



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

JANDEAN DA SILVA LIMA

**A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA O CÁLCULO
DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

FORTALEZA

2016

JANDEAN DA SILVA LIMA

A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA O CÁLCULO DE
VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

L698u Lima, Jandean da Silva
A utilização do cálculo diferencial e integral para o cálculo de volume de sólidos geométricos /
Jandean da Silva Lima. - 2016.
74 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Princípio de Cavalieri. 4. Matemática – Estudo e
ensino. I. Título.

CDD 515.33


JANDEAN DA SILVA LIMA

A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA O
CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS


Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 22 / 03 / 2016.

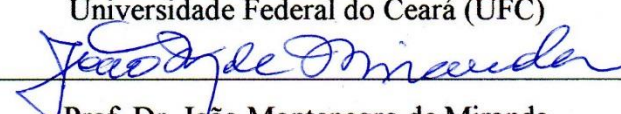
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus

Aos meus pais, Francisco Valmir de Lima e
Marilza Oliveira da Silva Lima.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ele ter sido o responsável por tudo, desde o meu acesso ao mestrado até a conclusão deste trabalho, tendo me dado saúde e força de vontade para me dedicar aos estudos.

Aos meus pais, Francisco Valmir de Lima e Marilza Oliveira da Silva Lima, por todo suporte dado para que eu pudesse ter tranquilidade na construção deste trabalho e por suas valiosas orações em prol dos meus estudos.

À minha namorada, Manuela da Silva Moreira, por seu apoio, incentivo e por sua paciência comigo, entendendo, na medida do possível, as muitas vezes que fui ausente com as obrigações de namorado para dedicação aos estudos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, pela dedicação, eficiência na orientação, pelas palavras motivadoras, por suas excelentes aulas ministradas e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Aos professores José Afonso de Oliveira, Dr. Fabrício Siqueira Benevides, Dr. Jonatan Floriano da Silva, Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho, Dr. Romildo José da Silva e Joserlan Perote da Silva pelas excelentes aulas ministradas.

A todos os meus colegas de pós-graduação em Matemática da UFC pelas experiências, conhecimentos compartilhados e pelo companheirismo.

Aos meus amigos e colegas professores que sempre torciam por minha vitória.

Aos coordenadores pedagógicos, Maurício Manoel, Marta Tereza, Robson Rangel, Vanda Mesquita e Raquel Correia pelo suporte e pela compreensão por conta da minha parcial participação nos eventos e projetos da escola em que trabalho para me dedicar aos estudos durante esses dois anos.

À CAPES, pelo incentivo financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura oferecida.

Aos professores participantes da banca examinadora Dr. Marcos Ferreira de Melo, Dr. Marcelo Ferreira de Melo e Dr. João Montenegro Miranda pelo tempo dedicado ao exame deste trabalho, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que torceram por minha vitória, e que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para que eu conseguisse terminar este trabalho.

“Não há estradas reais na Geometria.”(Euclides)

RESUMO

Este trabalho aborda o conceito de volume e o uso do processo de integração como método para o cálculo de volume de sólidos geométricos estudados no ensino médio, visando fornecer ao professor de Matemática do ensino básico uma ferramenta alternativa para a justificação das fórmulas de volume dos sólidos geométricos, diferente daquela que é empregada em quase todos os livros didáticos do ensino básico, bem como na maioria dos livros de geometria, que é o princípio de Cavalieri. Entendendo que o livro didático é a principal referência da maioria dos professores de Matemática do ensino básico, e sabendo que o princípio de Cavalieri é a ferramenta central nas demonstrações das fórmulas de volume nos livros de geometria e livros didáticos de Matemática, concluímos que o docente não dispõe de material de pesquisa que traga novas abordagens para a justificação das fórmulas em pauta. Esse fato motivou a construção deste trabalho, cujo objetivo é fornecer ao professor de Matemática do ensino básico um texto que sirva como fonte de pesquisa sobre o uso do cálculo diferencial e integral para o cálculo de volume de sólidos geométricos, trazendo as demonstrações das fórmulas da maioria dos sólidos geométricos estudados no ensino médio via integração. Com o estudo deste texto, esperamos que o professor aprofunde seus conhecimentos relacionados à geometria espacial, em particular, ao conceito de volume e às demonstrações envolvidas. A metodologia utilizada para a construção deste trabalho foi a bibliográfica, de modo que esta pesquisa foi feita a partir de análises e estudos de livros relacionados ao tema. O resultado deste trabalho resume-se na criação de um texto contendo um estudo preciso e sistemático sobre o conceito de volume bem como uma abordagem diferente acerca das demonstrações das fórmulas de volume de sólidos geométricos, utilizando como ferramenta o processo de integração. Concluímos que a integração é uma excelente ferramenta para o cálculo de volumes, resolvendo de forma simples problemas que se tornariam muito complicados pelo princípio Cavalieri. Este texto poderá ser utilizado como referencial de pesquisa para professores de Matemática da educação básica que queiram trabalhar com turmas de aprofundamento, ou de preparação para os mais difíceis vestibulares do Brasil.

Palavras-chave: Princípio de Cavalieri. Cálculo Diferencial e Integral. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This paper discusses the concept of volume and use of the integration process as a method for the volume calculation of geometric solids studied in high school, aiming to provide the mathematics teacher of basic education an alternative tool for the justification of the solids volume of formulas geometric, different from what is used in almost all the textbooks of basic education, as well as in most geometry books, which is the principle of Cavalieri. Understanding that the textbook is the main reference of most mathematics teachers of basic education, and knowing that the principle of Cavalieri is the central tool in the statements of volume formulas in geometry books and textbooks of Mathematics, we conclude that the teacher It does not have research material to bring new approaches to the justification of the formulas in question. This fact motivated the construction of this work, whose goal is to provide the mathematics teacher of primary school text that serves as a source of research on the use of differential and integral calculus to calculate the volume of geometric solids, bringing the statements of formulas most geometric solids studied in high school via integration. With the study of this text, we expect the teacher to deepen their knowledge related to spatial geometry, in particular the concept of volume and involved statements. The methodology used for the construction of this work was the literature, so that this research was made from analyzes and reviews of books related to the topic. The result of this work is summarized in the creation of a text containing a precise and systematic study on the concept of volume as well as a different approach about the statements of geometric solids volume formulas, using as a tool the integration process. We conclude that integration is an excellent tool for calculating volumes, solving of simple problems that would become very complicated by the principle Cavalieri. This text may be used as a reference to search for basic education mathematics teachers who want to work with deepening classes, or preparing for the most difficult university entrance exams in Brazil.

Keywords : Principle of Cavalieri . Differential and integral calculus. Mathematics Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Aplicação do princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de uma calota parabólica.....	13
Figura 2 – Exemplos de prismas	23
Figura 3 – Paralelepípedo reto retângulo e um cubo	23
Figura 4 – Exemplos de pirâmide	24
Figura 5 – Tronco de pirâmide	24
Figura 6 – Definição de cilindro	25
Figura 7 – Exemplos de cilindros circulares	26
Figura 8 – Definição de cone	26
Figura 9 – Exemplos de cone circular	27
Figura 10 – Tronco de cone	27
Figura 11 – Esfera de centro O e raio R	28
Figura 12 – Calota Esférica	28
Figura 13 – Segmento Esférico	29
Figura 14 – Toro sólido	29
Figura 15 – Unidade de medida de volume	31
Figura 16 – A bola aberta de centro P e raio R	32
Figura 17 – Cilindro e bloco retangular de mesma área da base e mesma altura	35
Figura 18 – Poliedro retangular	37
Figura 19 – Secção transversal do sólido S por um plano P_x	40
Figura 20 – Paralelepípedo reto retângulo e o sistema cartesiano xOy	42
Figura 21 – Prisma hexagonal e o sistema cartesiano xOy	43
Figura 22 – Pirâmide no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal.....	44
Figura 23 – Esquema para determinação do volume do tronco de pirâmide	46
Figura 24 – Cilindro circular reto e o sistema cartesiano xOy	48
Figura 25 – Cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal.....	49
Figura 26 – Tronco de cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal	51
Figura 27 – Visualização da relação entre x e y	51
Figura 28 – Esfera no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal	53
Figura 29 – Calota esférica e o sistema cartesiano xOy	54
Figura 30 – Segmento Esférico e o sistema cartesiano xOy	55
Figura 31 – Relação entre R , r , e h	58

Figura 32 – Toro sólido e o sistema cartesiano xOy	59
Figura 33 – Esquema contendo $(Plano\ xOy) \cap (toro\ sólido) \cap (secção\ do\ toro)$	60
Figura 34 – Esfera com furo cilíndrico e o sistema cartesiano xOy	63
Figura 35 – Cunha de um cilindro circular reto e o sistema cartesiano xOy	65
Figura 36 – Dois círculos de raio r com centro de um na circunferência do outro	66
Figura 37 – Intersecção de dois cilindros de raio r com eixos perpendiculares	67
Figura 38 – Secção da calota parabólica	68
Figura 39 – Sólido com formato de Barril	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	UMA BREVE REVISÃO HISTÓRICA SOBRE A GEOMETRIA ESPACIAL..	17
3	CONCEITOS E DEFINIÇÕES DE ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	22
3.1	Paralelepípedo e Prisma	22
3.2	Pirâmide	23
3.3	Tronco de pirâmide por uma secção transversal	24
3.4	Cilindro	25
3.5	Cone	26
3.6	Tronco de cone por uma secção transversal	27
3.7	Esfera	27
3.8	Calota esférica	28
3.9	Segmento Esférico	28
3.10	Sólidos de revolução	29
4	O CONCEITO DE VOLUME	30
4.1	Sólidos Mensuráveis	32
4.2	Volumes do bloco retangular e do cilindro de base genérica	34
4.3	A definição geral de volume	36
5	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E O CÁLCULO DE VOLUMES ...	39
5.1	O método da integração para o cálculo de volumes	39
5.2	Volume dos sólidos geométricos	41
5.2.1	<i>Volume do Paralelepípedo reto retângulo e do prisma</i>	41
5.2.2	<i>Volume da pirâmide</i>	44
5.2.3	<i>Volume do Tronco de pirâmide</i>	46
5.2.4	<i>Volume do cilindro circular reto e oblíquo</i>	47
5.2.5	<i>Volume do cone circular</i>	49
5.2.6	<i>Volume do tronco de cone circular</i>	50
5.2.7	<i>Volume da esfera</i>	52
5.2.8	<i>Volume da calota esférica</i>	54
5.2.9	<i>Volume do segmento esférico</i>	55
5.2.10	<i>Volume do Toro Sólido</i>	59
5.3	Problemas e aplicações adicionais	62
6	CONCLUSÃO	72

REFERÊNCIAS	74
--------------------------	-----------

1 INTRODUÇÃO

De modo geral, as demonstrações das fórmulas de volume de sólidos geométricos, apresentadas pelos livros didáticos do ensino médio e livros de geometria espacial, são feitas utilizando-se apenas o princípio de Cavalieri como método. O conteúdo deste princípio, que será discutido no quarto capítulo, está indicado no enunciado abaixo.

“Sejam os sólidos mensuráveis S_1 e S_2 e um plano α . Se para todo plano $\alpha' \parallel \alpha$ tivermos

$$\text{Área}(S_1 \cap \alpha') = \text{Área}(S_2 \cap \alpha') \text{ então } V(S_1) = V(S_2).”$$

Em relação aos livros didáticos, sabemos que a definição do conceito de volume, bem como as demonstrações das fórmulas para volume de sólidos geométricos, de modo geral, são tratados de forma incorreta. Muitos deles não fazem nem menção ao significado intuitivo de volume e ainda jogam as fórmulas limpas e secas sem qualquer cuidado em relação às suas justificações, cabendo ao aluno e ao professor acreditar na validade dessas fórmulas pela fé. São poucos os livros didáticos que abordam o princípio de Cavalieri como ferramenta para obtenção de volume de sólidos, e, quando o citam, a maioria o usa como elemento figurativo; e os poucos que fazem a aplicação deste princípio na determinação de volumes o fazem de forma incorreta, conforme afirma Lima *et al.* (2010, p.86):

Nos livros didáticos brasileiros, este assunto é apresentado, em geral, de forma bastante insatisfatória. Muitos sequer dizem o que significa calcular um volume e vários outros chutam, sem dó nem piedade, todas as fórmulas. Alguns citam o princípio de Cavalieri, mas não o utilizam corretamente, e outros nem isto fazem.

Um exemplo do uso insatisfatório do princípio de Cavalieri é destacado por Moraes (2013), em sua análise de sete coleções de livros didáticos de Matemática do ensino médio, quando verifica que alguns dos livros analisados não justificam a igualdade entre as áreas das secções transversais determinadas por um plano que secciona os dois sólidos S_1 e S_2 na aplicação do princípio de Cavalieri. Segundo Moraes (2013, p.116), “Por outro lado, entendemos que ainda há avanços necessários quanto à abordagem desse princípio, uma vez que algumas coleções não justificam, por exemplo, a igualdade entre as áreas das seções, conforme já mencionado anteriormente.”

De fato, sabemos que a maioria dos professores de Matemática do ensino básico tem nos livros didáticos seus únicos referenciais teóricos de pesquisa e estudo. Dessa forma, inferimos que boa parte dos docentes não dispõe de outras abordagens para as demonstrações

das fórmulas de volume, sendo o princípio de Cavalieri sua principal ou única base de sustentação para justificação das fórmulas de volume de sólidos geométricos. Nessas condições, uma pergunta natural que surge é: “Existe outro método mais eficiente para o cálculo de volume de sólidos geométricos?”

No intuito de responder a essa questão e de tentar mudar essa realidade, este trabalho traz um caminho não usual nos livros didáticos para demonstrações das fórmulas de volume de sólidos, apresentando uma ferramenta mais eficiente que o princípio de Cavalieri, que é a integração - ferramenta do cálculo diferencial e integral. A eficiência destacada aqui diz respeito ao fato de que, para mensurar o volume de um sólido S_1 pelo princípio de Cavalieri, necessita-se encontrar um novo sólido S_2 com volume já conhecido e que tenha as áreas das secções transversais iguais as respectivas áreas de S_1 . Encontrar ou construir S_2 nem sempre é um tarefa fácil, existindo casos em que a escolha de S_2 é extremamente inesperada. Já a ferramenta da integração traz um caminho mais direto, de modo que partimos apenas de S_1 para obter o volume do mesmo.

Um exemplo de uma escolha inesperada para o sólido S_2 , na aplicação do princípio de Cavalieri, acontece para o cálculo do volume de uma calota parabólica de altura h , gerada pela rotação de parte da parábola $z = y^2$ de altura h , em torno do eixo OZ para $0 \leq z \leq h$. Para o cálculo do volume desse sólido, toma-se, como S_2 , um prisma de altura π , tendo como base um triângulo retângulo isósceles de catetos com medida h , no plano OXZ , com coordenadas dos vértices iguais a $(0,0,0)$, $(0,0,h)$ e $(h,0,h)$ e aplica-se o princípio de Cavalieri. Mostra-se que o volume de tal calota parabólica é igual a $\frac{\pi h^2}{2}$. Convenhamos que essa escolha para o sólido S_2 não é fácil de ver. A figura 1 ilustra a aplicação do princípio de Cavalieri para a determinação do volume da calota parabólica em pauta. Na parte final deste trabalho, calculamos, de forma simples, o volume desse sólido utilizando, como ferramenta, a integração.

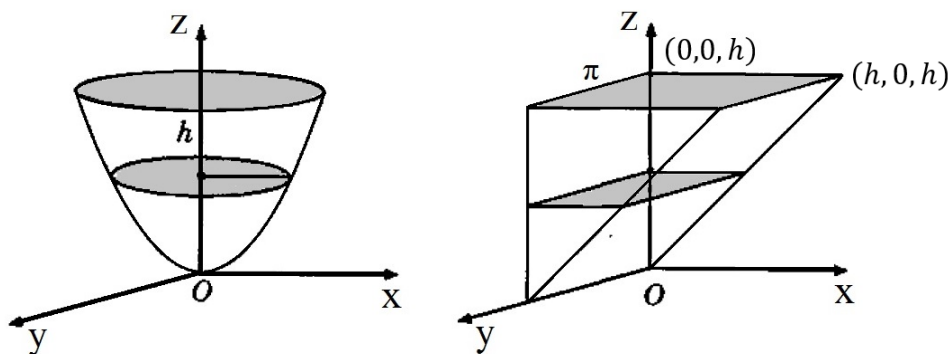


Figura 1: Aplicação do princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de uma calota parabólica

Esse “novo” método servirá para que os professores de Matemática fundamentem de forma diversificada seus conhecimentos acerca de volumes. Vale salientar que trazemos também neste trabalho as demonstrações das fórmulas de volume da maioria dos sólidos, se não todos, trabalhados no ensino médio, por meio da integração. A fim de deixar o trabalho o mais acessível possível, as demonstrações feitas aqui baseiam-se numa única forma de integração para volumes, em que o integrando sempre será a área da secção transversal do sólido em questão. De forma mais precisa, todas as demonstrações de volume são feitas a partir da definição $V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x) dx$. Tal definição é desenvolvida neste trabalho de forma simplista de modo que não apresentará dificuldades ao professor, pois estamos levando em consideração o fato de o mesmo ter um razoável conhecimento sobre o cálculo diferencial e integral. Para aqueles professores que queiram fazer uma revisão dos conceitos de cálculo, sugerimos o estudo de Stewart (2014), bem como Leithold (1994).

Uma observação importante é que as demonstrações feitas aqui podem servir como um bom material de pesquisa e estudo para professores desejosos de trabalhar com alunos de turmas olímpicas ou turmas de preparação para os mais difíceis vestibulares do Brasil ou ainda com aqueles alunos do ensino médio que querem seguir carreira no magistério, a fim de dar uma justificativa diferenciada acerca das fórmulas de volume de sólidos geométricos, pois, em geral, esses estudantes já têm certa familiaridade com os processos de derivação e integração.

Dentro desse contexto, o principal objetivo deste trabalho é apresentar aos docentes de Matemática do ensino médio o cálculo diferencial e integral, em particular, a integração, como um método que nos possibilita demonstrar de forma sistemática, eficiente e genérica as fórmulas de volume de sólidos geométricos, favorecendo assim um aprimoramento dos conhecimentos do professor, que terá um outro modo de se abordar a justificativa das fórmulas para cálculo de volume de sólidos geométricos estudados no ensino médio.

