theta$ (ÁVILA 2010).

Uma segunda análise, diz respeito ao comprimento ao longo dos meridianos, ou seja, como se daria a projeção A'C'. Então, segundo NOEL FILHO (2012, p. 121)

No planisfério, para obter o comprimento correspondente ao arco de latitude, precisamos dilatar o segmento do meridiano na mesma proporção do fator secante. Este fator é conhecido como *Variável de Mercator* ou fator de variação das latitudes crescentes.

Observa-se então que teremos, sem dúvida, um procedimento bem mais complexo, pois nota-se que o fator $\sec \theta$ de aumento ao longo de cada meridiano, não funciona para este

caso, já que θ varia por toda esta linha. Mesmo assim, para condução desse processo, sabemos até então que à medida que um dado arco em paralelo diminui ao se distanciar do equador em direção aos polos, teremos conseqüentemente o aumento relativo dos meridianos que o cerca obedecendo ao mesmo fator $\sec\theta$. Como o mesmo assume valores diferentes ao longo dos meridianos, a saída era dividir o arco AC de latitude θ_0 em pequenos deslocamentos Δs de iguais proporções, observando que este ângulo varia no intervalo de zero a θ_0 . Vale ressaltar também, que a imagem dessa linha (AC) quando em mapa plano será retilínea, fazendo o mesmo ângulo com todos os meridianos por se tratar de uma linha de rumo. Assim cada Δs irá se decompor em componente horizontal $\Delta s \sin\theta$ e vertical $\Delta s \cos\theta$ para o ângulo α formado por tal linha como mostra a figura 16 abaixo

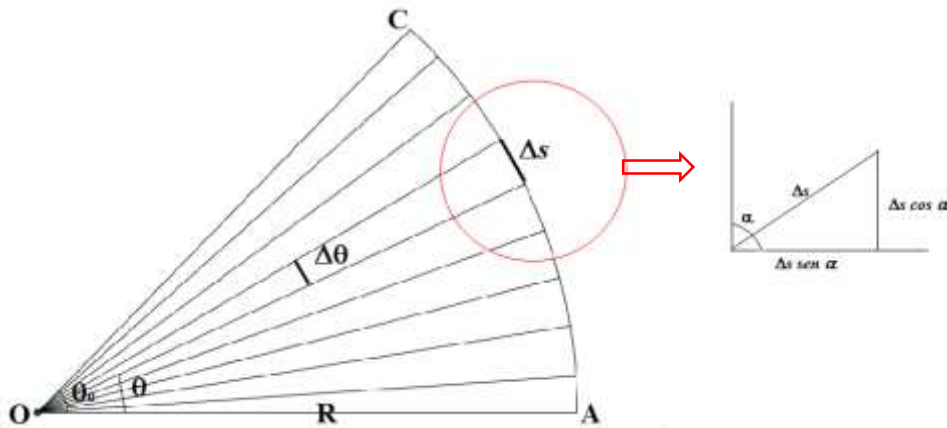


Figura 16: Esquema deslocamentos elementares

Fonte: ÁVILA (2010), modificado pelo autor

Assim, o arco AC será representado pela soma de todos os deslocamentos elementares $\Delta s = R.\Delta\theta$ com θ variando no intervalo de zero a θ_0 , e com o atributo do fator $\sec\theta$ teremos que

$$\Delta s \sec\theta = R.\sec\theta.\Delta\theta$$

Como θ varia em cada intervalo, $A'C'$ será o somatório de todos esses deslocamentos elementares

$$A'C' \approx R \sum \sec\theta.\Delta\theta$$

Todos os valores dos intervalos por partes foram analisados por Wright, de forma tabelada sendo interpretada e concluída pelo somatório acima desenvolvido.

Com a descoberta do cálculo infinitesimal, o matemático Gauss por volta de 1822, traduz a chamada *variável de Mercator* ou fator das latitudes crescentes em uma linguagem moderna.

Considerando $A'C'$ como um infinitésimo dy em projeção ao arco AC como sendo a soma dos $R \cdot \sec\theta \cdot \Delta\theta$, teremos que dessa soma infinitésima resulta numa integração, podendo assim ser reescrita como:

$$\int_0^y dy = R \int_0^{\theta} \sec\theta d\theta$$

Onde integrando, teremos

$$y = R \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

É esta latitude y que Gauss denomina de *variável de Mercator*, uma homenagem ao grande idealizador desta projeção.

5 A GEOMETRIA DIFERENCIAL E AS PROJEÇÕES DE MERCATOR

O problema das projeções e o uso de teorias matemáticas para o seu melhoramento veio conseguir mais consistência somente no século XIX, com a formalização da Geometria Diferencial. Uma geometria que possui bases no cálculo diferencial para explicar vários conceitos e aplicações da geometria não-euclidiana, ou seja, contribuindo para o estudo de superfícies curvas e suas variações.

