



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSERLAN PEROTE DA SILVA

EXISTÊNCIA DE MODULI PARA EQUIVALÊNCIA HÖLDER DE
FUNÇÕES ANALÍTICAS

FORTALEZA

2016

JOSERLAN PEROTE DA SILVA

EXISTÊNCIA DE MODULI PARA EQUIVALÊNCIA HÖLDER DE FUNÇÕES
ANALÍTICAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S58e Silva, Joserlan Perote da
Existência de moduli para equivalência Hölder de funções analíticas / Joserlan Perote da Silva.
– 2016.
51 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes.

1. Germe de função analítica. 2. Equivalência Hölder. 3. Moduli. I. Título.


CDD 516.36

EXISTÊNCIA DE MODULI PARA EQUIVALÊNCIA HÖLDER DE FUNÇÕES
ANALÍTICAS.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 27/04/2016.


BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. ALEXANDRE CESAR GURGEL FERNANDES (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. LEV BIRBRAIR
Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. VICENT JEAN HENRI GRANDJEAN
Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. MARCELO ESCUDEIRO HERNANDES
Universidade Estadual de Maringá (UEM)


Prof. Dr. AURÉLIO MENEGON NETO
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)


Prof. Dr. JOSÉ EDSON SAMPAIO
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a minha amada esposa Ruth, a minha querida filha Raira e aos meus pais João e Irene.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por mais uma conquista e mais um sonho realizado.

Aos meus pais João Loureço e Irene Perote pelo amor, carinho e educação dados ao longo dos anos. Aos meus irmãos Josivan, Josernilson, Josiane e Josilene pelo companheirismo e pelas dificuldades compartilhadas desde o início de nossas vidas.

À minha amada esposa Ruth e a minha querida filha Raira, pelo amor, carinho e compreensão.

A todos os amigos da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos meus amigos de singularidades Edson, Edvalter e Rodrigo, pela amizade e pelo incentivo durante todo esse tempo.

Ao meu orientador Alexandre Fernandes, por todo apoio, incentivo e orientação, imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Aos professores da Pós-graduação em Matemática da UFC. Em especial, Lev Birbrair e Lê Dung Trang pelo valoroso ensino e aprendizado que obtive nas disciplinas e mini-cursos por eles ministradas neste programa de doutorado.

À Andrea e a Jessyca pela competência e agilidade.

Aos professores participantes da banca examinadora Lev Birbrair, Vincent Jean Henri Grandjean, Marcelo Escudeiro Hernandez, Aurélio Menegon Neto e José Edson Sampaio pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

À Capes e CNPq, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

”Porque sou Eu que conheço os planos
que tenho para vocês, diz o SENHOR.”
Jeremias 29:11

RESUMO

Neste trabalho, mostramos que equivalência Hölder de germes de funções analíticas $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite moduli contínuo. Mais precisamente, construímos um invariante da equivalência Hölder de tais germes que varia continuamente numa família $f_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Para um único germe f_t o invariante de f_t é dado em termos dos coeficientes principais das expansões assintóticas de f_t ao longo dos ramos da curva polar genérica de f_t .

Palavras-chave: Germe de função analítica. Equivalência Hölder. Moduli.

ABSTRACT

In this work, we show that Hölder equivalence of analytic functions germs $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admits continuous moduli. More precisely, we constructed an invariant of the Hölder equivalence of such germs that varies continuously in a family $f_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. For a single germ f_t the invariant of f_t is given in terms of the leading coefficients of the asymptotic expansion of f_t along the branches of generic polar curve of f_t .

Keywords: analytic function germs. Hölder equivalence. Moduli.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Triplo recobrimento ramificado 47

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de ensino superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
UFC	Universidade Federal do Ceará

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	14
2.1	Conjuntos e aplicações semialgébricas	14
2.2	Conjuntos e aplicações subanalíticas	14
2.3	Expoentes característicos de Puiseux	15
3	EQUIVALÊNCIA HÖLDER DE CURVAS COMPLEXAS . . .	18
3.1	Homeomorfismo $bi-\alpha$ -Hölder, Semicomplexo de Hölder e Arcos de Teste	18
3.1.1	<i>Semicomplexo de Hölder e Arcos de Teste</i>	19
3.2	Ramos de curvas planas	20
3.3	Germes de curvas planas com mais de um ramo	29
4	EQUIVALÊNCIA HÖLDER DE FUNÇÕES DE DUAS VA- RIÁVEIS	33
4.1	Homeomorfismo $bi-\alpha$ -Hölder e um conjunto preservado por este homeomorfismo	34
4.1.1	<i>Homeomorfismo $bi-\alpha$-Hölder</i>	34
4.1.2	<i>Um conjunto preservado por um homeomorfismo $bi-\alpha$-Hölder</i>	35
4.2	Existência de Moduli	38
5	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

Nesta tese, estudamos a geometria Hölder das singularidades em duas variáveis complexas. Mais precisamente, abordamos os germes de funções analíticas $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a menos de mudança de coordenadas Hölder regular (com inversa Hölder regular). Importa-nos observar que não há novidade em considerar a possibilidade de classificação de tais germes de funções a menos de mudanças de coordenadas menos regulares do que difeomorfismos analíticos; este tipo de investigação, que tem sido um dos motores que impulsionam a Teoria Moderna de Singularidades, nasceu a partir do trabalho 1965 onde H. Whitney mostrou que a família $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dada por

$$f_t(x, y) = xy(x + y)(x - ty): t \text{ suficientemente próximo de } 0$$

apresenta uma quantidade infinita (não enumerável) de modelos mesmo após mudanças analíticas de coordenadas. Em outras palavras, dizemos que o exemplo de H. Whitney mostrou que o problema de classificação de germes de funções analíticas a menos de difeomorfismos analíticos apresenta o então chamado *moduli contínuo*. De fato, H. Whitney provou que para quaisquer $t \neq s$, suficientemente próximos de 0, não existe difeomorfismo analítico de $\mathbb{C}^2, 0$ que aplique a fibra especial de f_t (no caso 4 retas passando pela origem) sobre a fibra especial de f_s (no caso, 4 retas passando pela origem também).

Após o trabalho de H. Whitney, alguns autores investigaram a possibilidade de classificação de germes de funções a menos de mudanças topológicas de coordenadas (homeomorfismos). Por exemplo, T. Fukuda 1976 mostrou que um tal problema de classificação não apresenta o fenômeno do moduli contínuo, como descrito acima no exemplo de H. Whitney. Mais precisamente, T. Fukuda e A. Varchenko mostraram que para qualquer família de germes de funções polinomiais com graus uniformemente limitados apresenta uma quantidade finita de modelos a menos de mudanças topológicas de coordenadas. Anos mais tarde, muitos outros autores analisaram singularidades a menos de mudança de coordenadas menos regulares do que analíticas e mais regulares do que topológicas, por exemplo, T. C. Kuo 1985. Recentemente, J.-P. Henry e A. Parusinski 2003 consideraram germes de funções analíticas em duas variáveis complexas a menos de mudanças bi-Lipschitz de coordenadas e, assim como H. Whitney fez para o caso de mudanças analíticas, mostraram a existência de moduli contínuo para esse problema. Todavia, devido ao Teorema de Mostowski 1985, ou mesmo à classificação de germes de curvas analíticas a menos de homeomorfismos bi-Lipschitz, veja (FERNANDES, 2003), diferentemente do exemplo de H. Whitney, Henry e Parusinski não puderam recorrer somente ao estudo da fibras especiais de tais funções para mostrar a existência de moduli nesse caso e, por isso, o trabalho de Henry e Parusinski impressionou de forma bastante positiva os

pesquisadores da área pela novidade das técnicas que foram por eles desenvolvidas.

Posto o contexto histórico, apresentamos a seguir a principal pergunta sobre a geometria Hölder das singularidades em duas variáveis complexas que abordamos nesta tese. Dado $0 < \alpha < 1$, dizemos que dois germes de funções analíticas $f, g: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são *bi- α -Hölder equivalentes* se existe um homeomorfismo $\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ Hölder, com inversa também Hölder, tal que $f = g \circ \phi$ e α é o mínimo entre os expoentes de Hölder dos germes $\phi, \phi^{-1}: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$.

Pergunta. Dado $0 < \alpha < 1$, a equivalência bi- α -Hölder de germes de funções analíticas $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite moduli contínuo?

Uma vez apresentado o norte que foi determinado neste trabalho, apresentamos como esta tese está subdividida.

No Capítulo 2, apresentamos resultados preliminares assim como definições e notações que utilizamos por toda a tese.

No Capítulo 3, mostramos os obstáculos para que as fibras especiais de germes de funções analíticas $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ sejam α -Hölder equivalentes. Como consequência desse estudo, obtemos que: se dois germes de curvas analíticas planas são homeomorfos, via um homeomorfismo que é Log-Lipschitz com inversa Log-Lipschitz, então esses germes são bi-Lipschitz homeomorfos e, por conseguinte, topologicamente homeomorfos como germes imersos em $(\mathbb{C}^2, 0)$.

No capítulo 4, mostramos que dada um α , com $0 < \alpha < 1$, temos uma família de germes de polinômios w -homogêneos a 1-parâmetro $f_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $t \in \mathbb{C}$, a qual garantimos a existência de Moduli com relação a equivalência bi- α -Hölder. Mais precisamente, construímos um invariante da equivalência Hölder de tais germes que varia continuamente nesta família. Para um único germe f_t o invariante de f_t é dado em termos dos coeficientes principais das expansões assintóticas de f_t ao longo dos ramos da curva polar genérica de f_t .

2 PRELIMINARES

Sejam A um subconjunto de \mathbb{R}^n , $a \in A$ e sejam $f, g: (A, a) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germes de funções não negativas. Denotamos $f \lesssim g$ quando existe uma vizinhança U de a em \mathbb{R}^n e uma constante K tal que $f(x) \leq Kg(x)$, $\forall x \in A$. Denotamos $f \approx g$ quando ocorre $f \lesssim g$ e $g \lesssim f$. Finalmente, denotamos $f \ll g$ quando $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $f \gg g$ quando $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

2.1 Conjuntos e aplicações semialgébricas

Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico (semianalítico) se existem polinômios (funções analíticas) $f_{ij}, g_{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ tais que

$$A = \bigcup_{i=1}^p \{x \in \mathbb{R}^n : f_{ij} = 0, g_{ij} > 0, 1 \leq j \leq q\}.$$

Um fato, que não é óbvio, é que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, então existem subvariedades A_1, \dots, A_m de \mathbb{R}^n , conexas, semialgébricas tais que $A = \bigcup_i A_i$ (BENEDETTI and RISLER, 1990). Definimos a dimensão de A como o máximo das dimensões das variedades A_1, \dots, A_m .

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico. Dizemos que uma aplicação $F: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ é semialgébrica se o seu gráfico é um subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Teorema 2.1 (*Tarski-Seidenberg*) *Seja $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção canônica. Se $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é semialgébrico, então $\pi(A)$ é semialgébrico.*

O teorema acima permite afirmar que a classe dos conjuntos semialgébricos é estável por operações booleanas e aplicações semialgébricas. Quanto à classe dos conjuntos semianalíticos, não podemos afirmar o mesmo, por conta disso se faz necessário o estudo sobre conjuntos subanalíticos.

2.2 Conjuntos e aplicações subanalíticas

As definições e resultados destacados nesta seção podem ser encontrados em (BOCHNAK and RISLER, 1975). Seja X um espaço analítico real. Um subconjunto $A \subset X$ é dito subanalítico em $x \in X$, se existe uma vizinhança U de x em X e uma família $\{f_{ij}: 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\}$ de morfismos analíticos próprios: $Y_{ij} \rightarrow X|U$, em que

Y_{ij} é espaço analítico real, tais que

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^k (Im(f_{i1}) - Im(f_{i2})).$$

Dizemos que A é um subconjunto subanalítico em X quando \mathbf{A} é subanalítico em cada ponto de X .

A classe dos conjuntos subanalíticos é a menor classe de subconjuntos de espaços analíticos contendo os conjuntos semianalíticos e estável por morfismos próprios e operações booleanas.

Teorema 2.2 *Sejam X e Y dois espaços analíticos reais, $\pi: X \times Y \rightarrow X$ a projeção canônica. Se V é um subconjunto compacto subanalítico em Y , e $A \subset X \times V$ um subconjunto subanalítico em $X \times Y$, então $\pi(A)$ é subanalítico em X .*

Esse teorema é o análogo do Tarski-Seidenberg para o caso subanalítico.

Sejam K, L subconjuntos subanalíticos respectivamente nos espaços analíticos X, Y . Dizemos que uma aplicação contínua $F: K \rightarrow L$ é subanalítica se o seu gráfico $Graf(f)$ é um subconjunto subanalítico em $X \times Y$.

O Lema a seguir é o que chamamos de Decomposição de Puiseux de uma função subanalítica.

Lema 2.1 *Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subanalítica tal que $f(0) = 0$ e $f(t) \neq 0$ para cada $t \neq 0$ numa vizinhança de 0. Então, existe um racional positivo α e uma função subanalítica $h: [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $h(0) \neq 0$ e $f(t) = t^\alpha h(t)$ para cada $t \in [0, \epsilon]$.*

2.3 Expoentes característicos de Puiseux

Seja $(C, 0)$ um germe de curva analiticamente irredutível em \mathbb{C}^2 (Ramo), a menos de uma mudança analítica de coordenadas, podemos supor que $(C, 0)$ tem uma parametrização do tipo abaixo:

$$\begin{aligned} x &= t^m \\ y &= t^n + a_2 t^{n_2} + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

em que m é a multiplicidade de $(C, 0)$, m não divide o inteiro n e $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. A série de potências fracionárias $y(x^{1/m})$ é conhecida como Parametrização de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ e todas as outras parametrizações de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ são obtidas da parametrização acima via $x^{1/m} \rightarrow wx^{1/m}$ em que w é raiz m -ésima da unidade. Observo que estamos admitindo que 0 seja uma singularidade de $(C, 0)$.