A metodologia empregada na construção deste trabalho é de caráter bibliográfico, de modo que a pesquisa foi baseada em livros. Em outras palavras, as informações que substanciaram a produção deste trabalho são resultados de um estudo minucioso de livros já publicados por grandes autores de textos matemáticos, como Elon Lages Lima, bem como James Stewart. Desenvolvemos ao longo de nossa pesquisa um raciocínio lógico-dedutivo com argumentos e demonstrações claros e objetivos. Em resumo, viajamos no tempo a fim de comentarmos alguns aspectos históricos do cálculo de volumes na história da Matemática; definimos os principais sólidos geométricos trabalhados no ensino médio, definições estas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho; fizemos um estudo do conceito de volume;

introduzimos a integração como uma ferramenta para o cálculo de volumes e aplicamos a mesma para o cálculo de volume de sólidos geométricos, com o intuito de fornecer outra alternativa de demonstração de suas fórmulas aos professores, bem como aos estudantes de licenciatura em Matemática. Esta pesquisa foi desenvolvida em quatro capítulos, dos quais fazemos uma breve descrição, conforme os parágrafos subsequentes.

No primeiro capítulo, foi feita uma breve revisão histórica da geometria espacial, observando principalmente o desenvolvimento histórico da determinação de volume de sólidos geométricos, passando pelo período de 2000 a.C. a 1600 a.C., com os babilônios, chegando até o século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz.

O segundo capítulo traz as definições e os elementos da maioria dos sólidos geométricos estudados no ensino médio, os quais terão suas fórmulas para volume demonstradas via integração. Os sólidos elencados para este estudo são: paralelepípedo, prisma, pirâmide, tronco de pirâmide, cone, tronco de cone, cilindro, esfera, calota esférica, segmento esférico e toro sólido (sólido com formato de rosquinha).

No terceiro capítulo, introduzimos a ideia usual de volume, que diz que o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Definimos também o cubo unitário como unidade padrão de medida de volumes cujo volume é igual a 1, e ainda comentamos a ideia intuitiva de que o volume de um sólido é o número que indica a quantidade de cubos unitários que o sólido pode conter. Depois disso, fizemos um breve estudo sobre os sólidos mensuráveis, onde definimos o conceito de sólido, apresentamos uma condição para a mensurabilidade de um sólido e indicamos cinco postulados de medição de volumes, entre os quais está o princípio de Cavalieri. Como exemplo de aplicação dos postulados do estudo dos sólidos mensuráveis, foi feita a demonstração da fórmula do volume do paralelepípedo reto retângulo, em particular, a título de aplicação do princípio de Cavalieri, demonstramos também a fórmula do volume do cilindro de base qualquer. No último tópico desse capítulo, demos um significado preciso à ideia intuitiva inicial de volume de um sólido, utilizando o conceito de poliedro retangular.

Enfim, o último capítulo foi reservado para as demonstrações das fórmulas de volume dos sólidos que foram definidos neste trabalho, utilizando como ferramenta fundamental a integração. Inicialmente, introduzimos de forma simples e didática o método da integração para o cálculo de volumes e, em seguida, o aplicamos para as demonstrações das fórmulas de volume de sólidos geométricos. Objetivando fazer novas aplicações do processo de integração como ferramenta de determinação de volumes e consolidar de forma prática o que foi estudado, ainda nesse capítulo, apresentamos alguns problemas adicionais interessantes

de determinação de volume. Todos os problemas aqui propostos apresentam suas respectivas soluções para que o leitor possa fazer a verificação de sua solução.

2 UMA BREVE REVISÃO HISTÓRICA SOBRE A GEOMETRIA ESPACIAL

Em concordância com Boyer (2012), afirmações referentes à origem da geometria plana e espacial são, em geral, muito arriscadas, pelo fato de que a origem de muitos assuntos matemáticos é mais antiga que até mesmo a escrita. Assim, só a partir dos últimos seis milênios, foi que o homem começou a fazer registros, em forma de escrita, de seus estudos, descobertas e pensamentos. As informações sobre o homem pré-histórico são baseadas em interpretações feitas de alguns artefatos que chegaram até nós. Vale lembrar que o registro de uma ideia, em geral, não marca o início da mesma, pois pode ser que seja apenas um reaparecimento de uma ideia já existente há muito tempo e que ainda não fora registrada.

De acordo com Eves (2004), os babilônios do período de 2000 a.C. a 1600 a.C. já sabiam calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo e, de forma mais geral, o volume de um prisma reto de base trapezoidal. Os babilônios admitiam que uma circunferência media o triplo do seu diâmetro, obtendo-se assim a aproximação $\pi = 3$. Assumiam também que a área do círculo valia o duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência em questão. Nessas condições, calculavam o volume de um cilindro como o produto da área da base pela altura e, de forma errônea, calculavam o volume de um tronco de cone e de um tronco de pirâmide fazendo o produto da altura pelo semiperímetro das bases.

Seguindo a ordem cronológica, o próximo matemático que deu grande evolução ao estudo de geometria, por volta de 300 a.C., foi Euclides, o autor de *Os elementos*, o escrito matemático mais bem sucedido até os dias atuais. Euclides foi autor de no mínimo dez trabalhos, mas apenas cinco deles chegaram até nós. São eles: *Os elementos*, *Os Dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos* e *Óptica*.

Os *Elementos* de Euclides, é um trabalho composto de 465 proposições distribuídas em 13 livros. Os livros XI, XII e XIII versam sobre geometria espacial. Em particular, o livro XII, composto por dezoito proposições, trata sobre o cálculo de volumes de sólidos geométricos pela aplicação do método da exaustão. Segundo Boyer (2012), no início do livro, há uma demonstração do teorema que traz a seguinte afirmação: “As áreas de círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros”. Neste trabalho, são calculados os volumes de pirâmides, cones, cilindros e esferas. As determinações rigorosas dos volumes desses sólidos são atribuídas, por Arquimedes, a Eudoxo, de quem provavelmente Euclides adaptou muito de suas demonstrações.

Segundo Lima (2006), no livro XII dos *Elementos*, não há fórmulas fechadas para a determinação de volumes e os principais teoremas demonstrados nele são os seguintes:

- As pirâmides e os prismas de mesma base (ou mesma altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).
- Todo prisma triangular se decompõe em três pirâmides equivalentes.
- O volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura.
- Os cones e cilindros de mesma base (ou altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).
- Os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos dos seus diâmetros.

Tais teoremas significam que os volumes do prisma e do cilindro são diretamente proporcionais à altura e à base dos mesmos. Precisamente, a expressão do volume deles é dada pela relação $V = k \times base \times altura$ em que k é uma constante real. Agora, os volumes do cone e da pirâmide são dados pela expressão $V = \frac{k}{3} \times base \times altura$. Definindo o cubo unitário como unidade padrão de volume, temos que $k = 1$, e assim chegamos às fórmulas atuais de volume desses sólidos. Esses fatos confirmam que Euclides já sabia calcular o volume de tais sólidos citados.

Em relação ao volume de uma esfera com medida do raio igual a R , o quinto teorema de Euclides, citado acima, diz que o volume da mesma é da forma $V = \lambda \times R^3$. Segundo Lima (2006), Euclides nada soube dizer a respeito do valor da constante real λ , mas, depois de passado quase um século, Arquimedes prova que $\lambda = \frac{4\pi}{3}$, chegando assim à fórmula atual $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Vale lembrar que Arquimedes considerava $\pi \cong 3,14$, e essa aproximação foi encontrada por ele por meio do método clássico de cálculo de π , baseado em aproximações por polígonos regulares inscritos e circunscritos.

Segundo Lima (2012), Arquimedes, que viveu no período 287 a.C – 212 a.C, deu uma grande contribuição para o desenvolvimento da Matemática, em especial para geometria. Abaixo, listamos os principais trabalhos de Arquimedes que conseguiram resistir ao tempo e chegar até nós.

- Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I;
- A Quadratura da Parábola;
- Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II;
- Sobre a Esfera e o Cilindro;
- Sobre as Espirais;
- Sobre Cones e Esferoides;
- Sobre os Corpos Flutuantes;

- A Medida do Círculo;
- O Contador de Areia;
- Método sobre os Teoremas Mecânicos;

Dentre esses trabalhos, dois tratam sobre o estudo de geometria espacial, são eles: *Sobre a Esfera e o Cilindro* e *Sobre Cones e Esferoides*. Esses trabalhos mostram que Arquimedes foi o primeiro matemático a calcular de forma rigorosa e elegante o volume da esfera bem como a área de sua superfície. Dando destaque aos trabalhos de Arquimedes que tratam sobre volumes de sólidos, Lima (2012, p. 55) afirma que:

Em *Sobre a esfera e o cilindro* Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é quatro vezes maior que a área do seu círculo máximo. Além disso, encontra a área do segmento de esfera qualquer, mostra que o volume de uma esfera é dois terços do volume de um cilindro circunscrito à mesma, e que a superfície esférica é dois terços da superfície de um cilindro circunscrito incluindo as suas bases.

De acordo com Eves (2004), esse trabalho foi escrito em dois livros e é constituído de 53 proposições, onde se encontra, dentre as tais, o teorema que determina as superfícies de uma esfera e de uma calota esférica. Um problema interessante é apresentado nesse trabalho, que é o de cortar uma esfera por um plano, de modo que a razão entre os volumes dos dois segmentos esféricos obtidos seja igual a uma razão já conhecida. Infelizmente, a solução desse problema não é apresentada no texto.

Arquimedes resume alguns de seus resultados geométricos favoritos da obra *Sobre a esfera e o cilindro* no elegante enunciado abaixo, do qual ele, com muita razão, tinha muito orgulho e desejava tê-lo representado em seu título:

“O cilindro que tem por base o maior dos círculos contidos na esfera e por altura o diâmetro dessa esfera é igual a uma vez e meia a mesma esfera, e sua superfície, incluindo as bases, é também igual a uma vez e meia a superfície da esfera”.

Em símbolos, o enunciado acima afirma que o volume e a superfície de uma esfera de raio R têm as respectivas fórmulas:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } S = 4\pi R^2$$

No trabalho *Sobre Cones e Esferoides*, de acordo com Lima (2012), Arquimedes se dedica ao estudo de três sólidos de revolução, são eles: os esferoides, que se obtém por meio de uma rotação de uma elipse em torno do seu eixo principal ou em torno do seu eixo menor;

os paraboloides de revolução e os hiperboloides de revolução. Seu objetivo principal nesse trabalho era determinar os volumes de tais sólidos de revolução, que atualmente configuram-se como problemas de cálculo de volumes por integração.

Outro matemático que se debruçou sobre problemas envolvendo a determinação de volumes foi Herão de Alexandria. Segundo Eves (2004), não há certeza da época exata em que ele viveu, mas há estimativas que variam de 150 a.C. a 250 d.C.. Sobreviveram até hoje cerca de quatorze trabalhos de Herão. Damos destaque ao mais importante de seus trabalhos geométricos que é sua *A métrica*, em três livros. O livro II de *A métrica* mostra como determinar os volumes dos paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros, cones, troncos de cones e troncos de pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros, os cinco sólidos regulares e alguns prismatoides. Prismatoide é um poliedro cujos vértices pertencem à planos paralelos. As faces desse poliedro que estão contidas nesses planos paralelos são chamadas de bases do prismatoide. A altura desse sólido é definida como sendo a distância entre esses dois planos paralelos. Vejamos agora um exemplo particular de fórmula de volume de prismatoide determinada por Herão: O volume de um prismatoide de altura h , com bases retangulares tendo como pares de dimensões a, b , e c, d , é dado por

$$V = h \left[\frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4} + \frac{(a - c) \cdot (b - d)}{12} \right].$$

De fato, os métodos desenvolvidos pelos matemáticos da Antiguidade para a determinação de volumes eram um tanto trabalhosos. Atualmente, a forma mais eficiente e genérica para a determinação dos volumes dos três corpos redondos, a saber, cilindro, cone e esfera, é o cálculo infinitesimal, com a integração de funções elementares. De acordo com Eves (2004), dos antigos, quem mais se aproximou do sentido atual de integração, por meio da aplicação do método da exaustão foi, sem dúvidas, Arquimedes, sendo considerado um dos precursores do cálculo infinitesimal, dando o desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral.

Já em meados do século XVII, Bonaventura Cavalieri deu uma grande contribuição para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal com seu livro *Geometria dos Indivisíveis*, em que considerava uma região plana como sendo a união de cordas paralelas e um sólido como sendo a união de placas planas paralelas. É nesse trabalho que ele enuncia o seu conhecido *Princípio de Cavalieri*. As ideias de Cavalieri influenciaram de forma considerável Leibniz.

Para finalizar esta revisão histórica, vale ressaltar que o cálculo diferencial e integral atual foi desenvolvido por Newton e Leibniz, e isso se deu na segunda metade do século

XVII, tendo como referências os trabalhos introdutórios de Fermat e Descartes, bem como os trabalhos nesse contexto dos demais matemáticos da antiguidade, principalmente Arquimedes.

3 CONCEITOS E DEFINIÇÕES DE ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Antes de iniciarmos o trabalho matemático em si, com a conceituação de volume e demonstrações das fórmulas de volume dos sólidos geométricos pela aplicação do cálculo diferencial e integral, devemos relembrar alguns conceitos e definições que se fazem necessários para a compreensão dos termos utilizados nos capítulos posteriores. Esse capítulo visa exclusivamente apresentar os conceitos e definições dos sólidos geométricos que terão seus volumes determinados via cálculo. Os sólidos são: paralelepípedo, prisma, pirâmide, tronco de pirâmide, cone, tronco de cone, cilindro, esfera, calota esférica, segmento esférico e toro sólido (anéis cilíndricos).

3.1 Paralelepípedo e Prisma

Consideremos os polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$, contidos em planos paralelos de modo que as retas $\overleftrightarrow{A_1B_1}$, $\overleftrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overleftrightarrow{A_nB_n}$ sejam paralelas entre si. De fato, é fácil ver que, os polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ são congruentes e que o quadrilátero $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ é um paralelogramo, para $1 \leq i \leq n$, convencionando-se que $A_{n+1} = A_1$.

Definição: Chamamos de **prisma** de **bases** $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ à porção do espaço que é delimitada pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ e pelos polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ com $1 \leq i \leq n$. Os **vértices** do prisma são justamente os vértices dos polígonos das bases e ainda, os segmentos A_iA_{i+1} , B_iB_{i+1} e A_iB_i são suas **arestas**. Em particular, as **arestas laterais** do prisma são os segmentos A_iB_i , para $1 \leq i \leq n$. As **faces laterais** do prisma são os paralelogramos $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$. Chamamos de **interior** de um prisma ao conjunto de todos pontos dele que não estão em nenhuma de suas faces. Em geral, sempre que não existir possibilidade de dúvidas, quando nos referirmos às **faces** de um prisma, estaremos considerando a reunião de suas bases com as faces laterais do mesmo. A nomenclatura dos prismas é feita de acordo com o polígono de sua base de modo que, se as bases do prisma são polígonos de n lados, o mesmo será chamado de um **prisma n-gonal**.

Definimos a **altura** de um prisma como sendo a distância entre os dois planos paralelos que contém suas bases. Quando as arestas laterais de um prisma são perpendiculares aos planos que contém suas bases, ele será dito **reto**, caso contrário será dito **oblíquo**. Particularmente, quando $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ constituem as bases de um prisma reto, então necessariamente ocorre que $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \dots = \overline{A_nB_n}$ e além disso o comprimento de cada aresta lateral é igual à altura do prisma. Dizemos que um prisma é **regular** quando é reto e suas

bases são polígonos regulares. Na figura 2, temos alguns exemplos particulares de prisma para $i = 3, 4, 5$ e 6 com suas respectivas nomenclaturas.

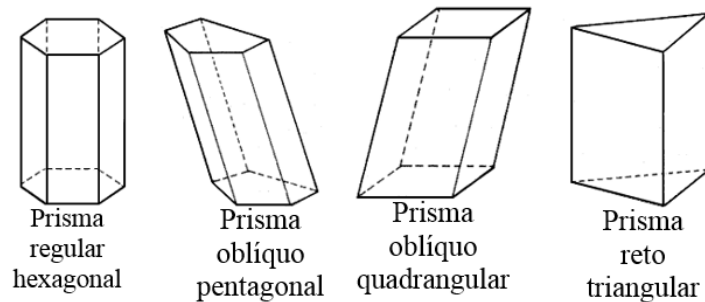


Figura 2: Exemplos de prismas

Os prismas quadrangulares que têm por bases os paralelogramos formam um subconjunto importante de prismas que são os **paralelepípedos**. O paralelepípedo que é um prisma reto é chamado de **paralelepípedo reto**. Já o paralelepípedo que além de reto tem bases retangulares é chamado de **paralelepípedo reto retângulo**, ou **ortóedro**, ou **bloco retangular** conforme alguns autores de livros didáticos. O ortóedro fica perfeitamente determinado pelas medidas de suas três arestas que concorrem em um ponto: O comprimento (a), a largura (b) e a altura (c) aos quais chamamos de **dimensões** do ortóedro. Todo paralelepípedo reto retângulo que tem base quadrada e medida da altura igual ao lado dessa base, é chamado de **cubo** (dimensões a, a, a). O cubo tem todas as arestas com mesma medida. Observe a figura 3.

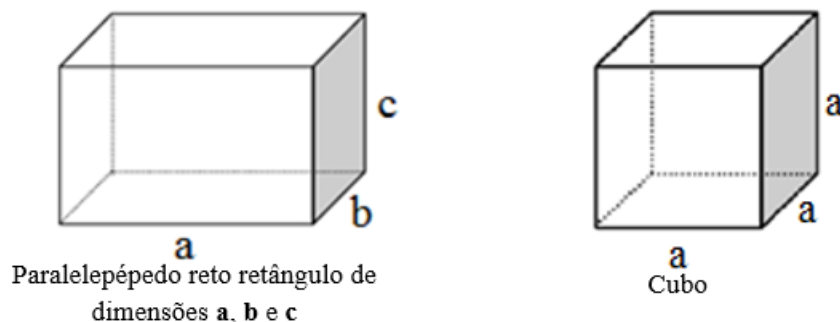


Figura 3: Paralelepípedo reto retângulo e um cubo

3.2 Pirâmide

Definição: Seja $A_1A_2 \dots A_n$ um polígono convexo e V um ponto do espaço que não pertence ao plano que contém $A_1A_2 \dots A_n$. Definimos a **pirâmide** $VA_1A_2 \dots A_n$, de **base** $A_1A_2 \dots A_n$ e **vértice** V , como sendo a porção do espaço delimitada pelos triângulos VA_iA_{i+1} e pelo polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$, onde $1 \leq i \leq n$, convencioando-se que $A_{n+1} = A_1$. As **arestas** da pirâmide são os segmentos VA_i , juntamente com os segmentos A_iA_{i+1} , e as **faces laterais** da pirâmide são os triângulos VA_iA_{i+1} . Chamamos de **interior** de uma pirâmide ao conjunto de

todos os pontos dela que não estão em nenhuma de suas faces. Em geral, sempre que não existir possibilidade de dúvidas, quando nos referirmos às faces de uma pirâmide, estaremos considerando a reunião de sua base com as faces laterais da mesma. A nomenclatura das pirâmides é feita de acordo com o polígono da base de modo que se a base da pirâmide é um polígono de n lados, esta pirâmide será chamada de **pirâmide n-gonal**.

