

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO  
CURSO DE COMPUTAÇÃO

ÁLINSON SANTOS XAVIER

GERAÇÃO DE FACETAS PARA  
POLÍTOPOS DE CONJUNTOS INDEPENDENTES

FORTALEZA

2011



ÁLINSON SANTOS XAVIER

GERAÇÃO DE FACETAS PARA  
POLÍTOPOS DE CONJUNTOS INDEPENDENTES

Dissertação apresentada ao programa  
Mestrado e Doutorado em Ciência da  
Computação, UFC, como requisito para a  
obtenção do título de Mestre em Ciência  
da Computação.

ORIENTADOR:

MANOEL BEZERRA CAMPÊLO NETO

FORTALEZA

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

- 
- X17g      Xavier, Alinson Santos.  
            Geração de facetas para politopos de conjuntos independentes / Alinson Santos Xavier. – 2011.  
            141 f. : il., enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
            Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2011.  
            Área de Concentração: Teoria da Computação.  
            Orientação: Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto.
1. Teoria dos grafos. 2. Poliedros. I. Título.

# RESUMO

Um *conjunto independente* de um grafo é um subconjunto de vértices que não contém nenhum par de vértices vizinhos. O *problema do maior conjunto independente* consiste em encontrar um conjunto independente de cardinalidade máxima. O problema do maior subgrafo induzido  $k$ -partido consiste em encontrar  $k$  conjuntos independentes cuja união tenha cardinalidade máxima. Além de possuírem aplicação em diversas áreas, como visão computacional, biologia molecular e projeto de circuitos integrados, estes problemas também modelam outros problemas de otimização combinatória, como empacotamento de conjuntos e coloração de vértices. Neste trabalho, estudamos os politopos associados aos dois problemas. Primeiro, descrevemos um novo procedimento de geração de facetas para o politopo de conjuntos independentes, que unifica e generaliza diversos procedimentos anteriores. Além de gerar várias classes de desigualdades indutoras de facetas já conhecidas, este procedimento também gera novas desigualdades que ainda não foram descritas na literatura. Em seguida, estudamos o politopo do subgrafo induzido  $k$ -partido associado à formulação por representantes de cor. Identificamos suas facetas mais simples, mostramos que facetas podem ser geradas a partir de subgrafos induzidos, e descrevemos duas classes de subgrafos que geram facetas deste politopo. Para obter os principais resultados desta dissertação, fazemos um estudo da relação de afim-isomorfismo entre poliedros, e desenvolvemos um novo procedimento de conversão de faces em facetas que generaliza as diversas versões do procedimento de *levantamento de variáveis*.

Palavras-chave: conjunto independente, subgrafo induzido  $k$ -partido, combinatória polidrica, facetas, lifting



# ABSTRACT

A *stable set* of a graph is a set of pairwise non-adjacent vertices. The *maximum stable set problem* is to find a stable set of maximum cardinality in a given graph. The *maximum induced  $k$ -partite subgraph problem* is to find  $k$  stable sets such that their union has maximum cardinality. Besides having applications in various fields, including computer vision, molecular biology and VLSI circuit design, these problems also model other important combinatorial problems, such as set packing and vertex coloring. In the present work, we study the facial structure of the polytopes associated with both problems. First, we describe a new facet generating procedure for the stable set polytope, which unifies and subsumes several previous procedures. Besides generating many well-known facet inducing inequalities, this procedure can also generate new facet-inducing inequalities which have not been previously described. Then, we study the maximum induced  $k$ -partite polytope formulated by *asymmetric representatives*. We describe its simplest facets, show that some of its facets arise from vertex induced subgraphs, and identify two classes of subgraphs which generate facets of the polytope. To reach these main results, we study the *affine equivalence* between polyhedra, and also develop a new facet generating procedure for general polyhedra which subsumes the many versions of the *lifting of variables*.

Keywords: stable set, induced  $k$ -partite subgraph, polyhedral combinatorics, facets, lifting.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>17</b>
2.1	Teoria dos Grafos . . . . .	17
2.1.1	Grafos simples . . . . .	17
2.1.2	Grafos direcionados . . . . .	19
2.1.3	Hipergrafos . . . . .	20
2.2	Álgebra Linear . . . . .	21
2.3	Análise Convexa . . . . .	22
2.3.1	Conjuntos afins . . . . .	22
2.3.2	Conjuntos convexos . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Equivalência entre Poliedros</b>	<b>27</b>
3.1	Equivalência afim . . . . .	27
3.2	Exemplo . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Conversão de Faces em Facetas</b>	<b>35</b>
4.1	Versão para cones . . . . .	37
4.1.1	Representação interna . . . . .	37
4.1.2	Representação externa . . . . .	40
4.1.3	Facetas de dimensão $\dim(K) - 2$ . . . . .	45
4.2	Versão para poliedros . . . . .	52
4.2.1	Homogenização . . . . .	52
4.2.2	Representação externa . . . . .	57

4.2.3	Faces de dimensão $\dim(P) - 2$ . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Politopo de Conjunto Independente</b>	<b>63</b>
5.1	Fixação de variáveis . . . . .	66
5.2	Subgrafos induzidos $k$ -partidos . . . . .	71
5.2.1	Hiperárvores fortes . . . . .	71
5.2.2	Caso geral . . . . .	74
5.3	Subgrafos induzidos bipartidos . . . . .	80
5.3.1	Bipartidos quaisquer . . . . .	80
5.3.2	Estrelas . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Politopo de Subgrafo Induzido <math>k</math>-Partido</b>	<b>89</b>
6.1	Formulação . . . . .	90
6.2	Propriedades básicas . . . . .	92
6.3	Isomorfismos . . . . .	94
6.3.1	Subgrafos induzidos . . . . .	95
6.3.2	Conjunto independente . . . . .	103
6.4	Subgrafos geradores de faceta . . . . .	112
6.4.1	Vértice-clique-vértice . . . . .	113
6.4.2	Vértice-split . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>131</b>

# LISTA DE FIGURAS

3.1	Dois poliedros afm-isomórficos. . . . .	31
4.1	Exemplos de $K_F$ . . . . .	38
4.2	Exemplos de $K_C$ . . . . .	42
4.3	Aplicação dos Teoremas 4.11 e 4.12. . . . .	47
4.4	Aplicação do Teorema 4.17 . . . . .	51
4.5	Exemplos de homogenização. . . . .	53
5.1	Alguns subgrafos que geram facetas de STAB. . . . .	64
5.2	Alguns procedimentos que geram facetas de STAB. . . . .	65
5.3	Aplicação do Teorema 5.2 e de seus corolários. . . . .	68
5.4	Exemplos e não-exemplos de hiperárvores fortes. . . . .	72
5.5	Aplicação do Teorema 5.20. . . . .	74
5.6	Aplicação do Teorema 5.20 a antiwebs. . . . .	80
5.7	Aplicação do Teorema 5.23 a estrelas. . . . .	81
6.1	Aplicação do Teorema 6.12. . . . .	99
6.2	Aplicação do Teorema 6.16. . . . .	102
6.3	Exemplo de face afm-isomórfica a STAB. . . . .	104
6.4	Aplicação do Teorema 6.21. . . . .	109
6.5	Aplicação do Teorema 6.23. . . . .	112
6.6	Classe de grafos que gera facetas de $P(D, k)$ . . . . .	113
6.7	Aplicação do Teorema 6.26. . . . .	118
6.8	Outra classe de grafos que gera facetas de $P(D, k)$ . . . . .	119

6.9	Classe auxiliar de grafos que gera facetas de STAB. . . . .	120
6.10	Aplicação do Teorema 6.29. . . . .	121
6.11	Aplicação do Teorema 6.28. . . . .	128

# 1 INTRODUÇÃO

Um subconjunto de vértices de um grafo é um *conjunto independente* se nenhum par de vértices deste conjunto está conectado por uma aresta do grafo. Dentre os diversos problemas de otimização combinatória relacionados a conjuntos independentes, destacamos dois: o *problema do maior conjunto independente*, e uma de suas generalizações mais naturais, o *problema do maior subgrafo induzido  $k$ -partido*.

O *problema do maior conjunto independente* consiste em encontrar um conjunto independente de cardinalidade máxima em um grafo de entrada. Este problema possui aplicações em diversas áreas, como Visão Computacional, Casamento de Padrões e Biologia Molecular [10], e modela outros importantes problemas de otimização combinatória, como *empacotamento e partição de conjuntos* [36], e também *coloração de vértices* [19].

O *problema do subgrafo induzido  $k$ -partido* consiste em encontrar  $k$  conjuntos independentes em um grafo de entrada cuja união tenha cardinalidade máxima. Este problema generaliza tanto o *problema do maior conjunto independente*, quanto o problema do *maior subgrafo induzido bipartido*, e modela problemas que surgem no projeto de circuitos integrados [18, 23], e em Biologia Computacional [32, 24].

Embora esses problemas possam ser resolvidos em tempo polinomial para algumas classes particulares de grafos, eles são NP-difíceis para grafos em geral [31], e nenhum algoritmo de tempo polinomial para esses problemas pode obter um fator de aproximação menor que  $n^{1-\epsilon}$ , para qualquer  $\epsilon > 0$ , a menos que  $\text{NP} = \text{ZPP}$  [30].

Diversas abordagens tem sido consideradas para gerar boas soluções em um tempo razoável. Neste trabalho, focamos na abordagem por *programação inteira*, que tem sido utilizada com sucesso em outros problemas de otimização combinatória NP-difíceis, como o problema do caixeiro viajante.

Dados um vetor  $c \in \mathbb{Z}^n$ , uma matriz  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  e um vetor  $b \in \mathbb{Z}^m$ , um *problema de programação linear inteira zero-um* consiste em encontrar:

$$\max \{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{B}^n\}.$$

A todo problema de programação linear inteira zero-um está associado um politopo

$$\text{conv}\{x \in \mathbb{B}^n : Ax \leq b\},$$

formado pelo fecho convexo de todos os vetores binários  $x$  que satisfazem o sistema  $Ax \leq b$ . Problemas de programação linear inteira são geralmente resolvidos pelo método *branch-and-bound*. Também se pode utilizar *planos de corte* para acelerar esse método. Embora seja possível gerar planos de corte sem nenhum conhecimento da estrutura facial do politopo associado ao problema, em geral, quanto melhor se conhece a estrutura facial deste politopo, melhores são os planos de cortes gerados, e melhores são os ganhos computacionais. Os cortes mais fortes possíveis são aqueles que induzem facetas do politopo. Isto motivou o estudo dos politopos associados a diversos problemas de programação inteira, e em particular, a identificação das facetas destes politopos.

Neste trabalho, estudamos os politopos associados ao problema do maior conjunto independente e ao problema do maior subgrafo induzido  $k$ -partido.

O estudo do politopo de conjunto independente foi iniciado por Padberg [36]. Nemhauser & Trotter [34] demonstraram que facetas de politopos associados a subgrafos induzidos podem ser convertidas em facetas do politopo associado ao grafo original. Desde então, outros procedimentos semelhantes, baseados em outras operações elementares sobre grafos, foram descritos. No Capítulo 5, descrevemos um novo procedimento de geração de facetas que unifica e generaliza diversos procedimentos descritos na literatura. Além de gerar diversas classes de desigualdades indutoras de facetas já conhecidas, esse procedimento também gera novas classes de desigualdades indutoras de facetas que ainda não haviam sido descritas. Uma versão resumida desse capítulo foi publicada [45] e apresentada no VI Simpósio Latino-Americano de Algoritmos, Grafos e Otimização (LAGOS).

Para o problema do maior subgrafo induzido  $k$ -partido, Campêlo & Corrêa [14] propõem

uma formulação linear inteira, baseada na *formulação por representantes de cor*, que utiliza uma quantidade polinomial de variáveis e restrições. No Capítulo 6, estudamos o politopo associado a esta formulação. Identificamos suas facetas mais simples, mostramos que algumas de suas facetas podem ser geradas a partir de subgrafos induzidos, e descrevemos duas classes de subgrafos que geram facetas deste politopo.

Para obter os principais resultados dos Capítulos 5 e 6, utilizamos sempre uma mesma estratégia. Primeiro, identificamos faces do politopo que sejam *afim-isomórficas* a politopos mais simples, e, em seguida, convertemos facetas destas faces em facetas do politopo.

No Capítulo 3, estudamos a relação de *afim-isomorfismo* entre poliedros, como definida em [47], e apresentamos alguns resultados que, embora bastante fundamentais, não foram enunciados explicitamente na literatura.

No Capítulo 4, descrevemos um novo procedimento para converter uma face qualquer de um poliedro em todas as facetas deste poliedro que contenham a face original. Este procedimento de conversão generaliza as diversas versões do procedimento de *levantamento de variáveis*.

Toda a notação usada ao longo do texto, bem como as definições dos principais conceitos utilizados, é apresentada no Capítulo 2. Uma breve revisão dos resultados e direções para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 7.



## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, revisamos os principais conceitos de Teoria dos Grafos, Álgebra Linear e Análise Convexa que serão úteis ao longo do texto, e apresentamos a notação utilizada. Leitores interessados em mais detalhes sobre os tópicos tratados e nas demonstrações das proposições podem consultar, por exemplo, [9, 11] para Teoria dos Grafos, [29] para Álgebra Linear, e [38, 39] para Análise Convexa.

### 2.1 Teoria dos Grafos

#### 2.1.1 Grafos simples

Um **grafo simples**  $G$  é um par ordenado  $(V, E)$  composto por um conjunto finito  $V$ , cujos elementos são denominados **vértices**, e por um conjunto  $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ , cujos elementos são denominados **arestas**. Para todo grafo  $G$ , denotamos por  $V(G)$  e  $E(G)$ , respectivamente, os conjuntos de vértices e arestas de  $G$ .

Para cada aresta  $e = \{u, v\}$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são as suas **extremidades**, e que  $e$  as **conecta**. Uma aresta é **incidente** nas suas extremidades, assim como as extremidades são também incidentes na aresta. O conjunto de arestas incidentes em um vértice é denotado por  $E_G(v)$ , ou por  $E(v)$ , quando o grafo estiver claro pelo contexto.

Dois vértices  $u, v$  são **vizinhos**, ou **adjacentes**, se alguma aresta os conecta. A **vizinhança** de um vértice  $v$ , denotada por  $N_G(v)$  ou  $N(v)$ , é o conjunto de todos os vértices vizinhos a  $v$ . O **grau** de um vértice é a cardinalidade da sua vizinhança. Vértices de grau 0, 1 e  $|V| - 1$ , são chamados, respectivamente, de **vértices isolados**, **folhas** e **vértices universais**. A **vizinhança fechada** de um vértice  $v$ , denotada por  $N_G[v]$  ou  $N[v]$ , é a união

da vizinhança de  $v$  com o conjunto  $\{v\}$ . Utilizamos também as seguintes abreviações:

$$\begin{aligned} E_G(R) &:= \cup_{v \in R} E_G(v) & \forall R \subseteq V \\ N_G(R) &:= \cup_{v \in R} N_G(v) & \forall R \subseteq V \\ N_G[R] &:= \cup_{v \in R} N_G[v] & \forall R \subseteq V \end{aligned}$$

Grafos cujos vértices são todos universais são **grafos completos**. Grafos cujos vértices são todos isolados são **grafos vazios**. Um grafo composto por um único vértice e nenhuma aresta é um **grafo trivial**.

Se  $S$  for um subconjunto de vértices e todo par de vértices de  $S$  for conectado por alguma aresta, então  $S$  é uma **clique**. Se nenhum par for conectado, então  $S$  é um **conjunto independente**. Se o conjunto de vértices de um grafo puder ser particionado em  $k$  conjuntos independentes, o grafo é **k-partido**. Grafos 2-partidos são também chamados de **grafos bipartidos**.

Um **passeio** em um grafo é uma sequência finita de vértices  $(v_1, \dots, v_k)$  tal que  $v_i$  é vizinho de  $v_{i+1}$ . Se nenhum vértice se repetir na sequência, o passeio é também um **caminho**. Se  $v_1 = v_k$  e, exceto esta, não houver nenhuma outra repetição de vértices, o passeio é um **ciclo**. Um grafo é **conexo** se possui um caminho  $(v_1, \dots, v_k)$  para todo par de vértices  $v_1, v_k$ . Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui ciclos. Uma **estrela** é uma árvore que possui um vértice universal, e portanto,  $|V| - 1$  folhas.

O **vetor de incidência** de um conjunto de vértices  $S$  é uma tupla  $x \in \mathbb{B}^V$  tal que  $x_v = 1$  se  $v \in S$ , para todo  $v \in V$ . A **matriz de incidência** de um grafo é uma matriz cujas colunas são os vetores de incidência das arestas deste grafo.

Sobre um grafo  $G = (V, E)$  estão definidas diversas operações elementares, como **remoção de vértices**, **remoção de arestas** e **identificação de vértices**. O grafo obtido removendo-se a aresta  $e$ , denotado por  $G \setminus e$ , é o par  $(V, E \setminus \{e\})$ . O grafo obtido removendo-se o vértice  $v$  (e todas as arestas nele incidentes), denotado por  $G - v$ , é o par  $(V \setminus \{v\}, E \setminus E_G(v))$ . O

grafo obtido identificando-se um par de vértices  $u, v$  em um vértice  $w$  é o par

$$\left( (V \setminus \{v, u\}) \cup \{w\}, (E \setminus E_G(\{v, u\})) \cup \{w, i\} : i \in N_G(\{v, u\}) \right).$$

Utilizamos também as seguintes abreviações:

$$\begin{aligned} G - \{v_1, \dots, v_p\} &:= (((G - v_1) - v_2) \dots - v_p) & \forall \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V \\ G \setminus \{e_1, \dots, e_p\} &:= (((G \setminus e_1) \setminus e_2) \dots \setminus e_p) & \forall \{e_1, \dots, e_p\} \subseteq E \end{aligned}$$

Um grafo obtido por sucessivas remoções de vértices e arestas é um **subgrafo** do grafo original. O **subgrafo induzido** por um subconjunto de vértices  $S$ , denotado por  $G[S]$ , é o subgrafo obtido removendo-se de  $G$  todos os vértices, exceto os pertencentes ao conjunto  $S$ . O **complemento** de um grafo  $G = (V, E)$ , denotado por  $\bar{G}$ , é o par  $(V, \bar{E})$ , composto pelo mesmo conjunto de vértices  $V$  e pelo conjunto de arestas

$$\bar{E} := \{ \{u, v\} : u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E \}.$$

### 2.1.2 Grafos direcionados

Um **grafo direcionado**  $D$  é um par ordenado  $(V, A)$  composto por um conjunto finito  $V$ , cujos elementos são também denominados **vértices**, e por um conjunto  $A \subseteq \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ , cujos elementos são denominados **arcos**. Diferente das arestas, os arcos são pares ordenados; logo a ordem dos elementos é relevante.

Para cada arco  $(u, v)$ , dizemos que  $u$  é a sua **extremidade inicial** e que  $v$  é a sua **extremidade final**. Dizemos também que  $u$  **domina**  $v$ , e que  $v$  é **dominado** por  $u$ . Vértices que não são dominados por nenhum outro são **fontes**, enquanto vértices que não dominam nenhum outro são **sumidouros**.

Para cada vértice  $v$ , os conjuntos  $A_D^+(v)$ ,  $A_D^-(v)$ ,  $N_D^+(v)$  e  $N_D^-(v)$  são, respectivamente, o conjunto de arcos com extremidade inicial  $v$ ; o conjunto de arcos com extremidade final  $v$ ; a **vizinhança positiva** de  $v$ , definida como o conjunto de vértices dominados por  $v$ ; e a **vizinhança negativa** de  $v$ , definida como o conjunto de vértices que dominam  $v$ . O

conjunto  $A_D(v)$  é a união dos conjuntos  $A_D^+(v)$  e  $A_D^-(v)$ . Utilizamos também as abreviações:

$$\begin{aligned} A_D(R) &:= \cup_{v \in R} A_D(v) && \forall R \subseteq V \\ A_D^+(R) &:= \cup_{v \in R} A_D^+(v) && \forall R \subseteq V \\ A_D^-(R) &:= \cup_{v \in R} A_D^-(v) && \forall R \subseteq V \\ N_D^+(R) &:= \cup_{v \in R} N_D^+(v) && \forall R \subseteq V \\ N_D^-(R) &:= \cup_{v \in R} N_D^-(v) && \forall R \subseteq V \end{aligned}$$

Quando o grafo está claro pelo contexto, omitimos o subscrito  $D$ .

Um **passeio orientado** em um grafo direcionado é uma sequência finita de vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  tal que  $v_i$  domina  $v_{i+1}$ . Se não houver repetição de vértices, o passeio é um **caminho orientado**. Se  $v_1 = v_k$  e, exceto esta, não houver nenhuma outra repetição de vértices, o passeio é um **ciclo orientado**. Um grafo direcionado que não possui ciclos orientados é um **DAG** (do inglês, *directed acyclic graph*).

A cada grafo direcionado  $D = (V, A)$  está associado um grafo simples  $G(D)$ , denominado o **grafo subjacente** a  $D$ , que corresponde ao par ordenado  $(V, \{\{u, v\} : (u, v) \in A\})$ . Conceitos equivalentes aos definidos para grafos simples podem também ser definidos para grafo direcionados. Dois vértices são vizinhos em  $D$  se eles forem vizinhos em  $G(D)$ . Um subconjunto de vértices  $S$  é um conjunto independente ou uma clique de  $D$  quando  $S$  é, respectivamente, um conjunto independente ou uma clique de  $G(D)$ .

Uma forma de se obter um grafo direcionado a partir de um grafo simples  $G$  é substituir cada aresta  $\{u, v\}$  por exatamente um dos arcos  $(u, v), (v, u)$ . Grafos direcionados obtidos desta forma são **orientações** de  $G$ . Claramente, um mesmo grafo  $G$  pode possuir diversas orientações, algumas das quais são DAGs.

### 2.1.3 Hipergrafos

Um hipergrafo é uma generalização de um grafo simples em que se permite que as arestas contenham apenas um, ou mais que dois vértices. Mais precisamente, um **hipergrafo**  $\mathcal{H}$  é

um par ordenado  $(V, \mathcal{E})$  composto por um conjunto finito  $V$ , cujos elementos são também denominados **vértices**, e por uma família de conjuntos  $\mathcal{E} \subseteq \{e : e \subseteq V, e \neq \emptyset\}$ , cujos elementos são denominados **hiperarestas**. Se todas as hiperarestas do hipergrafo possuírem uma mesma cardinalidade  $k$ , este hipergrafo é  **$k$ -uniforme**. Hipergrafos 2-uniformes são grafos simples.

Dizemos que uma hiperaresta **conecta** todos os vértices pertencentes a ela. Uma hiperaresta é **incidente** nos seus vértices, assim como os vértices são também incidentes na hiperaresta. As definições de *adjacência*, *vizinhança* e *grau* de um vértice, *folhas*, *vetor de incidência* de um subconjunto de vértices e *matriz de incidência* de um hipergrafo, assim como as definições das operações de *remoção de vértices e hiperarestas*, são idênticas às definições para grafos simples.

Um hipergrafo obtido através de sucessivas remoções de vértices e hiperarestas é um **sub-hipergrafo** do hipergrafo original. O **hipergrafo-clique** de um grafo simples  $G$ , denotado por  $\mathcal{C}(G)$ , é o par  $(V, \mathcal{Q})$ , onde  $\mathcal{Q}$  é o conjunto de todas as cliques maximais de  $G$ .

## 2.2 Álgebra Linear

Um **subespaço linear** de  $\mathbb{R}^n$  é um subconjunto  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que, para todos  $x, y \in L$  e para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\alpha x + \beta y \in L$ . ( $\alpha y$  é a tupla obtida a partir de  $y$  multiplicando-se cada componente por  $\alpha$ , e  $x + y$  é a tupla obtida somando-se as componentes correspondentes das tuplas  $x$  e  $y$ ). Exemplos de subespaços lineares em  $\mathbb{R}^3$  são as retas e os planos que passam pela origem. Os elementos de  $L$  são geralmente chamados de **vetores**. Se  $x$  é um vetor, então  $x_i$  é sua  $i$ -ésima componente. Definimos também os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_n &:= \underbrace{(0, \dots, 0)}_n, \\ \mathbf{1}_n &:= \underbrace{(1, \dots, 1)}_n, \\ \mathbf{e}_i &:= \underbrace{(0, \dots, 0)}_{i-1}, 1, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-i} && \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \mathbf{e}_R &:= \sum_{r \in R} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Um vetor  $x$  é uma **combinação linear** dos vetores  $y_1, \dots, y_m$  se existem números reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  tais que

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m = x.$$

Um conjunto finito é **linearmente independente** se nenhum dos seus elementos é uma combinação linear dos demais e se este conjunto não contém o vetor  $\mathbf{0}_n$ . Qualquer conjunto que contenha um subconjunto linearmente dependente é também linearmente dependente. Qualquer subconjunto de um conjunto linearmente independente é também linearmente independente.

Se  $M$  for uma matriz  $m \times n$  e  $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ , então  $M^R$  é a submatriz obtida a partir de  $M$  mantendo-se apenas as colunas indexadas por  $R$ . De maneira semelhante, se  $S \subseteq \{1, \dots, m\}$ , a matriz  $M_S$  é a submatriz obtida a partir de  $M$  mantendo-se apenas as linhas indexadas por  $S$ . O símbolo  $T$  sobrescrito é reservado para denotar a matriz transposta  $M^T$  de  $M$ .

Uma matriz  $1 \times m$  é um **vetor-linha**, e uma matriz  $n \times 1$  é um **vetor-coluna**. Não fazemos distinção entre vetores-coluna de dimensão  $n \times 1$  e  $n$ -tuplas. Escrevemos o produto escalar  $\langle x, y \rangle$  entre dois vetores  $x, y$  como a multiplicação matricial  $x^T y$ . Representamos, também, conjuntos de  $n$ -tuplas com  $m$  elementos por matrizes de dimensão  $n \times m$ .

## 2.3 Análise Convexa

### 2.3.1 Conjuntos afins

Generalizando o conceito de subespaço linear, um subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  é um **conjunto afim** se, para todo  $x, y \in M$  e todo real  $\alpha$ , tem-se  $(1 - \alpha)x + \alpha y \in M$ . Exemplos de conjuntos afins em  $\mathbb{R}^3$  são todas as retas e planos (passando ou não pela origem).

Um vetor  $x$  é uma **combinação afim** dos vetores  $y_1, \dots, y_m$  se existem números reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m &= x \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_m &= 1 \end{aligned}$$

Um conjunto finito é **afim independente** se nenhum dos seus elementos é uma combinação afim dos demais. Um conjunto  $\{y_1, \dots, y_m\}$  é afim independente se, e somente se, o conjunto

$\{y_2 - y_1, \dots, y_m - y_1\}$  é linearmente independente. O menor conjunto afim (com relação à inclusão) que contém um conjunto de vetores  $S$ , denotado por  $\text{aff}(S)$ , é o **fecho afim** de  $S$ .

A **dimensão** de um conjunto não vazio  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , denotada por  $\text{dim}(S)$ , é  $k$  se  $S$  contém um conjunto afim independente maximal de cardinalidade  $k + 1$ . O conjunto vazio, por convenção, tem dimensão  $-1$ . Se  $S$  estiver contido em um conjunto de dimensão  $l$ , então  $\text{dim}(S) \leq l$ . Se, por outro lado, existirem  $l + 1$  vetores afim independentes em  $S$ , então  $\text{dim}(S) \geq l$ . Quando  $S$  possui dimensão  $n$ , dizemos que  $S$  tem **dimensão plena**. Conjuntos afins de dimensão 0, 1, 2 e  $n - 1$  são chamados, respectivamente, de **pontos**, **retas**, **planos** e **hiperplanos**.

Retas e hiperplanos possuem dimensões complementares, e estão naturalmente associados entre si. Qualquer hiperplano pode ser representado como a translação do conjunto de vetores ortogonais a uma reta que contenha a origem. Ou seja, hiperplanos são conjuntos de vetores  $x$  tais que  $\pi^T x = \pi_0$ , onde  $\pi$  é um vetor não nulo (algum vetor que gere a reta), e  $\pi_0$  é um real (associado à distância transladada). Dois hiperplanos  $\{x : \pi^T x = \pi_0\}$ ,  $\{x : \gamma^T x = \gamma_0\}$  são **linearmente independentes** se os vetores  $\pi, \gamma$  são linearmente independentes.

Todo conjunto afim é a interseção de um número finito de hiperplanos. Logo, pode ser descrito como o conjunto de vetores  $x$  que satisfazem um sistema finito de equações  $Ax = b$ , onde  $A$  é uma matriz real e  $b$  é um vetor.

### 2.3.2 Conjuntos convexos

Um subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  é um **conjunto convexo** se, para todos  $x, y \in C$  e todo  $\alpha$  real no intervalo  $(0, 1)$ , tem-se  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ . Geometricamente, um conjunto é convexo se contém todo o segmento de reta entre dois quaisquer dos seus pontos. A soma  $C_1 + C_2$  de dois conjuntos convexos  $C_1, C_2$ , chamada de **soma de Minkowski** destes conjunto, é o conjunto também convexo  $\{a + b : a \in C_1, b \in C_2\}$ .

A todo hiperplano  $\{x : \pi^T x = \pi_0\}$  está associado um conjunto convexo, chamado de um **semi-espaço fechado**, formado pelos vetores  $x$  tais que  $\pi^T x \leq \pi_0$ . Um conjunto que possa ser escrito como a interseção de um número finito de semi-espaços fechados é um **poliedro**.

Um vetor  $x$  é uma **combinação convexa** dos vetores  $y_1, \dots, y_m$  se existem reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$

tais que

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m &= x \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_m &= 1 \\ \alpha_i &\geq 0 && \forall i \in \{1, \dots, m\}\end{aligned}$$

O menor conjunto convexo (com relação à inclusão) que contém um conjunto de vetores  $S$ , denotado por  $\text{conv}(S)$ , é o **fecho convexo** de  $S$ . O fecho convexo de um número *finito* de vetores é um **politopo**. Politopos são também poliedros e também podem ser descritos, portanto, como a interseção de um número finito de semi-espacos fechados.

Uma desigualdade é **válida** para um conjunto se todo ponto pertencente ao conjunto a satisfaz. Um conjunto  $F$  é uma **face** de um conjunto convexo  $C$  se existe uma desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  válida para  $C$  tal que

$$F = \{x \in C : \pi^T x = \pi_0\}.$$

Neste caso, dizemos que a desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  **induz** a face  $F$  em  $C$ . Uma **face própria** de  $C$  é uma face não vazia de  $C$  que possui dimensão menor que  $\dim(C)$ . Uma  **$k$ -face** é uma face que possui dimensão  $k$ . Faces de dimensão 0, 1 e  $\dim(C) - 1$  são chamadas, respectivamente, de **vértices**, **arestas** e **facet**s. O conjunto de vértices de um poliedro  $P$  é denotado por  $\text{vert}(P)$ . Todas as faces das faces de um conjunto convexo são faces do próprio conjunto. Em particular, todos os vértices e arestas das faces de um conjunto convexo são também vértices e arestas do próprio conjunto.

Um conjunto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  é um **cone** se, para todo vetor  $x \in K$  e todo real  $\alpha \geq 0$ , o vetor  $\alpha x$  pertence a  $K$ . Um vetor  $x$  é uma **combinação cônica** dos vetores  $y_1, \dots, y_m$  se existem reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  tais que

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m &= x \\ \alpha_i &\geq 0 && \forall i \in \{1, \dots, m\}\end{aligned}$$

O menor cone que contém um conjunto  $S$ , denotado por  $\text{cone}(S)$ , é o **fecho cônico** de  $S$ . O

fecho cônico de um número *finito* de vetores é um **cone poliédrico**.

Um vetor  $r$  é uma **direção de recessão** de um conjunto  $S$  se, para todo  $x \in S$  e todo  $\alpha \geq 0$ , o vetor  $x + \alpha r$  pertence a  $S$ . O **cone de recessão** de  $S$ , denotado por  $\text{rec}(S)$ , é o conjunto das direções de recessão de  $S$ . Um vetor  $r$  é uma **direção extrema** de  $S$  se o fecho cônico de  $r$  é uma aresta de  $\text{rec}(S)$ . Perceba que, se  $r$  é uma direção extrema de  $S$ , e  $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$ , onde  $r^1, r^2 \in \text{rec}(S)$ , então  $r^1, r^2$  são múltiplos positivos de  $r$ .

O **polar** de um conjunto  $S$  é o cone

$$S^\circ := \{\pi : \pi^T x \leq 0, x \in S\}.$$

Quando  $S$  é um cone poliédrico com dimensão plena,  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $S$  se e somente se  $\pi$  é uma direção extrema de  $S^\circ$ .

Todo poliedro  $P$  por ser descrito como a soma  $\text{conv}(S) + \text{cone}(R)$  do fecho convexo de um conjunto finito  $S$  com o fecho cônico de um conjunto finito  $R$ . Dizemos que esta é uma **descrição interna** de  $P$ . Todo poliedro  $P$  também pode ser descrito como o conjunto das soluções de um sistema finito de desigualdades lineares  $Ax \leq b$ . Dizemos que esta é uma **descrição externa** de  $P$ . Uma desigualdade é **redundante** para a descrição externa de um poliedro se sua omissão não altera o conjunto de soluções do sistema de desigualdades desta descrição. Se a desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  é válida para um poliedro descrito pelo sistema  $Ax \leq b$ , o **Lema de Farkas** afirma que, ou existe vetor  $c \geq 0$  tal que  $c^T A = \pi^T, c^T b \leq \pi_0$ , ou o poliedro é vazio.



# 3 EQUIVALÊNCIA ENTRE POLIEDROS

Para certos tipos de análise, a relação de *igualdade* entre poliedros, como definida para conjuntos em geral, é demasiadamente restrita. Outras relações de equivalência capturam de forma muito mais adequada o conceito intuitivo ao qual nos referimos quando dizemos que dois objetos geométricos são iguais.

Neste breve capítulo, estudamos o *isomorfismo afim* de poliedros, como definido em [47], e apresentamos alguns resultados que, embora bastante fundamentais, não foram enunciados explicitamente na literatura. Estes resultados serão utilizados frequentemente nos próximos capítulos.

## 3.1 Equivalência afim

Dois poliedros  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  são **afim-isomórficos** (denotado por  $P \cong Q$ ) se existem funções afins  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  que definem uma bijeção entre os pontos dos dois poliedros. Ou seja, se existem

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto Fx + F_0 & F &\in \mathbb{R}^{m \times n} & F_0 &\in \mathbb{R}^m, \\ g : y &\mapsto Gy + G_0 & G &\in \mathbb{R}^{n \times m} & G_0 &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} f(x) &\in Q & \forall x &\in P, \\ g(y) &\in P & \forall y &\in Q, \\ g(f(x)) &= x & \forall x &\in P, \\ f(g(y)) &= y & \forall y &\in Q. \end{aligned}$$

Intuitivamente, dois poliedros são afim-isomórficos se podemos obter um a partir do outro através de transformações afins como translação, rotação, escala, reflexão ou projeção ortogonal. Note que afim-isomorfismo é uma relação de equivalência.