Denotamos $\beta_0 = m$ e $\beta_1 = n$. Seja $e_1 = \text{mdc}(\beta_1, \beta_0)$ o máximo divisor comum desses dois inteiros. Agora, definimos β_2 como o menor expoente aparecendo em $y(t)$ que não é divisível por e_1 . Definimos $e_2 = \text{mdc}(e_1, \beta_2)$; temos $e_2 < e_1$, e continuamos esse processo. Supondo já definido $e_i = \text{mdc}(e_{i-1}, \beta_i)$, definimos β_{i+1} como o menor expoente aparecendo em $y(t)$ que não é divisível por e_i . Como a sequência de inteiros positivos

$$m > e_1 > \dots > e_i > \dots$$

é estritamente decrescente, existe um inteiro g tal que $e_g = 1$. De posse desses dados, podemos reescrever (1) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x &= t^m \\ y &= t^{\beta_1} + a_{\beta_1+e_1} t^{\beta_1+e_1} + \dots + a_{\beta_1+k_1 e_1} t^{\beta_1+k_1 e_1} \\ &\quad + a_{\beta_2} t^{\beta_2} + a_{\beta_2+e_2} t^{\beta_2+e_2} + \dots + a_{\beta_q} t^{\beta_q} + a_{\beta_q+e_q} t^{\beta_q+e_q} + \dots \\ &\quad + a_{\beta_g} t^{\beta_g} + a_{\beta_g+1} t^{\beta_g+1} + \dots \end{aligned}$$

tal que, por construção os coeficientes de $t^{\beta_i}; i \geq 1$ são distintos de zero. Definimos os inteiros m_i e n_i pelas igualdades:

$$\begin{aligned} e_{i-1} &= n_i e_i \\ \beta_i &= m_i e_i \text{ para } 1 \leq i \leq g \end{aligned}$$

e observamos que podemos reescrever a expansão de y em potências fracionárias de x da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(x^{1/m}) &= a_{\beta_1} x^{\frac{m_1}{n_1}} + a_{\beta_1+e_1} x^{\frac{m_1+1}{n_1}} + \dots + a_{\beta_1+k_1 e_1} x^{\frac{m_1+k_1}{n_1}} \\ &\quad + a_{\beta_2} x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + a_{\beta_2+e_2} x^{\frac{m_2+1}{n_1 n_2}} + \dots + a_{\beta_q} x^{\frac{m_q}{n_1 n_2 \dots n_q}} + a_{\beta_q+e_q} x^{\frac{m_q+1}{n_1 n_2 \dots n_q}} + \dots \\ &\quad + a_{\beta_g} x^{\frac{m_g}{n_1 n_2 \dots n_g}} + a_{\beta_g+e_g} x^{\frac{m_g+1}{n_1 n_2 \dots n_g}} + \dots \end{aligned}$$

A sequência de inteiros $\beta(C) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g)$ é conhecida como a sequência de expoentes característicos de C , e a sequência $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ é conhecida como a sequência de pares característicos de C .

Observação 2.1 Seja $(C, 0)$ um germe de curva analiticamente irreduzível em \mathbb{C}^2 e $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ seus pares característicos. Então o $\text{mdc}(m_j, n_j) = 1$, para $j = 1, 2, \dots, g$.

Exemplo 2.1 Seja $(C, 0)$ um germe de curva analiticamente irreduzível em \mathbb{C}^2 e considere

uma parametrização de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ dada por

$$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^{15} + t^{18} + t^{19}. \end{cases}$$

Então, temos que $\beta_0 = e_0 = 6$ e β_1 é igual ao primeiro expoente de t em y que não é divisível por 6, ou seja, $\beta_1 = 15$ e $e_1 = \text{mdc}(6, 15) = 3$. Agora β_2 é igual ao menor expoente de t que não é divisível por 3, ou seja, $\beta_2 = 19$. Assim $e_2 = \text{mdc}(e_1, \beta_2) = \text{mdc}(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = 1$.

Logo, os expoentes característicos de $(C, 0)$ são $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (6, 15, 19)$.

Agora, vamos determinar os pares característicos de Puiseux de $(C, 0)$

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{e_0}{e_1} = 2; & n_2 &= \frac{e_1}{e_2} = 3 \\ m_1 &= \frac{\beta_1}{e_1} = 5; & m_2 &= \frac{\beta_2}{e_2} = 19 \end{aligned}$$

Portanto os pares característicos de Puiseux são $(2, 5)$ e $(3, 19)$.

Reescrevendo a expansão de y em potências fracionárias de x , temos:

$$y(x^{1/6}) = x^{\frac{15}{6}} + x^{\frac{18}{6}} + x^{\frac{19}{6}} = x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{5+1}{2}} + x^{\frac{19}{2 \cdot 3}}.$$

3 EQUIVALÊNCIA HÖLDER DE CURVAS COMPLEXAS

Em 2003, A. Fernandes apresenta uma classificação completa dos germes de curvas (complexas) analíticas planas via homeomorfismo bi-lipschitz.

Aqui, propomo-nos uma classificação dos germes de curvas (complexas) analíticas planas via homeomorfismo bi- α -Hölder, com $0 < \alpha < 1$.

3.1 Homeomorfismo bi- α -Hölder, Semicomplexo de Hölder e Arcos de Teste

Nesta seção, definimos homeomorfismo bi- α -Hölder, relembramos o conceito de semicomplexo de Hölder de germes de curvas reais, apresentamos o conceito de arcos de teste e demonstramos um teorema de grande relevância estrutural para o que desenvolvemos neste capítulo.

Definição 3.1 *Uma Aplicação $\phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é chamada Hölder contínua se existem $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|^\alpha$, para todos $x, y \in U$. O número λ é chamado a constante de Hölder e α o expoente de Hölder.*

Quando $n = p$ e ϕ tem uma inversa Hölder contínua, diremos que ϕ é bi-Hölder.

Definição 3.2 *Chamaremos de homeomorfismo bi- α -Hölder, um germe de aplicação bi-Hölder $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que α é o mínimo entre os expoentes de Hölder dos germes $\phi, \phi^{-1}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.*

Definição 3.3 *Sejam (X, x) e (Y, y) germes de subconjuntos semianalíticos de dimensão real 1. Dizemos que (X, x) é bi- α -Hölder equivalente a (Y, y) se existir um germe de homeomorfismo bi- α -Hölder $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$.*

Observação 3.1 *Quaisquer dois ramos de curvas analíticas complexas são bi- α -Hölder homeomorfas, para algum $0 < \alpha < 1$. Por outro lado, fixado $0 < \alpha < 1$, dados X e Y ramos de curvas analíticas complexas, pode ser que eles não sejam bi- α -Hölder homeomorfas.*

Exemplo 3.1 *Sejam $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ germes de curvas analíticas complexas em \mathbb{C}^2 e $\varphi(t^n, \phi(t))$ e $\tilde{\varphi}(t^{\tilde{n}}, \tilde{\phi}(t))$ parametrizações de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ respectivamente. Temos que φ é analítica e α_0 -Hölder, com φ^{-1} subanalítica e lipschitz. Logo φ é subanalítica bi- α_0 -Hölder. Analogamente, temos que $\tilde{\varphi}$ é subanalítica bi- $\tilde{\alpha}_0$ -Hölder. Assim $\psi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ é subanalítica bi- $\tilde{\alpha}_0$ -Hölder e $\psi^{-1} = \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ é subanalítica bi- α_0 -Hölder. Portanto $\psi: (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$ é um homeomorfismo subanalítico bi- α_1 -Hölder, onde $\alpha_1 = \min\{\tilde{\alpha}_0, \alpha_0\}$.*

3.1.1 Semicomplexo de Hölder e Arcos de Teste

Dado um germe de subconjunto semianalítico (X, x) , de dimensão real 1 no espaço Euclidiano equipado com a métrica euclidiana induzida, para cada par de semiramos X_i, X_j de (X, x) , ou seja, para cada par de fecho de componentes conexas de $X \setminus \{x\}$, temos definido em (BIRBRAIR and FERNANDES, 2000), o seguinte número:

$$sh(X_i, X_j) = ord_r [dist(X_i \cap S_r(x), X_j \cap S_r(x))].$$

As ideias discutidas em 2000, L. Birbrair e A. Fernandes são de fundamental importância neste capítulo, pois estas esclarecem o comportamento métrico de germes de conjuntos semianalíticos de dimensão real 1 e o conceito de arco de teste, o qual aparece de forma contundente aqui.

Teorema 3.1 *Sejam (X, x) e (Y, y) germes de subconjuntos semianalíticos de dimensão real 1, equipados com a métrica euclidiana induzida e com semiramos $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$. Se existir $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ germe de aplicação bi- α -Hölder com $0 < \alpha < 1$, então existe uma bijeção $\phi: I \rightarrow J$ tal que $\alpha^2 \leq \frac{sh(X_i, X_j)}{sh(Y_{\phi(i)}, Y_{\phi(j)})}, \frac{sh(Y_{\phi(i)}, Y_{\phi(j)})}{sh(X_i, X_j)} \leq \frac{1}{\alpha^2}$, para todo $i \neq j \in I$.*

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor $x = 0 = y$. Suponhamos que $F: (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ seja uma aplicação bi- α -Hölder, com $0 < \alpha < 1$. Sejam $0 < c_1 \leq c_2$ constantes de Hölder de F . Como F é um homeomorfismo, temos que I e J possuem a mesma quantidade de elementos e para cada $i \in I$ existe um único $\phi(i) \in J$ tal que $(F(X_i), 0) = (Y_{\phi(i)}, 0)$. Isto é, $\phi: I \rightarrow J$ definida como acima é uma bijeção.

Sejam $m = sh(X_i, X_j)$ e $n = sh(Y_{\phi(i)}, Y_{\phi(j)})$. Consideremos também $r^m h(r)$ e $r^n g(r)$ as decomposições de Puiseux de

$$ord_r[dist(X_i - B_r(0), X_j - B_r(0))] \text{ e } ord_r[dist(Y_{\phi(i)} - B_r(0), Y_{\phi(j)} - B_r(0))]$$

respectivamente. Como F é bi- α -Hölder com constantes $0 < c_1 \leq c_2$,

$$\|p\| \geq r \Rightarrow \|F(p)\| \geq c_1 r^{1/\alpha}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} (r^m h(r))^\alpha &= \|x_i(r) - x_j(r)\|^\alpha \\ &\geq \frac{1}{c_2} \|F(x_i(r)) - F(x_j(r))\| \\ &= \frac{1}{c_2} (c_1 r^{1/\alpha})^n g(c_1 r^{1/\alpha}). \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que $m\alpha \leq n/\alpha$. Simetricamente, podemos mostrar que $n\alpha \leq m/\alpha$ e, portanto, $\alpha^2 \leq m/n, n/m \leq 1/\alpha^2$. ■

Definição 3.4 *Um arco de teste é um germe de conjunto semianalítico de dimensão real 1, munido da métrica induzida, com apenas um semiramo real.*

3.2 Ramos de curvas planas

Seja $(C, 0)$ um germe de curva analiticamente irredutível em \mathbb{C}^2 (Ramo), podemos supor, a menos de uma mudança analítica de coordenadas, que $(C, 0)$ tem uma parametrização da forma:

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = \varphi(t) = t^m + a_1 t^{m_1} + \dots \end{cases}$$

em que $n = \text{multiplicidade}(C, 0) < m$, n não divide o inteiro m e $\varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. A série de potências fracionárias $\varphi(x^{1/n})$ é conhecida como Parametrização de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ e todas as outras parametrizações de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ são da forma $\psi(x^{1/n}) = \varphi(\zeta x^{1/n})$, onde ζ é uma n -ésima raiz da unidade.

Observação 3.2 Quando falarmos em aplicação bi- α -Hölder, salvo mencionado contrário, estaremos considerando os espaços métricos envolvidos na questão munidos da métrica euclidiana induzida.

Seja, $(C, 0)$ um ramo com multiplicidade n e pares característicos $(n_1, m_1), \dots, (n_g, m_g)$. Sejam Γ_1, Γ_2 arcos de teste em $(C, 0)$ descritos por

$$\Gamma_j(r) = (r e^{i\alpha_j(r)}, y(r^{1/n} e^{i\alpha_j(r)/n})) \in S_r(0) \cap \Gamma_j, \quad j = 1, 2$$

em que $y(x^{1/n})$ é uma parametrização de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ e α_1, α_2 são funções ângulo tomando valores no intervalo $[0, 2n\pi]$. Sejam $g(r) = \|\Gamma_1(r) - \Gamma_2(r)\|$ e $h(r) = r \|e^{i\alpha_1(r)} - e^{i\alpha_2(r)}\|$. Então, vale o Lema que está provado em Fernandes (2003) e que sua prova está mantida aqui.

Lema 3.1 *Se*

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\alpha_1(r) - \alpha_2(r)) = k \in \mathbb{Z},$$

então $\text{ord}_r(g) = \min\{\text{ord}_r(h), \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}\}$ em que $j = \min\{i: \frac{k}{n_1 \dots n_i} \notin \mathbb{Z}\}$.

Prova. É suficiente observarmos a equação

$$\begin{aligned}
y(x^{1/n}) &= a_{\beta_1} x^{\frac{m_1}{n_1}} + a_{\beta_1+e_1} x^{\frac{m_1+1}{n_1}} + \dots + a_{\beta_1+k_1 e_1} x^{\frac{m_1+k_1}{n_1}} \\
&+ a_{\beta_2} x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + a_{\beta_2+e_2} x^{\frac{m_2+1}{n_1 n_2}} + \dots + a_{\beta_q} x^{\frac{m_q}{n_1 n_2 \dots n_q}} \\
&+ a_{\beta_q+e_q} x^{\frac{m_q+1}{n_1 n_2 \dots n_q}} + \dots + a_{\beta_g} x^{\frac{m_g}{n_1 n_2 \dots n_g}} \\
&+ a_{\beta_g+e_g} x^{\frac{m_g+1}{n_1 n_2 \dots n_g}} + \dots
\end{aligned}$$

Além disso, uma vez que $a_{\beta_j+le_j} \neq 0$ e como

$$|a_{\beta_j+le_j} (re^{i\alpha_1(r)})^{(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)} - a_{\beta_j+le_j} (re^{i\alpha_2(r)})^{(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)}|$$

é igual a

$$|a_{\beta_j+le_j}| r^{(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)} |e^{i\alpha_1(r)(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)} - e^{i\alpha_2(r)(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)}|$$

temos que

$$ord_r |a_{\beta_j+le_j} (re^{i\alpha_1(r)})^{(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)} - a_{\beta_j+le_j} (re^{i\alpha_2(r)})^{(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)}|$$

é igual a

$$\frac{m_j + l}{n_1 n_2 \dots n_j} + ord_r |e^{i\alpha_1(r)(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)} - e^{i\alpha_2(r)(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)}|$$

De fato, se $k/(n_1 n_2 \dots n_j) \in \mathbb{Z}$, então

$$ord_r |e^{i\alpha_1(r)(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)} - e^{i\alpha_2(r)(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)}| = ord_r |e^{i\alpha_1(r)} - e^{i\alpha_2(r)}|$$

por conseguinte, neste caso, temos

$$ord_r |a_{\beta_j+le_j} (re^{i\alpha_1(r)})^{(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)} - a_{\beta_j+le_j} (re^{i\alpha_2(r)})^{(m_j+l)/(n_1 \dots n_j)}| > ord_r(h)$$

Por outro lado, se $k/(n_1 n_2 \dots n_j) \notin \mathbb{Z}$, então

$$ord_r |e^{i\alpha_1(r)m_j/(n_1 \dots n_j)} - e^{i\alpha_2(r)m_j/(n_1 \dots n_j)}| = 0$$

como resultado, neste caso,

$$ord_r |a_{\beta_j} (re^{i\alpha_1(r)})^{m_j/(n_1 \dots n_j)} - a_{\beta_j} (re^{i\alpha_2(r)})^{m_j/(n_1 \dots n_j)}| = \frac{m_j}{n_1 n_2 \dots n_j}$$

Temos, portanto, demonstrado que $ord_r(g) = \min\{ord_r(h), m_j/(n_1 n_2 \dots n_j)\}$, onde $j = \min\{i: k/(n_1 n_2 \dots n_i) \notin \mathbb{Z}\}$.