Baixando de V uma perpendicular ao plano da base $A_1A_2 \dots A_n$ de uma pirâmide $VA_1A_2 \dots A_n$, determinamos o ponto P que é o pé da perpendicular por V . Dizemos que a altura da pirâmide é o segmento (ou a medida do segmento) \overline{VP} . Quando a sua base $A_1A_2 \dots A_n$ é um polígono regular centrado em P , dizemos que se trata de uma pirâmide **regular**. Para a pirâmide regular, pelo caso de congruência de triângulos LAL , é fácil ver que $VPA_i \equiv VPA_{i+1}$, uma vez que, $|A_iP| = |A_{i+1}P|$, $V\hat{P}A_i = V\hat{P}A_{i+1} = 90^\circ$ e \overline{VP} é um lado comum. Consequentemente, temos que $|VA_i| = |VA_{i+1}|$, para $1 \leq i \leq n$. A figura 4 traz alguns exemplos de pirâmides.

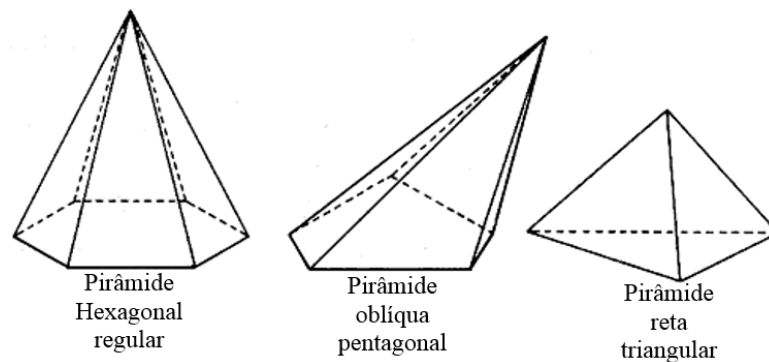


Figura 4: Exemplos de pirâmide

3.3 Tronco de Pirâmide por uma secção transversal

Definição: Quando se secciona uma pirâmide por um plano α paralelo à sua base (secção transversal), dividimos a mesma em dois sólidos. O sólido que contém o vértice da pirâmide constitui uma nova pirâmide, já o outro que contém a base da pirâmide primitiva é um sólido para o qual damos o nome de **tronco de pirâmide** de bases paralelas. A distância entre os planos paralelos que contém tais bases é a altura (h) do tronco. A figura 5 ilustra o processo de obtenção de um tronco de pirâmide.

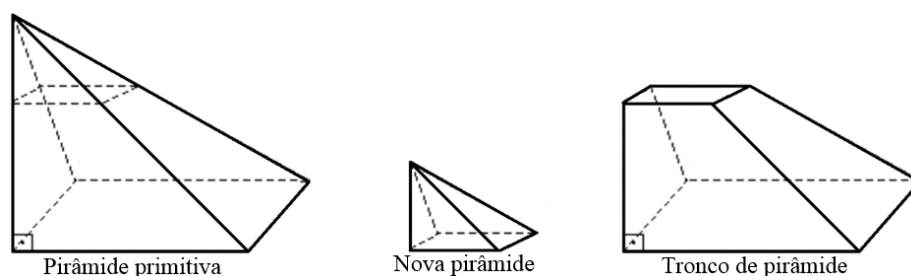


Figura 5: Tronco de pirâmide

Tomaremos como verdade o fato de que a pirâmide primitiva e a nova pirâmide são da mesma natureza, de modo que seus ângulos são ordenadamente congruentes e seus elementos homólogos são proporcionais. Assim, dizemos que as pirâmides são semelhantes.

3.4 Cilindro

Figura plana será entendida como um dos seguintes subconjuntos do plano Euclidiano: círculo com seu interior; polígono incluindo seu interior; elipse mais a região delimitada por ela, e daí por diante. De forma geral, toda curva simples e fechada, ou seja, toda curva fechada em que não há auto intersecção, mais a porção do plano delimitada pela mesma será considerada uma figura plana.

Definição: Sejam T uma figura do plano α , β um plano que é paralelo a α , r uma reta que intersecta os planos α e β , e h a distância entre os planos α e β . A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a r e que têm extremidades em T e em β forma um subconjunto do espaço, ao qual chamamos de **cilindro de base T** . O número h é definido como sendo a altura do cilindro. Quando a reta r , que intersecta os planos α e β , é perpendicular aos planos, o cilindro passa a ser chamado de **cilindro reto de base T** . Caso contrário, ele recebe o nome de **cilindro oblíquo**. Embora não demonstremos, admitiremos como verdade o fato de que o cilindro intersecta o plano β de acordo com uma figura U congruente à T , onde a figura U também será chamada de base do cilindro. Chamamos de geratriz do cilindro a qualquer segmento de reta paralelo a r que mantêm uma extremidade na fronteira de T e a outra extremidade na fronteira de U . Um leitor atento perceberá que, segundo essa definição, o prisma é um caso particular de cilindro (cilindro de base poligonal), mas esse fato não diminui a importância de ter-se tratado de prisma em um tópico particular, haja vista que também precisamos de seus conceitos particulares. Quando o cilindro tem como bases círculos, dizemos que se trata de um **cilindro circular**. Por conveniência, e quando não existir possibilidade de dúvidas, chamaremos o cilindro circular simplesmente de cilindro. Enfim, todo cilindro circular reto com geratriz igual ao diâmetro da base, é chamado de cilindro equilátero. A figura 6 ilustra a definição de cilindro.

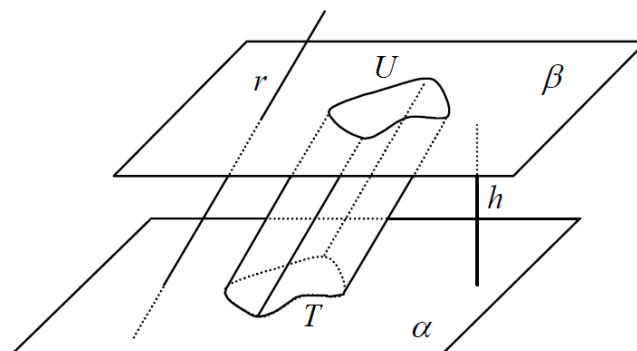


Figura 6: Definição de cilindro

A figura 7 traz dois exemplos de cilindros circulares, o cilindro circular reto e o cilindro circular oblíquo.

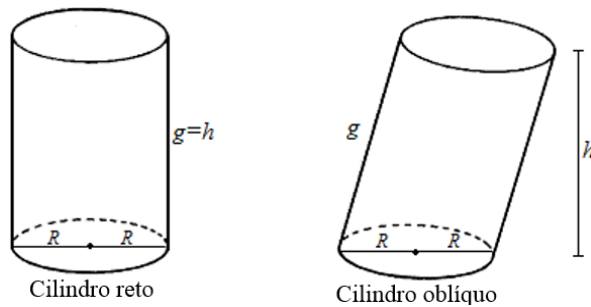


Figura 7: Exemplos de cilindros circulares

3.5 Cone

Definição: Consideremos T uma figura plana e V um ponto que não pertence ao plano de T . A reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em V e a outra extremidade em T forma um subconjunto do espaço ao qual chamamos de **cone de base T e vértice V** . A altura do cone é definida como sendo a distância do vértice V ao plano da base T .

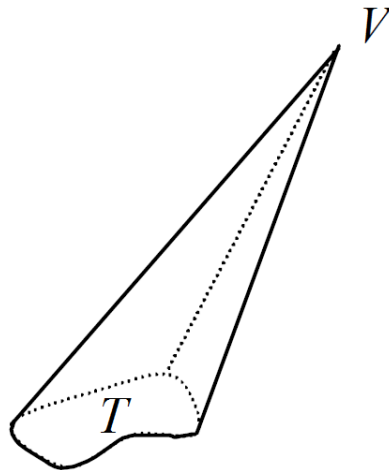


Figura 8: Definição de cone

Como no caso do cilindro, um leitor atento perceberá, pela definição de cone, que a pirâmide é um caso particular de cone. Precisamente, a pirâmide é um cone de base poligonal. Quando o cone tem como base um círculo dizemos que se trata de um **cone circular**. Por conveniência, e quando não existir possibilidade de dúvidas, chamaremos o cone circular apenas de cone. Quando a projeção do vértice V sobre o plano da base de um cone circular coincidir com o centro do círculo da base, dizemos que se trata de um **cone circular reto**, caso contrário, temos um **cone circular oblíquo**. Todo segmento de reta com uma extremidade em V e outra extremidade na fronteira de T é chamado de geratriz do cone. Observemos que as

geratrizes de um cone circular reto têm todas a mesma medida. A figura 9 nos apresenta dois exemplos de cone circular.

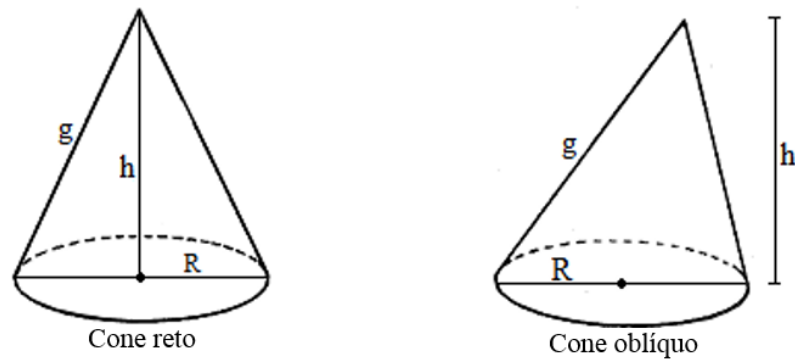


Figura 9: Exemplos de cone circular

3.6 Tronco de cone por uma secção transversal

Definição: De forma análoga à definição de tronco de pirâmide, quando se secciona um cone por um plano α paralelo à base (secção transversal), dividimos o mesmo em dois sólidos. O sólido que contém o vértice do cone constitui um novo cone de raio r , já o outro que contém a base do cone primitivo é um sólido ao qual damos o nome de **tronco de cone** de bases paralelas de raios r e R . A distância entre os planos das bases paralelas é a altura do tronco.

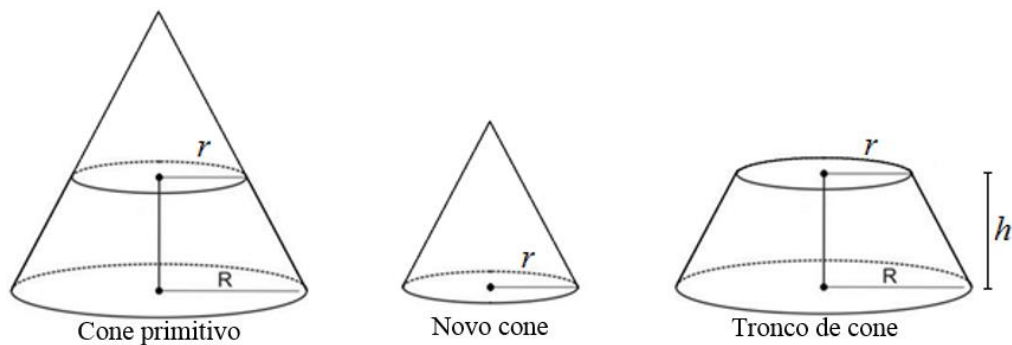


Figura 10: Tronco de cone

3.7 Esfera

Definição: Considere O , um ponto do espaço Euclidiano, e um número real positivo R . A reunião de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto O forma um subconjunto do espaço ao qual chamamos de **Esfera de centro O e raio R** . Sejam dois pontos A e B pertencentes à esfera tais que a distância entre eles é $2R$. O segmento \overline{AB} é chamado de diâmetro da esfera.

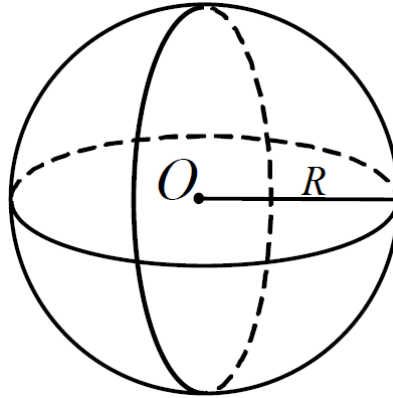


Figura 11: Esfera de centro O e raio R

3.8 Calota esférica

Definição: Seccionando-se uma esfera de raio R por um plano, dividimos essa esfera em dois sólidos chamados de **calota esférica**, uma de altura h e a outra de altura $2R-h$.

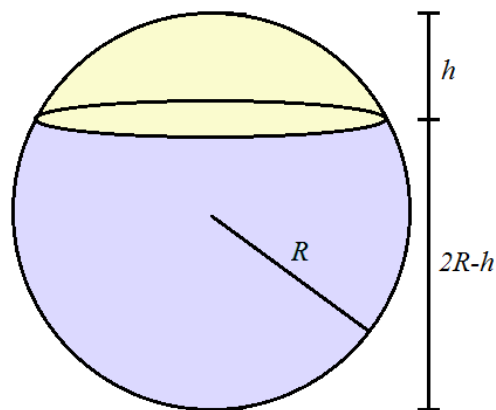


Figura 12: Calota Esférica

3.9 Segmento esférico

Definição: Secciona-se uma esfera de raio R por dois planos paralelos. A porção do espaço delimitada pela esfera e pelos dois planos paralelos, reunida aos dois círculos das secções da esfera, é um sólido de duas bases circulares de raios R_1 e R_2 chamado de **segmento esférico**. A distância entre os dois planos paralelos é a altura h do segmento esférico.

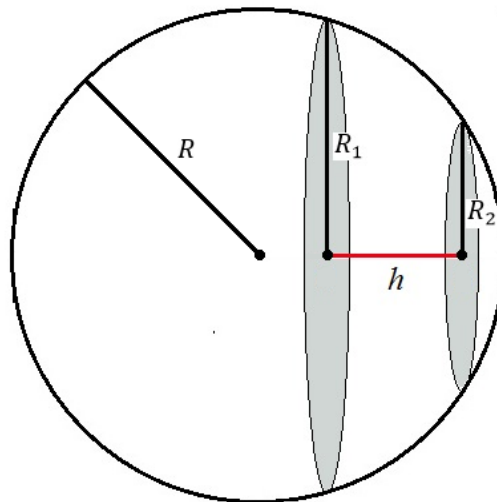


Figura 13: Segmento Esférico

3.10 Sólidos de revolução

Definição: Seja α um semiplano com origem em e (eixo de revolução) e uma superfície S nele contida ($S \subset \alpha$). Quando giramos o semiplano α em torno de sua origem e , a consequente rotação de S determina um sólido ao qual chamamos de **sólido de revolução**.

Um exemplo de sólido de revolução particular, ao qual daremos uma atenção diferenciada e determinaremos seu volume no último capítulo, é o **toro sólido** (o sólido com formato de rosquinha), que é um sólido obtido pela rotação de um círculo de raio r em torno de um eixo que lhe é coplanar e que dista R ($R \geq r$) de seu centro de acordo com a definição anterior. A figura 14 ilustra um **toro sólido** com raios r e R , com $R \geq r$.

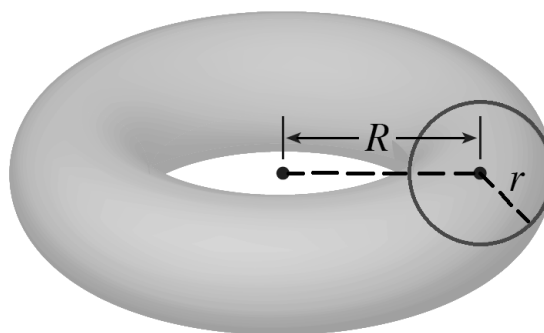


Figura 14: Toro sólido

4 O CONCEITO DE VOLUME

Em geral, de acordo com Lima *et al.* (2010), para se dar uma introdução ao estudo do conceito de volume, em sala de aula, o professor deve, antes de tudo, apresentar uma ideia intuitiva palpável, apresentando vários exemplos de forma a refletir as experiências diárias dos alunos e para que eles tenham uma noção prévia do que vai ser tratado formalmente posteriormente. A ideia intuitiva que deve ser absorvida pelos alunos é de que:

O volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado.

Tendo entendido esta ideia, várias comparações podem ser feitas. Um exemplo é comparar uma panela com uma garrafa. Qual das duas ocupa o maior espaço? Ou em outras palavras, qual delas tem maior volume? Bem, para responder a essa pergunta, um procedimento que pode ser feito é encher a garrafa de água, derramar a água dentro da panela e verificar se a água transborda. Caso transborde, concluímos que a garrafa tem volume maior que o da panela, caso contrário, temos a relação inversa. Mas esse método não funciona para objetos sólidos impermeáveis. Para estes, podemos usar o artifício de submergi-los, um de cada vez, em um reservatório completamente cheio de água e fazer uma comparação entre as quantidades de água transbordadas, pois o volume de um sólido é igual ao volume de água transbordada. Obviamente, o sólido de maior volume é aquele que deslocou maior quantidade de água. Esse método fica mais eficiente quando, em vez de um reservatório qualquer, tivermos um reservatório cilíndrico de vidro com uma escala impressa em sua parede.

Tais processos práticos, que funcionam como fatores motivacionais ao aprendizado de volume pelo aluno, na prática são úteis apenas em alguns casos simples, pois, em geral, alguns objetos ou são muito grandes (qual o volume do sol?), ou muito pequenos (qual o volume de uma célula?), ou são inacessíveis, ou ainda não existem concretamente. Além disso, os métodos citados não possibilitam resolver problemas do tipo: Qual deve ser a medida do raio de um reservatório esférico de modo que ele tenha uma capacidade máxima de x mililitros de gasolina?

