

Decomposição e Largura em *Árvore de Grafos* Planares Livres de Ciclos Pares Induzidos

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida por Aline Alves da Silva e aprovada pela Banca Examinadora.

Fortaleza, 27 de agosto de 2007.

Cláudia Linhares Sales (MDCC/UFC)

Dissertação apresentada ao programa Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação, UFC, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação (MDCC)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Decomposição e Largura em Árvore de Grafos Planares Livres de Ciclos Pares Induzidos

Aline Alves da Silva
aline@lia.ufc.br

Agosto de 2007

Banca Examinadora:

- Cláudia Linhares Sales (MDCC/UFC)
- Sulamita Klein (UFRJ)
- Ricardo Cordeiro Corrêa (MDCC/UFC)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a **Deus**, pelo Seu amor incondicional por mim e por ter me permitido chegar ao fim desse trabalho com êxito.

Aos meus pais **Airton Felix da Silva** e **Maria Neide Alves da Silva** por todos os anos de dedicação a mim concedidos e pelos vários anos de trabalho a fim de me proporcionar o conhecimento necessário para que eu chegasse aqui.

Aos meus irmãos **Alesson** e **Alessandra** pela confiança nesse trabalho.

A **Cláudia Linhares Sales** pela orientação desse trabalho e pelas experiências compartilhadas.

A **Ana Shirley** por todo apoio e co-orientação.

A todos os **professores do mestrado** por terem me acrescentado bastante conhecimento.

A **Uniserpro** por ter me concedido liberação parcial da minha jornada de trabalho no Serpro, resultando em uma maior disponibilidade de tempo para a conclusão desse trabalho.

Aos meus amigos de mestrado, em especial, ao **Italo**, **Edvan**, **Fernando** e **Alexsandro**, por toda a ajuda e momentos de entretenimento no LIA.

Aos meus amigos **Elvira**, **Rafaela**, **Raquel** e **Raul**, pela presença no dia da defesa desta dissertação de mestrado.

Aos demais amigos e familiares que me apoiaram através de orações ou mensagens de otimismo.

Resumo

Os conceitos de Decomposição em Árvore e Largura em Árvore foram introduzidos por Robertson e Seymour em sua série de artigos sobre menores de grafos, publicados ao longo da década de 90. Sabe-se que muitos problemas \mathcal{NP} -difíceis podem ser resolvidos polinomialmente para um grafo G , dada uma decomposição em árvore de G de largura limitada. Logo, limitar a largura em árvore de uma classe de grafos torna-se um objeto de estudo de grande interesse. Neste contexto, a classe dos grafos planares se mostra bastante intrigante, uma vez que, apesar de possuir outras métricas limitadas em valores baixos (por exemplo, número cromático), não possui largura em árvore limitada. Desta forma, uma alternativa é restringir a classe estudada para uma subclasse dos grafos planares.

Neste trabalho, nós investigamos a classe dos grafos planares livres de buracos pares. Nós mostramos que se G é um grafo planar livre de buracos pares, então ele não contém uma subdivisão de uma grade 10×10 . Portanto, se os menores grades de G são obtidos de subdivisões, G tem largura em árvore no máximo 49. Além disso, dois algoritmos não-exatos polinomiais para computar uma decomposição em árvore de um grafo planar livre de buracos pares são apresentados, ambos baseados em caracterizações conhecidas de tal classe de grafos. No primeiro algoritmo, uma decomposição em árvore é construída a partir de grafos básicos pela concatenação de decomposições em árvores de pedaços pequenos via os cortes clique, k -estrelas ($k = 1, 2, 3$) e 2-join. No segundo, uma decomposição em árvore é construída pela inclusão dos vértices de G um a um, seguindo sua ordem bi-simplicial.

PALAVRAS CHAVE: Grafos planares. Grafos livres de buracos pares. Largura em árvore. Teoria de Grafos.

Abstract

The definitions of tree decomposition and treewidth were introduced by Robertson and Seymour in their series of papers on graph minors, published during the nineties. It is known that many \mathcal{NP} -hard problems can be polynomially solved if a tree decomposition of bounded treewidth is given. So, it is of interest to bound the treewidth of certain classes of graphs. In this context, the planar graphs seem to be specially challenging because, in despite of having many known bounded metrics (for example, chromatic number), they have unbounded treewidth. So, an alternative approach is to restrict ourselves to a subclass of planar graphs.

In this work, we investigate the class of even-hole-free planar graphs. We show that if G is an even-hole-free planar graph, then it does not contain a subdivision of the 10×10 grid. So, if the grid minors of G are obtained from subdivisions, then G has treewidth at most 49. Furthermore, two polynomial, non-exact algorithms to compute a tree decomposition of a even-hole-free planar graph are given, both based on known characterizations of even-hole-free graphs. In the first one, a tree decomposition is built from basic graphs by concatenating the tree decomposition of small pieces via the clique, k -stars ($k = 1, 2, 3$) and 2-join cutsets. In the second one, a tree decomposition is built by including one by one the vertices of G , following their bi-simplicial order.

KEYWORDS: Planar Graphs. Even-hole-free graphs. Treewidth. Graph Theory.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Preliminares	5
2.1	Definições	5
2.2	Algumas classes de grafos	7
3	Decomposição em Árvore	10
3.1	Definições	10
3.2	Propriedades	11
3.3	Caracterizações por menores proibidos	11
3.4	Limites superiores e menores proibidos	13
4	Grafos planares	14
4.1	Definição e Teorema de Kuratowski	14
4.2	Menores proibidos em grafos planares	15
5	Grafos livres de buracos pares	17
5.1	Estruturas proibidas	17
5.2	Teorema da Decomposição	19
5.3	Teorema do Vértice Bi-simplicial	26
6	Largura em árvore de grafos planares livres de buracos pares	27
6.1	Menor grade 3×3 em grafos planares livres de buracos pares	27

6.2	Um limite superior para uma subclasse	28
6.2.1	Lemas	31
6.2.2	Prova do Teorema 6.2.1	32
7	Teorema da Decomposição para os grafos planares	42
7.1	Grafos planares livres de buracos pares e livres de caps	42
7.2	Grafos planares livres de buracos pares básicos	46
7.3	Grafos planares livres de buracos pares que contêm um 2-join	47
7.4	Grafos planares livres de buracos pares que contêm corte k -estrela ($k = 1, 2, 3$)	48
7.5	Teorema da Decomposição	58
8	Algoritmo de decomposição baseado no Teorema do Vértice Bi-simplicial	59
8.1	Algoritmo	59
8.2	Corretude do algoritmo	65
8.3	Complexidade do algoritmo	65
9	Conclusão e trabalhos futuros	67

Lista de Figuras

2.1	Grafo completo	7
2.2	Buraco	7
2.3	Grade 3×3	8
2.4	H é uma subdivisão de G	9
2.5	H é menor de G	9
3.1	Um grafo G de largura em árvore 2 e uma DEA ótima de G	11
4.1	Grafo planar	15
5.1	Estrutura ponto-ponto	18
5.2	Estrutura triângulo-triângulo	18
5.3	Diamante e cap	19
5.4	Mickey, leque, roda curta e roda gêmea	20
5.5	Estrela, dupla-estrela e tripla-estrela	21
5.6	2-Join	21
5.7	Árvore T e grafo linha de T	22
5.8	Grafo básico não-trivial	23
5.9	Estrutura ponto-triângulo	23
5.10	Vértices bi-simpliciais $(x$ e $y)$	26
6.1	Grafo planar livre de buracos pares que contém um menor grade 3×3	27
6.2	Estrutura ponto-buraco	28

6.3	Estrutura triângulo-buraco	29
6.4	Modelo de $G_{10 \times 10}$	31
6.5	H , Modelo de $G_{3 \times 2}$ destacado em cinza escuro e Ciclo C' em cinza claro . .	35
6.6	Vértices $x, x', y, y', z, z', w, w', x_1, x_2, x_3$ e Ciclo C	36
6.7	Caso 1	38
6.8	Caso 2	39
6.9	Caso 4	40
7.1	Grafos $T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7$	51
7.2	Grafos $G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7$	56
8.1	$N^{G_{i-1}}(v_i = n) = \emptyset$	60
8.2	$N^{G_{i-1}}(v_i = n)$ induz apenas uma clique	61
8.3	$N^{G_{i-1}}(v_i = n)$ induz duas cliques que estão em uma mesma componente de G_{i-1}	62
8.4	$N^{G_{i-1}}(v_i = n)$ induz duas cliques que estão em componentes distintas de G_{i-1}	63

Introdução

Muitos problemas em grafos que modelam problemas da vida real são intratáveis do ponto de vista computacional. Mais formalmente, esses problemas são \mathcal{NP} -difíceis. Uma forma de lidar com eles é determinar propriedades dos grafos que os modelam que possam ser úteis para encontrar um algoritmo eficiente para resolvê-los. Uma outra possibilidade é que o problema possa ser decomposto em subproblemas que podem ser resolvidos eficientemente. Esses dois procedimentos podem ajudar a encontrar algoritmos exatos ou aproximativos, com ou sem garantia da qualidade da solução encontrada.

Dentre as classes de grafos que são mais fáceis de lidar, ou seja, para quais problemas em grafos que são difíceis em geral podem ser resolvidos em tempo polinomial, e até mesmo em tempo linear, podemos citar as árvores. Por exemplo, o problema do Conjunto Independente Máximo é \mathcal{NP} -difícil [9] em geral, mas quando o grafo de entrada é uma árvore, existe um algoritmo que resolve esse problema em tempo linear [14].

Entre 1980 e 1990, Neil Robertson e Paul Seymour definiram os parâmetros *largura em árvore* e *decomposição em árvore* de um grafo [18]. Esses conceitos foram introduzidos no contexto de uma pesquisa fundamental sobre menores. Uma decomposição em árvore de um grafo procura estabelecer uma relação estrutural entre as partes deste de modo que essas sejam minimalmente conectadas, ou seja, de modo que a estrutura do grafo assemelhe-se a uma árvore. A largura em árvore de um grafo mede a semelhança do mesmo a uma árvore, de tal forma que, quanto menor for a largura em árvore de um grafo, mais semelhante este é a uma árvore; e vice-versa, quanto maior for a largura em árvore de um grafo, menos semelhante este é a uma árvore. A noção de largura em árvore tem sido alvo de interesse de pesquisadores por causa de suas várias aplicações, inclusive

em aplicações não necessariamente relacionadas à teoria de grafos, como, por exemplo, em redes probabilísticas (usadas por sistemas especialistas) ou computações de matrizes esparsas [11].

A largura em árvore de uma decomposição em árvore de um grafo G é igual ao tamanho da maior parte dessa decomposição menos um. Como um mesmo grafo pode ser decomposto em árvore de várias maneiras distintas, a largura em árvore de um grafo é igual à menor largura dentre todas as decomposições em árvore desse grafo. Um grafo G tem largura em árvore no máximo k se e somente se ele pode ser associada uma árvore T tal que cada nó representa um subgrafo de G com no máximo $k + 1$ vértices, de tal forma que todos os vértices e arestas de G são representados em pelo menos um nó de T e para cada vértice v de G , os nós de T que contêm v induzem uma subárvore de T .

Algumas classes de grafos têm largura em árvore conhecida, por exemplo: todo ciclo sem cordas tem largura em árvore igual a 2; a largura em árvore de todo K_n é igual a $n - 1$; todo grafo cordal tem largura em árvore igual ao tamanho de sua maior clique menos 1; toda grade $k \times k$ tem largura em árvore exatamente igual a k [6][8]; entre outras.

Arnborg, Corneil e Proskurowski mostraram em [2] que determinar a largura em árvore de um grafo qualquer é \mathcal{NP} -difícil. Por outro lado, o problema de decidir, para k fixo, se um grafo $G = (V, E)$ qualquer possui largura em árvore no máximo k pertence a \mathcal{P} .

Muitos problemas \mathcal{NP} -difíceis podem ser resolvidos eficientemente em grafos com largura em árvore pequena através de algoritmos que utilizam técnicas como Divisão e Conquista ou Programação Dinâmica [1][3][13]. Dentre tais problemas, podemos citar: Conjunto Independente Máximo, Ciclo Hamiltoniano, Coloração de Vértices, Árvore de Steiner. Para resolver tais problemas, é necessário encontrar, primeiramente, uma decomposição em árvore do grafo de largura pequena. Felizmente, para cada inteiro positivo k , existe um algoritmo de tempo linear que, dado um grafo, encontra uma decomposição em árvore de largura no máximo k do grafo, se ela existe (este algoritmo é exponencial em k) [5]. Diante disso, limitar a largura em árvore de uma classe de grafos tem se tornado uma tarefa de grande interesse em Teoria dos Grafos.

Um resultado bastante simples na teoria de decomposição em árvore é o fato de que, para todo grafo G , a largura em árvore de todo subgrafo de G é no máximo a largura em árvore de G . Portanto, não é possível estabelecer um limite superior para a largura em árvore da classe dos grafos planares, pois o fato de toda grade $k \times k$ ser planar e ter largura em árvore exatamente igual a k , implica que se um grafo planar G tem uma grade $k \times k$

como subgrafo, então a largura em árvore de G é pelo menos k .

Robertson, Seymour e Thomas garantem um limite superior de $6k - 5$ para a largura em árvore de grafos planares sem menor isomorfo a uma grade $k \times k$ [20]. Um limite superior melhor de $5k - 1$ foi encontrado pelos mesmos autores, porém, tal resultado ainda não foi publicado [24].

Diante da impossibilidade de limitar a largura em árvore da classe dos grafos planares, nesta dissertação, estudamos o problema de determinação da largura em árvore e da decomposição em árvore dos grafos planares livres de buracos pares (em toda dissertação, representaremos tal classe de grafos por Γ).

A principal contribuição desta dissertação de mestrado é o incremento da classe de menores topológicos proibidos de Γ , através da prova de que todo grafo pertencente a Γ não possui uma grade 10×10 como menor topológico. Tal resultado, junto com o Teorema de Robertson, Seymour e Thomas mencionado anteriormente, nos garante um limite superior de 49 para a largura em árvore de $G \in \Gamma$ tal que todo menor grade $k \times k$ de G pode ser obtido por uma subdivisão da grade.

Além disso, nesta dissertação, o problema de gerar uma decomposição em árvore qualquer para um grafo de Γ foi abordado de duas maneiras distintas. Na primeira, o Teorema da Decomposição dos grafos sem buracos pares de Conforti et al [10] foi estudado e uma versão desse teorema foi produzida para os grafos planares. O resultado principal desse estudo foi a limitação da cardinalidade dos cortes da árvore de decomposição de Conforti et al [10] e uma caracterização precisa dos grafos básicos.

Na segunda abordagem, estudamos o Teorema Estrutural dos grafos livres de buracos pares de Chudnovsky et al [7] (doravante denominado Teorema do Vértice Bi-simplicial) e apresentamos um algoritmo para obter uma decomposição em árvore de qualquer grafo livre de buracos pares a partir desse resultado.

Esta dissertação está dividida como segue. O Capítulo 2 introduz os conceitos básicos necessários em teoria dos grafos para o entendimento deste texto. No Capítulo 3, são apresentadas as definições formais de decomposição em árvore e largura em árvore, assim como algumas propriedades importantes de decomposição em árvore, uma introdução à caracterização de menores proibidos e alguns resultados importantes envolvendo largura em árvore. O Capítulo 4 apresenta alguns menores proibidos em grafos planares. O Capítulo 5 é dedicado aos grafos livres de buracos pares, apresentando as estruturas proibidas em tal classe de grafos, o Teorema da Decomposição e o Teorema do Vértice Bi-simplicial.

No capítulo 6, é apresentado o resultado principal desta dissertação, ou seja, um limite superior para a largura em árvore de $G \in \Gamma$ tal que todo menor grade $k \times k$ de G pode ser obtido por uma subdivisão da grade. O Capítulo 7 apresenta uma versão do Teorema da Decomposição para os grafos planares. No Capítulo 8, é mostrado um algoritmo para a obtenção de uma decomposição em árvore para todo grafo $G \in \Gamma$ baseado no Teorema do Vértice Bi-simplicial. Finalmente, no Capítulo 9, apresentamos as conclusões e os trabalhos futuros.

Conceitos Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos a serem utilizados ao longo do texto, bem como a notação a ser utilizada.

2.1. Definições

Um **grafo** G é um par (V, E) , onde V denota o **conjunto de vértices** e E o **conjunto de arestas** de G . Cada aresta é um par não-ordenado de vértices $u, v \in V$, denotada por (u, v) .

Dizemos que dois vértices u e v são **adjacentes** se a aresta $e = (u, v) \in E$. Dizemos ainda que u e v são as **extremidades** da aresta e e que a aresta e é **incidente** aos vértices u e v . Um **laço** é uma aresta (u, v) onde $u = v$, e arestas que compartilham os mesmos vértices, ou seja, $e_1, \dots, e_k = (u, v)$, são chamadas **arestas múltiplas** entre u e v . Um **grafo simples** G é um grafo sem laços e sem arestas múltiplas.

Um **grafo finito** é um grafo tal que seus conjuntos de vértices e arestas são finitos. Ao longo desta dissertação, um grafo refere-se a um grafo simples finito.

Os conjuntos de vértices e arestas de um grafo G são denotados, respectivamente, por $V(G)$ e $E(G)$. Caso não haja ambiguidade, denotaremos $|V|$ por n e $|E|$ por m .

Uma **representação gráfica de um grafo** consiste de um desenho geométrico onde os vértices são representados por pontos no plano e uma aresta $e = (x, y)$ é representada por uma linha unindo os vértices x e y .

Um grafo H é um **subgrafo** de G (denotamos por $H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Quando $H \subseteq G$, mas $H \neq G$, nós denotamos por $H \subset G$ e chamamos H um

subgrafo próprio de G . Se H é um subgrafo de G , G é um **supergrafo** de H . Um **subgrafo gerador** de G é um subgrafo H com $V(H) = V(G)$. Suponha que V' é um subconjunto não-vazio de V . O subgrafo de G tal que o conjunto de vértices é V' e o conjunto de arestas é o conjunto daquelas arestas de G que tem ambas as extremidades em V' é chamado o **subgrafo induzido** por V' e é denotado por $G[V']$.

Um grafo G **contém** um grafo H se H é um subgrafo de G , e um grafo G é **livre** de H se G não possui H como subgrafo induzido.

Dois vértices são **conectados** em um grafo G se existe um caminho entre eles. Um grafo G é dito **conexo** se todo par de vértices de G é conectado. Caso contrário, G é dito **desconexo**. Uma **componente (conexa)** C de G é um subgrafo conexo maximal de G .

Dado um subconjunto de vértices S de um grafo G , $G \setminus S$ denota o subgrafo de G obtido pela remoção de S . Um subconjunto de vértices S de um grafo conexo G é um **corte de vértices** de G se $G \setminus S$ é desconexo. Similarmente, um subconjunto S de arestas de um grafo conexo G é um **corte de arestas** de G se o grafo obtido de G pela remoção de S é desconexo.

A **vizinhança** de um vértice v é o conjunto $N(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$, e a **vizinhança fechada** $N[v]$ de v é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Da mesma forma, para todo subconjunto $U \subseteq G$, utilizamos $N(U)$ para denotar o conjunto dos vértices de $G \setminus U$ que são adjacentes a pelo menos um vértice de U e utilizamos $N[U]$ para denotar $N(U) \cup U$. Além disso, dado dois subconjuntos disjuntos $U, H \subset G$, denotamos por $N^H(U)$ o conjunto de vértices de H que tem pelo menos um vizinho em U .

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples qualquer. O **grau** $d(v)$ de um vértice $v \in V(G)$ é o número de arestas incidentes a v . Denotamos por $\delta(G)$ o grau mínimo e por $\Delta(G)$ o grau máximo dos vértices de G .

Um grafo $G = (V, E)$ é denominado **completo** se $\forall a, b \in V(G)$, temos que $e = (a, b) \in E(G)$, ou seja, $N[v] = V$ para todo $v \in V$. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices.

Seja $C \subseteq V$. Se $G[C]$ é um grafo completo, dizemos que C é uma **clique** de G . O tamanho da maior clique de um grafo G é denotado por $\omega(G)$.

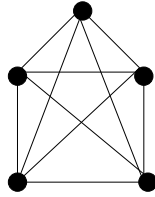


Figura 2.1. Grafo completo

Um **caminho** entre dois vértices u e v de um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices distintos $\langle v_1 = u, v_2, \dots, v_q = v \rangle$ de tal forma que $(v_i, v_{i+1}) \in E$, para $i = 1, \dots, q - 1$. Tal caminho é dito ser **sem cordas** se o grafo induzido pelos vértices do caminho possui apenas as arestas do caminho, ou seja, $E[G[\{v_1, \dots, v_q\}]] = \{(v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i < q\}$. O **comprimento** de um caminho é o número de arestas que ele contém.

Um **ciclo** é um caminho no qual todos os vértices são distintos com exceção das extremidades, ou seja, apenas o primeiro e o último vértices são iguais.

Um grafo G é dito **aciclíco** se não contém ciclos. Um grafo é dito **triangularizado (ou cordal)**, se todo ciclo de tamanho maior ou igual a quatro possui pelo menos uma corda (aresta unindo dois vértices não-consecutivos do ciclo).

2.2. Algumas classes de grafos

Definição 2.2.1 (Buracos). Um **buraco** é um ciclo induzido de tamanho pelo menos 4. Denotamos por C_k um buraco de tamanho k (k vértices ou arestas). Chamamos tal buraco de k -buraco.

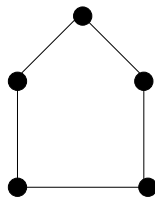


Figura 2.2. Buraco

Dizemos que C_k é um **buraco par** se k é par; por outro lado, C_k é **ímpar** se k é ímpar.

Definição 2.2.2 (Árvores). Um grafo T é uma **floresta** se T é acíclico. Um grafo T é uma **árvore** se T é acíclico e conexo. Seja T uma árvore. Um **subárvore** de T é qualquer subgrafo de T que também é uma árvore.

Uma árvore $T = (V, E)$ é dita **enraizada** quando um vértice é escolhido como especial. Esse vértice é chamado **raiz**. Denotamos uma árvore enraizada em um vértice r por T_r .