Veremos, agora, os estudos de Gauss e suas teorias, relacionadas à geometria diferencial bem como sua utilidade para o aprimoramento da projeção de Mercator.

5.1 A curvatura Gaussiana e o Teorema egrégio

O matemático Gauss⁷, foi um dos grandes idealizadores da geometria Diferencial. Começou seus estudos numa análise de pesquisa em campo onde se dedicou cerca de 30 anos de sua vida. Este trabalho de tamanho exaustivo, lhe rendeu resultados concretos a respeito da superfície terrestre e suas especificidades bem como a análise matemática das superfícies curvas. Foi nesse período, também, que Gauss desenvolveu interesses na área da astronomia, chegando a ser diretor de um observatório astronômico, onde aprofundou seus estudos sobre geodésicos, desenvolvendo tamanho interesse pelas características gerais das superfícies em outras instâncias. Autor de várias publicações, como por exemplo a *Generalização da projeção cartográfica de Mercator*, onde ele aperfeiçoa técnicas de projeções idealizadas por este matemático, nosso foco deste trabalho. Anos depois, Gauss, após desenvolver o uso da Geometria Diferencial para tal prática e aperfeiçoamento do estudo de curvas, publica seu trabalho mais importante – o *Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas* que segundo NOEL FILHO (2012, p. 129),

Em *Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas*, Gauss propõe um método geral para o estudo das superfícies curvas, que depende apenas de suas propriedades características e não do meio em que está imersa, ou seja, o estudo da superfície depende apenas de suas propriedades intrínsecas. [...]Gauss mostra, que conhecendo-se a natureza da superfície, é possível determinar as equações das suas geodésicas, as quais chamava de “curvas mais curtas”.

⁷ Johann Carl Friedrich Gauss, matemático alemão nascido em 1777, na cidade de Brunswick, que segundo SILVA e MARTINS (2008), contribuiu para estudos e avanços importante na Geometria Euclidiana, e principalmente, não euclidiana, desenvolvendo suas próprias teorias para estudos de curvas com a adesão da Geometria Diferencial.

Nesta publicação é possível perceber que o estudo das propriedades intrínsecas diz respeito às propriedades das superfícies que dependem apenas de medições feitas nessa superfície, não importando o espaço onde ela está inserida.

Por outro lado, sabemos da inviabilidade do desenho de um mapa num plano que seja tal qual suas dimensões iguais às do globo terrestre. Isso porque, as planificações do globo feitas até então davam uma ideia falsa em relação principalmente das regiões que se distanciam do equador, ou seja, quanto mais perto dos polos, maior a distorção e, conseqüentemente, a forma dos continentes ficam alteradas. Contudo, os mapas apenas nos aproximam da realidade. O que se pode fazer realmente são aplicações conformes de regiões da esfera em regiões planares, mas que não existem isometrias em tais aplicações segundo VENTURA (2012), sendo assim, os mapas cartográficos baseados em aplicações conformes serão mais fieis a realidades quando representam regiões pequenas.

A projeção cilíndrica é a mais usada nesta planificação, incluindo a de *Mercator*, que independente das grandes deformações observadas, CARMO (2012, P. 261) explica que

Embora o cilindro e o plano sejam superfícies distintas, suas primeiras formas fundamentais são “iguais” (pelo menos, nos sistemas de coordenadas que consideramos). Isto significa que, no que se refere a questões métricas intrínsecas (comprimento, ângulo, área), o plano e o cilindro se comportam localmente da mesma maneira. (Isto é claro intuitivamente, já que cortando-se um cilindro ao longo de uma das geratrizes pode-se desenrolá-lo sobre uma parte do plano.)

Logo, o método aplicado por Mercator de projeção do globo em um cilindro foi valido, por suas superfícies apresentar semelhanças matemáticas com mesmo “comportamento local”, daí apresentando uma melhor aproximação ao objetivo principal de projeção do globo no plano.

Seguindo o contexto, o problema de mapear a superfície da Terra em um plano (curvatura zero), sem que aja algum tipo de deformação, está no fato de que a sua curvatura não é nula. Pois sabe-se que a curvatura K de uma superfície esférica é dada por $K = \frac{1}{R^2}$, onde R é o raio.

Por aplicação da geometria diferencial, vale a pena verificarmos o porquê e como se dão as distorções geradas pela projeção da esfera em um plano, onde Gauss, por meio de suas *formas fundamentais* para superfícies curvas apresenta seu *Teorema Egrégio* como

explicativa da inexistência de uma *isometria local*⁸ entre o plano e a esfera. E que nas aplicações conformes idealizadas pelos mapas de Mercator, consequentemente, não serão isométricas.