Nessas condições, percebemos a necessidade de se obter métodos que propiciem o cálculo indireto de volumes, métodos gerais e sistemáticos que sirvam para o cálculo de volumes de objetos grandes ou pequenos, bem como para objetos concretos ou abstratos, baseado no conhecimento de suas dimensões e forma.

Então, desejamos medir o volume de sólidos. Com esse objetivo, devemos comparar o sólido com uma unidade padrão de medida e essa comparação determina um número real ao qual chamamos de “a medida do volume”. É costume, nas literaturas matemáticas, utilizar como unidade padrão de medida de volumes o cubo unitário, isto é, o cubo que tem arestas de medidas iguais a uma unidade de comprimento. Por definição temos que:

O volume de um cubo de aresta 1 é igual a 1.

Cada unidade de comprimento tem sua respectiva unidade de volume. Por exemplo, um cubo de aresta 1cm tem volume igual a um centímetro cúbico (1cm^3).

Tomando o cubo unitário como unidade padrão de medida de volumes, o volume de um sólido T deve ser, certamente, um número que indique quantos cubos unitários o sólido T pode conter. Mas devemos ter em mente que o sólido T pode ter uma forma muito irregular de forma que fica muito complicado entender o significado da expressão “número de cubos unitários” que o sólido T consegue conter. Esse é o raciocínio básico que iremos utilizar como referência para o estudo de volumes. Com base nessa ideia inicial intuitiva, a qual mais tarde daremos um significado preciso, vamos calcular de forma rigorosa e precisa o volume de um ortoedro. No capítulo final deste trabalho, vamos utilizar o cálculo diferencial e integral para obter as fórmulas para o cálculo de volume de sólidos geométricos.

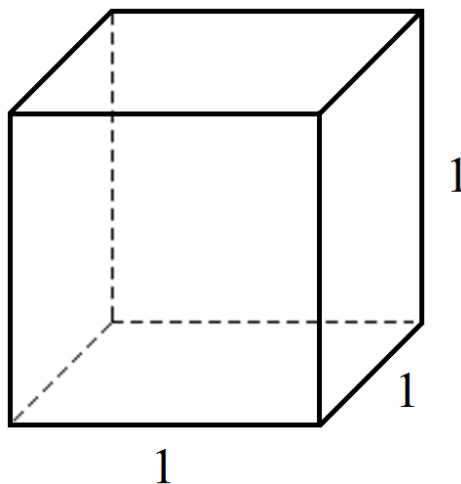


Figura 15: Unidade de medida de volume

Notação: Usaremos a notação $V(S)$ para indicar o volume de um sólido S .

4.1 Sólidos mensuráveis

Pelo que foi visto em parágrafos anteriores, a noção intuitiva de volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Nesse sentido, fatos que são fáceis de acreditar é que dois sólidos disjuntos tenham volume igual à soma dos volumes de cada um deles, e que um sólido que está contido em outro tem seu volume menor ou igual que o volume do segundo. Comentaremos de forma precisa sobre essas questões nesta seção, mas antes definamos o que é um sólido. Esta seção e a subsequente têm por base Muniz Neto (2013).

Definição: Um sólido é um subconjunto S do espaço que satisfaz as seguintes condições:

(i) S é limitado, fechado e seu interior, $int(S)$, é diferente do vazio.

(ii) Dados dois pontos $A, B \in S$, existe uma linha poligonal pelos pontos $A_1 A_2 \dots A_n$ que liga os pontos A e B onde $A = A_1$ e $B = A_n$ tal que essa linha está contida em $int(S) \cup \{A, B\}$ (Garantia de que o sólido é único, sem pedaços disjuntos).

Assim, de modo intuitivo, é fácil ver que Prismas, pirâmides, esferas, cones, cilindros e as demais figuras tridimensionais citadas neste trabalho satisfazem às duas condições da definição acima, logo, são exemplos de sólido. Os termos conjunto limitado, conjunto fechado e interior de um conjunto são noções topológicas do espaço Euclidiano. Para entendermos tais termos, precisamos de alguns conceitos que apresentamos a seguir. Consideremos um ponto P do espaço Euclidiano e um número real positivo R . Chamamos de **bola aberta** de raio R e centro P ao conjunto $\mathcal{B}(P; R)$ formado por todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor que R do ponto P .

$$\mathcal{B}(P; R) = \{V; \overline{PV} < R\}.$$

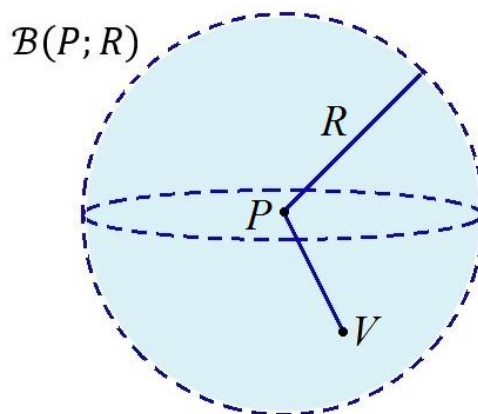


Figura 16: A bola aberta de centro P e raio R

Dizemos que um conjunto de pontos do espaço é **limitado** quando existir uma bola aberta que o contém. Agora, dado um conjunto A de pontos do espaço, um ponto P do espaço, com $P \in A$, é chamado de **ponto interior** do conjunto A quando existir uma bola aberta centrada em P de modo que ela esteja contida em A . Em outras palavras, P é ponto interior de A se existir um número real positivo R tal que $\mathcal{B}(P; R) \subset A$. O **interior** do conjunto A , $\text{int}(A)$, é justamente o subconjunto de A composto por todos os seus pontos interiores. Quando um conjunto coincide com seu interior dizemos que se trata de um conjunto **aberto**. Chamamos de conjunto **fechado** àquele em que seu complementar é aberto. Para uma análise mais profunda das noções topológicas discutidas aqui, indicamos, para estudo, Lima (2014).

A essa altura, uma pergunta natural que pode ser feita é: Quando é possível medir o volume de um sólido? A resposta dessa pergunta está na definição a seguir, que apresenta uma condição suficiente para a mensuração de um sólido.

Definição: Dizemos que um sólido S é mensurável quando $S \cap \alpha$ for um conjunto (região) com área mensurável, qualquer que seja o plano α que intersecte o interior do sólido S .

De fato, pela definição acima, é imediato que todos os sólidos citados neste trabalho são mensuráveis. Por exemplo, toda secção de uma esfera é um círculo. Podemos associar a todo sólido mensurável S um número real positivo $V(S)$, ao qual chamamos de medida do volume de S , de modo a satisfazer as seguintes condições:

1. Se S é um cubo unitário, então tem-se que $V(S) = 1$.
2. Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, tais que $S_1 \cap S_2$ é um subconjunto da superfície de ambos e $S_1 \cup S_2$ é mensurável, então $V(S_1 \cup S_2) = V(S_1) + V(S_2)$.
3. Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis de maneira que $S_1 \subset S_2$, então $V(S_1) \leq V(S_2)$.
4. (**Princípio de Cavalieri**) Sejam os sólidos mensuráveis S_1 e S_2 e um plano α . Se para todo plano $\alpha' \parallel \alpha$ tivermos $\text{Área}(S_1 \cap \alpha') = \text{Área}(S_2 \cap \alpha')$ então $V(S_1) = V(S_2)$.
5. Seja um sólido mensurável S_1 . Se S_2 é um sólido que pode ser obtido a partir de S_1 por meio de uma rotação em torno de um eixo, uma translação ao longo de um vetor ou uma reflexão em torno de um plano, então dizemos que S_2 também é mensurável e $V(S_1) = V(S_2)$. Dizemos ainda que S_2 foi obtido por um movimento rígido de S_1 .

Não faremos aqui uma prova rigorosa da existência de tal função volume $S \rightarrow V(S)$, uma vez que é consequência de um assunto moderno em Matemática, a teoria da medida e integração, e tal abordagem foge dos objetivos deste trabalho. Ao leitor interessado no estudo da teoria da medida e integração, indicamos uma leitura do texto de Isnard (2013). Nessas condições, aceitaremos as condições de **1.** a **5.** acima, como postulados de medição de volumes. Utilizaremos esses postulados de forma subentendida nas determinações de volume dos sólidos geométricos abordados neste trabalho. Agora, utilizando os postulados que acabamos de ver, demonstraremos as fórmulas de volume de dois sólidos particulares, a saber, o bloco retangular e o cilindro de base qualquer.

4.2 Volumes do bloco retangular e do cilindro de base genérica

Teorema: Dado um bloco retangular P de dimensões a, b e c , então

$$V(P) = abc \text{ ou } V(P) = A(B) \cdot h.$$

Onde $A(B) = ab$ e $h = c$ é a área da base e a altura do bloco retangular, respectivamente.

Demonstração

Faremos a prova desse teorema em três etapas.

(i) No caso do bloco retangular P ter suas arestas com medidas sendo números naturais, isto é, $a, b, c \in \mathbb{N}$ é fácil ver que podemos dividir P em vários cubos unitários, mais precisamente, abc cubos unitários. Como, pelo postulado 1., o cubo unitário tem volume igual a 1, temos, pelos postulados 1. e 2., que $V(P) = abc$.

(ii) Seja P um bloco retangular cujas dimensões a, b, c são racionais. Consideremos $a = \frac{m}{q}$, $b = \frac{n}{q}$ e $c = \frac{p}{q}$, onde $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. De fato, obtemos um novo paralelepípedo reto retângulo Q , com dimensões naturais m, n, p , quando justapomos, de forma conveniente, q^3 cópias de P . Pelo item (i) e o postulado 2. para medição de volumes, concluímos que $q^3 V(P) = V(Q) = mnp$, portanto

$$V(P) = \frac{mnp}{q^3} = abc.$$

(iii) Consideremos um bloco retangular P cujas dimensões são reais, isto é, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sejam as sequências de números racionais $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ e $(c_n)_{n \geq 1}$ com $a_n < a$, $b_n < b$ e $c_n < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e ainda $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ e $c_n \rightarrow c$ quando n tende ao infinito. Tomemos um

paralelepípedo reto retângulo P_n de dimensões a_n, b_n e c_n . O item anterior juntamente com o terceiro postulado indica que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $V(P) \geq V(P_n) = a_n b_n c_n$. De fato a relação anterior é válida para todo n natural, e quando $n \rightarrow \infty$ temos que $a_n b_n c_n \rightarrow abc$. Dessa forma, fazendo $n \rightarrow \infty$ em $V(P) \geq V(P_n) = a_n b_n c_n$ vem que $V(P) \geq abc$. Analogamente, tomando as sequências $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ e $(c_n)_{n \geq 1}$ de números racionais de modo que $a_n > a, b_n > b$ e $c_n > c, \forall n \in \mathbb{N}$ com $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ e $c_n \rightarrow c$ para $n \rightarrow \infty$, podemos demonstrar de forma análoga que $V(P) \leq abc$. Assim, quando n tende ao infinito, temos que $abc \leq V(P) \leq abc$, ou seja, $V(P) = abc$. Considerando ab como a área da base ($A(B)$) do bloco retangular e c como a altura (h) do mesmo, temos que

$$V(P) = A(B) \cdot h.$$

■

Agora, a título de aplicação do **postulado 4. (Princípio de Cavalieri)** e utilizando o resultado anterior, demonstraremos a fórmula para o cálculo do volume de um cilindro de base genérica.

Teorema: O volume de um cilindro C de base genérica B é igual ao produto da área da base pela medida da altura h . Em símbolos:

$$V(C) = A(B) \cdot h.$$

Demonstração

Consideremos um cilindro C entre os planos paralelos α e β de base genérica B , de modo que a base B esteja contida no plano α ($B \subset \alpha$), e sua altura seja igual a h . Tomemos também um bloco retangular P com altura h , com base F contida em α tal que $\text{área}(F) = \text{área}(B)$ e que esteja no mesmo semiespaço determinado pelo plano α onde está C .

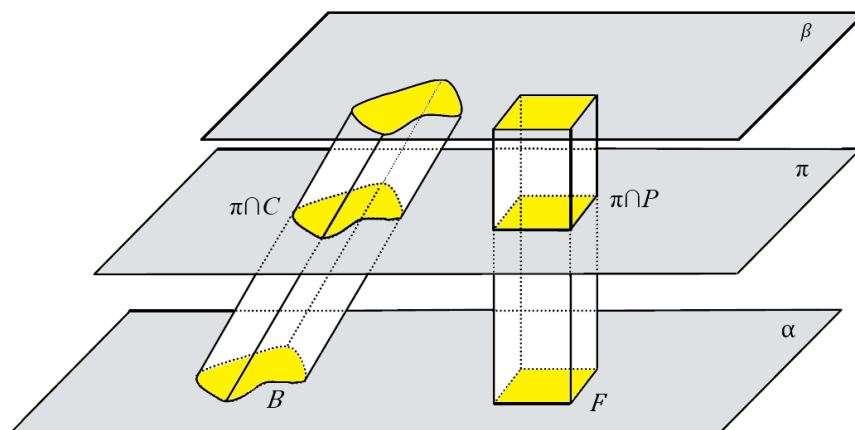


Figura 17: Cilindro e bloco retangular de mesma área da base e mesma altura

Seccionando o cilindro e, conseqüentemente, o bloco retangular por um plano π paralelo aos planos α e β , entre α e β , obtemos que $\pi \cap C \equiv B$ e $\pi \cap P \equiv F$. Como, por hipótese, as bases B e F têm mesma área, concluimos que as secções transversais $\pi \cap C$ e $\pi \cap P$ têm mesma área. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, concluimos que o volume do cilindro é igual ao volume do bloco retangular P . Como o volume de P é dado pelo produto da área de F pela altura h , e sabendo que as bases B e F têm mesma área, concluimos que o volume do cilindro é dado por

$$V(C) = A(B) \cdot h.$$

■

Como vimos anteriormente, tendo como base a ideia intuitiva de que o volume de um sólido é o número de vezes que ele contém o cubo unitário, demonstramos a fórmula para o volume de um paralelepípedo reto retângulo. Mas convenhamos que essa ideia é um tanto vaga, pois como poderíamos determinar quantos cubos de aresta 1cm podem ser colocados dentro de uma bola de futebol? De certo, não é fácil responder a essa pergunta, pois o cubo é um sólido quadrangular e a bola é um corpo redondo (sólido com forma arredondada). Como conseguir preencher completamente uma forma arredondada tomando como unidade um sólido quadrangular? Para resolver a problemática de calcular o volume de sólidos com formatos irregulares, é necessário fazer um reexame do conceito de volume, tendo como objetivo desenvolver uma definição mais precisa. Abordaremos na próxima seção o problema de determinar o volume de sólidos irregulares.

4.3 A definição geral de volume

Como discutido no fim da seção anterior, precisamos de uma definição mais precisa do volume de um sólido. Nesta seção, nosso objetivo é chegar a essa definição. Assim, fundamentados em Lima (2006), introduziremos a definição de poliedro retangular e, tomando tal poliedro como base, conseguiremos dar um significado preciso à ideia inicial de volume, que diz que o volume de um sólido S é o número de vezes que o cubo unitário cabe dentro de S .

Definição: Poliedro retangular é qualquer sólido formado pela união exclusiva de uma quantidade finita de blocos retangulares justapostos. Pelo postulado 2. de medição de volumes, encontramos o volume de um poliedro retangular, quando somamos os volumes de cada bloco retangular constituinte do sólido.

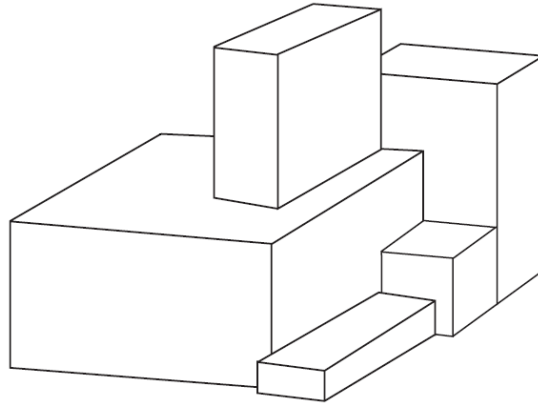


Figura 18: Poliedro retangular

De fato, dado um poliedro retangular P contido em S , é fácil calcular seu volume, e ainda, de acordo com o **postulado 3.**, mesmo sem conhecer o valor de $V(S)$, devemos ter necessariamente que

$$V(P) \leq V(S).$$

Ainda pelo **postulado 3.** de medição de volumes, a relação acima é válida para todo poliedro retangular P tal que $P \subset S$. Observemos que, para cada poliedro retangular $P \neq S$ e contido em S , podemos encontrar um novo poliedro retangular P' com volume maior que $V(P)$ mas que ainda se mantém contido em S . Para isso, basta acrescentarmos a P mais blocos retangulares, tendo o cuidado de se manter contido em S . Logo, pelo **postulado 3.** de medição de volumes, temos que $V(P) < V(P') \leq V(S)$ de forma que $V(P')$ é uma aproximação por falta para $V(S)$ melhor que a aproximação $V(P)$.

Seguindo o raciocínio acima, encontramos melhores aproximações para $V(S)$. Assim, podemos aproximar $V(S)$ por volumes de poliedros retangulares contidos em S com tanta precisão quanto se queira. Isso significa que $V(S)$ é o número real que é aproximado por falta pelos volumes dos poliedros retangulares contidos em S . De forma geral, temos que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon < V(S)$, é sempre possível encontrar um poliedro retangular $Q \subset S$ tal que $\varepsilon < V(Q) \leq V(S)$.

Agora, de forma análoga ao caso anterior, façamos a aproximação à $V(S)$ por excesso, utilizando novamente poliedros retangulares. Sejam S um sólido ao qual queremos determinar seu volume, e Q um poliedro retangular tal que $S \subset Q$. O número $V(Q)$ é facilmente determinado, de modo que $V(S)$ satisfaz a condição $V(S) \leq V(Q)$ qualquer que seja Q com $S \subset Q$ pelo postulado 3. de determinação de volumes.