Sejam v e w dois vértices de uma árvore T enraizada de raiz r . Suponha que v pertença ao caminho de r a w em T . Então, v é **ancestral** de w , sendo w **descendente** de v . Além disso, se v é diferente de w , v é **ancestral próprio** de w , e este **descendente próprio** de v . Se (v, w) é uma aresta de T , então v é **pai** de w , sendo w **filho** de v . Dois vértices que possuem o mesmo pai são chamados **irmãos**. A raiz de uma árvore não possui pai, e todo vértice v diferente de r , possui um único pai. Uma **folha** é um vértice que não possui filhos.

Definição 2.2.3 (Grafo Linha). Dado um grafo G , seu **grafo linha** tem conjunto de vértices $E(G)$ e conjunto de arestas A , onde $a = e_1e_2 \in A$ se e somente se e_1 e e_2 têm uma extremidade comum em G .

Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartite** se $V(G)$ admite uma bipartição, ou seja, $V(G) = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tal que se $(a, b) \in E(G)$, temos que $a \in V_1$ e $b \in V_2$ ou $a \in V_2$ e $b \in V_1$.

Um grafo G é **bipartite completo** se ele é bipartite e, além disso, para todo u em V_1 e todo v em V_2 , (u, v) é uma aresta de G .

Denotamos por $K_{r,s}$ o grafo bipartite completo com $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$.

Definição 2.2.4 (Grades). Uma **grade** $k \times l$ é um grafo $G = (V, E)$ onde $V(G) = \{(i, j) : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l; i, j \in \mathbb{N}\}$ e $E(G) = \{(i, j)(i', j') : |i - i'| + |j - j'| = 1\}$.

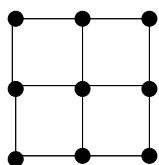


Figura 2.3. Grade 3×3

Em toda a dissertação, denotaremos uma grade $k \times l$ por $G_{k \times l}$.

Uma **subdivisão de uma aresta** $e = (u, v)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo obtido pela troca dessa aresta por um caminho de tamanho 2, formado pelo acréscimo de um novo vértice ao grafo adjacente às extremidades da aresta original. Uma **subdivisão de um grafo** G é um grafo obtido a partir de G por uma sequência finita de subdivisões de arestas. Nós dizemos que G contém uma subdivisão de H se existe um subgrafo de G isomorfo a uma subdivisão de H .

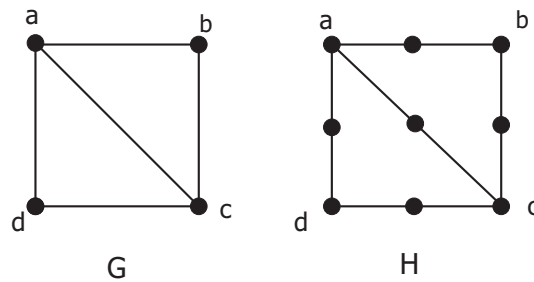


Figura 2.4. H é uma subdivisão de G

Se (x, y) é uma aresta de um grafo G , nós denotamos por G_{xy} o grafo obtido pela contração de (x, y) a um vértice $x * y$; então, $V(G_{xy}) = (V(G) \setminus \{x, y\}) \cup \{x * y\}$ e $E(G_{xy}) = E(G) \setminus \{x, y\} \cup \{(x * y)z : xz \text{ ou } yz \in E(G)\}$. Na figura 2.5, o vértice $b * d$ do grafo H foi obtido através da contração da aresta (b, d) do grafo G .

Definição 2.2.5 (Menores). H é um **menor** de G se pode ser obtido de G por uma sequência de remoções de arestas, contrações de arestas ou remoções de vértices. Se H é um menor de G , nós dizemos que G tem um H -menor. H é um **menor topológico** de G se G contém uma subdivisão de H como subgrafo.

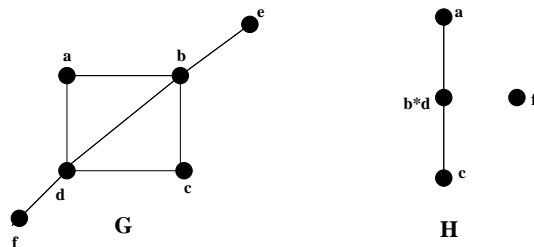


Figura 2.5. H é menor de G

É fácil observarmos que se um grafo H é uma subdivisão de um grafo G , G é um menor de H (Figura 2.4).

Decomposição em Árvore

Neste capítulo, definimos formalmente decomposição em árvore e largura em árvore, apresentamos algumas propriedades da decomposição em árvore que serão úteis nos próximos capítulos, introduzimos a caracterização de grafos por menores proibidos e, por último, apresentamos alguns resultados envolvendo menores proibidos e largura limitada de grafos.

3.1. Definições

Decomposição em árvore e largura em árvore podem ser definidas formalmente como:

Definição 3.1.1 (Decomposição em árvore). *Uma decomposição em árvore (DEA) \mathcal{D} de um grafo $G = (V, E)$ é um par $(\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\}, T = (I, F))$, sendo $\{X_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos de V , um para cada nó de T , e T uma árvore, tais que:*

- $\bigcup_{i \in I} X_i = V$;
- Para toda aresta $(v, w) \in E$, existe um $i \in I$ tal que $v \in X_i$ e $w \in X_i$;
- Para todo $i, j, k \in I$, se j está no caminho entre i e k , então $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Pela terceira propriedade da definição de decomposição em árvore acima, podemos observar que para todo $x \in V$, os vértices $i \in I$ tal que $x \in X_i$ induzem uma subárvore de T .

Definição 3.1.2 (Largura em árvore). *A largura em árvore de uma decomposição $\mathcal{D} = (\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\}, T = (I, F))$ é definida como $LA_G(\mathcal{D}) = \max_{i \in I} \{|X_i| - 1\}$. A largura*

em árvore de um grafo G é a largura mínima dentre todas as decomposições em árvore possíveis de G , ou seja, $LA(G) = \min\{LA_G(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ é uma decomposição em árvore de } G\}$.

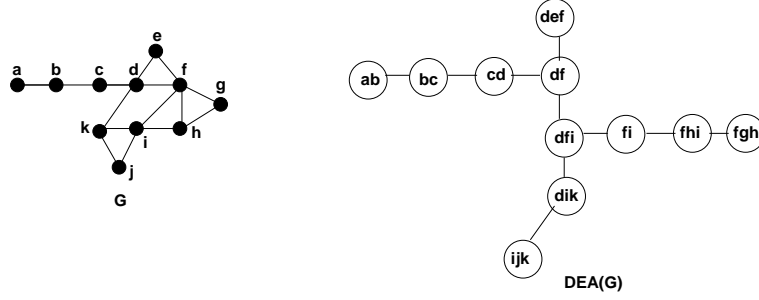


Figura 3.1. Um grafo G de largura em árvore 2 e uma DEA ótima de G

3.2. Propriedades

O objetivo desta seção é apresentar algumas propriedades de decomposição em árvore. As provas de todas estas propriedades podem ser encontradas em [6].

Propriedade 3.2.1. *Seja G um grafo e H um subgrafo de G . Então, $LA(H) \leq LA(G)$.*

Propriedade 3.2.2. *A largura em árvore de um grafo G é a máxima largura em árvore das componentes de G .*

Propriedade 3.2.3. *Seja G um grafo e H um menor de G . Então, $LA(H) \leq LA(G)$.*

Propriedade 3.2.4. *Seja $\mathcal{D} = (\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\}, T = (I, F))$ uma decomposição em árvore de $G = (V, E)$ e seja $W \subseteq G$ tal que W induz uma clique em G . Então, existe um $i \in I$ tal que $W \subseteq X_i$.*

Propriedade 3.2.5. *Seja W um corte clique de um grafo $G = (V, E)$. Então, $LA(G) = \max\{LA(G[X \cup W]) : X \text{ é uma componente de } G \setminus W\}$.*

3.3. Caracterizações por menores proibidos

Sejam G e H grafos quaisquer. Suponhamos que H é um menor de G . Uma classe de grafos \mathcal{C} é fechada sobre menores se para todo grafo G e todo menor H de G , se $G \in \mathcal{C}$,

então $H \in \mathcal{C}$. Note que, para todo inteiro $k \geq 1$, a classe de grafos de largura em árvore no máximo k é fechada sobre menores, pela Propriedade 3.2.3.

Um outro exemplo de classe de grafos fechada sobre menores é a classe dos grafos planares, pois, claramente, se um grafo G é planar, temos que todo subgrafo de G também é planar, além do mais, dado um desenho de G no plano, nós podemos obter um desenho de G_{xy} , para alguma aresta (x, y) , colocando x e y juntos na aresta. Robertson e Seymour estabeleceram resultados profundos sobre menores em sua série de artigos [1983-1996]. O seguinte Teorema é o resultado mais importante provado por Robertson e Seymour em [19]:

Teorema 3.3.1. *Seja G_1, G_2, \dots uma sequência contável de grafos. Então, existem índices i e j , $1 \leq i < j$, tal que G_i é menor de G_j .*

O enunciado do Teorema 3.3.1 era formalmente conhecido como Conjectura de Wagner [25]. Seja \mathcal{C} uma classe de grafos fechada sobre menores (ou seja, para todo $G \in \mathcal{C}$ e H menor de G , $H \in \mathcal{C}$). Se um grafo H é tal que $H \notin \mathcal{C}$, então cada grafo que tem H como menor não está em \mathcal{C} , pois, caso contrário, H estaria em \mathcal{C} . Nesse caso, dizemos que H é um menor proibido para \mathcal{C} . Se, além disso, todo menor de H pertence a \mathcal{C} , dizemos que H é minimal. O conjunto de menores proibidos minimais de \mathcal{C} é o conjunto de obstruções de \mathcal{C} e é denotado por \mathcal{M} . O Teorema 3.3.1 imediatamente implica o seguinte resultado.

Corolário 3.3.2. *Para cada classe de grafos \mathcal{C} fechada sobre menores, o conjunto de obstruções tem cardinalidade finita.*

Note que o Corolário 3.3.2 mostra que para cada $k \geq 1$ fixo, a classe de grafos de largura em árvore no máximo k tem um conjunto de obstruções finito.

Robertson e Seymour [1985] mostraram que para um grafo fixo H , é possível checar se H é um menor de um grafo G em tempo $O(n^3)$, onde $n = |V(G)|$.

Esses resultados implicam que existem algoritmos de reconhecimento de tempo $O(n^3)$ para toda classe de grafos fechada sobre menores: basta testar para um grafo dado se ele tem um menor no conjunto de obstruções da classe de grafos.

Infelizmente, os resultados de Robertson e Seymour somente provam a existência de um conjunto de obstruções finito, mas não providenciam nenhum método para obter o conjunto de obstruções. Também, o algoritmo de teste dos menores tem várias constantes

escondidas, o que pode tornar tal algoritmo impraticável. Além disso, o tamanho de um conjunto de obstruções pode ser muito grande.

Muitos esforços têm sido feitos para encontrar conjuntos de obstruções de uma classe de grafos fechada sobre menores. Por exemplo, Arnborg e Proskurowski [1986] encontraram o conjunto obstruções das classes de grafos de largura em árvore no máximo um, dois e três.

Lema 3.3.3 (Arnborg e Proskurowski, 1986). *Um grafo tem largura em árvore no máximo um se e somente se ele não tem K_3 como um menor, e largura em árvore no máximo 2 se e somente se ele não tem K_4 como um menor.*

3.4. Limites superiores e menores proibidos

Seja $h(G)$ o maior inteiro k tal que G tem um menor grade $k \times k$. Em [17], Robertson e Seymour obtiveram um limite superior para $LA(G)$ em termos de $h(G)$:

Teorema 3.4.1. $LA(G) \leq 2^{20h(G)^5}$.

Em [20], Robertson, Seymour e Thomas provaram que se um grafo G planar não possui um menor grade $k \times k$, então G tem largura em árvore no máximo $6k - 5$. Esse limite superior foi melhorado pelos mesmos autores para $5k - 1$, porém, tal resultado ainda não foi publicado [24].

Teorema 3.4.2. *Todo grafo planar com nenhum menor isomorfo a uma grade $k \times k$ tem largura em árvore menor ou igual a $5k - 1$.*

Recentemente, em [4], Birmelé, Bondy e Reed provaram um limite superior ainda melhor para os grafos sem menores grade 3×3 :

Teorema 3.4.3. *Seja G um grafo sem um menor grade 3×3 . Então, $LA(G) \leq 7$.*

Grafos planares

Neste capítulo, definimos grafos planares e apresentamos alguns corolários do Teorema de Kuratowski [12] que serão bastante úteis na demonstração do principal resultado desta dissertação. Tais corolários identificam em uma grade quais situações resultam nos menores proibidos de Kuratowski.

4.1. Definição e Teorema de Kuratowski

Definição 4.1.1 (Grafos planares). *Um grafo $G = (V, E)$ é planar se G admite uma representação gráfica no plano sem cruzamento de arestas chamada representação planar de G .*

Todos os subgrafos de um grafo planar são planares e qualquer subdivisão de um grafo não planar é não planar. Ao longo de toda esta dissertação, consideramos todos os grafos planares em suas representações gráficas planares. Seja $G = (V, E)$ um grafo planar. As arestas e os vértices de G dividem o plano em áreas que são chamadas faces. Denotamos por $f(G)$ o número de faces de G . A área infinita do plano é chamada face infinita do grafo. Dada uma representação planar de G , G admite várias outras representações planares, onde qualquer face de G torna-se a face infinita.

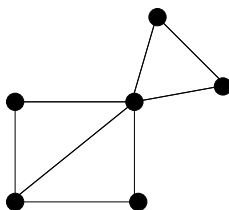


Figura 4.1. Grafo planar

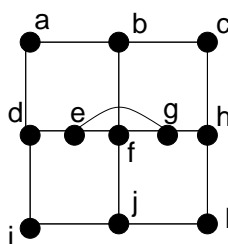
A classe dos grafos planares foi caracterizada por Kuratowski em 1930 [12], conforme pode ser visto no teorema que segue:

Teorema 4.1.2 (Kuratowski). *As seguintes afirmações são equivalentes para todo grafo G :*

- (i) G é um grafo planar;
- (ii) G não contém o K_5 ou o $K_{3,3}$ como menor;
- (iii) G não contém o K_5 ou o $K_{3,3}$ como menor topológico.

4.2. Menores proibidos em grafos planares

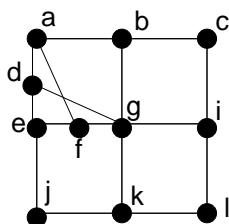
Corolário 4.2.1. *Se $G = (V, E)$ é um grafo planar, então o grafo H abaixo é um menor proibido de G .*



Prova: Suponhamos, por absurdo, que H é um menor de um grafo planar G . Seja H' o grafo obtido a partir de H pela seguinte sequência de remoções e contrações de arestas: remove-se a aresta (f, g) ; contrai-se a aresta (a, d) , obtendo-se o vértice $a * d$; contrai-se a aresta $(a * d, i)$, obtendo-se o vértice $a * d * i$; contrai-se a aresta (g, h) , obtendo-se o vértice $g * h$; contrai-se a aresta $(c, g * h)$, obtendo-se o vértice $c * g * h$ e contrai-se a aresta $(c * g * h, l)$, obtendo-se o vértice $c * g * h * l$.

Observe que H' é isomorfo ao grafo bipartite completo $K_{3,3}$ onde $H = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 = \{b, e, j\}$ e $V_2 = \{a * d * i, f, c * g * h * l\}$. Portanto, pelo Teorema 4.1.2, concluímos que G não é um grafo planar, um absurdo. Logo, se G é um grafo planar, o grafo H acima é um menor proibido de G . \square

Corolário 4.2.2. Se $G = (V, E)$ é um grafo planar, então o grafo H abaixo é um menor proibido de G .



Prova: Suponhamos, por absurdo, que H é um menor de um grafo planar G . Seja H' o grafo obtido a partir de H pela seguinte sequência de remoções e contrações de arestas: remove-se as arestas (g, k) e (g, i) , contrai-se o caminho induzido pelo conjunto de vértices $\{e, j, k, l, i, c, b\}$ a uma aresta $(e, b * c * i * l * k * j)$ (tal contração é obtida por uma sequência sucessiva de contrações de arestas).

Observe que H' é isomorfo ao grafo bipartite completo $K_{3,3}$ onde $V_1 \cup V_2 = H$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 = \{d, f, b * c * i * l * k * j\}$ e $V_2 = \{a, g, e\}$. Portanto, pelo Teorema 4.1.2, concluímos que G não é um grafo planar, um absurdo. Logo, se G é um grafo planar, o grafo H acima é um menor proibido de G . \square

Grafos livres de buracos pares

Um grafo **livre de buracos pares** é um grafo que não contém, como um subgrafo induzido, um buraco de comprimento par. Em [15], Porto apresenta um algoritmo polinomial para reconhecer a classe de grafos Γ . A classe dos grafos livres de buracos pares foi estudada sob as duas seguintes abordagens: na busca da construção de grafos livre de buracos pares a partir de grafos básicos (Teorema da Decomposição [10]) e na busca por propriedades gerais comuns a qualquer grafo livre de buracos pares (Teorema do Vértice Bi-simplicial [7]). Neste capítulo, apresentamos esses dois resultados principais, os quais serão usados para o estudo da decomposição em árvore de grafos em Γ . Além disso, apresentamos duas estruturas proibidas, já conhecidas na literatura, para a classe de grafos livres de buracos pares.

5.1. Estruturas proibidas

Nesta seção, apresentamos duas estruturas proibidas, já conhecidas na literatura de Teoria dos Grafos, para os grafos livres de buracos pares. Tais estruturas serão usadas na prova do teorema principal desta dissertação no Capítulo 6.

Estrutura ponto-ponto

Tal estrutura consiste de dois vértices u e v unidos por 3 caminhos induzidos P_1 , P_2 e P_3 , obedecendo às seguintes restrições:

- Cada um dos caminhos P_1 , P_2 e P_3 tem comprimento pelo menos 2;

- Os caminhos P_1 , P_2 e P_3 são disjuntos internamente em vértices;
- Não existem cordas unindo dois caminhos P_i e P_j , para todo inteiro $1 \leq i < j \leq 3$.

Com certeza, pelo menos dois desses caminhos P_1 , P_2 e P_3 têm a mesma paridade. Portanto, considerando as três restrições acima, concluímos que há a presença de pelo menos um buraco par nessa estrutura. Por exemplo, se P_1 e P_2 têm a mesma paridade, temos que o buraco induzido por esses dois caminhos é um buraco par. Dessa forma, concluímos que grafos livres de buracos pares não apresentam uma estrutura ponto-ponto como subgrafo induzido.

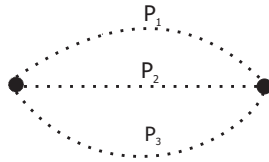


Figura 5.1. *Estrutura ponto-ponto*

Estrutura triângulo-triângulo

Tal estrutura consiste de dois triângulos ligados por 3 caminhos induzidos P_1 , P_2 e P_3 , obedecendo às seguintes restrições:

- Os caminhos P_1 , P_2 e P_3 são disjuntos em vértices;
- Não existem arestas unindo dois caminhos P_i e P_j , para todo inteiro $1 \leq i < j \leq 3$, além das arestas dos triângulos.

Com o mesmo argumento utilizado com a estrutura ponto-ponto, podemos concluir que a estrutura triângulo-triângulo contém pelo menos um buraco par, o que inviabiliza a presença de tal estrutura em grafos livres de buracos pares.

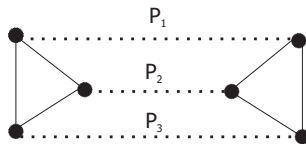


Figura 5.2. *Estrutura triângulo-triângulo*

5.2. Teorema da Decomposição

Iniciamos esta seção com a introdução de várias definições necessárias para o entendimento do teorema da decomposição, apresentado por Kapoor, Cornuéjols, Vusković e Conforti em [10]. Tal teorema resulta numa caracterização estrutural para os grafos livres de buracos pares.

Definição 5.2.1 (Leque). Um **leque** é um grafo com cinco vértices, tal que quatro dos vértices induzem um caminho de comprimento três e o quinto vértice é adjacente a todos os vértices desse caminho (Figura 5.4).

Definição 5.2.2 (Mickey). Um **Mickey**, denotado por $M(xyz, H_1, H_2)$, é um grafo induzido pelo conjunto de vértices $V(H_1) \cup V(H_2)$ satisfazendo:

- o conjunto $\{x, y, z\}$ induz uma clique;
- H_1 é um buraco que contém a aresta xy , mas não contém o vértice z ;
- H_2 é um buraco que contém a aresta xz , mas não contém o vértice y ;
- o conjunto de vértices $V(H_1) \cup V(H_2)$ induz um ciclo com exatamente duas cordas, xy e xz .

(Figura 5.4)

Um **diamante** é um ciclo de comprimento quatro com uma única corda. Um **cap** é um ciclo de comprimento maior que quatro com uma única corda que forma um triângulo com duas arestas do ciclo (Figura 5.10).

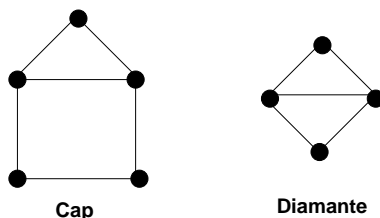


Figura 5.3. Diamante e cap

Uma **roda**, denotada por (H, x) , é um grafo induzido por um buraco H e um vértice $x \notin V(H)$ tendo pelo menos três vizinhos em H , digamos x_1, \dots, x_n . O vértice x é o **centro**

da roda. O buraco H é chamado o **aro da roda**. Um subcaminho de H conectando x_i e x_j é um **setor** se ele não contém vértice intermediário x_l , $i \leq l \leq j$, adjacente a x . Um **setor curto** é um setor de comprimento 1 (isto é, ele consiste de uma aresta), e um **setor longo** é um setor de comprimento pelo menos 2. Uma roda é par se ela contém um número par de setores. Uma roda com k -setores é chamada uma **k -roda**.