Observação 3.3 É claro que, se

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\alpha_1(r) - \alpha_2(r)) \notin \mathbb{Z}$$

então $\text{ord}_r(g) = 1$.

Sejam $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_g, m_g)$ os pares característicos de $(C, 0)$ e $(q_1, l_1), (q_2, l_2), \dots, (q_{\tilde{g}}, l_{\tilde{g}})$ os pares característicos de $(\tilde{C}, 0)$.

Lema 3.2 *Sejam $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ dois germes de curvas analiticamente irredutíveis em \mathbb{C}^2 . Se $g \neq \tilde{g}$, então existe $0 < \alpha_0 < 1$, $\alpha_0^4 > \max\{k_{ij}; i = \tilde{g} \leq j \leq g \text{ ou } j = g \leq i \leq \tilde{g}\}$, onde $k_{ij} = \min\{\frac{m_j \cdot q_1 \dots q_i}{l_i \cdot n_1 \dots n_j}, \frac{l_i \cdot n_1 \dots n_j}{m_j \cdot q_1 \dots q_i}\}$ e $k_{ij} < 1$ tal que não existe um germe de aplicação subanalítica bi- α -Hölder $F: (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$, $\forall \alpha_0 < \alpha < 1$.*

Prova. Suponhamos $g > \tilde{g}$. Então temos três casos:

1. $\frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \leq \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$, $\forall \tilde{g} \leq j \leq g$;
2. $\frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \leq \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}}$, $\forall \tilde{g} \leq j \leq g$;
3. Existe j_0 , $\tilde{g} \leq j_0 \leq g$ tal que $\frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \leq \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}}$, $\forall \tilde{g} \leq j \leq j_0$ e $\frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} < \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$, $\forall j_0 < j \leq g$.

Como em qualquer dos casos existe no máximo um j tal que $\frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} = \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$ então consideremos somente os j 's tais que $\frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \neq \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$. Suponhamos $\frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} > \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$, $\tilde{g} \leq j \leq g$. Consideremos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ os seguintes semiramos em \tilde{C} :

$$\Sigma_1 = \{(r, b_{\beta_1} r^{l_1/q_1} + b_{\beta_1+e_1} r^{(l_1+1)/q_1} + \dots + b_{\beta_2} r^{l_2/q_1 q_2} + b_{\beta_2+e_2} r^{(l_2+1)/q_1 q_2} + \dots + b_{\beta_g} r^{l_{\tilde{g}}/\tilde{n}} + b_{\beta_g+e_{\tilde{g}}} r^{(l_{\tilde{g}}+1)/\tilde{n}} + \dots) : r \geq 0\};$$

$$\Sigma_2 = \{(ri, b_{\beta_1} r^{l_1/q_1} e^{i(l_1/q_1)\pi/2} + b_{\beta_1+e_1} r^{(l_1+1)/q_1} e^{i((l_1+1)/q_1)\pi/2} + \dots + b_{\beta_2} r^{l_2/q_1 q_2} e^{i(l_2/q_1 q_2)\pi/2} + b_{\beta_2+e_2} r^{(l_2+1)/q_1 q_2} e^{i((l_2+1)/q_1 q_2)\pi/2} + \dots + b_{\beta_{\tilde{g}}} r^{l_{\tilde{g}}/\tilde{n}} e^{i(l_{\tilde{g}}/\tilde{n})\pi/2} + b_{\beta_{\tilde{g}}+e_{\tilde{g}}} r^{(l_{\tilde{g}}+1)/\tilde{n}} e^{i((l_{\tilde{g}}+1)/\tilde{n})\pi/2} + \dots) : r \geq 0\};$$

$$\Sigma_3 = \{(r, b_{\beta_1} r^{l_1/q_1} + b_{\beta_1+e_1} r^{(l_1+1)/q_1} + \dots + b_{\beta_2} r^{l_2/q_1 q_2} + \dots + b_{\beta_{\tilde{g}-1}} r^{l_{\tilde{g}-1}/q_1 \dots q_{\tilde{g}-1}} + b_{\beta_{\tilde{g}-1}+e_{\tilde{g}-1}} r^{(l_{\tilde{g}-1}+1)/q_1 \dots q_{\tilde{g}-1}} + \dots + b_{\beta_{\tilde{g}}} r^{l_{\tilde{g}}/\tilde{n}} e^{i(l_{\tilde{g}}/\tilde{n})2q_1 \dots q_{\tilde{g}-1}} + \dots) : r \geq 0\};$$

$$\Sigma_4 = \{(-ri, b_{\beta_1} r^{l_1/q_1} e^{i(l_1/q_1)((4q_1 \dots q_{\tilde{g}-1}+3)/2)\pi} + \dots + b_{\beta_2} r^{l_2/q_1 q_2} e^{i(l_2/q_1 q_2)((4q_1 \dots q_{\tilde{g}-1}+3)/2)\pi} + \dots + b_{\beta_{\tilde{g}}} r^{l_{\tilde{g}}/\tilde{n}} e^{i(l_{\tilde{g}}/\tilde{n})((4q_1 \dots q_{\tilde{g}-1}+3)/2)\pi} + \dots) : r \geq 0\},$$

Consideremos agora:

$$\begin{aligned} \Gamma_k(r) = & (r e^{i\gamma_k(r)}, a_{\beta_1} r^{m_1/n_1} e^{i(m_1/n_1)\gamma_k(r)} + a_{\beta_1+e_1} r^{(m_1+1)/n_1} e^{i((m_1+1)/n_1)\gamma_k(r)} + \dots \\ & + a_{\beta_2} r^{m_2/n_1 n_2} e^{i(m_2/n_1 n_2)\gamma_k(r)} + a_{\beta_2+e_2} r^{(m_2+1)/n_1 n_2} e^{i((m_2+1)/n_1 n_2)\gamma_k(r)} + \dots \\ & + a_{\beta_g} r^{m_g/n} e^{i(m_g/n)\gamma_k(r)} + \dots) \in S_r(0) \cap F(\Sigma_k); \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Suponha que exista um germe de aplicação subanalítica bi- α -Hölder $F: (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$,
 $\forall \alpha_0 < \alpha < 1$. Decorre do Teorema 3.1 que

$$\|\Gamma_1 - \Gamma_3\| \lesssim r \tilde{n}^{\frac{l_{\tilde{g}}}{\alpha^2}}.$$

Afirmção: $\frac{1}{2n_1 n_2 \dots n_j \pi} \lim (\gamma_1(r) - \gamma_3(r)) \in \mathbb{Z}$.

Prova: Suponhamos que não, então usando o Lema 3.1 e admitindo $\alpha > \alpha_0$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha^2 &> \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha_0^2 \geq \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \cdot \frac{m_j \cdot \tilde{n}}{l_{\tilde{g}} \cdot n_1 \dots n_j} = \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \\ &\geq \min\{1 + \text{ord}_r |e^{i(\gamma_1 - \gamma_3)} - 1|; \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}\} \\ &= \text{ord}_r(\|\Gamma_1 - \Gamma_3\|) \geq \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha^2. \end{aligned}$$

Daí, podemos escolher γ_1 e γ_3 tais que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_3(r)) = 2n_1 \dots n_j \pi k, \quad k = 0, 1.$$

Suponhamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_3(r)) = 0.$$

Neste caso, temos que ocorre uma das seguintes alternativas

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_2(r)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_4(r)) = 0.$$

Suponhamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_2(r)) = 0.$$

Como $|\gamma_1 - \gamma_2| \leq |\gamma_1 - \gamma_3|, \forall r$. Então, temos

$$\text{ord}_r(e^{i(\gamma_1(r) - \gamma_3(r))} - 1) \leq \text{ord}_r(e^{i(\gamma_1(r) - \gamma_2(r))} - 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + \text{ord}_r (e^{i(\gamma_1(r)-\gamma_2(r))} - 1) &\geq 1 + \text{ord}_r (e^{i(\gamma_1(r)-\gamma_3(r))} - 1) \\ &\geq \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} + \text{ord}_r (e^{i \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} (\gamma_1(r)-\gamma_2(r))} - 1) &\geq \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \\ + \text{ord}_r (e^{i \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} (\gamma_1(r)-\gamma_3(r))} - 1) &\geq \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Gamma_1(r) - \Gamma_2(r)\| \lesssim r \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha^2.$$

Denotemos $\delta_k(r) = F^{-1}(\Gamma_k(r))$; $k = 1, 2$. Então, temos

$$\delta_1(r) = (f(r), a_{\beta_1}(f(r))^{l_1/q_1} + \dots) \text{ e } \delta_2(r) = (ig(r), a_{\beta_1}(g(r))^{l_1/q_1} + \dots)$$

onde $r^{1/\alpha} \lesssim |f(r)| \approx |g(r)| \lesssim r^\alpha$. Portanto,

$$|\delta_1(r) - \delta_2(r)| \gtrsim |f(r) - ig(r)| \geq r^{1/\alpha}.$$

Logo, como F é bi- α -Hölder, temos

$$r^{1/\alpha^2} \lesssim \|\delta_1(r) - \delta_2(r)\|^{1/\alpha} \lesssim \|\Gamma_1(r) - \Gamma_2(r)\| \lesssim r \frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha^2$$

e assim

$$\frac{l_{\tilde{g}}}{\tilde{n}} \alpha^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \implies \alpha_0^4 \leq \alpha^4 \leq \frac{\tilde{n}}{l_{\tilde{g}}},$$

o que é um absurdo.

Observo que os outros casos são analisados de forma completamente análoga. ■

Lema 3.3 *Sejam $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ dois germes de curvas analiticamente irredutíveis em \mathbb{C}^2 . Se $g = \tilde{g}$ e $\alpha_0^4 > \min\{\frac{m_i q_1 \dots q_i}{l_i n_1 \dots n_i}, \frac{l_i n_1 \dots n_i}{m_i q_1 \dots q_i}; 1 \leq i \leq g\}$ com o mínimo diferente de 1, então não existe um germe de aplicação subanalítica bi- α -Hölder $F: (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$, $\forall \alpha_0 < \alpha < 1$.*

Prova. Seja $1 \leq j \leq g$ tal que $\frac{l_j n_1 \dots n_j}{m_j q_1 \dots q_j} \neq 1$. Suponhamos $\frac{l_j n_1 \dots n_j}{m_j q_1 \dots q_j} < 1$ ou seja $\frac{l_j}{q_1 \dots q_j} < \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$. Consideremos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ os seguintes semiramos em C :

$$\Gamma_1 = \{(r, a_{\beta_1} r^{m_1/n_1} + a_{\beta_1+e_1} r^{(m_1+1)/n_1} + \dots + a_{\beta_2} r^{m_2/n_1 n_2} + a_{\beta_2+e_2} r^{(m_2+1)/n_1 n_2} + \dots + a_{\beta_j} r^{m_j/n_1 \dots n_j} + \dots) : r \geq 0\};$$

$$\Gamma_2 = \{(ri, a_{\beta_1} r^{m_1/n_1} e^{i(m_1/n_1)\pi/2} + a_{\beta_1+e_1} r^{(m_1+1)/n_1} e^{i((m_1+1)/n_1)\pi/2} + \dots + a_{\beta_2} r^{m_2/n_1 n_2} e^{i(m_2/n_1 n_2)\pi/2} + a_{\beta_2+e_2} r^{(m_2+1)/n_1 n_2} e^{i((m_2+1)/n_1 n_2)\pi/2} + \dots + a_{\beta_j} r^{m_j/n_1 \dots n_j} e^{i(m_j/n_1 \dots n_j)\pi/2} + \dots) : r \geq 0\};$$

$$\Gamma_3 = \{(r, a_{\beta_1} r^{m_1/n_1} + a_{\beta_1+e_1} r^{(m_1+1)/n_1} + \dots + a_{\beta_2} r^{m_2/n_1 n_2} + \dots + a_{\beta_{j-1}} r^{m_{j-1}/n_1 \dots n_{j-1}} + a_{\beta_{j-1}+e_{j-1}} r^{(m_{j-1}+1)/n_1 \dots n_{j-1}} + \dots + a_{\beta_j} r^{m_j/n_1 \dots n_j} e^{i(m_j/n_1 \dots n_j)2n_1 \dots n_{j-1}} + \dots) : r \geq 0\};$$

$$\Gamma_4 = \{(-ri, a_{\beta_1} r^{m_1/n_1} e^{i(m_1/n_1)((4n_1 \dots n_{g-1}+3)/2)\pi} + \dots + a_{\beta_2} r^{m_2/n_1 n_2} e^{i(m_2/n_1 n_2)((4n_1 \dots n_{g-1}+3)/2)\pi} + \dots + a_{\beta_j} r^{m_j/n_1 \dots n_j} e^{i(m_j/n_1 \dots n_j)((4n_1 \dots n_{j-1}+3)/2)\pi} + \dots) : r \geq 0\},$$

Consideremos agora:

$$\Sigma_k(r) = (r e^{i\sigma_k(r)}, b_{\beta_1} r^{l_1/q_1} e^{i(l_1/q_1)\sigma_k(r)} + b_{\beta_1+e_1} r^{(l_1+1)/q_1} e^{i((l_1+1)/q_1)\sigma_k(r)} + \dots + b_{\beta_2} r^{l_2/q_1 q_2} e^{i(l_2/q_1 q_2)\sigma_k(r)} + b_{\beta_2+e_2} r^{(l_2+1)/q_1 q_2} e^{i((l_2+1)/q_1 q_2)\sigma_k(r)} + \dots + b_{\beta_j} r^{l_j/q_1 \dots q_j} e^{i(l_j/q_1 \dots q_j)\sigma_k(r)} + \dots) \in S_r(0) \cap F(\Gamma_k); \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Suponha que exista um germe de aplicação subanalítica bi- α -Hölder $F: (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$, $\forall \alpha_0 < \alpha < 1$. Decorre do Teorema 3.1 que

$$\|\Sigma_1 - \Sigma_3\| \lesssim r^{\frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \alpha^2}.$$

Afirmação: $\frac{1}{2q_1 \dots q_j \pi} \lim(\sigma_1(r) - \sigma_3(r)) \in \mathbb{Z}$.