De fato, podemos aproximar os valores $V(Q)$ por excesso para $V(S)$ de modo que, quanto menor tomarmos o poliedro retangular Q com $S \subset Q$, melhor será a aproximação por

excesso de $V(Q)$ para $V(S)$. Juntando essas duas formas de aproximação (por falta e por excesso), temos o seguinte resultado:

Quaisquer que sejam os poliedros retangulares P , com $P \subset S$, e Q , com $S \subset Q$, tem-se que

$$V(P) \leq V(S) \leq V(Q).$$

Essa propriedade caracteriza **o conceito de volume** de modo que, qualquer que seja o sólido geométrico S mensurável, $V(S) \in \mathbb{R}$ é o único número que satisfaz à condição acima discutida.

5 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E O CÁLCULO DE VOLUMES

Até agora já sabemos calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo e de um cilindro de base qualquer. Em particular, o volume do cilindro foi determinado, a título de exemplo, para a aplicação do princípio de Cavalieri como método para determinação de volume de sólidos. Mesmo sabendo a fórmula do volume de um cilindro de base qualquer ($V = A(B) \cdot h$), iremos demonstrá-la novamente utilizando como ferramenta a integração. Essa fórmula é muito importante pelo fato de ser utilizada para obter a definição de volume de um sólido qualquer, onde a área de quaisquer de suas secções transversais perpendiculares a um eixo é escrita em função da distância da secção a um ponto fixo do eixo.

Como havíamos comentado anteriormente, o cálculo diferencial e integral, atualmente, é o método mais eficiente para a determinação de volume de sólidos por meio de integração de funções elementares e ele será amplamente utilizado nesta parte final do trabalho. Neste último capítulo, vamos apresentar um “novo” conceito de volume de sólidos usando a integral definida. Iremos também demonstrar as fórmulas de volumes dos vários sólidos geométricos definidos neste trabalho. O processo de integração será a ferramenta fundamental para nossas demonstrações.

5.1 O método da integração para o cálculo de volumes

Consideremos um sólido S qualquer e o dividamos em n fatias (n pedaços). De fato, podemos aproximar cada fatia por um cilindro. Assim, obtemos uma aproximação para o volume de S quando somamos os volumes de cada um dos cilindros aproximantes. Logo, para valores muito grandes de n , a soma dos volumes de cada cilindro aproximante torna-se e se mantém-se tão próxima do volume de S quanto se deseje.

Seguindo a sequência apresentada acima, começamos intersectando o sólido S por um plano P_x que é perpendicular ao eixo das abscissas em um ponto x com $a \leq x \leq b$, gerando o conjunto $P_x \cap S$ ao qual chamamos de secção transversal de S . Seja $A(x)$ a área da secção transversal determinada pelo plano P_x no sólido S . A variação da área da secção transversal ocorrerá de acordo com a variação de x em $[a, b]$. Para uma visualização do procedimento descrito, veja a figura 19.

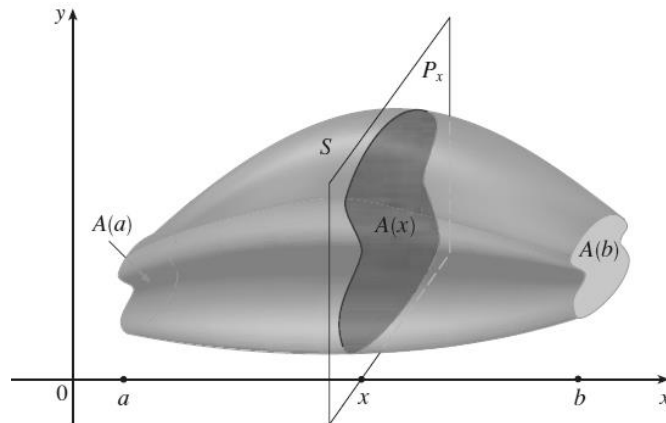


Figura 19: Secção transversal do sólido S por um plano P_x

Agora, dividamos o sólido S em n fatias (n pedaços), todas com larguras iguais a Δx , utilizando, para isso, os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}, \dots, P_{x_{n-1}}$. Podemos obter uma aproximação para cada fatia S_i , porção de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i} , por meio de um cilindro de área da base igual a $A(x_i^*)$ e altura igual a Δx , onde x_i^* são pontos amostrais tais que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Assim, pela fórmula de volume de um cilindro ($V = A(B) \cdot h$), o volume desse cilindro aproximante é igual a $A(x_i^*)\Delta x$, que é uma aproximação para o volume da i -ésima fatia S_i do sólido S . Ou seja,

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x.$$

Nessas condições, obtemos um valor aproximado para o volume real do sólido S quando somamos os volumes dos cilindros aproximantes de cada fatia S_i . Isto é a soma de Riemann.

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Esse somatório é uma aproximação para o volume do sólido S de modo que, quanto maior for a quantidade n de fatias de mesma largura Δx , mais perto estaremos do valor real de $V(S)$. De modo intuitivo, quanto maior for o valor de n , mais finas serão as fatias e, conseqüentemente, mais precisas serão as aproximações de cada fatia por cilindros, em outras palavras, a aproximação melhora quando $n \rightarrow \infty$. O procedimento descrito acima é análogo ao ato de cortar um queijo em fatias muito finas de maneira que, quando juntamos todas elas, temos o queijo completo novamente. Com base no que foi discutido, definimos o volume do sólido S como o limite do somatório acima quando $n \rightarrow \infty$. Mas, como observado no parágrafo anterior, temos aí o limite da soma de Riemann que é definido como sendo uma integral definida. Isso justifica a seguinte definição.

Definição: Seja S um sólido que esteja entre os planos perpendiculares ao eixo x em a e em b . Se a medida da área da secção transversal de S determinada pelo plano P_x , que passa pelo ponto x e é perpendicular ao eixo das abscissas, é $A(x)$, onde A é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a medida do volume de S é

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$

Vale ressaltar que, na definição de volume, $V = \int_a^b A(x) dx$, $A(x)$ representa a área de uma secção transversal, determinada pelo plano P_x que secciona o sólido S e é perpendicular ao eixo das abscissas no ponto x .

Na definição acima, quando substituímos x por y , estamos assumindo que o sólido S está posicionado entre dois planos traçados de forma perpendicular ao eixo y nos pontos c e d . E ainda, a medida da área da secção transversal determinada no sólido S pelo plano P_y , traçado de forma perpendicular ao eixo y no ponto y , é igual a $A(y)$, onde A é uma função contínua em $[c, d]$. Assim, de modo análogo à definição anterior, temos que a medida do volume do sólido S é dada por

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y_i^*) \Delta y = \int_c^d A(y) dy.$$

5.2 Volume dos sólidos geométricos

Nesta seção demonstramos as fórmulas de volume dos principais sólidos geométricos estudados no ensino médio bem como o volume do toro sólido. Usamos como ferramenta fundamental o processo de integração para o cálculo de volumes.

5.2.1 Volumes do Paralelepípedo reto retângulo e do prisma

Teorema: O volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a , b e c é igual ao produto de suas dimensões, ou seja, $V = abc$.

Demonstração

Seja um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a , b e c . Transportemos este paralelepípedo para o plano cartesiano ortogonal xOy de modo que duas de suas arestas, as de

direções a e c , estejam contidas nos eixos x e y respectivamente e, conseqüentemente, um dos vértices do sólido esteja na origem do sistema conforme a figura 20.

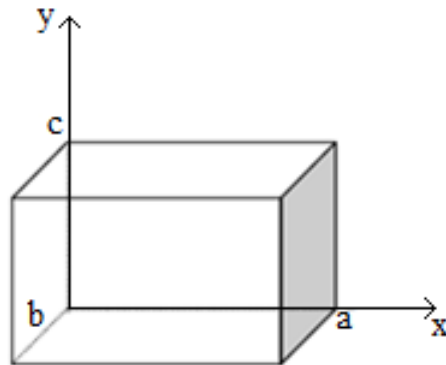


Figura 20: Paralelepípedo reto retângulo e o sistema cartesiano xOy

De fato, o plano P_x determina no bloco retangular uma secção transversal retangular cuja área é igual a $b.c$ para qualquer $x \in [0, a]$, ou seja $A(x) = b.c, \forall x \in [0, a]$. Aplicando a definição de volume por integração com os limites de integração iguais a 0 e a , obtemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a b.c \, dx \\ &= b.c. \int_0^a dx \\ &= b.c.x \Big|_0^a = b.c.(a - 0) = abc. \end{aligned}$$

■

De forma análoga ao cálculo do volume do ortoedro, calculemos o volume de um prisma de base hexagonal com área da base igual a $A(B)$ e altura igual a h . Novamente faremos o transporte do sólido para o sistema cartesiano ortogonal xOy . Observemos a figura 21, que mostra que o sólido é transportado para o sistema xOy de modo que o eixo x esteja contido no plano de uma das bases, o eixo y seja perpendicular ao plano da base e um dos vértices do prisma seja a origem do sistema cartesiano ortogonal.

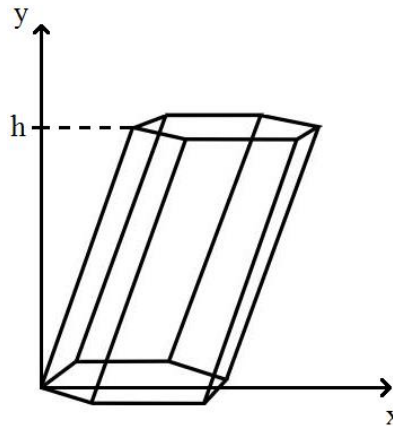


Figura 21: Prisma hexagonal e o sistema cartesiano xOy

Agora, nesse caso, é fácil ver que o plano P_y , que é perpendicular ao eixo y e intersecta o prisma, determina uma secção transversal hexagonal no prisma, cuja área é igual a $A(B)$ para qualquer $y \in [0, h]$, ou seja, $A(y) = A(B), \forall y \in [0, h]$. Então, para fins de cálculo, tomaremos a secção determinada por P_y , uma vez que o prisma está na posição vertical. Observemos que, nesse caso, a variação da secção transversal, que na demonstração anterior foi feita no eixo x , está ocorrendo no eixo y . Assim, aplicando, novamente, a definição de volume por integração com os limites de integração iguais a 0 e h , temos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(B) dy \\ &= A(B) \int_0^h dy \\ &= A(B) \cdot y \Big|_0^h = A(B)(h - 0) = A(B)h. \end{aligned}$$

Daí concluímos que o volume do prisma de base hexagonal é igual a $V = A(B)h$

O processo feito acima pode ser aplicado para qualquer prisma de base genérica, pois para todo prisma a área da secção transversal é constante e igual à área das bases. Nessas condições, de modo geral, seu volume é dado por $V = \int_0^h A(B) dx = A(B) \cdot (h - 0) = A(B) \cdot h$. Os argumentos acima demonstram o teorema seguinte, que generaliza a fórmula para o cálculo do volume de um prisma.

Teorema: O volume de um prisma é igual ao produto da área da base ($A(B)$) pela medida da altura (h). Em símbolos:

$$V = A(B)h.$$

5.2.2 Volume da pirâmide

Teorema: O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base $A(B)$ pela medida da altura (h). Em símbolos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A(B)h.$$

Demonstração

Antes de demonstrarmos o caso geral, vejamos um exemplo particular que servirá como motivação à demonstração geral. Consideremos uma pirâmide regular cuja altura mede h unidades de comprimento, e a base é um quadrado de lado com l unidades de comprimento. Inicialmente, colocamos o vértice da pirâmide na origem do sistema cartesiano de modo que o eixo x intersecte a base no centro da mesma, como indicado na figura 22. É fácil ver que todo plano P_x , que é perpendicular ao eixo das abscissas no ponto $x \in [0, h]$, intersecta a pirâmide de acordo com um quadrado com lado de comprimento s . Percebemos, pelo esquema abaixo, que o comprimento s pode ser escrito em função de x utilizando-se apenas uma simples semelhança de triângulos.

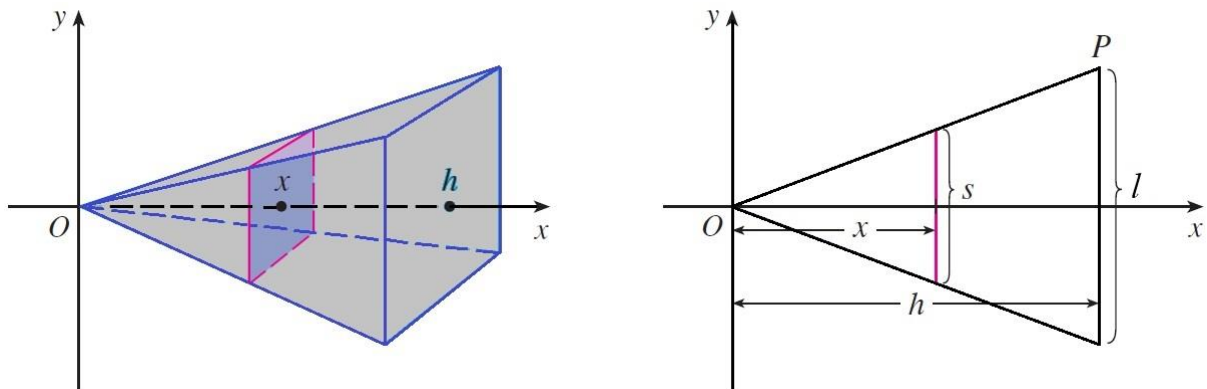


Figura 22: Pirâmide no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Pela semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{l} \Rightarrow s = \frac{lx}{h}.$$

Desse modo, podemos dizer que a área da secção transversal em certo ponto $x \in [0, h]$ é igual a

$$A(x) = s^2 = \left(\frac{lx}{h}\right)^2 = \frac{l^2}{h^2} x^2.$$

Como a pirâmide está entre os planos paralelos P_0 e P_h , perpendiculares ao eixo x , pelo processo de integração temos que seu volume é

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h A(x) dx \\
 &= \int_0^h \frac{l^2}{h^2} x^2 dx \\
 &= \frac{l^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\
 &= \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\
 V &= \frac{l^2 h}{3} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A(B) h.
 \end{aligned}$$

A demonstração da fórmula para o volume de uma pirâmide qualquer é feita de forma análoga ao caso da pirâmide quadrangular. De modo geral, para uma pirâmide de base B qualquer e de altura h , posicionada no sistema cartesiano como o exemplo anterior, o plano P_x , que é perpendicular ao eixo x no ponto x , irá determinar uma secção transversal na pirâmide na forma de uma região poligonal B' que será uma figura homotética à base B com razão $\frac{x}{h}$. Dessa forma, as regiões B' e B são figuras semelhantes com razão de semelhança igual a $\frac{x}{h}$. Sabemos que figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança. Assim sendo, temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{A(x)}{A(B)} &= \frac{A(B')}{A(B)} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \\
 \Rightarrow A(x) &= \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot A(B).
 \end{aligned}$$

Para um maior aprofundamento nos conceitos de semelhança, bem como na definição de homotetia e estudo de seus teoremas, sugerimos ao leitor a leitura de Lima (2006). Agora que sabemos o valor da área da secção transversal em função de x , podemos então determinar o volume da pirâmide como segue:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h A(x) dx \\
 &= \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot A(B) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A(B)}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\
 &= \frac{A(B)}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\
 V &= \frac{A(B)}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot A(B)h.
 \end{aligned}$$

■

5.2.3 Volume do Tronco de pirâmide

Teorema: O volume de um tronco de pirâmide com área da base maior igual a B , área da base menor igual a b e altura com medida h é igual a

$$V = \frac{h}{3} (B + \sqrt{Bb} + b).$$

Demonstração

Consideremos um tronco de pirâmide com área da base maior igual a B , área da base menor igual a b e altura h . Coloquemos esse sólido no plano cartesiano ortogonal xOy de maneira que a base maior esteja contida no plano perpendicular ao eixo y pela origem e um dos vértices da base maior esteja na origem de xOy . A figura 23 serve apenas como uma ilustração auxiliar para a demonstração da fórmula do volume do tronco de pirâmide.

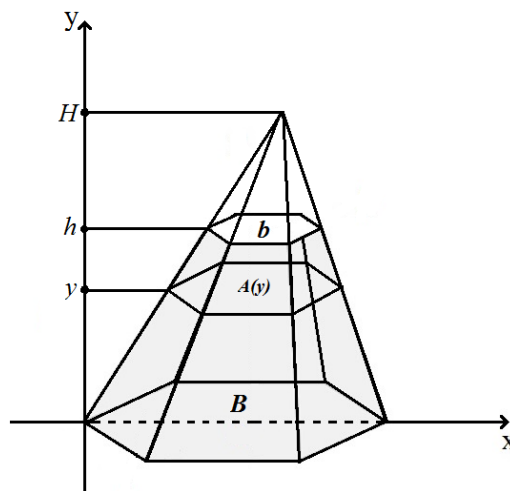


Figura 23: Esquema para determinação do volume do tronco de pirâmide

Na figura acima, temos que $A(y)$ é a área da seção transversal determinada pelo plano P_y , plano esse que é perpendicular ao eixo das ordenadas no ponto $y \in [0, h]$, intersectando o tronco segundo um polígono. A medida H representa a altura da pirâmide.

Usando o fato de que os polígonos de áreas b , $A(y)$ e B são semelhantes por serem figuras homotéticas, temos os seguintes resultados.

$$(i) \frac{B}{b} = \left(\frac{H}{H-h}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{H}{H-h} \Rightarrow H\sqrt{B} - h\sqrt{B} = H\sqrt{b} \Rightarrow H(\sqrt{B} - \sqrt{b}) = h\sqrt{B}$$

$$\Rightarrow H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$(ii) \frac{B}{A(y)} = \left(\frac{H}{H-y}\right)^2 \Rightarrow \frac{A(y)}{B} = \left(\frac{H-y}{H}\right)^2 \Rightarrow A(y) = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 B = \left(1 - \frac{2}{H}y + \frac{1}{H^2}y^2\right)B$$

Assim, temos que $A(y) = \left(1 - \frac{2}{H}y + \frac{1}{H^2}y^2\right)B$. Usando esses dois resultados, podemos determinar o volume do tronco de pirâmide como segue:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) dy = \int_0^h \left(1 - \frac{2}{H}y + \frac{1}{H^2}y^2\right) B dy \\ &= B \left[y - \frac{1}{H}y^2 + \frac{1}{3H^2}y^3 \right]_0^h \\ &= B \left(h - \frac{1}{H}h^2 + \frac{1}{3H^2}h^3 \right). \end{aligned}$$

Substituindo o resultado de (i) na expressão acima temos:

$$\begin{aligned} V &= B \left[h - \frac{(\sqrt{B} - \sqrt{b})}{h\sqrt{B}} h^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2}{Bh^2} h^3 \right] \\ &= Bh - \sqrt{B}(\sqrt{B} - \sqrt{b})h + \frac{1}{3}(B - 2\sqrt{B}\sqrt{b} + b)h \\ &= Bh - Bh + \sqrt{B}\sqrt{b}h + \frac{h}{3}(B - 2\sqrt{B}\sqrt{b} + b) \\ &= \frac{h}{3} [3\sqrt{B}\sqrt{b} + (B - 2\sqrt{B}\sqrt{b} + b)] = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b). \end{aligned}$$

■

5.2.4 Volume do cilindro circular reto e oblíquo

Teorema: O volume de um cilindro circular reto de raio r e medida da altura igual a h é

$$V = \pi r^2 h.$$

Demonstração

Consideremos um cilindro circular reto que tem altura com medida igual a h unidades e raio da base com r unidades de comprimento. Posicionemos os eixos coordenados do sistema cartesiano xOy de maneira que a origem do sistema coincida com o centro de uma das bases do cilindro e a altura desse cilindro seja medida ao longo do eixo positivo y de acordo com a figura 24.