Definição 5.2.3 (Roda gêmea, Roda curta, Roda própria). Uma **roda gêmea** é uma 3-roda com exatamente dois setores curtos. Uma roda é **própria** se ela não é uma roda gêmea. Uma **roda curta** é uma 3-roda com exatamente dois setores longos (Figura 5.4).

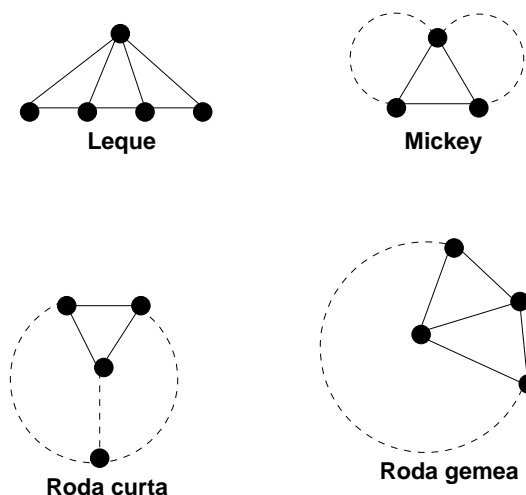


Figura 5.4. Mickey, leque, roda curta e roda gêmea

Uma **k -estrela** é um grafo formado de uma clique C de tamanho k e um subconjunto dos vértices que possuem pelo menos um vizinho em C . Nós nos referimos à 1-estrela como **estrela**, 2-estrela como **dupla-estrela** e 3-estrela como **tripla-estrela**. Em um grafo conexo G , um **corte k -estrela** é um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ que induz uma k -estrela e cuja remoção desconecta G .

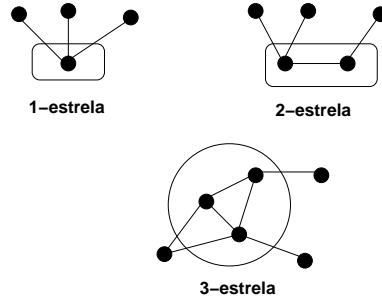


Figura 5.5. Estrela, dupla-estrela e tripla-estrela

Definição 5.2.4 (2-Join). Um grafo conexo G tem um **2-join**, denotado por $H_1|H_2$, com conjuntos especiais A_1, B_1, A_2, B_2 , não-vazios e disjuntos, se os vértices de G podem ser particionados em conjuntos H_1 e H_2 tal que $A_1, B_1 \subseteq H_1$, $A_2, B_2 \subseteq H_2$, todos os vértices de A_1 são adjacentes a todos os vértices de A_2 , todos os vértices de B_1 são adjacentes a todos os vértices de B_2 e estas são as únicas adjacências entre H_1 e H_2 . Ademais, para $i = 1, 2$, $|H_i| > 2$, e se A_1 e B_1 (respectivamente A_2 e B_2) são ambos de cardinalidade 1, então o grafo induzido por H_1 (respectivamente H_2) não é um caminho sem cordas.

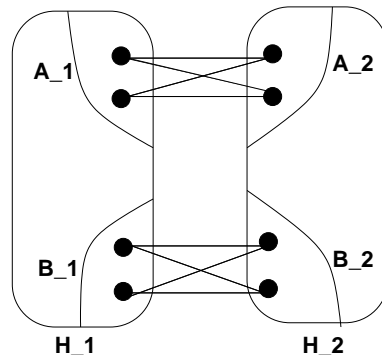


Figura 5.6. 2-Join

Seja L o grafo linha de uma árvore qualquer (Definição 2.2.3). As observações que faremos a seguir são úteis para a definição da classe de grafos básicos não-triviais do teorema da decomposição. Como trata-se de uma árvore, observe que toda aresta de L pertence a exatamente uma clique maximal e todo vértice de L pertence a no máximo duas clique maximais. Os vértices de L que pertencem a exatamente uma clique maximal são chamados vértices folhas. Uma clique de L é **grande** se ela tem tamanho pelo menos 3. No grafo obtido de L pela remoção de todas as arestas em cliques grandes, as componentes

conexas são caminhos sem cordas (possivelmente de comprimento zero). Um caminho P é um segmento interno se ele tem suas extremidades em cliques grandes distintas (quando P é de comprimento zero, ele é chamado um segmento interno quando o vértice de P pertence a duas cliques grandes). Os outros caminhos de P são chamados segmentos folhas. Note que uma das extremidade de um segmento folha é um vértice folha.

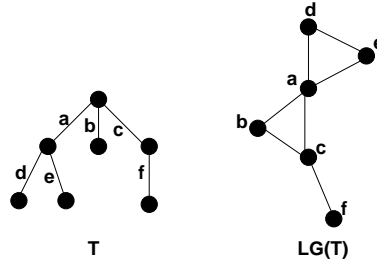


Figura 5.7. Árvore T e grafo linha de T

Definição 5.2.5 (Grafo básico não-trivial). Um grafo R é **básico não-trivial** se R contém dois vértices adjacentes x e y , chamados vértices especiais, de forma que o grafo linha L induzido por $R \setminus \{x, y\}$ é um grafo linha de uma árvore e contém pelo menos duas cliques grandes. Além disso, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Em R , cada vértice folha de L é adjacente a exatamente um dos dois vértices especiais, e nenhum outro vértice de L é adjacente aos nós especiais.
- Cada dois segmentos folhas de L com seus respectivos vértices folhas adjacentes a um mesmo vértice especial, não possuem suas outras extremidades numa mesma clique grande.

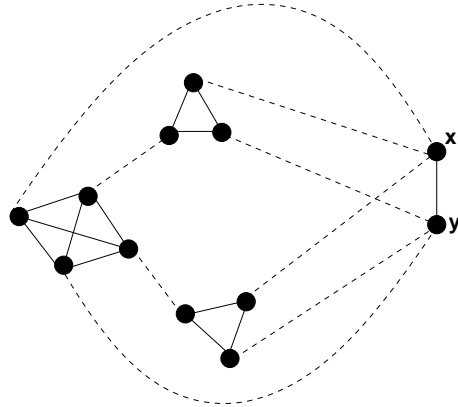


Figura 5.8. Grafo básico não-trivial

Pode-se estender a notação de L a R , dizendo que os segmentos internos de R são os segmentos internos de L , e os segmentos folhas de R são os segmentos folhas de L junto com o vértice em $\{x, y\}$ para o qual o segmento folha é adjacente.

Definição 5.2.6 (Estrutura ponto-triângulo). Dado um triângulo $\{x, z, w\}$ e um vértice y adjacente a no máximo um vértice de $\{x, z, w\}$, uma estrutura **ponto-triângulo** é um grafo induzido por três caminhos sem cordas $P_x = \langle x, \dots, y \rangle$, $P_z = \langle z, \dots, y \rangle$ e $P_w = \langle w, \dots, y \rangle$ de tal forma que esses caminhos se intersectam dois a dois apenas no vértice y e as únicas adjacências entre os nós de $P_x \setminus y$, $P_z \setminus y$ e $P_w \setminus y$ são as arestas do triângulo $\{x, z, w\}$.

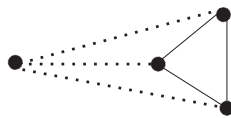


Figura 5.9. Estrutura ponto-triângulo

Um **grafo básico trivial** é um grafo isomorfo a uma estrutura ponto-triângulo. Um grafo é **básico** se ele é um grafo básico trivial ou um grafo básico não-trivial.

O Teorema da Decomposição foi feito para uma classe de grafos mais geral do que a classe de grafos livres de buracos pares. Tal classe consiste nos grafos ímpar-rotuláveis. Um grafo é **rotulado** pela atribuição de pesos 0,1 as suas arestas de tal forma que, para todo triângulo no grafo, a soma dos pesos das arestas de tal triângulo é ímpar. Um grafo é **ímpar-rotulável** se existe uma rotulação de suas arestas de tal forma que, para todo

buraco em G , a soma dos pesos de suas arestas é ímpar. De fato, um grafo não possui buracos pares se e somente se ele é ímpar-rotulado quando todas as arestas recebem rótulo 1 [10]. Isso implica que para todo grafo livre de buracos pares, existe uma rotulação ímpar adequada e, portanto, essa classe está estritamente contida na classe dos grafos ímpar-rotuláveis. Nesta dissertação, estamos interessados na classe dos grafos livres de buracos pares, portanto, o Teorema da Decomposição, provado por Kapoor, Cornuéjols, Vusković e M. Conforti em [10], será enunciado em termos dessa classe de grafos.

Teorema 5.2.7 (Teorema da Decomposição). *Seja G um grafo livre de buracos pares conexo. Então, ou G é básico ou livre de cap, ou ele tem um 2-join ou ele tem um corte estrela, dupla-estrela ou tripla-estrela.*

A demonstração do Teorema da Decomposição, que não será explorada aqui, implica que a todo grafo livre de buracos pares pode ser associada uma árvore de decomposição enraizada obtida como apresentado no Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Construir a árvore de decomposição T de G sem buracos pares

Entrada: Grafo G livre de buracos pares

Saída: Árvore de Decomposição T de G

Considere r a raiz da árvore T

Seja H_r representado por r em T

$H_r \leftarrow G$

$V(T) \leftarrow \{r\}$

$E(T) \leftarrow \emptyset$

Seja Q uma fila

Insira r em Q

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**

Seja x o primeiro vértice da fila Q

Seja H_x o subgrafo de G representado por x em T

se H_x tem um corte-estrela, dupla-estrela ou tripla-estrela **então**

Seja C um corte de H_x de tal tipo

para cada componente S de $H_x \setminus C$ **faça**

$V(T) \leftarrow V(T) \cup \{s\}$

Seja H_s o subgrafo de G representado por s em T

$H_s \leftarrow S \cup C$

Insira s em Q

$E(T) \leftarrow E(T) \cup \{sx\}$

fim para

senão

se H_x tem um 2-join **então**

Seja J um 2-join de H_x

para cada bloco B de J **faça**

$V(T) \leftarrow V(T) \cup \{b\}$

Seja H_b o subgrafo de G representado por b em T

$H_b \leftarrow B$

Insira b em Q

$E(T) \leftarrow E(T) \cup \{bx\}$

fim para

senão

x é uma folha da árvore T , ou seja, H_x é um grafo básico ou é livre de cap

fim se

25

fim se

Retirar x de Q

fim enquanto

5.3. Teorema do Vértice Bi-simplicial

Seja G um grafo qualquer. Um vértice é **bi-simplicial** em G se a sua vizinhança pode ser particionada em duas cliques. Tais cliques não são necessariamente não-vazias.

Seja v um vértice bi-simplicial em G . Seja Q_1 e Q_2 as duas cliques em que os vizinhos de v são particionados. É possível que haja arestas unindo Q_1 e Q_2 .

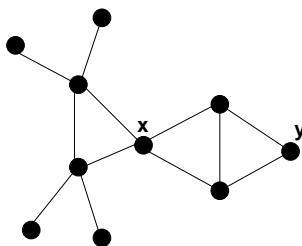


Figura 5.10. Vértices bi-simpliciais (x e y)

Em [16], Bruce Reed conjecturou que todo grafo livre de buracos pares tem um vértice bi-simplicial. Tal conjectura foi provada em [7] por Addario-Berry, Chudnovsky, Havet, Reed e Seymour e consiste no Teorema do Vértice Bi-simplicial.

É fácil vermos que se G é um grafo livre de buracos pares, então todo subgrafo induzido de G também é livre de buracos pares, logo, todo subgrafo induzido de G também tem um vértice bi-simplicial. Dessa forma, concluímos que G possui uma ordem de eliminação $\langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1 \rangle$ por vértices bi-simpliciais, ou seja, em tal ordem, o vértice v_i é bi-simplicial em $G_i = G[v_i, v_{i-1}, \dots, v_1]$ (chamaremos tal ordem de ordem de eliminação bi-simplicial). Observe que cada subgrafo G_i de G não é necessariamente conexo, mesmo que $G_1 = G$ seja conexo.

Se um grafo G tem uma ordem de eliminação bi-simplicial, não necessariamente G é um grafo livre de buracos pares. Como contra-exemplo trivial, podemos citar qualquer buraco par.

Teorema 5.3.1 (Teorema do Vértice Bi-simplicial). *Todo grafo livre de buracos pares não-nulo tem um vértice bi-simplicial.*

Largura em árvore de grafos planares livres de buracos pares

Neste capítulo, provamos que todo grafo G de Γ não possui um menor topológico grade 10×10 . A partir desse último resultado, usando o Teorema 3.4.2, podemos afirmar que se todos os menores grade de G em Γ são menores topológicos, então G possui largura em árvore no máximo 49.

6.1. Menor grade 3×3 em grafos planares livres de buracos pares

Uma possível abordagem para limitar o tamanho da menor grade de um grafo $G \in \Gamma$ é tentar construir grafos livres de buracos pares com grandes menores de grades. Um grafo da classe Γ que possui um menor grade 3×3 é apresentado na Figura 6.3.

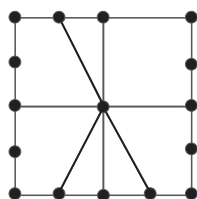


Figura 6.1. Grafo planar livre de buracos pares que contém um menor grade 3×3

Esse grafo tem exatamente um buraco de tamanho 15 e três buracos de tamanho 5 como subgrafos induzidos. Para obter-se um menor grade 3×3 , basta remover as arestas traçadas diagonalmente e aplicar em seguida uma seqüência de contrações de arestas.

6.2. Um limite superior para uma subclasse

Nesta seção, provamos o seguinte teorema:

Teorema 6.2.1. *Se G é um grafo planar livre de buracos pares, então G não possui uma grade 10×10 como menor topológico.*

Os Teoremas 3.4.2 e 6.2.1 têm como consequência o seguinte corolário:

Corolário 6.2.2. *Seja G um grafo planar livre de buracos pares. Se todo menor grade $k \times k$ de G é obtido por uma subdivisão da grade, então $LA(G) \leq 49$.*

As seguintes definições serão usadas na prova do Teorema 6.2.1. Durante toda a prova, G é um grafo planar, em sua representação planar, e livre de buracos pares.

Definição 6.2.3 (Estrutura ponto-buraco). *Uma estrutura ponto-buraco é formada por um vértice, x , um buraco, H , $x \notin H$, e três caminhos induzidos, P_1 , P_2 e P_3 , unindo x e H , disjuntos dois a dois (coincidem somente no vértice x), sem cordas entre si e tais que para cada caminho P_i , $1 \leq i \leq 3$, o número de vértices internos de P_i que possui vizinhos em H é exatamente igual a um.*

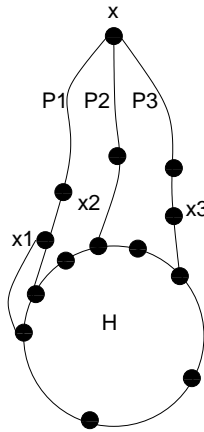


Figura 6.2. *Estrutura ponto-buraco*

Definição 6.2.4 (Estrutura triângulo-buraco). *Uma estrutura triângulo-buraco é formada por um K_3 , $\langle x, y, z \rangle$, um buraco, H , $x, y, z \notin H$, e três caminhos induzidos, P_x , P_y , P_z , unindo x, y, z a H , respectivamente. Além disso, P_x , P_y e P_z são disjuntos dois a dois, sem cordas entre si e tais que para cada um dos caminhos P_x , P_y , P_z , o número de vértices internos que possuem vizinhos em H é exatamente igual a um.*

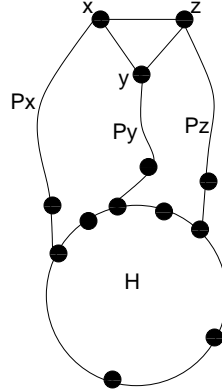


Figura 6.3. Estrutura triângulo-buraco

Seja G um grafo qualquer que contém um menor topológico $G_{k \times l}$. Dizemos que H é um *modelo* de $G_{k \times l}$ em G se H é um subgrafo minimal induzido de G que contém uma subdivisão de $G_{k \times l}$. Observe que H não é necessariamente uma subdivisão de $G_{k \times l}$ (Figura 6.4).

Seja H um *modelo* de $G_{k \times l}$. Temos que H possui $k * l$ *vértices primários*, representados por $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$, que obedecem às seguintes restrições (Figura 6.4):

1. Para o vértice $v_{1,1}$, existem os caminhos $L_1[1, 2]$ e $C_1[1, 2]$ unindo $v_{1,1}$ e os vértices $v_{1,2}, v_{2,1}$, respectivamente, e interceptando-se somente no vértice $v_{1,1}$;
2. Para o vértice $v_{1,l}$, existem os caminhos $L_1[l - 1, l]$ e $C_l[1, 2]$ unindo $v_{1,l}$ e os vértices $v_{1,l-1}, v_{2,l}$, respectivamente, e interceptando-se somente no vértice $v_{1,l}$;
3. Para o vértice $v_{k,1}$, existem os caminhos $L_k[1, 2]$ e $C_1[k - 1, k]$ unindo $v_{k,1}$ e os vértices $v_{k,2}, v_{k-1,1}$, respectivamente, e interceptando-se somente no vértice $v_{k,1}$;
4. Para o vértice $v_{k,l}$, existem os caminhos $L_k[l - 1, l]$ e $C_l[k - 1, k]$ unindo $v_{k,l}$ e os vértices $v_{k,l-1}, v_{k-1,l}$, respectivamente, e interceptando-se somente no vértice $v_{k,l}$;
5. Para todo vértice $v_{i,j}$, onde $1 < i < k$ e $1 < j < l$, existem caminhos $L_i[j - 1, j]$, $L_i[j, j + 1]$, $C_j[i - 1, i]$ e $C_j[i, i + 1]$ unindo $v_{i,j}$ e os vértices $v_{i,j-1}, v_{i,j+1}, v_{i-1,j}, v_{i+1,j}$, respectivamente, e interceptando-se dois a dois somente no vértice $v_{i,j}$;
6. Para todo vértice $v_{i,j}$, onde $i = 1$ e $1 < j < l$, existem caminhos $L_i[j - 1, j]$, $L_i[j, j + 1]$ e $C_j[i, i + 1]$ unindo $v_{i,j}$ e os vértices $v_{i,j-1}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}$, respectivamente, e interceptando-se dois a dois somente no vértice $v_{i,j}$;

7. Para todo vértice $v_{i,j}$, onde $i = k$ e $1 < j < l$, existem caminhos $L_i[j - 1, j]$, $L_i[j, j + 1]$ e $C_j[i - 1, i]$ unindo $v_{i,j}$ e os vértices $v_{i,j-1}$, $v_{i,j+1}$, $v_{i-1,j}$, respectivamente, e interceptando-se dois a dois somente no vértice $v_{i,j}$;
8. Para todo vértice $v_{i,j}$, onde $1 < i < k$ e $j = 1$, existem caminhos $C_j[i - 1, i]$, $C_j[i, i + 1]$ e $L_i[j, j + 1]$ unindo $v_{i,j}$ e os vértices $v_{i-1,j}$, $v_{i+1,j}$, $v_{i,j+1}$, respectivamente, e interceptando-se dois a dois somente no vértice $v_{i,j}$;
9. Para todo vértice $v_{i,j}$, onde $1 < i < k$ e $j = l$, existem caminhos $C_j[i - 1, i]$, $C_j[i, i + 1]$ e $L_i[j - 1, j]$ unindo $v_{i,j}$ e os vértices $v_{i-1,j}$, $v_{i+1,j}$, $v_{i,j-1}$, respectivamente, e interceptando-se dois a dois somente no vértice $v_{i,j}$;
10. Não há interseção entre cada dois caminhos definidos nos itens anteriores além das interseções já destacadas;
11. Para todo inteiro i , $1 \leq i \leq k$, consideramos o caminho $L_i = \bigcup_{j=1}^{l-1} L_i[j, j + 1]$ a i -ésima linha principal de H ;
12. De maneira análoga, para todo inteiro j , $1 \leq j \leq l$, consideramos o caminho $C_j = \bigcup_{i=1}^{k-1} C_j[i, i + 1]$ a j -ésima coluna principal de H .

Os demais vértices de H são chamados *secundários*. Denotamos por $L_i[u, v]$, $1 \leq i \leq k$, $u, v \in L_i$, o caminho entre u e v contendo somente vértices de L_i . Utilizamos $|L_i[u, v]|$ para representar o comprimento do caminho $L_i[u, v]$. De maneira análoga, denotamos por $C_j[u, v]$, $1 \leq j \leq l$, $u, v \in C_j$, o caminho entre u e v contendo somente vértices de C_j . Utilizamos $|C_j[u, v]|$ para representar o comprimento do caminho $C_j[u, v]$. Para $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq r < s \leq l$, denotamos por $L_i[r, s]$ o caminho entre os vértices primários $v_{i,r}$ e $v_{i,s}$ contendo somente vértices de L_i . Da mesma forma, para $1 \leq j \leq l$ e $1 \leq r < s \leq k$, denotamos por $C_j[r, s]$ o caminho entre os vértices primários $v_{r,j}$ e $v_{s,j}$ contendo somente vértices de C_j . Utilizamos parênteses ao invés de colchetes quando nos referirmos ao caminho sem tal extremidade, por exemplo, $L_1(3, 5)$ representa o caminho entre os vértices primários $v_{1,3}$ e $v_{1,5}$ em L_1 de H , incluindo $v_{1,3}$ e excluindo $v_{1,5}$.

Na Figura 6.4, as linhas representam caminhos. Na mesma figura, os vértices $v_{1,1}$, $v_{4,8}$, $v_{4,9}$, $v_{6,5}$, $v_{9,8}$ e $v_{10,10}$ são primários e os vértices x , y e z são secundários.