Sejam, ao longo desta seção,  $P$  e  $Q$  poliedros afim-isomórficos, e sejam  $f, g$  funções que definem uma bijeção entre os pontos dos dois poliedros. Para pontos pertencentes a  $P$  e  $Q$ , as funções  $f$  e  $g$  preservam a independência afim, e conseqüentemente, também a dimensão, como mostram o lema e a proposição seguintes.

**Lema 3.1.** *Se  $x^1, \dots, x^p \in P$  são afim independentes, então  $f(x^1), \dots, f(x^p) \in Q$  são afim independentes.*

*Demonstração.* Vamos demonstrar a contrapositiva. Se  $f(x^1), \dots, f(x^p) \in Q$  não forem afim independentes, existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{R}$  tais que  $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i = 1$  e que  $f(x^p) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i f(x^i)$ .

Temos

$$x^p = g(f(x^p)) = g\left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i f(x^i)\right) = g\left(f\left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x^i\right)\right) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x^i$$

Logo  $x^1, \dots, x^p \subseteq P$  não são afim independentes.  $\square$

**Proposição 3.2.** *Se  $R \subseteq P$ , então  $\dim(R) = \dim(f(R))$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{x^1, \dots, x^{d+1}\} \subseteq R$  um conjunto de  $\dim(R) + 1$  pontos afim independentes. Pelo Lema 3.1,  $\{f(x^1), \dots, f(x^{d+1})\} \subseteq f(R)$  é um conjunto afim independente. Logo,  $\dim(f(R)) \geq \dim(R)$ . Por simetria,  $\dim(R) \geq \dim(f(R))$ .  $\square$

Como afim-isomorfismo é uma relação simétrica, podemos enunciar versões alternativas do Lema 3.1 e da Proposição 3.2 que mostram que a função  $g$ , ao invés da função  $f$ , preserva a independência afim e a dimensão para pontos pertencentes a  $Q$ . Por brevidade, não faremos isso.

Segue diretamente da Proposição 3.2 que  $P$  e  $Q$  possuem a mesma dimensão.

**Proposição 3.3.**  *$P$  e  $Q$  possuem a mesma dimensão.*

Desigualdades válidas para  $P$  podem ser facilmente transformadas em desigualdades válidas para  $Q$ , como mostra a proposição seguinte. Note, porém, que não há uma correspondência de um-para-um entre as desigualdades válidas dos dois conjuntos.

**Proposição 3.4.** *Se a desigualdade  $\pi x \leq \pi_0$  é válida para  $P$ , então a desigualdade  $\pi Gy \leq \pi_0 - \pi G_0$  é válida para  $Q$ .*

*Demonstração.* Tome  $y \in Q$ . Seja  $x \in P$  tal que  $y = Fx + F_0$ . Sabemos que

$$x \in P \Rightarrow g(f(x)) = x \Rightarrow GFx + GF_0 = x - G_0.$$

Logo,

$$\pi Gy = \pi G(Fx + F_0) = \pi(GFx + GF_0) = \pi(x - G_0) \leq \pi_0 - \pi G_0.$$

Concluimos que a desigualdade é válida para  $Q$ . □

Mostramos agora que existe uma correspondência entre as faces de  $P$  e  $Q$ .

**Proposição 3.5.** *Se  $R = \{x \in P : \pi x = \pi_0\}$ , então  $f(R) = \{y \in Q : \pi Gy = \pi_0 - \pi G_0\}$*

*Demonstração.* ( $\subseteq$ ) Seja  $y \in f(R)$ . Como  $R \subseteq P$ , então  $y \in Q$ . Resta provar que  $\pi Gy = \pi_0 - \pi G_0$ . Como  $y \in f(R)$ , existe  $x \in R$  tal que  $y = f(x) = Fx + F_0$ . Sabemos que  $\pi x = \pi_0$ ,  $GFx + GF_0 = x - G_0$ . Logo,

$$\pi Gy = \pi G(Fx + F_0) = \pi(GFx + GF_0) = \pi(x - G_0) = \pi_0 - \pi G_0.$$

( $\supseteq$ ) Seja  $y \in Q$  tal que  $\pi Gy = \pi_0 - \pi G_0$ . Sabemos que existe  $x \in P$  tal que  $x = Gy + G_0$ .

Temos

$$\pi x = \pi(Gy + G_0) = \pi Gy + \pi G_0 = \pi_0 - \pi G_0 + \pi G_0 = \pi_0.$$

Logo,  $x \in R$ . Consequentemente,  $f(x) = f(g(y)) = y \in f(R)$ . □

**Proposição 3.6.** *Se  $R$  é uma  $k$ -face de  $P$ , então  $f(R)$  é uma  $k$ -face de  $Q$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2, sabemos que  $R$  e  $f(R)$  possuem a mesma dimensão. Resta provar que  $f(R)$  é face de  $Q$ . Se  $R$  for face de  $P$ , então existe uma desigualdade  $\pi x \leq \pi_0$  válida para  $P$  tal que

$$R = \{x \in P : \pi x = \pi_0\}.$$

Pela Proposição 3.5, sabemos que

$$f(R) = \{y \in Q : \pi Gy = \pi_0 - \pi G_0\}.$$

Além disso, pela Proposição 3.4, sabemos que  $\pi Gy \leq \pi_0 - \pi G_0$  é desigualdade válida para  $Q$ . Concluimos que  $f(R)$  é face de  $Q$ .  $\square$

**Proposição 3.7.** *Se  $x$  é vértice de  $P$ , então  $f(x)$  é vértice de  $Q$ .*

**Proposição 3.8.** *Se  $\pi x \leq \pi_0$  induz faceta de  $P$ , então  $\pi Gy \leq \pi_0 - \pi G_0$  induz faceta de  $Q$ .*

Mostramos, finalmente, que os cones de recessão de  $P$  e  $Q$  também são afim-isomórficos, e que também há, portanto, uma correspondência entre as direções extremas dos dois poliedros.

**Lema 3.9.** *Se  $r \in \text{rec}(P)$ , então  $r = GFr$ .*

*Demonstração.* Temos

$$x \in P \Rightarrow g(f(x)) = x \Rightarrow GF_0 + G_0 = x - GFx.$$

Ou seja,  $x - GFx$  é constante para todo  $x \in P$ . Seja  $x \in P$ . Como  $x, x + r \in P$ , temos

$$x - GFx = (x + r) - GF(x + r) \Rightarrow r = GFr. \quad \square$$

**Lema 3.10.** *Se  $r \in \text{rec}(P)$ , então  $Fr \in \text{rec}(Q)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $y \in Q, \alpha \in \mathbb{R}_+$ . Existe  $x \in P$  tal que  $f(x) = y$ . Como  $r$  é direção de recessão de  $P$ ,

$$x + \alpha r \in P \Rightarrow f(x + \alpha r) \in Q \Rightarrow Fx + F\alpha r + F_0 \in Q \Rightarrow f(x) + \alpha(Fr) \in Q$$

Logo,  $y + \alpha Fr \in Q$ .  $\square$

**Proposição 3.11.** *Os cones de recessão de  $P$  e  $Q$  são afim-isomórficos.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.10, sabemos que  $Fr \in \text{rec}(Q)$ , para todo  $r \in \text{rec}(P)$ , e que  $Gr \in \text{rec}(P)$ , para todo  $r \in \text{rec}(Q)$ . Além disso, pelo Lema 3.9, sabemos que  $r = GFr$ , para

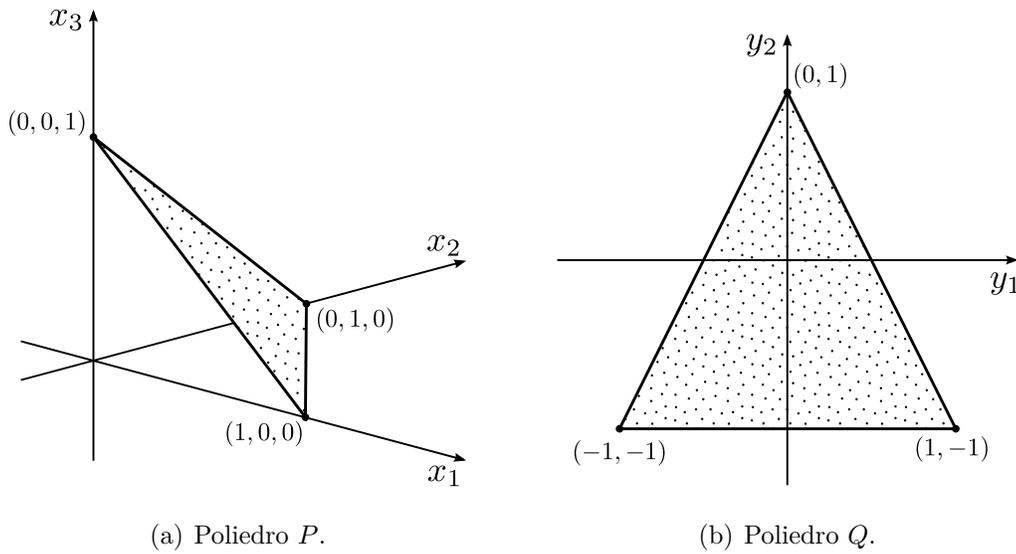


Figura 3.1: Dois poliedros afim-isomórficos.

todo  $r \in \text{rec}(P)$ , e que  $r = FGr$ , para todo  $r \in \text{rec}(Q)$ . Concluimos que os dois cones são afim-isomórficos. □

**Proposição 3.12.** *Se  $r$  é direção extrema de  $P$ , então  $Fr$  é direção extrema de  $Q$ .*

*Demonstração.* Se  $r$  for direção extrema de  $P$ , então

$$R = \{\alpha r : \alpha \in \mathbb{R}_+\}$$

é uma aresta de  $\text{rec}(P)$ . Logo, pela Proposição 3.6 e pelo isomorfismo da Proposição 3.11,

$$f(R) = \{\alpha Fr : \alpha \in \mathbb{R}_+\}$$

é uma aresta de  $\text{rec}(Q)$ . Como  $f(R) = \text{cone}(Fr)$ , concluimos que  $Fr$  é uma direção extrema de  $Q$ . □

### 3.2 Exemplo

Considere os poliedros  $P \in \mathbb{R}^3, Q \in \mathbb{R}^2$ , apresentados na Figura 3.1, dados por

$$P = \text{conv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \text{conv} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar que as funções

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

definem um isomorfismo afim entre  $P$  e  $Q$ . Como as desigualdades  $Ax \leq b$  induzem facetas de  $P$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

podemos utilizar a Proposição 3.8 para obter as seguintes desigualdades que induzem facetas de  $Q$ .

$$AGy \leq b - AG_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y_2 \leq 1 \\ -2y_1 + y_2 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 \leq 1 \end{cases}$$

Por outro lado, como as desigualdades

$$-y_2 \leq 1$$

$$-2y_1 + y_2 \leq 1$$

$$2y_1 + y_2 \leq 1$$

induzem facetas de  $Q$ , pela Proposição 3.8, as seguintes desigualdades induzem facetas de  $P$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$



## 4 CONVERSÃO DE FACES EM FACETAS

Um problema clássico em combinatória poliédrica é determinar o conjunto de desigualdades lineares que induzem facetas de um poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , definido como a soma da envoltória convexa de um conjunto finito  $S$  com o fecho cônico de um conjunto finito  $R$ . Quando não temos nenhuma informação adicional sobre  $P$ , podemos determinar estas desigualdades através do estudo do cone

$$P^\gamma = \left\{ (\pi, \pi_0) \in P : \pi^T x \leq \pi_0, \forall x \in P \right\} = \left\{ (\pi, \pi_0) \in P : \begin{array}{l} s^T \pi - \pi_0 \leq 0, \forall s \in S \\ r^T \pi \leq 0, \forall r \in R \end{array} \right\}.$$

Se  $P$  tem dimensão plena, cada desigualdade que induz faceta de  $P$  está associada a uma direção extrema de  $P^\gamma$ . Estas direções podem ser enumeradas, por exemplo, através da Eliminação de Fourier-Motzkin [47] ou do Algoritmo de Busca Reversa [3]. Quando temos informações adicionais sobre  $P$ , ou quando estamos interessados apenas em um subconjunto das desigualdades indutoras de facetas, podemos utilizar algoritmos mais específicos.

Se conhecemos uma desigualdade que induz faceta de uma face  $F$  de  $P$ , podemos transformá-la em uma desigualdade que induza faceta de  $P$ . O estudo desse procedimento teve início com um método descrito por Padberg [36] para uma classe particular de politopos, e posteriormente generalizado para politopos zero-um por Nemhauser & Trotter [34] e Wolsey [42]. Supondo que  $P$  seja um politopo, que seus vértices estejam em  $\mathbb{B}^n$ , que  $F$  seja da forma

$$F = \{x \in P : x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}\},$$

e que a desigualdade

$$\sum_{i=m+1}^n \alpha_i x_i \leq \alpha_0 \tag{4.1}$$

seja válida para  $F$ , o procedimento calcula, de forma sequencial, coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \alpha_0 \quad (4.2)$$

seja válida para  $P$ . Este procedimento, conhecido como **levantamento sequencial de variáveis**, tem sido crucial na resolução de problemas de programação inteira de grande porte [20, 26]. Perceba que, quando (4.2) induz faceta de  $P$ , esta faceta contém a face que a desigualdade (4.1) induz em  $F$ .

Em geral, diferentes ordenações das variáveis  $x_1, \dots, x_m$  geram diferentes desigualdades. O estudo de condições suficientes e necessárias para que esta ordenação não influencie o cálculo dos coeficientes foi iniciado por Wolsey [44], e posteriormente generalizado para problemas de programação inteira-mista zero-um por Gu et al. [27].

Um algoritmo alternativo para o cálculo dos coeficientes, conhecido como **levantamento simultâneo de variáveis**, foi proposto por Zemel [46]. Este algoritmo calcula todos os coeficientes simultaneamente, através da enumeração dos vértices de um politopo auxiliar, geralmente bem mais simples do que o politopo original. Diferentemente do levantamento sequencial de variáveis, ele gera todas as possíveis combinações de coeficientes que definem desigualdades válidas para  $P$ .

As desigualdades válidas geradas pelo levantamento simultâneo de variáveis só induzem facetas de  $P$  quando a diferença entre as dimensões de  $P$  e  $F$  é exatamente  $m$ . Para o levantamento sequencial, ainda mais condições precisam ser satisfeitas. Oosten [35] propõe um outro algoritmo, denominado **levantamento estendido de variáveis**, que é capaz de gerar desigualdades indutoras de facetas mesmo quando a diferença entre as dimensões da face e do poliedro é maior do que  $m$ .

Neste capítulo, descrevemos um novo procedimento, que generaliza os três procedimentos apresentados acima. Diferentemente desses procedimentos, fazemos poucas suposições sobre a face e sobre o poliedro. Em particular, não supomos que  $P$  seja um politopo, que seus vértices estejam em  $\mathbb{B}^n$ , que os hiperplanos que definem  $F$  sejam ortogonais aos eixos, nem que as desigualdades usadas na descrição de  $F$  sejam válidas para  $P$ . Ao invés de transformarmos uma desigualdade válida para uma face em uma desigualdade válida para o politopo, nós mostramos como obter, a partir da descrição interna de um poliedro qualquer  $P$ , e da

descrição interna ou externa de uma face qualquer  $F$  de  $P$ , todas as facetas de  $P$  que contêm  $F$ , através da enumeração apenas das direções extremas de uma face de  $P^\gamma$ .

Na Seção 4.1, apresentamos o procedimento e demonstramos que ele funciona para o caso onde  $P$  é um cone poliédrico. Na Seção 4.2, estendemos estes resultados para poliedros em geral, através de homogenização.

## 4.1 Versão para cones

Nesta seção, estudamos o caso particular do procedimento quando  $P$  é um cone poliédrico. Primeiro, trabalhamos com uma representação interna de  $F$ . Em seguida, com uma representação externa. Finalmente, consideramos o caso particular onde  $F$  tem dimensão  $\dim(P) - 2$ , e portanto está contido em exatamente duas facetas de  $P$ . Os resultados desta seção são estendidos para poliedros em geral na seção seguinte, utilizando homogenização.

### 4.1.1 Representação interna

Ao longo desta subseção, seja  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  um cone poliédrico com dimensão plena e seja  $F$  uma face não vazia de  $K$ . Estamos interessados em determinar as facetas de  $K$  que contêm  $F$ .

Considere o cone

$$K_F := K + (-F).$$

Demonstramos nesta subseção que as desigualdades que induzem facetas de  $K$  que contêm  $F$  são exatamente as desigualdades que induzem facetas de  $K_F$ .

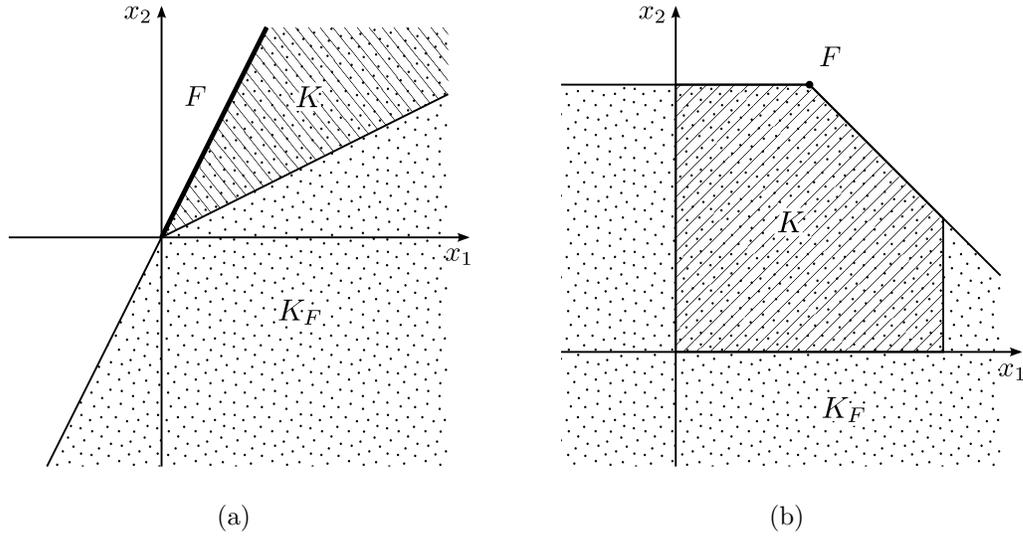
**Exemplo 4.1.** Faça

$$K = \text{cone} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, F = \text{cone} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por definição, temos

$$K_F = \text{cone} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4.1(a) mostra estes três conjuntos. Note que, neste caso,  $K_F$  possui uma única faceta, induzida pela desigualdade  $-2x_1 + x_2 \leq 0$ . Esta é a única faceta de  $K$  que contém  $F$ .

Figura 4.1: Exemplos de  $K_F$ .

**Exemplo 4.2.** Faça agora

$$K = \text{cone} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 \leq 0 \\ x_1 + 2x_3 \leq 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{array} \right\},$$

$$F = \text{cone} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$K_F = \text{cone} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \text{cone} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4.1(b) mostra a interseção do hiperplano  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -1\}$  com estes três conjuntos. As facetas de  $K_F$  são induzidas pelas desigualdades

$$x_2 + 2x_3 \leq 0, \tag{4.3}$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 0. \quad (4.4)$$

Estas desigualdades induzem as únicas facetas de  $K$  que contêm  $F$ .

Para demonstrarmos esse resultado, utilizaremos o seguinte lema, que descreve o polar de  $K_F$ .

**Lema 4.3.**  $(K_F)^\circ = \{\pi \in K^\circ : \pi^T x = 0, \forall x \in F\}$

*Demonstração.* ( $\subseteq$ ) Seja  $\pi \in (K_F)^\circ$ . Para todo  $x \in K$ , temos  $x \in K_F$ , e portanto  $\pi^T x \leq 0$ . Logo,  $\pi \in K^\circ$ . Além disso, para todo  $x \in F$ , temos  $x, -x \in K_F$ , e portanto  $\pi^T x \leq 0$ ,  $\pi^T x \geq 0$ .

( $\supseteq$ ) Seja  $\pi \in K^\circ$  tal que  $\pi^T x = 0, \forall x \in F$ . Para todo  $x \in K_F$ , existem  $x^1 \in K, x^2 \in F$  tais que  $x = x^1 - x^2$ , e portanto

$$\pi^T x = \pi^T x^1 - \pi^T x^2 = \pi^T x^1 \leq 0.$$

Concluimos que  $\pi \in (K_F)^\circ$ . □

Em particular, esse lema mostra que o polar de  $K_F$  é uma face do polar de  $K$ . Todas as suas direções extremas, portanto, são direções extremas do polar de  $K$ , e estão associadas a certas facetas de  $K$ . O próximo lema mostra que estas facetas são exatamente aquelas que nos interessam.

**Lema 4.4.** *A desigualdade  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K$  que contém  $F$  se e somente se  $\pi$  é direção extrema de  $(K_F)^\circ$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K$  que contém  $F$ , então  $\pi$  é direção extrema de  $K^\circ$  e  $\pi^T x = 0, \forall x \in F$ . Pelo Lema 4.3,  $\pi$  pertence a  $(K_F)^\circ$ , e  $(K_F)^\circ$  é face de  $K^\circ$ . Logo,  $\pi$  é direção extrema de  $(K_F)^\circ$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\pi$  for direção extrema de  $(K_F)^\circ$ , então  $\pi$  é direção extrema de  $K^\circ$ , pois  $(K_F)^\circ$  é face de  $K^\circ$ . Além disso,  $\pi^T x = 0, \forall x \in F$ . Logo,  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K$  que contém  $F$ . □

Por consequência direta deste lema, temos o seguinte teorema, que prova que as desigualdades que induzem facetas de  $K$  que contêm  $F$  são exatamente as desigualdades que induzem facetas de  $K_F$ .

**Teorema 4.5.** *A desigualdade  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K$  que contém  $F$  se e somente se  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K_F$ .*

### 4.1.2 Representação externa

Como na subseção anterior, seja, ao longo desta subseção,  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  um cone poliédrico com dimensão plena e seja  $F$  uma face própria de  $K$  com dimensão  $n - m$ . Se  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de posto cheio tal que

$$F = \{x \in K : Cx = 0\},$$

então qualquer desigualdade da forma  $\pi^T Cx \leq 0$ , onde  $\pi \in \mathbb{R}^m$ , se válida para  $K$ , induz uma face que contém  $F$ . Nesta subseção, estamos interessados em determinar que vetores  $\pi$  são tais que  $\pi^T Cx \leq 0$  induz uma faceta de  $K$ . Note que as desigualdades  $Cx \leq 0$  não precisam ser válidas para  $K$ .

Seja  $(L, R)$  uma partição de  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $C^L$  seja inversível. Vimos na subseção anterior que o polar de  $K_F$  é uma face do polar de  $K$ . O lema seguinte fornece uma outra descrição deste polar, com base na matriz  $C$ .

**Lema 4.6.**  $(K_F)^\circ = \left\{ \pi \in K^\circ : \pi_R^T = \pi_L^T (C^L)^{-1} C^R \right\}$

*Demonstração.* Seja  $X \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$  uma matriz cujas colunas sejam linearmente independentes e pertençam a  $F$ . Pelo Lema 4.3,

$$(K_F)^\circ = \left\{ \pi \in K^\circ : \pi^T X = 0 \right\} = \left\{ \pi \in K^\circ : \pi_L^T X_L + \pi_R^T X_R = 0 \right\}.$$

Temos duas afirmações:

**Afirmação 1.**  $X_R$  é inversível.

*Demonstração da Afirmação 1.* Sabemos que  $X$  tem posto  $n - m$ , pois as colunas de  $X$  são linearmente independentes. Além disso,  $CX = 0$ , ou seja,  $X_L + (C^L)^{-1} C^R X_R = 0$ .

Temos  $X_L = -(C^L)^{-1}C^R X_R$ . As linhas de  $X_L$  são, portanto, uma combinação das linhas de  $X_R$ . A remoção destas linhas não altera o posto de  $X$ . Concluimos que  $X_R$  tem posto  $n - m$  e é inversível.

**Afirmção 2.**  $X_L X_R^{-1} = -(C^L)^{-1}C^R$ .

*Demonstração da Afirmção 2.* Sabemos que  $X_L = -(C^L)^{-1}C^R X_R$ . Como  $X_R$  é inversível, podemos multiplicar à direita por  $X_R^{-1}$  ambos os lados deste sistema para obtermos a identidade desejada.

Com estas duas afirmações, podemos facilmente verificar que o lema vale, pois:

$$\begin{aligned} (K_F)^\circ &= \left\{ \pi \in K^\circ : \pi_L^T X_L + \pi_R^T X_R = 0 \right\} \\ &= \left\{ \pi \in K^\circ : \pi_L^T X_L X_R^{-1} + \pi_R^T X_R X_R^{-1} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \pi \in K^\circ : \pi_R^T = \pi_L^T (C^L)^{-1} C^R \right\}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.2 (continuação)** Temos  $F = \{x \in K : Cx = 0\}$ , onde

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que as desigualdades  $Cx \leq 0$  não são válidas para  $K$ . O ponto  $(2, 0, -1)$ , por exemplo, não satisfaz estas desigualdades. Sejam  $L = \{1, 2\}$ ,  $R = \{3\}$ . Pelo Lema 4.6, temos

$$(K_F)^\circ = \left\{ \pi \in K^\circ : \pi_3 = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \{ \pi \in K^\circ : \pi_3 = \pi_1 + 2\pi_2 \}.$$

Logo, uma desigualdade  $\pi^T x \leq 0$  indutora de faceta de  $K$  induz uma faceta que contém  $F$  se e somente se  $\pi_3 = \pi_1 + 2\pi_2$ . As desigualdades (4.3) e (4.4), de fato, satisfazem esta propriedade. A desigualdade  $x_1 + 2x_3 \leq 0$ , que induz faceta de  $K$ , por outro lado, não satisfaz

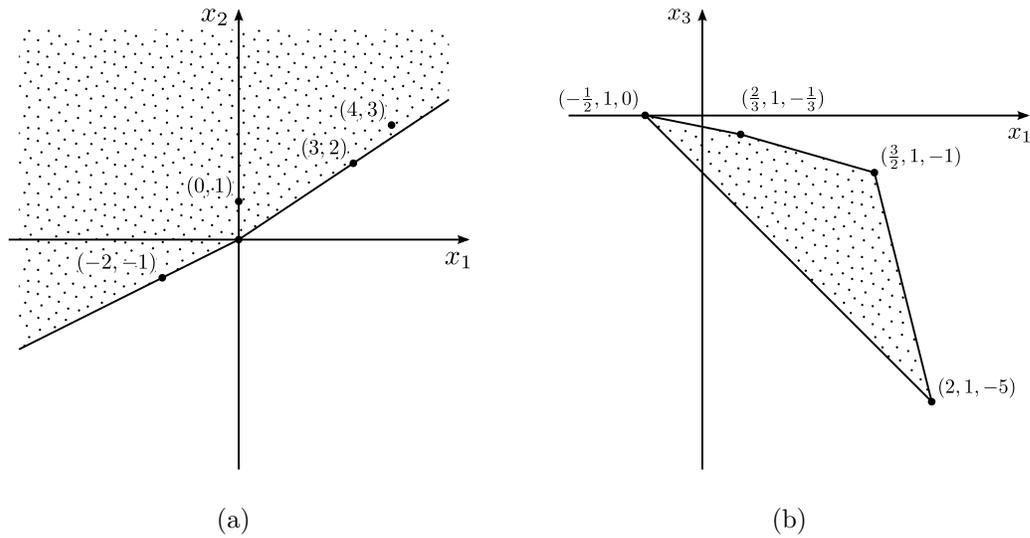


Figura 4.2: Exemplos de  $K_C$ .

esta propriedade, e portanto não induz faceta que contém  $F$ .

Consideramos agora um outro cone, contido em um espaço de dimensão apenas  $m$ , definido como

$$K_C := \{Cx : x \in K\}.$$

Nesta subseção, provamos que o polar de  $K_C$  é isomórfico ao polar de  $K_F$ . Consequentemente, assim como acontece com  $K_F$ , existe uma forte relação entre as facetas de  $K_C$  e as facetas de  $K$  que contêm  $F$ .

**Exemplo 4.2 (continuação)** Neste caso, temos

$$K_C = \text{cone} \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \\ \end{array} \right) = \text{cone} \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

A Figura 4.2(a) mostra uma representação gráfica deste cone.

**Exemplo 4.7.** Para ilustrar a diferença entre as complexidades dos cones  $K$  e  $K_C$ , apresen-

tamos um exemplo numérico maior. Sejam

$$K = \text{cone} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como  $F = \{x \in K : Cx = 0\}$  é uma face tridimensional de  $K$ , podemos determinar que facetas de  $K$  contêm  $F$  através do seguinte cone, que é consideravelmente mais simples do que  $K$ :

$$K_C = \text{cone} \left( \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \right) = \text{cone} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4.2(b) mostra a interseção deste cone com o hiperplano  $\{x : x_2 = 1\}$ .

O próximo lema mostra que o polar de  $K_C$  é exatamente o conjunto de vetores  $\pi$  tais que a desigualdade  $\pi^T Cx \leq 0$  é válida para  $K$ . Claramente, todas as desigualdades válidas da forma  $\pi^T Cx \leq 0$  induzem uma face de  $K$  que contém  $F$ .

**Lema 4.8.**  $(K_C)^\circ = \{\pi \in \mathbb{R}^m : \pi^T Cx \leq 0, \forall x \in K\}$ .

*Demonstração.* ( $\subseteq$ ) Seja  $\pi \in (K_C)^\circ$  e  $x \in K$ . Sabemos que  $Cx \in K_C$ . Logo,  $\pi^T Cx \leq 0$ .

( $\supseteq$ ) Seja  $\pi \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\pi^T Cx \leq 0, \forall x \in K$ , e seja  $k \in K_C$ . Sabemos que existe  $x \in K$  tal que  $Cx = k$ . Logo,  $\pi^T k = \pi^T Cx \leq 0$ . Concluímos que  $\pi \in (K_C)^\circ$ .  $\square$

Além disso, os polares de  $K_C$  e  $K_F$  são equivalentes, como mostra o lema seguinte. Em particular, isso significa que toda desigualdade indutora de faceta de  $K$  que contém  $F$  pode ser representada como um combinação das desigualdades  $Cx \leq 0$ .

**Lema 4.9.**  $(K_C)^\circ \cong (K_F)^\circ$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Tome  $y \in (K_C)^\circ$  e faça  $\pi^T := y^T C$ . Pelo Lema 4.8, sabemos que

$$\pi^T x = y^T Cx \leq 0, \forall x \in K.$$

Logo  $\pi \in K^\circ$ . Além disso,

$$\pi_R^T = y^T C^R = y^T C^L (C^L)^{-1} C^R = \pi_L^T (C^L)^{-1} C^R.$$

Concluimos, por consequência do Lema 4.6, que  $\pi \in (K_F)^\circ$ .

( $\leftarrow$ ) Tome  $\pi \in (K_F)^\circ$  e faça  $y^T := \pi_L^T (C^L)^{-1}$ . Temos, para todo  $x \in K$ ,

$$y^T Cx = y^T C^L x_L + y^T C^R x_R = \pi_L^T (C^L)^{-1} C^L x_L + \pi_L^T (C^L)^{-1} C^R x_R = \pi_L^T x_L + \pi_R^T x_R \leq 0,$$

onde a última igualdade segue do Lema 4.6. Logo, por consequência do Lema 4.8,  $y \in (K_C)^\circ$ . □

Como consequência dos dois lemas anteriores, temos o seguinte teorema, que mostra como transformar uma faceta de  $K_C$  em uma faceta de  $K$  que contém  $F$ , e também o contrário.

**Teorema 4.10.** *Se  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K$  que contém  $F$ , então  $\pi_L^T (C^L)^{-1} x \leq 0$  induz faceta de  $K_C$ . Se  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K_C$ , então  $\pi^T Cx \leq 0$  induz faceta de  $K$  que contém  $F$ .*

*Demonstração.* Se  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K$  que contém  $F$ , então, pelo Teorema 4.5, sabemos que  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $K_F$ . Pelo isomorfismo apresentado no Lema 4.9, concluimos que  $\pi^T (C^L)^{-1} y \leq 0$  induz faceta de  $K_C$ .

Por outro lado, se  $y^T x \leq 0$  induz faceta de  $K_C$ , então, pelo isomorfismo apresentado no Lema 4.9, a desigualdade  $y^T Cx \leq 0$  induz faceta de  $K_F$ . Pelo Teorema 4.5, concluimos que a faceta induzida por  $y^T Cx \leq 0$  contém a face  $F$ . □

**Exemplo 4.2 (continuação)** Pela Figura 4.2(a), podemos ver que as duas facetas de  $K_C$

são induzidas pelas desigualdades

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x \leq 0.$$

Logo, pelo Teorema 4.10, as duas facetas de  $K$  que contêm  $F$  são induzidas pelas desigualdades

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x \leq 0.$$

**Exemplo 4.7 (continuação)** Pela Figura 4.2(b), podemos ver que as quatro facetas de  $K_C$  são induzidas pelas desigualdades

$$\begin{bmatrix} 8 & -11 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} x \leq 0.$$

Logo, pelo Teorema 4.10, todas as seguintes desigualdades induzem faceta de  $K$ :

$$\begin{bmatrix} 8 & -11 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 & -5 & -20 & 6 & 16 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 3 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & -10 & 3 & 8 & -4 \\ -2 & -1 & -5 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} x \leq 0.$$

### 4.1.3 Faces de dimensão $\dim(K) - 2$

Consideramos agora o caso particular em que  $F$  possui dimensão  $\dim(K) - 2$ . Neste caso, sabemos que  $F$  está contido em exatamente duas facetas de  $K$ . Estamos interessados em determinar quais são estas facetas. Estudamos este caso particular porque, como veremos, ele estende para cones em geral o procedimento de levantamento sequencial de variáveis.

Ao longo desta subseção, sejam  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  um cone poliédrico (não necessariamente com dimensão plena),  $S \subseteq K$  um conjunto finito tal que  $\text{cone}(S) = K$ , e  $F$  uma face de  $K$  com dimensão  $\dim(K) - 2$ . Seja também  $C \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  uma matriz de posto cheio, com linhas  $C_1, C_2$ ,

tal que

$$F = \{x \in K : Cx = 0\}.$$

Considere também os conjuntos  $S_< = \{x \in S : C_2x < 0\}$ ,  $S_> = \{x \in S : C_2x > 0\}$ . Pelos resultados da subseção anterior, sabemos que as desigualdades que induzem facetas de  $K$  que contêm  $F$  são da forma

$$\alpha_1 C_1x + \alpha_2 C_2x \leq 0.$$

Os dois teoremas seguintes nos mostram como calcular os coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2$  quando um dos hiperplanos  $\{x : C_1x = 0\}$ ,  $\{x : C_2x = 0\}$  não corta o interior de  $K$ . Neste caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $C_2x \leq 0$  é válida para  $K$ . O segundo teorema teve a sua demonstração omitida, já que podemos obtê-lo a partir do primeiro se substituirmos  $C_1x = 0$  por  $-C_1x = 0$  na definição de  $F$ .