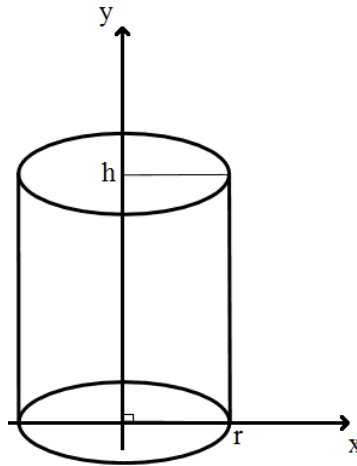


Figura 24: Cilindro circular reto e o sistema cartesiano xOy

De fato, todo plano P_y intersecta o cilindro de acordo com uma secção transversal em forma de um círculo de raio r , de modo que sua área é constante e igual a $A(y) = \pi r^2$ para todo y no intervalo $[0, h]$. Então, pela nossa definição de volume, temos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) dy \\ &= \int_0^h \pi r^2 dy \\ &= \pi r^2 \int_0^h dy \\ &= \pi r^2 y \Big|_0^h = \pi r^2 h. \end{aligned}$$

■

De forma análoga à demonstração da fórmula de volume do prisma, o processo feito acima pode ser expandido para qualquer cilindro circular de altura h e raio da base de medida r , pois, para todo cilindro circular (reto ou oblíquo) na mesma posição do cilindro anterior (vertical), a área da secção transversal determinada por P_y é sempre igual à área das bases que

é πr^2 , de modo que $V = \int_0^h \pi r^2 dy = \pi r^2 h$. Assim, os argumentos acima demonstram o próximo teorema, que generaliza a fórmula para o cálculo de volume de um cilindro circular.

Teorema: O volume de um cilindro circular de raio da base igual a r e medida da altura igual a h é

$$V = \pi r^2 h.$$

5.2.5 Volume do cone circular

Teorema: O volume de um cone circular de raio da base igual a r e altura medindo h é igual a

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Demonstração

Sem perda de generalidade, faremos a demonstração desse teorema para o caso do cone circular reto de raio da base igual a r e altura medindo h , sendo o caso genérico demonstrado de forma análoga, seguindo os mesmos passos. Por questão de conveniência, escolhemos o cone circular reto para essa demonstração.

Dado o cone circular reto citado acima, seja um plano cartesiano ortogonal xOy tal que sua origem coincida com o vértice do cone e o eixo positivo x do sistema cartesiano passe pelo centro da base do mesmo. De fato, o plano P_x , que passa pelo ponto x e é perpendicular ao eixo das abscissas, determina no cone uma secção transversal circular de raio s , de modo que podemos escrever o raio s do círculo da secção em função do raio da base r por meio de uma semelhança de triângulos. Observe a figura 25, que ilustra o que acabamos de dizer.

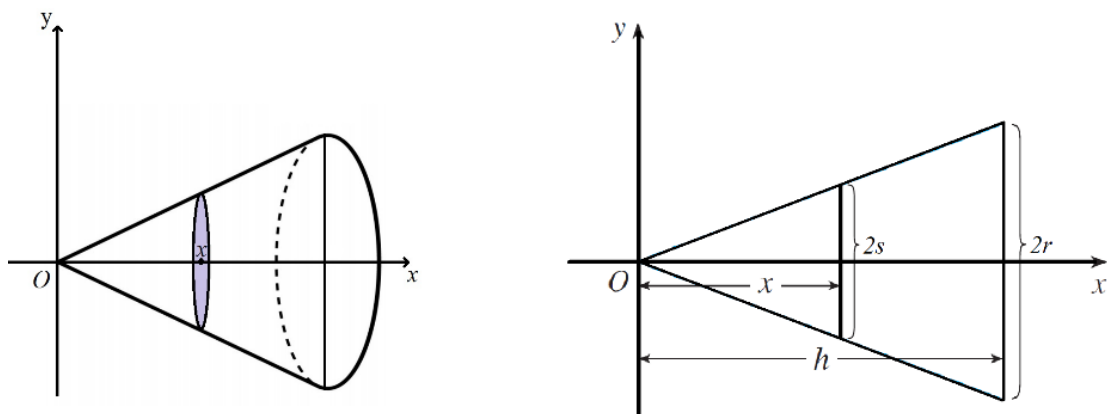


Figura 25: Cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Pela semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{2s}{2r} = \frac{x}{h} \Rightarrow s = \frac{r}{h} x.$$

Agora, já sabemos a medida do raio do círculo da secção transversal do cone, determinada pelo plano P_x , em qualquer ponto $x \in [0, h]$ escrito em função de x . Como a área de um círculo de raio r é πr^2 , o valor de s nos possibilita encontrar a área da secção, ou seja, podemos dizer que a área $A(x)$ da secção transversal em qualquer ponto $x \in [0, h]$ é igual a

$$A(x) = \pi s^2 = \pi \left(\frac{r}{h} x\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2.$$

Assim, o volume procurado é determinado pela integração da função $A(x)$ no intervalo $[0, h]$, como segue.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\ V &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \end{aligned}$$

Para generalizar essa demonstração para todo cone circular (reto ou oblíquo), basta seguirmos a mesma sequência lógica da demonstração feita para o cone circular reto acima. Com esses argumentos, provamos que a fórmula para o cálculo do volume de um cone circular é

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

■

5.2.6 Volume do tronco de cone circular

Teorema: O volume de um tronco de cone circular com altura h , raio da base maior R e raio da base menor r , é igual a

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

Demonstração

Sem perda de generalidade, utilizaremos um tronco de cone circular reto para fazer a demonstração do teorema. Isso significa que os passos feitos aqui são aplicáveis a todo tronco de cone circular, mas, por questão de conveniência, escolhemos o tronco de cone circular reto.

Seja um tronco de cone circular reto de altura h , com raio maior R e raio menor r . Coloquemos esse sólido no plano cartesiano ortogonal xOy de modo que o centro da base maior se encontre na origem do sistema cartesiano xOy e o centro da base menor pertença à parte positiva do eixo x , conforme mostra a figura 26.

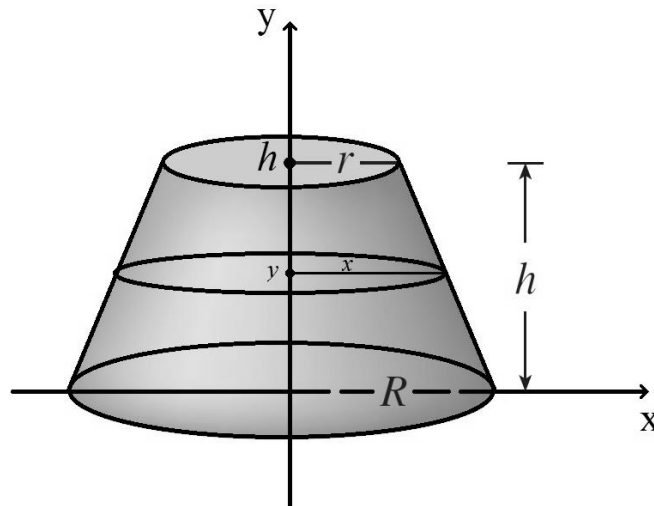


Figura 26: Tronco de cone no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Podemos perceber, conforme a figura 26, que o plano P_y , que está a uma distância y do plano da base, intersecta o tronco de cone de modo a determinar um círculo cujo raio é x . Para determinar o volume desse sólido, temos, então, o desafio de encontrar o valor de $A(y)$ para assim utilizá-lo em nossa definição de volume por integral. Devemos ainda escrever a variável x em função de y . Com esse objetivo, observemos a figura 27.

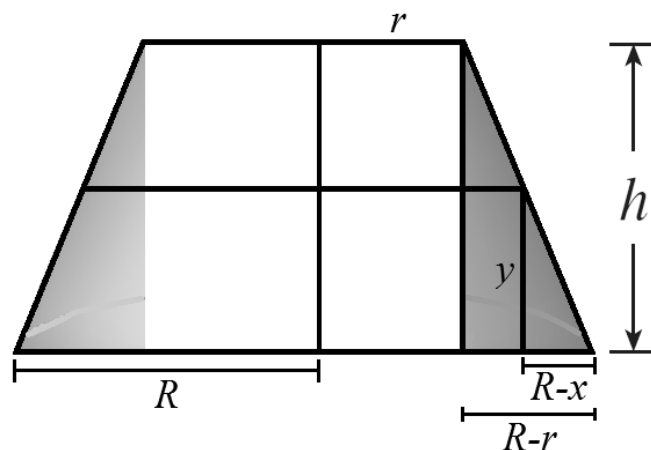


Figura 27: Visualização da relação entre x e y

Observando a semelhança de triângulos na figura acima, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\frac{R-x}{y} &= \frac{R-r}{h} \\ \Rightarrow (R-x)h &= (R-r)y \\ \Rightarrow Rh - xh &= (R-r)y \\ \Rightarrow xh &= Rh - (R-r)y \\ \Rightarrow x &= R - \frac{(R-r)}{h}y.\end{aligned}$$

Agora estamos aptos a calcular o volume do tronco. Vejamos:

$$\begin{aligned}V &= \int_0^h A(y) dy \\ &= \int_0^h \pi \left(R - \frac{R-r}{h}y \right)^2 dy \\ &= \pi \int_0^h \left[R^2 - 2R \frac{(R-r)}{h}y + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 y^2 \right] dy \\ &= \pi \left[R^2 y - \frac{R(R-r)}{h} y^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 y^3 \right]_0^h \\ &= \pi \left[R^2 h - R(R-r)h + \frac{1}{3} (R-r)^2 h \right] \\ &= \pi \left[R^2 h - R^2 h + Rrh + \frac{1}{3} (R^2 h - 2Rrh + r^2 h) \right] \\ &= \frac{1}{3} \pi h [3Rr + (R^2 - 2Rr + r^2)] = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2).\end{aligned}$$

■

5.2.7 Volume da esfera

Teorema: O volume de uma esfera de raio r é igual a

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Demonstração

Posicionemos uma esfera de raio r no plano cartesiano ortogonal xOy , de modo que seu centro coincida com a origem do sistema xOy . De fato, o plano P_x , que é perpendicular ao eixo das abscissas no ponto $x \in [-r, r]$, intersecta essa esfera de acordo com um círculo de raio igual a $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ com $-r \leq x \leq r$. Esse resultado é obtido por uma simples aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de lados com medidas x , y e r , de acordo com a figura 28.

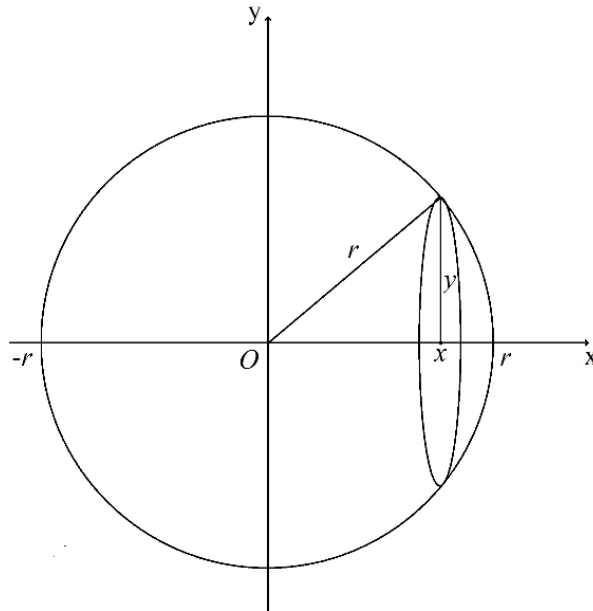


Figura 28: Esfera no sistema cartesiano xOy e uma secção transversal

Nessas condições, temos que a área da secção transversal determinada pelo plano P_x é a área de um círculo de raio y , ou seja,

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

Pela nossa definição de volume, temos que o volume da esfera de raio r é igual a

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx \\ &= \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

■

5.2.8 Volume da calota esférica

Teorema: O volume de uma calota esférica de altura h numa esfera de raio r é igual a

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h).$$

Demonstração

Seja uma calota esférica de altura h contida numa esfera de raio r . Centremos essa esfera na origem do plano cartesiano xOy conforme indica a figura 29.

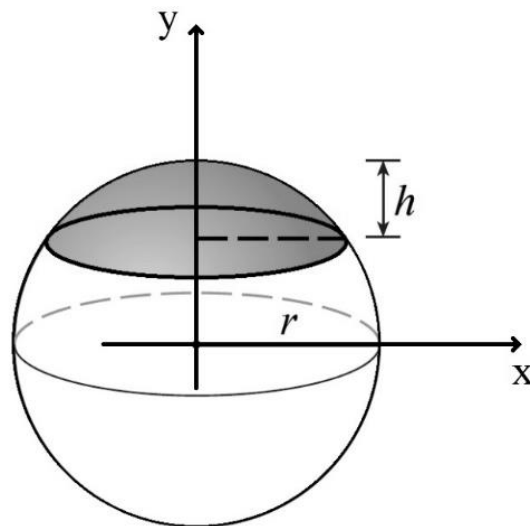


Figura 29: Calota esférica e o sistema cartesiano xOy

De forma análoga à demonstração da fórmula de volume da esfera, temos que a área da secção transversal da esfera determinada pelo plano P_y é igual a

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(r^2 - y^2).$$

Vale ressaltar que a calota esférica está entre os planos perpendiculares ao eixo y nos pontos $r-h$ e r , que são justamente os limites inferior e superior, respectivamente, da integral que determinará o volume do sólido. Usando essas informações vem:

$$\begin{aligned} V &= \int_{r-h}^r A(y) dy \\ &= \int_{r-h}^r \pi(r^2 - y^2) dy \\ &= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - y^2) dy \\ &= \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{r-h}^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi r^2[r - (r - h)] - \frac{\pi}{3}[r^3 - (r - h)^3] \\
&= \pi r^2 h - \frac{\pi}{3}[r^3 - r^3 + 3r^2 h - 3r h^2 + h^3] \\
&= \frac{\pi}{3}(3r^2 h - 3r^2 h + 3r h^2 - h^3) \\
&= \frac{\pi}{3}(3r h^2 - h^3) = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).
\end{aligned}$$

■

5.2.9 Volume do segmento esférico

Teorema: O volume de um segmento esférico de raios das bases iguais a R_1 e R_2 , e altura com medida h é igual a

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(R_1^2 + R_2^2) + h^2].$$

Demonstração:

Consideremos um segmento esférico de raios das bases iguais a R_1 e R_2 , e altura igual a h , numa esfera de raio R . Coloquemos essa esfera no sistema cartesiano ortogonal xOy de modo que a origem do sistema seja o centro da esfera e o eixo x do sistema xOy passe pelo centro de cada uma das bases do segmento esférico. De fato, os planos paralelos, que contêm as bases do sólido em pauta, intersectam o eixo das abscissas em dois pontos. Sejam a e b esses pontos. A figura 30 ilustra as considerações feitas acima.

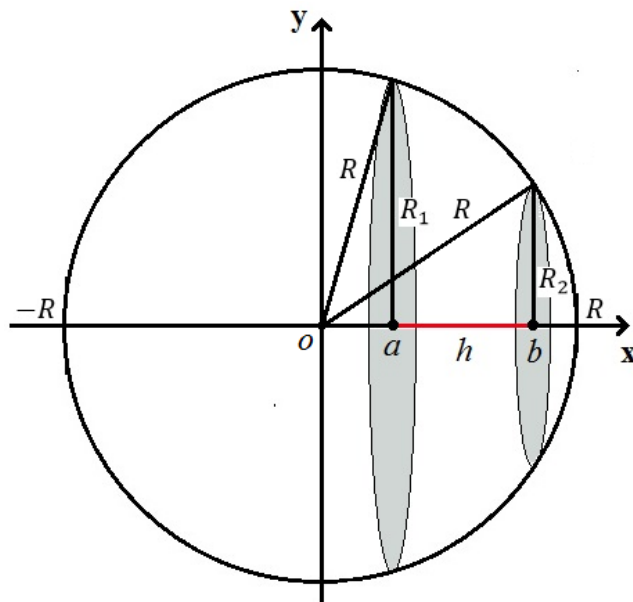


Figura 30: Segmento Esférico e o sistema cartesiano xOy

Observando os triângulos retângulos de lados R , R_1 e a e o outro de lados R , R_2 e b , temos, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$(i) a^2 + R_1^2 = R^2 \Rightarrow a^2 = R^2 - R_1^2;$$

$$(ii) b^2 + R_2^2 = R^2 \Rightarrow b^2 = R^2 - R_2^2.$$

Temos também que a altura h do segmento esférico é dada pela distância entre suas bases. Pela figura acima é imediato que

$$(iii) h = b - a.$$

Da mesma forma como na demonstração da fórmula do volume da esfera, o plano P_x intersecta o segmento esférico de acordo com um círculo cujo raio é igual a $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ com $-r \leq a \leq x \leq b \leq r$. Dessa forma, a área da secção transversal determinada pelo plano P_x no segmento esférico é igual a

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

Observemos que o segmento esférico está entre os planos perpendiculares ao eixo x nos pontos a e b , que são justamente os limites de integração da nossa definição de volume. Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi(R^2 - x^2) dx \\ &= \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_a^b \\ &= \pi \left[R^2(b - a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right] \\ &= \pi \left[R^2(b - a) - \frac{1}{3}(b - a)(a^2 + ab + b^2) \right] \\ &= \pi(b - a) \left[R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \right] \\ &= \frac{\pi}{3}(b - a)[3R^2 - (a^2 + ab + b^2)]. \end{aligned}$$

No entanto, usando os resultados do itens (i), (ii), e (iii) nessa última expressão, obtemos

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi h}{3} [3R^2 - (R^2 - R_1^2 + ab + R^2 - R_2^2)] \\
 &= \frac{\pi h}{3} [3R^2 - (2R^2 - R_1^2 - R_2^2 + ab)].
 \end{aligned}$$

Da relação dada no item (iii), obtemos que

$$\begin{aligned}
 b - a &= h \\
 \Rightarrow (b - a)^2 &= h^2 \\
 \Rightarrow b^2 - 2ab + a^2 &= h^2 \\
 \Rightarrow ab &= \frac{a^2 + b^2 - h^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Agora, utilizando novamente as relações dos itens (i) e (ii), vem:

$$\begin{aligned}
 ab &= \frac{R^2 - R_1^2 + R^2 - R_2^2 - h^2}{2} \\
 &= R^2 - \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2}.
 \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na última expressão do desenvolvimento do volume do segmento esférico, obtemos

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi h}{3} [3R^2 - (2R^2 - R_1^2 - R_2^2 + ab)] \\
 &= \frac{\pi h}{3} \left\{ 3R^2 - \left[2R^2 - R_1^2 - R_2^2 + R^2 - \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2} \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi h}{3} \left\{ 3R^2 - \left[3R^2 - R_1^2 - R_2^2 - \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2} \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi h}{3} \left[R_1^2 + R_2^2 + \frac{(R_1^2 + R_2^2 + h^2)}{2} \right] \\
 &= \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)}{2} \\
 &= \frac{\pi h}{6} [3(R_1^2 + R_2^2) + h^2].
 \end{aligned}$$

■

Uma observação interessante que podemos destacar é que as fórmulas de volume da esfera e da calota esférica, que demonstramos nas duas seções anteriores, decorrem diretamente da fórmula de volume do segmento esférico. Em outras palavras, podemos dizer que tanto a fórmula de volume da esfera, como a fórmula de volume da calota esférica são casos particulares da fórmula de volume de um segmento esférico.