Para introdução de tal teorema, Gauss utiliza de forma sistemática uma representação parametrizada da curva a partir dos estudos de Euler:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Para ai sim, definir a sua *primeira forma fundamental*

$$ds^2 = E d_u^2 + 2F d_u d_v + G d_v^2$$

Em termos das funções E , F e G de u e v , determinando as distâncias ao longo de uma superfície definindo sua natureza essencial, ou seja, a *primeira forma fundamental* diz respeito à métrica de uma superfície. Assim, considerando esta parametrização, os coeficientes E , F e G podem ser determinados como

$$E = \langle dX_u, dX_u \rangle, F = \langle dX_u, dX_v \rangle \text{ e } G = \langle dX_v, dX_v \rangle$$

Sobre a problemática de calcular explicitamente a curvatura segundo GORODSKI (2008), Gauss fornece uma fórmula essencialmente em termos de determinantes da diferencial da representação esférica, conhecida como sua *segunda forma fundamental*, é uma fórmula em termos de E , F , G e suas derivadas até ordem 2. Com isso, Gauss define a chamada curvatura Gaussiana para um ponto qualquer da superfície por:

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Onde Gauss, partindo do pressuposto que é possível determinar uma curvatura em cada ponto de uma superfície conhecendo-se os coeficientes u e v , define uma aplicação normal N para obtenção dos termos e , f e g dessa segunda forma fundamental

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}, \text{ onde } \|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2} \text{ definindo assim,}$$

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle \quad f = \langle N, X_{uv} \rangle \quad \text{e} \quad g = \langle N, X_{vv} \rangle$$

Onde X_{uu} , X_{uv} e X_{vv} representam a segunda derivada parcial em relação a X_u e X_v .

⁸ Isometria local é uma aplicação que preserva a primeira forma fundamental, ou seja, preserva todas as grandezas que dela dependem: o comprimento das curvas, o ângulo entre duas curvas e a área das regiões pequenas.

E por questão de notação e melhoramento dos cálculos a se realizar, os coeficientes da segunda forma fundamental podem ser desenvolvidos da seguinte forma:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \cdot \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle$$

$$e = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uv} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \cdot \langle X_u \times X_v, X_{uv} \rangle$$

$$f = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{vv} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \cdot \langle X_u \times X_v, X_{vv} \rangle$$

$$g = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Onde os determinantes são formados pelas matrizes cujos componentes são vetores de X_u, X_v, X_{uu}, X_{uv} e X_{vv} em suas combinações como visto acima, na base canônica do \mathfrak{R}^3 .

Dessa formula, resulta num importante teorema sobre a Teoria Geral de Superfícies Curvas, que o próprio autor nomeou de “*egrégio*”.

Teorema 2 (egrégio): A curvatura Gaussiana k de uma superfície é invariante por isometrias locais.

Para CARMO (2012), no teorema de Gauss, as curvaturas Gaussianas são iguais em pontos correspondentes, um fato que é não-trivial geometricamente. Tal definição, usa de maneira essencial, a posição da superfície no espaço não dependendo desta posição mas apenas da estrutura métrica da superfície (*primeira forma fundamental*).

A prova é obtida pelos chamados *símbolos de Christoffel*⁹, uma análise entre os pontos de uma superfície associada a um triedro, com estudo das derivadas de seus vetores, focada nos coeficientes da primeira forma fundamental mostrando a invariância por isometrias.

Dessa forma, este teorema é decisivo para que duas superfícies dadas como a plano ($k = 0$) e a esfera ($k > 0$) não sejam localmente isométricas.

Uma citação retirada sobre o TEOREMA EGRÉGIO do site Wikipédia, tendo como referência a famosa publicação de Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) explica que:

Uma esfera de raio R tem uma curvatura gaussiana constante que é igual a $1/R^2$. Ao mesmo tempo, a curvatura gaussiana de um plano é zero. Como um corolário do teorema egrégio, não se pode embrulhar uma esfera com um pedaço de papel sem amassá-lo. Reciprocamente, a superfície de uma esfera não pode ser desdobrada em uma superfície plana, sem distorcer as distâncias. [...] Matematicamente falando, uma esfera e um plano não são isométricos, nem mesmo localmente. Este fato é de grande importância para a cartografia: ele implica que é **impossível criar um mapa perfeito da terra**, mesmo que seja de um pedaço pequeno de sua superfície. Portanto toda projeção cartográfica distorcerá necessariamente pelo menos algumas distâncias.

Concluindo ainda que, uma isometria só acontece, quando se torce ou entorta uma dada superfície sem amassá-la nem rasgá-la internamente, ou seja sem qualquer tensão, compressão ou cisalhamento extra.