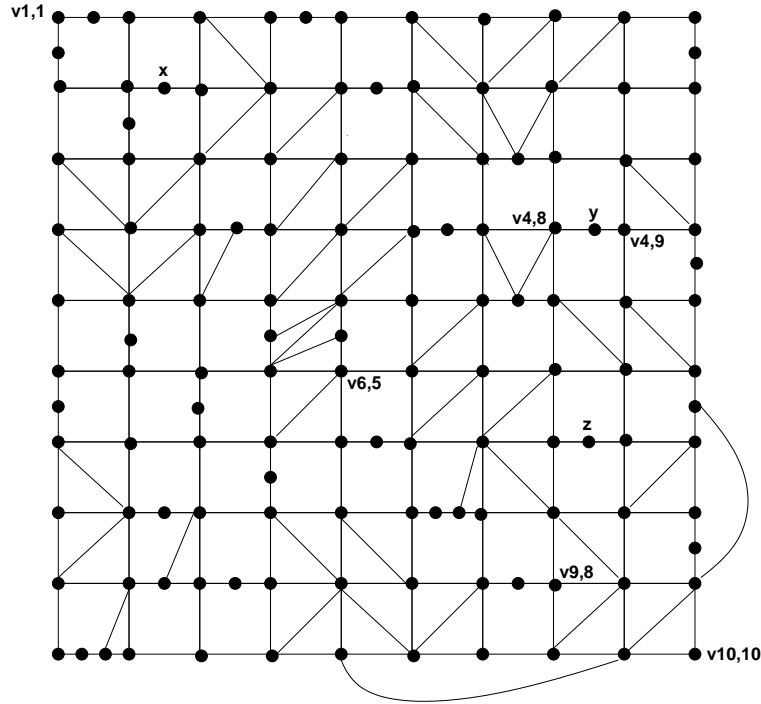


Figura 6.4. Modelo de $G_{10 \times 10}$

6.2.1. Lemas

O objetivo dessa subseção é apresentar um lema e duas observações que serão utilizados na prova do Teorema 6.2.1.

Lema 6.2.5. *Se $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle$ é um caminho com cordas entre um vértice v_1 e um vértice v_k em um grafo $G = (V, E)$ qualquer, $k \geq 3$, então P contém um caminho induzido P' entre os vértices v_1 e v_k .*

A Observação 6.2.6 é consequência direta dos Corolários 4.2.1 e 4.2.2:

Observação 6.2.6. *Seja $G = (V, E)$ um grafo planar qualquer que contém um menor topológico $G_{k \times l}$ e seja H um modelo de $G_{k \times l}$ em G . Então, em H , para $1 < i < k$ e $1 \leq j < l$, a vizinhança de $L_i(j, j + 1)$ está contida em $L_{i-1}[j, j + 1] \cup L_{i+1}[j, j + 1] \cup C_j[i - 1, i + 1] \cup C_{j+1}[i - 1, i + 1]$. Analogamente, para $1 < j < l$ e $1 \leq i < k$, a vizinhança de $C_j(i, i + 1)$ está contida em $C_{j-1}[i, i + 1] \cup C_{j+1}[i, i + 1] \cup L_i[j - 1, j + 1] \cup L_{i+1}[j - 1, j + 1]$.*

A Observação 6.2.7 é consequência direta do fato de um modelo H em um grafo G ser um subgrafo minimal induzido com relação à propriedade de conter uma subdivisão de $G_{k \times l}$:

Observação 6.2.7. *Seja $G = (V, E)$ um grafo planar qualquer que contém um menor topológico $G_{k \times l}$ e seja H um modelo de $G_{k \times l}$ em G . Então, em H , para $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l - 1$, $L_i[j, j + 1]$ é um caminho induzido. Analogamente, para $1 \leq j \leq l$ e $1 \leq i \leq k - 1$, $C_j[i, i + 1]$ é um caminho induzido.*

6.2.2. Prova do Teorema 6.2.1

Seja G um grafo de Γ . Nesta subseção, vamos provar que G não possui uma grade 10×10 como menor topológico.

A prova do Teorema 6.2.1 será feita em duas etapas: a primeira etapa consiste em mostrar que se G é um grafo de Γ , então G é livre de determinadas estruturas (Lema 6.2.8). A segunda etapa consiste em mostrar que um modelo de $G_{10 \times 10}$ possui necessariamente tais estruturas (Lema 6.2.9). Os Lemas 6.2.8 e 6.2.9 implicam o Teorema 6.2.1.

Lema 6.2.8. *Se G é um grafo planar livre de buracos pares, então G é livre de estruturas ponto-buraco e triângulo-buraco, em que os caminhos têm comprimento pelo menos dois e as vizinhanças dos caminhos no buraco são separadas por pelo menos um vértice.*

Prova: Denotemos por P_1, P_2 e P_3 os caminhos da estrutura em questão e por H , o buraco. Analisamos os seguintes casos:

- (i) Existem P_i, P_j tais que $|N^H(P_i)| \geq 3$ e $|N^H(P_j)| \geq 3$: Sejam x_i e x_j os vértices internos de P_i e P_j vizinhos a H , respectivamente (note que são únicos, devido às definições de estrutura ponto-buraco e triângulo-buraco). Numere os vértices de H , $\langle v_1, \dots, v_q \rangle$, de forma que todos os vizinhos de x_i ocorram antes de todos os vizinhos de x_j (note que isso é possível, pois o grafo é planar). Sejam v_i^e o vizinho de x_i mais à esquerda na ordem e v_i^d , o mais à direita. Defina v_j^e e v_j^d com relação a x_j analogamente. Nesse caso, temos uma contradição, devido à existência da estrutura ponto-ponto unindo os vértices x_i e x_j formada pelos seguintes caminhos: caminho unindo v_i^e e v_j^d em H que não passa por v_i^d e v_j^e ; caminho unindo v_i^d e v_j^e em H que não passa por v_i^e e v_j^d ; e caminho formado pela união dos caminhos P_i e P_j , passando

pelo vértice ou triângulo (dependendo de qual estrutura se trata, se ponto-buraco ou triângulo-buraco). Note que, se $N^H(P_i) = \{v, v'\}$, porém $v \notin N(v')$, ainda é possível tomar os caminhos descritos anteriormente. O mesmo ocorre pra P_j , obviamente.

(ii) Existem P_i, P_j tais que $N^H(P_i) = \{v_i\}$ e $N^H(P_j) = \{v_j\}$: nesse caso, é fácil vermos que temos uma estrutura ponto-ponto unindo os vértices v_i e v_j , formada pelos três seguintes caminhos: dois deles definidos por H (cada caminho terá pelo menos um vértice intermediário, devido à premissa) e o terceiro caminho definido pela união dos caminhos P_i e P_j (caso se trate de uma estrutura triângulo-buraco, o caminho conterá também a aresta do triângulo unindo os caminhos P_i e P_j).

(iii) $N^H(P_i) = \{v_1, v_2\}$, $N^H(P_j) = \{u_1, u_2\}$: nesse caso, vamos mostrar que (v_1, v_2) e (u_1, u_2) são obrigatoriamente arestas de H . Sem perda de generalidade, suponhamos por absurdo, que (v_1, v_2) não é uma aresta de H . Logo, é fácil vermos que o grafo possui uma estrutura ponto-ponto unindo os vértices v_1 e v_2 (dois dos caminhos dessa estrutura estão em H e o outro é formado por $\{v, v_1, v_2\}$ onde $v \in P_i$ é o vértice adjacente a v_1 e v_2). Agora, sabendo que $(v_1, v_2), (u_1, u_2) \in E(H)$, sejam $v \in P_i \setminus \{v_1, v_2\}$ e $u \in P_j \setminus \{u_1, u_2\}$ vizinhos de H (são unicamente definidos, devido às definições das estruturas ponto-buraco e triângulo-buraco). Numere os vértices de H a partir de v_1 e suponha, sem perda de generalidade, que v_1, v_2, u_1, u_2 aparecem nesta mesma ordem após a numeração. Logo, nesse caso, temos uma estrutura triângulo-triângulo no grafo formada pelos dois K_3 , $\langle v_1, v_2, v \rangle$ e $\langle u_1, u_2, u \rangle$, e caminhos entre v_1 e u_2 , v_2 e u_1 contidos em H , e entre u e v definido pela união dos caminhos P_i e P_j passando pelo vértice ou triângulo da estrutura.

(iv) $|N^H(P_i)| \geq 3$ e $N^H(P_j) = \{v\}$: numere os vértices de H a partir de v e seja x_i o vértice interno de P_i que possui um vizinho em H , e v_i^e e v_i^d , o vizinho mais à esquerda de x_i na ordem e o mais à direita, respectivamente. Temos uma estrutura ponto-ponto unindo os vértices x_i e v e formada pelos três seguintes caminhos induzidos, de comprimento pelo menos dois, disjuntos e sem cordas entre si: subcaminho $\langle v = v_1, \dots, v_i^e, x_i \rangle$ de H na ordem dada; subcaminho $\langle x_i, v_i^d, \dots, v_{|H|}, v_1 = v \rangle$ de H na ordem dada; e caminho entre v e x_i passando somente pelos vértices dos caminhos P_i e P_j .

Note que, pelos itens (i) a (iii), a única possibilidade de existência da estrutura descrita no teorema é que um dentre os caminhos P_1, P_2 e P_3 possua exatamente um vizinho em

H , um possua exatamente dois vizinhos em H e o último possua três ou mais vizinhos em H , porém, pelo item (iv), isso também não é possível. Logo, G não possui como subgrafo induzido uma estrutura ponto-buraco ou triângulo-buraco como descrita no enunciado do lema.

□

A partir de agora, consideramos uma **estrutura proibida** em um grafo G de Γ , uma estrutura ponto-buraco ou triângulo-buraco descrita como no Lema 6.2.8.

Lema 6.2.9. *Se G contém um menor topológico $G_{10 \times 10}$, então G possui uma estrutura proibida como subgrafo induzido.*

Prova: Seja H um modelo de $G_{10 \times 10}$ de G . Em toda a prova, considere a notação anteriormente introduzida para os vértices de H . A prova será feita por construção e dividida em duas partes, onde a primeira parte consiste em apresentar o buraco C que será utilizado para induzir uma estrutura proibida em G e a segunda parte consiste em provar que existe um vértice x ou um K_3 em H e três caminhos P_1 , P_2 e P_3 partindo de x ou do K_3 de tal forma que $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup C$ induzem uma estrutura proibida em H .

Parte 1: Considere o ciclo $C' = L_3[5, 9] \cup C_9[3, 7] \cup L_7[5, 9] \cup C_5[3, 7]$. A Figura 6.5 representa H , onde o ciclo destacado em cinza claro representa C' . Observe que C' não é necessariamente um ciclo induzido, pois podem existir arestas entre $C_5(3, 4)$ e $L_3(5, 6)$, $C_9(3, 4)$ e $L_3(8, 9)$, $C_5(6, 7)$ e $L_7(5, 6)$ ou $C_9(6, 7)$ e $L_7(8, 9)$. Além disso, pela Observação 6.2.6, essas são as únicas possíveis cordas de C' . Dessa forma, a fim de obtermos um ciclo induzido C contido em C' , considere os seguintes vértices:

1. Seja x o vértice de $C_5[3, 4]$ mais próximo do vértice primário $v_{4,5}$ que é adjacente a pelo menos um vértice de $L_3(5, 6)$;
2. Seja x' o vértice de $L_3(5, 6)$ mais próximo do vértice primário $v_{3,6}$ que é adjacente ao vértice x ;
3. Seja y o vértice de $C_9[3, 4]$ mais próximo do vértice primário $v_{4,9}$ que é adjacente a pelo menos um vértice de $L_3(8, 9)$;
4. Seja y' o vértice de $L_3(8, 9)$ mais próximo do vértice primário $v_{3,8}$ que é adjacente ao vértice y ;

5. Seja z o vértice de $C_9[6, 7]$ mais próximo do vértice primário $v_{6,9}$ que é adjacente a pelo menos um vértice de $L_7[8, 9]$;
6. Seja z' o vértice de $L_7[8, 9]$ mais próximo do vértice primário $v_{7,8}$ que é adjacente ao vértice z ;
7. Seja w o vértice de $C_5[6, 7]$ mais próximo do vértice primário $v_{6,5}$ que é adjacente a pelo menos um vértice de $L_7(5, 6]$;
8. Seja w' o vértice de $L_7(5, 6]$ mais próximo do vértice primário $v_{7,6}$ que é adjacente ao vértice w .

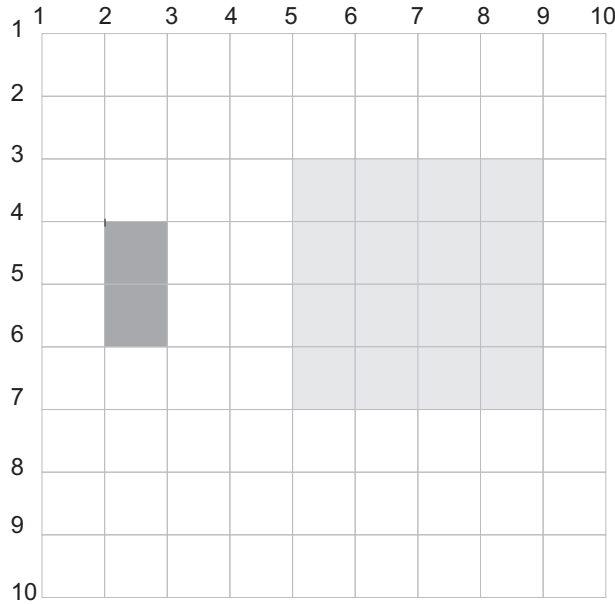


Figura 6.5. H , Modelo de $G_{3 \times 2}$ destacado em cinza escuro e Ciclo C' em cinza claro

Pelas Observações 6.2.6 e 6.2.7 e pelas escolhas dos vértices $x, x', y, y', z, z', w, w'$, concluímos que $C = L_3[x', y'] \cup C_9[y, z] \cup L_7[w', z'] \cup C_5[x, w]$ é um ciclo induzido com tamanho pelo menos 10.

O ciclo C e os vértices $x, x', y, y', z, z', w, w'$ são representados na Figura 6.6.

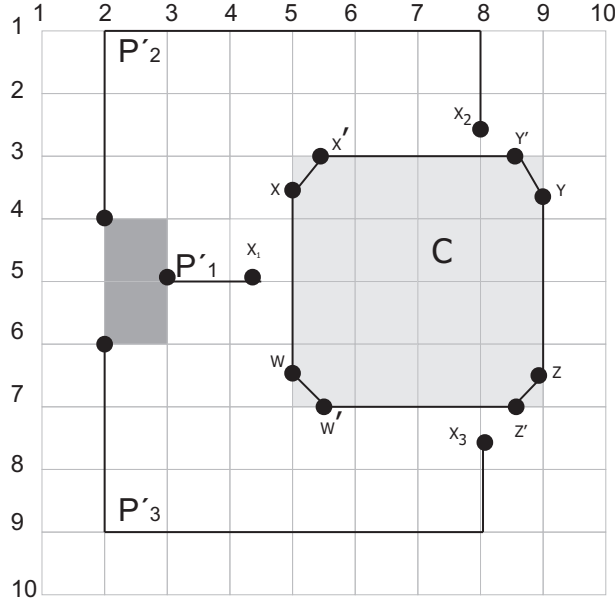


Figura 6.6. Vértices $x, x', y, y', z, z', w, w', x_1, x_2, x_3$ e Ciclo C

Parte 2: O objetivo da segunda parte da prova é encontrar um vértice x ou um K_3 $\langle x, y, z \rangle$ e três caminhos P_1, P_2 e P_3 partindo de x (ou do K_3) que juntos ao buraco C definido acima, formam uma estrutura ponto-buraco ou triângulo-buraco proibida em H (Lema 6.2.8). Considere, primeiramente, os seguintes vértices de H :

1. Seja x_1 o vértice de $L_5[4, 5]$ mais próximo do vértice primário $v_{5,4}$ que tem pelo menos um vizinho em C ;
2. Seja x_2 o vértice de $C_8[2, 3]$ mais próximo do vértice primário $v_{2,8}$ que tem pelo menos um vizinho em C ;
3. Seja x_3 o vértice de $C_8[7, 8]$ mais próximo do vértice primário $v_{8,8}$ que tem pelo menos um vizinho em C .

Observe os vértices x_1, x_2, x_3 também representados na Figura 6.6.

Pela Observação 6.2.6, temos que $N^C(x_1) \subseteq C_6[4, 6]$, $N^C(x_2) \subseteq L_3[7, 9]$ e $N^C(x_3) \subseteq L_7[7, 9]$. Logo, para $1 \leq i < j \leq 3$, a vizinhança de x_i e x_j em H é separada por pelo menos um vértice. Dessa forma, agora temos um buraco C e três vértices x_1, x_2, x_3 em H de tal forma que se $x_i u_i$ e $x_j u_j$ são arestas de H , onde $i \neq j$ e $u_i, u_j \in C$, então u_i não é adjacente a u_j em C . Isto satisfaz mais uma restrição de uma estrutura ponto-buraco ou triângulo-buraco proibida.

Agora, só nos resta encontrar um vértice x ou um $K_3 \langle x, y, z \rangle$ e três caminhos P_i , $1 \leq i \leq 3$, em H , de tal forma que P_i é um caminho induzido entre o vértice x (ou o caminho K_3) e x_i , além disso, para $1 \leq i < j \leq 3$, P_i e P_j são disjuntos internamente em vértices e sem cordas entre si.

Seja $P'_1 = L_5[v_{5,3}, x_1]$ o caminho entre $v_{5,3}$ e x_1 em H . Pelas Observações 6.2.6 e 6.2.7, temos que P'_1 é um caminho induzido. Considere, agora, o caminho $P_2 = C_2[1, 4] \cup L_1[2, 8] \cup C_8[v_{1,8}, x_2]$ unindo os vértices $v_{4,2}$ e x_2 em H . Observe que P_2 não é necessariamente um caminho induzido, porém, pelo Lema 6.2.5, P_2 contém um caminho induzido entre $v_{4,2}$ e x_1 , que chamaremos de P'_2 . Por último, considere o caminho $P_3 = C_2[6, 9] \cup L_9[2, 8] \cup C_8[x_3, v_{9,8}]$ unindo os vértices $v_{6,2}$ e x_3 em H . Seja P'_3 o caminho induzido entre $v_{6,2}$ e x_3 contido em P_3 . Observe que, pela Observação 6.2.6, não existem cordas entre os caminhos P'_i e P'_j , $1 \leq i < j \leq 2$.

Para finalizarmos a prova, basta provarmos que existe um vértice x (ou um $K_3 \langle x, y, z \rangle$) e três caminhos P''_1 , P''_2 e P''_3 disjuntos internamente em vértices (no caso de ser um K_3 , disjuntos em vértices) e sem cordas entre si de tal forma que P''_1 , P''_2 e P''_3 são caminhos unindo x (ou o K_3) aos vértices $v_{5,3}$, $v_{4,2}$ e $v_{6,2}$, respectivamente. Além disso, x (ou K_3) e os caminhos P''_1 , P''_2 , P''_3 estão contidos em $C_2[4, 6] \cup L_5[2, 3]$.

Para provarmos o fato acima, provamos o seguinte fato mais geral: se H é um modelo de $G_{k \times l}$, onde $k \geq 5$ e $l \geq 4$ e H' é um modelo de $G_{3 \times 2}$ contido em H que não possui vértices das linhas principais L_1 e L_k nem das colunas principais C_1 e C_l de H , e além disso, é formado por vértices de colunas e linhas principais consecutivas de H , então H' contém um vértice v ou um K_3 denotado por $\Delta = \langle x, y, z \rangle$, e três caminhos induzidos e sem cordas entre si, unindo v (ou cada um dos vértices de Δ), aos vértices $v_{1,1}$, $v_{3,1}$ e $v_{2,2}$ de H' . No que segue, os vértices, linhas e colunas rotulados se referem ao modelo H' .

Na demonstração, os seguintes quatro casos serão analisados:

1. Não existem arestas entre os caminhos $L_2(1, 2]$ e $C_1[1, 2)$, nem entre os caminhos $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$ em H' ;
2. Existem arestas somente entre os caminhos $L_2(1, 2]$ e $C_1[1, 2)$ em H' ;
3. Existem arestas somente entre os caminhos $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$ em H' ;
4. Existem arestas entre os caminhos $L_2(1, 2]$ e $C_1[1, 2)$ e entre os caminhos $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$ em H' .

Caso 1: Não existem arestas entre $L_2(1, 2]$ e $C_1[1, 2)$, nem entre $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$ (caso representado pela Figura 6.7): nesse caso, a estrutura será formada pelo vértice $v_{2,1}$ e pelos caminhos $P_1 = L_2[1, 2]$, $P_2 = C_1[1, 2]$ e $P_3 = C_1[2, 3]$.

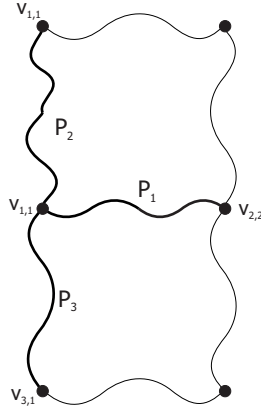


Figura 6.7. Caso 1

Caso 2: Existem arestas somente entre $L_2(1, 2]$ e $C_1[1, 2)$ (caso representado pela Figura 6.8): sejam $\langle u^1, \dots, u^q \rangle$ os vértices de $C_1[1, 2]$ numerados a partir de $v_{2,1}$ até $v_{1,1}$; e sejam $\langle v^1, \dots, v^r \rangle$ os vértices de $L_2[1, 2]$ numerados a partir de $v_{2,1}$ até $v_{2,2}$. Seja (u^i, v^j) a aresta entre $L_2(1, 2]$ e $C_1[1, 2)$ tal que i e j são máximos. Certamente, $i > 1$ e $j > 1$. Considere os seguintes subcasos:

Subcaso 2.1 $(u^i, v^l) \notin E(H)$, para qualquer $1 \leq l < j$ (subcaso representado pela Figura 6.8(a)): nesse subcaso, tomamos o vértice v^j e os caminhos $P_1 = \langle v^j, \dots, v^r \rangle$, $P_2 = \langle v^j, u^i, \dots, u^q \rangle$ e $P_3 = \langle v^j, v^{j-1}, \dots, v^1 \rangle \cup C_1(2, 3]$ unindo v^j e os vértices primários $v_{2,2}$, $v_{1,1}$, $v_{3,1}$, respectivamente. Observe que não existem arestas entre P_1 e P_3 , pela Observação 6.2.7 e devido ao fato de não existirem arestas entre $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$. Além disso, não existem arestas entre P_1 e P_2 devido à escolha da aresta (u^i, v^j) . Por último, não existem arestas entre P_2 e P_3 , pela Observação 6.2.6, pelo Corolário 4.2.2 e devido ao fato de que u^i não possui vizinhos em $\langle v^1, \dots, v^{j-1} \rangle$.