**Teorema 4.11.** *Suponha que a desigualdade  $C_2x \leq 0$  seja válida para  $S$ . Se existe  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} > 0, C_2\bar{x} = 0$ , então  $C_2x \leq 0$  induz faceta de  $K$ . Se não existe, então a desigualdade*

$$C_1x - \alpha C_2x \leq 0 \tag{4.5}$$

*induz faceta de  $K$ , onde*

$$\alpha = \min \left\{ \frac{C_1x}{C_2x} : x \in S_< \right\}.$$

*Demonstração.* Seja  $\{x^1, \dots, x^d\} \subseteq F$  um conjunto de  $\dim(K) - 2$  pontos linearmente independentes. Suponha que exista  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} > 0, C_2\bar{x} = 0$ . Como  $\bar{x} \in K \setminus F$ , o conjunto  $\{x^1, \dots, x^d, \bar{x}\} \subseteq K$  possui  $\dim(K) - 1$  pontos linearmente independentes que satisfazem a desigualdade válida  $C_2x \leq 0$  na igualdade. Concluimos que  $C_2x \leq 0$  induz faceta de  $K$ .

Suponha agora que não exista  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} > 0, C_2\bar{x} = 0$ . Tome  $x \in S$ . Se  $C_2x = 0$ , temos  $C_1x - \alpha C_2x = C_1x \leq 0$ . Se  $C_2x < 0$ , então  $\alpha \leq \frac{C_1x}{C_2x} \Rightarrow C_1x - \alpha C_2x \leq 0$ . A desigualdade (4.5), portanto, é válida para  $S$ , e, conseqüentemente, também é válida para  $K$ . Seja  $x^* \in S_<$  tal que  $\alpha = \frac{C_1x^*}{C_2x^*}$ . Não é difícil verificar que o conjunto  $\{x^1, \dots, x^d, x^*\} \subseteq K$  contém  $\dim(K) - 1$  pontos linearmente independentes que satisfazem (4.5) na igualdade. Concluimos que (4.5) induz faceta de  $K$ .  $\square$

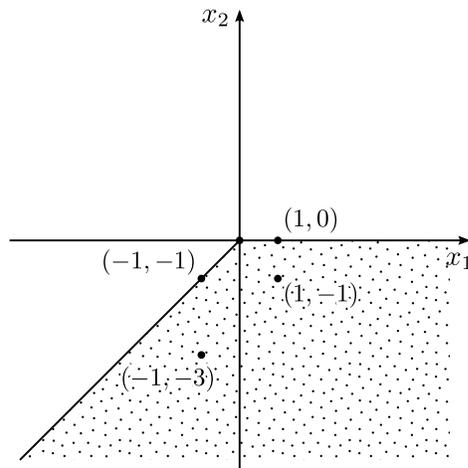


Figura 4.3: Aplicação dos Teoremas 4.11 e 4.12.

**Teorema 4.12.** *Suponha que a desigualdade  $C_2x \leq 0$  seja válida para  $S$ . Se existe  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} < 0, C_2\bar{x} = 0$ , então  $C_2x \leq 0$  induz faceta de  $K$ . Se não existe, então a desigualdade*

$$-C_1x + \alpha C_2x \leq 0$$

*induz faceta de  $K$ , onde*

$$\alpha = \max \left\{ \frac{C_1x}{C_2x} : x \in S_{<} \right\}.$$

**Exemplo 4.13.** Sejam

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que a desigualdade  $C_2x \leq 0$  é válida para  $K$ . Temos

$$K_C = \text{cone}(CS) = \text{cone} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \text{cone} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4.3 mostra o cone  $K_C$ , como definido na subseção anterior. Como existe  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} > 0, C_2\bar{x} = 0$ , então, pelo Teorema 4.11, uma das desigualdades que induz

faceta de  $K$  que contém  $F$  é  $x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 0$ . Pelo Teorema 4.12, a outra desigualdade é  $-(x_1 + x_3) + \alpha(x_1 + x_2 + 3x_3) \leq 0$ , onde

$$\alpha = \max \left\{ \frac{-1}{-3}, \frac{1}{-1}, \frac{-1}{-1} \right\} = 1.$$

Ou seja,  $x_2 + 2x_3 \leq 0$ .

Quando uma das desigualdades induz faceta de  $K$ , os teoremas podem ser simplificados.

**Corolário 4.14.** *Se  $C_2x \leq 0$  induz faceta de  $K$ , e  $C_1x \leq 0$  induz faceta de  $\{x \in K : C_2x = 0\}$ , então a desigualdade  $C_1x - \alpha C_2x \leq 0$  induz faceta de  $K$ , onde*

$$\alpha = \min \left\{ \frac{C_1x}{C_2x} : x \in S_{<} \right\}.$$

**Corolário 4.15.** *Se  $C_2x \leq 0$  induz faceta de  $K$ , e  $C_1x \geq 0$  induz faceta de  $\{x \in K : C_2x = 0\}$ , então a desigualdade  $-C_1x + \alpha C_2x \leq 0$  induz faceta de  $K$ , onde*

$$\alpha = \max \left\{ \frac{C_1x}{C_2x} : x \in S_{<} \right\}.$$

Restringindo ainda mais os corolários anteriores, obtemos uma versão para cones do levantamento sequencial de variáveis [42].

**Corolário 4.16.** *Seja  $S \subseteq \mathbb{B}^n$  um conjunto finito e  $S^0 = \{x \in S : x_1 = 0\}$ . Se  $\text{cone}(S^0)$  é faceta de  $\text{cone}(S)$  e  $\sum_{j=2}^n \pi_j x_j \leq 0$  induz faceta de  $\text{cone}(S^0)$ , então  $\sum_{j=2}^n \pi_j x_j - \alpha x_1 \leq 0$  induz faceta de  $\text{cone}(S)$ , onde*

$$\alpha = \max \left\{ \sum_{j=2}^n \pi_j x_j : x \in S, x_1 = 1 \right\}.$$

*Demonstração.* A desigualdade  $-x_1 \leq 0$  induz faceta de  $\text{cone}(S)$ , e a desigualdade

$$\sum_{j=2}^n \pi_j x_j \leq 0$$

induz faceta de  $\{x \in \text{cone}(S) : -x_1 = 0\}$ . Pelo Corolário 4.14, a desigualdade

$$\sum_{j=2}^n \pi_j x_j - \alpha'(-x_1) \leq 0$$

induz faceta de  $\text{cone}(S)$ , onde

$$\alpha' = \min \left\{ \frac{\sum_{j=2}^n \pi_j x_j}{-x_1} : x \in S, -x_1 < 0 \right\} = - \max \left\{ \sum_{j=2}^n \pi_j x_j : x \in S, x_1 = 1 \right\} = -\alpha.$$

□

Quando os hiperplanos  $\{x : C_1 x = 0\}$ ,  $\{x : C_2 x = 0\}$  cortam o interior de  $K$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que não existe  $\bar{x} \in K$  tal que  $C_1 \bar{x} > 0$  e  $C_2 \bar{x} > 0$ . O seguinte teorema mostra como calcular os coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2$ , neste caso.

**Teorema 4.17.** *Se as desigualdades  $C_1 x \leq 0, C_2 x \leq 0$  não são válidas para  $S$ , e não existe  $\bar{x} \in K$  tal que  $C_1 \bar{x} > 0, C_2 \bar{x} > 0$ , então as desigualdades*

$$C_1 x - \alpha_1 C_2 x \leq 0 \tag{4.6}$$

$$-\alpha_2 C_1 x + C_2 x \leq 0 \tag{4.7}$$

induzem facetas de  $K$ , onde

$$\alpha_1 = \max \left\{ \frac{C_1 x}{C_2 x} : x \in S, C_2 x > 0 \right\},$$

$$\alpha_2 = \max \left\{ \frac{C_2 x}{C_1 x} : x \in S, C_1 x > 0 \right\}.$$

*Demonstração.* É suficiente demonstrar que (4.6) induz faceta de  $K$ , já que o outro resultado pode ser obtido permutando-se as duas linhas de  $C$ . Temos duas afirmações:

**Afirmação 1.**  $\alpha_1 < 0$ .

*Demonstração da Afirmação 1.* Como  $C_1 x \leq 0$  para todo  $x \in S_{>}$ , então  $\alpha_1 \leq 0$ . Suponha, por contradição, que  $\alpha_1 = 0$ . Existe  $x^1 \in S_{>}$  tal que  $C_1 x^1 = 0$ . Além disso, como  $C_1 x \leq 0$  não é desigualdade válida, existe  $x^2 \in K$  tal que  $C_1 x^2 > 0$ . Sabemos que  $C_2 x^2 \leq 0$ . Se  $C_2 x^2 = 0$ ,

faça  $x^3 = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ . Se  $C_2x^2 < 0$ , faça  $\lambda = -\frac{C_2x^1}{C_2x^2}$ ,  $x^3 = \frac{2}{3}x^1 + \frac{1}{3}\lambda x^2$ . Em ambos os casos, temos  $C_1x^3 > 0, C_2x^3 > 0$ , o que contradiz uma das premissas do teorema. Logo,  $\alpha_1 < 0$ .

**Afirmção 2.**  $C_1x - \alpha_1C_2x \leq 0$  é uma desigualdade válida para  $K$ .

*Demonstração da Afirmção 2.* Tome  $x^1 \in S$ . Temos três possíveis casos. Se  $C_1x^1 \leq 0, C_2x^1 \leq 0$ , então, pela Afirmção 1,

$$C_1x^1 - \alpha_1C_2x^1 \leq C_1x^1 \leq 0.$$

Se  $C_1x^1 \leq 0, C_2x^1 > 0$ , então, pela definição de  $\alpha_1$ ,

$$\alpha_1 \geq \frac{C_1x^1}{C_2x^1} \Rightarrow C_1x^1 - \alpha_1C_2x^1 \leq 0.$$

Finalmente, suponha  $C_1x^1 > 0, C_2x^1 \leq 0$ . Suponha também, por contradição, que

$$C_1x^1 - \alpha_1C_2x^1 > 0.$$

Tome  $x^2 \in S_>$  tal que  $\alpha_1 = \frac{C_1x^2}{C_2x^2}$ . Note que, pela Afirmção 1,  $C_1x^2 < 0$ . Se  $C_2x^1 = 0$ , faça  $\lambda = -\frac{C_1x^1}{C_1x^2}$ ,  $x^3 = \frac{2}{3}x^1 + \frac{1}{3}\lambda x^2$ . Se  $C_2x^1 < 0$ , faça  $\lambda_1 = -\frac{C_1x^1}{C_1x^2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{C_2x^1}{C_2x^2}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2$ ,  $x^3 = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}\lambda x^2$ . Em ambos os casos, temos  $C_1x^3 > 0, C_2x^3 > 0$ , o que contradiz uma das premissas do teorema. Concluímos que  $C_1x^1 - \alpha_1C_2x^1 \leq 0$  para todo  $x^1 \in S$ . Como todo  $x \in K$  é uma combinação cônica de pontos de  $S$ , podemos facilmente verificar que  $C_1x - \alpha_1C_2x \leq 0$  é desigualdade válida para  $K$ .

Pela Afirmção 2, sabemos que (4.6) é desigualdade válida para  $K$ . Seja  $\{x^1, \dots, x^d\} \subseteq F$  um conjunto de  $\dim(K) - 2$  pontos linearmente independentes. Tome  $x^* \in S_>$  tal que  $\alpha_1 = \frac{C_1x^*}{C_2x^*}$ . O conjunto  $\{x^1, \dots, x^d, x^*\}$  possui  $\dim(K) - 1$  pontos linearmente independentes que satisfazem a desigualdade (4.6) na igualdade. Concluímos que (4.6) induz faceta de  $K$ .  $\square$

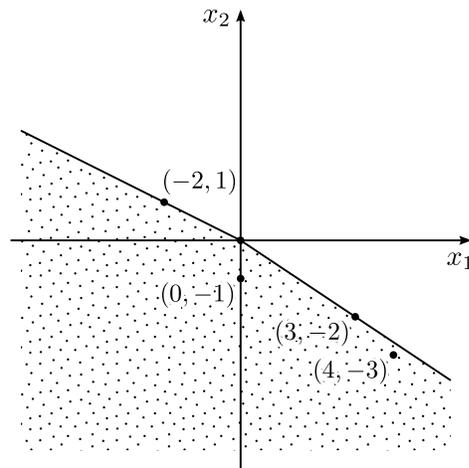


Figura 4.4: Aplicação do Teorema 4.17

**Exemplo 4.13 (continuação)** Faça agora

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este exemplo foi obtido a partir do Exemplo 4.2 multiplicando-se a segunda linha da matriz  $C$  por  $-1$ , para que nenhum  $\bar{x} \in K$  fosse tal que  $C_1\bar{x} > 0, C_2\bar{x} > 0$ . Note que as duas desigualdades cortam o interior de  $K$ . Temos

$$K_C = \text{cone}(CS) = \text{cone} \left( \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \text{cone} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4.4 mostra esse cone. Os coeficientes calculados no Teorema 4.17 são

$$\alpha_1 = \max \left\{ \frac{-2}{1} \right\} = -2$$

$$\alpha_2 = \max \left\{ \frac{-3}{4}, \frac{-2}{3} \right\} = -\frac{2}{3}$$

Logo, as duas desigualdades que induzem facetas de  $K$  que contêm  $F$  são

$$\begin{aligned} (2x_1 - x_2) - (-2)(-x_1 + x_2 + x_3) &= x_2 + 2x_3 \leq 0 \\ \frac{2}{3}(2x_1 - x_2) + (-x_1 + x_2 + x_3) &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

## 4.2 Versão para poliedros

Estendemos agora os resultados da seção anterior para poliedros em geral. Antes, fazemos uma breve revisão da técnica conhecida por **homogenização**.

### 4.2.1 Homogenização

Dado um poliedro não vazio  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , podemos associar a  $P$  um cone poliédrico

$$\text{hog}(P) = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} Ax + bz \leq 0 \\ z \leq 0 \end{array} \right\}$$

obtido através da homogenização das desigualdades que definem  $P$ . Existem fortes relações entre as propriedades do cone  $\text{hog}(P)$  e as propriedades do poliedro  $P$ , o que nos permite estender para poliedros em geral resultados obtidos para cones. Nesta subseção, revisamos aquelas relações que utilizamos nas subseções seguintes. Estamos particularmente interessados na correspondência entre as desigualdades que induzem facetas de  $\text{hog}(P)$  e as desigualdades que induzem facetas de  $P$ . Para uma abordagem mais geral desta técnica, veja [40, Capítulo 2, Seção 11] ou [4, Seção 6].

**Exemplo 4.18.** A Figura 4.5(a) mostra a homogenização do poliedro

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} -x \leq -1 \\ x \leq 2 \end{array} \right\},$$

enquanto a Figura 4.5(b) mostra a homogenização do poliedro

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} : -x \leq -1 \right\}.$$

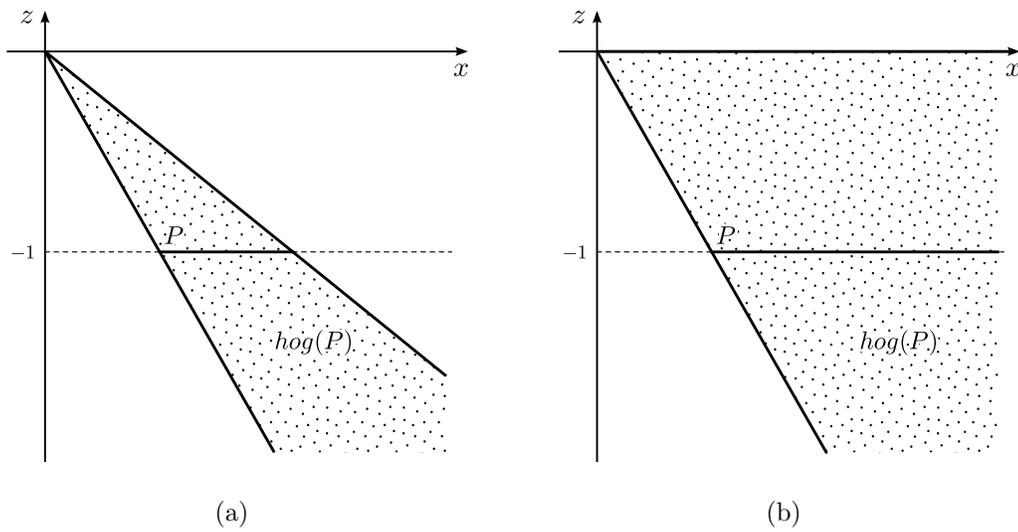


Figura 4.5: Exemplos de homogenização.

Ao longo desta subsecção, seja  $P$  um poliedro não vazio.

A proposição seguinte mostra que podemos facilmente converter desigualdades válidas de  $P$  em desigualdades válidas de  $\text{hog}(P)$ , e também o contrário.

**Proposição 4.19.** *A desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  é válida para  $P$  se e somente se a desigualdade  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  é válida para  $\text{hog}(P)$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Pelo lema de Farkas, existe  $y \in \mathbb{R}_+^m$  tal que  $y^T A = \pi^T$ ,  $y^T b \leq \pi_0$ . Seja  $(x, z) \in \text{hog}(P)$ . Temos  $\pi^T x + \pi_0 z = y^T Ax + \pi_0 z \leq y^T (Ax + bz) \leq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $x \in P$ . Como  $(x, -1) \in \text{hog}(P)$ , temos  $\pi^T x + \pi_0(-1) \leq 0$ . □

Estudamos agora a relação entre as faces de  $P$  e de  $\text{hog}(P)$ .

**Proposição 4.20.** *Se  $F = \{x \in P : Cx = d\}$  não é vazio, então*

$$\text{hog}(F) = \{(x, z) \in \text{hog}(P) : Cx + dz = 0\}.$$

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} \text{hog}(F) &= \text{hog} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} Ax \leq b \\ Cx \leq d \\ -Cx \leq -d \end{array} \right\} = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} Ax + bz \leq 0 \\ Cx + dz \leq 0 \\ -Cx - dz \leq 0 \\ z \leq 0 \end{array} \right\} \\ &= \{(x, z) \in \text{hog}(P) : Cx + dz = 0\} \end{aligned}$$

□

A proposição seguinte mostra que a dimensão de  $\text{hog}(P)$  é sempre uma unidade maior que a dimensão que  $P$ . Em particular, se  $P$  tem dimensão plena, então  $\text{hog}(P)$  também tem dimensão plena.

**Proposição 4.21.**  $\dim(\text{hog}(P)) = \dim(P) + 1$ .

*Demonstração.* ( $\geq$ ) Seja  $\{x^1, \dots, x^{d+1}\} \subseteq P$  um conjunto de  $\dim(P)+1$  pontos afim independentes. O conjunto  $\{(x^1, -1), \dots, (x^{d+1}, -1)\}$  está contido em  $\text{hog}(P)$  e contém  $\dim(P) + 1$  pontos linearmente independentes. Logo,  $\dim(\text{hog}(P)) \geq \dim(P) + 1$ .

( $\leq$ ) Suponha  $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = d\}$ , onde  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de posto  $n - \dim(P)$ , e  $d \in \mathbb{R}^m$ . Temos

$$\text{hog}(P) \subseteq \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : Cx + dz = 0\}.$$

Como  $P$  não é vazio, o sistema  $Cx = d$  tem solução, e portanto,

$$\text{posto}(C, d) = \text{posto}(C) = n - \dim(P) = (n + 1) - (\dim(P) + 1).$$

Logo,  $\dim(\text{hog}(P)) \leq \dim(P) + 1$ . □

**Proposição 4.22.** *Se  $F$  é uma face não vazia de  $P$ , então  $\text{hog}(F)$  é uma face de  $\text{hog}(P)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\pi^T x \leq \pi_0$  uma desigualdade válida para  $P$  tal que

$$F = \{x \in P : \pi^T x = \pi_0\}.$$

Pela Proposição 4.20, temos

$$\text{hog}(F) = \{x \in \text{hog}(P) : \pi^T x + \pi_0 z = 0\}.$$

Pela Proposição 4.19, a desigualdade  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  é válida para  $\text{hog}(P)$ . Logo,  $\text{hog}(F)$  é face de  $\text{hog}(P)$ .  $\square$

A correspondência entre as  $k$ -faces de  $P$  e as  $(k+1)$ -faces de  $\text{hog}(P)$  não é tão direta. No exemplo da Figura 4.5(b),  $\text{hog}(P)$  possui duas facetas, enquanto  $P$  possui apenas uma. Como mostra a proposição seguinte, apenas as  $(k+1)$ -faces de  $\text{hog}(P)$  que não estão contidas em  $\{(x, z) : z = 0\}$  possuem uma  $k$ -face correspondente em  $P$ . Por outro lado, todas as  $k$ -faces de  $P$  possuem uma  $(k+1)$ -face correspondente em  $\text{hog}(P)$ .

**Proposição 4.23.** *A desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  induz uma  $k$ -face não vazia de  $P$  se, e somente se, a desigualdade  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  induz uma  $(k+1)$ -face de  $\text{hog}(P)$  que não está contida em  $\{(x, z) : z = 0\}$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $F = \{x \in P : \pi^T x = \pi_0\}$  seja  $k$ -face não vazia de  $P$ . Pela Proposição 4.20,  $\text{hog}(F) = \{(x, z) \in \text{hog}(P) : \pi^T x + \pi_0 z = 0\}$ . Pela Proposição 4.19, a desigualdade  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  é válida para  $\text{hog}(P)$ . Logo,  $\text{hog}(F)$  é uma face de  $\text{hog}(P)$ . Pela Proposição 4.21,  $\dim(\text{hog}(F)) = \dim(F) + 1 = k + 1$ . Tome  $\bar{x} \in F$ . O ponto  $(\bar{x}, -1)$  pertence a  $\text{hog}(F)$ . Logo,  $\text{hog}(F)$  não está contida em  $\{(x, z) : z = 0\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que a desigualdade  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  induza uma  $(k+1)$ -face de  $\text{hog}(P)$  que não esteja contida em  $\{(x, z) : z = 0\}$ . Seja  $F = \{x \in P : \pi^T x = \pi_0\}$ . Pela Proposição 4.19, a desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  é válida para  $P$ . Logo,  $F$  é face de  $P$ . Tome  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{hog}(P)$  tal que  $\pi^T \bar{x} + \pi_0 \bar{z} = 0$  e  $\bar{z} < 0$ . O ponto  $(-\frac{\bar{x}}{\bar{z}})$  pertence a  $F$ . Logo,  $F$  não é vazio. Pela Proposição 4.20,  $\text{hog}(F) = \{(x, z) \in \text{hog}(P) : \pi^T x + \pi_0 z = 0\}$ . Por hipótese,  $\dim(\text{hog}(F)) = k + 1$ . Logo, pela Proposição 4.21,  $\dim(F) = k$ .  $\square$

Quando  $P$  tem dimensão plena, e estamos interessados apenas nas desigualdades que induzem facetas dos dois poliedros, podemos simplificar o teorema anterior.

**Corolário 4.24.** *Suponha que  $P$  tenha dimensão plena. A desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  induz faceta de  $P$  se e somente se  $\pi \neq 0$  e  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  induz faceta de  $\text{hog}(P)$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $F = \{x \in P : \pi^T x = \pi_0\}$  seja faceta de  $P$ . Suponha, por absurdo, que  $\pi = 0$ . Se  $\pi_0 = 0$ , então  $F = P$ . Se  $\pi_0 \neq 0$ , então  $F = \emptyset$ . Ambos os casos contradizem a premissa de que  $F$  é faceta de  $P$ . Logo,  $\pi \neq 0$ . Como  $F$  não é vazio, segue da Proposição 4.23 que  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  induz faceta de  $\text{hog}(P)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\pi \neq 0$  e que  $F' = \{(x, z) \in \text{hog}(P) : \pi^T x + \pi_0 z = 0\}$  seja faceta de  $\text{hog}(P)$ . Como  $\dim(P) = n$ , existem  $n$  pontos linearmente independentes  $(x^1, z_1), \dots, (x^n, z_n)$  em  $F'$ . Suponha, por absurdo, que  $z_p = 0$ , para todo  $p \in \{1, \dots, n\}$ . Logo,  $\{x^1, \dots, x^n\}$  é um conjunto de pontos linearmente independentes, e a única solução do sistema  $\pi^T x^i = 0, i = 1, \dots, n$ , é  $\pi = 0$ , o que contradiz uma das nossas premissas. Logo, existe  $p \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $z_p < 0$ . A face  $F'$ , portanto, não está contida em  $\{(x, z) : z = 0\}$ . Pela proposição 4.23,  $\pi^T x \leq \pi_0$  induz faceta de  $P$ .  $\square$

Quando  $P$  é um politopo, o Teorema 4.23 se torna ainda mais simples, já que existe uma correspondência perfeita entre as facetas de  $P$  e as facetas  $\text{hog}(P)$ .

**Corolário 4.25.** *Suponha que  $P$  seja um politopo com dimensão maior que zero. A desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  induz faceta de  $P$  se e somente se  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  induz faceta de  $\text{hog}(P)$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $F = \{x \in P : \pi^T x = \pi_0\}$  for faceta de  $P$ , então  $F$  não é vazio, e pela Proposição 4.23,  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  induz faceta de  $\text{hog}(P)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $F' = \{(x, z) \in \text{hog}(P) : \pi^T x + \pi_0 z = 0\}$  seja faceta de  $\text{hog}(P)$ . Pela Proposição 4.21,  $\text{hog}(P)$  tem dimensão maior que 1. Logo,  $F'$  tem dimensão maior que zero, e contém um ponto  $(\bar{x}, \bar{z})$  que não é a origem. Suponha, por absurdo, que  $\bar{z} = 0$ . Como  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{hog}(P)$ ,  $A\bar{x} \leq 0$ . Ou seja,  $\bar{x}$  é direção de recessão de  $P$ , o que contradiz o fato de  $P$  ser um politopo. Logo,  $\bar{z} < 0$ . A face  $F'$ , portanto, não está contida em  $\{(x, z) : z = 0\}$ . Pela proposição 4.23,  $\pi^T x \leq \pi_0$  induz faceta de  $P$ .  $\square$

Finalmente, descrevemos  $\text{hog}(P)$  a partir de uma representação interna de  $P$ . Note que o polar  $(\text{hog}(P))^\circ$  é igual ao cone  $P^\gamma$ , mencionado na introdução. Este cone é composto por todos os vetores  $(\pi, \pi_0)$  tais que a desigualdade  $\pi^T x \leq \pi_0$  é válida para  $P$ .

**Proposição 4.26** ([40]). *Se  $P = \text{conv}(S) + \text{cone}(R)$ , então*

$$\begin{aligned} (\text{hog}(P))^\circ &= \left\{ (\pi, \pi_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} \pi^T s - \pi_0 \leq 0, \quad \forall s \in S \\ \pi^T r \leq 0, \quad \forall r \in R \end{array} \right\}, \\ \text{hog}(P) &= \text{cone}((S \times \{-1\}) \cup (R \times \{0\})). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pela Proposição 4.19, sabemos que

$$(\text{hog}(P))^\circ = \{(\pi, \pi_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \pi^T x \leq \pi_0, \forall x \in P\}.$$

Como  $P$  é um poliedro,

$$(\text{hog}(P))^\circ = \left\{ (\pi, \pi_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} \pi^T s - \pi_0 \leq 0, \quad \forall s \in S \\ \pi^T r \leq 0, \quad \forall r \in R \end{array} \right\}.$$

Como  $(K^\circ)^\circ = K$  e  $K^\circ = \text{cone}(M^T)$ , para todo cone poliédrico  $K = \{x : Mx \leq 0\}$ , temos

$$\text{hog}(P) = \text{cone}((S \times \{-1\}) \cup (R \times \{0\})). \quad \square$$

### 4.2.2 Representação externa

Estendemos agora os resultados apresentados na Subseção 4.1.2 para poliedros em geral. Ao longo desta subseção, sejam  $P$  um poliedro com dimensão plena e  $F \subseteq P$  uma face própria de  $P$  com dimensão  $n - m$ , sejam  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  uma matriz com posto cheio e  $d \in \mathbb{R}^m$  um vetor tais que

$$F = \{x \in P : Cx = d\},$$

e seja também  $(L, R)$  uma partição de  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $C^L$  seja inversível. Estamos interessados em determinar os vetores  $\pi$  para os quais a desigualdade  $\pi^T Cx \leq \pi^T d$  induz uma faceta de  $P$ .

Seja  $H = \text{hog}(P)$ . Pela Proposição 4.20, sabemos que

$$\text{hog}(F) = \{x \in H : Cx + dz = 0\}.$$

Pela Proposição 4.22,  $\text{hog}(F)$  é face de  $\text{hog}(P)$ . Além disso, pela Proposição 4.21, sabemos que  $H$  tem dimensão plena, e que  $\dim(\text{hog}(F)) = \dim(H) - m$ . A matriz  $(C, d)$  tem posto cheio, pois  $C$  tem posto cheio. Logo, podemos utilizar os resultados da Subseção 4.1.2 para converter faces de  $\text{hog}(F)$  em faces de  $H$ .

Naquela subseção, estudamos o cone  $H_{C,d} = \{Cx + dz : (x, z) \in H\}$ . Nesta subseção, consideramos o fecho cônico

$$P_{C,d} = \text{cone}\{Cx - d : x \in P\}.$$

Como mostra o lema seguinte, os dois conjuntos são iguais.

**Lema 4.27.**  $P_{C,d} = H_{C,d}$ .

*Demonstração.* ( $\subseteq$ ) Tome  $k \in P_{C,d}$ . Existem  $x \in P, \lambda \in \mathbb{R}_+$  tais que  $k = \lambda(Cx - d)$ . Sabemos que  $(x, -1) \in H$ . Como  $H$  é um cone,  $(\lambda x, -\lambda) \in H$ . Temos

$$H_{C,d} \ni C(\lambda x) + d(-\lambda) = \lambda Cx - \lambda d = \lambda(Cx - d) = k.$$

( $\supseteq$ ) Tome  $k \in H_{C,d}$ . Existe  $(x, z) \in H$  tal que  $k = Cx + dz$ . Temos dois casos. Se  $z < 0$ , então  $-\frac{1}{z}x \in P$ . Logo,

$$P_{C,d} \ni C\left(-\frac{1}{z}x\right) - d = -\frac{1}{z}Cx - d.$$

Como  $P_{C,d}$  é um cone, e como  $-z \in \mathbb{R}_+$ ,

$$P_{C,d} \ni -z\left(-\frac{1}{z}Cx - d\right) = Cx + zd = k.$$

Suponha agora que  $z = 0$ , e tome  $x' \in F$ . Como  $Ax \leq 0$ , sabemos que  $x + x' \in P$ . Temos

$$P_{C,d} \ni C(x + x') - d = (Cx' - d) + Cx = Cx = Cx + dz = k.$$

□

**Exemplo 4.28.** Sejam

$$P = \text{conv} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

O cone

$$P_{C,d} = \text{cone} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é exatamente igual ao cone  $K_C$  do Exemplo 4.2.

A proposição seguinte nos fornece uma descrição do polar de  $P_{C,d}$ . Assim como antes, este polar é exatamente o conjunto de vetores  $\pi$  tais que  $\pi^T Cx \leq \pi^T d$  é desigualdade válida para  $P$ .

**Proposição 4.29.**  $(P_{C,d})^\circ = \{\pi \in \mathbb{R}^m : \pi^T(Cx - d) \leq 0, \forall x \in P\}$ .

*Demonstração.* ( $\subseteq$ ) Tome  $\pi \in (P_{C,d})^\circ, x \in P$ . Como  $Cx - d \in P_{C,d}$ , temos  $\pi^T(Cx - d) \leq 0$ .

( $\supseteq$ ) Seja  $\pi \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\pi^T(Cx - d) \leq 0$  para todo  $x \in P$ . Tome  $k \in P_{C,d}$ . Existe  $x \in P, \lambda \in \mathbb{R}_+$  tais que  $k = \lambda(Cx - d)$ . Temos,  $\pi^T k = \lambda \pi^T(Cx - d) \leq 0$ . Logo,  $\pi^T \in (P_{C,d})^\circ$ .  $\square$

Utilizando os resultados da Subseção 4.1.2 e as proposições de homogenização, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 4.30.** *Se  $\pi^T x \leq \pi_0$  induz faceta de  $P$  que contém  $F$ , então  $\pi_L^T (C^L)^{-1} x \leq 0$  induz faceta de  $P_{C,d}$ . Se  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $P_{C,d}$ , então  $\pi^T Cx \leq \pi^T d$  induz faceta de  $P$  que contém  $F$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\pi^T x \leq \pi_0$  induza faceta de  $P$  que contenha  $F$ . Pelo Corolário 4.24,  $\pi^T x + \pi_0 z \leq 0$  induz faceta de  $H$ . Pela Proposição 4.20,  $\pi^T x + \pi_0 z = 0$ , para todo  $(x, z) \in \text{hog}(F)$ . Logo, pelo Teorema 4.10,  $\pi_L^T (C^L)^{-1} x \leq 0$  induz faceta de  $H_{C,d}$ . Concluimos, pelo Lema 4.27, que  $\pi_L^T (C^L)^{-1} x \leq 0$  induz faceta de  $P_{C,d}$ .

Por outro lado, suponha que  $\pi^T x \leq 0$  induza faceta de  $P_{C,d}$ . Pelo Lema 4.27,  $\pi^T x \leq 0$  induz faceta de  $H_{C,d}$ . Pelo Teorema 4.10,  $\pi^T Cx + \pi^T dz \leq 0$  induz faceta de  $H$ . Como  $\pi \neq 0$  e  $C$  tem posto-linha cheio, então  $\pi^T C \neq 0$ . Pelo Corolário 4.24,  $\pi^T Cx \leq \pi^T d$  induz faceta

de  $P$ . Além disso, como  $Cx = d$  para todo  $x \in F$ , então  $\pi^T Cx = \pi^T d$  para todo  $x \in F$ . Concluimos que  $\pi^T Cx \leq \pi^T d$  induz faceta de  $P$  que contém  $F$ .  $\square$

### 4.2.3 Faces de dimensão $\dim(P) - 2$

Estendemos agora os resultados apresentados na Subseção 4.1.3 para politopos em geral. Ao longo desta subseção, sejam  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto finito,  $P = \text{conv}(S)$  o fecho convexo de  $S$ , e  $F \subseteq P$  uma face não vazia de  $P$  com dimensão  $\dim(P) - 2$ . Sejam  $C \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  uma matriz com posto cheio e  $d \in \mathbb{R}^2$  tais que

$$F = \{x \in P : Cx = d\}.$$

Considere também os conjuntos  $S_{<} = \{x \in S : C_2x < d_2\}$ ,  $S_{>} = \{x \in S : C_2x > d_2\}$ .

Os teoremas a seguir podem ser facilmente obtidos a partir dos resultados da Subseção 4.1.3 e dos teoremas de homogenização.