Prova: Suponhamos que não, então usando o Lema 3.1 e admitindo $\alpha > \alpha_0$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \alpha^2 &> \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \alpha_0^2 \geq \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \cdot \frac{l_j \cdot n_1 \dots n_j}{m_j \cdot q_1 \dots q_j} = \frac{l_j}{q_1 \dots q_j} \\ &\geq \min\{1 + \text{ord}_r(e^{i(\sigma_1 - \sigma_3)} - 1); \frac{l_j}{q_1 \dots q_j}\} \\ &= \text{ord}_r(\|\Sigma_1 - \Sigma_3\|) \geq \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \alpha^2. \end{aligned}$$

Daí, podemos escolher σ_1 e σ_3 tais que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_3(r)) = 2q_1 \dots q_j \pi k, \quad k = 0, 1.$$

Suponhamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_3(r)) = 0.$$

Neste caso, temos que ocorre uma das seguintes alternativas

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_2(r)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_4(r)) = 0.$$

Suponhamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_2(r)) = 0.$$

Como $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq |\sigma_1 - \sigma_3|, \forall r$. Então, temos

$$\text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_3(r))} - 1) \leq \text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_2(r))} - 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + \text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_2(r))} - 1) &\geq 1 + \text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_3(r))} - 1) \\ &\geq \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \alpha^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{l_k}{q_1 \dots q_k} + \text{ord}_r(e^{i \frac{l_k}{q_1 \dots q_k} (\sigma_1(r) - \sigma_2(r))} - 1) &\geq \frac{l_k}{q_1 \dots q_k} \\ + \text{ord}_r(e^{i \frac{l_k}{q_1 \dots q_k} (\sigma_1(r) - \sigma_3(r))} - 1) &\geq \frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \alpha^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Sigma_1(r) - \Sigma_2(r)\| \lesssim r^{\frac{m_j}{n_1 \dots n_j} \alpha^2}.$$

Denotemos $\delta_k(r) = F^{-1}(\Sigma_k(r)); k = 1, 2$. Então, temos

$$\delta_1(r) = (f(r), a_{\beta_1}(f(r))^{m_1/n_1} + \dots) \quad \text{e} \quad \delta_2(r) = (ig(r), a_{\beta_1}(g(r))^{m_1/n_1} + \dots),$$

onde $r^{1/\alpha} \lesssim |f(r)| \approx |g(r)| \lesssim r^\alpha$. Portanto,

$$|\delta_1(r) - \delta_2(r)| \gtrsim |f(r) - ig(r)| \gtrsim r^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Logo, como F é bi- α -Hölder, temos

$$\frac{1}{r\alpha^2} \lesssim \|\delta_1(r) - \delta_2(r)\| \frac{1}{\alpha} \lesssim \|\Sigma_1(r) - \Sigma_2(r)\| \lesssim r^{\frac{m_j}{n_1 \cdots n_j}} \alpha^2$$

e assim

$$\frac{m_j}{n_1 \cdots n_j} \alpha^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \implies \alpha_0^4 \leq \alpha^4 \leq \frac{n_1 \cdots n_j}{m_j},$$

o que é um absurdo.

Observo que os outros casos são analisados de forma completamente análoga. ■

Exemplo 3.2 *Sejam*

$$C : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + t^7 \end{cases} \quad e \quad \tilde{C} : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} \end{cases}$$

Então não existe germe de aplicação subanalítica bi- $\frac{27}{28}$ -Hölder $F : (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$.

Prova. Suponhamos que exista germe de aplicação subanalítica bi- $\frac{27}{28}$ -Hölder $F : (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$. Consideremos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ os seguintes semirampos em C :

$$\Gamma_1 = \{(r, r^{3/2} + r^{7/4}) : r \geq 0\};$$

$$\Gamma_2 = \{(ri, r^{3/2} e^{i(3/2)\pi/2} + r^{7/4} e^{i(7/4)\pi/2}) : r \geq 0\};$$

$$\Gamma_3 = \{(r, r^{3/2} - r^{7/4}) : r \geq 0\};$$

$$\Gamma_4 = \{(-ri, r^{3/2} e^{i(3/2)11\pi/2} + r^{7/4} e^{i(7/4)11\pi/4}) : r \geq 0\},$$

Consideremos agora:

$$\Sigma_k(r) = (r e^{i\sigma_k(r)}, r^{3/2} e^{i(3/2)\sigma_k(r)} + r^{5/3} e^{i(5/3)\sigma_k(r)}) \in S_r(0) \cap F(\Gamma_k); \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Suponha que exista um germe de aplicação subanalítica bi- $\frac{27}{28}$ -Hölder $F : (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$.

Decorre do teorema 3.1 que

$$\|\Sigma_1 - \Sigma_3\| \lesssim r^{\frac{27}{16}}$$

Veja que, $\frac{1}{12\pi} \lim(\sigma_1(r) - \sigma_3(r)) \in \mathbb{Z}$, pois caso contrario, usando o Lema 3.1 temos

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} &\geq \min\{1 + \text{ord}_r |e^{i(\sigma_1 - \sigma_3)} - 1|; \frac{5}{3}\} \\ &= \text{ord}_r (\|\Sigma_1 - \Sigma_3\|) \geq \frac{27}{16} \geq \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Daí, podemos escolher σ_1 e σ_3 tais que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_3(r)) = 12\pi k, \quad k = 0, 1.$$

Suponhamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_3(r)) = 0.$$

Neste caso, temos que ocorre uma das seguintes alternativas

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_2(r)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_4(r)) = 0.$$

Suponhamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_2(r)) = 0.$$

Como $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq |\sigma_1 - \sigma_3|, \forall r$. Então, temos

$$\text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_3(r))} - 1) \leq \text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_2(r))} - 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + \text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_2(r))} - 1) &\geq 1 + \text{ord}_r(e^{i(\sigma_1(r) - \sigma_3(r))} - 1) \\ &\geq \frac{27}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \text{ord}_r(e^{i\frac{3}{2}(\sigma_1(r) - \sigma_2(r))} - 1) &\geq \frac{3}{2} + \text{ord}_r(e^{i\frac{3}{2}(\sigma_1(r) - \sigma_3(r))} - 1) \\ &\geq \frac{27}{16} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} + \text{ord}_r(e^{i\frac{5}{3}(\sigma_1(r) - \sigma_2(r))} - 1) &\geq \frac{5}{3} + \text{ord}_r(e^{i\frac{5}{3}(\sigma_1(r) - \sigma_3(r))} - 1) \\ &\geq \frac{27}{16}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Sigma_1(r) - \Sigma_2(r)\| \lesssim r^{\frac{27}{16}}.$$

Denotemos $\delta_k(r) = F^{-1}(\Sigma_k(r)); k = 1, 2$. Então, temos

$$\delta_1(r) = (f(r), f(r)^{3/2} + f(r)^{7/4}) \quad \text{e} \quad \delta_2(r) = (ig(r), g(r)^{3/2} e^{i(3/2)\pi/2} + g(r)^{7/4} e^{i(7/4)\pi/2})$$

onde $r\sqrt{\frac{28}{27}} \lesssim |f(r)| \approx |g(r)| \lesssim r\sqrt{\frac{27}{28}}$. Portanto,

$$|\delta_1(r) - \delta_2(r)| \gtrsim |f(r) - ig(r)| \gtrsim r\sqrt{\frac{28}{27}}.$$

Logo, como F é bi- $\frac{27}{28}$ -Hölder, temos

$$r^{\frac{28}{27}} \lesssim \|\delta_1(r) - \delta_2(r)\| \sqrt{\frac{28}{27}} \lesssim \|\Sigma_1(r) - \Sigma_2(r)\| \lesssim r^{\frac{27}{16}}$$

e assim

$$\frac{27}{16} \leq \frac{28}{27} \implies 729 \leq 448,$$

o que é um absurdo.

Os outros casos são analisados de forma completamente análoga. ■

Teorema 3.2 *Dados $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ dois germes de curvas analiticamente irredutíveis em \mathbb{C}^2 . Se existir $F: (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$ germe de aplicação subanalítica bi- α -Hölder, para algum α suficientemente próximo de 1, então $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ possuem os mesmos pares de Puiseux.*

Prova. Dos Lemas 3.2 e 3.3, temos $\frac{l_i n_1 \dots n_i}{m_i q_1 \dots q_i} = 1$, ou seja, $\frac{l_i}{q_1 \dots q_i} = \frac{m_i}{n_1 \dots n_i}, \forall i$.

Assim, para $i = 1$, temos $\frac{m_1}{n_1} = \frac{l_1}{q_1} \implies n_1 = q_1$ e $m_1 = l_1$.

Para $i = 2$, temos $\frac{m_2}{n_1 n_2} = \frac{l_2}{q_1 q_2}$. Como $n_1 = q_1$, segue que $n_2 = q_2$ e $m_2 = l_2$.

Processeguido desta maneira teremos, para $i = g$, $\frac{m_g}{n_1 \dots n_g} = \frac{l_g}{q_1 \dots q_g}$. Como $n_1 = q_1, n_2 = q_2, \dots, n_{g-1} = q_{g-1}$, temos $n_g = q_g$ e $m_g = l_g$. Assim $(m_1, n_1) = (l_1, q_1)$, $(m_2, n_2) = (l_2, q_2), \dots, (m_g, n_g) = (l_g, q_g)$, ou seja, $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ possuem os mesmos pares de Puiseux. ■

Corolário 3.1 *Sejam $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ dois germes de curvas analiticamente irredutíveis em \mathbb{C}^2 . Então $(X, 0)$ é bi- α -Hölder equivalente a $(\tilde{X}, 0)$, para algum α suficientemente próximo de 1 se, e somente se, $(X, 0)$ é Lipschitz equivalente a $(\tilde{X}, 0)$ em \mathbb{C}^2 .*

3.3 Germes de curvas planas com mais de um ramo

Seja $(C, 0)$ um germe de curva analítica complexa em \mathbb{C}^2 com ramos $C = \bigcup_{i \in I} C_i$. Seja m_i a multiplicidade de $(C_i, 0)$; $i \in I$. Para cada par $i \neq j \in I$, por analogia com o caso de curvas reais, consideremos o seguinte número:

$$sh(C_i, C_j) = ord_r(dist(C_i \cap S_r(0), C_j \cap S_r(0))).$$

E, consideremos também,

$$coinc.(C_i, C_j) = max\{ord_x[y_k(x^{1/m_i}) - z_l(x^{1/m_j})] ; 1 \leq k \leq m_i, 1 \leq l \leq m_j\}$$

em que $\{y_k(x^{1/m_i})\}_{k=1}^{m_i}$ é o conjunto das parametrizações de Newton-Puiseux de C_i e $\{z_l(x^{1/m_j})\}_{l=1}^{m_j}$ é o conjunto das parametrizações de Newton-Puiseux de C_j . O número $coinc.(C_i, C_j)$ é conhecido como *coincidência* entre C_i e C_j .

Agora, vamos apresentar um Lema que está provado em Fernandes (2003) e que sua prova está mantida aqui.

Lema 3.4 $sh(C_i, C_j) = coinc.(C_i, C_j), \forall i \neq j$ em I .

Prova. Sejam Γ_i, Γ_j arcos de teste em C_i e C_j , respectivamente, descritos por

$$\Gamma_k(r) = (r, (r^{1/m_k})) \in \Gamma_k \cap S_r(0); k = i, j,$$

em que $\tilde{y}_i(x^{1/m_i})$ e $\tilde{y}_j(x^{1/m_j})$ são parametrizações de Newton-Puiseux de C_i e C_j tais que

$$coinc.(C_i, C_j) = ord_x[\tilde{y}_i(x^{1/m_i}) - \tilde{y}_j(x^{1/m_j})].$$

Então

$$dist(C_i \cap S_r(0), C_j \cap S_r(0)) \leq \|\Gamma_i(r) - \Gamma_j(r)\| = |\tilde{y}_i(r^{1/m_i}) - \tilde{y}_j(r^{1/m_j})|$$

Portanto, $sh(C_i, C_j) \geq coinc.(C_i, C_j)$

Por outro lado, temos

$$\tilde{y}_k(x^{1/m_k}) = h(x^{1/m_k}) + g_k(x^{1/m_k}), k = i, j$$

com $ord_x[g_i(x^{1/m_i}) - g_j(x^{1/m_j})] = \min\{ord_x g_i(x^{1/m_i}), ord_x g_j(x^{1/m_j})\}$

Sejam $\Gamma_i \subset C_i, \Gamma_j \subset C_j$ arcos de teste tais que

$$dist(C_i \cap S_r(0), C_j \cap S_r(0)) = dist(\Gamma_i \cap S_r(0), \Gamma_j \cap S_r(0)).$$

Seja

$$\Gamma_k(r) = (re^{i\gamma_k(r)}, \tilde{y}_k(r^{1/m_k} e^{i\gamma_k(r)/m_k})) \in S_r(0) \cap F(\Sigma_k); k = i, j.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{ord}_r \|\Gamma_i(r) - \Gamma_j(r)\| &= \min\{1 + \text{ord}_r |e^{i\gamma_i(r)} - e^{i\gamma_j(r)}|, \\ &\quad \text{ord}_r |\tilde{y}_i(r^{1/m_i} e^{i\gamma_i(r)/m_i}) - \tilde{y}_j(r^{1/m_j} e^{i\gamma_j(r)/m_j})|\} \end{aligned}$$