Subcaso 2.2 Existe $v^l \in N(u^i)$, onde $1 \leq l < j$: nesse subcaso, considere v^k , onde k é mínimo e $(u^i, v^k) \in H$. Se $k = j - 1$ (subcaso representado pela Figura 6.8(b)), temos que $\langle u^i, v^k, v^j \rangle$ induzem um K_3 e, nesse caso, tomamos $\langle u^i, v^k, v^j \rangle$ e os caminhos $P_1 = \langle v^j, \dots, v^r \rangle$, $P_2 = \langle u^i, \dots, u^q \rangle$ e $P_3 = \langle v^k, \dots, v^1 \rangle \cup C_1[2, 3]$ formando a

estrutura desejada. Observe que não existem arestas entre P_1 e P_2 devido à escolha de u^i e v^j , não existem arestas entre P_2 e P_3 pela Observação 6.2.6, pelo Corolário 4.2.2 e pela escolha de v_k , além disso, não existem arestas entre P_1 e P_3 pela Observação 6.2.7 e pelo fato de não existirem arestas entre $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$. Se $k < j - 1$ (subcaso representado pela Figura 6.8(c)), consideramos o vértice u^i e os caminhos e $P_1 = \langle u^i, v^j, \dots, v^r \rangle$, $P_2 = \langle u^i, \dots, u^q \rangle$ e $P_3 = \langle u^i, v^k, \dots, v^1 \rangle \cup C_1[2, 3]$ formando a estrutura desejada. Pelos mesmos argumentos do subcaso em que $k = j - 1$, os caminhos P_1, P_2, P_3 são disjuntos internamente em vértices e sem cordas entre si.

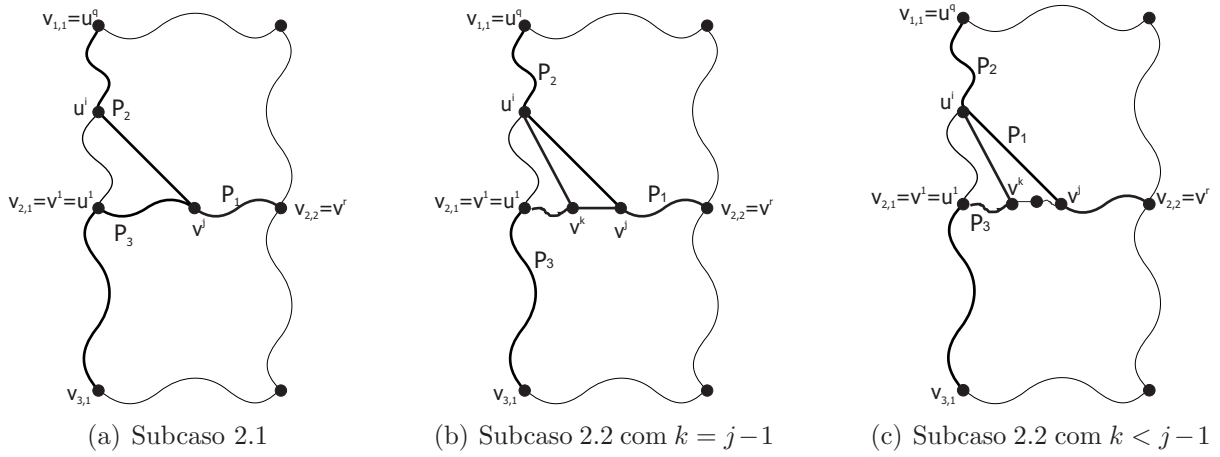


Figura 6.8. Caso 2

Caso 3: Existem arestas somente entre $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$: esse caso é análogo ao anterior.

Caso 4: Existem arestas entre $L_2(1, 2]$ e $C_1[1, 2]$ e entre $L_2(1, 2]$ e $C_1(2, 3]$ (caso representado pela Figura 6.9): nesse caso, considere a numeração dos vértices dos caminhos $C_1[1, 2]$ e $L_2[1, 2]$ como no caso 2. Além disso, considere $\langle w^1, \dots, w^s \rangle$ uma numeração dos vértices de $C_1[2, 3]$ a partir do vértice primário $v_{2,1}$. Sejam $(u^i, v^j), (w^f, v^g) \in E(H)$ tais que i, j, f, g são máximos. Analisamos os seguintes subcasos:

Subcaso 4.1 $g = j$ (subcaso representado pela Figura 6.9(a)): nesse subcaso, consideramos o vértice v^g e os caminhos $P_1 = \langle v^g, u^i, \dots, u^q \rangle$, $P_2 = \langle v^g, \dots, v^r \rangle$ e $P_3 = \langle v^g, w^f, \dots, w^s \rangle$ unindo v^g e os vértices primários $v_{1,1}$, $v_{2,2}$ e $v_{3,1}$, respectivamente. Observe que não existem arestas entre P_1 e P_2 , pela escolha de i e j , nem entre P_2 e P_3 pela escolha de f e g e nem entre P_1 e P_3 pela Observação 6.2.6.

Subcaso 4.2 $g > j$: Suponhamos, primeiramente, que não existem arestas unindo w^f e $\langle v^j, \dots, v^{g-1} \rangle$ (subcaso representado pela Figura 6.9(b)). Consideramos, nesse caso, o vértice v^g e os caminhos $P_1 = \langle v^g, \dots, v^r \rangle$, $P_2 = \langle v^g, v^{g-1}, \dots, v^j, u^i, \dots, u^q \rangle$ e $P_3 = \langle v^g, w^f, \dots, w^s \rangle$. Observe que não existem arestas entre P_1 e P_3 devido à escolha de v^g e w^f , não existem arestas entre P_1 e P_2 devido à escolha de u^i e v^j e pela Observação 6.2.7 e não existem arestas entre P_2 e P_3 , pelo Corolário 4.2.2, pela Observação 6.2.6 e pelo fato de não existirem arestas unindo w^f e $\langle v^j, \dots, v^{g-1} \rangle$. Logo, temos uma estrutura como desejada.

Suponhamos, agora, que existe pelo menos uma aresta unindo w^f e $\langle v^j, \dots, v^{g-1} \rangle$ (subcaso representado pela Figura 6.9(c)). Consideramos, nesse caso, o vértice w^f e os caminhos $P_1 = \langle w^f, v^g, \dots, v^r \rangle$, $P_2 = \langle w^f, w^{f-1}, \dots, w^1 = u^1, \dots, u^q \rangle$ e $P_3 = \langle w^f, \dots, w^s \rangle$. Observe que não existem arestas entre P_1 e P_3 devido à escolha de w^f e v^g e não existem arestas entre P_2 e P_3 , pelas Observações 6.2.6 e 6.2.7. Além disso, observe que devido à aresta (u^i, v^j) e ao fato de existir uma aresta unindo w^f e $\langle v^j, \dots, v^{g-1} \rangle$, o Corolário 4.2.2 implica que não existem arestas unindo os caminhos $\langle w^{f-1}, \dots, w^1 = u^1, \dots, u^{i-1} \rangle$ e $\langle v^g, \dots, v^r \rangle$. Devido à escolha de u^i e v^j , não existem arestas unindo $\langle u^i, \dots, u^q \rangle$ e $\langle v^g, \dots, v^r \rangle$ e devido à escolha de w^f e v^g , não existem arestas unindo w^f e $\langle v^{g+1}, \dots, v^r \rangle$. Portanto, também não existem arestas unindo os caminhos P_1 e P_2 . Logo, nesse caso, também temos uma estrutura como a desejada.

Subcaso 4.3 $g < j$: esse subcaso é análogo ao subcaso anterior.

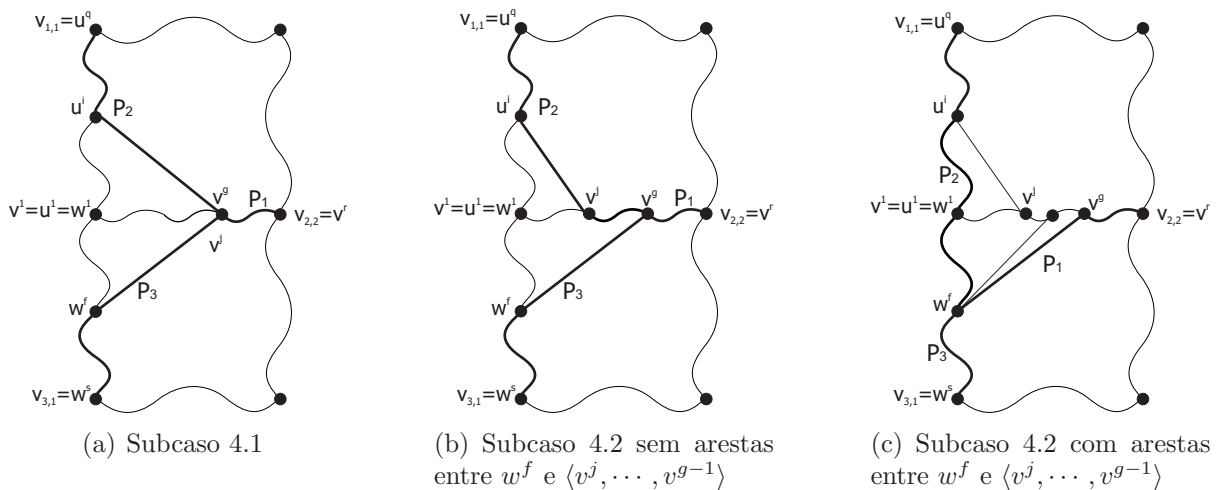


Figura 6.9. Caso 4

Considere $H' = L_4[2, 3] \cup L_6[2, 3] \cup C_2[4, 6] \cup C_3[4, 6]$ um modelo de $G_{3,2}$ contido em H (modelo de 10×10). Concluimos que existe um vértice x ou um $K_3 \langle x, y, z \rangle$ contido em H' e três caminhos P_1'', P_2'' e P_3'' unindo x ou o K_3 , respectivamente, aos vértices $v_{5,3}$, $v_{4,2}$ e $v_{6,2}$. Considere $P_1 = P_1' \cup P_1''$, $P_2 = P_2' \cup P_2''$ e $P_3 = P_3' \cup P_3''$ (P_1', P_2', P_3' definidos em H anteriormente). Logo, temos que $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup C$ induz uma estrutura proibida em H .

□

Teorema da Decomposição para os grafos planares

O objetivo deste capítulo é apresentarmos uma versão do Teorema da Decomposição (Teorema 5.2.7) para os grafos de Γ . Mais precisamente, dado $G \in \Gamma$, analisamos a estrutura de um corte minimal contido em um corte k -estrela ($k = 1, 2, 3$) de G (Seção 7.4) e a estrutura de um 2-join em G (Seção 7.3). Além disso, caracterizamos G no caso em que G é básico (Seção 7.2) e no caso em que G é livre de caps (Seção 7.1).

7.1. Grafos planares livres de buracos pares e livres de caps

Nesta seção, mostramos como é a estrutura dos grafos de Γ livres de caps que não possuem cortes k -estrela ($k = 1, 2, 3$) e 2-join. Como consequência desse resultado, obtemos que a largura em árvore de tais grafos é no máximo 3 se eles também não contêm cortes clique. Em [10], é provado que se um grafo G livre de buracos pares possui um leque, um Mickey, uma roda curta ou uma roda própria (Definições 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3), então G possui um corte k -estrela ($k = 1, 2, 3$), logo, no Lema que segue, assumimos que G não possui roda própria, Mickey ou leque.

Lema 7.1.1. *Se G é um grafo planar livre de buracos pares, de cortes estrela, dupla-estrela, tripla-estrela, 2-join, de cortes clique, de cap e de roda própria, então G é um buraco ímpar ou G é cordal.*

Prova: Suponha que G não é cordal. Logo, existe pelo menos um buraco em G (obviamente, todo buraco de G é ímpar). Seja C um deles. Suponha, por contradição, que $G \setminus C \neq \emptyset$.

Seja, então, H , uma componente conexa de $G \setminus C$. As proposições que seguem serão usadas na prova do lema.

Proposição 7.1.2. *Para todo $v \in H$, $|N^C(v)| \leq 1$.*

Prova: Obviamente, $|N^C(v)| \leq 3$, pois G não possui rodas próprias. Suponha, por absurdo, que existe $v \in H$ tal que $|N^C(v)| = 3$. Como G não possui rodas próprias, temos que os vizinhos de v em C induzem um caminho. Denotemos $N^C(v)$ por $N_v = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ é um caminho induzido. Note que deve existir algum outro caminho ligando v ao ciclo C que não passa por N_v , pois, caso contrário, N_v seria um corte estrela. Seja $P = \langle v = w_0, w_1, \dots, w_q \rangle$ um caminho unindo v e $C \setminus N_v$ que seja mínimo (obviamente, $w_q \neq v_i$, para $i = 1, 2, 3$). Note que $q \geq 2$ e que não existem cordas entre os vértices internos do caminho P e C , com exceção de possíveis cordas entre P e N_v e entre w_{q-1} e os dois vizinhos de w_q em C . Abaixo, analisamos os possíveis casos.

1. Existem arestas entre P e N_v : Por planaridade, tal aresta é para v_1 ou v_3 . Logo, se (w_i, v_j) é uma corda, $w_i \in P$, então $j = 1$ ou $j = 3$ (w_i não pode estar ligado a ambos, pois casos contrário, $\{v_1, v_2, v_3, w_i\}$ induziria um C_4 , um absurdo, pois G é livre de buracos pares). Tomemos, então, uma aresta entre P e N_v , (w_i, v_j) , tal que i é mínimo. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $j = 3$. Temos que $i = 1$, pois, caso contrário, teríamos que $\langle v_2, v = w_0, w_1, \dots, w_i, v_3, v_2 \rangle$ é um cap (corda $w_0 v_3$). Além disso, note que $N^C(w_1) = \{v_3\}$ ou $N^C(w_1) = \{v_3, x, y\}$. No último caso, temos que $((C \setminus \{v_2, x\}) \cup \{w_0, w_1\})$ é um cap (corda $w_0 w_1$). No primeiro caso, temos que $(C \setminus \{v_2\}) \cup \{w_0, w_1\}$ também é um cap (corda $w_0 v_3$), absurdo.
2. Não existem arestas entre P e N_v . Agora, temos os dois seguintes subcasos:
 - (i) $N^C(w_{q-1}) = \{w_q\}$: nesse caso, sejam P_1 o (v_1, w_q) -caminho passando por $C \setminus \{v_2, v_3\}$ e P_3 o (v_3, w_q) -caminho passando por $C \setminus \{v_1, v_2\}$. Note que P_1 e P_3 têm tamanho pelo menos um, já que $w_q \neq v_1, v_2, v_3$, e são disjuntos. Logo, $P_1 \cup \{w_0\}$, $P_3 \cup \{w_0\}$ e P formam uma estrutura ponto-ponto unindo os vértices w_0 e w_q , absurdo.
 - (ii) $G[N^C(w_{q-1})] = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$: note que C define dois caminhos disjuntos entre as extremidades dos caminhos $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, P_1 e P_2 . Suponha, sem perda de generalidade, que P_1 une os vértices v_1 e u_1 e P_2 une os vértices v_3 e

u_3 . Como provamos no caso anterior que não pode existir cordas unindo P e N_v , temos que $v_1 \neq u_1$ e $v_3 \neq u_3$. Sendo $v_1 \neq u_1$, temos que $\langle v_2, v_1, P_1, u_1, w_{q-1}, P, w_0, v_2 \rangle$ é um cap (corda $v_1 w_0$); um absurdo.

Suponha finalmente que existe v tal que $|N^C(v) = 2|$ e $N^C(v) = \{u, w\}$. Se $(u, w) \in E(G)$, temos um cap e, caso contrário, temos uma estrutura ponto-ponto unindo os vértices u e w , uma contradição em ambos os casos. Isso encerra a prova da proposição. \triangle

Proposição 7.1.3. $N^C(H)$ induz um grafo conexo.

Prova: Queremos provar que $N^C(H)$ induz um caminho em C ou é igual a C . Suponha o contrário. Considere uma representação planar de G e seja $v \in C \setminus N^C(H)$. Como G é conexo e não possui cortes clique, existem pelo menos dois vértices em $N^C(H)$. Sejam $v_L, v_R \in N^C(H)$ mais próximos de v à esquerda e à direita, respectivamente. Seja $P = \langle v_0 = v_L, v_1, \dots, v_k = v_R \rangle$ um caminho mínimo entre v_L e v_R cujos vértices internos estão contidos em H (certamente, tal caminho existe, pois $v_L, v_R \in N^C(H)$ e H é conexo). Considere $\langle v_L C v_R \rangle$ o caminho entre v_L e v_R em C que passa por v e $\langle v_L C v_R \rangle'$ o caminho entre v_L e v_R em C que não passa por v . Assuma que $\langle v_L = w_0, w_1, \dots, w_q = v_R \rangle$ é uma ordenação dos vértices de $\langle v_L C v_R \rangle'$, seguindo o desenho planar.

Observe que $|P| \geq 3$. Observe, também, que não existem arestas entre $P \setminus \{v_L, v_R\}$ e $\langle v_L C v_R \rangle$ devido às escolhas de v_L e v_R . Logo, existe pelo menos uma aresta entre $P \setminus \{v_L, v_1, v_R, v_{k-1}\}$ e $C \setminus \{v_L, v_R\}$ (pela proposição 7.1.2, v_1 e v_{k-1} não têm outros vizinhos em C além de v_L e v_R , respectivamente), caso contrário os caminhos $\langle v_L C v_R \rangle$, $\langle v_L C v_R \rangle'$ e P definiriam uma estrutura ponto-ponto unindo v_L e v_R , absurdo. Seja (v_i, w_j) essa aresta escolhida de forma que j seja mínimo e que em seguida, i seja mínimo.

Observe que não existem arestas entre os caminhos $\langle v_0 = v_L, \dots, v_i \rangle$ e $\langle v_L C v_R \rangle'$ além da aresta (v_i, w_j) , pela planaridade de G , pelas escolhas de v_i e w_j e pelo fato de $|N^C(v)| \leq 1$, para todo $v \in H$. Se w_j não é adjacente a v_L , então os caminhos definidos por C , juntamente com o caminho $\langle v_L = v_0, \dots, v_i, w_j \rangle$ entre v_L e w_j definem uma estrutura ponto-ponto, um absurdo. Logo, w_j é o vizinho esquerdo de v_L , ou seja, $j = 1$. Considere, agora, $P' = \langle w_1 = v_0, \dots, v_k, v_R \rangle$ o caminho mínimo entre w_1 e v_R cujos vértices internos estejam contidos em P (tal caminho existe, devido à existência da aresta (v_i, w_1)). Defina $\langle w_j C v_R \rangle$ o caminho entre w_1 e v_R em C contendo v e $\langle w_j C v_R \rangle'$ o caminho entre w_j e v_R em C que não contém v . Observe que não existem arestas entre $P' \setminus \{w_1, v_i, v_k, v_R\}$

e $\langle w_1 C v_r \rangle$, devido à minimalidade de P' e às escolhas de v_L e v_R anteriormente. Dessa forma, podemos aplicar um raciocínio análogo ao anterior (aplicado para os vértices v_L , v_R e o caminho P) aos vértices w_1 , v_R e caminho $P' = \langle v_0 = w_1, v_i, \dots, v_k = v_R \rangle$ para encontrar uma estrutura ponto-ponto entre w_1 e v_L ou uma aresta entre P' e w_2 . Como C é finito e assumimos que $G[N^C(H)]$ ser desconexo, terminaremos por encontrar um w_m , com $m < q - 1$, e uma estrutura ponto-ponto formada por v_R e w_m , um absurdo. \triangle

Para completar a prova do Lema, iremos mostrar que $G = C$. Pela proposição 7.1.3, $N^C(H)$ induz um caminho ou um ciclo. Como G não possui cortes clique, corte estrela e corte dupla-estrela, temos que $|N^C(H)| \geq 5$. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_l \in N^C(H)$ numerados no sentido horário (logo $l \geq 5$ e talvez $v_l = v_1$).

Seja $P = \langle v_1 = w_0, w_1, \dots, v_l = w_k \rangle$ um caminho mínimo entre v_1 e v_l em H que maximiza o número de arestas entre P e C (tal caminho existe, pois H é conexo). Vamos provar primeiro que cada vértice de $\{v_2, \dots, v_{l-1}\}$ vê pelo menos um vértice de P . Observe primeiro que pela planaridade de G , não existem índices i_1, i_2, j_1, j_2 , com $i_1 < i_2$ e $j_1 < j_2$ tais que ambos (w_{i_1}, v_{j_2}) e (w_{i_2}, v_{j_1}) sejam arestas.

Agora, suponha que existe i , $1 < i < l$, tal que v_i não é adjacente à nenhum vértice em P . Sejam v_{i_a} e v_{i_p} os vértices de C imediatamente anterior e posterior a v_i tal que existem arestas de P para v_{i_a} e v_{i_p} (como C tem pelo menos 5 vértices, v_{i_a} e v_{i_p} são distintos e não adjacentes). Sejam w_{i_a} e w_{i_p} os vizinhos de v_{i_a} e v_{i_p} , respectivamente, em P tais que $P' = \langle v_{i_a}, w_{i_a}, w_{i_a+1}, \dots, w_{i_p}, v_{i_p} \rangle$ é um caminho induzido entre v_{i_a} e v_{i_p} com os vértices internos contidos em P . Pelas escolhas de P , v_{i_a} , v_{i_p} e P' , temos uma estrutura ponto-ponto entre v_{i_a} e v_{i_p} , um absurdo. Logo, cada v_i , $1 < i < l$, vê um ou mais vértices de P . Agora, considerando v_i , com $1 < i < l$, v_{i-1} , v_{i+1} e fazendo $P' = \langle v_{i-1}, w_{i_a}, w_{i_a+1}, \dots, w_{i_p}, v_{i+1} \rangle$ ser o caminho induzido entre v_{i-1} e v_{i+1} com os vértices internos contidos em P , temos que $(P' \cup C) \setminus \{v_i\}$ é um buraco C' e v_i vê pelo menos três vértices de C' , uma contradição, pois G não possui rodas próprias. Então, concluímos que se G possui um buraco ímpar C , $G \setminus C$ não pode possuir uma componente H , logo, G é um buraco ímpar ou G é cordal. \square

A partir de agora, denominamos **grafo livre de cap especial** um grafo livre de cap que induz um buraco ímpar ou é cordal. O Lema 7.1.4 limita a largura em árvore da classe dos grafos livre de cap especial.