**Teorema 4.31.** *Suponha que a desigualdade  $C_2x \leq d_2$  seja válida para  $S$ . Se existe  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} > d_1$ ,  $C_2\bar{x} = d_2$ , então  $C_2x \leq d_2$  induz faceta de  $P$ . Se não existe, então a desigualdade*

$$(C_1x - d_1) - \alpha(C_2x - d_2) \leq 0 \tag{4.8}$$

induz faceta de  $P$ , onde

$$\alpha = \min \left\{ \frac{C_1x - d_1}{C_2x - d_2} : x \in S_{<} \right\}.$$

*Demonstração.* Sejam  $H = \text{hog}(P)$ ,  $S' = (S \times \{-1\})$ . Sabemos, pela Proposição 4.26, que  $H = \text{cone}(S')$ , e pela Proposição 4.22, que  $\text{hog}(F)$  é face de  $\text{hog}(P)$ . Pela Proposição 4.21,  $\dim(\text{hog}(F)) = \dim(H) - 2$ . Pela Proposição 4.20,

$$\text{hog}(F) = \{(x, z) \in H : Cx + dz = 0\}.$$

Como  $C$  tem posto 2, a matriz  $(C, d)$  também tem posto 2. O cone  $H$ , a face  $\text{hog}(F)$  e a matriz  $(C, d)$  satisfazem, portanto, todas as condições da Subseção 4.1.3. Seja

$$S'_{<} = \{(x, z) \in S' : C_2x + d_2z < 0\}.$$

Temos dois possíveis casos.

(*Caso 1*) Suponha que exista  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} > d_1, C_2\bar{x} = d_2$ . O ponto  $(\bar{x}, -1)$  pertence a  $S'$  e satisfaz  $C_1\bar{x} + d_1(-1) > 0, C_2\bar{x} + d_2(-1) = 0$ . Logo, pelo Teorema 4.11,  $C_2x + d_2z \leq 0$  induz faceta de  $H$ . Pelo Corolário 4.25,  $C_2x \leq d_2$  induz faceta de  $P$ .

(*Caso 2*) Suponha agora que não exista  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} > d_1, C_2\bar{x} = d_2$ . Então também não existe  $(\bar{x}, \bar{z}) \in S'$  tal que  $C_1\bar{x} + d_1\bar{z} > 0, C_2\bar{x} + d_2\bar{z} = 0$ . Pelo Teorema 4.11, a desigualdade

$$(C_1x + d_1z) - \alpha(C_2x + d_2z) \leq 0$$

induz faceta de  $H$ , onde

$$\alpha = \min \left\{ \frac{C_1x + d_1z}{C_2x + d_2z} : (x, z) \in S'_< \right\} = \min \left\{ \frac{C_1x - d_1}{C_2x - d_2} : x \in S_< \right\}.$$

Pelo Corolário 4.25, concluímos que a desigualdade

$$(C_1x - d_1) - \alpha(C_2x - d_2) \leq 0$$

induz faceta de  $P$ . □

As demonstrações dos demais teoremas são bastante semelhantes à demonstração do teorema anterior, e serão omitidas. Apresentamos apenas os enunciados dos teoremas.

**Teorema 4.32.** *Suponha que a desigualdade  $C_2x \leq d_2$  seja válida para  $S$ . Se existe  $\bar{x} \in S$  tal que  $C_1\bar{x} < d_1, C_2\bar{x} = d_2$ , então  $C_2x \leq d_2$  induz faceta de  $P$ . Se não existe, então a desigualdade*

$$-(C_1x - d_1) + \alpha(C_2x - d_2) \leq 0$$

induz faceta de  $P$ , onde

$$\alpha = \max \left\{ \frac{C_1x - d_1}{C_2x - d_2} : x \in S_< \right\}.$$

**Corolário 4.33.** *Se  $C_2x \leq d_2$  induz faceta de  $P$ , e  $C_1x \leq d_1$  induz faceta de  $\{x \in P : C_2x = d_2\}$ , então a desigualdade*

$$(C_1x - d_1) - \alpha(C_2x - d_2) \leq 0 \tag{4.9}$$

induz faceta de  $P$ , onde

$$\alpha = \min \left\{ \frac{C_1x - d_1}{C_2x - d_2} : x \in S_{<} \right\}.$$

**Corolário 4.34.** Se  $C_2x \leq d_2$  induz faceta de  $P$ , e  $C_1x \geq d_1$  induz faceta de  $\{x \in P : C_2x = d_2\}$ , então a desigualdade

$$-(C_1x - d_1) + \alpha(C_2x - d_2) \leq 0$$

induz faceta de  $P$ , onde

$$\alpha = \max \left\{ \frac{C_1x - d_1}{C_2x - d_2} : x \in S_{<} \right\}.$$

**Corolário 4.35.** Seja  $S \subseteq \mathbb{B}^n$  um conjunto finito e  $S^0 = \{x \in S : x_1 = 0\}$ . Se  $\text{conv}(S^0)$  é faceta de  $\text{conv}(S)$  e  $\sum_{j=2}^n \pi_j x_j \leq \pi_0$  induz faceta de  $\text{conv}(S^0)$ , então  $\sum_{j=2}^n \pi_j x_j - \alpha x_1 \leq \pi_0$  induz faceta de  $\text{conv}(S)$ , onde

$$\alpha = \max \left\{ \sum_{j=2}^n \pi_j x_j - \pi_0 : x \in S, x_1 = 1 \right\}.$$

**Teorema 4.36.** Se  $C_1x \leq d_1, C_2x \leq d_2$  não são válidas para  $S$ , e não existe  $\bar{x} \in P$  tal que  $C_1\bar{x} > d_1, C_2\bar{x} > d_2$ , então as desigualdades

$$\begin{aligned} (C_1x - d_1) - \alpha_1(C_2x - d_2) &\leq 0 \\ -\alpha_2(C_1x - d_1) + (C_2x - d_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

induzem facetas de  $P$ , onde

$$\alpha_1 = \max \left\{ \frac{C_1x - d_1}{C_2x - d_2} : x \in S, C_2x > d_2 \right\},$$

$$\alpha_2 = \max \left\{ \frac{C_2x - d_2}{C_1x - d_1} : x \in S, C_1x > d_1 \right\}.$$

## 5 POLITOPO DE CONJUNTO INDEPENDENTE

O **politopo de conjunto independente** de um grafo simples  $G$ , denotado por  $\text{STAB}(G)$ , é a envoltória convexa dos vetores de incidência de todos os conjuntos independentes de  $G$ .

$$\text{STAB}(G) := \text{conv} \left\{ x \in \mathbb{B}^{V(G)} : x_u + x_v \leq 1, \forall \{u, v\} \in E(G) \right\}.$$

O **problema do maior conjunto independente**, denotado por MSS, consiste em encontrar um conjunto independente de cardinalidade máxima em um grafo de entrada.

$$\text{MSS}(G) := \max \left\{ \sum_{v \in V(G)} x_v : x \in \text{STAB}(G) \right\}$$

O problema do maior conjunto independente possui aplicações em diversas áreas, como Visão Computacional, Casamento de Padrões e Biologia Molecular [10], e modela outros importantes problemas de otimização combinatória, como *empacotamento e partição de conjuntos* [36], e também *coloração de vértices* [19]. Por conta disto, ele tem sido bastante estudado e possui uma vasta literatura. Para uma visão geral de suas propriedades, aplicações, e algoritmos, veja [37], [10] e [28].

O politopo de conjunto independente também tem sido bastante estudado, não somente para o desenvolvimento de algoritmos poliédricos para o problema do maior conjunto independente, mas também por outros motivos. Lipták & László [33] argumentam, por exemplo, que facetas de STAB generalizam o conceito de  $\alpha$ -criticalidade em grafos. Atamturk et al. [2] utilizam desigualdades válidas de STAB para acelerar a resolução de problemas de programação inteira em geral, e Borndörfer & Weismantel [12] mostram que vários resultados sobre STAB podem ser transferidos para politopos associados a outros problemas de otimização

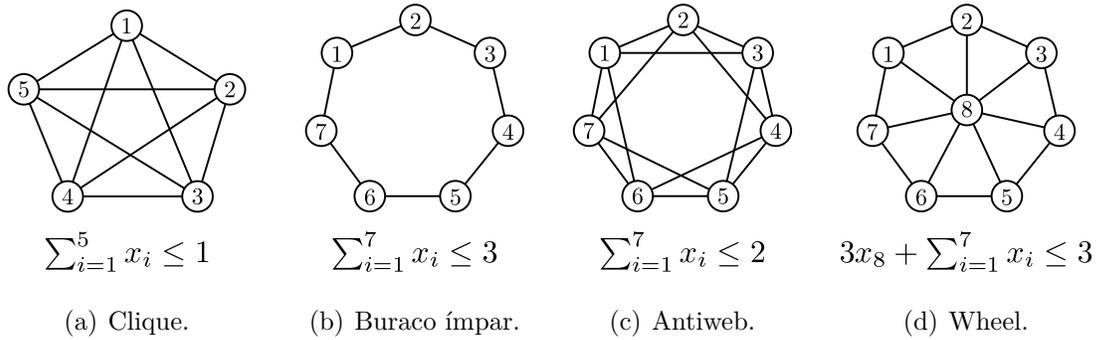


Figura 5.1: Alguns subgrafos que geram facetas de STAB.

combinatória.

Dando início ao estudo do politopo de conjunto independente, Padberg [36] identificou as primeiras classes de desigualdades que induzem facetas de STAB. Nemhauser & Trotter [34] demonstraram que, se  $H$  é um subgrafo induzido de  $G$ , então desigualdades que induzem facetas de  $\text{STAB}(H)$  podem ser convertidas em desigualdades que induzem facetas de  $\text{STAB}(G)$ . Muitos subgrafos dão origem a desigualdades interessantes. Alguns exemplos são cliques, buracos ímpares e wheels [36], anti-buracos ímpares [34], webs e anti-webs [41], wheels subdivididas [8], antiweb-wheels [16], ciclos de ciclos [12], grilles [21] e fans [22]. A Figura 5.1 ilustra alguns destes subgrafos.

Também foram descritos, desde então, procedimentos para gerar facetas de  $\text{STAB}(G)$  a partir de facetas de  $\text{STAB}(H)$  quando  $H$  é obtido a partir de  $G$  através de outras operações elementares, como subdivisão de arestas [43], subdivisão de estrelas [8], substituição de vértices por estrelas [22], substituição de vértices por *grilles* [25]. A Figura 5.2 ilustra algumas destas operações.

Neste capítulo, nós apresentamos um novo procedimento que unifica e generaliza vários dos procedimentos anteriores, incluindo subdivisão de arestas, subdivisão de estrelas e substituição de vértices por estrelas. Além de gerar diversas classes de desigualdades indutoras de facetas já conhecidas, como desigualdades de buracos, webs e wheels subdivididas, esse procedimento também gera novas classes de desigualdades indutoras de facetas que ainda não foram descritas na literatura.

Para obtermos esse procedimento, utilizamos as técnicas apresentadas nos Capítulos 3 e 4.

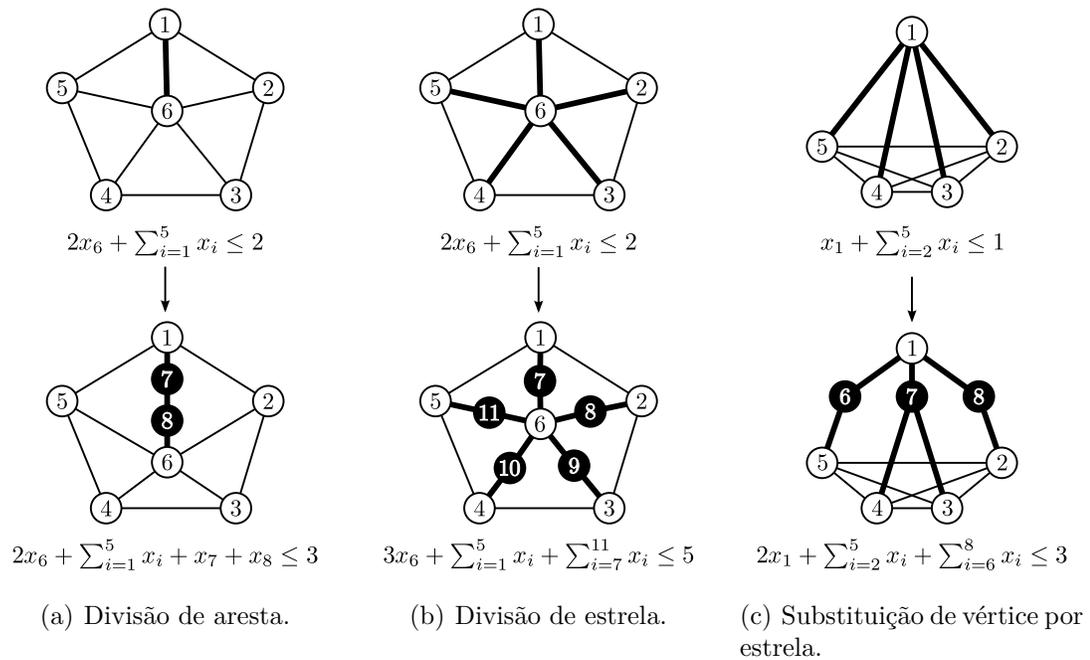


Figura 5.2: Alguns procedimentos que geram facetas de STAB.

Primeiro, identificamos facetas de  $\text{STAB}(G)$  que são afim-isomórficas a politopos de conjunto independente de grafos mais simples do que  $G$ , obtidos a partir de  $G$  através da contração das partições de certos grafos induzidos  $k$ -partidos. Em seguida, convertemos as facetas destas facetas em facetas de  $\text{STAB}(G)$ .

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 5.1, identificamos algumas classes de facetas de STAB que são isomórficas a politopos de conjunto independente de grafos mais simples. Uma destas classes dá origem ao procedimento de geração de facetas descrito por Nemhauser & Trotter [34]. Na Seção 5.2, identificamos uma outra classe de facetas, e apresentamos o novo procedimento de geração de facetas. Para definirmos precisamente esta classe de facetas, introduzimos, na Subseção 5.2.1, uma nova classe de hipergrafos, que chamamos de *hiperárvores fortes*, e estudamos algumas de suas propriedades. Finalmente, na Seção 5.3, consideramos o caso particular do procedimento quando o subgrafo induzido escolhido é bipartido.

## 5.1 Fixação de variáveis

Nesta seção, identificamos algumas classes de faces de  $\text{STAB}$  que são isomórficas a politopos de conjunto independente de grafos mais simples. Apesar de alguns resultados aqui apresentados serem clássicos, eles ilustram como as técnicas apresentadas nos Capítulos 3 e 4 podem ser utilizadas para criar procedimentos de geração de facetas.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. Quando interceptamos  $\text{STAB}(G)$  com um hiperplano  $\{x : x_v = 0\}$ , onde  $v \in V$ , obtemos uma face afim-isomórfica a  $\text{STAB}(G - v)$ . Esta classe de faces dá origem ao procedimento de geração de facetas descrito por Nemhauser & Trotter [34].

**Proposição 5.1.** *Para todo  $v \in V$ ,*

$$\text{STAB}(G - v) \cong F := \{x \in \text{STAB}(G) : x_v = 0\}.$$

*Demonstração.* Como  $\text{STAB}(G - v)$  e  $F$  possuem vértices inteiros, é suficiente descrever duas transformações afins que definam uma bijeção entre os pontos inteiros destes politopos.

( $\rightarrow$ ) Tome  $x \in \text{STAB}(G - v) \cap \mathbb{B}^{V \setminus \{v\}}$ , e faça, para todo  $i \in V$ ,

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = v \\ x_i & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos provar que  $\bar{x} \in F \cap \mathbb{B}^V$ . Claramente,  $\bar{x} \in \mathbb{B}^V$ . Além disso, sabemos que  $\bar{x}_v = 0$ . Resta provar que  $\bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ , para toda aresta  $\{r, s\}$  de  $G$ . Seja  $\{r, s\} \in E$ . Se  $r = v$ , temos  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = \bar{x}_v + \bar{x}_s = x_s \leq 1$ . Se  $s = v$ , temos um caso semelhante. Se  $r, s \neq v$ , então  $\{r, s\} \in E(G - v)$ . Temos  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = x_r + x_s \leq 1$ . Concluimos que  $\bar{x} \in F \cap \mathbb{B}^V$ .

( $\leftarrow$ ) Tome  $\bar{x} \in F \cap \mathbb{B}^V$ , e faça  $x_i := \bar{x}_i$ , para todo  $i \in V \setminus \{v\}$ . Vamos provar que  $x \in \text{STAB}(G - v) \cap \mathbb{B}^{V \setminus \{v\}}$ . Claramente,  $x \in \mathbb{B}^{V \setminus \{v\}}$ . Resta provar que  $x_r + x_s \leq 1$  para toda aresta  $\{r, s\}$  de  $G - v$ . Seja  $\{r, s\} \in E(G - v)$ . Como  $\{r, s\} \in E(G)$ , temos  $x_r + x_s = \bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ . Concluimos que  $x \in \text{STAB}(G - v) \cap \mathbb{B}^{V \setminus \{v\}}$ .  $\square$

**Teorema 5.2** ([34], Teorema 3.1). *Para todo  $v \in V$ , se*

$$\sum_{i \in V \setminus v} \pi_i x_i \leq \pi_0 \quad (5.1)$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G - v)$ , então*

$$\sum_{i \in V \setminus v} \pi_i x_i + \pi_v x_v \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , onde*

$$\pi_v = \pi_0 - \max \left\{ \sum_{i \in V \setminus v} \pi_i x_i : x \in \text{STAB}(G), x_v = 1 \right\}.$$

*Demonstração.* Seja

$$F := \{x \in \text{STAB}(G) : x_v = 0\}.$$

Pelo isomorfismo da Proposição 5.1 e pela Proposição 3.8, a desigualdade (5.1) induz faceta de  $F$ . Como  $-x_v \leq 0$  induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , então, pelo Corolário 4.33, a desigualdade

$$\left( \sum_{i \in V \setminus v} \pi_i x_i - \pi_0 \right) - \alpha (-x_v - 0) \leq 0$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \min \left\{ \frac{\sum_{i \in V \setminus v} \pi_i x_i - \pi_0}{-x_v - 0} : x \in \text{vert}(\text{STAB}(G)), -x_v < 0 \right\} \\ &= \pi_0 - \max \left\{ \sum_{i \in V \setminus v} \pi_i x_i : x \in \text{vert}(\text{STAB}(G)), x_v = 1 \right\} \\ &= \pi_0 - \max \left\{ \sum_{i \in V \setminus v} \pi_i x_i : x \in \text{STAB}(G), x_v = 1 \right\}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.3.** Seja  $G$  o grafo da Figura 5.3(b). O grafo  $G - \{6, 7\}$ , representado na Figura

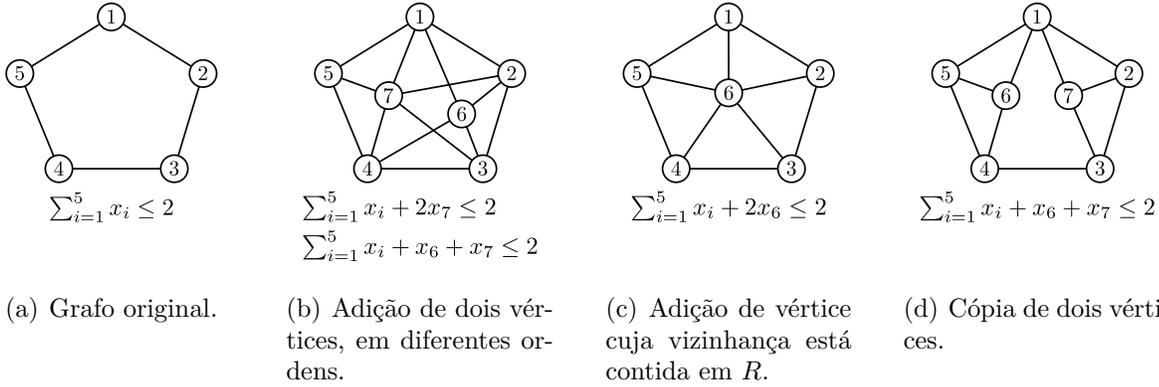


Figura 5.3: Aplicação do Teorema 5.2 e de seus corolários.

5.3(a), é um buraco ímpar. Logo,  $\sum_{i=1}^5 x_i \leq 2$  induz faceta de  $\text{STAB}(G - \{6, 7\})$ . Pelo Teorema 5.2, a desigualdade

$$\sum_{i=1}^5 x_i + \pi_6 x_6 \leq 2$$

define faceta de  $\text{STAB}(G - \{7\})$ , onde

$$\pi_6 = 2 - \max \left\{ \sum_{i=1}^5 x_i : x \in \text{STAB}(G - \{7\}), x_6 = 1 \right\}.$$

Este máximo é atingido pelo vetor de incidência do conjunto independente  $\{5, 6\}$ . Logo,  $\pi_6 = 1$ , e a desigualdade

$$\sum_{i=1}^5 x_i + x_6 \leq 2$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G - \{7\})$ . Aplicando novamente o Teorema 5.2, temos que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^5 x_i + x_6 + \pi_7 x_7 \leq 2$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , onde

$$\pi_7 = 2 - \max \left\{ \sum_{i=1}^5 x_i + x_6 : x \in \text{STAB}(G), x_7 = 1 \right\}.$$

Este máximo é atingido pelo vetor de incidência do conjunto  $\{6, 7\}$ . Logo,  $\pi_7 = 1$ , e a

desigualdade

$$\sum_{i=1}^5 x_i + x_6 + x_7 \leq 2$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ . Se invertermos a ordem de remoção dos vértices  $\{6, 7\}$ , obtemos outra desigualdade,

$$\sum_{i=1}^5 x_i + 2x_7 \leq 2,$$

que também induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

Em alguns casos, calcular o coeficiente  $\pi_v$  é uma tarefa trivial, como mostram os dois corolários seguintes.

**Corolário 5.4.** *Para todo  $v \in V$  e todo  $R \subseteq N(v)$ , se*

$$\sum_{i \in R} \pi_i x_i \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G - v)$ , então*

$$\sum_{i \in R} \pi_i x_i + \pi_0 x_v \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G)$*

**Exemplo 5.5.** Seja  $G$  o grafo da Figura 5.3(c). A desigualdade  $\sum_{i=1}^5 x_i \leq 2$  induz faceta de  $\text{STAB}(G - \{6\})$ . Note também que  $\{1, \dots, 5\} \subseteq N(6)$ . Pelo Corolário 5.4, concluímos que  $\sum_{i=1}^5 x_i + 2x_6 \leq 2$  induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

**Corolário 5.6.** *Se  $v_1, v_2 \in V$  são tais que  $N[v_1] = N[v_2]$ , e se*

$$\sum_{i \in V \setminus \{v_1, v_2\}} \pi_i x_i + \pi_{v_1} x_{v_1} \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G - v_2)$ , então*

$$\sum_{i \in V \setminus \{v_1, v_2\}} \pi_i x_i + \pi_{v_1} (x_{v_1} + x_{v_2}) \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .*

**Exemplo 5.7.** Seja  $G$  o grafo da Figura 5.3(d). A desigualdade  $\sum_{i=1}^5 x_i \leq 2$  induz faceta de  $\text{STAB}(G - \{6, 7\})$ . Note que  $N[6] = N[5]$  e  $N[7] = N[2]$ . Aplicando duas vezes o Corolário 5.6, concluímos que  $\sum_{i=1}^5 x_i + x_6 + x_7 \leq 2$  induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

Quando interceptamos  $\text{STAB}(G)$  com um hiperplano  $\{x : x_v = 1\}$ , onde  $v \in V$ , também obtemos uma face afim-isomórfica ao politopo de conjunto independente de um outro grafo.

**Proposição 5.8.** *Para todo  $v \in V$ ,*

$$\text{STAB}(G - N[v]) \cong F := \{x \in \text{STAB}(G) : x_v = 1\}$$

*Demonstração.* Como  $\text{STAB}(G - v)$  e  $F$  possuem vértices inteiros, é suficiente descrever duas transformações afins que definam uma bijeção entre os pontos inteiros destes politopos.

( $\rightarrow$ ) Seja  $x \in \text{STAB}(G - N[v]) \cap \mathbb{B}^{V \setminus N[v]}$ . Para todo  $i \in V$ , faça

$$\bar{x}_i := \begin{cases} 1 & \text{se } i = v \\ 0 & \text{se } i \in N(v), \\ x_i & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos provar que  $\bar{x} \in F \cap \mathbb{B}^V$ . Claramente,  $\bar{x} \in \mathbb{B}^V$ . Além disso,  $\bar{x}_v = 1$ . Resta provar que  $\bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ , para toda aresta  $\{r, s\}$  de  $G$ . Seja  $\{r, s\} \in E(G)$ . Se  $r = v$ , então  $s \in N(v)$ . Temos  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = 1 + 0 \leq 1$ . Suponha  $r, s \neq v$ . Se  $r \in N(v)$ , então  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = \bar{x}_s \leq 1$ . Se  $r, s \notin N(v)$ , então  $\{r, s\} \in E(G - N[v])$ . Logo,  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = x_r + x_s \leq 1$ . Em todos os casos,  $\bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ . Concluímos que  $\bar{x} \in F \cap \mathbb{B}^V$ .

( $\leftarrow$ ) Seja  $\bar{x} \in F \cap \mathbb{B}^V$ . Faça  $x_v := \bar{x}_v$ , para todo  $v \in V \setminus N[v]$ . Vamos provar que  $x \in \text{STAB}(G - N[v]) \cap \mathbb{B}^{V \setminus N[v]}$ . Claramente,  $x \in \mathbb{B}^{V \setminus N[v]}$ . Resta provar que  $x_r + x_s \leq 1$ , para toda aresta  $\{r, s\}$  de  $G - N[v]$ . Seja  $\{r, s\} \in E(G - N[v])$ . Como  $\{r, s\} \in E(G)$ , temos  $x_r + x_s = \bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ . Concluímos que,  $x \in \text{STAB}(G - N[v]) \cap \mathbb{B}^{V \setminus N[v]}$ .  $\square$

Estas faces não dão origem a nenhum procedimento de geração de facetas interessante, mas mostram, por exemplo, que o problema resolvido para calcular o coeficiente  $\pi_v$  no Teorema 5.2 é equivalente ao problema do maior conjunto independente ponderado. Utilizando as

Proposições 5.1 e 5.8, também podemos relacionar os vértices isolados de  $G$  com alguns eixos de simetria de  $\text{STAB}(G)$ .

**Corolário 5.9.** *Se  $v \in V$  é um vértice isolado, então*

$$\{x \in \text{STAB}(G) : x_v = 0\} \cong \{x \in \text{STAB}(G) : x_v = 1\}.$$

## 5.2 Subgrafos induzidos $k$ -partidos

Na Seção 5.1, mostramos que certas faces de  $\text{STAB}(G)$  são afim-isomórficas a politopos de conjunto independente de grafos mais simples do que  $G$ . Aquelas, porém, não são as únicas faces de  $\text{STAB}(G)$  que possuem esta propriedade.

Nesta seção, apresentamos uma outra classe de faces de  $\text{STAB}(G)$  que também são afim-isomórficas a politopos de conjunto independente de grafos mais simples, obtidos a partir de  $G$  através da contração das partições de certos grafos induzidos  $k$ -partidos. Esta classe de faces dá origem a um novo procedimento de geração de facetas que unifica e generaliza vários procedimentos descritos na literatura.

Primeiro, introduzimos uma nova classe de hipergrafos, que chamamos de *hiperárvores fortes*, e estudamos algumas de suas propriedades. Em seguida apresentamos a classe de faces e o procedimento de geração de facetas.

### 5.2.1 Hiperárvores fortes

Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  um hipergrafo. Dizemos que duas hiperarestas de  $\mathcal{H}$  são **fortemente adjacentes** se ambas possuem a mesma cardinalidade  $k$  e exatamente  $k - 1$  vértices em comum. O hipergrafo  $\mathcal{H}$  é uma **hiperárvore forte** se

- (i)  $\mathcal{E} = \{V\}$ ; ou
- (ii) Existe uma folha  $v \in V$  incidente a uma hiperaresta  $e \in \mathcal{E}$  tal que  $(V \setminus \{v\}, \mathcal{E} \setminus \{e\})$  é uma hiperárvore forte e  $e$  é fortemente adjacente a alguma outra hiperaresta de  $\mathcal{H}$ .

Um **hipercaminho forte** é uma hiperárvore forte que possui exatamente duas folhas. Dizemos que o hipercaminho conecta as duas folhas. Uma **sub-hiperárvore forte** é um sub-

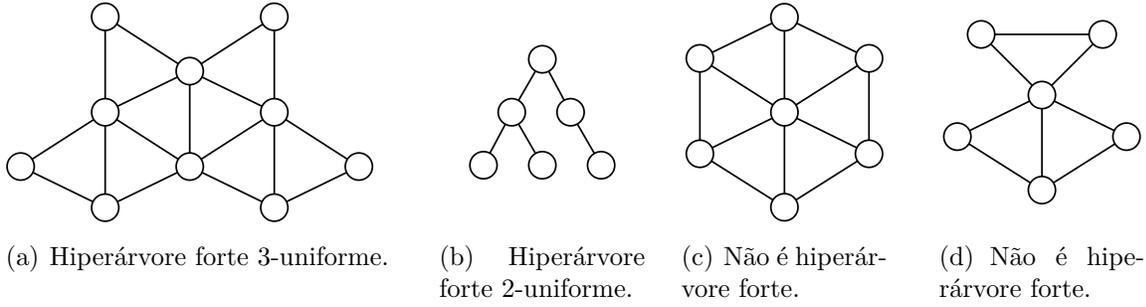


Figura 5.4: Exemplos e não-exemplos de hiperárvores fortes.

hipergrafo que é uma hiperárvore forte. A Figura 5.4 mostra alguns exemplos e não-exemplos de hiperárvores fortes (hiperarestas estão representadas como cliques maximais).

**Observação 5.10.** Para hipergrafos 2-uniformes não triviais, os conceitos aqui introduzidos são equivalentes aos conceitos usuais de adjacência, árvore e caminho.

A seguir, enunciamos algumas propriedades sobre hiperárvores fortes que serão úteis na subseção seguinte. Perceba que, diferente de outras hiperárvores, as hiperárvores fortes são muito semelhantes a árvores convencionais.

**Proposição 5.11.** *Toda hiperárvore forte é um hipergrafo uniforme.*

*Demonstração.* Por indução estrutural. Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  uma hiperárvore forte. Se  $\mathcal{E} = \{V\}$ , a proposição vale. Se não, existem  $v, e$  tais como descritos no Item (ii) da definição de hiperárvores fortes. Por hipótese de indução, todas as hiperarestas  $\mathcal{E} \setminus \{e\}$  possuem a mesma cardinalidade, digamos  $k$ . Como  $e$  é fortemente adjacente a uma destas hiperarestas, ela também possui cardinalidade  $k$ .  $\square$

**Proposição 5.12.** *Toda hiperárvore forte  $k$ -uniforme com  $n$  vértices possui exatamente  $n - k + 1$  hiperarestas.*

*Demonstração.* Por indução estrutural. Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  uma hiperárvore forte  $k$ -uniforme. Se  $\mathcal{E} = \{V\}$ , então  $n = k$ , e a proposição vale. Se não, existem  $v, e$  tais como descritos no Item (ii) da definição de hiperárvores fortes. Por hipótese de indução,  $(V \setminus \{v\}, \mathcal{E} \setminus \{e\})$  é uma hiperárvore forte  $k$ -uniforme, e portanto  $|\mathcal{E} \setminus \{e\}| = |V \setminus \{v\}| - k + 1$ , o que implica em  $|\mathcal{E}| = |V| - k + 1$ .  $\square$

**Proposição 5.13.** *A matriz de incidência de uma hiperárvore forte tem posto cheio  $|\mathcal{E}|$ .*

*Demonstração.* Por indução estrutural. Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  uma hiperárvore forte  $k$ -uniforme. Se  $\mathcal{E} = \{V\}$ , a matriz de incidência  $\mathcal{H}$  possui uma única coluna não nula, e portanto a proposição vale. Se não, existem  $v, e$  tais como descritos no Item (ii) da definição de hiperárvores fortes. A matriz de incidência de  $\mathcal{H}$  tem a forma

$$M_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} & & M & M_e \\ & & & \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde  $M$  é a matriz de adjacência de  $(V \setminus \{v\}, \mathcal{E} \setminus \{e\})$  e  $M_e$  é vetor de incidência de  $e \setminus \{v\}$ . Por hipótese de indução,  $M$  tem posto cheio. Logo,  $M_{\mathcal{H}}$  também tem posto cheio.  $\square$

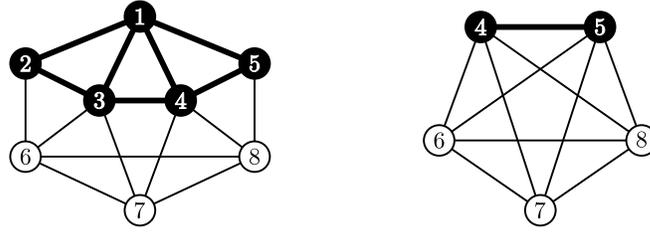
**Proposição 5.14.** *Toda hiperárvore forte que possui pelo menos dois vértices possui pelo menos duas folhas.*

*Demonstração.* Por indução estrutural. Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  uma hiperárvore forte. Se  $\mathcal{E} = \{V\}$ , todos os vértices de  $\mathcal{H}$  são folhas, e a proposição vale. Se não, existem  $v, e$  tais como descritos no Item (ii) da definição de hiperárvores fortes. Além disso,  $\mathcal{H} - v$  possui pelo menos dois vértices. Logo, por hipótese de indução,  $\mathcal{H} - v$  possui pelo menos duas folhas  $u_1, u_2$ . Se  $u_1$  e  $u_2$  forem adjacentes em  $\mathcal{H} - v$ , então  $\mathcal{H} - v$  possui exatamente uma hiperaresta, e  $\mathcal{H}$  possui exatamente duas folhas. Se  $u_1$  e  $u_2$  não forem adjacentes em  $\mathcal{H} - v$ , então  $e$  não contém  $u_1$ , sem perda de generalidade; os vértices  $v$  e  $u_1$  são, portanto, folhas de  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**Proposição 5.15.** *Em uma hiperárvore forte, existe um hipercaminho forte entre cada par de vértices não adjacentes.*

*Demonstração.* Por indução na quantidade de hiperarestas. Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  uma hiperárvore forte. Se  $\mathcal{E}$  for um conjunto unitário, todo par de vértices é adjacente, e a proposição é válida por vacuidade. Suponha que  $\mathcal{E}$  não seja um conjunto unitário, e tome dois vértices não adjacentes  $v_1, v_2$ . Temos dois casos possíveis:

(*Caso 1*) Se  $v_2$  não for uma folha, então, pela Proposição 5.14, existe um folha  $u$  em  $\mathcal{H}$  tal que  $u \neq v_1$ . Além disso,  $\mathcal{H} - u$  é uma hiperárvore forte com menos hiperarestas que  $\mathcal{H}$ , e



(a) Grafo original  $G$ , com a hiperárvore forte  $T$  em destaque.