Por outro lado, percebemos então que, por *egrégio*, a primeira forma fundamental é preservada por isometrias. Sendo assim, uma prova de que o plano e a esfera não são localmente isométricos é mostrar que ambos não possuem a mesma *primeira forma fundamental*, fazendo uma análise das aplicações E, F e G e suas derivadas, e concluindo a prova calculando e , f e g a partir da segunda derivada para o cálculo da curvatura gaussiana e definição da não isometria.

Inicialmente façamos uma análise da citação retirada de CARMO (2012) do início desse tópico, afirmando que o plano e o cilindro são localmente isométricos. Para isso, iremos analisar suas *primeiras formas fundamentais* para tais conclusões.

Para isso, seja **um plano** π passando pelo ponto p direcionado pelos vetores $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ unitários e ortogonais, parametrizado por $X(u, v) = p + uw_1 + vw_2$.

⁹ Assim nomeado em homenagem ao matemático e físico alemão Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900). Desenvolveu estudos para mapeamento conformes, Geodésia, teoria invariante, dentre outros.

Dessa forma teremos que $X_u = w_1$ e $X_v = w_2$. E os elementos da primeira forma fundamental serão

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1$$

E para análise posterior, façamos a curvatura gaussiana do plano. Para isso é fácil perceber, com uso das formulas e procedimentos pela segunda derivada que, $e = 0$, $f = 0$ e $g = 0$ e conseqüentemente $K = 0$.

Vejamos agora **um cilindro vertical** C cuja parametrização é $X(u, v) = (\cos u, \text{sen}u, v)$ contido em $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$.

Assim teremos que $X_u = (-\text{sen}u, \cos u, 0)$ e $X_v = (0, 0, 1)$ e

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \text{sen}^2u + \cos^2u = 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1$$

Concluindo, então, que o plano e o cilindro possuem a mesma primeira forma fundamental, conseqüentemente são localmente isométricos (porem uma observação a se fazer é que os mesmos não são globalmente isométricos. É fácil perceber pelo fato de o cilindro possuir uma superfície curva.)

Usando o mesmo raciocínio, analisemos agora o caso da *primeira forma fundamental* e cálculo da curvatura gaussiana para a esfera e respectivo comparativo de isometria com o plano.

Seja agora **uma esfera** S com coordenadas esféricas parametrizadas dada por $X(\theta, \varphi) = (r \cdot \text{sen}\theta \cos \varphi, r \cdot \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, r \cdot \cos \theta)$, com $0 < \theta < \pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$.

Teremos assim,

$$X_\theta = (r \cdot \cos \theta \cos \varphi, r \cdot \cos \theta \text{sen}\varphi, -r \cdot \text{sen}\theta) \text{ e } X_\varphi = (-r \cdot \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, r \cdot \text{sen}\theta \cos \varphi, 0)$$

E, os elementos de sua primeira forma fundamental serão

$$E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2$$

$$F = \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = 0$$

$$G = \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = r^2 \text{sen}^2 \theta$$

Logo, percebe-se que diferem a primeira forma fundamental do plano e da esfera, mostrando que não são localmente isométricas. Logo, para uma conclusão mais precisa, a curvatura gaussiana será definitiva neste comparativo.

Para o cálculo da curvatura gaussiana faz-se necessário o desenvolvimento dos elementos da *segunda forma fundamental*, assim façamos as segundas derivadas:

$$X_{\theta\theta} = (-r.\text{sen}\theta \cos \varphi, -r.\text{sen}\theta \text{sen}\varphi, -r.\cos \theta)$$

$$X_{\varphi\varphi} = (-r.\text{sen}\theta \cos \varphi, -r.\text{sen}\theta \text{sen}\varphi, 0)$$

$$X_{\theta\varphi} = (-r.\cos \theta \text{sen}\varphi, r.\cos \theta \cos \varphi, 0)$$

E agora os coeficientes da *segunda forma fundamental*:

$$\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\theta}) = \begin{vmatrix} r.\cos\theta \cos \varphi & r.\cos\theta \text{sen}\varphi & -r.\text{sen}\theta \\ -r.\text{sen}\theta \text{sen}\varphi & r.\text{sen}\theta \cos \varphi & 0 \\ -r.\text{sen}\theta \cos \varphi & -r.\text{sen}\theta \text{sen}\varphi & -r.\cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -r^3 \text{sen}\theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - r^3 \text{sen}^3 \theta \text{sen}^2 \varphi - r^3 \text{sen}^3 \theta \cos^2 \varphi - r^3 \text{sen}\theta \cos^2 \theta \text{sen}^2 \varphi \\ &= -r^3 \text{sen}\theta \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi) - r^3 \text{sen}^3 \theta (\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= -r^3 \text{sen}\theta (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) \\ &= -r^3 \text{sen}\theta \end{aligned}$$

