



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO**  
**PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA**  
**COMPUTAÇÃO**

**Eurinardo Rodrigues Costa**

**CONVEXIDADE MONOFÔNICA EM CLASSES DE GRAFOS**

**FORTALEZA – CE**

**2015**

Eurinaldo Rodrigues Costa

CONVEXIDADE MONOFÔNICA EM CLASSES DE GRAFOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação, do Departamento de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação. Área de concentração: Teoria dos Grafos (Teoria da Computação).

Orientador: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio

Coorientador: Prof. Dr. Mitre Costa Dourado

FORTALEZA – CE

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

---

C871C Costa, Eurinardo Rodrigues.  
Convexidade monofônica em classes de grafos / Eurinardo Rodrigues Costa. – 2015.  
53 p. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2015.

Área de Concentração: Teoria da Computação.

Orientação: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio.

Coorientação: Prof. Dr. Mitre Costa Dourado.

1. Convexidade monofônica. 2. Grafos bipartidos. I. Título.

---

CDD 005

Eurinardo Rodrigues Costa

CONVEXIDADE MONOFÔNICA EM CLASSES DE GRAFOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação, do Departamento de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação. Área de concentração: Teoria dos Grafos (Teoria da Computação).

Aprovada em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Dr. Mitre Costa Dourado  
(Coorientador)  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Carlos Diego Rodrigues  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade  
Universidade Federal do Ceará

Aos meus pais, minha irmã Eurifran e minha amada esposa Dayana, dedico não apenas este, mas todos os trabalhos de minha vida.

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por sua infinita bondade em ter dado para nós o Seu Filho Jesus Cristo que veio para tirar os pecados do mundo. Também quero agradecer à Santíssima Virgem Maria e ao Santo Padre Pio por terem intercedido por mim nos momentos de aflição e por serem exemplos de santidade em minha vida.

Agradeço imensamente aos meus pais Maria e Cícero (*in memoriam*) por terem me dado a vida e, principalmente, agradeço à minha mãe por ter trabalhado tanto e feito todo o esforço do mundo para me criar e me dar uma boa educação. Agradeço também à minha irmã Eurifran e ao meu cunhado Nonato por serem pessoas maravilhosas. Não posso esquecer dos meus tios Lúcia, Verônica, Luciene, Eliene, Evaristo (*in memoriam*), Cazusa, meu avô Vicente (*in memoriam*) e minha avó Ana que cuidaram de mim e me ensinaram tantas coisas boas. Obrigado aos meus primos Jorge e Eduardo por terem dividido tantos momentos comigo durante minha infância e adolescência.

Obrigado à minha esposa Dayana por ter me compreendido nesse tempo dedicado ao mestrado e, principalmente, por ter escolhido fazer parte de toda minha vida.

Meu agradecimento especial ao meu orientador Rudini pelo tempo dedicado a me ajudar na minha pesquisa, tenho muito a agradecer a ele por ter acreditado em mim e em minha capacidade. Agradeço ao meu coorientador Mitre por ter vindo somar e contribuir para que a minha pesquisa obtivesse bons resultados.

Obrigado aos meus amigos da Capela Imaculada Conceição, Carlinhos, Vera, Alexsandra, Diego, Kamilla e todos os outros que são pessoas de Deus e se empenham verdadeiramente na construção do Reino do Senhor. Obrigado pelos momentos de descontração em meio ao turbilhão de coisas e compromissos que eu tive durante esse tempo. Meu muito obrigado ao Padre Bonifácio, exemplo de sacerdote e amigo.

Obrigado também aos meus amigos da UFC, Rennan, Eliezer, Rafael, Tatiane, Pablo, Luiz, Werther e Samuel e a todos os professores do grupo PARGO.

Meu agradecimento ao CNPq pelo apoio financeiro durante estes dois anos.

*“Não podemos confiar nas nossas forças, mas apenas em Jesus e na sua misericórdia.”*  
*(Papa Francisco)*

# Resumo

Neste trabalho, estudamos alguns parâmetros para a convexidade monofônica em algumas classes de grafos e apresentamos nossos resultados acerca do assunto. Provamos que decidir se o número de  $m$ -intervalo é no máximo 2 e decidir se o tempo de  $m$ -percolação é no máximo 1 são problemas NP-completos mesmo em grafos bipartidos. Também provamos que o número de  $m$ -convexidade é tão difícil de aproximar quanto o problema da Clique Máxima, que é,  $O(n^{1-\varepsilon})$ -inaproximável em tempo polinomial, a menos que  $P=NP$ , para cada  $\varepsilon > 0$ . Finalmente, apresentamos um algoritmo de tempo polinomial para determinar o número de  $m$ -convexidade em classes hereditárias de grafos onde a computação do tamanho da clique máxima é em tempo polinomial (como grafos perfeitos e grafos planares).