(b) Grafo modificado  $G'$

Figura 5.5: Aplicação do Teorema 5.20.

existe em  $\mathcal{H} - u$ , por hipótese de indução, um hipercaminho forte que conecta  $v_1$  e  $v_2$ . Este hipercaminho forte pertence a  $\mathcal{H}$ .

(Caso 2) Se  $v_1$  e  $v_2$  forem ambos folhas, ou existe uma terceira folha  $u$ , e podemos aplicar raciocínio semelhante ao anterior; ou não existe uma terceira folha, e  $\mathcal{H}$  é, por definição, um hipercaminho forte que conecta  $v_1$  e  $v_2$ .  $\square$

## 5.2.2 Caso geral

Descrevemos agora uma outra classe de faces que são afim-isomórficas a politopos do conjunto independente de grafos mais simples do que  $G$ , e o procedimento de geração de facetas ao qual esta classe dá origem.

Ao longo desta subseção, sejam  $G = (V, E)$  um grafo simples, e  $T = (V_T, \mathcal{Q}_T)$  uma sub-hiperárvore forte  $k$ -uniforme de  $\mathcal{C}(G)$ , o hipergrafo-clique de  $G$ . Suponha que  $G[V_T]$  seja um subgrafo  $k$ -partido, e seja  $V_1, \dots, V_k$  uma  $k$ -partição de  $G[V_T]$ . Suponha também que nenhum  $v \in V_0 := V \setminus V_T$  possua vizinhos em todas as classes  $V_1, \dots, V_k$ . Nesta subseção, demonstramos que, sob certas condições, a face

$$F_T := \{x \in \text{STAB}(G) : x_Q = 1, \forall Q \in \mathcal{Q}_T\},$$

onde  $x_Q := \sum_{q \in Q} x_q$ , é afim-isomórfica ao politopo de conjunto independente do grafo  $G' = (V', E')$ , obtido a partir de  $G$  através da remoção dos vértices de  $V_k$  e da identificação de cada conjunto  $V_i$  em um vértice  $v_i \in V_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ .

**Exemplo 5.16.** Seja  $G$  o grafo da Figura 5.5(a), e seja  $T$  a hiperárvore forte com hiperarestas  $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}\}$ . Note que  $G[V_T]$  é um grafo 3-partido, com classes

$$V_1 = \{2, 4\},$$

$$V_2 = \{3, 5\},$$

$$V_3 = \{1\}.$$

Nesta subsecção, mostramos que a face

$$F_T := \left\{ x \in \text{STAB}(G) : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 1 \end{array} \right\}$$

é afim-isomórfica a  $\text{STAB}(G')$ , o politopo associado ao grafo da Figura 5.5(b).

Para demonstrarmos esse resultado, utilizamos um lema auxiliar. Ele diz que, quando adicionamos as restrições  $x_Q = 1$  a  $\text{STAB}(G)$ , cada conjunto  $V_1, \dots, V_k$  se comporta como um único vértice: se escolhermos um vértice de um dos conjuntos  $V_1, \dots, V_k$ , precisamos escolher todos os demais vértices deste mesmo conjunto; se não escolhermos um vértice de um conjunto, também não podemos escolher nenhum outro vértice deste mesmo conjunto.

**Lema 5.17.** *Se  $x \in F_T$  então  $x_u = x_v, \forall u, v \in V_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .*

*Demonstração.* Existe um hipercaminho forte  $Q_1, \dots, Q_p$  em  $T$  que conecta  $u, v$ . Vamos demonstrar por indução em  $p$  que  $x_u = x_v$ . Se  $p = 2$ , então  $x_{Q_1} - x_{Q_2} = x_u - x_v = 0$ . Se  $p > 2$  então existe  $w \in V_i \cap Q_2$  tal que  $w \neq u, v$ . Como  $Q_1, Q_2$  é um hipercaminho forte de tamanho 2 que conecta  $u, w$ , temos  $x_u = x_w$ . Seja  $s = \max\{j : w \in Q_j\}$ . Sabemos que  $Q_s, \dots, Q_p$  é um hipercaminho forte com menos que  $p$  hiperarestas que conecta dois vértices de  $V_i$ . Por hipótese de indução,  $x_w = x_v$ . Logo,  $x_u = x_v$ .  $\square$

**Proposição 5.18.** *Se nenhum  $v \in V_0$  possui vizinhos em  $V_k$ , então  $F_T \cong \text{STAB}(G')$ .*

*Demonstração.* Como  $\text{STAB}(G')$  e  $F_T$  possuem vértices inteiros, é suficiente descrever duas transformações afins que definam uma bijeção entre os pontos inteiros destes politopos.

( $\rightarrow$ ) Seja  $x \in \text{STAB}(G') \cap \mathbb{B}^{V'}$ . Para cada  $u \in V$ , faça

$$\bar{x}_u = \begin{cases} x_u & \text{se } u \in V_0 \\ x_{v_i} & \text{se } u \in V_i, i \in \{1, \dots, k-1\} \\ 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_{v_i} & \text{se } u \in V_k \end{cases}$$

Vamos demonstrar que  $\bar{x} \in F_T \cap \mathbb{B}^V$ . É fácil ver que  $\bar{x}_u \in \mathbb{B}$ , para todo  $u \in V \setminus V_k$ . Como  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  é uma clique em  $G'$ , então  $\sum_{i=1}^{k-1} x_{v_i} \in \{0, 1\}$ . Logo  $\bar{x}_u \in \mathbb{B}$ , para todo  $u \in V_k$ . Concluimos que  $\bar{x} \in \mathbb{B}^V$ . Resta provar que  $\bar{x}_Q = 1$ , para todo  $Q \in \mathcal{Q}_T$ , e que  $\bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ , para toda aresta  $\{r, s\}$  de  $G$ . Seja  $Q \in \mathcal{Q}_T$ . Como  $Q$  contém exatamente um vértice de cada  $V_1, \dots, V_k$ , temos

$$\bar{x}_Q = \sum_{i=1}^{k-1} x_{v_i} + \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_{v_i}\right) = 1.$$

Tome  $\{r, s\} \in E$ . Suponha que  $r \in V_0$ . Se  $s \in V_0$ , então  $\{r, s\} \in E'$ , e temos  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = x_r + x_s \leq 1$ . Se não, então  $s \in V_i$ , para algum  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , pois  $r$  não possui vizinhos em  $V_k$ . Além disso,  $\{r, v_i\} \in E'$ . Temos  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = x_r + x_{v_i} \leq 1$ . Suponha agora que  $r, s \notin V_0$ . Se  $r \in V_k$ , então  $s \in V_j$ , para algum  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ , e temos

$$\bar{x}_r + \bar{x}_s = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_{v_i} + x_{v_j} = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} x_{v_i} \leq 1.$$

Se  $r, s \notin V_k$ , então  $r \in V_i, s \in V_j$ , para  $i, j$  distintos pertencentes a  $\{1, \dots, k-1\}$ . Como  $\{v_i, v_j\} \in E'$ , temos  $\bar{x}_r + \bar{x}_s = x_{v_i} + x_{v_j} \leq 1$ . Em todos os casos,  $\bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ . Concluimos que  $\bar{x} \in F_T \cap \mathbb{B}^V$ .

( $\leftarrow$ ) Seja  $\bar{x} \in F_T \cap \mathbb{B}^V$ . Faça  $x_v := \bar{x}_v$ , para cada  $v \in V'$ . Vamos provar que  $x \in \text{STAB}(G') \cap \mathbb{B}^{V'}$ . Claramente,  $x \in \mathbb{B}^{V'}$ . Resta provar que  $x_r + x_s \leq 1$ , para toda aresta  $\{r, s\}$  de  $G'$ . Seja  $\{r, s\} \in E'$ . Suponha que  $r \in V_0$ . Se  $s \in V_0$ , então  $\{r, s\} \in E$ , e temos  $x_r + x_s = \bar{x}_r + \bar{x}_s \leq 1$ . Se não, então  $s = v_i$ , para algum  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Além disso, existe  $\hat{i} \in V_i$  tal que  $\{r, \hat{i}\} \in E$ . Pelo Lema 5.17, temos  $\bar{x}_{v_i} = \bar{x}_{\hat{i}}$ . Logo,  $x_r + x_s = \bar{x}_r + \bar{x}_{v_i} = \bar{x}_r + \bar{x}_{\hat{i}} \leq 1$ . Suponha agora que  $r, s \notin V_0$ . Então  $r = v_i, s = v_j$ , para  $i, j$  distintos pertencentes a  $\{1, \dots, k-1\}$ . Além disso, existem  $\hat{i} \in V_i, \hat{j} \in V_j$  tais que  $\{\hat{i}, \hat{j}\} \in E$ .

Logo,  $x_r + x_s = \bar{x}_{v_i} + \bar{x}_{v_j} = \bar{x}_i + \bar{x}_j \leq 1$ . Em todos os casos,  $x_r + x_s \leq 1$ . Concluimos que  $x \in \text{STAB}(G') \cap \mathbb{B}^{V'}$ .  $\square$

Para convertermos sequencialmente facetas de  $\text{STAB}(G')$  em facetas de  $\text{STAB}(G)$ , precisamos de um lema sobre a dimensão de  $F_T$ .

**Lema 5.19.**  $F_T$  tem dimensão  $|V| - |\mathcal{Q}_T|$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 5.13, a matriz de incidência de  $T$  tem posto  $|\mathcal{Q}_T|$ . Logo,  $\dim(F_T) \leq |V| - |\mathcal{Q}_T|$ . Tome  $i \in \{1, \dots, k\}$  e seja  $x^i$  o vetor de incidência de  $V_i$ . Claramente,  $x^i \in \text{STAB}(G)$ . Vamos demonstrar que  $x^i_Q = 1$ , para todo  $Q \in \mathcal{Q}_T$ . Suponha que exista  $Q$  tal que  $x^i_Q = 0$ . Pelo princípio da casa dos pombos, dois vértices de  $Q$  pertencem a alguma outra classe  $V_j$ , mas isso contradiz o fato de que  $V_j$  é um conjunto independente. Logo  $x^i \in F_T$ . Tome  $v \in V_0$ . Existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $v$  não possui vizinhos em  $V_i$ . Seja  $y^v = x^i + \mathbf{e}_v$ . É fácil ver que  $y^v \in F_T$ . Os pontos  $\{x^i\}_{i=1}^k \cup \{y^v\}_{v \in V_0}$  são afim independentes. Isto demonstra que  $\dim(F_T) \geq |V_0| + k - 1 = |V| - |\mathcal{Q}_T|$ .  $\square$

**Teorema 5.20.** *Suponha que nenhum  $v \in V_0$  possua vizinhos em  $V_k$ . Seja  $Q_1, \dots, Q_r$  uma ordenação de  $\mathcal{Q}_T$  tal que, para todo  $s \leq r$ , o hipergrafo induzido por  $Q_s, \dots, Q_r$  também seja uma hiperárvore forte. Se*

$$\sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_{v_i} x_{v_i} \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G')$ , então*

$$\sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_{v_i} x_{v_i} + \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_{Q_i} - 1) \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , onde, para todo  $t \in \{1, \dots, r\}$ ,*

$$\alpha_t := \max \left\{ \sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_{v_i} x_{v_i} + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i (x_{Q_i} - 1) : x \in P_t \right\} - \pi_0$$

$$P_t := \left\{ x \in \text{STAB}(G) : \begin{array}{l} x_{Q_t} = 0 \\ x_{Q_i} = 1, \quad \text{para } i = t+1, \dots, r \end{array} \right\}.$$

*Demonstração.* Para cada  $t \in \{0, \dots, r\}$ , seja

$$\begin{aligned} F_t &:= \{x \in \text{STAB}(G) : x_{Q_i} = 1, \text{ para } i = t + 1, \dots, r\}, \\ f_t(x) &:= \sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_{v_i} x_{v_i} + \sum_{i=1}^t \alpha_i (x_{Q_i} - 1). \end{aligned}$$

Vamos demonstrar, por indução em  $t$ , que  $f_t(x) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_t$ . Pela Proposição 5.18,  $F_0 \cong \text{STAB}(G')$ . Por esse isomorfismo afim e pela Proposição 3.8,  $f_0(x) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_0$ . Tome  $t \in \{1, \dots, r\}$ . Pelo Lema 5.19,  $\dim(F_{t-1}) = \dim(F_t) - 1$ , e como  $F_{t-1} = \{x \in F_t : x_{Q_t} = 1\}$ , sabemos que  $x_{Q_t} \leq 1$  induz faceta de  $F_t$ . Por hipótese de indução,  $f_{t-1}(x) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{t-1}$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade

$$(f_{t-1}(x) - \pi_0) - \alpha'_t (x_{Q_t} - 1) \leq 0$$

induz faceta de  $F_t$ , onde

$$\begin{aligned} \alpha'_t &= \min \left\{ \frac{f_{t-1}(x) - \pi_0}{x_{Q_t} - 1} : x \in \text{vert}(F_t), x_{Q_t} < 1 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{f_{t-1}(x) - \pi_0}{x_{Q_t} - 1} : x \in \text{vert}(F_t), x_{Q_t} = 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{f_{t-1}(x) - \pi_0}{x_{Q_t} - 1} : x \in F_t, x_{Q_t} = 0 \right\} \\ &= \pi_0 - \max \{f_{t-1}(x) : x \in F_t, x_{Q_t} = 0\} \\ &= -\alpha_t \end{aligned}$$

Em particular,

$$f_r(x) = \sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_{v_i} x_{v_i} + \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_{Q_i} - 1) \leq \pi_0$$

induz faceta de  $F_r = \text{STAB}(G)$ . □

**Exemplo 5.16** (continuação) Como  $G'$  é uma clique,

$$\sum_{i=4}^8 x_i \leq 1$$

induz faceta de  $STAB(G')$ . Sejam  $Q_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_2 = \{1, 3, 4\}$ ,  $Q_3 = \{1, 4, 5\}$ . Pelo Teorema 5.20, a desigualdade

$$\sum_{i=4}^8 x_i + \alpha_1(x_1 + x_2 + x_3 - 1) + \alpha_2(x_1 + x_3 + x_4 - 1) + \alpha_3(x_1 + x_4 + x_5 - 1) \leq 1$$

induz faceta de  $STAB(G)$ , onde

$$\alpha_1 = \max \left\{ \begin{array}{l} x \in STAB(G), \\ \sum_{i=4}^8 x_i - 1 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_4 + x_5 = 1 \end{array} \end{array} \right\} = 1,$$

$$\alpha_2 = \max \left\{ \begin{array}{l} x \in STAB(G), \\ \sum_{i=1}^8 x_i - 2 : \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 1 \end{array} \end{array} \right\} = 1,$$

$$\alpha_3 = \max \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \sum_{i=5}^8 x_i - 3 : \begin{array}{l} x \in STAB(G), \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{array} \end{array} \right\} = 0.$$

Logo, a desigualdade

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \sum_{i=5}^8 x_i \leq 3$$

induz faceta de  $STAB(G)$ .

**Exemplo 5.21.** O Teorema 5.20 pode ser utilizado para encontrar facetas associadas a antiwebs e outros grafos semelhantes. Considere a  $(10, 3)$ -antiweb representada na Figura 5.6(a). Quando escolhermos a sub-hiperárvore forte destacada e aplicamos a transformação descrita nesta subseção, obtemos a  $(7, 3)$ -antiweb da Figura 5.6(b). Repetindo esse procedimento, obtemos uma  $(4, 3)$ -antiweb da Figura 5.6(c), que é uma clique. Aplicando repetidamente o Teorema 5.20, transformamos a desigualdade de clique  $\sum_{i=1}^4 x_i \leq 1$ , na desigualdade de

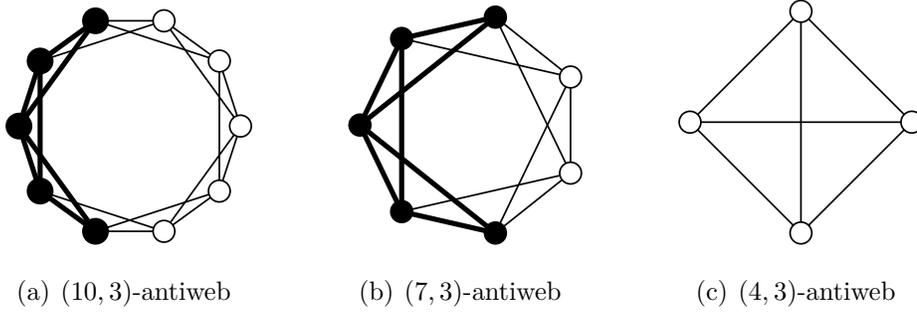


Figura 5.6: Aplicação do Teorema 5.20 a antiwebs.

antiweb  $\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 3$ .

### 5.3 Subgrafos induzidos bipartidos

Nesta seção, consideramos o caso particular do procedimento descrito na Seção 5.2 quando o subgrafo induzido escolhido é bipartido. Primeiro, consideramos grafos bipartidos quaisquer, incluindo as estrelas. Em seguida, consideramos apenas estrelas cuja ordem de escolha das arestas não altera a desigualdade resultante.

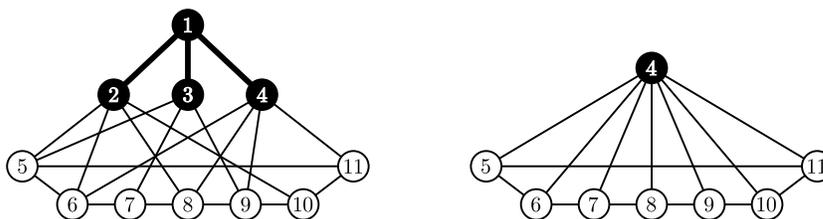
#### 5.3.1 Bipartidos quaisquer

Ao longo desta subseção, sejam  $G = (V, E)$  um grafo simples e  $T = (V_T, E_T)$  uma sub-árvore de  $G$ . Suponha que  $G[V_T]$  seja um subgrafo bipartido, e seja  $V_1, V_2$  a bipartição de  $G[V_T]$ . Suponha também que nenhum vértice  $v \in V_0 := V \setminus V_T$  possua vizinhos em ambos  $V_1$  e  $V_2$ . Sob certas condições, a face

$$F_T := \{x \in \text{STAB}(G) : x_e = 1, \forall e \in E_T\},$$

onde  $x_{\{u,v\}} := x_u + x_v$ , é afim-isomórfica ao politopo de conjunto independente do grafo  $G'$  obtido a partir de  $G$  através da remoção dos vértices de  $V_2$  e da identificação do conjunto  $V_1$  em um vértice  $v_1 \in V_1$ .

Os resultados seguintes são consequência direta da Proposição 5.18 e do Teorema 5.20, para o caso particular onde  $T$  é uma subárvore de  $G$ .



(a) Grafo original  $G$ , com a hiperárvore forte  $T$  em destaque.

(b) Grafo modificado  $G'$

Figura 5.7: Aplicação do Teorema 5.23 a estrelas.

**Proposição 5.22.** *Se nenhum  $v \in V_0$  possui vizinhos em  $V_2$ , então  $\text{STAB}(G') \cong F_T$ .*

**Teorema 5.23.** *Suponha que nenhum  $v \in V_0$  possua vizinhos em  $V_2$ . Seja  $e_1, \dots, e_r$  uma ordenação de  $E_T$  tal que o subgrafo induzido por  $e_1, \dots, e_s$ , para todo  $s \leq r$ , também é uma árvore. Se*

$$\sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \pi_{v_1} x_{v_1} \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G')$ , então*

$$\sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \pi_{v_1} x_{v_1} + \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_{e_i} - 1) \leq \pi_0$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , onde*

$$\alpha_t := \max \left\{ \sum_{v \in V_0} \pi_v x_v + \pi_{v_1} x_{v_1} + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i (x_{e_i} - 1) : x \in P_t \right\} - \pi_0,$$

$$P_t := \left\{ x \in \text{STAB}(G) : \begin{array}{l} x_{e_t} = 0 \\ x_{e_i} = 1, \quad \text{para } i = t + 1, \dots, r \end{array} \right\}.$$

**Exemplo 5.24.** Este exemplo, proveniente de [22], mostra que o Teorema 5.23 gera facetas de  $\text{STAB}(G)$  que o Teorema 3.6 (substituição de vértice por garra) de [22] não é capaz de gerar. Seja  $G$  o grafo da Figura 5.7(a), e seja  $T$  a árvore em destaque. Como o grafo  $G'$ , ilustrado na Figura 5.7(b), é uma wheel, sabemos que

$$3x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i \leq 3$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G')$ . Sejam  $e_1 = \{1, 2\}$ ,  $e_2 = \{1, 3\}$ ,  $e_3 = \{1, 4\}$ . Pelo Teorema 5.23, a desigualdade

$$3x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i + \alpha_1(x_1 + x_2 - 1) + \alpha_2(x_1 + x_3 - 1) + \alpha_3(x_1 + x_4 - 1) \leq 3$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , onde

$$\alpha_1 = \max \left\{ \begin{array}{l} x \in \text{STAB}(G), \\ 3x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i - 3 : \\ \quad x_1 + x_2 = 0, \\ \quad x_1 + x_3 = 1, \\ \quad x_1 + x_4 = 1 \end{array} \right\} = 1,$$

$$\alpha_2 = \max \left\{ \begin{array}{l} x \in \text{STAB}(G), \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i - 4 : \\ \quad x_1 + x_3 = 0, \\ \quad x_1 + x_4 = 1 \end{array} \right\} = 2,$$

$$\alpha_3 = \max \left\{ \begin{array}{l} x \in \text{STAB}(G), \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i - 6 : \\ \quad x_1 + x_4 = 0 \end{array} \right\} = -1.$$

Logo, a desigualdade

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i \leq 5$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ . Com diferentes ordenações de  $E_T$ , obtemos outras desigualdades,

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + \sum_{i=5}^{11} x_i \leq 5$$

que também definem facetas de  $\text{STAB}(G)$ .

**Observação 5.25.** Também podemos calcular os coeficientes  $\alpha_i$  simultaneamente, com o procedimento descrito na Subseção 4.2.2, como ilustramos a seguir.

**Exemplo 5.24 (continuação)** Seja  $F := \{x \in \text{STAB}(G) : Cx = d\}$ , onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que  $F$  é uma face de  $\text{STAB}(G)$  com dimensão  $|V| - 4$ . As desigualdades

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

definem facetas do cone  $P_{C,d} := \text{cone}\{Cx - d : x \in \text{STAB}(G)\}$ . Logo, as desigualdades

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

induzem facetas de  $\text{STAB}(G)$ .

### 5.3.2 Estrelas

Consideramos agora apenas aquelas estrelas cuja ordem de escolha das arestas não altera a desigualdade resultante.

Ao longo desta subseção, sejam  $G = (V, E)$  um grafo simples e  $T = (V_T, E_T) \subseteq G$  uma estrela induzida com vértice central  $u$  e demais vértices  $v_1, \dots, v_p$ . Suponha que  $u$  não possua vizinhos em  $H := V \setminus V_T$ . Seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  através da remoção do vértice  $u$  e da identificação dos vértices  $v_1, \dots, v_p$  no vértice  $v_1$ . Suponha também que a desigualdade

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + \pi_{v_1} x_{v_1} \leq \pi_0$$

induza faceta de  $\text{STAB}(G')$ , e faça, para todo  $R \subseteq \{1, \dots, p\}$ ,

$$Q_R := \left\{ x \in \text{STAB}(G) : \begin{array}{l} x_u = 0 \\ x_{v_i} = 0, \quad \forall i \in R \\ x_{v_i} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \setminus R \end{array} \right\},$$

$$M_R := \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h : x \in Q_R \right\}.$$

Para simplificar a notação, utilizaremos as seguintes abreviações

- (i)  $Q_{t,R} := Q_{\{t\} \cup R}$ ,
- (ii)  $Q_{r_1, \dots, r_t} := Q_{\{r_1, \dots, r_t\}}$ , para todo  $\{r_1, \dots, r_t\} \subseteq \{1, \dots, p\}$ ,
- (iii)  $M_{r_1, \dots, r_t} := M_{\{r_1, \dots, r_t\}}$ , para todo  $\{r_1, \dots, r_t\} \subseteq \{1, \dots, p\}$ ,
- (iv)  $N_i := N_G(v_i) \cap H$ , para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ .

**Teorema 5.26.** *Se, para todo  $R \subseteq \{1, \dots, p\}$ ,*

$$\sum_{i \in R} M_i - M_R \geq |R - 1|(\pi_0 - \pi_{v_1})$$

*então a desigualdade*

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + \sum_{i=1}^p (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_u + x_{v_i} - 1) - (\pi_{v_1} x_u - \pi_{v_1}) \leq \pi_0 \quad (5.2)$$

*induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .*

*Demonstração.* Podemos reescrever (5.2) como

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + \pi_{v_1} x_{v_1} + (M_1 - \pi_0)(x_u + x_{v_1} - 1) + \sum_{i=2}^p (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_u + x_{v_i} - 1) \leq \pi_0$$

Assim, é suficiente demonstrar que, para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$\alpha_i = \begin{cases} M_1 - \pi_0 & \text{se } i = 1 \\ M_t + \pi_{v_1} - \pi_0 & \text{se } i \in \{2, \dots, p\} \end{cases}$$

quando aplicamos o Teorema 5.23. Vamos provar esta identidade por indução em  $t$ . Quando  $t = 1$ , temos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h + \pi_{v_1} x_{v_1} : x \in P_1 \right\} - \pi_0 \\
&= \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h + \pi_{v_1} x_{v_1} : x \in Q_1 \right\} - \pi_0 \\
&= \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h : x \in Q_1 \right\} - \pi_0 \\
&= M_1 - \pi_0.
\end{aligned}$$

Tome  $t \in \{2, \dots, p\}$ , e suponha que a identidade vale para todo  $i \in \{1, \dots, t-1\}$ . Temos

$$\begin{aligned}
\alpha_t &= \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h + \pi_{v_1} x_{v_1} + (M_1 - \pi_0)(x_u + x_{v_1} - 1) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=2}^{t-1} (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_u + x_{v_i} - 1) : x \in P_t \right\} - \pi_0 \\
&= \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h + \sum_{i=1}^{t-1} (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_u + x_{v_i} - 1) + \right. \\
&\quad \left. - \pi_{v_1} x_u + \pi_{v_1} : x \in P_t \right\} - \pi_0 \\
&= \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h + \sum_{i=1}^{t-1} (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_{v_i} - 1) : x \in P_t \right\} + \pi_{v_1} - \pi_0 \\
&= \max \left\{ \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h + \sum_{i \in R} (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_{v_i} - 1) : x \in Q_{t,R} \right\} : \right. \\
&\quad \left. R \subseteq \{1, \dots, t-1\} \right\} + \pi_{v_1} - \pi_0 \\
&= \max \left\{ \max \left\{ \sum_{h \in H} \pi_h x_h : x \in Q_{t,R} \right\} - \sum_{i \in R} (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0) : \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R \subseteq \{1, \dots, t-1\} \Big\} + \pi_{v_1} - \pi_0 \\
& = \max \left\{ M_{t,R} - \sum_{i \in R} M_i - |R|(\pi_{v_1} - \pi_0) : R \subseteq \{1, \dots, t-1\} \right\} + \pi_{v_1} - \pi_0 \\
& = M_t + \pi_{v_1} - \pi_0. \quad \square
\end{aligned}$$

**Observação 5.27.** O Teorema 2 (subdivisão de estrela) de [8] é consequência do Teorema 3.11 de [22], que é, por sua vez, o Teorema 5.26 com a premissa adicional de que os conjuntos  $N_i$  são unitários e disjuntos.

Estudamos agora alguns casos particulares do Teorema 5.26.

**Corolário 5.28** ([22], Teorema 3.1). *Se*

$$(i) \quad p = 2,$$

$$(ii) \quad M_1 + M_2 \geq 2\pi_0 - \pi_{v_1},$$

*então a desigualdade*

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + \sum_{i=1}^2 (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_u + x_{v_i} - 1) - (\pi_{v_1} x_u - \pi_{v_1}) \leq \pi_0$$

*induz faceta de STAB( $G$ ).*

**Observação 5.29.** A Proposição 2 de [43] pode ser obtida a partir do Corolário 5.28 (ver Corolário 3.2 de [22]).

**Corolário 5.30** ([22], Teorema 3.6, Parte 1). *Se*

$$(i) \quad p = 3,$$

$$(ii) \quad M_1 + M_2 - M_{1,2} \geq \pi_0 - \pi_{v_1},$$

$$(iii) \quad M_1 + M_3 - M_{1,3} \geq \pi_0 - \pi_{v_1},$$

$$(iv) \quad M_2 + M_3 - M_{2,3} \geq \pi_0 - \pi_{v_1},$$

$$(v) \quad M_1 + M_2 + M_3 \geq 3\pi_0 - 2\pi_{v_1},$$

*então a desigualdade*

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + \sum_{i=1}^3 (M_i + \pi_{v_1} - \pi_0)(x_u + x_{v_i} - 1) - (\pi_{v_1} x_u - \pi_{v_1}) \leq \pi_0$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

Quando  $M_i = \pi_0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , as condições do Teorema 5.26 são automaticamente satisfeitas, como mostra o corolário seguinte.

**Corolário 5.31** ([21], Teorema 1). *Se  $M_i = \pi_0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , então a desigualdade*

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + (p-1)\pi_{v_1} x_u + \pi_{v_1} \left( \sum_{i=1}^p x_{v_i} \right) \leq \pi_0 + (p-1)\pi_{v_1}$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

**Corolário 5.32** ([43], Proposição 3). *Se*

(i)  $p = 2$ ,

(ii)  $M_1 = M_2 = \pi_0$ ,

então a desigualdade

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + \pi_{v_1} (x_u + x_{v_1} + x_{v_2}) \leq \pi_0 + \pi_{v_1}$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

**Observação 5.33.** O enunciado original da Proposição 3 de [43] contém a premissa adicional de que  $N_i$  são disjuntos.

Quando  $\bigcup_{i=1}^p N_i = H$ , temos necessariamente  $\pi_{v_1} = \pi_0$ . Podemos então obter versões alternativas dos corolários anteriores se adicionarmos a eles esta premissa e substituírmos  $\pi_{v_1}$  por  $\pi_0$  nas desigualdades, como ilustra o corolário seguinte.

**Corolário 5.34** ([22], Corolário 3.9, Parte 1). *Se*

(i)  $\bigcup_{i=1}^p N_i = H$ ,

(ii)  $M_i = \pi_0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,

então a desigualdade

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + (p-1)\pi_0 x_u + \pi_0 \left( \sum_{i=1}^p x_{v_i} \right) \leq p\pi_0$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

**Corolário 5.35** ([22], Corolário 3.9, Parte 2). *Se*

$$(i) \cup_{i=1}^p N_i = H,$$

(ii)  $N_i$  são cliques disjuntas,

então a desigualdade

$$\sum_{h \in H} \pi_h x_h + \left( \sum_{i=1}^p m_i - \pi_0 \right) x_u + \sum_{i=1}^p m_i x_{v_i} \leq \sum_{i=1}^p m_i$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ , onde  $m_i = \max\{\pi_v : v \in N_i\}$ , para  $i = 1, \dots, p$

**Observação 5.36.** A Proposição 1 de [43] pode ser obtida aplicando-se o Corolário 5.4 e, em seguida, o Corolário 5.35. O Teorema 2.3 de [17] também pode ser obtido a partir do Corolário 5.35 (ver [22]).

# 6 POLITOPO DE SUBGRAFO INDUZIDO $k$ -PARTIDO

O **problema do maior subgrafo induzido  $k$ -partido** consiste em encontrar  $k$  conjuntos independentes de um grafo de entrada cuja união tenha cardinalidade máxima. Este problema generaliza tanto o problema do maior conjunto independente, que estudamos no Capítulo 5, quanto o *problema do maior subgrafo induzido bipartido*.

O problema do maior subgrafo induzido bipartido, denotado por BISP, modela problemas que surgem no projeto de circuitos integrados [18, 23], e também problemas de Biologia Computacional que surgem na reconstrução de pares de haplótipos a partir de dados que contêm erros [32, 24]. Embora seja NP-difícil para grafos em geral, BISP pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos série-paralelos [7] e grafos planares cujo grau máximo é três [18]. Fouilhoux & Barahona [23] propõem uma formulação linear inteira para esse problema que utiliza uma quantidade exponencial de restrições, e estudam o politopo associado a esta formulação. Este politopo é um caso particular do *politopo dos subgrafos induzidos balanceados*, estudado por Barahona & Mahjoub [6, 7].

O problema do subgrafo induzido  $k$ -partido também é, naturalmente, NP-difícil, mas pode ser resolvido em tempo polinomial para a classe de grafos  $i$ -triangulados [1]. Campêlo & Corrêa [14] propõem uma formulação linear inteira para esse problema que utiliza uma quantidade polinomial de variáveis e restrições. Esta formulação se baseia na *formulação por representantes de cor*, proposta inicialmente para o problema de coloração de vértices [13], e utilizada, desde então, para modelar outros problemas relacionados a conjuntos independentes [15, 5].

Neste capítulo, estudamos o politopo do problema do subgrafo induzido  $k$ -partido asso-

ciado à formulação proposta por Campêlo & Corrêa. Na Seção 6.1, definimos precisamente esse politopo. Na Seção 6.2, mostramos que ele possui dimensão plena e identificamos suas facetas mais simples. Na Seção 6.3, mostramos que diversas de suas faces são afim-isomórficas a outros politopos, e apresentamos os procedimentos de geração de facetas aos quais estas faces dão origem. Finalmente, na Seção 6.4, identificamos duas classes de subgrafos que geram facetas deste politopo.

## 6.1 Formulação

Encontrar uma família de conjuntos independentes de um grafo simples é equivalente a encontrar uma família de cliques do complemento deste grafo. Seja, então,  $D = (V, A)$  uma orientação sem ciclos direcionados deste complemento. Se  $W \subseteq V$  é uma clique de  $D$ , então  $D[W]$  possui exatamente uma fonte. Dizemos que esta fonte **representa** tanto o conjunto  $W$ , como também os demais vértices de  $W$ , ou ainda que esta fonte é **representante** de  $W$  e dos demais vértices de  $W$ . A cada família de cliques  $\{W_1, \dots, W_p\}$ , podemos associar um vetor  $(x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A$  definido como:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ representa algum } W_1, \dots, W_p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ representa } j \text{ em algum } W_1, \dots, W_p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Neste capítulo, estudamos as propriedades do politopo  $P(D, k)$ , definido como a envoltória convexa de todos os vetores  $(x, y)$  que estão associados a alguma família formada por, no máximo,  $k$  cliques disjuntas de  $D$ , onde  $k \geq 1$ . Por conveniência, nos referimos a esse politopo por  $P$  quando  $D, k$  estão claros pelo contexto, e utilizamos as seguintes abreviações:

$$x_R := \sum_{r \in R} x_r \quad \forall R \subseteq V$$

$$y_R := \sum_{r \in R} y_r \quad \forall R \subseteq A$$

$$\begin{aligned}
y_{R,i} &:= \sum_{r \in R} y_{r,i} & \forall i \in V, \forall R \subseteq N_D^-(i) \\
y_{i,R} &:= \sum_{r \in R} y_{i,r} & \forall i \in V, \forall R \subseteq N_D^+(i)
\end{aligned}$$

**Observação 6.1.** Utilizar um grafo direcionado sem ciclos, ao invés de um grafo simples, remove a indecisão na escolha do representante de cada clique. Assim, somos capazes de associar cada família de cliques a exatamente um vetor inteiro de  $P(D, k)$ , e cada vetor inteiro de  $P(D, k)$  a exatamente uma família de cliques.