Mas, como

$$1 + \text{ord}_r |e^{i\gamma_i(r)} - e^{i\gamma_j(r)}| \leq \text{ord}_r |h(r^{1/m_i} e^{i\gamma_i(r)/m_i}) - h(r^{1/m_j} e^{i\gamma_j(r)/m_j})|,$$

temos

$$\begin{aligned} \text{ord}_r \|\Gamma_i(r) - \Gamma_j(r)\| &\leq \min\{\text{ord}_r g_i(r^{1/m_i} e^{i\gamma_i(r)/m_i}), \text{ord}_r g_j(r^{1/m_j} e^{i\gamma_j(r)/m_j})\} \\ &= \text{coinc}(C_i, C_j). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\text{sh}(C_i, C_j) \leq \text{coinc}(C_i, C_j).$$

Portanto, segue-se o resultado. ■

Teorema 3.3 *Sejam $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ germes de curvas analíticas complexas em \mathbb{C}^2 com ramos $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e $\tilde{X} = \bigcup_{j \in J} \tilde{X}_j$. Se existir $F: (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$ germe de aplicação subanalítica bi- α -Hölder, para todo α suficientemente próximo de 1, então existe uma bijeção $\phi: I \rightarrow J$ tal que $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_{\phi(i)})$ e $(X_i, X_j)_0 = (\tilde{X}_{\phi(i)}, \tilde{X}_{\phi(j)})_0$, onde $(\cdot, \cdot)_0$ é a multiplicidade de interseção em 0.*

Prova. Seja $F: (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$ um germe de aplicação subanalítica bi- α -Hölder, para todo $0 < \alpha < 1$. Por argumentos topológicos, podemos supor que $I = J$ e $F(X_i) = \tilde{X}_i, \forall i \in I$. Segue do Teorema 3.2 que $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_i), \forall i \in I$. Agora, consideremos $i \neq j \in I$ e mostremos que $\alpha^2 \leq \frac{\text{sh}(X_i, X_j)}{\text{sh}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)}, \frac{\text{sh}(X_i, X_j)}{\text{sh}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)} \leq \frac{1}{\alpha^2}$. Para isso, tomemos Γ_i, Γ_j arcos de teste em X tais que $\Gamma_i \subset X_i, i = 1, 2$ e

$$\text{dist}(X_i \cap S_r(0), X_j \cap S_r(0)) = \text{dist}(\Gamma_i \cap S_r(0), \Gamma_j \cap S_r(0))$$

Observemos que $F(\Gamma_i), F(\Gamma_j)$ são arcos de teste em \tilde{X} tais que $F(\Gamma_i) \subset \tilde{X}_i, i = 1, 2$. Daí, temos que

$$\text{dist}(\tilde{X}_i \cap S_r(0), \tilde{X}_j \cap S_r(0)) \leq \text{dist}(F(\Gamma_i) \cap S_r(0), F(\Gamma_j) \cap S_r(0)).$$

Agora, como F é bi- α -Hölder, podemos lançar mão do Teorema 3.1 para obter a desigual-

dade

$$\frac{1}{\alpha^2} \text{dist}(\Gamma_i \cap S_r(0), \Gamma_j \cap S_r(0)) \geq \text{dist}(F(\Gamma_i) \cap S_r(0), F(\Gamma_j) \cap S_r(0)).$$

E, portanto, $\frac{1}{\alpha^2} sh(X_i, X_j) \geq sh(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$. Com um argumento completamente simétrico ao usado acima, provamos que $sh(X_i, X_j) \leq \frac{1}{\alpha^2} sh(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$. E, assim, concluímos que $\alpha^2 \leq \frac{sh(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)}{sh(X_i, X_j)}, \frac{sh(X_i, X_j)}{sh(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)} \leq \frac{1}{\alpha^2}$, para todo $0 < \alpha < 1$. Portanto $sh(X_i, X_j) = sh(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j), \forall i \neq j \in I$. Assim, pelo Lema 3.4, temos que $\text{coinc.}(X_i, X_j) = \text{coinc.}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j), \forall i \neq j \in I$. Em (1977), M. Merle obtém uma releitura do índice de interseção dos ramos de uma curva a partir da coincidência desses ramos. Fazendo uso dessa relação, temos $(X_i, X_j)_0 = (\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)_0, \forall i \neq j \in I$. ■

Definição 3.5 Uma Aplicação $\phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é chamada *log-Lipschitz contínua* se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \log \frac{1}{\|x - y\|}$$

Quando $n = p$ e ϕ tem uma inversa *log-Lipschitz contínua*, diremos que ϕ é *bi-log-Lipschitz*.

Definição 3.6 Sejam (X, x) e (Y, y) germes de subconjuntos semianalíticos de dimensão real 1. Dizemos que (X, x) é *log-Lipschitz equivalente* a (Y, y) se existir um germe de homeomorfismo *bi-log-Lipschitz* $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$.

Proposição 3.1 Seja $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação. Se ϕ é *log-Lipschitz contínua*, então ϕ é α -Hölder contínua para todo $0 < \alpha < 1$.

Prova. Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função dada por $f(z) = z^{1-\alpha} \log \frac{1}{z}$, com $0 < \alpha < 1$. Observe que $f(z) < 1$, para z suficientemente próximo de zero. Admitindo que ϕ é um germe de aplicação *log-Lipschitz* e que $f(z) < 1$, para $z = \|x - y\|$ suficientemente próximo de zero, então temos

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \log \frac{1}{\|x - y\|} \leq \|x - y\|^\alpha.$$

Portanto ϕ é um germe de aplicação α -Hölder para todo $0 < \alpha < 1$. ■

Do Teorema 3.3 acima, temos o seguinte Corolário.

Corolário 3.2 Sejam $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ curvas analíticas complexas em \mathbb{C}^2 . Então $(X, 0)$ é *bi-log-Lipschitz equivalente* a $(\tilde{X}, 0)$ se, e somente se, $(X, 0)$ é *Lipschitz equivalente* a $(\tilde{X}, 0)$ em \mathbb{C}^2 .

4 EQUIVALÊNCIA HÖLDER DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Estudamos no capítulo 3 classificação de germes de curvas módulo homeomorfismo bi- α -hölder. Em 1997, Risler e Trotman perguntam se equivalência bi-lipschitz do conjunto dos zeros $f^{-1}(0)$ e $g^{-1}(0)$ de germes de funções analíticas complexas f e g com singularidade isolada implica na equivalência bi-lipschitz de f e g . No entanto em 2003, Henry e Parusinski mostram que classificação de germes de funções admite moduli contínua. Posto isso faremos a seguinte pergunta:

A equivalência bi- α -Hölder, $0 < \alpha < 1$, de germes de funções analíticas $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite moduli ?

O objetivo deste capítulo é responder à pergunta acima. De fato, respondemos positivamente a pergunta mostrando que: Dado um α , com $0 < \alpha < 1$, existe $d \in \mathbb{Z}$, $d > 1$ tal que $\sqrt{\frac{1}{d}} < \alpha^{12} < 1$. Consideramos a seguinte família de germes de polinômios w -homogêneos, $w = (d, 1)$, a 1-parâmetro $f_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $t \in \mathbb{C}$, dada por

$$f_t(x, y) = x^3 - 3t^2xy^{2d} + y^{3d}. \quad (2)$$

Nosso propósito neste capítulo é mostrar que a família dada em (2) admite moduli contínuo para bi- α -Hölder equivalência, ou seja, as classes de equivalência bi- α -Hölder sobre a família dada em (2) são os elementos da família dados continuamente no parâmetro t , em particular, estamos dizendo que o número de classes de equivalência bi- α -Hölder sobre a família dada em (2) é não enumerável. Para mostrarmos esse resultado consideramos uma vizinhança da curva polar $\Gamma: \frac{\partial f}{\partial x} = 0$, que chamamos de vizinhança tipo Parusinski. A idéia é encontrar nesta vizinhança um invariante de equivalência bi- α -Hölder de tais germes que varia continuamente nesta família. No caso de um único germe f_t o invariante é dado em termos do coeficiente líder da expansão assintótica de f_t ao longo do ramo da curva polar $\Gamma: \partial f_t / \partial x = 0$.

A fim de encontrar este invariante vamos construir uma vizinhança Y_δ tipo Parusinski de Γ que seja preservada por um homeomorfismo bi- α -Hölder $H: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, com $\sqrt{\frac{1}{d}} < \alpha^{12} < 1$.

Vale observar o seguinte:

Observação 4.1 Diante da desigualdade de Lojasiewicz ver (COSTE, 2002, p. 31, Teorema 2.12), todo germe de homeomorfismo semialgérico é Hölder com inversa Hölder. De fato, considere $F(x, y) = \phi(x) - \phi(y)$ e $G(x, y) = x - y$, com $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ homeomorfismo semialgérico. Como ϕ é germe semialgérico então temos que F e G

são semialgéblicas definidas num compacto. Assim da desigualdade de Lojasiewicz existe $N, \tilde{N} \in \mathbb{N}$ e $C, \tilde{C} \geq 0$ tais que

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |F(x, y)| \leq C |G(x, y)|^\beta \leq C |x - y|^\beta, \beta = 1/N$$

$$\begin{aligned} |\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(y)| &= |G(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y))| \leq \tilde{C} |F(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y))|^{\tilde{\beta}} \\ &\leq \tilde{C} |\phi(\phi^{-1}(x)) - \phi(\phi^{-1}(y))|^{\tilde{\beta}} \leq \tilde{C} |x - y|^{\tilde{\beta}}, \tilde{\beta} = 1/\tilde{N} \end{aligned}$$

Teorema 4.1 (Shiota-Benedetti) *O conjunto dos germes de funções $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ polinomiais de grau d não admite moduli a menos de equivalência via um homeomorfismo semialgéblico.*

Observação 4.2 Como consequência do Teorema de Shiota-Benedetti, segue que a equivalência Hölder (com expoente não necessariamente pré-fixado) de funções polinômias não apresenta moduli contínuo.

4.1 Homeomorfismo bi- α -Hölder e um conjunto preservado por este homeomorfismo

Nesta seção, definimos e exemplificamos homeomorfismo bi- α -Hölder. Também construímos um conjunto Y_δ preservado por um homeomorfismo bi- α -Hölder $H: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, com $\sqrt{\frac{1}{d}} < \alpha^{12} < 1$, o qual mostramos na seção 4.2, que para um germe de função analítica $f_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ na família (2), este conjunto Y_δ é uma vizinhança da curva polar $\Gamma: \partial f_t / \partial x = 0$, a qual chamamos de vizinhança tipo Parusinski.

4.1.1 Homeomorfismo bi- α -Hölder

Iniciamos com a definição 3.1 do capítulo 3.

Definição 3.1 *Uma Aplicação $\phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é chamada Hölder contínua se existem $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|^\alpha$, para todos $x, y \in U$. O número λ é chamado a constante de Hölder e α o expoente de Hölder.*

Quando $n = p$ e ϕ tem uma inversa Hölder, diremos que ϕ é bi-Hölder.

Definição 4.1 *Dois germes $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são chamados bi- α -Hölder equivalente se existir um germe de aplicação bi-Hölder $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $f = g \circ \phi$. O número α é o mínimo entre os expoentes de Hölder dos germes $\phi, \phi^{-1}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.*

Exemplo 4.1 *Sejam $f, g: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dados por $f(x) = x$, $g(x) = x^3$. Seja $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ dado por $\phi(x) = \sqrt[3]{x}$. Observe que $f(x) = g(\phi(x))$. Então numa vizinhança da origem suficientemente pequeno temos que*

$$\begin{aligned} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^3}{|x - y|} &= \frac{|x^{1/3} - y^{1/3}|^3}{|x - y|} = \frac{|x^{1/3} - y^{1/3}| |x^{2/3} - 2x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}|}{|x^{1/3} - y^{1/3}| |x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}|} \\ &= \frac{|x^{2/3} - 2x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}|}{|x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}|} \end{aligned}$$

é limitado. Portanto, $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \lambda_1 |x - y|^{1/3}$. Como

$$|\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(y)| = |x - y| |x^2 + xy + y^2| \leq \lambda_2 |x - y|,$$

então f e g são bi- $\frac{1}{3}$ -Hölder equivalentes.

Exemplo 4.2 *Sejam $f, g: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dados por $f(x) = x^5$, $g(x) = x^7$. É fácil mostrar que f e g não são bi- $\frac{5}{6}$ -Hölder equivalentes.*

4.1.2 Um conjunto preservada por um homeomorfismo bi- α -Hölder

Fixe $g = f_t$ e $\tilde{g} = f_t$. Fixe um único germe $g: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e um ponto $p_0 \in \mathbb{C}^2$ perto da origem. Fixe uma constante K suficientemente grande que posteriormente será relacionada com a constante α -Hölder de um homeomorfismo bi- α -Hölder. Seja $c = g(p_0)$. Seja $B(p_0, \rho)$ a bola aberta centrada em p_0 e de raio ρ . Denote

$$X(p_0, \rho) := B(p_0, \rho) \cap g^{-1}(c).$$

Suponhamos que $p, q \in X(p_0, \rho)$ ao longo da mesma componente conexa de $X(p_0, K\rho^{\alpha^2})$ que contém p_0 . Então, pode-se ligar p e q por uma curva C^1 por partes em $X(p_0, K\rho^{\alpha^2})$, ou seja, $\gamma: [a, b] \rightarrow X(p_0, K\rho^{\alpha^2})$ curva C^1 por partes com $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Seja $dist_{p_0, \rho, K}(p, q)$ o ínfimo dos diâmetros das curvas ligando p e q , isto é,

$$dist_{p_0, \rho, K}(p, q) := \inf_{\gamma} diam(\gamma),$$

onde

$$diam(\gamma) := \sup_P |\gamma(t_i) - \gamma(t_j)|,$$

com $P: a = t < t < \dots < t = b$ partição de $[a, b]$.

Defina

$$\varphi_i(p_0, \rho, K) := \sup \frac{(\text{dist}_{p_0, \rho, K}(p, q))^{1/\alpha^{2-i}}}{|p - q|^{\alpha^{2-i}}}, \quad i = 0, 1, 2,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os pares de pontos p e q de $X(p_0, \rho)$ da mesma componente conexa de $X(p_0, K\rho^{\alpha^2})$ contendo p_0 . $\varphi_i, i = 0, 1, 2$ não é necessariamente uma função crescente de ρ . Então definimos

$$\psi_i(p_0, \rho, K) := \sup_{\rho' \leq \rho} \varphi_i(p_0, \rho', K), \quad i = 0, 1, 2.$$

Finalmente definimos

$$Y_i(\rho, K, A) := \{p; \psi_i(p_0, \rho, K) \geq A\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Intuitivamente falando $Y_i(\rho, K, A)$ para A grande, é o conjunto de pontos onde a curvatura das curvas de níveis $g^{-1}(c)$ é muito grande. Vamos mostrar que tais $Y_i(\rho, K, A)$ são preservados por homeomorfismos bi- α -Hölder.