**PALAVRAS-CHAVE:** Convexidade monofônica, Grafos bipartidos, NP-completude, Inaproximabilidade, Número de convexidade, Tempo de percolação.

# Abstract

In this work, we study some parameters of monophonic convexity in some classes of graphs and we present our results about this subject. We prove that decide if the  $m$ -interval number is at most 2 and decide if the  $m$ -percolation time is at most 1 are NP-complete problems even on bipartite graphs. We also prove that the  $m$ -convexity number is as hard to approximate as the maximum clique problem, which is,  $O(n^{1-\varepsilon})$ -unapproachable in polynomial-time, unless  $P=NP$ , for each  $\varepsilon > 0$ . Finally, we obtain polynomial time algorithms to compute the  $m$ -convexity number on hereditary graph classes such that the computation of the clique number is polynomial-time solvable (e.g. perfect graphs and planar graphs).

**KEYWORDS:** Monophonic convexity, Bipartite graphs, NP-completeness, Inapproximability, Convexity number, Percolation time.

# Sumário

<b>Sumário</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Lista de ilustrações</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1 Introdução</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1 Parâmetros de convexidade . . . . .	13
1.2 Convexidades em grafos . . . . .	15
1.3 Revisão bibliográfica . . . . .	17
<b>2 Conceitos básicos</b> . . . . .	<b>20</b>
2.1 Um pouco sobre grafos . . . . .	20
2.1.1 Caminhos em um grafo . . . . .	21
2.1.2 Classes de grafos . . . . .	22
<b>3 Número de fecho monofônico</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1 Decomposição em cortes clique minimais . . . . .	24
3.2 Algoritmo polinomial para o número de fecho monofônico . . . . .	26
3.3 Algoritmo de Decomposição em Cortes Clique Minimais . . . . .	32
<b>4 Número de <math>m</math>-intervalo</b> . . . . .	<b>37</b>
4.1 Resultados de NP-Compleitude . . . . .	37
<b>5 Tempo de percolação</b> . . . . .	<b>40</b>
5.1 Tempo de percolação monofônico, geodésico, $P_3^*$ e $P_3$ . . . . .	40
5.2 Resultado de NP-Compleitude . . . . .	43
<b>6 Número de <math>m</math>-convexidade</b> . . . . .	<b>45</b>
6.1 Redução contínua entre problemas de otimização . . . . .	45
6.2 Resultado de Inaproximabilidade . . . . .	46
6.3 Caracterizações e Algoritmo . . . . .	47
<b>7 Conclusões e Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>51</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Infectando um grafo . . . . .	11
Figura 2 – Passos de infecção em um grafo . . . . .	12
Figura 3 – Exemplos para as convexidades monofônica e $TP$ em um grafo . . .	15
Figura 4 – Exemplos para as convexidades geodésica e $m^3$ em um grafo . . .	15
Figura 5 – Exemplos para a convexidade $P_3$ em um grafo . . . . .	17
Figura 6 – Um grafo simples . . . . .	20
Figura 7 – Um grafo não simples . . . . .	20
Figura 8 – Um grafo bipartido . . . . .	23
Figura 9 – Exemplos de separadores minimais em um grafo . . . . .	24
Figura 10 – Árvore de decomposição em cortes clique minimais de um grafo .	26
Figura 11 – Esquema para prova do Teorema 3.1 . . . . .	27
Figura 12 – Decomposição em cortes clique minimais . . . . .	28
Figura 13 – Redução para o Teorema 4.2 . . . . .	39
Figura 14 – Um grafo com tempo de percolação monofônico $t(G) \geq 8$ . . . . .	41
Figura 15 – Construindo $G_T$ . . . . .	42
Figura 16 – Um grafo com tempo de percolação monofônico $t(G) = 14$ e $t(G) + 3$ vértices . . . . .	43
Figura 17 – Grafo com tempo de percolação $T$ e $T + 2$ vértices . . . . .	43
Figura 18 – Redução do problema CLIQUE para o problema NCONVEXIDADE	46

# 1 Introdução

Nesta dissertação, apresentamos nossos estudos e resultados obtidos sobre convexidade monofônica em classes de grafos.