Para deduzir a fórmula de volume de uma esfera de raio r utilizando a fórmula de volume de um segmento esférico, basta fazermos $R_1 = R_2 = 0$, de modo que $h = 2r$, assim obtemos

$$V = \frac{\pi(2r)}{6} [3(0^2 + 0^2) + (2r)^2] = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Agora, para a dedução da fórmula de volume de uma calota esférica de altura h e base de raio igual a r , contida numa esfera de raio R , pela fórmula de volume de um segmento esférico, basta fazermos $R_1 = r$ e $R_2 = 0$. Assim, temos

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(r^2 + 0^2) + h^2] = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2). (*)$$

Observemos a figura 31, que nos mostra uma calota esférica de raio da base igual a r e altura de medida h , em uma esfera de raio R , destacando o triângulo retângulo OAB .

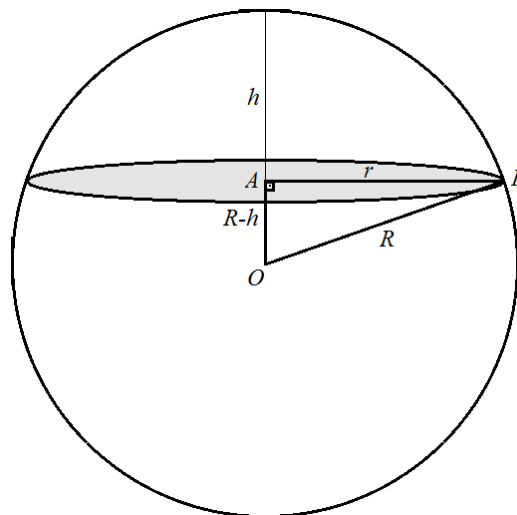


Figura 31: Relação entre R , r , e h

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAB , obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} r^2 + (R - h)^2 &= R^2 \\ \Rightarrow r^2 + R^2 - 2Rh + h^2 &= R^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 2Rh - h^2. \end{aligned}$$

Substituindo esse último resultado em (*), vem:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2) = \frac{\pi h}{6}[3(2Rh - h^2) + h^2] \\ &= \frac{\pi h}{6}(6Rh - 2h^2) \\ &= \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

5.2.10 Volume do Toro Sólido

Teorema: O volume de um toro sólido de raios R e r com $R \geq r$ é igual a

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Demonstração

Para o entendimento da parte inicial desta demonstração o leitor precisará de uma boa dose de visão espacial, pois, talvez, a forma da região plana determinada pela secção transversal do toro, bem como a dedução da expressão para $A(y)$, não sejam tão fáceis de ver.

Seja um toro sólido de raios R e r com $R \geq r$ nos moldes da definição de toro dada no terceiro capítulo. Coloquemos esse sólido no plano cartesiano ortogonal xOy de forma que o eixo y seja seu eixo de rotação e o eixo x esteja contido no plano que divide o toro ao meio e é perpendicular ao eixo de rotação. A figura 32 ilustra a posição descrita acima.

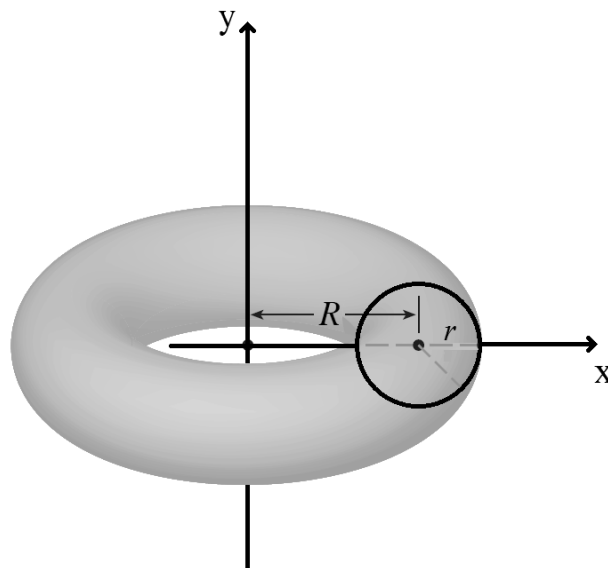


Figura 32: Toro sólido e o sistema cartesiano xOy

De fato, o plano P_y com $y \in [-r, r]$, que é perpendicular ao eixo y e intersecta o toro sólido, determina uma secção plana no formato de uma coroa circular. Para usar integração e determinar o volume do sólido, devemos encontrar a expressão de $A(y)$ em função de y . Com essa finalidade, consideremos a figura 33 que apresenta um esquema com o conjunto $(\text{Plano } xOy) \cap (\text{toro sólido}) \cap (\text{secção do toro})$.

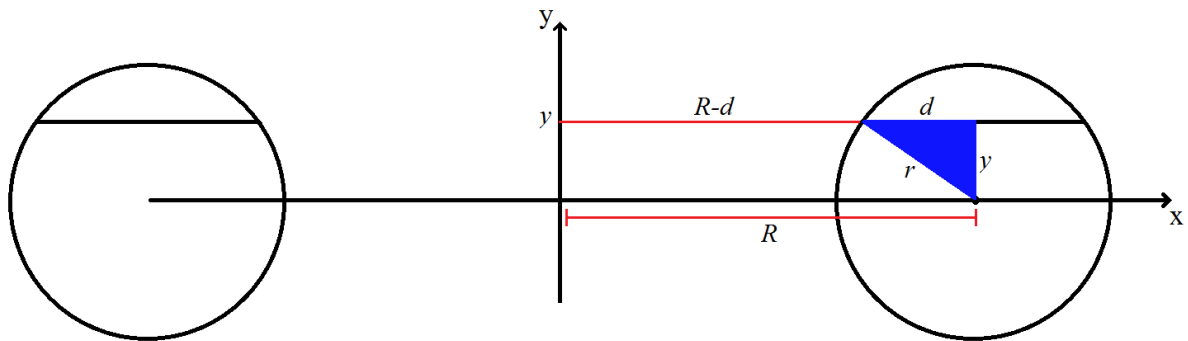


Figura 33: Esquema contendo $(\text{Plano } xOy) \cap (\text{toro sólido}) \cap (\text{secção do toro})$

Pelo esquema acima, temos que os raios dos círculos que compõem a coroa circular da secção transversal determinada por P_y , tem medidas iguais a $R+d$ e $R-d$. Logo, podemos afirmar que

$$A(y) = \pi[(R + d)^2 - (R - d)^2].$$

Agora, observando o triângulo azul, percebemos que ele é retângulo, logo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras de modo a escrever d em função de y , já que r é constante. Aplicando esse teorema no triângulo azul, vem:

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2 + y^2 \\ \Rightarrow d &= \sqrt{r^2 - y^2}. \end{aligned}$$

O valor “ d ” acima é real pelo fato de termos $y \in [-r, r]$. Logo $r^2 - y^2 \geq 0$. Substituindo $d = \sqrt{r^2 - y^2}$ na expressão de $A(y)$, temos:

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi \left[\left(R + \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 \right] \\ &= \pi \left[\left(R + \sqrt{r^2 - y^2} + R - \sqrt{r^2 - y^2} \right) \left(R + \sqrt{r^2 - y^2} - R + \sqrt{r^2 - y^2} \right) \right] \\ &= \pi \left[(2R) \left(2\sqrt{r^2 - y^2} \right) \right] = 4\pi R \sqrt{r^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Ou seja, $A(y) = 4\pi R\sqrt{r^2 - y^2}$. Sabendo o valor de $A(y)$, podemos então encontrar o volume do toro sólido, como segue:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(y)dy = \int_{-r}^r 4\pi R\sqrt{r^2 - y^2}dy \\ &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2}dy \\ &= 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy. (*) \end{aligned}$$

Para calcular a integral indefinida $\int \sqrt{r^2 - y^2}dy$, faremos a substituição trigonométrica $y = r \operatorname{sen} \theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ quando $y \geq 0$ e $\frac{-\pi}{2} \leq \theta < 0$ quando $y < 0$. Como $y = r \operatorname{sen} \theta$, então $dy = r \cos \theta d\theta$, e ainda,

$$\sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = r\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = r\sqrt{\operatorname{cos}^2 \theta} = r \cos \theta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - y^2}dy &= \int r^2 \cos^2 \theta d\theta \\ &= r^2 \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= r^2 \int \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \theta \right) + K \\ &= \frac{r^2}{2} (\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta + \theta) + K; K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como $y = r \operatorname{sen} \theta$, então $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{y}{r} \right)$. Temos ainda que $\cos \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - y^2}$. Dessa forma, substituindo os valores de $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$ e θ no resultado da integral indefinida, obtemos

$$\int \sqrt{r^2 - y^2}dy = \frac{r^2}{2} \left[\frac{y}{r} \cdot \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - y^2} + \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{y}{r} \right) \right] + K$$

$$= \frac{y}{2} \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{y}{r} \right) + K; K \in \mathbb{R}.$$

Tendo obtido o resultado da integral indefinida, enfim, podemos terminar a demonstração da fórmula do volume do toro sólido. Continuando a demonstração da fórmula em questão a partir do ponto (*), temos:

$$\begin{aligned} V &= 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy \\ &= 8\pi R \left[\frac{y}{2} \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{y}{r} \right) \right]_0^r \\ &= 8\pi R \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 - r^2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{r}{r} \right) \right] \\ &= 8\pi R \left(\frac{\pi r^2}{4} \right) = 2\pi^2 r^2 R. \end{aligned}$$

■

Como vimos, o cálculo da integral anterior não foi imediato, fazendo-nos recorrer a uma substituição trigonométrica e com isso a integração ficou um pouco extensa e trabalhosa. Uma alternativa para evitar a substituição trigonométrica, encurtar o processo de integração e, conseqüentemente, encurtar a demonstração é observar que a integral $\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy$ pode ser interpretada como a área da região que está sob a curva $f(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$ e é limitada pelos eixos cartesianos no intervalo $[0, r]$. De fato, como $f(y)$ representa um semicírculo de raio r centrado na origem do sistema xOy , é fácil ver que $\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy$ é igual a um quarto da área do círculo de raio r , ou seja $\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{1}{4} \pi r^2$. Logo, de forma mais simples,

$$V = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 8\pi R \cdot \frac{1}{4} \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R.$$

5.3 Problemas e aplicações adicionais

Como se pode ver, a integração é uma ferramenta poderosa para o cálculo de volumes de sólidos. Com o objetivo de praticar e consolidar tal ferramenta aqui apresentada, iremos aproveitá-la para resolver com facilidade alguns problemas interessantes de determinação de volumes com novos sólidos. Tais aplicações se darão em forma de resolução de problemas.

Problema 01 (Volume da esfera com furo cilíndrico): Uma esfera de raio R é perfurada através do centro de acordo com um cilindro de raio $r < R$. Determine o volume da porção remanescente da esfera.

Solução:

Consideremos que a esfera de raio R com o furo cilíndrico de raio $r < R$ esteja centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , conforme indica a figura 34.

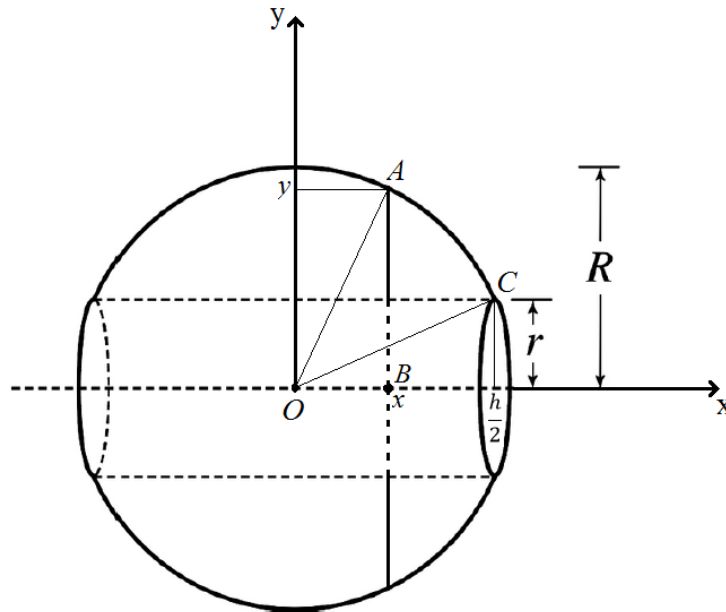


Figura 34: Esfera com furo cilíndrico e o sistema cartesiano xOy

É fácil ver que todo plano P_x , que é perpendicular ao eixo das abscissas no ponto $x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, intersecta o sólido em uma coroa circular cujos raios são y e r com $y \geq r$. Observando a figura acima, temos, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OAB , que $x^2 + y^2 = R^2$, conseqüentemente, $y^2 = R^2 - x^2$.

Com essas informações, chegamos à conclusão de que

$$A(x) = \pi(y^2 - r^2) = \pi[(R^2 - x^2) - r^2] = \pi[(R^2 - r^2) - x^2].$$

Agora, aplicando a nossa definição de volume via integração, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A(x) dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi[(R^2 - r^2) - x^2] dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} [(R^2 - r^2) - x^2] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \left[(R^2 - r^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{h}{2}} \\
&= 2\pi \left[(R^2 - r^2)\frac{h}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \right].
\end{aligned}$$

Agora, observemos o triângulo retângulo com hipotenusa \overline{OC} indicado na figura 34. Aplicando, nesse triângulo, o teorema de Pitágoras, concluímos que

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow \left(\frac{h}{2}\right) = (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \left[(R^2 - r^2)(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&= \frac{2\pi}{3} \left[3(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&= \frac{4\pi}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que o volume da esfera de raio R com furo cilíndrico de raio r é igual a $V = \frac{4\pi}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$.

Problema 02: Uma cunha é determinada por dois cortes gerados por dois planos distintos sobre um cilindro circular reto de raio da base igual a r e altura igual a h . Um dos planos é perpendicular ao eixo do cilindro e contém a base do mesmo. O outro plano intersecta o primeiro ao longo de um diâmetro e forma com ele um ângulo de medida igual a α , com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ e $\tan \alpha < \frac{h}{r}$. Determine o volume da cunha em função de r e α .

Solução:

Posicionemos o sistema cartesiano ortogonal xOy de modo que o diâmetro do cilindro, onde os planos se intersectam, esteja contido no eixo x , e o eixo y esteja contido no plano da base. Nessa orientação, obtemos que a base da cunha é um semicírculo cuja equação é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, onde $-r \leq x \leq r$. De fato, a secção transversal da cunha determinada pelo plano P_x , que é perpendicular ao eixo x no ponto x , é um triângulo retângulo ABC com base medindo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e altura igual a $med(\overline{BC}) = y \tan \alpha = \sqrt{r^2 - x^2} \tan \alpha$. Para uma visualização geométrica das considerações anteriores, observemos o esquema da figura 35 com a cunha escrita sob a orientação do sistema xOy .

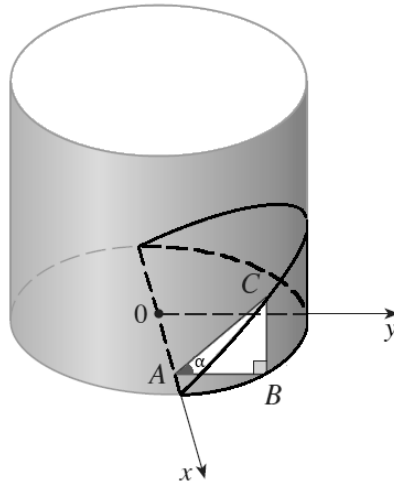


Figura 35: Cunha de um cilindro circular reto e o sistema cartesiano xOy

Logo, da fórmula de área de um triângulo retângulo, a área da secção transversal é

$$A(x) = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \tan \alpha = \frac{1}{2} (r^2 - x^2) \tan \alpha.$$

Portanto, o volume da cunha é igual a

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \frac{1}{2} (r^2 - x^2) \tan \alpha dx \\ &= \frac{\tan \alpha}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \tan \alpha \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \tan \alpha \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ &= \tan \alpha \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{2r^3}{3} \tan \alpha. \end{aligned}$$

Assim, o volume da cunha descrita nesse problema é dado por $V = \frac{2r^3}{3} \tan \alpha$.

Problema 03: Duas esferas, cada qual com raio medindo r , são tais que o centro de cada uma está na superfície da outra esfera. Nessas condições, determine o volume comum entre as esferas.