Uma definição equivalente para o politopo  $P(D, k)$  é a seguinte.

$$P(D, k) := \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_V & \leq k, \\ x_v + y_{A^-(v)} & \leq 1 \quad \forall v \in V \\ y_{v,S} & \leq x_v \quad \forall v \in V, \forall S \subseteq N_D^+(v) \text{ tal que } S \text{ é} \\ & \text{conjunto independente de } D \end{array} \right\}$$

A primeira restrição garante que no máximo  $k$  cliques sejam representadas. O segundo conjunto de restrições garante que cada vértice seja representado por ele mesmo ou por no máximo um outro vértice, e portanto, que as cliques sejam disjuntas. Estas restrições também impedem que vértices representantes sejam representados por outros vértices. Finalmente, o terceiro conjunto de restrições garante que cada vértice representante represente no máximo um vértice de cada conjunto independente, e também que cada vértice não-representante não represente nenhum vértice do grafo.

**Observação 6.2.** Não precisamos de todas as restrições  $y_{v,S} \leq x_v$ . Bastam aquelas relativas a conjuntos independentes de tamanho menor ou igual a dois. Incluímos todas as restrições na definição para simplificar as demonstrações das proposições nas seções seguintes. Limitando o tamanho dos conjuntos independentes, obtemos uma quantidade polinomial de restrições na formulação.

## 6.2 Propriedades básicas

Estudamos agora algumas propriedades básicas de  $P$ . Mostramos que ele tem dimensão plena e identificamos suas facetas mais simples. Mostramos, em particular, sob que condições as desigualdades da definição induzem facetas de  $P$ .

**Proposição 6.3.**  $P$  tem dimensão plena. Ou seja,  $\dim(P) = |V| + |A|$ .

*Demonstração.* Os seguintes  $|V| + |A| + 1$  pontos pertencem a  $P$  e são afim independentes:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{0}_{|V|}, \mathbf{0}_{|A|}) \\ &(\mathbf{e}_v, \mathbf{0}_{|A|}) && \forall v \in V \\ &(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_{v,u}) && \forall (v, u) \in A \end{aligned} \quad \square$$

**Proposição 6.4.** Para todo  $a \in A$ , a desigualdade  $y_a \geq 0$  induz faceta de  $P$ .

*Demonstração.* Como  $P \subseteq \mathbb{R}_+^V \times \mathbb{R}_+^A$ , a desigualdade é válida. Além disso, os seguintes  $|V| + |A|$  pontos pertencentes a  $P$  são afim independentes e satisfazem esta desigualdade na igualdade:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{0}_{|V|}, \mathbf{0}_{|A|}) \\ &(\mathbf{e}_v, \mathbf{0}_{|A|}) && \forall v \in V \\ &(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_{v,u}) && \forall (v, u) \in A \setminus \{a\} \end{aligned} \quad \square$$

**Proposição 6.5.** Para todo  $v \in V$  e todo  $S \subseteq N_D^+(v)$ , a desigualdade  $y_{v,S} \leq x_v$  induz faceta de  $P$  se e somente se  $S$  é um conjunto independente maximal de  $D[N_D^+(v)]$ .

*Demonstração.* Suponha que  $S$  seja um conjunto independente maximal de  $D[N_D^+(v)]$ . A desigualdade

$$y_{v,S} \leq x_v \tag{6.1}$$

é válida, pela própria definição de  $P$ . Note que, para todo  $u \in N_D^+(v) \setminus S$ , existe vértice  $\hat{u} \in S$  tal que  $u, \hat{u}$  sejam adjacentes. Do contrário,  $S \cup \{u\}$  seria um conjunto independente, e  $S$

não seria maximal. Os seguintes  $|V| + |A|$  pontos pertencentes a  $P$  são afim independentes e satisfazem a desigualdade (6.1) na igualdade:

$$\begin{array}{ll}
(\mathbf{0}_{|V|}, \mathbf{0}_{|A|}) & \\
(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_{v,r}) & \forall r \in S \\
(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_{v,u} + \mathbf{e}_{v,\hat{u}}) & \forall u \in N_D^+(v) \setminus S \\
(\mathbf{e}_u, \mathbf{0}_{|A|}) & \forall u \in V \setminus \{v\} \\
(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_{u,w}) & \forall (u, w) \in A \setminus A^+(v)
\end{array}$$

Para a recíproca, observe que, se  $S$  não for um conjunto independente, a desigualdade não é válida, e se  $S$  for um conjunto independente, mas não for maximal, a desigualdade é dominada.  $\square$

**Corolário 6.6.** *Para todo  $v \in V$ , a desigualdade  $x_v \geq 0$  induz faceta de  $P$  se e somente se  $v$  é um sumidouro de  $D$ .*

**Proposição 6.7.** *Se  $k \geq 2$ , então, para todo  $v \in V$ , a desigualdade  $x_v + y_{A^-(v)} \leq 1$  induz faceta de  $P$ .*

*Demonstração.* A desigualdade é válida, pela própria definição de  $P$ . Além disso, se  $k \geq 2$ , os seguintes  $|V| + |A|$  pontos pertencentes a  $P$  são afim independentes e a satisfazem na igualdade.

$$\begin{array}{ll}
(\mathbf{e}_v, \mathbf{0}_{|A|}) & \\
(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_{v,u}) & \forall v \in N_D^+(v) \\
(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_{u,v}) & \forall u \in N_D^-(v) \\
(\mathbf{e}_v + \mathbf{e}_u, \mathbf{0}_{|A|}) & \forall u \in V \setminus \{v\} \\
(\mathbf{e}_v + \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_{u,w}) & \forall (u, w) \in A \setminus A(v) \quad \square
\end{array}$$

**Corolário 6.8.** *Se  $k \geq 2$ , então, para toda fonte  $v \in V$ , a desigualdade  $x_v \leq 1$  induz faceta de  $P$ .*

**Proposição 6.9.** *Se  $k \leq |V| - 1$ , então  $x_V \leq k$  induz faceta de  $P$ . Para  $D$  não trivial, a recíproca também é verdadeira.*

*Demonstração.* A desigualdade é válida, pela própria definição de  $P$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $V = \{1, \dots, |V|\}$ . Para todos  $a, b \in \mathbb{N}$  tais que  $b \geq a$ , seja  $c_b^a \in \mathbb{B}^b$  um vetor-linha de dimensão  $b$  que possua exatamente  $a$  componentes 1; e sejam

$$M_b^1 := I_b \quad \forall b \in \mathbb{N}, b \geq 1$$

$$M_b^a := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & M_{b-1}^{a-1} & \\ 0 & & c_{b-1}^a & \end{bmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, b > a \geq 2$$

Note que  $M_b^a$  é uma matriz binária  $b \times b$  com linhas linearmente independentes. Além disso, cada linha de  $M_b^a$  possui exatamente  $a$  componentes 1. Para todo  $i \in \{1, \dots, |V|\}$ , seja  $m_i$  a  $i$ -ésima linha da matriz  $M_{|V|}^k$ , e seja  $d_i \in \mathbb{B}^V$  um vetor-linha tal que sua  $i$ -ésima componente e exatamente outras  $k - 1$  componentes valham 1. Os seguintes  $|V| + |A|$  pontos pertencem a  $P$ , são afim independentes e satisfazem a desigualdade na igualdade.

$$(m_v, \mathbf{0}_{|A|}) \quad \forall v \in V$$

$$(d_v, \mathbf{e}_{v,u}) \quad \forall (v, u) \in A$$

Para a recíproca, se  $D$  for não trivial e  $k \geq |V|$ , a desigualdade é dominada por  $x_V + y_A \geq |V|$ , obtida pela soma das desigualdades indutoras de faceta  $x_v + y_{A^-(v)} \leq 1, \forall v \in V$ .  $\square$

### 6.3 Isomorfismos

Diversas faces de  $P(D, k)$  são afim-isomórficas a polítopos  $P(D', k')$  associados a grafos  $D'$  mais simples, ou são afim-isomórficas a polítopos de outros problemas bem estudados. Nesta seção, identificamos algumas destas faces.

Na Subseção 6.3.1, mostramos que algumas faces de  $P$  são afim-isomórficas a polítopos associados a subgrafos induzidos de  $D$ , e na Subseção 6.3.2, mostramos que algumas faces de

$P$  são afim-isomórficas a politopos de conjuntos independentes associados a certos grafos.

### 6.3.1 Subgrafos induzidos

Quando fixamos a variável de um vértice  $v$  em zero, e também as variáveis de todos os arcos incidentes a este vértice em zero, obtemos uma face isomórfica ao politopo associado ao grafo  $D - v$ , como mostra a proposição seguinte.

**Proposição 6.10.** *Para todo  $v \in V$ ,*

$$P(D - v, k) \cong F := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{l} x_v = 0, \\ y_a = 0 \quad \forall a \in A(v) \end{array} \right\}$$

*Demonstração.* Tome  $(x, y) \in P(D - v, k)$ . Para todo  $u \in V$  e todo  $a \in A$ , faça

$$\bar{x}_u := \begin{cases} 0, & \text{se } u = v \\ x_u, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad \bar{y}_a := \begin{cases} 0, & \text{se } a \in A(v) \\ y_a, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos verificar que  $(\bar{x}, \bar{y}) \in F$ . Para a recíproca, tome  $(\bar{x}, \bar{y}) \in F$ . Faça

$$\begin{aligned} x_u &:= \bar{x}_u & \forall u \in V \setminus \{v\} \\ y_a &:= \bar{y}_a & \forall a \in A \setminus A(v) \end{aligned}$$

Podemos verificar que  $(x, y) \in P(D - v, k)$ . As duas transformações afins descritas definem um isomorfismo afim entre os dois conjuntos.  $\square$

Apresentamos a seguir o procedimento de geração de facetas ao qual esta classe de faces dá origem. Precisamos de um lema sobre a dimensão destas faces.

**Lema 6.11.** *Para todo  $V_0 \subseteq V$  e  $A_0 \subseteq A$  tais que  $A^+(V_0) \subseteq A_0$ ,*

$$F := \left\{ (x, y) \in P : \begin{array}{l} x_v = 0 \quad \forall v \in V_0, \\ y_a = 0 \quad \forall a \in A_0 \end{array} \right\}$$

*é uma face de  $P$  de dimensão  $|V| + |A| - |V_0| - |A_0|$ .*

*Demonstração.* Todas as desigualdades  $x_v \geq 0$ ,  $y_a \geq 0$  são válidas. Logo,  $F$  é uma face. Como  $F$  está contido em  $|V_0| + |A_0|$  hiperplanos linearmente independentes, sabemos que  $\dim(F) \leq |V| + |A| - |V_0| - |A_0|$ . Além disso, os seguintes  $|V| + |A| - |V_0| - |A_0| + 1$  pontos são afim independentes e pertencem a  $F$ :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{0}_{|V|}, \mathbf{0}_{|A|}) \\ & (\mathbf{e}_v, \mathbf{0}_{|A|}) && \forall v \in V \setminus V_0 \\ & (\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_{v,u}) && \forall (v, u) \in A \setminus A_0 \end{aligned}$$

Logo  $\dim(F) \geq |V| + |A| - |V_0| - |A_0|$ . □

**Teorema 6.12.** Tome  $v \in V$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $N_D^-(v) = \{1, \dots, p\}$  e  $N_D^+(v) = \{p+1, \dots, q\}$ . Se

$$\sum_{a \in A \setminus A(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V \setminus v} \beta_u x_u \leq \pi_0$$

induz faceta de  $P(D - v, k)$ , então

$$\sum_{a \in A} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V} \beta_u x_u \leq \pi_0$$

induz faceta de  $P(D, k)$ , onde

$$\alpha_{t,v} := \pi_0 - \max \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in A \setminus A(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V \setminus v} \beta_u x_u + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{i,v} y_{i,v} : \\ (x, y) \in P(D, k), \\ y_{t,v} = 1, \\ y_{i,v} = 0 \quad \forall i \in \{t+1, \dots, p\}, \\ x_v = 0, \\ y_{v,i} = 0 \quad \forall i \in \{p+1, \dots, q\} \end{array} \right\} \quad \forall t \in \{1, \dots, p\},$$

$$\beta_v := \pi_0 - \max \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in A \setminus A^+(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V \setminus v} \beta_u x_u : \\ (x, y) \in P(D, k), \\ x_v = 1, \\ y_{v,i} = 0 \quad \forall i \in \{p+1, \dots, q\} \end{array} \right\},$$

$$\alpha_{v,t} := \pi_0 - \max \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in A \setminus A^+(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V} \beta_u x_u + \sum_{i=p+1}^{t-1} \alpha_{v,i} y_{v,i} : \\ (x, y) \in P(D, k), \\ y_{v,t} = 1, \\ y_{v,i} = 0 \quad \forall i \in \{t+1, \dots, q\} \end{array} \right\} \quad \forall t \in \{p+1, \dots, q\}.$$

*Demonstração.* Demonstraremos o teorema em três passos.

(Passo 1) Para cada  $t \in \{0, \dots, p\}$ , sejam

$$F_{t,v} := \left\{ \begin{array}{l} y_{i,v} = 0 \quad \forall i \in \{t+1, \dots, p\}, \\ (x, y) \in P(D, k) : x_v = 0, \\ y_{v,i} = 0 \quad \forall i \in \{p+1, \dots, q\} \end{array} \right\}$$

$$f_{t,v}(x, y) := \sum_{a \in A \setminus A(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V \setminus v} \beta_u x_u + \sum_{i=1}^t \alpha_{i,v} y_{i,v}$$

Vamos demonstrar, por indução em  $t$ , que  $f_{t,v}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{t,v}$ . Pelo isomorfismo entre  $F_{0,v}$  e  $P(D-v, k)$  apresentado na demonstração da Proposição 6.10, e pela Proposição 3.8, a desigualdade  $f_{0,v}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{0,v}$ . Tome  $t \in \{1, \dots, p\}$ . Pelo Lema 6.11,  $\dim(F_{t-1,v}) = \dim(F_{t,v}) - 1$ , e como  $F_{t-1,v} = \{(x, y) \in F_{t,v} : y_{t,v} = 0\}$ , então  $-y_{t,v} \leq 0$  induz faceta de  $F_{t,v}$ . Por hipótese de indução,  $f_{t-1,v}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{t-1,v}$ . Logo, pelo Corolário 4.33, a desigualdade

$$(f_{t-1}(x, y) - \pi_0) - \alpha(-y_{t,v}) \leq 0$$

induz faceta de  $F_{t,v}$ , onde

$$\alpha = \min \left\{ \frac{f_{t-1}(x, y) - \pi_0}{-y_{t,v}} : (x, y) \in \text{vert}(F_{t,v}), -y_{t,v} < 0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi_0 - \max \{ f_{t-1}(x, y) : (x, y) \in F_{t,v}, y_{t,v} = 1 \} \\
&= \alpha_{t,v}
\end{aligned}$$

Concluimos que  $f_{t-1,v}(x, y) + \alpha_{t,v}y_{t,v} = f_{t,v}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{t,v}$ .

(Passo 2) Seja

$$\begin{aligned}
F_v &:= \left\{ (x, y) \in P(D, k) : y_{v,i} = 0 \quad \forall i \in \{p+1, \dots, q\} \right\} \\
f_v(x, y) &:= \sum_{a \in A \setminus A^+(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V} \beta_u x_u
\end{aligned}$$

Pelo passo anterior,  $f_{p,v} \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{p,v}$ . Pelo Lema 6.11,  $\dim(F_{p,v}) = \dim(F_v) - 1$ , e como  $F_{p,v} = \{(x, y) \in F_v : x_v = 0\}$ , então  $-x_v \leq 0$  induz faceta de  $F_v$ . Podemos utilizar o Corolário 4.33 para concluir que  $f_{p,v}(x, y) + \beta_v x_v = f_v(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_v$ .

(Passo 3) Para cada  $t \in \{p, \dots, q\}$ , sejam

$$\begin{aligned}
F_{v,t} &:= \left\{ (x, y) \in P(D, k) : y_{v,i} = 0 \quad \forall i \in \{t+1, \dots, q\} \right\} \\
f_{v,t}(x, y) &:= \sum_{a \in A \setminus A^+(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V} \beta_u x_u + \sum_{i=p+1}^{t-1} \alpha_{v,i} y_{v,i}
\end{aligned}$$

Vamos demonstrar, por indução em  $t$ , que  $f_{v,t}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{v,t}$ . Pelo passo anterior,  $f_{v,p}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{v,p}$ . Tome  $t \in \{p+1, \dots, q\}$ . Pelo Lema 6.11,  $\dim(F_{v,t-1}) = \dim(F_{v,t}) - 1$ , e como  $F_{v,t-1} = \{(x, y) \in F_{v,t} : y_{v,t} = 0\}$ , então  $-y_{v,t} \leq 0$  induz faceta de  $F_{v,t}$ . Por hipótese de indução,  $f_{v,t-1}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{v,t-1}$ . Podemos utilizar o Corolário 4.33 para concluir que  $f_{v,t-1}(x, y) + \alpha_{v,t}y_{v,t} = f_{v,t}(x, y) \leq \pi_0$  induz faceta de  $F_{v,t}$ , e em particular, que

$$f_{v,q}(x, y) = \sum_{a \in A} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V} \beta_u x_u \leq \pi_0$$

induz faceta de  $F_{v,q} = P(D, k)$ . □

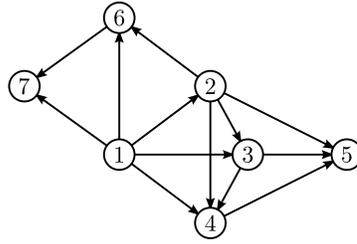


Figura 6.1: Aplicação do Teorema 6.12.

**Exemplo 6.13.** Seja  $D$  o grafo da Figura 6.1. Vamos provar na Seção 6.4 que a desigualdade

$$f(x, y) := -2x_1 + (y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4}) + (y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5}) \leq 2$$

induz faceta de  $P(D - \{6, 7\}, 2)$ . Pelo Teorema 6.12, a desigualdade

$$f(x, y) + (\alpha_{1,6}y_{1,6} + \alpha_{2,6}y_{2,6} + \beta_6x_6) \leq 2$$

induz faceta de  $P(D - \{7\}, 2)$ , onde

$$\alpha_{1,6} := 2 - \max \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in P(D - \{7\}, 2) \\ f(x, y) : \begin{array}{l} y_{1,6} = 1 \\ y_{2,6} = 0 \\ x_6 = 0 \end{array} \end{array} \right\} = 1,$$

$$\alpha_{2,6} := 2 - \max \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in P(D - \{7\}, 2) \\ f(x, y) + y_{1,6} : \begin{array}{l} y_{2,6} = 1 \\ x_6 = 0 \end{array} \end{array} \right\} = 0,$$

$$\beta_6 := 2 - \max \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in P(D - \{7\}, 2) \\ f(x, y) + y_{1,6} : \begin{array}{l} x_6 = 1 \end{array} \end{array} \right\} = 0.$$

Logo, a desigualdade

$$-2x_1 + (y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4}) + (y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5}) + y_{1,6} \leq 2$$

induz faceta de  $P(D - \{7\}, 2)$ . Aplicando o Teorema 6.12 novamente, concluímos que

$$-2x_1 + (y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4}) + (y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5}) + y_{1,6} + y_{1,7} \leq 2$$

induz faceta de  $P(D, 2)$ . Se invertermos a ordem de remoção dos vértices  $\{6, 7\}$ , obtemos outra desigualdade,

$$-2x_1 + (y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4}) + (y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5}) + 2y_{1,7} \leq 2$$

que também induz faceta de  $P(D, 2)$ .

Quando fixamos a variável de um vértice  $v$  em 1, e também as variáveis de todas os arcos incidentes a este vértice em zero, obtemos novamente uma face afim-isomórfica ao politopo associado a  $D - v$ . Neste caso, porém, a quantidade de representantes é  $k - 1$ .

**Proposição 6.14.** *Se  $k \geq 2$ , então, para todo  $v \in V$ ,*

$$P(D - v, k - 1) \cong F := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{l} x_v = 1, \\ y_a = 0 \quad \forall a \in A(v) \end{array} \right\}$$

*Demonstração.* Tome  $(x, y) \in P(D - v, k - 1)$ . Para todo  $u \in V$  e todo  $a \in A$ , faça

$$\bar{x}_u := \begin{cases} 1, & \text{se } u = v \\ x_u, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad \bar{y}_a := \begin{cases} 0, & \text{se } a \in A(v) \\ y_a, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos verificar que  $(\bar{x}, \bar{y}) \in F$ . Para a recíproca, tome  $(\bar{x}, \bar{y}) \in F$ . Faça

$$\begin{aligned} x_u &:= \bar{x}_u \quad \text{para todo } u \in V \setminus \{v\}, \\ y_a &:= \bar{y}_a \quad \text{para todo } a \in A \setminus A(v). \end{aligned}$$

Podemos verificar que  $(x, y) \in P(D - v, k - 1)$ . As duas transformações afins descritas definem um isomorfismo afim entre os dois conjuntos.  $\square$

Apresentamos agora o procedimento de geração de facetas associado a estas faces.

**Lema 6.15.** Para todo  $V_1 \subseteq V$  e  $A_0 \subseteq A$  tais que  $A^-(V_1) \subseteq A_0$ , se  $k \geq |V_1| + 1$  então

$$F = \left\{ (x, y) \in P : \begin{array}{l} x_v = 1 \quad \forall v \in V_1, \\ y_a = 0 \quad \forall a \in A_0 \end{array} \right\}$$

é uma face de dimensão  $|V| + |A| - |V_1| - |A_0|$  de  $P$ .

*Demonstração.* Todas as desigualdades  $x_v \leq 1$ ,  $y_a \geq 0$  são válidas para  $P$ . Logo,  $F$  é uma face. Como  $F$  está contido em  $|V_1| + |A_0|$  hiperplanos linearmente independentes, sabemos que  $\dim(F) \leq |V| + |A| - |V_1| - |A_0|$ . Além disso, os seguintes  $|V| + |A| - |V_1| - |A_0| + 1$  pontos são afim independentes e pertencem a  $F$ :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}_{V_1}, \mathbf{0}_{|A|}), \\ & (\mathbf{e}_{V_1} + \mathbf{e}_v, \mathbf{0}_{|A|}) \quad \text{para todo } v \in V \setminus V_1, \\ & (\mathbf{e}_{V_1 \cup \{v\}}, \mathbf{e}_{v,u}) \quad \text{para todo } (v, u) \in A \setminus A_0. \end{aligned}$$

Logo  $\dim(F) \geq |V| + |A| - |V_1| - |A_0|$ . □

As demonstração do teorema seguinte é bastante semelhante à demonstração do Teorema 6.12, e será omitida.

**Teorema 6.16.** Tome  $v \in V$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $N_D^+(v) = \{1, \dots, p\}$  e  $N_D^-(v) = \{p+1, \dots, q\}$ . Se  $k \geq 2$  e

$$\sum_{a \in A \setminus A(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V \setminus v} \beta_u x_u \leq \pi_0$$

induz faceta de  $P(D - v, k - 1)$ , então

$$\sum_{a \in A} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V} \beta_u x_u \leq \pi_0 + \beta_v$$

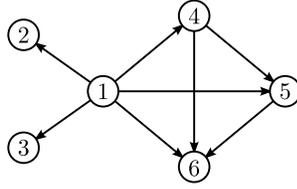


Figura 6.2: Aplicação do Teorema 6.16.

induz faceta de  $P(D, k)$ , onde

$$\alpha_{v,t} := \pi_0 - \max \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in A \setminus A(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V \setminus v} \beta_u x_u + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{v,i} y_{v,i} : \\ (x, y) \in P(D, k), \\ y_{v,t} = 1, \\ y_{v,i} = 0 \quad \forall i \in \{t+1, \dots, p\}, \\ x_v = 1, \\ y_{i,v} = 0 \quad \forall i \in \{p, \dots, q\} \end{array} \right\} \quad \forall t \in \{1, \dots, p\}$$

$$\beta_v := -\pi_0 + \max \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in A \setminus A^-(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V \setminus v} \beta_u x_u : \\ (x, y) \in P(D, k), \\ x_v = 0, \\ y_{i,v} = 0 \quad \forall i \in \{p, \dots, q\} \end{array} \right\}$$

$$\alpha_{t,v} := \pi_0 + \beta_v - \max \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in A \setminus A^-(v)} \alpha_a y_a + \sum_{u \in V} \beta_u x_u + \sum_{i=p+1}^{t-1} \alpha_{i,v} y_{i,v} : \\ (x, y) \in P(D, k), \\ y_{t,v} = 1, \\ y_{i,v} = 0 \quad \forall i \in \{t+1, \dots, q\} \end{array} \right\} \quad \forall t \in \{p+1, \dots, q\}$$

**Exemplo 6.17.** Seja  $D$  o grafo da Figura 6.2. Vamos provar na Seção 6.4 que a desigualdade

$$f(x, y) := -x_1 + (x_4 + x_5 + x_6) + 2y_{1,2} + (y_{1,4} + y_{1,5} + y_{1,6}) \leq 2$$

induz faceta de  $P(D - \{3\}, 2)$ . Pelo Teorema 6.16, a desigualdade

$$f(x, y) + \beta_3 x_3 + \alpha_{1,3} y_{1,3} \leq 2 + \beta_3$$

induz faceta de  $P(D, 3)$ , onde

$$\beta_3 := -2 + \max \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in P(D, 3) \\ f(x, y) : x_3 = 0 \\ y_{1,3} = 0 \end{array} \right\} = 1,$$

$$\alpha_{1,3} := 3 - \max \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) + x_3 : (x, y) \in P(D, 3) \\ y_{1,3} = 1 \end{array} \right\} = 2.$$

Logo, a desigualdade

$$-x_1 + (x_4 + x_5 + x_6) + 2y_{1,2} + (y_{1,4} + y_{1,5} + y_{1,6}) + (x_3 + 2y_{1,3}) \leq 3$$

induz faceta de  $P(D, 3)$ .

### 6.3.2 Conjunto independente

Sejam  $(V_0, V_1, V_L)$  uma partição de  $V$  e  $(A_0, A_-, A_L)$  uma partição de  $A$ . Nesta subseção, mostramos que, sob certas condições, existe grafo  $G_F$  tal que a face

$$F := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{ll} x_v = 0 & \forall v \in V_0, \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1, \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0, \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_- \end{array} \right\}$$

seja afim-isomórfica ao politopo do conjunto independente de  $G_F$ .

**Exemplo 6.18.** Seja  $D$  o grafo direcionado da Figura 6.3(a). Faça

$$\begin{aligned} (V_0, V_1, V_L) &:= (\{3, 4\}, \emptyset, \{1, 2, 5\}) \\ A_0 &:= \{(1, 2), (3, 5)\}, \\ A_- &:= \emptyset, \\ A_L &:= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (2, 4)\}. \end{aligned}$$

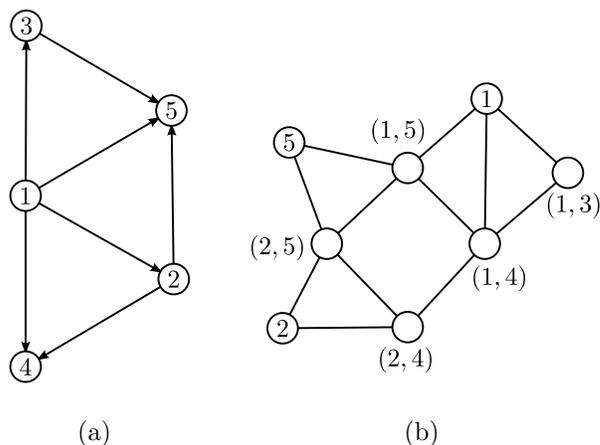


Figura 6.3: Exemplo de face afim-isomórfica a STAB.

Nesta subseção, demonstramos que existe um grafo  $G$  tal que

$$F = \left\{ (x, y) \in P(D, 3) : \begin{array}{l} x_3 = x_4 = 0 \\ y_{1,2} = y_{3,5} = 0 \end{array} \right\}$$

seja afim isomórfico a  $STAB(G)$ . Este grafo está ilustrado na Figura 6.3(b).

Seja  $A_1 = \{(v, u) \in A_- : v \in V_1\}$ . Ao longo desta subseção, fazemos as seguintes suposições sobre as partições  $(V_0, V_1, V_L)$ ,  $(A_0, A_-, A_L)$  para garantir que  $F$  não está contido em nenhum hiperplano além daqueles apresentados na definição de  $F$ .

- (i)  $|V_1| \leq k$ ,
- (ii) Se  $|V_1| = k$ , então  $V_0 = V \setminus V_1$ ,
- (iii) Se  $(v, u) \in A_1$ , então  $u \in V_0$ ,
- (iv)  $A^+(V_0) \cup A^-(V_1) \subseteq A_0$ ,
- (v) Para todo  $v \in V$  e para todo par de vértices  $r, s \in N_D^-(v)$ , se  $(r, v) \in A_1$  então  $(s, v) \in A_0$ ,
- (vi) Para todo  $v \in V$  e para todo par de vértices não vizinhos  $r, s \in N_D^+(v)$ , se  $(v, r) \in A_-$  então  $(v, s) \in A_0$ .

Explicamos brevemente cada suposição. Pela suposição (i), não fixamos mais vértices em 1 do que o permitido. Pela suposição (ii), se fixarmos  $k$  vértices em 1, também fixamos os demais vértices em zero. Pela suposição (iii), se forçarmos  $v$  a representar  $u$ , então também forçamos

$u$  a não ser representante. Pela suposição (iv), arcos que saem de vértices impedidos de serem representantes, e arcos que chegam a vértices forçados a serem representantes, são fixados em zero. Pela suposição (v), se forçarmos um vértice a representar  $v$ , então também forçamos os demais vértices a não representarem  $v$ . Finalmente, pela suposição (vi), se forçarmos um vértice  $v$  a representar um vértice  $u$  quando  $v$  for representante, então também forçamos  $v$  a nunca representar os vértices que não são vizinhos de  $u$ .

Com estas suposições, podemos facilmente calcular a dimensão de  $F$ .

**Lema 6.19.**  $F$  é uma face de  $P$  com dimensão  $|V_L| + |A_L|$ .

*Demonstração.* Pela definição de  $P$ , todas as desigualdades  $x_v \geq 0, x_v \leq 1, y_a \geq 0, y_{u,v} \leq x_u$  são válidas. Logo,  $F$  é face de  $P$ . Como  $F$  está contido em  $|V_0| + |V_1| + |A_0| + |A_=|$  hiperplanos linearmente independentes, temos

$$\dim(F) \leq |V| + |A| - |V_0| - |V_1| - |A_0| - |A_=| = |V_L| + |A_L|.$$

Faça  $A_{\pm}^+(v) := A^+(v) \cap A_{\pm}$ , para todo  $v \in V$ , e considere os pontos

$$\begin{aligned} &(\mathbf{e}_{V_1}, \mathbf{e}_{A_1}), \\ &(\mathbf{e}_{V_1} + \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{A_1} + \mathbf{e}_{A_{\pm}^+(r)}) && \forall r \in V_L \\ &(\mathbf{e}_{V_1 \cup \{r\}}, \mathbf{e}_{A_1 \cup A_{\pm}^+(r)} + \mathbf{e}_{r,s}) && \forall (r, s) \in A_L \end{aligned}$$

Vamos demonstrar que estes  $|V_L| + |A_L| + 1$  pontos afim independentes pertencem a  $F$ , e portanto que  $\dim(F) \geq |V_L| + |A_L| + 1$ . Dividimos esta demonstração em três partes. Como é fácil verificar que os pontos satisfazem as igualdades que definem  $F$ , vamos demonstrar apenas que eles pertencem a  $P$ .

(Parte 1) Seja  $(x, y) = (\mathbf{e}_{V_1}, \mathbf{e}_{A_1})$ . Temos  $x_V = |V_1| \leq k$ . Logo,  $x_V \leq k$ . Tome  $v \in V$ . Temos dois possíveis casos.

- (i) Se  $v \in V_1$ , então  $x_v = 1$ . Como  $v \notin V_0$ , não existe  $u \in N_D^-(v)$  tal que  $(u, v) \in A_1$ . Logo,  $y_{A^-(v)} = 0$ , e  $y_{A^-(v)} + x_v \leq 1$ . Seja  $R \subseteq N_D^+(v)$  tal que  $R$  seja um conjunto independente, e suponha, por contradição, que existam vértices distintos  $s, t \in R$  tais que  $y_{v,s} = y_{v,t} = 1$ . Sem perda de generalidade,  $(v, s) \in A_{\pm}$ . Consequentemente,

$(v, t) \in A_0$ , e  $y_{v,t} = 0$ , o que contradiz nossa suposição. Portanto,  $y_{v,R} \leq x_v = 1$ . Concluimos que  $(x, y) \in P$ .

(ii) Se  $v \notin V_1$ , então  $x_v = 0$ . Além disso,  $y_{A^+(v)} = 0$ . Logo,  $y_{v,R} \leq x_v$ , para todo  $R \subseteq N_D^+(v)$ . Suponha, por contradição, que existam vértices distintos  $s, t \in N_D^-(v)$  tais que  $y_{s,v} = y_{t,v} = 1$ . Sem perda de generalidade,  $(s, v) \in A_1$ . Consequentemente,  $(t, v) \in A_0$ , e  $y_{t,v} = 0$ , o que contradiz nossa suposição. Portanto,  $y_{A^-(v)} \leq 1$ . Logo,  $y_{A^-(v)} + x_v \leq 1$ . Concluimos que  $(x, y) \in P$ .

(Parte 2) Seja agora  $(x, y) = (\mathbf{e}_{V_1} + \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{A_1} + \mathbf{e}_{A_\pm(r)})$ , onde  $r \in V_L$ . Se  $|V_1| = k$ , então  $V_L = \emptyset$ , e o resultado segue por vacuidade. Suponha  $|V_1| \leq k - 1$ . Temos  $x_V = |V_1| + 1 \leq k$ . Logo,  $x_V \leq k$ . Seja  $v \in V$ . Temos dois possíveis casos:

- (i) Suponha  $v \in V_1$  ou  $v = r$ . Temos um caso semelhante ao caso (i) da Parte 1.
- (ii) Suponha  $v \notin V_1$  e  $v \neq r$ . Temos um caso semelhante ao caso (ii) da Parte 1.