$$\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\varphi}) = \begin{vmatrix} r.\cos\theta \cos \varphi & r.\cos\theta \text{sen}\varphi & -r.\text{sen}\theta \\ -r.\text{sen}\theta \text{sen}\varphi & r.\text{sen}\theta \cos \varphi & 0 \\ -r.\cos\theta \text{sen}\varphi & r.\cos\theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= r^3 \text{sen}\varphi \cos \theta \cos \varphi \text{sen}^2 \theta - r^3 \text{sen}\varphi \cos \theta \cos \varphi \text{sen}^2 \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\varphi\varphi}) = \begin{vmatrix} r.\cos\theta \cos \varphi & r.\cos\theta \text{sen}\varphi & -r.\text{sen}\theta \\ -r.\text{sen}\theta \text{sen}\varphi & r.\text{sen}\theta \cos \varphi & 0 \\ -r.\text{sen}\theta \cos \varphi & -r.\text{sen}\theta \text{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -r^3 \cdot \text{sen}^3\theta \text{sen}^2\varphi - r^3 \text{sen}^3\theta \cos^2\varphi \\
&= -r^3 \text{sen}^3\theta (\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) \\
&= -r^3 \text{sen}^3\theta
\end{aligned}$$

Logo,

$$e = \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\theta})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-r^3 \text{sen}\theta}{\sqrt{r^2 \cdot r^2 \text{sen}^2\theta - 0^2}} = \frac{-r^3 \text{sen}\theta}{r^2 \text{sen}\theta} = -r$$

$$f = \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\varphi})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{0}{\sqrt{r^2 \cdot r^2 \text{sen}^2\theta - 0^2}} = 0$$

$$g = \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\varphi\varphi})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-r^3 \text{sen}^3\theta}{\sqrt{r^2 \cdot r^2 \text{sen}^2\theta - 0^2}} = \frac{-r^3 \text{sen}^3\theta}{r^2 \text{sen}\theta} = -r \text{sen}^2\theta$$

Assim a curvatura Gaussiana,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(-r) \cdot (-r \text{sen}^2\theta) - 0^2}{r^4 \text{sen}^2\theta - 0^2} = \frac{r^2 \text{sen}^2\theta}{r^4 \text{sen}^2\theta} \\
K &= \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

Concluindo assim, que além de o plano e a esfera não possuírem a mesma primeira forma fundamental, ainda não possuem curvaturas Gaussianas com características localmente isométricas, ou seja curvaturas diferentes (plano $k = 0$ e a esfera $k > 0$).

5.2 O problema da Projeção Cilíndrica de Mercator e a resolução por Gauss

Seguindo os conceitos da Curvatura Gaussiana definida por Gauss, foi que o problema do mapeamento da superfície esférica na forma da Projeção Cilíndrica de Mercator começou a tomar rumos mais precisos. A necessidade de uma explicação para as distorções deixadas por esta projeção, daria clareza para exatidão na elaboração de novos mapas, que diminuísse erros cometidos principalmente na navegação por imprecisão de localização.

Para isso, Gauss desenvolveria uma parametrização da esfera S^2 no plano (u, v) considerando os respectivos intervalos : de longitude $\varphi \in]-\pi, \pi[$ e de latitude $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. E assim, seguindo as devidas propriedades relativas a *projeção de Mercator*:

1. Os paralelos e meridianos são projetados numa rede de retas perpendiculares, obedecendo as características:
 - i. Os paralelos θ constantes são enviados nas retas v constantes e os meridianos φ constantes nas retas u constantes;
 - ii. Tal projeção se trata de uma aplicação conforme;
 - iii. Há proporção entre as distâncias ao longo do equador e sua projeção, pelo envio da constante $\theta = 0$ em $v = 0$;
 - iv. O ponto $\theta = 0$ e $\varphi = 0$ é enviado na origem.
2. As loxodromias (curvas de rumo) são projetadas em linhas retas.

Seguindo as características de uma aplicação conforme, devemos considerar uma parametrização X que leva os pontos (u, v) associado a $X(u, v)$ na esfera, e buscar uma aplicação Y da esfera tal que um ponto de coordenadas (φ, θ) é enviado no plano (u, v) , sendo $\begin{cases} u = \lambda\varphi \\ v = \lambda f(\theta) \end{cases}$ e λ uma constante. Assim, a composta de $\gamma = Y \circ X$ deverá satisfazer as devidas propriedades da Projeção de Mercator.