Seja $H: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ germe de um homeomorfismo bi- α -Hölder que leva os níveis de \tilde{g} para os níveis de g , onde $g, \tilde{g}: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são os germes de funções analíticas. Fixe $L \geq 1$, uma constante α -Hölder comum de H e de sua inversa H^{-1} . Para $p_0 \in \mathbb{C}^2$ denotamos por $\tilde{p}_0 = H(p_0)$ e da mesma forma, adicionamos o til para distinguir o objetos do domínio correspondente ao contradomínio de H , por exemplo

$$\tilde{Y}_i(\rho, K, A) := \{\tilde{p}; \tilde{\psi}_i(\tilde{p}, \rho, K) \geq A\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

será um subconjunto do contradomínio de H .

Lema 4.1 *Suponha $K \geq L^{1+\frac{1}{\alpha}}$. Então,*

$$\tilde{Y}_0(L^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}}, K, AL^{\alpha+\frac{1}{\alpha^2}}) \subset H(Y_1(\rho, K, A)) \subset \tilde{Y}_2(L\rho^\alpha, K, AL^{-1-\frac{1}{\alpha}}).$$

Prova. Como H é bi- α -Hölder, temos

$$\tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}}) \subset H(X(p_0, \rho)) \subset \tilde{X}(\tilde{p}_0, L\rho^\alpha).$$

Como $K \geq L^{1+\frac{1}{\alpha}}$,

$$\tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}}) \subset H(X(p_0, \rho)) \subset \tilde{X}(\tilde{p}_0, kL^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^\alpha) \subset H(X(p_0, K\rho^{\alpha^2})). \quad (3)$$

Se $\tilde{p}_0, \tilde{p} \in \tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}})$ e estão na mesma componente conexa de $\tilde{X}(\tilde{p}_0, kL^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^\alpha)$ então

p_0 e $p = H^{-1}(\tilde{p})$ estão na mesma componente conexa de $X(p_0, K\rho^{\alpha^2})$. Assim, (3) implica

$$\psi_1(p_0, \rho, K) \geq L^{-\alpha - \frac{1}{\alpha^2}} \tilde{\psi}_0(\tilde{p}_0, L^{-\frac{1}{\alpha}} \rho^{\frac{1}{\alpha}}, K).$$

De fato, dados $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{X}(\tilde{p}_0, kL^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^\alpha)$ na mesma componente conexa de \tilde{p}_0 . Sejam $p_1 = H^{-1}(\tilde{p}_1)$, $p_2 = H^{-1}(\tilde{p}_2)$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow X(p_0, K\rho^{\alpha^2})$ dado por $\gamma(a) = p_1$ e $\gamma(b) = p_2$ ligando p_1 e p_2 . Seja $\beta = H \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \tilde{X}(\tilde{p}_0, kL^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^\alpha)$ dado por $\beta(a) = H(\gamma(a)) = H(p_1) = \tilde{p}_1$ e $\beta(b) = H(\gamma(b)) = H(p_2) = \tilde{p}_2$ ligando \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 . Assim,

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\tilde{p}_0, L^{-1/\alpha}\rho^{1/\alpha}, K}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= \inf_{\mu} \text{diam}(\mu) \leq \text{diam}(\beta) = \sup |\beta(t_i) - \beta(t_j)| \\ &= \sup |H(\gamma(t_i)) - H(\gamma(t_j))| \\ &\leq L \sup |\gamma(t_i) - \gamma(t_j)|^\alpha = L (\text{diam}(\gamma))^\alpha. \end{aligned}$$

Logo, $\text{dist}_{\tilde{p}_0, L^{-1/\alpha}\rho^{1/\alpha}, K}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \leq L (\text{dist}_{\tilde{p}_0, \rho, K}(p_1, p_2))^\alpha$. Portanto,

$$(\text{dist}_{\tilde{p}_0, L^{-1/\alpha}\rho^{1/\alpha}, K}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2))^{\frac{1}{\alpha^2}} \leq L^{\frac{1}{\alpha^2}} (\text{dist}_{\tilde{p}_0, \rho, K}(p_1, p_2))^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Veja também que

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &\leq L |\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2|^\alpha \Rightarrow |p_1 - p_2|^\alpha \leq L^\alpha |\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2|^{\alpha^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{|\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2|^{\alpha^2}} \leq \frac{L^\alpha}{|p_1 - p_2|^\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \frac{(\text{dist}_{\tilde{p}_0, L^{-1/\alpha}\rho^{1/\alpha}, K}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2))^{\frac{1}{\alpha^2}}}{|\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2|^{\alpha^2}} \leq L^{\alpha + \frac{1}{\alpha^2}} \frac{(\text{dist}_{\tilde{p}_0, \rho, K}(p_1, p_2))^{\frac{1}{\alpha}}}{|p_1 - p_2|^\alpha}.$$

Assim,

$$L^{-\alpha - \frac{1}{\alpha^2}} \tilde{\psi}_0(\tilde{p}_0, L^{-\frac{1}{\alpha}} \rho^{\frac{1}{\alpha}}, K) \leq \psi_1(p_0, \rho, K).$$

Analogamente,

$$\psi_1(p_0, \rho, K) \leq L^{1 + \frac{1}{\alpha}} \tilde{\psi}_2(\tilde{p}_0, L\rho^\alpha, K).$$

■

Um argumento similar mostra o seguinte.

Lema 4.2 *Sejam $\delta > 0$ e $Y_i(\delta, M, K, A) := \{p; \psi_i(p, M^{\frac{1}{\alpha^{8-2i}}}, |p|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K) \geq A\}$, $i = 0, 1, 2$. Se $K \geq L^{1 + \frac{1}{\alpha} + 2\frac{1+\delta}{\alpha^5}}$, então*

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0(\delta, L^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{1+\delta}{\alpha^8}} M^{\frac{1}{\alpha^8}}, K, AL^{\alpha + \frac{1}{\alpha^2}}) &\subset H(Y_1(\delta, M^{\frac{1}{\alpha^6}}, K, A)) \\ &\subset \tilde{Y}_2(\delta, L^{1 + \frac{1+\delta}{\alpha^5}} M^{\frac{1}{\alpha^4}}, K, AL^{-1 - \frac{1}{\alpha}}). \end{aligned}$$

Prova. Use

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{1+\delta}{\alpha^8}} M^{\frac{1}{\alpha^8}} |\tilde{p}_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^8}}) &\subset H(X(p_0, M^{\frac{1}{\alpha^6}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^6}})) \\
&\subset \tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{1+\frac{1+\delta}{\alpha^5}} M^{\frac{1}{\alpha^4}} |\tilde{p}_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^4}}) \\
&\subset \tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{1+\delta}{\alpha^4}} K M^{\frac{1}{\alpha^4}} |\tilde{p}_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^4}}) \\
&\subset H(X(p_0, K^\alpha M^{\frac{1}{\alpha^2}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^2}})) \\
&\subset H(X(p_0, K M^{\frac{1}{\alpha^2}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^2}})).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{1+\frac{1+\delta}{\alpha^5}} M^{\frac{1}{\alpha^4}} |\tilde{p}_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^4}}) &= \tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{1+\frac{1+\delta}{\alpha^5}} L^{1+\frac{1+\delta}{\alpha^5} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1+\delta}{\alpha^4}} M^{\frac{1}{\alpha^4}} |\tilde{p}_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^4}}) \\
&\subset H(X(p_0, L^{\alpha + \frac{1+\delta}{\alpha^4} + 1 + \frac{1+\delta}{\alpha^3}} M^{\frac{1}{\alpha^2}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^2}})) \\
&\subset \tilde{X}(\tilde{p}_0, L^{1+\frac{1+\delta}{\alpha}} L^{\alpha^2 + \frac{1+\delta}{\alpha^3} + \alpha + \frac{1+\delta}{\alpha^2}} M |\tilde{p}_0|^{1+\delta}) \\
&\subset \tilde{X}(\tilde{p}_0, K L^{1+\frac{1+\delta}{\alpha}} M |\tilde{p}_0|^{1+\delta}).
\end{aligned}$$

■

4.2 Existência de Moduli

Nesta seção mostramos o resultado principal desse capítulo, ou seja, mostramos que dado α , com $0 < \alpha < 1$, existe $d \in \mathbb{Z}, d > 1$ tal que $\sqrt{\frac{1}{d}} < \alpha^{12} < 1$ e a seguinte família de germes de polinômios w -homogêneos, $w = (d, 1)$, a 1-parâmetro $f_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $t \in \mathbb{C}$, dada por

$$f_t(x, y) = x^3 - 3t^2xy^{2d} + y^{3d}. \quad (4)$$

admite moduli. Para mostrarmos este resultado precisaremos de dois resultados que anunciados abaixo, os quais provaremos posteriormente.

Proposição 4.1 *Seja $Y_i(\delta, M, K, A)$, onde $\delta > 0, M > 0$ e A, K são constantes suficientemente grandes. Suponhamos que $p_1, p_2 \in Y_i(\delta, M, K, A)$ e existe um $\delta_1 > 0$ tal que $|p_1 - p_2| \leq |p_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}}$. Então, para $\delta_2 < \min\{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}} - 1, \frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}} - 1, 2(d-1)\}$ e uma vizinhança da origem suficientemente pequeno temos*

$$\left| \frac{f_t(p_1)}{f_t(p_2)} - a \right| \leq |p_1|^{\delta_2},$$

onde a é um dos seguintes valores: $1, \frac{1+2t^3}{1-2t^3}, \frac{1-2t^3}{1+2t^3}$.

Lema 4.3 *Se K e A são constantes suficientemente grandes e $0 < \delta < \sqrt{d} - 1$ então $Y_i(\delta, M, K, A)$ é não vazio e contém a curva polar Γ . Além disso, neste caso, todos os limites de $f_t(p_1)/f_t(p_2)$ dados pela Proposição 4.1 pode ser obtido tomando p_1 e p_2 ao longo dos ramos de Γ .*

Agora vamos ao resultado.

Teorema 4.2 *Sejam f_t e $f_{t'}$ dois germes de funções polinomiais w -homogenia dados por*

$$f_t(x, y) = x^3 - 3t^2xy^{2d} + y^{3d}, w = (d, 1), d > 1, \sqrt{\frac{1}{d}} < \alpha^{12} < 1.$$

Suponhamos $t, t', 1 \pm 2t^3$ e $1 \mp 2t'^3$ são diferentes de zero. Se existir germe de homeomorfismo bi- α -Hölder $H: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $f_t \circ H = f_{t'}$ então

$$\left\{ \frac{1 + 2t^3}{1 - 2t^3}, \frac{1 - 2t^3}{1 + 2t^3} \right\} = \left\{ \frac{1 + 2t'^3}{1 - 2t'^3}, \frac{1 - 2t'^3}{1 + 2t'^3} \right\}.$$

Prova. Sejam $p_1, p_2 \in \Gamma$ e $\delta_1 > 0$ tal que $|p_1 - p_2| \leq |p_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^6}}$. Do Lema 4.3 e da Proposição 4.1, segue que para $\delta_2 < \min\{\frac{1+\delta_1}{\alpha^6} - 1, \frac{1+\delta}{\alpha^6} - 1, 2(d-1)\}$, temos

$$\left| \frac{f_t(p_1)}{f_t(p_2)} - a \right| \leq |p_1|^{\delta_2},$$

onde a é um dos seguintes valores: $1, \frac{1 + 2t^3}{1 - 2t^3}, \frac{1 - 2t^3}{1 + 2t^3}$.

Agora, sejam $\tilde{p}_1 = H(p_1), \tilde{p}_2 = H(p_2)$ então,

$$|\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2| = |H(p_1) - H(p_2)| \leq L|p_1 - p_2|^\alpha \leq L|p_1|^{\alpha(\frac{1+\delta}{\alpha^6})}.$$

Portanto,

$$|\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2| \leq L^{1+\frac{1+\delta}{\alpha^5}} |\tilde{p}_1|^{\alpha^2(\frac{1+\delta}{\alpha^6})} \leq C |\tilde{p}_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^4}}.$$

Do Lema 4.2 e da Proposição 4.1, segue que para $\tilde{\delta}_2 = \min\{\frac{1+\delta_1}{\alpha^4} - 1, \frac{1+\delta}{\alpha^4} - 1, 2(d-1)\}$, temos

$$\left| \frac{f_{t'}(\tilde{p}_1)}{f_{t'}(\tilde{p}_2)} - \tilde{a} \right| \leq |\tilde{p}_1|^{\tilde{\delta}_2},$$

onde \tilde{a} é um dos seguintes valores: $1, \frac{1+2t^3}{1-2t^3}, \frac{1-2t^3}{1+2t^3}$. Logo,

$$\begin{aligned} |a - \tilde{a}| &= \left| a - \frac{f_t(p_1)}{f_t(p_2)} \right| + \left| \frac{f_t(p_1)}{f_t(p_2)} - \tilde{a} \right| \leq |p_1|^{\delta_2} + \left| \frac{f_t(H(p_1))}{f_t(H(p_2))} - \tilde{a} \right| \\ &= |p_1|^{\delta_2} + \left| \frac{f_t(\tilde{p}_1)}{f_t(\tilde{p}_2)} - \tilde{a} \right| \leq |p_1|^{\delta_2} + |p_1|^{\tilde{\delta}_2} \\ &\leq 2|p_1|^{\delta_3}, \text{ onde } \delta_3 < \min\{\delta_2, \alpha\tilde{\delta}_2\}. \end{aligned}$$

Fazendo $|p_1| \rightarrow 0$, temos a igualdade dos seguintes conjuntos

$$\left\{ \frac{1+2t^3}{1-2t^3}, \frac{1-2t^3}{1+2t^3} \right\} = \left\{ \frac{1+2t^3}{1-2t^3}, \frac{1-2t^3}{1+2t^3} \right\}.$$

Isto implica $t^3 = \pm t^3$ como desejávamos. ■

Antes das demonstrações da Proposição 4.1 e do Lema 4.3, vamos trabalhar alguns Lemas necessários para as demonstrações da Proposição 4.1 e também do Lema 4.3.

Fixe $g(x, y) = x^3 - 3t^2xy^{2d} + y^{3d}$ tal que $t \neq 0$ e $1 \pm 2t^3 \neq 0$.