Lema 7.1.4. *Se G é um grafo livre de cap especial sem cortes clique, então $LA(G) \leq 3$.*

Prova: Se G é um buraco ímpar, temos que $LA(G) = 2$ ([6]). Observe que se G tiver um K_4 , G é um próprio K_4 , pois G não possui cortes clique. Dessa forma, se G é um grafo cordal, como é planar, pelo Teorema de Kuratowski (Teorema 4.1.2), temos que o tamanho da clique máxima de G é no máximo 3, logo, $LA(G) \leq 2$, pois é conhecido que a largura em árvore de todo grafo cordal é igual ao tamanho de sua clique máxima menos 1 ([6]). \square

7.2. Grafos planares livres de buracos pares básicos

Nesta seção, analisamos as estruturas dos grafos de Γ básicos trivial e não-trivial. Seja G um grafo de Γ que é grafo básico não-trivial (Definição 5.2.5). Considere x e y os vértices especiais de G . É fácil observarmos que $G \setminus \{x, y\}$ é um grafo cordal. Como G é planar e não possui cortes clique, temos que o tamanho da maior clique de G é no máximo 3. O Lema 7.2.1 limita a largura em árvore dos grafos de Γ que são básicos não-triviais.

Lema 7.2.1. *Seja G um grafo de Γ sem cortes clique e básico não-trivial. Então, $LA(G) \leq 4$.*

Prova: Considere x e y os vértices especiais de G . Como $G \setminus \{x, y\}$ é um grafo cordal, temos que $G \setminus \{x, y\}$ admite uma decomposição em árvore ótima $\mathcal{D} = (\mathcal{X}, T)$, onde cada $X \in \mathcal{X}$ contém uma clique maximal de $G \setminus \{x, y\}$ ([6]). Como o tamanho da maior clique de $G \setminus \{x, y\}$ é no máximo 3, concluímos que $LA(G \setminus \{x, y\}) \leq 2$. Podemos obter uma DEA de G a partir da DEA \mathcal{D} de $G \setminus \{x, y\}$ apenas incluindo os vértices x, y em todo $X \in \mathcal{X}$. Logo, concluímos que $LA(G) \leq 4$. \square

O Lema 7.2.2 limita a largura em árvore dos grafos de Γ que são básicos triviais, ou seja, de toda estrutura ponto-triângulo.

Lema 7.2.2. *Seja G uma estrutura ponto-triângulo formada por um vértice y , um triângulo $\langle x_1, z_1, w_1 \rangle$ e três caminhos $P_x = \langle x_1, \dots, x_{l_x+1} \rangle$, $P_z = \langle z_1, \dots, z_{l_z+1} \rangle$ e $P_w = \langle w_1, \dots, w_{l_w+1} \rangle$ (l_x, l_z e l_w representam o comprimento dos caminhos P_x, P_z, P_w) unindo o vértice y aos vértices x, z, w respectivamente. Então, $LA(G) \leq 3$.*

Prova: Considere a seguinte DEA $\mathcal{D} = (\mathcal{X}, T)$ de G de largura em árvore igual a 4: acrescente uma parte $X_p = \{x_1, z_1, w_1, y\}$ em \mathcal{X} e um nó t_p representando X_p em T . Para todo inteiro i , $1 \leq i \leq l_x$, acrescente uma parte $X_{x_i} = \{x_i, x_{i+1}, y\}$ em \mathcal{X} e um vértice t_{x_i} em T representando X_{x_i} . Para todo inteiro j , $1 \leq j \leq l_z$, acrescente uma parte

$X_{z_j} = \{z_j, z_{j+1}, y\}$ em \mathcal{X} e um vértice t_{z_j} em T representando X_{z_j} . Para todo inteiro k , $1 \leq k \leq l_w$, acrescente uma parte $X_{w_k} = \{w_k, w_{k+1}, y\}$ em \mathcal{X} e um vértice t_{w_k} em T representando X_{w_k} . Faça o nó t_p adjacente aos nós t_{x_1} , t_{z_1} e t_{w_1} ; o nó t_{x_i} adjacente ao nó $t_{x_{i+1}}$, para todo inteiro $1 \leq i < l_x$; o nó t_{z_j} adjacente ao nó $t_{z_{j+1}}$, para todo inteiro $1 \leq j < l_z$ e o nó t_{w_k} adjacente ao nó $t_{w_{k+1}}$, para todo inteiro $1 \leq k < l_w$.

Observe que o procedimento descrito acima constrói uma DEA para qualquer estrutura ponto-triângulo, pois todo vértice e toda aresta são cobertos por uma parte da decomposição \mathcal{D} retornada, todo vértice dos caminhos P_x, P_z, P_w diferente de y aparece em exatamente duas partes de \mathcal{D} e os vértices de T representando tais partes são adjacentes, além disso, o vértice y está em todas as partes de \mathcal{D} .

□

Os Lemas 7.2.1 e 7.2.2 implicam que se G é um grafo de Γ sem cortes clique e básico, então $LA(G) \leq 4$. Além disso, os Lemas 7.1.4, 7.2.1, 7.2.2 e o Teorema da Decomposição implicam que dada uma árvore de decomposição de um grafo G de Γ , a largura em árvore de todos os subgrafos de G representados pelas folhas de tal árvore é no máximo 4.

A partir de agora, chamamos de **grafo básico especial** todo grafo que é isomorfo a uma estrutura ponto-triângulo ou que é um grafo básico não-trivial onde o tamanho da maior clique é no máximo 3.

7.3. Grafos planares livres de buracos pares que contêm um 2-join

Seja G um grafo planar livre de buracos pares que contém um 2-join (Definição 5.2.4). Seja $V_1|V_2$ o 2-join J de G com conjuntos especiais (A_1, A_2, B_1, B_2) , $A_i, B_i \subset V_i$. Como todo vértice de A_1 é adjacente a todo vértice de A_2 e todo vértice de B_1 é adjacente a todo vértice de B_2 , concluímos que $\min(|A_1|, |A_2|) \leq 2$ e $\min(|B_1|, |B_2|) \leq 2$, pois caso contrário, G teria um menor $K_{3,3}$ como subgrafo, um absurdo, pois G é planar (Teorema 4.1.2).

Um 2-join J com conjuntos especiais (A_1, A_2, B_1, B_2) , $A_i, B_i \subset V_i$ é um **2-join especial** se $\min(|A_1|, |A_2|) \leq 2$ e $\min(|B_1|, |B_2|) \leq 2$.

7.4. Grafos planares livres de buracos pares que contém corte k -estrela ($k = 1, 2, 3$)

Em [10], a prova do Teorema da Decomposição é dividida em 3 partes, onde a primeira parte consiste em provar que quando um grafo G livre de buracos pares contém um subgrafo induzido isomorfo a um leque, um Mickey ou a uma roda própria (Definições 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3), então G tem um corte estrela, dupla-estrela ou tripla-estrela.

Nesta seção, estudamos os grafos de Γ que contém um leque, um Mickey ou uma roda própria, analisando os cortes estrela, dupla-estrela ou tripla-estrela de tais grafos. Os cortes apresentados em [10] não são necessariamente minimais, por outro lado, com o objetivo de limitar o tamanho dos cortes da decomposição, estudamos os cortes minimais contidos em tais cortes k -estrela, $k = 1, 2, 3$.

Em [10], são provados os seguintes fatos para todo grafo livre de buracos pares G :

1. Se G possui um leque $\mathcal{G} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, onde $P = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ é um caminho sem cordas e x_5 é adjacente a todos os vértices do caminho P , então $C = N(x_2) \cup N(x_3) \cup N(x_5) \setminus \{x_1, x_4\}$ é um corte tripla-estrela que separa x_1 de x_4 ;
2. Se G possui um Mickey $\mathcal{M} = (xyz, H_1, H_2)$ onde H_1 contém x, y e H_2 contém x, z , então $C = N(x) \cup N(y) \cup N(z) \setminus \{y_1, z_2\}$ é um corte tripla-estrela que separa $V(H_1) \setminus \{y, x, x_1\}$ de $V(H_2) \setminus \{z, x, x_2\}$;
3. Se G possui uma roda curta $\mathcal{B} = (H, x)$, então $C = N(x) \cup N(y)$ é um corte dupla-estrela que separa H_1 de H_2 , sendo que y é o vértice de H que está entre os dois setores longos, H_1 e H_2 , de \mathcal{B} ;
4. Se G não possui um leque, um Mickey ou uma roda curta, mas possui uma roda própria, então G contém uma roda própria $\mathcal{W} = (H, x)$ com pelo menos três setores longos, além disso, $C = N(x)$ é um corte estrela que separa os setores longos de \mathcal{W} .

Seja G um grafo de Γ que contém um leque, um Mickey, uma roda própria ou uma roda curta e seja C um corte k -estrela de G . Suponhamos que C separa dois conjuntos de vértices H_1 e H_2 contidos em G . Sejam G_1 e G_2 as componentes de $G \setminus C$ que contém os conjuntos H_1 e H_2 , respectivamente. Como C separa G_1 de G_2 , todo caminho entre G_1 e G_2 tem pelo menos um vértice de C .

Considere os seguintes conjuntos de vértices contidos em C :

1. $[C]$: Centro da k -estrela C ;
2. $N^* = N(G_1) \cap N(G_2)$ onde $N(G_i)$ é a vizinhança de G_i em C ;
3. $N_1^* = \{u \in N(G_1) \setminus (N^* \cup [C]) \mid \text{existe um caminho entre } u \text{ e a componente } G_2 \text{ que não passa por } (N(G_1) \cup [C])\}$;
4. $N_2^* = \{u \in N(G_2) \setminus (N^* \cup [C]) \mid \text{existe um caminho entre } u \text{ e a componente } G_1 \text{ que não passa por } (N(G_2) \cup [C])\}$.

Pelas definições dos conjuntos acima, note que o conjunto de vértices $[C] \cap N^*$ pode ser diferente de vazio. Observe que todos os caminhos P entre G_1 e G_2 são de um dos seguintes tipos:

1. P passa pelo centro $[C]$ da k -estrela;
2. P não passa pelo centro $[C]$ da k -estrela e tem comprimento exatamente igual a 2;
3. P não passa pelo centro $[C]$ da k -estrela e tem comprimento maior do que 2.

Observe que $G \setminus ([C] \cup N^*)$ não contém caminhos do tipo 1 nem caminhos do tipo 2 entre G_1 e G_2 . Podemos observar, também, que todo caminho do tipo 3 mínimo unindo G_1 e G_2 em $G \setminus ([C] \cup N^*)$ tem exatamente um vértice x de N_1^* e exatamente um vértice y de N_2^* , logo, se retirarmos ou x ou y de $G \setminus ([C] \cup N^*)$, tal caminho não existirá mais. Dessa forma, podemos obter um corte C' de G contido em C e que separa G_1 de G_2 da seguinte forma: primeiramente, adicionamos $[C] \cup N^*$ em C' a fim de que não exista mais caminhos dos tipos 1 e 2 entre G_1 e G_2 . Depois, realizamos a seguinte operação até que não haja nenhum outro caminho entre G_1 e G_2 em $G \setminus C'$: escolhemos o caminho mínimo entre G_1 e G_2 em $G \setminus C'$ e acrescentamos ou o vértice x ou o vértice y de G no corte C' (x e y como definidos anteriormente). Dessa forma, concluímos que tanto $C' = [C] \cup N^* \cup N_1^*$ quanto $C' = [C] \cup N^* \cup N_2^*$ são cortes de G que ainda separam G_1 de G_2 , portanto, também separam H_1 de H_2 . No que segue, consideremos o corte $C' = [C] \cup N^* \cup N_1^*$. Observe que tal corte C' também é um corte k -estrela de G e defina G'_1 a componente de $G \setminus C'$ que contém H_1 e G'_2 a componente de $G \setminus C'$ que contém H_2 .

Lema 7.4.1. *Seja C' o corte como definido anteriormente contido no corte k -estrela de $G \in \Gamma$. Para todo $v \in [C]$, $|N^{C'}(v) \cap (N^* \cup N_1^*)| \leq 2$.*

Prova: Seja $x \in [C]$. Suponhamos, por absurdo, que $|N^{C'}(x) \cap (N^* \cup N_1^*)| > 2$. Dessa forma, sejam $x_1, x_2, x_3 \in (N^{C'}(x) \cap (N^* \cup N_1^*))$. Temos que G tem um menor $K_{3,3}$ com partições $V_1 = \{x, g'_1, g'_2\}$ e $V_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$, onde g'_1 e g'_2 são os vértices obtidos pelas contrações de G'_1 e G'_2 respectivamente, contradizendo a planaridade de G . □

Lema 7.4.2. *Se C' é um corte como definido anteriormente contido no corte k -estrela de $G \in \Gamma$, então $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| \leq 2$.*

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| > 2$. Dessa forma, sejam $x_1, x_2, x_3 \in (N^* \cup N_1^*) \setminus [C]$. Temos que G tem um menor $K_{3,3}$ com partições $V_1 = \{g'_1, g'_2, g'_3\}$ e $V_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$, onde g'_1, g'_2, g'_3 são os vértices obtidos pela contrações de G'_1, G'_2 e $[C]$ respectivamente. □

Mostraremos em seguida que os cortes C' , obtidos a partir dos cortes k -estrela C ($k = 1, 2, 3$) como definidos anteriormente, são isomorfos a um dos seguintes grafos abaixo:

T1 $V(C') = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $E(C') = \{x_1x_2, x_2x_3\}$, ou seja, C' induz um P_3 ;

T2 $V(C') = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $E(C') = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}$, ou seja, C' induz um P_4 ;

T3 $V(C') = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $E(C') = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\}$;

T4 $V(C') = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $E(C') = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3x_4\}$;

T5 $V(C') = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $E(C') = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_4, x_2x_4\}$;

T6 $V(C') = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $E(C') = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_4, x_2x_5\}$;

T7 $V(C') = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $E(C') = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4, x_1x_5\}$.

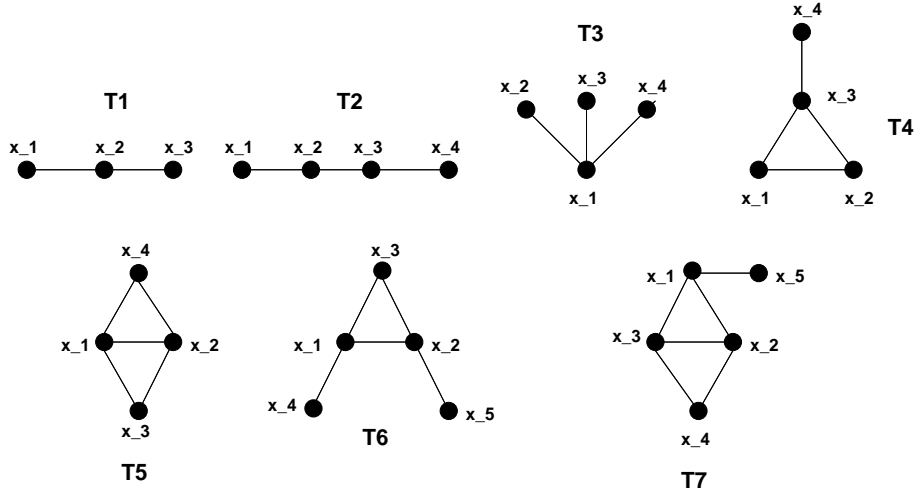


Figura 7.1. Grafos $T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7$

Suponhamos que G é um grafo planar, sem cortes clique, livre de buracos pares e que contém um leque. Seja $\mathcal{G} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ o leque contido em G , onde $P = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ é um caminho sem cordas e x_5 é adjacente a todos os vértices do caminho P .

Seja $C = (N(x_2) \cup N(x_3) \cup N(x_5)) \setminus \{x_1, x_4\}$ o corte tripla-estrela de G separando x_1 de x_4 . Seja G_1 a componente de $G \setminus C$ que contém o vértice x_1 e seja G_4 a componente de $G \setminus C$ que contém o vértice x_4 . Seja $C' = [C] \cup N^* \cup N_1^*$ o corte de G , definido como no início da seção, que continua separando x_1 de x_4 . Considere G'_1 a componente de $G \setminus C'$ que contém x_1 e G'_4 a componente de $G \setminus C'$ que contém x_4 .

Lema 7.4.3. *Seja G um grafo de Γ que contém um leque. Considere o corte tripla-estrela C de G e $C' \subseteq C$ como definido anteriormente. Então:*

$$(1) |N^{C'}(x_2) \setminus \{x_3, x_5\}| \leq 1;$$

$$(2) |N^{C'}(x_3) \setminus \{x_2, x_5\}| \leq 1;$$

$$(3) |N^{C'}(x_5) \setminus \{x_2, x_3\}| \leq 1;$$

(4) Se $y_2 \in (C' \setminus [C]) \cap N(x_2)$, então não existe $y_3 \neq y_2$ tal que $y_3 \in (C' \setminus [C]) \cap N(x_3)$.

Prova:

(1) Como $x_5 \in N^*$, pelo Lema 7.4.1, concluímos que $|N^{C'}(x_2) \setminus \{x_3, x_5\}| \leq 1$;

- (2) Assim como no item anterior, como $x_5 \in N^*$, pelo Lema 7.4.1, concluímos que $|N^{C'}(x_3) \setminus \{x_2, x_5\}| \leq 1$;
- (3) Como podemos contrair a aresta x_2x_3 a um único vértice v que é adjacente aos vértices x_1, x_4 e x_5 , com uma prova análoga à prova do Lema 7.4.1, concluímos que $|N^{C'}(x_5) \setminus \{x_2, x_3\}| \leq 1$;
- (4) Suponhamos, por absurdo, que existe $y_3 \neq y_2$ tal que $y_3 \in (C' \setminus [C]) \cap N(x_3)$. Como $x_5 \in N^*$, contraindo a aresta x_2x_3 a um vértice adjacente aos vértices y_2, y_3, x_5 , assim como no Lema 7.4.1, podemos obter um menor $K_{3,3}$ de G , um absurdo, pois G é um grafo planar.

□

Lema 7.4.4. *Se G é um grafo de Γ que contém um leque e não contém cortes clique, então C' é isomorfo a **T4**, **T5**, **T6** ou **T7**.*

Prova: Como G não possui cortes clique, temos que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| \geq 1$. Primeiramente, suponhamos que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| = 1$. Nesse caso, seja $z \in (N^* \cup N_1^*) \setminus [C]$. Como G não possui cortes clique, temos que z é adjacente a no máximo dois dos vértices x_2, x_3, x_5 . Logo, nesse caso, C' é isomorfo a **T4** ou **T5**.

Agora, suponhamos que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| = 2$. Nesse caso, sejam $z_1, z_2 \in (N^* \cup N_1^*) \setminus [C]$. Pelo Lema 7.4.3, um dos vértices z_1, z_2 é adjacente somente ao vértice x_5 e o outro é adjacente a pelo menos um dos vértices x_2, x_3 e não é adjacente ao vértice x_5 . Sem perda de generalidade, assumamos que z_1 é adjacente a x_5 e z_2 é adjacente a pelo menos um dos vértices x_2, x_3 . Observe que z_1 não é adjacente a z_2 , pois G é livre de buracos pares. Se z_2 é adjacente somente a um dos vértices x_2, x_3 , C' é isomorfo a **T6**. Se z_2 é adjacente aos dois vértices x_2, x_3 , C' é isomorfo a **T7**. □

Agora, suponhamos que G é um grafo planar, sem cortes clique, livre de buracos pares e que contém uma roda curta. Dado uma roda curta (H, x) de G , seja y, x_1 e x_2 os vizinhos de x em H onde x_1 e x_2 são adjacentes, enquanto y não é adjacente a x_1 ou x_2 . Seja H_1 o buraco contendo x_1, x, y e H_2 o buraco contendo x_2, x, y . Finalmente, seja y_1, y_2 os vizinhos de y em H_1, H_2 respectivamente, distintos de x .

Chamemos $V(H_1) \setminus \{y_1, y, x, x_1\}$ de H'_1 e $V(H_2) \setminus \{y_2, y, x, x_2\}$ de H'_2 . Seja $C = N(x) \cup N(y)$ o corte dupla-estrela separando H'_1 de H'_2 . Considere $C' = \{x, y\} \cup N^* \cup N_1^*$ o corte

de G contido em C como definido no início da seção que ainda separa H'_1 de H'_2 . Seja G'_1 a componente de $G \setminus C'$ que contém H'_1 e G'_2 a componente de $G \setminus C'$ que contém H'_2 .

Lema 7.4.5. *Seja G um grafo de Γ que contém uma roda curta (H, x) . Considere o corte dupla-estrela C de G e $C' \subseteq C$ como definidos anteriormente. Então:*

- (1) $|N^{C'}(x) \setminus \{y\}| \leq 1$;
- (2) $|N^{C'}(y) \setminus \{x\}| \leq 2$;
- (3) $|(N^* \cup N_1^*) \cap \{x_1, x_2\}| \geq 1$.

Prova:

- (1) Como $y \in N(x)$ e $y \in (N^* \cup N_1^*)$, pelo Lema 7.4.1, concluímos que $|N^{C'}(x) \setminus \{y\}| \leq 1$;
- (2) Como x não pertence necessariamente a $(N^* \cup N_1^*)$, pelo Lema 7.4.1, concluímos que $|N^{C'}(y) \setminus \{x\}| \leq 2$;
- (3) Observe que pelo menos um dos vértices $x_1, x_2 \in (N^* \cup N_1^*)$, pois caso contrário, C' não separaria H'_1 de H'_2 .

□

Lema 7.4.6. *Se G é um grafo de Γ que contém uma roda curta e não contém cortes clique, então C' é isomorfo **T1**, **T2**, **T3**, **T4** ou **T5**.*

Prova: Como G não possui cortes clique, temos que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| \geq 1$. Primeiramente, suponhamos que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| = 1$. Nesse caso, seja $z \in (N^* \cup N_1^*) \setminus [C]$. Pelo item 3 do Lema 7.4.5, $z \in \{x_1, x_2\}$. Como G não possui cortes clique, temos que z não é adjacente a y . Logo, nesse caso, C' é isomorfo a **T1**.