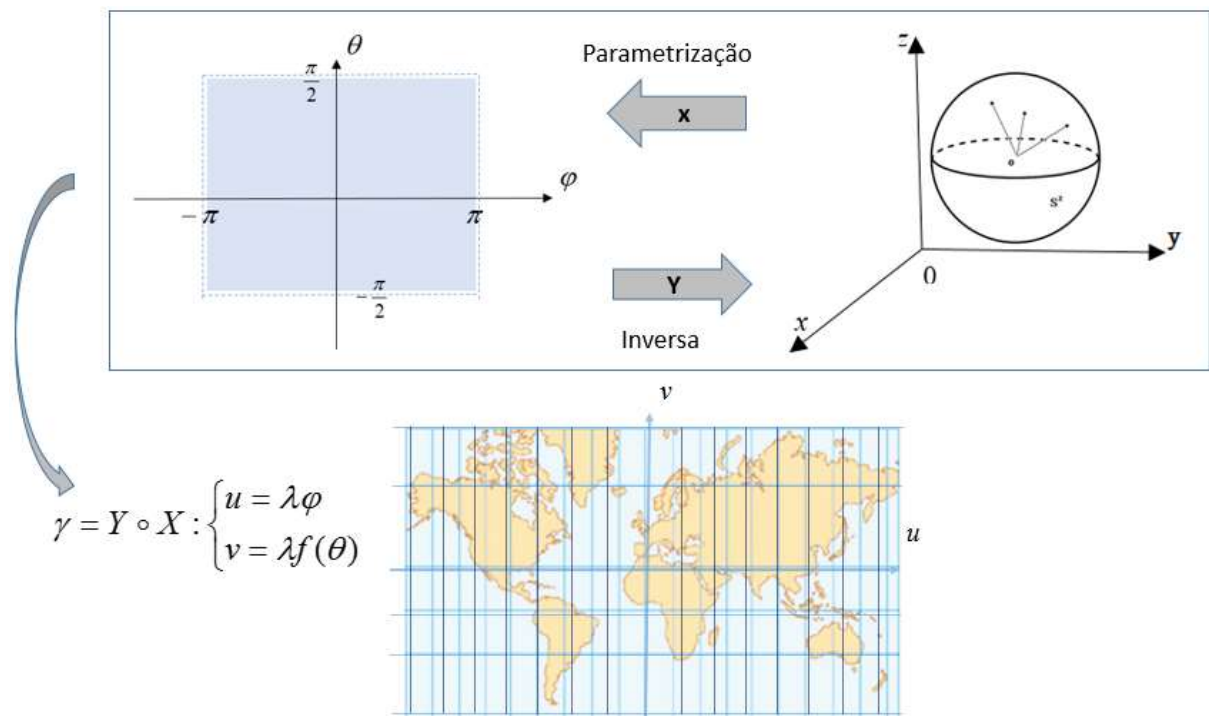


Figura 17: Parametrização e mapa obtido pela aplicação composta

Fonte: Elaborado pelo autor

A explicação vem de que a inversa e a composta de aplicações conformes são ainda conformes pelo fato de que qualquer superfície possui uma vizinhança parametrizada por uma aplicação conforme chamada isotérmica. Por meio de definições e proposições são conceituadas essas colocações, porém não é nosso propósito aqui tais demonstrações.

Assim, para encontrar Y , deveremos procurar uma aplicação de modo que para cada $X(p)$ na esfera terrestre, associe $(Y \circ X)(p) = Y(X(p)) = \gamma$ no plano.

Consideremos então a aplicação composta

$$\gamma = Y \circ X : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

que leva S^2 em R^2 de um espaço em R^3 , tal que

$$Y \circ X : \gamma(\varphi, \theta) = (\lambda\varphi, \lambda f(\theta), 0)$$

E, como vimos no capítulo anterior, mostrarei agora por este caminho que $f(\theta)$ corresponde aos cálculos de Wright, ou seja

$$f(\theta) = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

Assim, fazendo $f(\theta) = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$ para garantia da primeira propriedade,

teremos por fim, uma aplicação que define o mapa em projeção de Mercator dado por:

$$\gamma(\varphi, \theta) = \left(\lambda\varphi, \lambda \cdot \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right], 0 \right)$$

Consideremos então $X(\varphi, \theta) = \lambda \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ uma das formas parametrizadas da esfera em coordenadas geográficas esféricas com $X : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ em S^2 .

Com o uso da primeira forma fundamental de Gauss, analisaremos as condições de conformidade a partir de conceitos de diferencial.

Nas condições de parametrização para obtenção da projeção de Mercator, observamos que a composição da parametrização pela sua inversa resulta numa aplicação

conforme, tal situação pode ser resultado de um *difeomorfismo*¹⁰ que, em nosso caso, obedece à seguinte característica.