Solução:

De fato, o sólido em questão é gerado pela rotação da área comum de dois círculos de raios r , onde o centro de um está na fronteira do outro, em torno da reta que passa pelos centros de cada um dos círculos. Observe a figura 36 indicando dois círculos de raio r , cada um com seu centro na fronteira do outro, orientados de acordo com o sistema cartesiano ortogonal xOy indicado.

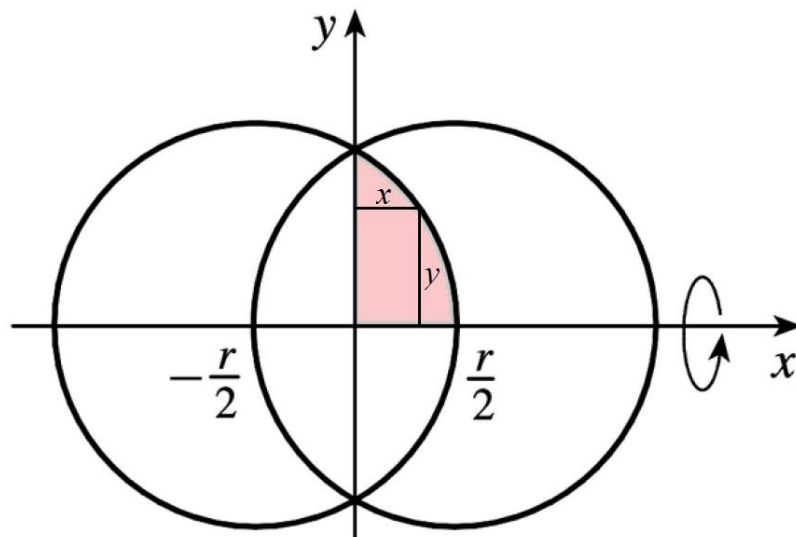


Figura 36: Dois círculos de raio r com centro de um na circunferência do outro

Sabemos que a equação do círculo de raio r centrado em $(-\frac{r}{2}, 0)$ é $(x + \frac{r}{2})^2 + y^2 = r^2$. Então $y^2 = r^2 - (x + \frac{r}{2})^2$. Portanto, considerando a simetria em relação ao eixo y (multiplicando a integral por 2), o volume do sólido em questão é

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \int_0^{\frac{r}{2}} A(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{r}{2}} \pi y^2 dx = 2 \int_0^{\frac{r}{2}} \pi \left[r^2 - \left(x + \frac{r}{2} \right)^2 \right] dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{\left(x + \frac{r}{2} \right)^3}{3} \right]_0^{\frac{r}{2}} \\ &= 2\pi \left[\frac{r^3}{2} - \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{24} \right) \right] = 2\pi \left(\frac{5}{24} r^3 \right) = \frac{5}{12} \pi r^3. \end{aligned}$$

Outra solução :

Com uma observação sutil, percebemos que o volume do sólido em questão é o dobro do volume de uma calota esférica de altura $\frac{r}{2}$ numa esfera de raio r . Dessa forma, podemos usar a fórmula para o volume de uma calota esférica, demonstrada na seção anterior, para encontrar o volume do sólido em questão, adicionando apenas o fator multiplicativo 2, como segue:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h).$$

Substituindo os dados, temos:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 \left(3r - \frac{r}{2} \right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \frac{5r}{2} = \frac{5}{12} \pi r^3.$$

Problema 04: Determine o volume da intersecção de dois cilindros circulares retos, cada um com medida do raio da base igual a r , quando os eixos dos cilindros se intersectam em um ângulo reto.

Solução:

Observemos a figura 37, que mostra uma escolha para a posição do sistema cartesiano ortogonal xOy , de modo que a origem do sistema coincida com o centro da parte comum aos dois cilindros, que é o ponto de intersecção de seus eixos.

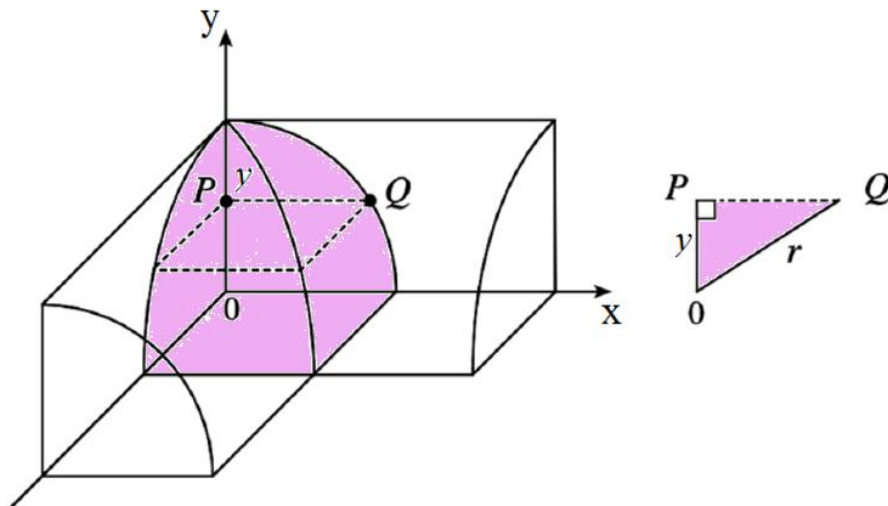


Figura 37: Intersecção de dois cilindros de raio r com eixos perpendiculares

É fácil ver que toda secção transversal determinada no sólido em pauta pelo plano P_y é um quadrado. Na figura acima, temos a vista $\frac{1}{4}$ do quadrado e $\frac{1}{8}$ do sólido formado pela parte comum aos dois cilindros. Observando a figura 37, percebemos que, quando aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo OPQ , obtemos $med(\overline{PQ})^2 = r^2 - y^2$. Logo,

$$A(y) = [2med(\overline{PQ})]^2 = 4med(\overline{PQ})^2 = 4(r^2 - y^2).$$

Agora, aplicando o método da integração para cálculo de volumes obtemos

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(y)dy = \int_{-r}^r 4(r^2 - y^2)dy \\ &= 8 \int_0^r (r^2 - y^2)dy \\ &= 8 \left[r^2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^r = \frac{16}{3}r^3. \end{aligned}$$

Problema 05 (Demonstração do princípio de Cavalieri): Como vimos anteriormente, o princípio de Cavalieri nos diz que, se todo plano paralelo a um plano α dado tem como intersecção com os sólidos mensuráveis S_1 e S_2 regiões cujas áreas são iguais, então $V(S_1) = V(S_2)$. Demonstre esse princípio.

Demonstração

Apesar de, neste trabalho, termos considerado o princípio de Cavalieri como um postulado de medição de volumes, ele pode ser provado de forma trivial pela simples aplicação da definição de volume via integração. Observemos.

Seja α um plano que contém o eixo x do sistema cartesiano ortogonal xOy e é perpendicular ao eixo y . Apoie os sólidos S_1 e S_2 no plano α , mantendo-os no mesmo semiespaço positivo determinado por α , de modo que as áreas das secções transversais $A(y)$ sejam iguais para todo plano P_y e, conseqüentemente, as alturas dos mesmos também sejam iguais a h . Uma vez que as áreas de todas as secções transversais $A(y)$ e as alturas são iguais para os dois sólidos, então, é imediato que

$$V(S_1) = \int_0^h A(y) dy = V(S_2).$$

■

Problema 06 (Volume de uma calota parabólica): Um parabolóide de revolução é obtido quando rotacionamos a parábola $y = cx^2$, com $c > 0$, em torno do eixo y . Determine a medida do volume do espaço limitado por um parabolóide de revolução e um plano perpendicular ao eixo y no ponto $h > 0$ (Esse sólido é chamado de calota parabólica).

Solução:

Observemos a figura 38 que mostra, no plano xOy , uma secção da calota parabólica e um corte determinado pelo plano P_y , que é perpendicular ao eixo das ordenadas no ponto $y \in [0, h]$, onde (x, y) é um ponto pertencente à parábola $y = cx^2$.

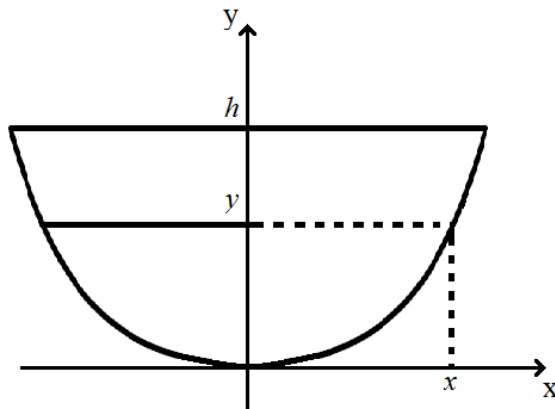


Figura 38: Secção da calota parabólica

De fato, como o sólido em questão é gerado pela rotação da parte da parábola $y = cx^2$, para $y \in [0, h]$, em torno do eixo y , de acordo com a figura 38, então a secção transversal que o plano P_y determina na calota parabólica é um círculo de raio x . Dessa forma, temos que $A(y) = \pi x^2$. Mas pela equação da parábola obtemos que $x^2 = \frac{y}{c}$, daí $A(y) = \frac{\pi}{c} y$.

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) dy = \int_0^h \frac{\pi}{c} y dy \\ &= \frac{\pi}{c} \int_0^h y dy \\ &= \frac{\pi}{c} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h \\ &= \frac{\pi h^2}{2c}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o volume da calota parabólica de altura h com parábola geradora $y = cx^2$, com $c > 0$, é igual a $V = \frac{\pi h^2}{2c}$.

Problema 07: Um barril com altura h e raio máximo R é gerado pela rotação da parábola $y = R - cx^2$ em torno do eixo x para $-\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$, onde c é um número real positivo. A figura 39 mostra a forma deste sólido.

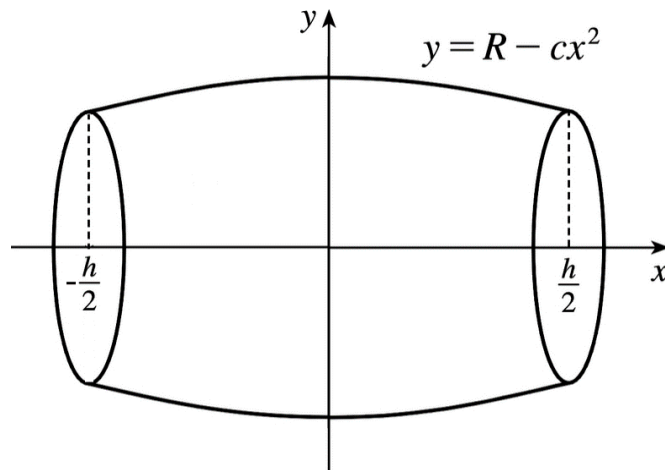


Figura 39: Sólido com formato de Barril

a) Mostre que o raio de cada extremidade do barril é $r = R - d$, onde $d = \frac{ch^2}{4}$.

Solução:

Pela simetria da parábola, podemos perceber que os raios das extremidades do barril têm a mesma medida. Como o barril é obtido pela rotação do gráfico da parábola $y = R - cx^2$ em torno do eixo x , concluímos que a medida do raio em cada extremidade do barril é igual ao valor da função $y = R - cx^2$ nas extremidades do intervalo $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, isto é, para $x = \pm \frac{h}{2}$, ou seja,

$$r = f\left(\pm \frac{h}{2}\right) = R - c\left(\pm \frac{h}{2}\right)^2 = R - \frac{ch^2}{4} = R - d.$$

b) Mostre que a fórmula para o cálculo do volume delimitado pelo barril é

$$V = \frac{1}{3}\pi h \left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right), \text{ onde } d = \frac{ch^2}{4}.$$

Solução:

De fato, o barril é simétrico em relação ao eixo y , de modo que podemos calcular seu volume multiplicando por dois o volume da parte dele que está no intervalo $0 \leq x \leq \frac{h}{2}$.

Como o sólido é gerado por rotação, é fácil ver que o plano P_x , que é perpendicular ao eixo x no ponto x e intersecta o barril, determina no mesmo uma secção transversal circular de raio y . Portanto, usando a função $y = R - cx^2$, concluímos que

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(R - cx^2)^2.$$

Pela nossa definição de volume, temos que o volume do barril é

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\frac{h}{2}} A(x) dx = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \pi(R - cx^2)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} (R^2 - 2Rcx^2 + c^2x^4) dx \\ &= 2\pi \left[R^2x - \frac{2}{3}Rcx^3 + \frac{1}{5}c^2x^5 \right]_0^{\frac{h}{2}} \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2}R^2h - \frac{1}{12}Rch^3 + \frac{1}{160}c^2h^5 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \left(3R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4 \right).$$

Com o objetivo de chegar à expressão solicitada, façamos algumas manipulações algébricas. Observando a expressão da última linha do desenvolvimento acima, podemos reescrevê-la de modo a fazer aparecer um trinômio quadrado perfeito. Vejamos.

$$V = \frac{1}{3}\pi h \left[2R^2 + \left(R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4 \right) \right] (*)$$

Mas, temos que

$$\begin{aligned} R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4 &= R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{5}{80}c^2h^4 - \frac{2}{80}c^2h^4 \\ &= \left(R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{1}{16}c^2h^4 \right) - \frac{1}{40}c^2h^4 \\ &= \left(R - \frac{1}{4}ch^2 \right)^2 - \frac{1}{40}c^2h^4. \end{aligned}$$

Usando o valor de $d = \frac{ch^2}{4}$, substituindo na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4 &= (R - d)^2 - \frac{1}{40}c^2h^4 \\ &= (R - d)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{16}c^2h^4 \right) \\ &= (R - d)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4}ch^2 \right)^2 \\ &= (R - d)^2 - \frac{2}{5}(d)^2. \end{aligned}$$

Mas, pelo item a) temos que $r = R - d$. Substituindo essa informação, obtemos:

$$R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4 = r^2 - \frac{2}{5}d^2.$$

Substituindo esse último resultado na expressão (*), concluímos que

$$V = \frac{1}{3}\pi h \left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2 \right).$$

Como solicitado.

6 CONCLUSÃO

As ideias iniciais deste trabalho surgiram após ter cursado a disciplina de GEOMETRIA (MA13) do PROFMAT do polo da UFC, da turma 2014.1, cujas aulas eram ministradas pelo professor Dr. Marcos Ferreira de Melo. Nessa disciplina de Geometria, houve uma abordagem totalmente diferenciada em relação àquelas que se veem em livros didáticos ou na maioria dos textos específicos de geometria, pois a maioria dos resultados geométricos vistos nessa disciplina eram justificados por aplicações do cálculo diferencial e integral, seja limite, derivada ou integral. Tal abordagem causou certa surpresa no início, mas, depois, ficou claro que o intuito era nos mostrar novos horizontes, novos caminhos, novos aprofundamentos, mostrando que não existe só um caminho para a Matemática. Em suma, este trabalho foi resultado de uma forma diferenciada de ministração da disciplina de Geometria do PROFMAT da UFC pelo professor Dr. Marcos Ferreira de Melo.

Dessa forma, com o intuito de compartilhar um pouco dessa abordagem, vista no mestrado PROFMAT, com os demais professores do ensino básico, inserimos o processo de integração como método para o cálculo de volumes e trouxemos aplicações do método para a determinação das fórmulas para o cálculo do volume dos sólidos geométricos mais comuns no ensino médio.

Neste trabalho, mostramos que a integração é um processo extremamente eficiente para a determinação de volume de sólidos, considerando-se que não precisa de outro sólido cujo volume já é conhecido para fazer comparação, como se faz quando se utiliza o princípio de Cavalieri.

Assim, apresentamos aos professores do ensino básico um caminho diferenciado e alternativo para as demonstrações das fórmulas de volume de sólidos, para que os mesmos aprofundem e aprimorem seus conhecimentos sobre geometria espacial. Com este trabalho, evidenciamos a importância de o professor de Matemática estudar e pesquisar novos métodos e caminhos a fim de obter novas alternativas para ministração dos conteúdos do ensino médio de forma a diversificar um pouco do que tradicionalmente é apresentado nos livros didáticos. Fornecemos ao professor de matemática do ensino básico um texto didático mas, ao mesmo tempo, rigoroso com as demonstrações das fórmulas de volume dos sólidos geométricos, usando o processo de integração, que foge do que é comum nos livros didáticos.

Tal abordagem pode ser utilizada tranquilamente em turmas olímpicas ou turmas que se preparam para os mais difíceis vestibulares do Brasil. Vale ressaltar que as

demonstrações feitas aqui podem também servir para sanar as dúvidas daqueles alunos mais curiosos e interessados em um enfoque matemático mais preciso e abrangente do que aquele que geralmente é apresentado nos livros do ensino médio, ou seja, o professor poderá mostrar novas possibilidades àqueles alunos que não se contentam apenas com as justificações feitas por meio do princípio de Cavalieri. Sabendo que o ensino de Matemática não é feito só de demonstrações, resolvemos neste trabalho alguns problemas interessantes sobre cálculo de volumes, para mostrar a aplicabilidade do método da integração, e o professor que julgar conveniente pode aproveitá-los para usar em suas turmas.

Assim, esperamos que as informações contidas neste trabalho contribuam para a formação complementar do professor de Matemática no que diz respeito ao estudo e ao ensino de geometria espacial, de modo que o mesmo tenha disponível mais uma ferramenta para suas demonstrações e justificações de volume de sólidos geométricos. Esperamos também, com este trabalho, que o professor de Matemática possa se aperfeiçoar, tanto como professor, quanto como pesquisador, contribuindo para o fortalecimento de seus conhecimentos geométricos, tendo, como consequência direta, uma maior segurança e respaldo em suas ministrações de aula sobre geometria espacial.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira de. **Geometria Espacial**. Fortaleza: [s.n], 1999.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática**. 3. ed. Tradução de Helena Castro; Prefácio de Isaac Asimov. São Paulo: Blucher, 2012.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar, 10**. 5. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- ISNARD, Carlos. **Introdução à Medida e Integração**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica, vol. 1**. 3. Ed. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: editora Harbra ltda, 1994.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise, vol. 2**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- LIMA, Jandean da Silva. **Arquimedes e Eratóstenes: os principais fatos históricos que marcaram a matemática grega**. 2012. 90 f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.
- MORAIS, Leonardo Bernardo de. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do ensino médio**. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.
- MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- STEWART, James. **Cálculo, volume 1**. 7. ed. Tradução de EZ2 translate. São Paulo: Cengage Learning, 2014.