Agora, suponhamos que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| = 2$. Nesse caso, sejam $z_1, z_2 \in (N^* \cup N_1^*) \setminus [C]$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que z_1 é adjacente a x . Se cada um dos vértices z_1, z_2 é adjacente a apenas um dos vértices x, y e ao mesmo vértice, temos que C' é isomorfo a **T3** (se z_1 não é adjacente a z_2) ou C' é isomorfo a **T4** (se z_1 é adjacente a z_2). Se z_1 e z_2 são adjacentes a apenas um dos vértices de $\{x, y\}$ e tais vértices são distintos, temos que z_1 não é adjacente a z_2 , pois G é livre de buracos pares. Logo nesse caso, C' é isomorfo a **T2**. Se um dos vértices de $\{z_1, z_2\}$ é adjacente a ambos x e y e o outro vértice é adjacente

somente ao vértice y (não pode ser adjacente somente ao vértice x , pelo item 1 do Lema 7.4.5), temos que C' é isomorfo a **T4** (se z_1 não é adjacente a z_2) ou C' é isomorfo a **T5** (se z_1 é adjacente a z_2). Observe que os vértices z_1, z_2 não podem ser ambos adjacentes aos vértices x, y , pelo item 1 do Lema 7.4.5. \square

Suponhamos, agora, que G é um grafo de Γ sem cortes clique, que não contém leque, Mickey ou roda curta, e contém uma roda própria.

Seja $\mathcal{W} = (H, x)$ uma roda própria de G com pelo menos três setores longos. Além disso, seja $C = N(x)$ o corte estrela separando os setores longos de \mathcal{W} . Sejam H_1 e H_2 os nós intermediários de dois setores longos distintos de (H, x) . Considere, também, G_1 a componente de $G \setminus N(x)$ que contém H_1 , G_2 a componente de $G \setminus N(x)$ que contém H_2 e $C' = \{x\} \cup N^* \cup N_1^*$ o corte de G como definido anteriormente que continua separando H_1 de H_2 .

Lema 7.4.7. $|N^{C'}(x) \cap (N^* \cup N_1^*)| = 2$.

Prova: Como G não possui cortes clique, temos que $|N^{C'}(x) \cap (N^* \cup N_1^*)| > 1$. Pelo Lema 7.4.1, temos que $|N^{C'}(x) \cap (N^* \cup N_1^*)| \leq 2$. Logo, concluímos que $|N^{C'}(x) \cap (N^* \cup N_1^*)| = 2$. \square

Lema 7.4.8. *Se G é um grafo de Γ que contém uma roda própria, mas não contém leque, Mickey, roda curta nem cortes clique, então C' é isomorfo a **T1**.*

Prova: Sejam $x_1, x_2 \in N^{C'}(x)$. Como G não possui cortes clique, x_1 não é adjacente a x_2 . Logo, C' é isomorfo a **T1**. \square

Por último, suponhamos que G é um grafo de Γ , sem cortes clique e que G contém um Mickey $M(xyz, H_1, H_2)$. Considere x_1 e x_2 os vizinhos de x em H_1 e H_2 , respectivamente, que são distintos de y e z . Denote por y_1 o vizinho de y em H_1 e z_2 o vizinho de z em H_2 , $y_1, z_2 \neq x$. Chamamos $V(H_1) \setminus \{x, y, x_1\}$ de H'_1 e $V(H_2) \setminus \{z, x, x_2\}$ de H'_2 . Seja $C = (N(x) \cup N(y) \cup N(z)) \setminus \{y_1, z_2\}$ o corte tripla-estrela separando H'_1 de H'_2 . Denote por $C' = N_1^* \cup N^* \cup [C]$ o corte de G contido em C que também separa H'_1 de H'_2 .

Chamemos $V(H_1) \setminus \{x, y, x_1\}$ de H'_1 e $V(H_2) \setminus \{z, x, x_2\}$ de H'_2 . Seja $C = (N(x) \cup N(y) \cup N(z)) \setminus \{y_1, z_2\}$ o corte tripla-estrela separando H'_1 de H'_2 . Consideremos $C' = N_1^* \cup N^* \cup [C]$ o corte de G contido em C que também separa H'_1 de H'_2 . No Lema 7.4.9, considere G'_1 a componente de $G \setminus C'$ que contém H'_1 e G'_2 a componente de $G \setminus C'$ que contém H'_2 .

Lema 7.4.9. *Se G é um grafo planar livre de buracos pares que contém um Mickey, então:*

- (1) $|N^{C'}(y) \setminus \{x, z\}| \leq 1$;
- (2) $|N^{C'}(z) \setminus \{x, y\}| \leq 1$;
- (3) $|N^{C'}(x) \setminus \{y, z\}| \leq 1$;
- (4) *Se $y' \in ((N_1^* \cup N^*) \cap N(y)) \setminus [C]$, então não existe $z' \neq y'$ tal que $z' \in ((N_1^* \cup N^*) \cap N(z)) \setminus [C]$.*

Prova:

- (1) Se $x_1 \in G'_1$ e $x_2 \in G'_2$, temos que $x \in N^*$. Nesse caso, como $x \in N(y)$, pelo Lema 7.4.1, concluímos que $|N^{C'}(y) \setminus \{x, z\}| \leq 1$. Se $x_1 \in C'$ ou $x_2 \in C'$, temos que $|(N^* \cup N_1^*) \setminus [C]| \geq 1$, logo, pelo Lema 7.4.2 e pelo fato dos vértices x_1, x_2 não pertencerem à $N(y)$, concluímos que $|N^{C'}(y) \setminus \{x, z\}| \leq 1$.
- (2) A prova desse item é análoga à prova do item 1.
- (3) Suponhamos, por absurdo, que $|N^{C'}(x) \setminus \{y, z\}| > 1$. Dessa forma, sejam $x'_1, x'_2 \in N^{C'}(x) \setminus \{y, z\}$. Podemos contrair a aresta yz a um único vértice x'_3 que é adjacente aos vértices x, y_1, z_2 . Podemos contrair G'_1 a um único vértice g'_1 que é adjacente aos vértices x'_1, x'_2, x'_3 . Podemos também contrair G'_2 e os caminhos unindo os vértices x'_1, x'_2, x'_3 e G'_2 a um único vértice g'_2 que é adjacente aos vértices x'_1, x'_2, x'_3 . Portanto, podemos obter um menor $K_{3,3}$ de G com partições $V_1 = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ e $V_2 = \{x, g'_1, g'_2\}$, um absurdo.
- (4) A prova desse item é análoga à prova do último item do Lema 7.4.3.

□

Lema 7.4.10. *Se G é um grafo planar de Γ que contém um Mickey e não contém cortes clique, então C' é isomorfo a um dos grafos **T4**, **T5**, **T6**, **T7***

Prova: A prova desse lema é análoga à prova do Lema 7.4.4. □

Seja G um grafo de Γ que não contém cortes clique e contém um corte k -estrela C ($k = 1, 2, 3$). Já mostramos que G contém um corte C' contido em C que é isomorfo a

um dos grafos $T1$ a $T7$. Mostraremos, agora, quais são as possíveis estruturas do corte minimal C^* contido em C' . Por último, apresentamos alguns lemas que envolvem grafos planares e cortes minimais.

Mais especificamente, vamos provar que C^* é isomorfo a um dos grafos abaixo:

G1 $V(G1) = \{x_1, x_2\}$ e $E(G1) = \emptyset$

G2 $V(G2) = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $E(G2) = \{x_1x_2, x_2x_3\}$, ou seja, $G2$ induz um P_3 ;

G3 $V(G3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $E(G3) = \emptyset$;

G4 $V(G4) = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $E(G4) = \{x_1x_2\}$;

G5 $V(G5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $E(G5) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}$, ou seja, $G5$ induz um P_4 ;

G6 $V(G6) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $E(G6) = \{x_1x_2, x_2x_3\}$;

G7 $V(G7) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $E(G7) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$.

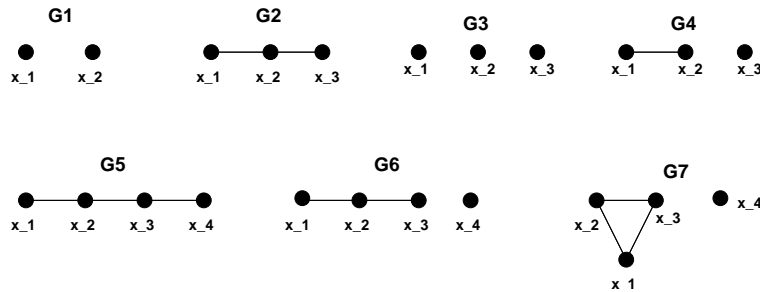


Figura 7.2. Grafos $G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7$

Lema 7.4.11. *Seja G um grafo planar livre de buracos pares e C um corte de vértices minimal de G . Temos que $|N^C(v)| \leq 2$, para todo $v \in C$.*

Prova: Suponhamos, por contradição, que existe $v \in C$ tal que $|N^C(v)| > 2$. Sejam $v_1, v_2, v_3 \in N^C(v)$. Como C é um corte, existem pelo menos duas componentes conexas, G_1 e G_2 , em $G \setminus C$. Além disso, como C é minimal, cada vértice em C possui pelo menos um vizinho em G_1 e pelo menos um vizinho em G_2 . Podemos reduzir G_1 a um único vértice g_1 que é adjacente aos vértices v_1, v_2, v_3 , além disso, podemos reduzir G_2 a um único vértice

g_2 que também é adjacente aos vértices v_1, v_2, v_3 . Dessa forma, obtemos um $K_{3 \times 3}$ com partições $\{g_1, g_2, v\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$, um absurdo, pois G é um grafo planar. \square

Como $T1, T2, T4$ são isomorfos a subgrafos induzidos de $T6$ e $T5$ é isomorfo a um subgrafo induzido de $T7$, concluimos que o corte minimal C^* é isomorfo a um subgrafo induzido dos grafos $T3, T6$ ou $T7$. No Lema 7.4.12, com a ajuda do Lema 7.4.11, mostramos quais são os possíveis subgrafos induzidos H de $T3, T6$ ou $T7$ tal que C^* pode ser isomorfo a H .

Lema 7.4.12. C^* é isomorfo a um dos grafos $G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7$.

Prova: Suponhamos, primeiramente, que C^* é isomorfo a um subgrafo induzido de **T3**. Nesse caso, pelo Lema 7.4.11, C^* possui no máximo 3 vértices. Como G não possui cortes clique, concluimos que C^* é isomorfo a **G1, G2** ou **G3**. Suponhamos, agora, que C^* é isomorfo a um subgrafo induzido de **T6** diferente de **G1, G2** ou **G3**. Pelo Lema 7.4.11, C^* tem no máximo 4 vértices. Como G não possui cortes clique, se C^* tem 3 vértices, C^* é isomorfo a **G4** e se C^* tem 4 vértices, é fácil observarmos que C^* é isomorfo a **G5** ou **G6**. Por último, suponhamos que C^* é isomorfo a um subgrafo induzido de **T7** diferente de **G1, G2, G3, G4, G5** ou **G6**. Nesse caso, pelo Lema 7.4.11 e pelas afirmações anteriores, é fácil observarmos que C^* tem exatamente 4 vértices e é isomorfo a **G7**. \square

Os Lemas 7.4.13 e 7.4.14 limitam o número de componentes de todo corte minimal C de um grafo planar livre de buracos pares que é isomorfo ao grafo $T1$ ou possui pelo menos três vértices.

Lema 7.4.13. *Seja G um grafo planar e C^* um corte minimal de G tal que $|C^*| \geq 3$, então, $G \setminus C^*$ tem exatamente duas componentes.*

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $G \setminus C^*$ tem três componentes G_1, G_2, G_3 . Seja $c_1, c_2, c_3 \in C^*$. Como C^* é um corte minimal de G , podemos reduzir cada componente $G_i, i = 1, 2, 3$, a um único vértice g_i que é adjacente aos vértices c_1, c_2, c_3 . Dessa forma, obtemos um $K_{3,3}$ com partições $V_1 = \{c_1, c_2, c_3\}$ e $V_2 = \{g_1, g_2, g_3\}$, um absurdo, pois G é um grafo planar. \square

Lema 7.4.14. *Seja G um grafo planar livre de buracos pares e C^* um corte minimal de G isomorfo ao grafo G_1 , então, $G \setminus C^*$ tem exatamente duas componentes.*

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $G \setminus C^*$ tem três componentes G_1, G_2, G_3 . Para cada componente G_i , $i = 1, 2, 3$, seja P_i um caminho induzido unindo os vértices x_1 e x_2 de C^* que passa somente pelos vértices de G_i . Tais caminhos existem, pois C^* é um corte minimal. Além disso, o comprimento de cada caminho P_i é maior ou igual a 2. Temos que $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ induz uma estrutura ponto-ponto unindo os vértices x_1 e x_2 , um absurdo, pois G é livre de buracos pares. \square

Os lemas 7.4.13 e 7.4.14 implicam que se C^* é um corte minimal de um grafo G planar livre de buracos pares isomorfo a um dos grafos $G1$ a $G7$, então, o número de componentes de $G \setminus C$ é exatamente igual a 2.

Denominamos **corte especial** um corte minimal de um grafo G que é isomorfo a um dos grafos $G1$ a $G7$.

7.5. Teorema da Decomposição

Nesta seção, apenas apresentamos uma versão do Teorema da Decomposição para os grafos planares livres de buracos pares. Tal teorema é consequência direta dos resultados apresentados nas quatro seções anteriores.

Seja G um grafo planar livre de buracos pares que não contém um corte clique. Se G contém um leque, um Mickey ou uma roda própria, então G possui um corte isomorfo a um dos grafos $G1$ a $G7$ (um corte especial).

Teorema 7.5.1. *Seja G um grafo planar livre de buracos pares que não contém um corte clique. Então, ou G é um grafo básico especial, ou é um grafo livre de cap especial, ou ele tem um 2-join especial ou ele tem um corte especial.*

Algoritmo de decomposição baseado no Teorema do Vértice Bi-simplicial

Neste capítulo, apresentamos um algoritmo para decompor em árvore um grafo livre de buracos pares qualquer. Tal algoritmo é baseado no **Teorema do Vértice Bi-simplicial**. Primeiramente, apresentamos o algoritmo numa visão intuitiva e, por último, o apresentamos na linguagem algorítmica, analisando a corretude e complexidade do mesmo.

8.1. Algoritmo

Seja G um grafo livre de buracos pares e $\langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle$ uma ordem de eliminação bi-simplicial de G (o Teorema do Vértice Bi-simplicial garante a existência de tal ordem). Considere $N^{G_i}(v_i)$ a vizinhança do vértice v_i em $G_i = G[v_i, v_{i-1}, \dots, v_1]$.

Observe que G_i não é necessariamente um grafo conexo, logo, não podemos construir uma DEA de G obtendo, a cada passo, uma DEA de G_i . Para superar esse problema teórico, introduzimos a noção de Decomposição em Floresta (DEF) de um grafo H qualquer (conexo ou desconexo) cuja definição segue.

Seja H um grafo qualquer e H_1, \dots, H_r as componentes de H (observe que $r = 1$ caso H seja um grafo conexo). Uma **decomposição em floresta (DEF)** de H é um par (\mathcal{X}, F) com $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r\}$ e $F = \{T_1, \dots, T_r\}$ onde (\mathcal{X}_i, T_i) é uma DEA de H_i , para todo $1 \leq i \leq r$.

A partir da ordem de eliminação bi-simplicial $\langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle$ de um grafo G livre de buracos pares, uma DEF de G pode ser construída recursivamente da seguinte forma:

1. Caso base, ou seja, $i = 1$: Observe que G_1 é um grafo trivial, logo, uma DEF (\mathcal{X}, F) de G_1 é tal que F consiste de uma única árvore $T_{v_1} = (\{v_1\}, \emptyset)$ e \mathcal{X} é formado por um único conjunto $\mathcal{X}_{v_1} = \{X\}$ onde $X = v_1$. Observe que $(\mathcal{X}_{v_1}, T_{v_1})$ é trivialmente uma DEA de G_1 .
2. Passo da indução, $i > 1$: Seja (\mathcal{X}, F) uma DEF de G_{i-1} . Considere o vértice v_i e $N^{G_i}(v_i)$. Queremos obter uma DEF de G_i a partir da DEF de G_{i-1} já obtida. Temos os seguintes casos:

- (i) $N^{G_i}(v_i) = \emptyset$ (Figura 8.1). Nesse caso, G_i é um grafo desconexo. Portanto, basta acrescentar uma DEA para a componente de G_i que é formada pelo vértice v_i . Mais formalmente, criamos uma árvore $T_{v_i} = (\{v_i\}, \emptyset)$, uma parte $X = \{v_i\}$ e um conjunto $\mathcal{X}_{v_i} = \{X\}$ e fazemos $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \cup \mathcal{X}_{v_i}$, $F' = F \cup T_{v_i}$, obtendo claramente uma DEF (\mathcal{X}', F') de G_i .

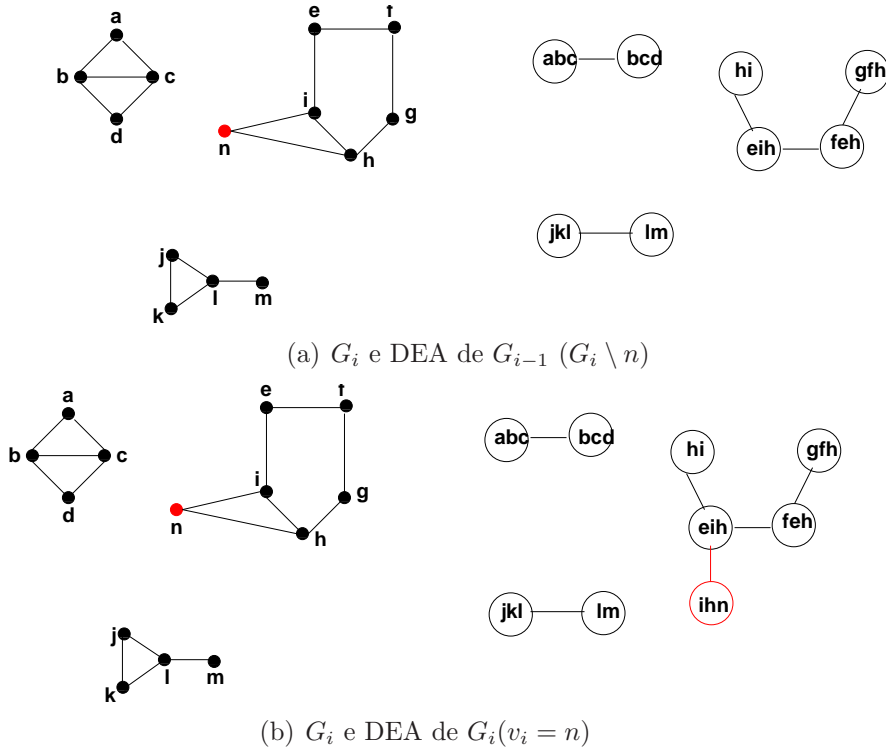


Figura 8.1. $N^{G_{i-1}}(v_i = n) = \emptyset$

- (ii) $N^{G_i}(v_i) = Q_1$ (Figura 8.2). Seja H a componente de G_{i-1} que contém Q_1 e seja (\mathcal{X}_H, T_H) a DEA de H contida na DEF (\mathcal{X}, F) de G_{i-1} . Vamos transformar

(\mathcal{X}_H, T_H) em uma DEA de $H \cup \{v_i\}$, criando uma parte $X = Q_1 \cup \{v_i\}$, um vértice t_X e fazendo $V(T_H) = V(T_H) \cup \{t_X\}$, $E(T_H) = E(T_H) \cup \{(t_X, t)\}$, onde $X_t \in \mathcal{X}_H$ contém a clique Q_1 , e por último, $\mathcal{X}_H = \mathcal{X}_H \cup \{X\}$. Observe que as únicas novas arestas de G_i com respeito a G_{i-1} são cobertas pela parte X e uma única parte de (\mathcal{X}_H, T_H) contém v_i e Q_1 foi acrescentada à parte X representada por uma folha t_X , adjacente à um vértice t_{Q_1} que representa uma parte X_{Q_1} que já continha Q_1 . Portanto, claramente vemos que (\mathcal{X}_H, T_H) é uma DEA de $H \cup \{v_i\}$, logo, (\mathcal{X}, F) é uma DEF de G_i .