Proposição 1: Seja $(\varphi, \theta): S^2 \rightarrow \bar{S}$, sendo $X(\varphi, \theta) = \lambda \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \theta, \sin \varphi \cdot \cos \theta, \sin \theta)$ um dado ponto $p \in S^2$, então

$$\langle d(\varphi, \theta)_p v_1, d(\varphi, \theta)_p v_2 \rangle_{(\varphi, \theta)(p)} = \phi^2(p) \cdot \langle v_1, v_2 \rangle_p$$

Com v_1 e v_2 as derivadas parciais em relação a φ e θ , onde ϕ^2 será uma função diferenciável em S^2 , que garante ser S^2 e \bar{S} conformes.

Analisemos então as primeiras formas fundamentais da esfera parametrizada anteriormente como $X(\varphi, \theta) = \lambda \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \theta, \sin \varphi \cdot \cos \theta, \sin \theta)$

Para isso temos que

$$X_\varphi = \lambda \cdot (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0) \text{ e } X_\theta = \lambda \cdot (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

E, os elementos de sua primeira forma fundamental serão

$$E = \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = \lambda^2 \cos^2 \theta \quad F = \langle X_\varphi, X_\theta \rangle = 0 \quad G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \lambda^2$$

Definindo assim os termos da equação

$$ds^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\theta + G d\theta^2$$

Onde substituindo teremos

$$ds^2 = (\lambda^2 \cos^2 \theta) d\varphi^2 + \lambda^2 d\theta^2$$

Que em um plano de projeção definimos como

$$d\bar{s}^2 = \bar{E} du^2 + 2\bar{F} du dv + \bar{G} dv^2$$

Associado ao sistema de coordenadas $Y \circ X : \gamma(\varphi, \theta) = (\lambda \varphi, \lambda f(\theta), 0)$ idealizada no mapa de projeção, com $\gamma_\varphi = (\lambda, 0, 0)$ e $\gamma_\theta = (0, \lambda f'(\theta), 0)$. Com suas primeiras formas fundamentais $\bar{E} = \lambda^2$, $\bar{F} = 0$ e $\bar{G} = [\lambda^2 f'(\theta)^2]$.

Assim Y será uma aplicação conforme segundo a Proposição 1 se

¹⁰ Difeomorfismo é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável.

$$\bar{E} = E.\phi^2(\varphi, \theta), \bar{F} = F.\phi^2(\varphi, \theta) \text{ e } \bar{G} = G.\phi^2(\varphi, \theta), \text{ logo}$$

$$\bar{E} = \lambda^2\phi^2(\varphi, \theta) \cos^2\theta, \bar{F} = 0 \text{ e } \bar{G} = \lambda^2\phi^2(\varphi, \theta)$$

Segue então que

$$\bar{E} = \bar{G} \cos^2\theta$$

E fazendo as devidas substituições, fica

$$\lambda^2 = \lambda^2 f'(\theta)^2 \cdot \cos^2\theta$$

$$f'(\theta) \cos \theta = \pm 1$$

como o que nos importa aqui são as latitudes crescentes, então

$$f'(\theta) \cos \theta = 1$$

$$f'(\theta) = \frac{1}{\cos \theta}$$

Voltamos então aos cálculos de Wright para concluir a projeção

$$f(\theta) = \int \sec \theta d\theta$$

Mostrando, então, que o problema matemático da Projeção de Mercator pode ser resolvido pelas teorias das curvaturas de Gauss, ou seja, por meio das fórmulas de análise de curvaturas Gaussiana e suas primeiras e segundas formas fundamentais, voltando à *variável de Mercator* como havíamos previsto

$$f(\theta) = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right].$$

6. CONCLUSÃO

Tendo em vista as aplicações da matemática à Geografia, observa-se a diversidade de situações problemas que as envolvem no intuito de uma interdisciplinaridade real diante de tais possibilidades. Pois contudo, o estudo da cartografia necessita bem mais do que conceitos cabíveis à Geografia. O trabalho com mapas, projeções e representações da superfície terrestre, requer cálculos e explicações numéricas que a matemática com todo seu contexto histórico traz consigo. O uso da trigonometria em diversas situações problemas dentro da geometria plana e esférica, nos faz remeter a um trabalho interdisciplinar com exemplos práticos oriundos do estudo da terra e áreas afins. Vimos, neste trabalho, que os exemplos com cálculos de distâncias inacessíveis, como alturas, distâncias, ângulos, etc. requer uma *modelagem matemática* moderna que, por sua vez, faz uso de teorias até então inutilizáveis, ou seja, é a geografia dando vida a estes conceitos.

Por outro lado, para uma sofisticação desde, as *Projeções de Mercator* (oriundas dos estudos cartográficos do século XVI) abre margem para uma explicação matemática, que traga consigo um esclarecimento conciso a respeito das distorções deixadas pela projeção da esfera no plano, onde diversos matemáticos intrigados com tais dilemas, se dedicaram e consequentemente concluíram a chamada *Variável de Mercator* $y = R \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$ ou fator das latitudes crescentes, que traduziria o grau de distorções entre a transposição da esfera no plano.