(Parte 3) Finalmente, seja  $(x, y) = (\mathbf{e}_{V_1 \setminus r} + \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{A_1} + \mathbf{e}_{A_\pm(r)} + \mathbf{e}_{r,s})$ , onde  $(r, s) \in A_L$ . Se  $|V_1| = k$ , então  $r \in V_1$ . Logo,  $x_V = x_{V_1} = |V_1|$ . Se  $|V_1| \leq k - 1$ , temos  $x_V \leq |V_1| + 1 \leq k$ . Em ambos os casos,  $x_V \leq k$ . Seja  $v \in V$ . Temos dois casos idênticos aos casos da Parte 2.  $\square$

Para mostrar que, sob certas condições, a face  $F$  é afim-isomórfica ao politopo do conjunto independente de um grafo, demonstraremos que  $F \cong \text{conv}\{x : Mx \leq 1\}$ , onde  $M$  é uma matriz binária, e utilizaremos o seguinte lema.

**Lema 6.20** ([36]). *Para todo  $M \in \mathbb{B}^{m \times n}$ ,*

$$\text{conv}\{x \in \mathbb{B}^n : Mx \leq 1\} = \text{STAB}(G_M),$$

onde  $G_M$  é um grafo simples tal que

$$\begin{aligned} V(G_M) &= \{1, \dots, n\}, \\ E(G_M) &= \left\{ \{a, b\} : \begin{array}{l} a, b \in V(G_M), a \neq b, \\ \exists i \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } M_i^a = M_i^b = 1. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seja  $C := \text{conv}\{x \in \mathbb{B}^n : Mx \leq 1\}$ . É suficiente demonstrar que  $x \in \text{STAB}(G_M) \cap \mathbb{B}^n$  se e somente se  $x \in C \cap \mathbb{B}^n$ .

( $\Rightarrow$ ) Seja  $x \in \text{STAB}(G_M) \cap \mathbb{B}^n$ . Vamos provar que  $Mx \leq 1$ , e, portanto, que  $x \in C \cap \mathbb{B}^n$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , o conjunto de vértices  $K_i := \{v \in V(G_M) : M_i^v = 1\}$  é uma clique de  $G_M$ , e, portanto,  $M_i x = \sum_{k \in K_i} x_k \leq 1$ . Concluimos que  $Mx \leq 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $x \in C \cap \mathbb{B}^n$ . Vamos provar que  $x_a + x_b \leq 1$  para todo  $\{a, b\} \in E(G_M)$ , e, portanto, que  $x \in \text{STAB}(G_M) \cap \mathbb{B}^n$ . Tome  $\{a, b\} \in E(G_M)$ . Existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $M_i^a = M_i^b = 1$ . Concluimos que  $x_a + x_b \leq M_i x \leq 1$ .  $\square$

**Proposição 6.21.** *Se a desigualdade  $x_{V_L} \leq 1$  é válida para  $F$  e, para todo  $v \in V_L$ , temos  $A^+(v) \subseteq A_0 \cup A_-$ , então existe  $G_F$  tal que  $F \cong \text{STAB}(G_F)$ .*

*Demonstração.* Como  $x_{V_L} \leq 1$  é desigualdade válida para  $F$ , então

$$F = \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_{V_L} & \leq 1 \\ x_V & \leq k \\ x_v + y_{A^-(v)} & \leq 1 \quad \forall v \in V \\ y_{v,R} & \leq x_v \quad \forall v \in V, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tal que} \\ & R \text{ é conjunto independente} \\ x_v = 0 & \forall v \in V_0 \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1 \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0 \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_- \end{array} \right\}$$

Vamos mostrar que, para todo  $v \in V_0 \cup V_L$ , as desigualdades  $y_{v,R} \leq x_v$  são redundantes. Seja  $(x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A$ , e suponha que  $(x, y)$  satisfaça todas as igualdades da descrição de  $F$ . Sejam  $v \in V_0 \cup V_L$  um vértice, e  $R \subseteq N_D^+(v)$  um conjunto independente. Se  $v \in V_0$ , então  $A^+(v) \subseteq A_0$ . Logo,  $y_{v,R} = 0 \leq x_v$ . Suponha agora que  $v \in V_L$ . Se existe  $r \in R$  tal que  $y_{v,r} = 1$ , então  $(v, r) \notin A_0$ . Logo,  $(v, r) \in A_-$ , e  $(v, s) \in A_0$ , para todo  $s \in R \setminus \{r\}$ . Portanto,  $y_{v,R} = y_{v,r} = x_v$ . Concluimos que as desigualdades são redundantes.

Vamos mostrar agora que a desigualdade  $x_V \leq k$  também é redundante. Seja  $(x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A$  tal que  $x_{V_L} \leq 1$ , e suponha que  $(x, y)$  satisfaça todas as igualdades da descrição de

$F$ . Se  $|V_1| = k$ , então  $V_L = \emptyset$ . Logo,  $x_V = x_{V_1} = k$ . Se  $|V_1| \leq k - 1$ , temos

$$x_V = x_{V_L} + |V_1| \leq x_{V_L} + (k - 1) = k + (x_{V_L} - 1) \leq k.$$

A desigualdade, portanto, é redundante. Logo,

$$F = \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_{V_L} & \leq 1 \\ x_v + y_{A^-(v)} & \leq 1 \quad \forall v \in V \\ y_{v,R} & \leq 1 \quad \forall v \in V_1, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tal que} \\ & R \text{ é conjunto independente} \\ x_v = 0 & \forall v \in V_0 \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1 \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0 \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_= \end{array} \right\}.$$

Pelo Lema 6.20, existe grafo  $G'$  tal que

$$\text{STAB}(G') = \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_{V_L} & \leq 1 \\ x_v + y_{A^-(v)} & \leq 1 \quad \forall v \in V \\ y_{v,R} & \leq 1 \quad \forall v \in V_1, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tal que} \\ & R \text{ é conjunto independente} \end{array} \right\}.$$

Concluimos que existe grafo  $G_F$ , obtido a partir de  $G'$  através de remoção e identificação de vértices, tal que  $\text{STAB}(G_F) \cong F$ .

□

**Exemplo 6.22.** Sejam  $D$  o grafo da Figura 6.4(a),  $k = 2$ . Faça

$$(V_0, V_1, V_L) := (\{2\}, \{1\}, \{3, 4, 5\}),$$

$$A_0 := \{(2, 3), (4, 5)\},$$

$$A_= := \{(3, 4)\},$$

$$A_L := \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}.$$

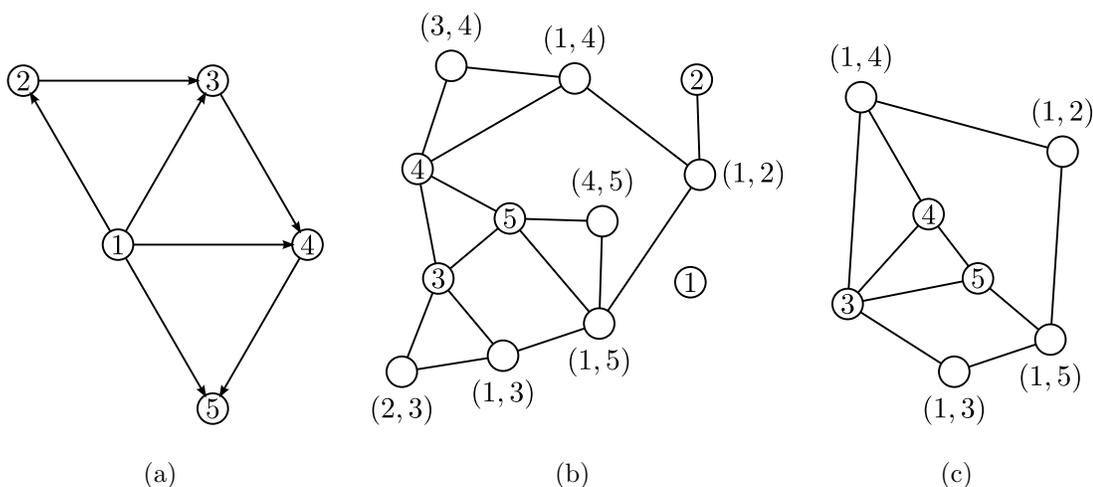


Figura 6.4: Aplicação do Teorema 6.21.

Estas partições satisfazem todas as suposições desta subseção, e também as suposições da Proposição 6.21. A Figura 6.4(b) mostra o grafo  $G'$ , descrito na demonstração da Proposição 6.21. Removendo os vértices 1, 2, (4, 5), (2, 3) e identificando o par de vértices não vizinhos 3, (3, 4), obtemos o grafo  $G_F$ , ilustrado na Figura 6.4(c). O politopo de conjunto independente deste grafo é afim-isomórfico à face  $F$ . Podemos, portanto, converter facetas de  $\text{STAB}(G_F)$  em facetas de  $P(D, 2)$ . As desigualdades de buraco ímpar

$$\begin{aligned} x_4 + x_5 + x_{(1,5)} + x_{(1,2)} + x_{(1,4)} &\leq 2 \\ x_3 + x_{(1,3)} + x_{(1,5)} + x_{(1,2)} + x_{(1,4)} &\leq 2 \end{aligned}$$

induzem facetas de  $\text{STAB}(G_F)$ . Utilizando a técnica descrita na Subseção 4.2.2, obtemos as seguintes desigualdades que induzem facetas de  $P(D, 2)$ :

$$\begin{aligned} x_4 + x_5 + y_{1,5} + y_{1,2} + y_{1,4} &\leq 2 \\ -x_1 + y_{1,3} + y_{1,5} + y_{1,2} + y_{1,4} + y_{3,4} &\leq 1 \end{aligned}$$

**Proposição 6.23.** *Se a restrição  $x_V \leq k$  é redundante na descrição de  $F$ , e existe uma partição  $(V_L^+, V_L^-)$  de  $V_L$  tal que*

$$(i) \quad A^-(v) \subseteq A_0, A^+(v) \cap A_- = \emptyset, \text{ para todo } v \in V_L^+$$

(ii)  $A^+(v) \subseteq A_0 \cup A_=-$ , para todo  $v \in V_L^-$

então existe  $G_F$  tal que  $F \cong \text{STAB}(G_F)$ .

*Demonstração.* Como a restrição  $x_V \leq k$  é redundante, então

$$F = \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_v + y_{A^-(v)} \leq 1 & \forall v \in V \\ y_{v,R} \leq x_v & \forall v \in V, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tais que} \\ & R \text{ é conjunto independente} \\ x_v = 0 & \forall v \in V_0 \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1 \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0 \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_=- \end{array} \right\}.$$

Pelo mesmo argumento da demonstração da Proposição 6.21, quando  $v \in V_0 \cup V_L^-$ , as desigualdades  $y_{v,R} \leq x_v$  são redundantes. Além disso, para todo  $v \in V_L^+$ , a desigualdade  $x_v + y_{A^-(v)} \leq 1$  também é redundante, pois  $A^-(v) \subseteq A_0$ , e portanto  $y_{A^-(v)} = 0$ . Logo,

$$F = \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_v + y_{A^-(v)} \leq 1 & \forall v \in V \setminus V_L^+, \\ y_{v,R} \leq x_v & \forall v \in V_L^+, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tais que} \\ & R \text{ é conjunto independente,} \\ y_{v,R} \leq 1 & \forall v \in V_1, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tais que} \\ & R \text{ é conjunto independente} \\ x_v = 0 & \forall v \in V_0 \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1 \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0 \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_=- \end{array} \right\}.$$

Note que os termos  $x_v$  associadas aos vértices  $v \in V_L^+$  só aparecem no segundo grupo de res-

trições. Substituindo estes termos pelos termos  $1 - x_v$ , obtemos um politopo afim-isomórfico.

$$F \cong \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_v + y_{A^-(v)} \leq 1 & \forall v \in V \setminus V_L^+, \\ x_v + y_{v,R} \leq 1 & \forall v \in V_L^+, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tais que} \\ & R \text{ é conjunto independente,} \\ y_{v,R} \leq 1 & \forall v \in V_1, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tais que} \\ & R \text{ é conjunto independente} \\ x_v = 0 & \forall v \in V_0 \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1 \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0 \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_= \end{array} \right\}.$$

Pelo Lema 6.20, existe grafo  $G'$  tal que

$$\text{STAB}(G') = \text{conv} \left\{ (x, y) \in \mathbb{B}^V \times \mathbb{B}^A : \begin{array}{ll} x_v + y_{A^-(v)} \leq 1 & \forall v \in V \setminus V_L^+, \\ x_v + y_{v,R} \leq 1 & \forall v \in V_L^+, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tais que} \\ & R \text{ é conjunto independente,} \\ y_{v,R} \leq 1 & \forall v \in V_1, \forall R \subseteq N_D^+(v) \text{ tais que} \\ & R \text{ é conjunto independente} \end{array} \right\}$$

Concluimos que existe grafo  $G_F$ , obtido a partir de  $G'$  através de remoção e identificação de vértices, tal que  $\text{STAB}(G_F) \cong F$ .

□

**Exemplo 6.24.** Sejam  $D$  o grafo da Figura 6.5(a),  $k = 3$ . Faça

$$\begin{aligned} (V_0, V_1, V_L) &:= (\{3, 4\}, \emptyset, \{1, 2, 5\}), \\ A_0 &:= \{(1, 2), (3, 5)\}, \\ A_= &:= \emptyset, \\ A_L &:= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}. \end{aligned}$$

Estas partições satisfazem todas as suposições desta subsecção, e também as suposições da

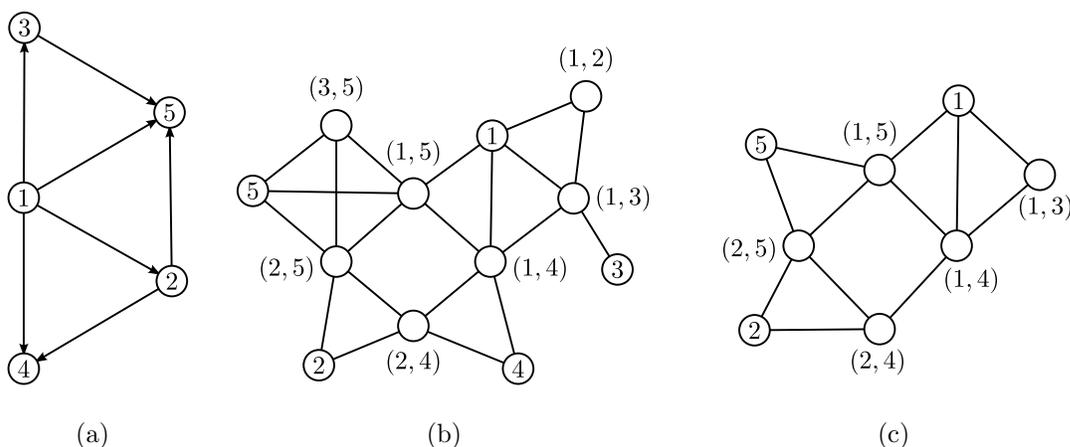


Figura 6.5: Aplicação do Teorema 6.23.

Proposição 6.23. A Figura 6.4(b) mostra o grafo  $G'$ , descrito na demonstração da Proposição 6.23. Removendo os vértices 3, 4, (1, 2), (3, 5), obtemos o grafo  $G_F$ , ilustrado na Figura 6.4(c). O politopo de conjunto independente deste grafo é afim-isomórfico à face  $F$ .

**Corolário 6.25.** *Se  $(V_0, V_1)$  é uma partição de  $V$ , e  $|V_1| \leq k$  então existe grafo  $G_F$  tal que  $F \cong \text{STAB}(G_F)$ .*

*Demonstração.* Faça

$$\begin{aligned} V_L &= \emptyset, \\ A_0 &= A^+(V_0) \cup A^-(V_1), \\ A_- &= \emptyset, \\ A_L &= A \setminus A_0. \end{aligned}$$

É fácil verificar que as partições  $(V_0, V_1, V_L)$  e  $(A_0, A_-, A_L)$  satisfazem todas as suposições desta subseção. Além disso, como  $V_L$  é vazio, e como  $x_V = |V_1| \leq k$  para todo  $(x, y) \in F$ , então existe, pela Proposição 6.23, um grafo  $G_F$  tal que  $F \cong \text{STAB}(G_F)$ .  $\square$

## 6.4 Subgrafos geradores de faceta

Na Subseção 6.3.1, vimos que subgrafos induzidos de  $D$  dão origem a facetas de  $P$ . Nesta seção, utilizamos os resultados da Seção 6.3.2 para determinar duas classes de grafos que dão

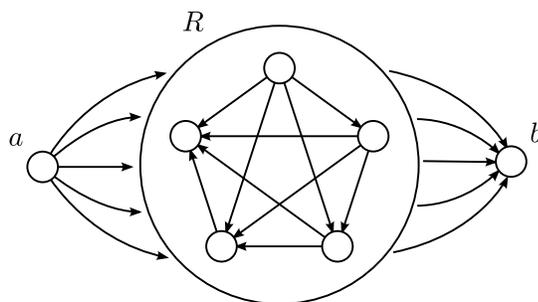


Figura 6.6: Classe de grafos que gera facetas de  $P(D, k)$ .

origem a facetas não descritas na seção 6.2.

#### 6.4.1 Vértice-clique-vértice

A primeira classe contém grafos formados por dois vértices  $a, b$  e por uma clique  $R$ , que está contida na vizinhança positiva de  $a$ , e na vizinhança negativa de  $b$ . A Figura 6.6 ilustra esta classe.

**Teorema 6.26.** *Se  $D = (V, A)$  é um grafo direcionado tal que*

- (i)  $V = \{a, b\} \cup R$ , onde  $R = \{1, \dots, q\}$  e  $a, b \notin R$
- (ii)  $A = \{(a, r), (r, b) : r \in R\} \cup \{(r, r') : r, r' \in R, r \prec r'\}$ , onde  $\prec$  é uma ordem de  $R$
- (iii)  $|R| \geq 2$

então a desigualdade

$$(1 - q)x_a + y_{a,R} + y_{R,b} \leq 1$$

induz faceta de  $P(D, k)$ , para todo  $k \geq 2$ .

*Demonstração.* Faça

$$V_0 = \{b\},$$

$$V_1 = \emptyset,$$

$$V_L = \{a\} \cup R,$$

$$A_0 = \{(r, r') : r, r' \in R, r \prec r'\},$$

$$A_1 = \emptyset,$$

$$A_{=} = \{(a, r), (r, b) : r \in R\}.$$

Estas partições satisfazem as condições da Subseção 6.3.2. Seja  $F$  como definido naquela subseção, ou seja,

$$F := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{ll} x_v = 0 & \forall v \in V_0, \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1, \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0, \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_{=} \end{array} \right\}.$$

Vamos provar que estas partições satisfazem as condições da Proposição 6.21. Claramente,  $A^+(v) \subseteq A_0 \cup A_{=}$ , para todo  $v \in V_L$ . Seja  $(x, y) \in \text{vert}(F)$ . Vamos mostrar que  $x_{V_L} = x_a + x_R \leq 1$ . Se  $x_a = x_R = 0$ , então, claramente,  $x_{V_L} \leq 1$ . Suponha  $x_a = 1$ . Para todo  $r \in R$ , temos  $y_{a,r} = 1$ , e conseqüentemente,  $x_r = 0$ . Logo,  $x_{V_L} = x_a + x_R = x_a = 1$ . Suponha agora que  $x_r = 1$ , para algum  $r \in R$ . Como  $y_{a,r} = 0$ , então  $x_a = 0$ . Como  $y_{r,b} = 1$ , então, para todo  $r' \in R \setminus \{r\}$ , temos  $y_{r',b} = 0$ , e conseqüentemente,  $x_{r'} = 0$ . Logo,  $x_{V_L} = x_a + x_R = x_r = 1$ . Concluimos que  $x_{V_L} \leq 1$ , para todo  $(x, y) \in F$ . Pela Proposição 6.21,  $F \cong \text{STAB}(G_F)$ , onde

$$\begin{aligned} V(G_F) &= \{a\} \cup R, \\ E(G_F) &= \{\{a, r\} : r \in R\} \cup \{\{r, r'\} : r, r' \in R, r \prec r'\}. \end{aligned}$$

Observe que  $G_F$  é uma clique. Logo, a desigualdade

$$x_a + x_R \leq 1$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G_F)$ . Pelo isomorfismo entre  $F$  e  $\text{STAB}(G_F)$  e pela Proposição 3.8, esta desigualdade também induz faceta de  $F$ . Vamos converter, sequencialmente, esta desigualdade em uma desigualdade que induz faceta de  $P(D, k)$ .

(Passo 1) Sejam

$$F^1 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{ll} y_{r,r'} = 0 & \forall r, r' \in R, r \prec r', \\ y_{r,b} - x_r = 0 & \forall r \in R, \\ y_{a,r} - x_a = 0 & \forall r \in R \end{array} \right\}$$

$$f^1(x, y) := x_a + x_R - 1$$

Vimos que a desigualdade  $f^1(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F) = \dim(F^1) - 1$ , e como  $F = \{(x, y) \in F^1 : x_b = 0\}$ , sabemos que  $-x_b \leq 0$  induz faceta de  $F^1$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f^1(x, y) + \alpha(-x_b) \leq 0$  induz faceta de  $F^1$ , onde

$$\alpha = \max\{f^1(x, y) : (x, y) \in F^1, x_b = 1\}.$$

Seja  $(x, y) \in F^1$  tal que  $x_b = 1$ . Para todo  $r \in R$ , temos  $y_{r,b} = 0$ , e conseqüentemente,  $x_r = 0$ . Logo,  $f^1(x, y) = x_a - 1$ . Esta função não assume valor maior que zero. O ponto

$$(\mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_{a,R})$$

pertence a  $F^1$ , satisfaz  $x_b = 1$ , e atinge esse valor. Logo,  $\alpha = 0$ . Concluimos que  $f^1(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F^1$ .

(Passo 2) Seja  $a_1, \dots, a_p$  uma ordenação de  $\{(r, r') : r, r' \in R, r \prec r'\}$ . Para todo  $t \in \{0, \dots, p\}$ , sejam

$$F_t^2 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{ll} y_{a_i} = 0 & \forall i \in \{t+1, \dots, p\}, \\ y_{r,b} - x_r = 0 & \forall r \in R, \\ y_{a,r} - x_a = 0 & \forall r \in R \end{array} \right\}$$

$$f^2(x, y) := x_a + x_R - 1$$

Vamos demonstrar, por indução em  $t$ , que  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ . Pelo passo anterior,  $f^1(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F^1$ . Como  $f^1(x, y) = f^2(x, y)$  e  $F^1 = F_0^2$ , então  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_0^2$ . Tome  $t \in \{1, \dots, p\}$ . Por hipótese de indução,  $f^2(x, y) \leq 0$

induz faceta de  $F_{t-1}^2$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F_{t-1}^2) = \dim(F_t^2) - 1$ , e como  $F_{t-1}^2 = \{(x, y) \in F_t^2 : y_{a_t} = 0\}$ , sabemos que  $-y_{a_t} \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f^2(x, y) + \alpha(-y_{a_t}) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ , onde

$$\alpha = \max\{f^2(x, y) : (x, y) \in F_t^2, y_{a_t} = 1\}.$$

Seja  $(x, y) \in F_t^2$  tal que  $y_{a_t} = 1$ . Suponha  $a_t = (u, v)$ . Como  $y_{u,b} = x_u = y_{u,v} = 1$ , então  $x_r = y_{r,b} = 0$ , para todo  $r \in R \setminus \{u\}$ . Além disso,  $x_a = y_{a,u} = 0$ . Logo,  $f^2(x, y) = x_u - 1$ . Esta função não assume valor maior que zero. O ponto

$$(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_{u,v} + \mathbf{e}_{u,b})$$

pertence a  $F_t^2$ , satisfaz  $y_{a,t} = 1$ , e atinge esse valor. Logo,  $\alpha = 0$ . Concluimos que  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ .

(Passo 3) Para todo  $t \in \{0, \dots, q\}$ , sejam

$$F_t^3 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{l} y_{r,b} - x_r = 0 \quad \forall r \in \{t+1, \dots, q\}, \\ y_{a,r} - x_a = 0 \quad \forall r \in R \end{array} \right\}$$

$$f_t^3(x, y) := x_a + \sum_{r=t+1}^q x_r + \sum_{r=1}^t y_{r,b} - 1$$

Vamos demonstrar, por indução em  $t$ , que  $f_t^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^3$ . Pelo passo anterior,  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_p^2$ . Como  $f^2(x, y) = f_0^3(x, y)$  e  $F_p^2 = F_0^3$ , então  $f_0^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_0^3$ . Tome  $t \in \{1, \dots, p\}$ . Por hipótese de indução,  $f_{t-1}^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_{t-1}^3$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F_{t-1}^3) = \dim(F_t^3) - 1$ , e como  $F_{t-1}^3 = \{(x, y) \in F_t^3 : y_{t,b} - x_t = 0\}$ , sabemos que  $y_{t,b} - x_t \leq 0$  induz faceta de  $F_t^3$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f_{t-1}^3(x, y) + \alpha(y_{t,b} - x_t) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^3$ , onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \max\{f_{t-1}^3(x, y) : (x, y) \in \text{vert}(F_t^3), y_{t,b} - x_t < 0\} \\ &= \max\{f_{t-1}^3(x, y) : (x, y) \in F_t^3, y_{t,b} = 0, x_t = 1\}. \end{aligned}$$

Seja  $(x, y) \in F_t^3$  tal que  $y_{t,b} = 0, x_t = 1$ . Temos  $x_a = y_{a,t} = 0$ . Além disso,  $x_r = y_{r,b}$  para

todo  $r \in \{t+1, \dots, q\}$ . Logo,  $f_{t-1}^3(x, y) = x_t + \sum_{r=1}^q y_{r,b} - 1$ . Como  $\sum_{r=1}^q y_{r,b} \leq 1$ , esta função não assume valor maior que 1. Tome  $r \in R$  diferente de  $t$ . Tal vértice existe, pois  $|R| \geq 2$ .

O ponto

$$(\mathbf{e}_t + \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r,b})$$

pertence a  $F_t^3$ , satisfaz  $y_{t,b} = 0, x_t = 1$ , e atinge esse valor. Logo,  $\alpha = 1$ . Concluimos que a desigualdade  $f_{t-1}^3(x, y) + (y_{t,b} - x_t) = f_t^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^3$ .

(Passo 4) Finalmente, para todo  $t \in \{0, \dots, q\}$ , sejam

$$F_t^4 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : y_{a,r} - x_a = 0 \quad \forall r \in \{t+1, \dots, q\} \right\}$$

$$f_t^4(x, y) := (1-t)x_a + y_{R,b} + \sum_{r=1}^t y_{a,r} - 1$$

Vamos demonstrar, por indução em  $t$ , que  $f_t^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ . Pelo passo anterior,  $f_q^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_q^3$ . Como  $f_q^3(x, y) = f_0^4(x, y)$  e  $F_q^3 = F_0^4$ , então  $f_0^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_0^4$ . Tome  $t \in \{1, \dots, q\}$ . Por hipótese de indução,  $f_{t-1}^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_{t-1}^4$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F_{t-1}^4) = \dim(F_t^4) - 1$ , e como  $F_{t-1}^4 = \{(x, y) \in F_t^4 : y_{a,t} - x_a = 0\}$ , sabemos que  $y_{a,t} - x_a \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f_{t-1}^4(x, y) + \alpha(y_{a,t} - x_a) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ , onde

$$\alpha = \max\{f_{t-1}^4(x, y) : (x, y) \in \text{vert}(F_t^4), y_{a,t} - x_a < 0\}$$

$$= \max\{f_{t-1}^4(x, y) : (x, y) \in F_t^4, y_{a,t} = 0, x_a = 1\}.$$

Seja  $(x, y) \in F_t^4$  tal que  $y_{a,t} = 0, x_a = 1$ . Para todo  $r \in \{t+1, \dots, q\}$ , temos  $x_a = y_{a,r} = 1$ , e, conseqüentemente,  $y_{r,b} = x_r = 0$ . Logo,

$$f_{t-1}^4(x, y) = (2-t) + \sum_{r=1}^t y_{r,b} + \sum_{r=1}^t y_{a,r} - 1.$$

Como  $y_{a,r} + y_{r,b} \leq 1$  para todo  $r \in \{1, \dots, t\}$ , esta função não assume valor maior que 1. O ponto

$$\left( \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_t, \sum_{r=1}^{t-1} \mathbf{e}_{a,r} + \sum_{r=t+1}^q \mathbf{e}_{a,r} + \mathbf{e}_{t,b} \right)$$

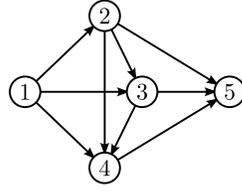


Figura 6.7: Aplicação do Teorema 6.26.

pertence a  $F_t^4$ , satisfaz  $y_{a,t} = 0, x_a = 1$ , e atinge esse valor. Logo,  $\alpha = 1$ . Concluimos que a desigualdade  $f_{t-1}^4(x, y) + (y_{a,t} - x_a) = f_t^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ . Em particular,

$$f_q^4(x, y) = (1 - q)x_a + y_{a,R} + y_{R,b} - 1 \leq 0$$

induz faceta de  $F_q^4 = P(D, k)$ . □

**Exemplo 6.27.** Seja  $D$  o grafo direcionado da Figura 6.7. Faça

$$a = 1, R = \{2, 3, 4\}, b = 5.$$

Pelo Teorema 6.26, a desigualdade

$$-2x_1 + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5} \leq 1$$

induz faceta de  $P(D, k)$ , para todo  $k \geq 2$ . Note que também podemos aplicar o Teorema 6.26 ao grafo  $D - \{2\}$ . Neste caso, concluimos que

$$-x_1 + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{3,5} + y_{4,5} \leq 1$$

induz faceta de  $P(D - \{2\}, 2)$ . Utilizando a técnica descrita na Subseção 4.2.2, podemos transformar esta faceta nas seguintes facetas de  $P(D, 2)$ :

$$-x_1 + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{3,5} + y_{4,5} - x_2 + y_{2,3} + y_{2,4} \leq 1,$$

$$-x_1 + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{3,5} + y_{4,5} - x_2 + y_{2,3} + y_{2,5} \leq 1,$$

$$-x_1 + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{3,5} + y_{4,5} - x_2 + y_{2,4} + y_{2,5} \leq 1,$$

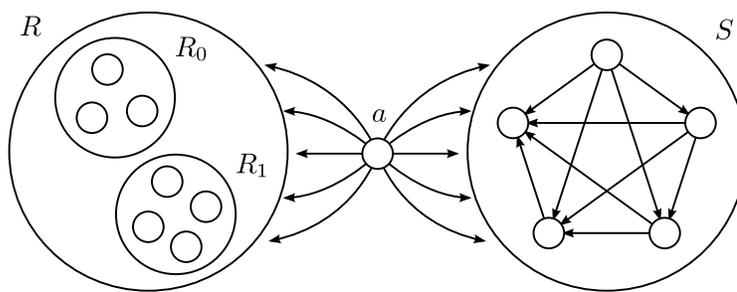


Figura 6.8: Outra classe de grafos que gera facetas de  $P(D, k)$ .

$$-2x_1 + 2y_{1,3} + 2y_{1,4} + 2y_{3,5} + 2y_{4,5} - x_2 + y_{2,3} + y_{2,4} + y_{2,5} \leq 2.$$

As três primeiras facetas também podem ser obtidas através do Teorema 6.12.

### 6.4.2 Vértice-split

A segunda classe de grafos contém aqueles grafos formados por um vértice  $a$ , um conjunto independente  $R$ , que está contido na vizinhança positiva de  $a$ , e uma clique  $S$ , também contida na vizinhança positiva de  $a$ . Não há arestas entre  $S$  e  $R$ . A Figura 6.8 ilustra esta classe.

**Teorema 6.28.** *Sejam  $D = (V, A)$  um grafo direcionado e  $k \geq 2$ . Se*

- (i)  $V = \{a\} \cup R \cup S$ , onde  $R, S, \{a\}$  são conjuntos disjuntos
- (ii)  $A = \{(a, i) : i \in R \cup S\} \cup \{(s, s') \in S, s \prec s'\}$ , onde  $\prec$  é uma ordem de  $S$
- (iii)  $(R_0, R_1)$  é uma partição de  $R$  tal que  $|R_1| = k - 2, |R_0| \geq 1$
- (iv)  $|S| \geq 2$

então

$$(2 - |S|)x_a + (|S| - 1)y_{a,R} + y_{a,S} + x_S + x_{R_1} \leq k$$

induz faceta de  $P(D, k)$ .

Para demonstrar esse teorema, precisamos de um lema auxiliar que determina uma faceta de  $\text{STAB}(G)$  para grafos  $G$  formados por uma clique  $(\{a\} \times R)$ , uma clique  $S$ , e um conjunto

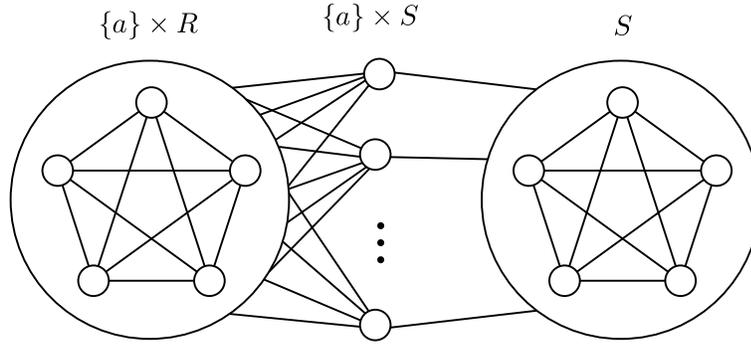


Figura 6.9: Classe auxiliar de grafos que gera facetas de STAB.

independente  $(\{a\} \times S)$ . Cada vértice  $(a, r) \in (\{a\} \times R)$  é vizinho de cada vértice  $(a, s) \in (\{a\} \times S)$ , e cada vértice  $(a, s) \in (\{a\} \times S)$  é vizinho do vértice  $s$ . A Figura 6.9 ilustra esta classe de grafos.

**Lema 6.29.** *Se  $G = (V_G, E_G)$  é um grafo tal que*

- (i)  $V_G = S \cup \{(a, i) : i \in R \cup S\}$ , onde  $R, S, \{a\}$  são conjuntos disjuntos,
- (ii)  $E_G = \{\{s, s'\} : s \in S, s' \in S \setminus \{s\}\} \cup \{\{s, (a, s)\} : s \in S\} \cup \{\{(a, r), (a, i)\} : r \in R, i \in S \cup R \setminus \{r\}\}$ ,
- (iii)  $|R| \geq 1$ ,
- (iv)  $|S| \geq 2$ ,

então a desigualdade

$$(|S| - 1) \sum_{r \in R} x_{(a,r)} + \sum_{s \in S} x_{(a,s)} + \sum_{s \in S} x_s \leq |S|$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

*Demonstração.* Seja  $G^1$  o grafo completo com vértices  $\{a\} \cup S$ . Sabemos que

$$x_a + \sum_{s \in S} x_s \leq 1$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G^1)$ . Seja  $G^2$  o grafo que obtemos a partir de  $G^1$  quando, para cada  $s \in S$ ,

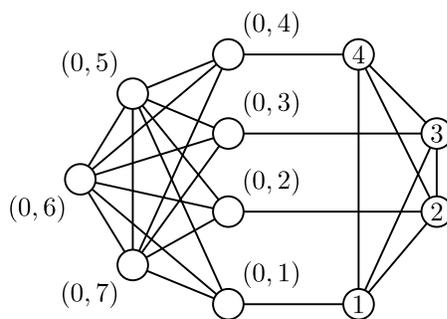


Figura 6.10: Aplicação do Teorema 6.29.