Lema 4.4 *Suponha que $(x, y) \in U := \{(x, y); |\partial f/\partial x| < |\partial f/\partial y|\}$. Então,*

$$x = \pm ty^d + O(y^{2d-1})$$

e

$$g(x, y) = (1 \mp 2t^3)y^{3d} + O(y^{3d+2(d-1)}).$$

Prova. Veja que

$$\begin{aligned} \partial g/\partial x &= 3(x^2 - t^2y^{2d}) \\ \partial g/\partial y &= 3dy^{2d-1}(y^d - 2t^2x). \end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variáveis $x = sy^d$. Então,

$$\begin{aligned} \partial g/\partial x &= 3y^{2d}(s^2 - t^2) \\ \partial g/\partial y &= 3dy^{3d-1}(1 - 2t^2s). \end{aligned}$$

Além disto,

$$|3y^{2d}(s^2 - t^2)| < |3dy^{3d-1}(1 - 2t^2s)| \implies |s^2 - t^2| < d|y|^{d-1}|1 - 2s^2t|.$$

Afirmação: $|x| \ll |y^d|$, para $(x, y) \in U$.

Prova. Suponhamos que $|x| \gtrsim |y^d|$, então

$$|x^2| \simeq |3x^2 - 3t^2y^{2d}| < |-6dt^2xy^{2d-1} + 3dy^{3d-1}| \simeq |x| |y^{2d-1}|.$$

O que nos dá $|x| < |y^{2d-1}| < |y^d|$ e isto é um absurdo. Assim, $|s| = \frac{|x|}{|y^d|} < 1$. Como podemos supor t limitado então temos

$$|s^2 - t^2| < d|y|^{d-1} |1 - 2s^2t| < M|y|^{d-1} \Rightarrow |s - t| |s + t| < M|y|^{d-1},$$

onde M é constante. Assim,

$$|s - t| < M_1 |y|^{d-1} \text{ ou } |s + t| < M_2 |y|^{d-1}.$$

Suponhamos

$$|s - t| < M_1 |y|^{d-1}.$$

Então,

$$\left| \frac{x}{y^d} - t \right| < M_1 |y|^{d-1} \implies |x - ty^d| < M_1 |y^{2d-1}|.$$

Portanto,

$$x = ty^d + O(y^{2d-1}).$$

Supondo o outro caso, temos

$$x = -ty^d + O(y^{2d-1}).$$

Assim,

$$x = \pm ty^d + O(y^{2d-1}).$$

Agora, $g(x, y) = y^{3d} (s^3 - 3st^2 + 1)$

$$\begin{aligned} |g(x, y) - (1 \mp 2t^3) y^{3d}| &= |y^{3d} (s^3 - 3st^2 \pm 2t^3)| \\ &= |y^{3d}| |(s \mp t) (s \mp t) (s \pm 2t)| \\ &\leq M |s \mp t| |s \mp t| |y^{3d}| \\ &< M^1 |y|^{d-1} |y|^{d-1} |y^{3d}| \\ &= M^1 |y^{3d+2(d-1)}|. \end{aligned}$$

Portanto, $g(x, y) = (1 \mp 2t^3)y^{3d} + O(y^{3d+2(d-1)})$.

■

Lema 4.5 *Sejam $\delta > 0$ e $C > 0$. Então, no conjunto*

$$\{p = (x, y); \exists p_0 = (x_0, y_0) \in U, g(p) = g(p_0), |y - y_0| \leq C |y_0|^{1+\delta}\}$$

temos

$$x = O(y^d) \quad (5)$$

e

$$g(x, y) = (1 \mp 2t^3)y^{3d} + O(y^{3d+\delta'}), \quad (6)$$

onde $\delta' = \min\{\delta, 2(d-1)\}$.

Prova. Seja $\delta > 0$, $y \simeq y_0$. Temos

$$\begin{aligned} |g(x, y) - (1 \mp 2t^3)y^{3d}| &= |g(x_0, y_0) - (1 \mp 2t^3)y_0^{3d} + (1 \mp 2t^3)(y_0^{3d} - y^{3d})| \\ &\leq |g(x_0, y_0) - (1 \mp 2t^3)y_0^{3d}| + |1 \mp 2t^3| |y_0^{3d} - y^{3d}| \\ &\leq |y_0^{3d+2(d-1)}| + |1 \mp 2t^3| |y_0 - y| (|y_0^{3d-1}| \\ &\quad + |y_0^{3d-2}| |y| + \dots + |y^{3d-1}|) \\ &\leq |y_0^{3d+2(d-1)}| + C |1 \mp 2t^3| |y_0|^{1+\delta} \cdot M |y_0^{3d-1}| \\ &\leq \bar{M} |y_0|^{3d} (|y_0|^{2(d-1)} + |y_0|^\delta) \\ &\leq \bar{M} |y_0|^{3d+\delta'} = \tilde{M} |y|^{3d+\delta'}, \end{aligned}$$

onde $\delta' = \min\{2(d-1), \delta\}$. Assim,

$$g(x, y) = (1 \mp 2t^3)y^{3d} + O(y^{3d+\delta'}).$$

Tomando $x = sy^d$, temos

$$y^{3d}(s^3 - 3t^2s + 1) = g(x, y) = (1 \mp 2t^3)y^{3d} + O(y^{3d+\delta'}),$$

ou seja, $|y^{3d}| |s - 3st \pm 2t^3| \leq M |y^{3d+\delta'}| \implies |s - 3st \pm 2t^3| \leq M |y^{\delta'}|$. Como podemos supor t limitado então teremos s limitado. Logo $|x| = |s| |y^d| \leq M' |y^d|$. Isto nos dar $x = O(y^d)$.

■

Corolário 4.1 *Seja $Y_i(\delta, M, K, A) := \{p; \psi_i(p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K) \geq A\}$, $i = 0, 1, 2$, onde $\delta > 0$, $M > 0$ e A, K são constantes suficientemente grandes. Então, as fórmulas (5) e (6) valem para todos $(x, y) \in Y$.*

Prova. Fixe p_0 e suponha que $X(p_0, KM^{\frac{1}{\alpha^{4-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}})$ não interseca U . Então a projeção $X_c = f^{-1}(c) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(x, y) \mapsto y$ é submersão e X_c próximo de cada ponto de $X(p_0, KM^{\frac{1}{\alpha^{4-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}})$ é o gráfico de uma função $x = x(y)$ com a derivada limitada por 1. Com efeito, como $p_0 \notin U$, $|\partial f/\partial x| > |\partial f/\partial y|$ e a singularidade de f é isolada na origem, então não podemos ter $\partial f/\partial x = 0$ em $p_0 \neq 0$. Logo X_c é gráfico numa vizinhança de p_0 . Veja também que, $f(x(y), y) = c$ e derivando obtemos,

$$\partial f/\partial x(x(y), y) \cdot x'(y) + \partial f/\partial y(x(y), y) \cdot 1 = 0.$$

Logo,

$$x'(y) = -\frac{\partial f/\partial y(x(y), y)}{\partial f/\partial x(x(y), y)} \quad e \quad |x'(y)| = \frac{|\partial f/\partial y(x(y), y)|}{|\partial f/\partial x(x(y), y)|} \leq 1.$$

Considere $V_N = \{y/ |y - y_0| < N|y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}\}$. Existe uma constante $N = N(C)$ tal que $\Omega := \pi_c^{-1}(V_N) \cap X(p_0, C|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}})$ é a união de gráficos de funções analíticas definidas em V_N e com derivada limitada por 1 e tal que π_c restrito a Ω é um recobrimento finito sobre V_N . Denotamos essa restrição por $\pi_c^!$. Se $C^! = C^!(M, \delta)$ é suficientemente grande, então para $N^! = N(C^!)$ temos $X(p_0, M^{\frac{1}{\alpha^{8-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}) \subset \pi_c^{!-1}(V_{N^!})$ e se K for suficientemente grande, então $\pi_c^{!-1}(V_{N^!}) \subset X(p_0, KM^{\frac{1}{\alpha^{4-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}})$. Finalmente escolheremos C tal que para $N^! = N^!(C)$ e teremos

$$X(p_0, M^{\frac{1}{\alpha^{8-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}) \subset \pi_c^{!-1}(V_{N^!}) \subset X(p_0, KM^{\frac{1}{\alpha^{4-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}}) \subset \pi_c^{!-1}(V_N).$$

Isso nos permite mostrar que se $p \in X(p_0, M^{\frac{1}{\alpha^{8-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}})$ está no componente conexa de $X(p_0, KM^{\frac{1}{\alpha^{4-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}})$ contendo p_0 , então p está na mesma componente conexa de $\pi_c^{!-1}(V_{N^!})$ contendo p_0 . Assim, para concluir, notamos que nesta componente conexa a distância diâmetro ao longo de X_c é comparável a distância euclidiana. Com efeito, seja $\gamma: [a, b] \rightarrow X_c$ tal que $\gamma(a) = (x(y(a)), y(a))$, $\gamma(b) = (x(y(b)), y(b))$,

$$\begin{aligned} \text{dist}_{p_0, M^{\frac{1}{\alpha^{8-2i}}}|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K}(p_1, p_2) &= \inf_{\mu} \text{diam}(\mu) \leq \inf_{\mu} l(\mu) \leq \int_{V_N} |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \int_{V_N} |y'(t)| \sqrt{|x'(y)|^2 + 1} dt \\ &\leq \sqrt{2} \int_{V_N} |y'(t)| dt \end{aligned}$$

e

$$|p_1 - p_2| \geq |y_1 - y_2|.$$

Portanto,

$$\frac{(\text{dist}_{p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K}(p_1, p_2))}{|p_1 - p_2|} \leq \sqrt{2} \frac{\int_{V_N} |y'(t)| dt}{|y_1 - y_2|} \leq \sqrt{2}C, \quad C \text{ constante.}$$

Assim quando $p_0 \rightarrow 0$,

$$\frac{(\text{dist}_{p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K}(p_1, p_2))^{1/\alpha}}{|p_1 - p_2|^\alpha} < \frac{\text{dist}_{p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K}(p_1, p_2)}{|p_1 - p_2|}.$$

Logo,

$$\frac{(\text{dist}_{p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K}(p_1, p_2))^{1/\alpha}}{|p_1 - p_2|^\alpha} \leq \sqrt{2}C.$$

Portanto, para A suficientemente grande, $\psi_i(p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K) \leq A$. Logo $p_0 \notin Y_i(\delta, M, K, A)$. Conseqüentemente, se $p_0 \in Y$, então existe um ponto $p = (x, y) \in U$ de tal modo que

$$|p - p_0| \leq KM \frac{1}{\alpha^{4-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}}.$$

Então, o corolário segue do Lema 4.5. ■

Agora vamos demonstrar a Proposição 4.1 e o Lema 4.3.

Proposição 4.1 *Seja $Y_i(\delta, M, K, A)$, onde $\delta > 0, M > 0$ e A, K são constantes suficientemente grandes. Suponhamos que $p_1, p_2 \in Y_i(\delta, M, K, A)$ e existe um $\delta_1 > 0$ tal que $|p_1 - p_2| \leq |p_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}}$. Então, para $\delta_2 < \min\{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}} - 1, \frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}} - 1, 2(d-1)\}$ e uma vizinhança da origem suficientemente pequeno temos*

$$\left| \frac{g(p_1)}{g(p_2)} - a \right| \leq |p_1|^{\delta_2},$$

onde a é um dos seguintes valores: $1, \frac{1+2t^3}{1-2t^3}, \frac{1-2t^3}{1+2t^3}$.

Prova. Sejam $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Então pelo Corolário 4.1

$$g(p_i) = (1 \mp 2t^3) y_i^{3d} + O(y_i^{3d+\delta_i}), \quad \delta_i = \min\left\{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}} - 1, 2(d-1)\right\} \text{ e } x_i = O(y_i^d).$$

Assim,

$$|y - y_2| < |p_1 - p_2| \leq |p_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}} = |y_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}} \leq |y_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}} \implies y_1 - y_2 = O(y_1^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}}).$$

Como $|y - y_2| < |y_1|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}}$, temos que $O(y_1^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}-1}) = O(y_2^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}-1})$. Note que,

$$\begin{aligned} |y_1^{3d} - y_2^{3d}| &= |y_1 - y_2| (|y_1|^{3d-1} + |y_1|^{3d-2}|y_2| + \dots + |y_2|^{3d-1}) \\ &\leq M |y_2|^{\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}} |y_2|^{3d-1} \leq M |y_2|^{3d+\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}-1} \leq M' |y_1|^{3d+\frac{1+\delta_1}{\alpha^{8-2i}}-1} \\ &\leq M' |y_1|^{3d+\delta_2}. \end{aligned}$$

Suponhamos

$$g(p_1) = (1 - 2t^3) y_1^{3d} + O(y_1^{3d+\delta'}) \text{ e } g(p_2) = (1 + 2t^3) y_2^{3d} + O(y_2^{3d+\delta'}),$$

ou seja,

$$|g(p_1) - (1 - 2t^3) y_1^{3d}| \leq |y_1|^{3d+\delta'} \text{ e } |g(p_2) - (1 + 2t^3) y_2^{3d}| \leq |y_2|^{3d+\delta'}.$$

Logo, para $a = \frac{1 - 2t^3}{1 + 2t^3}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(p_1)}{g(p_2)} - a \right| &= \left| \frac{g(p_1) - ag(p_2)}{g(p_2)} \right| = \frac{1}{|g(p_2)|} |g(p_1) - ag(p_2)| \\ &\leq \frac{1}{|y_1|^{3d}} |g(p_1) - (1 - 2t^3)y_1^{3d} + (1 - 2t^3)y_1^{3d} - (1 - 2t^3)y_2^{3d} \\ &\quad + (1 - 2t^3)y_2^{3d} - ag(p_2)| \\ &\leq \frac{1}{|y_1|^{3d}} [|g(p_1) - (1 - 2t^3)y_1^{3d}| + |(1 - 2t^3)| |y_1^{3d} - y_2^{3d}| \\ &\quad + |ag(p_2) - a(1 + 2t^3)y_2^{3d}|] \\ &\leq \frac{1}{|y_1|^{3d}} \left[|y_1|^{3d+\delta'} + |(1 - 2t^3)| |y_1|^{3d+\delta_2} + |a| |y_2|^{3d+\delta'} \right] \\ &\leq \frac{1}{|y_1|^{3d}} \left[|y_1|^{3d+\delta_2} + |(1 - 2t^3)| |y_1|^{3d+\delta_2} + |a| |y_1|^{3d+\delta_2} \right] \\ &= M' |y_1|^{\delta_2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \frac{g(p_1)}{g(p_2)} - a \right| \leq |p_1|^{\delta_2}.$$