Todavia, faz-se necessário entender o porquê da não isometria entre o plano e a esfera, que por sua vez Gauss em seus estudos contribuindo para o desenvolvimento da *Geometria Diferencial* desenvolve as chamadas *primeira e segunda formas fundamentais*, trazendo uma interpretação bem mais complexa no sentido de que a *primeira forma fundamental* seria decisivo para essa não isometria, e que a *Curvatura Gaussiana (K)* encontrada pela *Equação Normal de Gauss* e o uso da *segunda forma fundamental*, define a curvatura K do plano a $K = 0$ (zero) e a curvatura da esfera a $K = \frac{1}{r^2}$ (r é o raio da esfera) ou seja $K > 0$, como divergentes, definindo assim, a não isometria entre estas superfícies.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, P; BARROS, A. *Introdução a Geometria Projetiva*. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2010. (Coleção Textos Universitários).
- ARAÚJO, Paulo Ventura. *Geometria Diferencial*. 2ª edição. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária).
- ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. *Várias Faces da Matemática*. 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2010. p. 185-193.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*, Brasília, 2013.
- _____. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*, Parte III, Brasília, 2000.
- BITTENCOURT, Jane. *Sentidos da integração curricular e o ensino de matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais*. São Paulo, SP: Unicamp, 2004. V. 12, n. 22.
- BURAK, Dionísio. *Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série*. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1987.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6ª edição. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012. (Coleção Textos Universitários).
- COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. 2ª edição. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2001.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Sociedade, cultura, matemática e seu ensino*. Educação e Pesquisa, São Paulo, V. 31, n.1, p. 99-120, jan/abr. 2005.
- GORODSKI, Claudio. *Um breve panorama histórico da geometria*. Revista Matemática Universitária, 44, SP: SBM, 2008, p. 14-29.
- GURGEL, Abilio Castro. *A Projeção de Mercator*. Disponível em <<http://www.historiadacartografia.com.br/projeção.html>>. Acesso em 05 de fevereiro de 2016.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *O que é Geografia?*. Disponível em <<http://7a12.ibge.gov.br/sobre-o-ibge/o-que-e-geografia.html>>.. Acesso em: 29 jan. 2016.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. 10ª edição. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012. V.1, p.245. (Coleção Professor de Matemática).

_____. *Temas e Problemas*. 3ª edição. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2010. p. 67-75.

MACHADO, Nilson José. *Interdisciplinaridade e Matemática*. Pro-Posições, São Paulo, v.4, p. 24-34, mar. 1993.

MELO, Aline. *O homem que achatou o mundo*. Disponível em: <<http://www.revistadehistoria.com.br/secao/por-dentro-da-biblioteca/o-homem-que-achatou-o-mundo>>. Acesso em: 05 fev. 2016.

MATOS, C. M.; ROCHA, M.L.; SILVA FILHO, J.C.; FREITAS, M.A.O.; Aplicações da trigonometria esférica: Um breve relato. In: CONGRESSO NORTE NORDESTE DE PESQUISA E INOVAÇÃO, 7, 2012, Palmas, TO. p. 1-5.

NOEL FILHO, Antônio. *A relação cartografia e geometria diferencial de Mercator a Gauss*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2012.

PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Florida. Wikimedia Foundation, 2016. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Proje%C3%A7%C3%A3o_cartogr%C3%A1fica> . Acesso em: 05 fev. 2016.

ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves; SODRÉ, Leila Telma Lopes. *CO48: O uso das representações cartográficas da superfície da terra no ensino de Matemática*. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 11, 2015, Natal. p. 1-7.

SOARES, Marlene Aparecida; SCHEIDE, Tereza de Jesus Ferreira. Professor de Matemática: um educador a serviço da construção da cidadania. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife, PE. **Anais do VIII ENEM**. Recife: UFPE, 2004. P. 1-17.

SOUZA, Wanessa de Oliveira; GARNÉS, Silvio Jacks dos Anjos. *Análise de Projeções Cartográficas para grandes escalas*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO, 4, 2012, Recife. **Anais ...** Recife: UFPE, 2012. p. 1-9.

SILVA, C. M. S. *A variação dos triângulos esféricos*. **REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA**, São Paulo, n.15, p. 53-66, 1996.

TEOREMA EGRÉGIO. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2014. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_egr%C3%A9gio> Acesso em: 02 abr. 2016.

TOMAZ, M. L.; FRANCO, V. S.; Geometria Não-Euclidiana/ Geometria Esférica. 2011. Disponível em <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>> Acesso em: 30 jan. 2016.

ZANELLA, Idelmar André. Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.