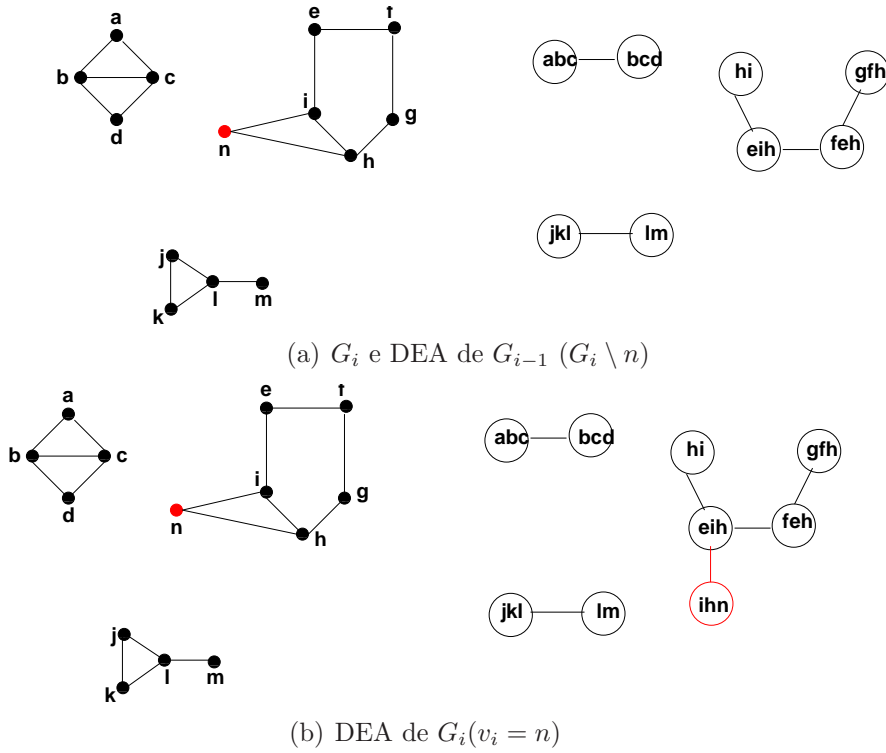


Figura 8.2. $N^{G_{i-1}}(v_i = n)$ induz apenas uma clique

- (iii) $N^{G_i}(v_i) = Q_1 \cup Q_2$. Observe que Q_1 e Q_2 podem ou não pertencer a uma mesma componente de G_{i-1} . No primeiro caso (Figura 8.3), seja H a componente de G_{i-1} que contém Q_1 e Q_2 . Como no caso anterior, defina (\mathcal{X}_H, T_H) . Além disso, considere $X_{Q_1}, X_{Q_2} \in \mathcal{X}_H$ contendo as cliques Q_1, Q_2 respectivamente. Novamente, precisamos apenas modificar (\mathcal{X}_H, T_H) para obter uma DEA de $H \cup \{v_i\}$. Para tanto, considere um caminho qualquer em T_H entre t_{Q_1} e t_{Q_2} (t_{Q_1} e t_{Q_2} representando X_{Q_1} e X_{Q_2} respectivamente em T_H). Para X_{Q_1}, X_{Q_2} e X_j

tal que t_j pertence a esse caminho, fazemos $X_{Q_1} = X_{Q_1} \cup \{v_i\}$, $X_{Q_2} = X_{Q_2} \cup \{v_i\}$ e $X_j = X_j \cup \{v_i\}$. Observe que as únicas novas arestas de G_i com respeito a G_{i-1} são cobertas pelas partes X_{Q_1} e X_{Q_2} . Além disso, todas as partes que contém v_i formam um caminho em T_H . Portanto, claramente vemos que (\mathcal{X}_H, T_H) é uma DEA de $H \cup \{v_i\}$, logo, (\mathcal{X}, F) é uma DEF de G_i .

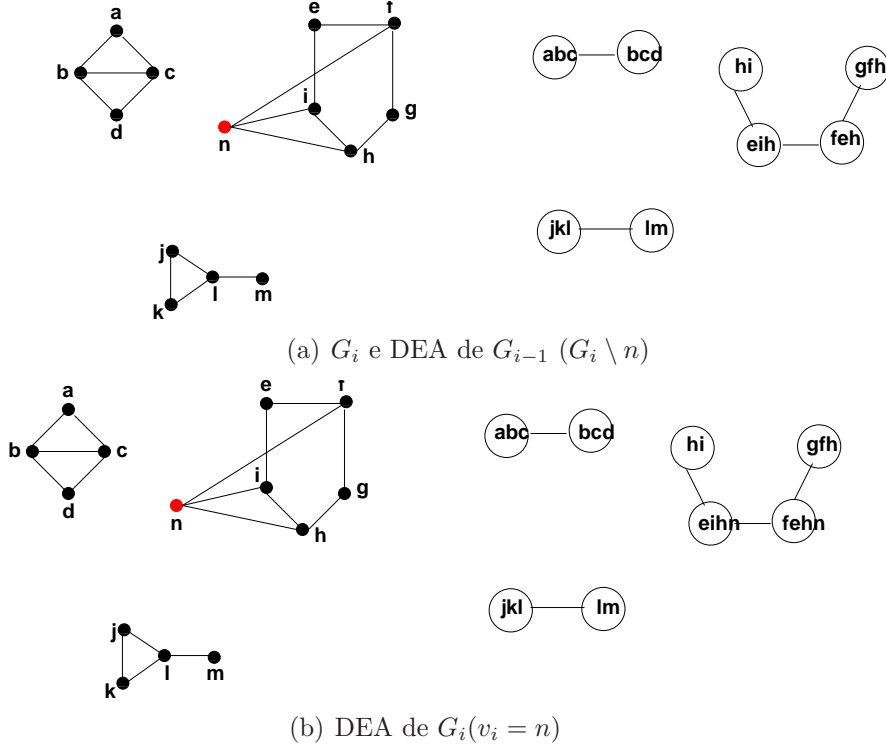


Figura 8.3. $N^{G_{i-1}}(v_i = n)$ induz duas cliques que estão em uma mesma componente de G_{i-1}

No segundo caso, ou seja, quando Q_1 e Q_2 pertencem a componentes distintas H_1 e H_2 de G_{i-1} respectivamente (Figura 8.4), temos que em G_i uma componente H existe tal que $H = H_1 \cup H_2 \cup \{v_i\}$. Dessa forma, vamos fazer a união das DEA de H_1 e H_2 contidas em (\mathcal{X}, F) , modificando-as ligeiramente, a fim de obtermos uma DEA de H . Consideramos, portanto, $(\mathcal{X}_{H_1}, T_{H_1})$ uma DEA de H_1 e $(\mathcal{X}_{H_2}, T_{H_2})$ uma DEA de H_2 contidas em (\mathcal{X}, F) . Portanto, criamos as partes $X_{v_i} = \{v_i\}$, $X'_{Q_1} = Q_1 \cup \{v_i\}$ e $X'_{Q_2} = Q_2 \cup \{v_i\}$ e fazemos $\mathcal{X}_H = \mathcal{X}_{H_1} \cup \mathcal{X}_{H_2} \cup \{X_{v_i}, X'_{Q_1}, X'_{Q_2}\}$, $V(T_H) = V(T_{H_1}) \cup V(T_{H_2}) \cup \{t_{v_i}, t'_{Q_1}, t'_{Q_2}\}$ e $E(T_H) = E(T_{H_1}) \cup E(T_{H_2}) \cup \{(t_{v_i}, t'_{Q_1}), (t_{v_i}, t'_{Q_2}), (t'_{Q_1}, t_{Q_1}), (t'_{Q_2}, t_{Q_2})\}$ onde $X_{Q_1} \in \mathcal{X}_{H_1}$, $X_{Q_2} \in \mathcal{X}_{H_2}$ são quaisquer partes de $(\mathcal{X}_{H_1}, T_{H_1})$ e $(\mathcal{X}_{H_2}, T_{H_2})$ que contém Q_1 e Q_2

respectivamente. Observe que as únicas arestas de G_i com respeito a G_{i-1} são cobertas pelas partes X'_{Q_1} e X'_{Q_2} e as únicas três partes que contém v_i em \mathcal{X}_H formam um caminho de tamanho 2. Logo, claramente, (\mathcal{X}, F) é uma DEF de G_i .

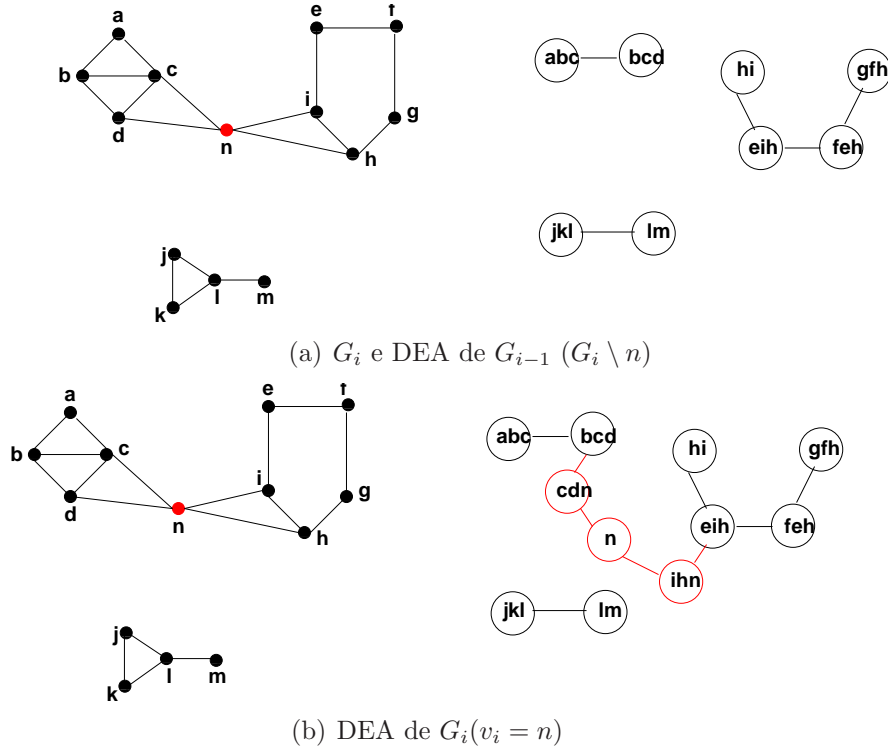


Figura 8.4. $N^{G_{i-1}}(v_i = n)$ induz duas cliques que estão em componentes distintas de G_{i-1}

Observe que quando G é um grafo livre de buracos pares conexo e $\langle v_n, \dots, v_1 \rangle$ é uma ordem de eliminação bi-simplicial de G , o procedimento acima retorna uma DEA de G . Tal procedimento é apresentado em uma linguagem algorítmica no Algoritmo 2.

Algoritmo 2 (DEAVerticeBisimplicial)

Entrada: Grafo livre de buracos pares G , Ordem de eliminação bi-simplicial $\langle v_n, \dots, v_1 \rangle$ de G

Saída: Decomposição em floresta $\mathcal{D} = (\mathcal{X}, T)$ de G (quando G é conexo, uma DEA de G é retornada)

- 1: $\mathcal{X} \leftarrow \emptyset, V(T) \leftarrow \emptyset, i \leftarrow 1$
- 2: **enquanto** $i \leq n$ **faça**
- 3: **se** $N^{G_i}(v_i)$ é vazia **então**
- 4: $X \leftarrow \{v_i\}, \mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X} \cup X$
- 5: Considere t_X o nó representando X em T
- 6: $V(T) \leftarrow V(T) \cup \{t_X\}$
- 7: **senão**
- 8: **se** $N^{G_i}(v_i)$ induz apenas uma clique Q_1 **então**
- 9: Considere $X_{Q_1} \in \mathcal{X}$ contendo Q_1 e $t_{X_{Q_1}}$ o nó de T representando X_{Q_1}
- 10: $X \leftarrow Q_1 \cup \{v_i\}, \mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X} \cup X$
- 11: Considere t_X um vértice representando X em T
- 12: $V(T) \leftarrow V(T) \cup t_X, E(T) \leftarrow E(T) \cup (t_X, t_{X_{Q_1}})$
- 13: **senão**
- 14: Considere Q_1 e Q_2 as duas cliques em que $N^{G_i}(v_i)$ é particionada
- 15: Considere $X_{Q_1} \in \mathcal{X}$ contendo Q_1 e $t_{X_{Q_1}}$ o nó de T representando X_{Q_1}
- 16: Considere $X_{Q_2} \in \mathcal{X}$ contendo Q_2 e $t_{X_{Q_2}}$ o nó de T representando X_{Q_2}
- 17: **se** X_{Q_1} e X_{Q_2} são representados por uma mesma árvore T' de T **então**
- 18: Escolha partes X_{Q_1} contendo Q_1 e X_{Q_2} contendo Q_2 de \mathcal{X} de forma que a distância entre os nós $t_{X_{Q_1}}$ e $t_{X_{Q_2}}$, representando X_{Q_1} e X_{Q_2} respectivamente, seja mínima
- 19: $X_{Q_1} \leftarrow X_{Q_1} \cup \{v_i\}, X_{Q_2} \leftarrow X_{Q_2} \cup \{v_i\}$
- 20: Acrescente v_i em todas as partes de \mathcal{X} representadas pelos vértices que estão no único caminho entre $t_{X_{Q_1}}$ e $t_{X_{Q_2}}$ em T
- 21: **senão**
- 22: $X_{Q_1 Q_2} \leftarrow \{v_i\}, X'_{Q_1} \leftarrow Q_1 \cup \{v_i\}, X'_{Q_2} \leftarrow Q_2 \cup \{v_i\}$
- 23: $\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X} \cup \{X_{Q_1 Q_2}, X'_{Q_1}, X'_{Q_2}\}$
- 24: Considere $t_{X_{Q_1 Q_2}}, t_{X'_{Q_1}}$ e $t_{X'_{Q_2}}$ vértices de T representando $X_{Q_1 Q_2}, X'_{Q_1}$ e X'_{Q_2}
- 25: $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{(t_{X'_{Q_1}}, t_{X_{Q_1}}), (t_{X'_{Q_2}}, t_{X_{Q_2}}), (t_{X_{Q_1 Q_2}}, t_{X'_{Q_1}}), (t_{X_{Q_1 Q_2}}, t_{X'_{Q_2}})\}$
- 26: **fim se**
- 27: **fim se**
- 28: **fim se**
- 29: $i \leftarrow i + 1$
- 30: **fim enquanto**
- 31: **return** \mathcal{D}

8.2. Corretude do algoritmo

Teorema 8.2.1. *Seja G um grafo livre de buracos pares. O algoritmo 2 produz uma DEF de G .*

Prova: Observe que os argumentos dos Itens 2i, 2ii e 2iii da definição do procedimento para decompor os grafos planares livres de buracos apresentada na seção 8.1 formam uma prova por indução no número i de iterações do algoritmo. \square

8.3. Complexidade do algoritmo

Calculemos primeiro, de forma grosseira, a complexidade de encontrar uma ordem de eliminação bi-simplicial de G . Para encontrar o i -ésimo vértice da ordem de um grafo G livre de buracos pares com n vértices, é necessário testar, no pior caso, $(n-i)$ vértices. Para cada vértice v , precisamos testar se $N(v)$ pode ser particionada em duas cliques. Como $d(v) \leq n-1$ e precisamos testar a existência de arestas entre todos os pares de vértices de $N(v)$, temos que testar se um vértice v é bi-simplicial pode ser feito em $\mathcal{O}(n^2)$. Logo, concluímos que a ordem de eliminação bi-simplicial pode ser construída em $\mathcal{O}(n^3)$.

No Algoritmo 2, como já temos uma ordem de eliminação bi-simplicial de G , já conhecemos a vizinhança de v_i em G_i , $1 \leq i \leq n$, logo, os testes das linhas 3, 8 e 13 do algoritmo podem ser feitos em tempo constante. Observe que as linhas 4 a 6, 10 a 12 e 22 a 25 também podem ser executadas em tempo constante (pois tais passos consistem apenas em adicionar vértices ou arestas em T e partes em \mathcal{X}). Observe que em cada iteração do bloco “enquanto” (Linha 2), são adicionadas no máximo 3 novas partes em \mathcal{X} (Linhas 4, 10 ou 22), logo, o número de partes em \mathcal{X} antes da execução da linha 2 do algoritmo é $\mathcal{O}(i-1)$. Dessa forma, para executar as linhas 15 e 16 do algoritmo, são necessários no pior caso $\mathcal{O}((n-i)(i-1))$ testes (pois $|N^{G_i}(v_i)|$ é $\mathcal{O}(n-i)$ e para cada $v \in N^{G_i}(v_i)$, é testado no pior caso se v pertence a $\mathcal{O}(i-1)$ partes). Para se executar a linha 18 do algoritmo, primeiramente, pode-se escolher uma parte qualquer X_{Q_1} contendo Q_1 e uma parte qualquer X_{Q_2} contendo Q_2 (tais escolhas podem ser feitas em $\mathcal{O}(|Q_1| * (i-1))$ e $\mathcal{O}(|Q_2| * (i-1))$ passos respectivamente no pior caso, ou seja, quando somente a última parte a ser testada é a que contém Q_1 ou Q_2). Depois, o único caminho entre $t_{X_{Q_1}}$ e $t_{X_{Q_2}}$ em T é percorrido nos dois sentidos ($t_{X_{Q_1}}$ representando X_{Q_1} e $t_{X_{Q_2}}$ representando X_{Q_2}) e para cada vértice t de tal caminho, é analisado se Q_1 e Q_2 estão contidos em X_t , e caso

esteja contido, X_{Q_1} ou X_{Q_2} são substituídos por X_t . Como a vizinhança de v_i na iteração i do bloco “enquanto” é $\mathcal{O}(n - i)$, o último teste também pode ser feito em $\mathcal{O}((n - i)(i - 1))$ passos. Pelos argumentos anteriores e pelo fato da linha 2 ser executada n vezes (uma vez para cada vértice de G), concluímos que a complexidade assintótica do algoritmo no pior caso é $\mathcal{O}(n^2)$.

Conclusão e trabalhos futuros

Nesta dissertação de mestrado, incrementamos o conjunto de menores topológicos proibidos para a classe dos grafos planares livres de buracos pares, provando que tal classe de grafos não possui um menor topológico grade 10×10 [22]. Na continuação desse trabalho, provamos um resultado mais forte: os grafos planares livres de buracos pares não possuem um menor grade 9×9 [21]. Tal resultado implica que a largura em árvore de tal classe de grafos é limitada (no máximo 44).

Um outro resultado desta dissertação foi uma versão do Teorema da Decomposição [10] para os grafos planares. Conjecturamos que esse resultado pode ser usado para obter um algoritmo de decomposição em árvores para os grafos planares usando os cortes descritos no teorema. Visto que os cortes, com exceção do 2-join, têm cardinalidade no máximo 4 e que os grafos básicos têm uma largura no máximo 4, poderíamos medir a qualidade da decomposição obtida em função da altura da árvore de decomposição do grafo (a árvore que decompõe o grafo através dos cortes em grafos básicos).

O último resultado desta dissertação foi o algoritmo que produz uma decomposição em árvore para um grafo sem buracos pares qualquer, baseado no Teorema do Vértice Bi-Simplicial [7]. Conjecturamos que no caso dos grafos de Γ , usando os resultados sobre menores proibidos para essa classe, podemos medir a qualidade da decomposição em árvore produzida por esse algoritmo. Podemos também tentar usar, para obter uma decomposição em árvore de um grafo de Γ , um resultado recente de Silva e Vusković [23], que afirma que todo grafo pertencente a essa classe tem um vértice cuja vizinhança induz um grafo cordal.

Concluimos esta dissertação com a observação de que o problema de decomposição em árvore de grafos planares sem buracos pares foi abordado de várias maneiras e com as

diversas caracterizações feitas para essa classe até então, com dois objetivos: do ponto de vista teórico, limitar a largura em árvore dos grafos dessa classe e do ponto de vista prático, obter um algoritmo de decomposição em árvore para esses grafos. Portanto, com os dois objetivos atingidos e com o domínio de todas as caracterizações conhecidas dessa classe de grafos, podemos prosseguir a pesquisa de um algoritmo exato polinomial de decomposição em árvore dessa classe de grafos.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Arnborg. Efficient algorithms for combinatorial problems on graphs with bounded decomposibility - a survey. *BIT*, 25:2–23, 1985.
- [2] S. Arnborg, D.G. Corneil, and A. Proskurowski. Complexity of finding embeddings in a k -tree. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Math*, 7:277–285, 1986.
- [3] S. Arnborg, J. Lagergren, and D. Seese. Easy problems for tree-decomposable graphs. *Journal of Algorithms*, 12:308–340, 1991.
- [4] E. Birnelé, J.A. Bondy, and B.A. Reed. Tree-width of graphs without a 3×3 grid minor. 2006.
- [5] H.L. Bodlaender. A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM J. Comput*, 25:1305–1317, 1996.
- [6] Luis Eduardo Ximenes Carvalho. Decomposição em Árvore de grafos com largura limitada - uma pesquisa algorítmica. *Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Ceará (UFC)*, agosto 2002.
- [7] M. Chudnovsky, B. Reed, F. Havet, P.D. Seymour, and L. Addario-Berry. Bisimplicial vertices in even-hole-free graphs. *Submetido ao Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 2006.
- [8] R. Diestel. *Graph Theory - Graduate Texts in Mathematics, Volume 173*. Springer-Verlag, Heidelberg, second edition, 2000.

-
- [9] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, 1979.
- [10] A. Kapoor, G. Cornuéjols, K. Vusković, and M. Conforti. Even-hole-free graphs part i: Decomposition theorem. *Journal of Graph Theory*, 39:6–49, 2002.
- [11] A.M.C.A. Koster, S.P.M. van Hoesel, and A.W.J. Kolen. Solving partial constraint satisfaction problems with tree decomposition. *Network*, (40):3:170–180, 2002.
- [12] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.
- [13] J. Lagergren. Efficient parallel algorithms for graphs of bounded treewidth. *Journal of Algorithms*, 20:20–44, 1996.
- [14] S.L. Mitchell, E.J. Cockayne, and S.T. Hedetniemi. Linear algorithms on recursive representations of trees. *J. Comput. Syst. Sci.*, 18:76–85, 1979.
- [15] O. Porto. Even induced cycles in planar graphs. In *Proceedings of First Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, Sao Paulo, Brazil, April 1992.
- [16] J. Ramirez-Alfonsin and B. Reed (eds.). Perfect graphs. *Wiley, Chichester*, 130, 2001.
- [17] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors v: Excluding a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 41:92–114, 1986.
- [18] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors xiii: The disjoint path problem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63:65–110, 1995.
- [19] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors. xx. wagner’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 92:325–357, 2004.
- [20] N. Robertson, P.D. Seymour, and R. Thomas. Quickly excluding a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 62:323–348, 1994.
- [21] A. A. Silva, A. S. F. Silva, and C. L. Sales. Even-hole-free planar graphs have bounded treewidth. *IV Latin American Conference on Combinatorics, Graphs and Applications*, 2007. accepted.

- [22] A. A. Silva, A. S. F. Silva, and C. L. Sales. Largura em Árvore de grafos planares livres de ciclos pares induzidos. *Anais do 39o. Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2007. accepted.
- [23] M.V.G. Silva and K. Vuskövič. Triangulated neighborhoods in even-hole-free graphs. *Discrete Mathematics*, 307:1065–1073, 2007.
- [24] R. Thomas. Tree decompositions of graphs. Disponível em www.math.gatech.edu/~thomas/SLIDE/CBMS/trdec.pdf.
- [25] K. Wagner. *Graphentheorie*, volume 248/248a. B.J. Hochschultaschenbucher, Mannheim, first edition, 1970.