■

Lema 4.3 *Se K e A são constantes suficientemente grandes e $0 < \delta < \sqrt{d} - 1$, então $Y_i(\delta, M, K, A)$ é não vazio e contém a curva polar Γ . Além disso, neste caso, todos os limites de $g(p_1)/g(p_2)$ dados pela Proposição 4.1 pode ser obtido tomando p_1 e p_2 ao longo do ramos de Γ .*

Prova. Fixe K e δ . Considere a projeção $\pi_c: X_c = g^{-1}(c) \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\pi_c(x, y) \mapsto y$. Fixado y , com $(x, y) \in X_c$, então

$$x^3 - 3t^2y^{2d}x + y^{3d} = c. \quad (7)$$

Sejam β, ζ e η raízes de (7)

$$(x - \beta)(x - \zeta)(x - \eta) = x^3 - 3t^2y^{2d}x + y^{3d} - c,$$

$$x^3 - (\beta + \zeta + \eta)x^2 + (\beta\zeta + \beta\eta + \zeta\eta)x - \beta\zeta\eta = x^3 - 3t^2y^{2d}x + y^{3d} - c,$$

$$\begin{cases} \beta + \zeta + \eta = 0 \\ \beta\zeta + \beta\eta + \zeta\eta = -3t^2y^{2d} \\ \beta\zeta\eta = c - y^{3d} \end{cases}$$

1) Se $\beta = \zeta = \eta$,

$$3\beta = 0 \implies \beta = 0 \implies y = 0 \implies c = 0,$$

2) Se $\beta = \zeta \neq \eta$,

$$\begin{aligned} 2\beta &= -\eta, \beta^2 + 2\beta\eta = \beta^2 + 2\beta(-2\beta) = -3t^2y^{2d} \\ \implies -3\beta^2 &= -3t^2y^{2d} \\ \implies \beta &= \pm ty^d \text{ e } \eta = \mp 2ty^d, \beta^2(-2\beta) = c - y^{3d} \\ \implies y^{3d} &= c + 2\beta^3 = c \pm 2t^3y^{3d} \\ \implies y^{3d}(1 \mp 2t^3) &= c \implies y = c^{\frac{1}{3d}}(1 \mp 2t^3)^{-\frac{1}{3d}} \end{aligned}$$

Então concluímos que (7) com $c \neq 0$, não tem raízes de multiplicidade 3 e as raízes de multiplicidade 2 são as de coordenadas

$$x = \pm ty^d, \quad y = (1 \mp 2t^3)^{\frac{1}{3d}} y^{\frac{1}{3d}}.$$

Note que, quando $c = g^{-1}(p_0)$, com $p_0 = (x, y) \in \Gamma := \{\frac{\partial g}{\partial x} = 0\}$, as raízes de multiplicidade 2 de (7) são exatamente os pontos de $\Gamma \cap X_c$, cujas coordenadas são

$$x = \pm ty^d, \quad y = (1 \mp 2t^3)^{-\frac{1}{3d}} y^{\frac{1}{3d}}.$$

Portanto, π_c é um triplo recobrimento ramificado nos pontos $\Gamma \cap X_c$. Veja,

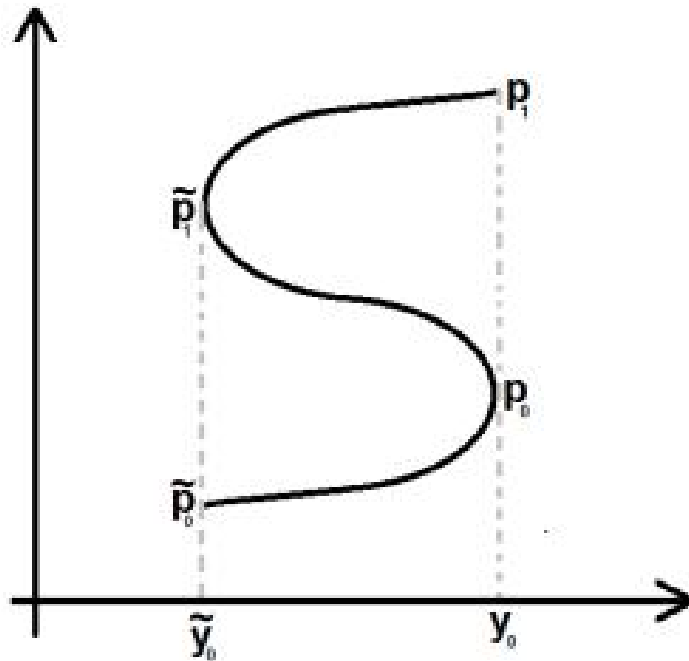


Figura 1: Triplo recobrimento ramificado

$$\begin{aligned}
 p_0 &= (x_0, y_0) = (ty_0^d, y_0), \\
 p_1 &= (x_1, y_0) = (-2ty_0^d, y_0), \quad y_0 = c^{\frac{1}{3d}} (1 + 2t^3)^{-\frac{1}{3d}} \\
 \tilde{p}_0 &= (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (-t\tilde{y}_0^d, \tilde{y}_0) \\
 \tilde{p}_1 &= (\tilde{x}_1, \tilde{y}_0) = (2t\tilde{y}_0^d, \tilde{y}_0), \quad \tilde{y}_0 = c^{\frac{1}{3d}} (1 - 2t^3)^{-\frac{1}{3d}}
 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 |p_0 - p_1| &= |3ty_0^d| \leq |y_0|^d \\
 |\tilde{p}_0 - \tilde{p}_1| &= |3t\tilde{y}_0^d| \leq |\tilde{y}_0|^d \\
 |\tilde{x}_0 - x_0| &= |t| |y_0^d + \tilde{y}_0^d| \leq M^I |y_0|^d \\
 |\tilde{y}_0 - y_0| &= \left| c^{\frac{1}{3d}} (1 + 2t^3)^{-\frac{1}{3d}} - c^{\frac{1}{3d}} (1 - 2t^3)^{-\frac{1}{3d}} \right| \\
 &= |y_0| \left| 1 - \left(\frac{1+2t^3}{1-2t^3} \right)^{\frac{1}{3d}} \right| \leq M^{II} |y_0| \\
 |\tilde{p}_0 - p_0| &= |\tilde{y}_0 - y_0| \leq 2 |y_0|.
 \end{aligned}$$

Concluimos então que as distâncias entre os diferentes pontos de ramificação, ou de forma equivalente, entre as suas projeções sobre o eixo y , são de tamanho comparável a $|y|$. Fixe um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de ramificação de π_c . Seja $V = \{y; |y - y_0| \leq \varepsilon |y_0|\}$, ε pequeno. Então, se p_0 é suficientemente próximo da origem, $K M^{\frac{1}{\alpha^4 - 2\varepsilon}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^4 - 2\varepsilon} - 1} \leq \varepsilon$, $\frac{1+\delta}{\alpha^4 - 2\varepsilon} - 1 > 0$.

Assim, dado $p \in X(p_0, KM \frac{1}{\alpha^{4-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}})$,

$$|y - y_0| < |p - p_0| \leq KM \frac{1}{\alpha^{4-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}} \leq \varepsilon |p_0| \leq \varepsilon |y_0|, \quad p_0 \in U.$$

Portanto,

$$X(p_0, KM \frac{1}{\alpha^{4-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}}) \subset \pi_c^{-1}(\nu).$$

Por outro lado, suponhamos que $p = (x, y) \in g^{-1}(c)$ satisfaz

$$|y - y_0| \leq |y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}.$$

Então, pelo Lema 4.5, $x = O(y^d)$ e, portanto

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq |x| + |x_0| \leq |y|^d + |y_0|^d \leq 2|y_0|^d \text{ e } |y - y_0| < |y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}} \\ \implies |p - p_0| &\leq |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, \text{ pois } \frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}} \leq \sqrt{d} \frac{1}{\alpha^{12}} \leq \sqrt{d} \sqrt{d} = d. \end{aligned}$$

Denote $V_\delta = \{y; |y - y_0| \leq |y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}\}$. Assim dado $p \in \pi_c^{-1}(V_\delta)$, temos

$$|y - y_0| \leq |y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}} \implies |p - p_0| \leq |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}} \leq KM \frac{1}{\alpha^{4-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}}.$$

Portanto, $\pi_c^{-1}(V_\delta) \subset X(p_0, KM \frac{1}{\alpha^{4-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{4-2i}}})$. Note que, $\pi_c^{-1}(\nu_\delta)$ consiste de duas componentes conexas, já que π_c é um triplo recobrimento ramificado. Note também que uma das componentes conexas contém o p_0 e a outra se projeta difeomorficamente sobre V_δ . Sejam Ω a componente conexa que contém p_0 e $\tilde{\pi}_c$ a restrição de π_c a esta componente. Fixe $y \in V_\delta$ tal que $|y - y_0| = \frac{1}{2} |y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}$ e denote os dois pontos de $\tilde{\pi}_c^{-1}(y)$ por $p_1 = (x_1, y)$ e $p_2 = (x_2, y)$. Então, p_1, p_2 estão em $\tilde{\pi}_c^{-1}(y_\delta)$ a qual é conexa. Note que a projeção $\tilde{\pi}_c$ de qualquer curva ligando P_1 e P_2 em $\tilde{\pi}_c^{-1}(y_\delta)$ passa em torno de y_0 . Com efeito, suponhamos que a projeção da curva ligando P_1 e P_2 em $\tilde{\pi}_c^{-1}(y_\delta)$ não passa em torno de y_0 então ela será homotópica a um ponto. Isto nos diz que a curva ligando p_1 e p_2 homotópica a um ponto, Absurdo, pois a curva é aberta. Desde de que P_1 e $P_2 \in g^{-1}(c)$ então

$$\text{dist}_{p_0, C|p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K}(p_1, p_2) \geq |y - y_0| \geq \frac{1}{2} |y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}$$

Pelo Lema 4.5, x_1 e x_2 são $O(|y|^d)$ e conseqüentemente

$$|p_1 - p_2| = |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq 2|y|^d \leq 2\bar{C} |y_0|^d.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{(\text{dist}_{p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K}(p_1, p_2))^{1/\alpha^{2-i}}}{(|p_1 - p_2|)^{\alpha^{2-i}}} &\geq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\alpha^{2-i}} |y_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}} \frac{1}{\alpha^{2-i}}}}{(2\bar{C})^{\alpha^{2-i}} |y_0|^{d\alpha^{2-i}}} \\ &= M \frac{1}{|y_0|^{d\alpha^{2-i} - \frac{1+\delta}{\alpha^{10-3i}}}}. \end{aligned}$$

Assim, como $\frac{1}{\alpha^{12}} \leq \sqrt{d}$ e $1 + \delta \leq \sqrt{d} \implies \frac{1 + \delta}{\alpha^{12}} \leq d \implies \frac{1 + \delta}{\alpha^{10-3i}} \leq \frac{1 + \delta}{\alpha^{10}} \leq d\alpha^2 \leq d\alpha^{2-i}$, temos

$$\psi_i(p_0, M \frac{1}{\alpha^{8-2i}} |p_0|^{\frac{1+\delta}{\alpha^{8-2i}}}, K) \rightarrow \infty \text{ quando } p_0 \rightarrow 0.$$

Portanto $p_0 \in Y_i(\delta, M, K, A)$. Segue que Γ está contido $Y_i(\delta, M, K, A)$, como germe na origem, como queríamos. A última afirmação do lema pode ser verificado diretamente, considerando os limites da proposição 4.1 ao longo dos dois ramos da Γ . ■

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como motivação principal a seguinte pergunta:

Pergunta. Dado $0 < \alpha < 1$, a equivalência bi- α -Hölder de germes de funções analíticas $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite moduli contínuo?

No Capítulo 3, demonstramos os obstáculos para que as fibras especiais de germes de funções analíticas $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ sejam α -Hölder equivalentes. Como consequência desse estudo, obtemos que: se dois germes de curvas analíticas planas são homeomorfos, via um homeomorfismo que é Log-Lipschitz com inversa Log-Lipschitz, então esses germes são bi-Lipschitz homeomorfos e, por conseguinte, topologicamente como germes imersos em $(\mathbb{C}^2, 0)$.

No capítulo 4, mostramos que dada um α , com $0 < \alpha < 1$, temos uma família de germes de polinômios w -homogêneos a 1-parâmetro $f_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $t \in \mathbb{C}$, a qual garantimos a existência de Moduli com relação a equivalência bi- α -Hölder. Mais precisamente, construímos um invariante da equivalência Hölder de tais germes que varia continuamente nesta família. Para um único germe f_t o invariante de f_t é dado em termos dos coeficientes principais das expansões assintóticas de f_t ao longo dos ramos da curva polar genérica de f_t .

REFERÊNCIAS

BENEDETTI, R.; RISLER, J.-J. **Real algebraic and semi-algebraic sets.** Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1990.

BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A. Metric theory of semialgebraic curves. **Rev. Mat. Complut.**, v. 13, n. 2, p. 369–382, 2000.

BOCHNAK, J.; RISLER, J.-J. Sur les exposants de Lojasiewicz. **Comment. Math. Helv.**, v. 50, n. 4, p. 493–507, 1975.

COSTE, Michel. **An introduction to semialgebraic geometry.** Institut de Recherche Mathématique de Rennes, 2002.

FERNANDES, A. Topological equivalence of complex curves and bilipschitz homeomorphisms. **Michigan Math. J.**, v. 51, n. 3, p. 593–606, 2003.

FUKUDA, T. Types topologiques des polynômes. **Publications Mathématiques de l’IHÉS**, v. 46, p. 87–106, 1976.

HENRY, J.-P.; PARUSIŃSKI, A. Existence of Moduli for bi-Lipschitz equivalence of analytic functions. **Compositio Math.**, v. 136, n. 2, p. 217–235, 2003.

KUO, T.-C. On classification of real singularities. **Invent. Math.**, v. 82, p. 257–262, 1985.

MERLE, M. Invariants polaires des courbes planes. **Invent. Math.**, v. 41, n. 2, p. 103–111, 1977.

MOSTOWSKI, T. **Lipschitz Equisingularity.** 243. Dissertationes Math, 1985.

RISLER, J.-J.; TROTMAN, D. Bilipschitz invariance of the multiplicity. **Bull. London Math.Soc.**, v. 29, n. 2, p. 200–204, 1997.

WHITNEY, H. Local properties of analytic varieties. **Differential and Combinatorial Topology, Princeton University Press Invent. Math.**, p. 205–244, 1965.