- (i) removemos a aresta  $\{a, s\}$ ,
- (ii) adicionamos um vértice isolado  $(a, s)$ ,
- (iii) adicionamos as arestas  $\{a, (a, s)\}, \{(a, s), s\}$ .

Pelo Corolário 5.35, a desigualdade

$$(|S| - 1)x_a + \sum_{s \in S} x_{(a,s)} + \sum_{s \in S} x_s \leq |S|$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G^2)$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $R = \{1, \dots, p\}$ . Seja  $G^3$  o grafo obtido a partir de  $G^2$  quando

- (i) substituímos o vértice  $a$  por um novo vértice  $(a, 1)$ ,
- (ii) adicionamos os vértices isolados  $(a, t)$ , para  $t \in \{2, \dots, p\}$ ,
- (iii) adicionamos as arestas  $\{(a, t), (a, i)\}$ , para  $t \in \{2, \dots, p\}, i \in \{1, \dots, t-1\} \cup S$ .

Note que  $G^3 = G$ . Como  $N[(a, 1)] = N[(a, r)]$ , para todo  $r \in R$ , então, pelo Corolário 5.6, a desigualdade

$$(|S| - 1) \sum_{r \in R} x_{(a,r)} + \sum_{s \in S} x_{(a,s)} + \sum_{s \in S} x_s \leq |S|$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ . □

**Exemplo 6.30.** Seja  $G$  o grafo da Figura 6.10. Faça

$$S := \{1, 2, 3, 4\}, R := \{5, 6, 7\}.$$

Pelo Lema 6.29, a desigualdade

$$3x_{(0,7)} + 3x_{(0,6)} + 3x_{(0,5)} + x_{(0,1)} + x_{(0,2)} + x_{(0,3)} + x_{(0,4)} + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G)$ . Note que também podemos aplicar esse lema a todo  $G - S'$ , onde  $S' \subseteq S$  é um subconjunto tal que  $|S \setminus S'| \geq 2$ . Obtemos, com auxílio do Teorema 5.2, as seguintes desigualdades indutoras de faceta de  $\text{STAB}(G)$ .

$$x_{(0,7)} + x_{(0,6)} + x_{(0,5)} + x_{(0,1)} + x_{(0,2)} + x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_{(0,7)} + x_{(0,6)} + x_{(0,5)} + x_{(0,1)} + x_{(0,3)} + x_1 + x_3 \leq 2$$

$$x_{(0,7)} + x_{(0,6)} + x_{(0,5)} + x_{(0,1)} + x_{(0,4)} + x_1 + x_4 \leq 2$$

$$x_{(0,7)} + x_{(0,6)} + x_{(0,5)} + x_{(0,2)} + x_{(0,3)} + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_{(0,7)} + x_{(0,6)} + x_{(0,5)} + x_{(0,2)} + x_{(0,4)} + x_2 + x_4 \leq 2$$

$$x_{(0,7)} + x_{(0,6)} + x_{(0,5)} + x_{(0,3)} + x_{(0,4)} + x_3 + x_4 \leq 2$$

$$2x_{(0,7)} + 2x_{(0,6)} + 2x_{(0,5)} + x_{(0,1)} + x_{(0,2)} + x_{(0,3)} + x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$2x_{(0,7)} + 2x_{(0,6)} + 2x_{(0,5)} + x_{(0,1)} + x_{(0,2)} + x_{(0,4)} + x_1 + x_2 + x_4 \leq 3$$

$$2x_{(0,7)} + 2x_{(0,6)} + 2x_{(0,5)} + x_{(0,1)} + x_{(0,3)} + x_{(0,4)} + x_1 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$2x_{(0,7)} + 2x_{(0,6)} + 2x_{(0,5)} + x_{(0,2)} + x_{(0,3)} + x_{(0,4)} + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

Demonstramos agora o Teorema 6.28.

*Demonstração.* Faça

$$V_0 = R_0,$$

$$V_1 = R_1 \cup \{a\},$$

$$V_L = S,$$

$$A_0 = \{(a, i) : i \in R_1\} \cup \{(s, s') : s, s' \in S, s \prec s'\},$$

$$A_L = \{(a, i) : i \in R_0 \cup S\},$$

$$A_{=} = \emptyset.$$

Estas partições satisfazem as condições da Subseção 6.3.2. Seja  $F$  como definido naquela subseção, ou seja,

$$F := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{ll} x_v = 0 & \forall v \in V_0, \\ x_v = 1 & \forall v \in V_1, \\ y_a = 0 & \forall a \in A_0, \\ y_{u,v} = x_u & \forall (u, v) \in A_{=} \end{array} \right\}.$$

Como  $|V_1| = k - 1$ , então  $x_{V_L} \leq 1$ , para todo  $x \in F$ . Além disso,  $A^+(v) \subseteq A_0 \cup A_{=}$ , para todo  $v \in V_L$ . Pela Proposição 6.21,  $F \cong \text{STAB}(G_F)$ , onde

$$\begin{aligned} V(G_F) &= S \cup \{(a, i) : i \in R \cup S\}, \\ E(G_F) &= \{\{s, s'\} : s, s' \in S, s \prec s'\} \cup \\ &\quad \{\{s, (a, s)\} : s \in S\} \cup \\ &\quad \{\{(a, r), (a, i)\} : r \in R_0, i \in S \cup R_0\}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 6.29, a desigualdade

$$(|S| - 1) \sum_{r \in R_0} x_{(a,r)} + \sum_{s \in S} x_{(a,s)} + \sum_{s \in S} x_s \leq |S|$$

induz faceta de  $\text{STAB}(G_F)$ . Pelo isomorfismo entre  $F$  e  $\text{STAB}(G_F)$  e pela Proposição 3.8, a desigualdade

$$(|S| - 1) y_{a,R_0} + y_{a,S} + x_S \leq |S|$$

induz faceta de  $F$ . Vamos converter, sequencialmente, esta desigualdade em uma desigualdade que induz faceta de  $P(D, k)$ .

(Passo 1) Sejam

$$F^1 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{ll} x_r = 0 & \forall r \in R_0, \\ x_r = 1 & \forall r \in R_1, \\ y_{a,r} = 0 & \forall r \in R_1, \\ y_{s,s'} = 0 & \forall s, s' \in S, s \prec s' \end{array} \right\}$$

$$f^1(x, y) := (|S| - 1)y_{a,R_0} + y_{a,S} + x_S - |S|$$

Vimos que a desigualdade  $f^1(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F) = \dim(F^1) - 1$ , e como  $F = \{(x, y) \in F^1 : x_a = 0\}$ , sabemos que  $x_a \leq 1$  induz faceta de  $F^1$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f^1(x, y) + \alpha(x_a - 1) \leq 0$  induz faceta de  $F^1$ , onde

$$\alpha = \max\{f^1(x, y) : (x, y) \in F^1, x_a = 0\}.$$

Seja  $(x, y) \in F^1$  tal que  $x_a = 0$ . Temos  $y_{a,R_0} = y_{a,S} = 0$ . Logo,  $f^1(x, y) = x_S - |S|$ . Como  $|R_1| = k - 2$ , então  $x_S \leq 2$ . Portanto, a função  $f^1(x, y)$  não assume valor maior que  $2 - |S|$ . Como  $|S| \geq 2$ , existem vértices distintos  $s, s' \in S$ . O ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) := (\mathbf{e}_{R_1} + \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_{s'}, \mathbf{0}_{|A|}),$$

pertence a  $F^1$ , satisfaz  $x_a = 1$ , e é tal que  $f^1(\bar{x}, \bar{y}) = 2 - |S|$ . Logo,  $\alpha = 2 - |S|$ . Concluimos que

$$(2 - |S|)x_a + (|S| - 1)y_{a,R_0} + y_{a,S} + x_S \leq 2$$

induz faceta de  $F^1$ .

(Passo 2) Suponha  $R_0 = \{1, \dots, p\}$ . Para todo  $t \in \{0, \dots, p\}$  sejam

$$F_t^2 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{ll} x_r = 0 & \forall r \in \{t+1, \dots, p\}, \\ x_r = 1 & \forall r \in R_1, \\ y_{a,r} = 0 & \forall r \in R_1, \\ y_{s,s'} = 0 & \forall s, s' \in S, s \prec s' \end{array} \right\}$$

$$f^2(x, y) := (2 - |S|)x_a + (|S| - 1)y_{a,R_0} + y_{a,S} + x_S - 2$$

Vamos provar, por indução em  $t$ , que  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ . Pelo passo anterior,  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_0^2$ . Tome  $t \in \{1, \dots, p\}$ . Por hipótese de indução,  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_{t-1}^2$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F_{t-1}^2) = \dim(F_t^2) - 1$ , e como  $F_{t-1}^2 = \{(x, y) \in F_t^2 : x_t = 0\}$ , sabemos que  $-x_t \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f^2(x, y) + \alpha(-x_t) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ , onde

$$\alpha = \max\{f^2(x, y) : (x, y) \in F_t^2, x_t = 1\}$$

Seja  $(x, y) \in F_t^2$  tal que  $x_t = 1$ . Vamos provar que  $f^2(x, y) \leq 0$ . Se  $x_a = 0$ , então  $f^2(x, y) = x_S - 2$ . Como  $|R_1| = k - 2$ , então  $x_S \leq 2$ . Temos  $f^2(x, y) \leq 0$ . Suponha agora que  $x_a = 1$ . Temos  $x_S \leq 1$ . Se  $y_{a,R_0} = 1$ , então  $y_{a,S} = 0$ ,  $f^2(x, y) = x_S - 1 \leq 0$ . Se  $y_{a,R_0} = 0$ , então  $f^2(x, y) = 2 - |S| + y_{a,S} + x_S - 2$ . Como  $y_{a,S} + x_S \leq |S|$ , temos  $f^2(x, y) \leq 0$ . Concluimos que a função  $f^2$  não assume valor maior que zero. O ponto

$$(\mathbf{e}_{R_1} + \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_{a,S})$$

pertence a  $F_t^2$ , satisfaz  $x_t = 1$ , e atinge esse valor. Logo,  $\alpha = 0$ . Portanto,  $f^2(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^2$ .

(Passo 3) Suponha agora  $R_1 = \{1, \dots, k - 2\}$ . Para todo  $t \in \{0, \dots, k - 2\}$  sejam

$$F_t^3 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{l} x_r = 1 \quad \forall r \in \{t + 1, \dots, k - 2\}, \\ y_{a,r} = 0 \quad \forall r \in R_1, \\ y_{s,s'} = 0 \quad \forall s, s' \in S, s \prec s' \end{array} \right\}$$

$$f_t^3(x, y) := (2 - |S|)x_a + (|S| - 1)y_{a,R_0} + y_{a,S} + x_S + \sum_{r=1}^t x_r - (2 + t)$$

Vamos provar, por indução em  $t$ , que  $f_t^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^3$ . Pelo passo anterior,  $f_0^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_0^3$ . Se  $k \geq 3$ , tome  $t \in \{1, \dots, k - 2\}$ . Por hipótese de indução,  $f_{t-1}^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_{t-1}^3$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F_{t-1}^3) = \dim(F_t^3) - 1$ , e como

$F_{t-1}^3 = \{(x, y) \in F_t^3 : x_t = 1\}$ , sabemos que  $x_t \leq 1$  induz faceta de  $F_t^3$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f_{t-1}^3(x, y) + \alpha(x_t - 1) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^3$ , onde

$$\alpha = \max\{f_{t-1}^3(x, y) : (x, y) \in F_t^3, x_t = 0\}$$

Seja  $(x, y) \in F_t^3$  tal que  $x_t = 0$ . Vamos provar que  $f_{t-1}^3(x, y) \leq 1$ . Se  $x_a = 0$ , então  $y_{a,R_0} = y_{a,S} = 0$ . Além disso,  $x_S + \sum_{r=1}^{t-1} x_r \leq t + 2$ . Logo,  $f_{t-1}^3(x, y) \leq 1$ . Suponha agora  $x_a = 1$ . Se  $y_{a,R_0} = 1$ , então  $y_{a,S} = 0$ . Como  $x_S + \sum_{r=1}^{t-1} x_r \leq t + 1$ , temos  $f_{t-1}^3(x, y) \leq 1$ . Se  $y_{a,R_0} = 0$ , como  $y_{a,S} + x_S \leq |S|$  e  $\sum_{r=1}^{t-1} x_r \leq t - 1$ , então  $f_{t-1}^3(x, y) \leq 0$ . Em todos os casos,  $f_{t-1}^3(x, y) \leq 1$ . Como  $|S| \geq 2$ , existem vértices distintos  $s, s' \in S$ , e como  $|R_0| \geq 1$ , existe  $r \in R_0$ . O ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\mathbf{e}_{R_1} - \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_{s'}, \mathbf{e}_{a,r})$$

pertence a  $F^3$ , satisfaz  $x_t = 0$ , e é tal que  $f_{t-1}^3(\bar{x}, \bar{y}) = 1$ . Logo,  $\alpha = 1$ . Portanto,  $f_{t-1}^3(x, y) + (x_t - 1) = f_t^3(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^3$ .

(Passo 4) Suponha, novamente,  $R_1 = \{1, \dots, k-2\}$ . Para todo  $t \in \{0, \dots, k-2\}$ , sejam

$$F_t^4 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : \begin{array}{l} y_{a,r} = 0 \quad \forall r \in \{t+1, \dots, p\}, \\ y_{s,s'} = 0 \quad \forall s, s' \in S, s \prec s' \end{array} \right\}$$

$$f_t^4(x, y) := (2 - |S|)x_a + (|S| - 1)y_{a,R_0} + y_{a,S} + x_S + x_{R_1} + (|S| - 1) \sum_{r=1}^t y_{a,r} - k$$

Vamos provar, por indução em  $t$ , que  $f_t^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ . Pelo passo anterior,  $f_0^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_0^4$ . Se  $k \geq 3$ , tome  $t \in \{1, \dots, k-2\}$ . Por hipótese de indução,  $f_{t-1}^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_{t-1}^4$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F_{t-1}^4) = \dim(F_t^4) - 1$ , e como  $F_{t-1}^4 = \{(x, y) \in F_t^4 : y_{a,t} = 0\}$ , sabemos que  $-y_{a,t} \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f_{t-1}^4(x, y) + \alpha(-y_{a,t}) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ , onde

$$\alpha = \max\{f_{t-1}^4(x, y) : (x, y) \in F_t^4, y_{a,t} = 1\}$$

Seja  $(x, y) \in F_t^4$  tal que  $y_{a,t} = 1$ . Temos  $x_a = 1, y_{a,S} = y_{a,R_0} = 0$ . Além disso,  $y_{a,r} = 0$  para todo  $r \in R_1 \setminus \{t\}$ . Logo,  $f_{t-1}^4(x, y) = 2 - |S| + x_S + x_{R_1} - k$ . Como  $x_S + x_{R_1} \leq k - 1$ , então

$f_{t-1}^4(x, y) \leq 1 - |S|$ . Como  $|S| \geq 2$ , existem vértices distintos  $s, s' \in S$ . O ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\mathbf{e}_{R_1} - \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_{s'}, \mathbf{e}_{a,t})$$

pertence a  $F_t^4$ , satisfaz  $y_{a,t} = 1$ , e é tal que  $f_{t-1}^4(\bar{x}, \bar{y}) = 1 - |S|$ . Logo,  $\alpha = 1 - |S|$ . Portanto,  $f_{t-1}^4(x, y) + (|S| - 1)y_{a,t} = f_t^4(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^4$ .

(Passo 5) Finalmente, seja  $\{a_1, \dots, a_q\}$  uma ordenação de  $\{(s, s') : s, s' \in S, s \prec s'\}$ . Para todo  $t \in \{0, \dots, q\}$ , sejam

$$F_t^5 := \left\{ (x, y) \in P(D, k) : y_{a_i} = 0 \quad \forall i \in \{t+1, \dots, q\} \right\}$$

$$f^5(x, y) := (2 - |S|)x_a + (|S| - 1)y_{a,R} + y_{a,S} + x_S + x_{R_1} - k$$

Vamos provar, por indução em  $t$ , que  $f^5(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^5$ . Pelo passo anterior,  $f^5(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_0^5$ . Tome  $t \in \{1, \dots, q\}$ . Por hipótese de indução,  $f^5(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_{t-1}^5$ . Pelo Lema 6.19,  $\dim(F_{t-1}^5) = \dim(F_t^5) - 1$ , e como  $F_{t-1}^5 = \{(x, y) \in F_t^5 : y_{a_t} = 0\}$ , sabemos que  $-y_{a_t} \leq 0$  induz faceta de  $F_t^5$ . Pelo Corolário 4.33, a desigualdade  $f^5(x, y) + \alpha(-y_{a,t}) \leq 0$  induz faceta de  $F_t^5$ , onde

$$\alpha = \max\{f^5(x, y) : (x, y) \in F_t^5, y_{a_t} = 1\}$$

Seja  $(x, y) \in F_t^5$  tal que  $y_{a_t} = 1$ . Vamos provar que  $f^5(x, y) \leq 0$ . Se  $x_a = 0$ , então  $y_{a,R} = y_{a,S} = 0$ . Logo,  $f^5(x, y) = x_S + x_{R_1} - k$ . Como  $x_S + x_{R_1} \leq k$ , temos  $f^5(x, y) \leq 0$ . Suponha agora  $x_a = 1$ . Se  $y_{a,R} = 1$ , então  $y_{a,S} = 0$ , e  $f^5(x, y) = x_S + x_{R_1} + 1 - k$ . Como  $x_S + x_{R_1} \leq k - 1$ , temos  $f^5(x, y) \leq 0$ . Por outro lado, se  $y_{a,R} = 0$ , então  $f^5(x, y) = 2 - |S| + y_{a,S} + x_S + x_{R_1} - k$ . Como  $y_{a,S} + x_S \leq |S|$  e  $x_{R_1} \leq k - 2$ , temos  $f^5(x, y) \leq 0$ . Em todos os casos,  $f^5(x, y)$  é menor ou igual a zero. Suponha  $a_t = (u, v)$ . Como  $|R_0| \geq 1$ , existe  $r \in R_0$ . O ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\mathbf{e}_{R_1} + \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_{a,r} + \mathbf{e}_{u,v})$$

pertence a  $F_t^5$ , satisfaz  $y_{a_t} = 1$ , e é tal que  $f^5(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Logo,  $\alpha = 0$ . Portanto,  $f^5(x, y) \leq 0$

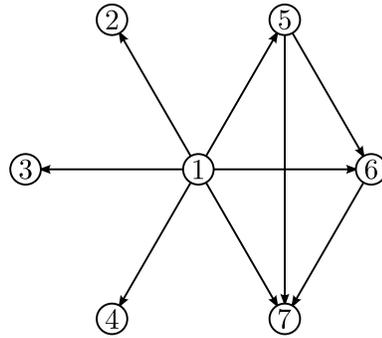


Figura 6.11: Aplicação do Teorema 6.28.

induz faceta de  $F_t^5$ . Em particular,  $f^5(x, y) \leq 0$  induz faceta de  $F_q^5 = P(D, k)$ .  $\square$

**Exemplo 6.31.** Seja  $D$  o grafo da Figura 6.11. Faça

$$R = \{2, 3, 4\}, S = \{5, 6, 7\}.$$

Aplicando o Teorema 6.28 às três possíveis partições  $(R_0, R_1)$  de  $R$ , concluímos que as três desigualdades

$$\begin{aligned} -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 2y_{1,2} + 2y_{1,3} + 2y_{1,4} + y_{1,5} + y_{1,6} + y_{1,7} &\leq 3 \\ -x_1 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + 2y_{1,2} + 2y_{1,3} + 2y_{1,4} + y_{1,5} + y_{1,6} + y_{1,7} &\leq 3 \\ -x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + 2y_{1,2} + 2y_{1,3} + 2y_{1,4} + y_{1,5} + y_{1,6} + y_{1,7} &\leq 3 \end{aligned}$$

induzem facetas de  $P(D, 3)$ . Note que também podemos aplicar o Teorema 6.28, por exemplo, ao subgrafo  $D - \{5\}$ . Neste caso, temos que as desigualdades

$$\begin{aligned} x_2 + x_6 + x_7 + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{1,6} + y_{1,7} &\leq 3 \\ x_3 + x_6 + x_7 + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{1,6} + y_{1,7} &\leq 3 \\ x_4 + x_6 + x_7 + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{1,6} + y_{1,7} &\leq 3 \end{aligned}$$

induzem facetas de  $P(D - \{5\}, 3)$ . Utilizando o Teorema 6.12, concluímos que as desigual-

dades

$$x_2 + x_6 + x_7 + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{5,6} \leq 3$$

$$x_2 + x_6 + x_7 + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{5,7} \leq 3$$

$$x_3 + x_6 + x_7 + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{5,6} \leq 3$$

$$x_3 + x_6 + x_7 + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{5,7} \leq 3$$

$$x_4 + x_6 + x_7 + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{5,6} \leq 3$$

$$x_4 + x_6 + x_7 + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{5,7} \leq 3$$

induzem facetas de  $P(D, 3)$ .



## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos os politopos associados ao problema do maior conjunto independente e ao problema do maior subgrafo induzido  $k$ -partido.

Para o politopo do conjunto independente, descrevemos um novo procedimento de geração de facetas, e vimos que ele unifica e generaliza vários procedimentos descritos anteriormente, incluindo subdivisão de arestas, subdivisão de estrelas e substituição de vértices por estrelas. Vimos também que este procedimento dá origem a desigualdades válidas ainda não descritas na literatura.

Embora o procedimento que descrevemos generalize diversos outros, existem procedimentos que ele não generaliza. Um exemplo é a substituição de vértices por *grilles* [25]. Seria interessante verificar se estes outros procedimentos também podem ser obtidos através da mesma estratégia que utilizamos para obter o nosso procedimento — identificação de faces afim-isomórficas e conversão. Outra direção para trabalhos futuros é utilizar o procedimento descrito para identificar novas classes de subgrafos que gerem facetas para o politopo do conjunto independente, ou expandir as classes de subgrafos já existentes.

Para o problema do subgrafo induzido  $k$ -partido, fizemos um estudo da formulação por representantes de cor, descrevemos suas facetas mais simples, mostramos que diversas de suas faces são afim-isomórficas a outros politopos, e, finalmente, identificamos duas classes de subgrafos que geram facetas.

Por se tratar de uma formulação bastante nova, há diversas questões em aberto. Embora tenhamos descrito duas classes de subgrafos que geram facetas, não sabemos o quão abrangentes as facetas geradas por estas duas classes são. Para grafos pequenos, estas duas classes, aliadas aos procedimentos de geração a partir de subgrafos induzidos, geram praticamente todas as desigualdades que induzem facetas do politopo, mas não sabemos se isto é verdade

para grafos maiores. Também não consideramos os problemas de separação destas classes de desigualdades. Outro trabalho futuro é comparar os politopos associados a duas orientações distintas do mesmo complemento de um grafo.

Para obter os resultados principais desta dissertação, estudamos o *isomorfismo afim* entre poliedros, e também desenvolvemos um novo procedimento que nos permite converter faces quaisquer de um poliedro em facetas que contêm esta face. Vimos que este novo procedimento generaliza as diversas versões do procedimento de *levantamento de variáveis*, e que, aliado à identificação de faces afim-isomórficas, ele dá origem a bons procedimentos de geração de facetas para politopos relacionados a conjuntos independente. Como trabalho futuro, pretendemos aplicar esta mesma estratégia — identificação de faces afim-isomórficas e conversão — a politopos relacionados a outros problemas de otimização combinatória.

# ÍNDICE REMISSIVO

- árvore, 18
- adjacência, 17
  - forte, 71
- arco, 19
- aresta
  - de um conjunto convexo, 24
  - de um grafo, 17
- caminho
  - não orientado, 18
  - orientado, 20
- ciclo
  - não orientado, 18
  - orientado, 20
- clique, 18
- combinação
  - afim, 22
  - cônica, 24
  - convexa, 23
  - linear, 22
- cone, 24
- cone de recessão, 25
- cone poliédrico, 25
- conecta, 17, 21
- conexo, 18
- conjunto
  - afim, 22
  - convexo, 23
  - independente, 18
- DAG, 20
- descrição
  - externa, 25
  - interna, 25
- desigualdade
  - válida, 24
- dimensão, 23
  - plena, 23
- direção de recessão, 25
- direção extrema, 25
- domina, 19
- dominado, 19
- estrela, 18
- extremidade
  - de uma aresta, 17
  - final de um arco, 19
  - inicial de um arco, 19
- face, 24

- própria, 24
- faceta, 24
- fecho
  - afim, 23
  - convexo, 24
- fecho cônico, 24
- folha, 17
- fonte, 19
- grafo
  - bipartido, 18
  - complemento, 19
  - completo, 18
  - direcionado, 19
  - k-partido, 18
  - simples, 17
  - subjacente, 20
  - trivial, 18
  - vazio, 18
- grau, 17
- hiperárvore forte, 71
- hiperaresta, 21
- hipercaminho forte, 71
- hipergrafo, 20
- hipergrafo-clique, 21
- hiperplano, 23
- homogenização, 52
- identificação de vértices, 18
- incidência
  - de uma aresta, 17
- incidente, 21
- independência
  - afim, 22
  - linear, 22
  - linear de hiperplanos, 23
- induz, 24
- isomorfismo afim, 27
- k-face, 24
- k-uniforme, 21
- Lema de Farkas, 25
- levantamento
  - estendido de variáveis, 36
  - sequencial de variáveis, 36
  - simultâneo de variáveis, 36
- matriz de incidência, 18
- orientação, 20
- passeio
  - não orientado, 18
  - orientado, 20
- plano, 23
- polar, 25
- poliedro, 23
- politopo, 24
  - de conjunto independente, 63
- ponto, 23
- problema
  - do maior conjunto independente, 63
  - do maior subgrafo induzido  $k$ -partido, 89

- redundante, 25
- remoção
  - de arestas, 18
  - de vértices, 18
- representa, 90
- representante, 90
- reta, 23
  
- semi-espaco fechado, 23
- soma de Minkowski, 23
- sub-hiperárvore forte, 71
- sub-hipergrafo, 21
- subespaço linear, 21
- subgrafo, 19
  - induzido, 19
- sumidouro, 19
  
- vértice
  - de um conjunto convexo, 24
  - de um grafo, 17
  - de um hipergrafo, 21
  - isolado, 17
  - universal, 17
- vetor, 21
  - de incidência, 18
- vetor-coluna, 22
- vetor-linha, 22
- vizinhança
  - em grafos simples, 17
  - fechada, 17
  - negativa, 19
  - positiva, 19
  - vizinho, 17



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Louigi Addario-Berry, W.S. Kennedy, Andrew D. King, Zhentao Li, e Bruce Reed. Finding a maximum-weight induced  $k$ -partite subgraph of an  $i$ -triangulated graph. *Discrete Applied Mathematics*, 158(7):765–770, 2010.
- [2] Alper Atamturk, George L. Nemhauser, e Martin W.P. Savelsbergh. Conflict graphs in solving integer programming problems. *European Journal of Operational Research*, 121(1):40–55, 2000.
- [3] David Avis. A revised implementation of the reverse search vertex enumeration algorithm. Em Gil Kalai e Günter M. Ziegler, editores, *Polytopes: Combinatorics and Computation*, volume 29, páginas 177–198. Birkhäuser Verlag, 2000.
- [4] Achim Bachem e Martin Grötschel. New aspects of polyhedral theory. Em Bernhard Korte, editor, *Modern Applied Mathematics: Optimization and Operations Research*. North-Holland, 1982.
- [5] Laura Bahiense, Yuri Frota, Nelson Maculan, Thiago F. Noronha, e Celso C. Ribeiro. A branch-and-cut algorithm for equitable coloring based on a formulation by representatives. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 35:347–352, 2009.
- [6] Francisco Barahona e Ali R. Mahjoub. Facets of the balanced (acyclic) induced subgraph polytope. *Mathematical Programming*, 45:21–33, 1989.
- [7] Francisco Barahona e Ali R. Mahjoub. Compositions of graphs and polyhedra I: Balanced induced subgraphs and acyclic subgraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7(3):344–358, 1994.

- [8] Francisco Barahona e Ali R. Mahjoub. Compositions of graphs and polyhedra II: stable sets. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7(3):359–371, 1994.
- [9] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, corrected edition, julho de 1998.
- [10] Immanuel M. Bomze, Marco Budinich, Panos M. Pardalos, e Marcello Pelillo. The maximum clique problem. Em *Handbook of Combinatorial Optimization*, páginas 1–74. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [11] John A. Bondy e U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, novembro de 2007.
- [12] Ralf Borndörfer e Robert Weismantel. Set packing relaxations of some integer programs. *Mathematical Programming*, 88(3):425–450, 2000.
- [13] Manoel Campêlo, Victor A. Campos, e Ricardo C. Corrêa. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 156(7):1097–1111, 2008.
- [14] Manoel Campêlo e Ricardo C. Corrêa. A combined parallel lagrangian decomposition and cutting-plane generation for maximum stable set problems. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36:503–510, 2010.
- [15] Daniele Catanzaro, Alessandra Godi, e Martine Labbé. A class representative model for pure parsimony haplotyping. *INFORMS Journal on Computing*, 22(2):195–209, 2010.
- [16] Eddie Cheng e Sven de Vries. Antiweb-wheel inequalities and their separation problems over the stable set polytopes. *Mathematical Programming*, 92(1):153–175, 2002.
- [17] D. Chinyung Cho, Ellis L. Johnson, Manfred Padberg, e M.R. Rao. On the uncapacitated plant location problem. i: valid inequalities and facets. *Mathematics of Operations Research*, 8(4):579–589, 1983.
- [18] Hyeong-Ah Choi, Kazuo Nakajima, e Chong S. Rim. Graph bipartization and via minimization. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2:38–47, 1989.
- [19] Denis Cornaz e Vincent Jost. A one-to-one correspondence between colorings and stable sets. *Operations Research Letters*, 36(0):673–676, 2008.

- [20] Harlan Crowder, Ellis L. Johnson, e Manfred Padberg. Solving large-scale zero-one linear programming problems. *Operations Research*, 31(5):803–834, 1983.
- [21] Lázaro Cánovas, Mercedes Landete, e Alfredo Marín. New facets for the set packing polytope. *Operations Research Letters*, 27(4):153–161, 2000.
- [22] Lázaro Cánovas, Mercedes Landete, e Alfredo Marín. Facet obtaining procedures for set packing problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16(1):127–155, 2003.
- [23] Pierre Fouilhoux e Ali R. Mahjoub. Polyhedral results for the bipartite induced subgraph problem. *Discrete Applied Mathematics*, 154(15):2149, 2006.
- [24] Pierre Fouilhoux e Ali R. Mahjoub. Solving vlsi design and dna sequencing problems using bipartization of graphs. *Computational Optimization and Applications*, páginas 1–33, 2010.
- [25] Anna Galluccio, Claudio Gentile, e Paolo Ventura. Gear composition and the stable set polytope. *Operations Research Letters*, 36(4):419–423, 2008.
- [26] Zonghao Gu, George L. Nemhauser, e Martin W.P. Savelsbergh. Lifted flow cover inequalities for mixed 0-1 integer programs. *Mathematical Programming*, 85:439–467, 1999.
- [27] Zonghao Gu, George L. Nemhauser, e Martin W.P. Savelsbergh. Sequence independent lifting in mixed integer programming. *Journal of Combinatorial Optimization*, 4(1):109–129, 2000.
- [28] Gregory Gutin. Independent sets and cliques. Em Jonathan L. Gross e Jay Yellen, editores, *Handbook of graph theory*, Discrete Mathematics & Its Applications, páginas 389–402. CRC Press, 2004.
- [29] Kenneth M. Hoffman e Ray Kunze. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 2nd ed., abril de 1971.

- [30] Johan Håstad. Clique is hard to approximate within  $n^{1-\epsilon}$ . Em *Proceedings of the 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, páginas 627–, Washington, DC, USA, 1996. IEEE Computer Society.
- [31] Richard M. Karp. Reducibility Among Combinatorial Problems. Em Raymond E. Miller e James W. Thatcher, editores, *Complexity of Computer Computations*, páginas 85–103. Plenum Press, 1972.
- [32] Giuseppe Lancia, Vineet Bafna, Sorin Istrail, Ross Lippert, e Russell Schwartz. Snps problems, complexity, and algorithms. Em *Proceedings of the 9th Annual European Symposium on Algorithms*, páginas 182–193. Springer-Verlag, 2001.
- [33] László Lipták e László Lovász. Critical facets of the stable set polytope. *Combinatorica*, 21(1):61–88, 2001.
- [34] George L. Nemhauser e Leslie E. Trotter. Properties of vertex packing and independence system polyhedra. *Mathematical Programming*, 6(1):48–61, 1974.
- [35] Marteen Oosten. *A Polyhedral Approach to Grouping Problems*. PhD thesis, University of Maastricht, 1996.
- [36] Manfred W. Padberg. On the facial structure of set packing polyhedra. *Mathematical Programming*, 5(1):199–215, 1973.
- [37] Panos M. Pardalos e Jue Xue. The maximum clique problem. *Journal of Global Optimization*, 4(3):301–328, 1994.
- [38] Ralph T. Rockafellar. *Convex Analysis (Princeton Landmarks in Mathematics and Physics)*. Princeton University Press, dezembro de 1996.
- [39] Alexander Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, junho de 1998.
- [40] Josef Stoer e Christoph Witzgall. *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*. Springer-Verlag, 1970.

- [41] Leslie E. Trotter. A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra. *Discrete Mathematics*, 12(4):373–388, 1975.
- [42] Laurence A. Wolsey. Facets and strong valid inequalities for integer programs. *Operations Research*, 24(2):367–372, 1976.
- [43] Laurence A. Wolsey. Further facet generating procedures for vertex packing polytopes. *Mathematical Programming*, 11(1):158–163, 1976.
- [44] Laurence A. Wolsey. Valid inequalities and superadditivity for 0-1 integer programs. *Mathematics of Operations Research*, 2(1):66–77, 1977.
- [45] Álison S. Xavier e Manoel Campêlo. A new facet generating procedure for the stable set polytope. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 37:183–188, 2011. LAGOS'11 - VI Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.
- [46] Eitan Zemel. Lifting the facets of zero–one polytopes. *Mathematical Programming*, 15(1):268–277, 1978.
- [47] Günter M. Ziegler. *Lectures on polytopes*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1995.