Muitas convexidades em grafos podem ser visualizadas como um modo de infectar os vértices dos grafos (podemos pensar isso como um modo de colorir os vértices com cor vermelha). Sejam  $G = (V, E)$  um grafo simples<sup>1</sup> e um conjunto  $S \subseteq V(G)$  de vértices inicialmente infectados. Seja  $I(S)$  o conjunto dos vértices infectados por  $S$ . Uma vez infectado, o vértice continuará sempre infectado. Ou seja,  $S \subseteq I(S)$ . Dizemos que  $I(S)$  é o *passo de infecção* (ou *intervalo*) de  $S$ . Caso  $S = I(S)$ , dizemos que  $S$  é um conjunto *convexo*, ou seja, um conjunto que não infecta nenhum outro vértice. Podemos dar prosseguimento a infecção com outro passo de infecção  $I(I(S))$ . Note que, se  $S$  for convexo, teremos que  $S = I(S) = I(I(S))$ . Como exemplo, veja a Figura 1. Note que a infecção poderá continuar até infectar todos os vértices do grafo ou chegar a um conjunto convexo.

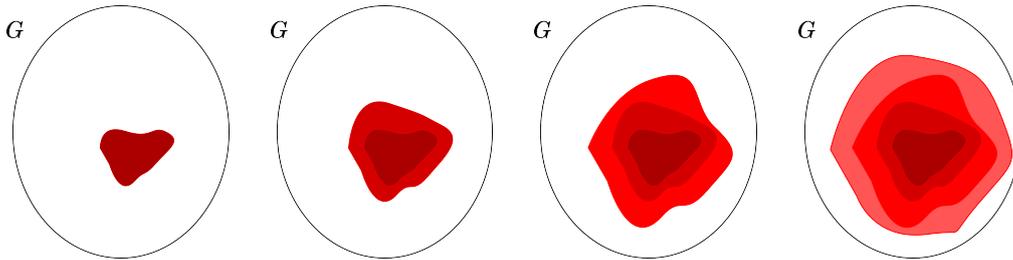


Figura 1 – Infectando um grafo

Existem muitos tipos de infecção em um grafo. Um dos tipos mais comuns e bastante estudado é através de caminhos no grafo. O que define muitas convexidades em grafos são os tipos de caminhos em que os vértices extremos do caminho infectam os vértices internos ao caminho. Nosso principal objeto de estudo nesta dissertação é a convexidade monofônica<sup>2</sup> referente a caminhos induzidos.

Para compreendermos melhor, trabalhando com a convexidade monofônica, sejam  $G = (V, E)$  um grafo simples e os vértices  $a, b \in V(G)$ . O *passo de infecção de dois vértices*  $a$  e  $b$  (ou *intervalo de dois vértices*  $a$  e  $b$ )  $J[a, b]$  é o conjunto dos vértices que pertencem a algum caminho induzido entre os vértices  $a$  e  $b$  no grafo  $G$ . Ou seja,  $J[a, b]$  é o conjunto de vértices que pertencem a algum caminho induzido entre os vértices  $a$  e  $b$ . O intervalo de um conjunto  $S \subseteq V(G)$  será  $I(S) = \{x \in J[a, b] \mid \forall a, b \in S\}$ .

<sup>1</sup> Definições de Teoria dos Grafos no Capítulo 2.

<sup>2</sup> Definimos a convexidade monofônica a seguir.

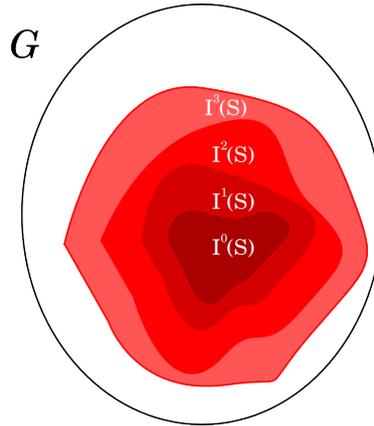


Figura 2 – Passos de infecção em um grafo

Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subseteq V(G)$ . Sejam  $I^0(S) = S$  e  $I^k(S) = I(I^{k-1}(S))$ , para qualquer inteiro  $k > 0$ . O *fecho convexo* (em inglês, *convex hull*) de  $S$ , denotado por  $H(S)$ , é o menor conjunto convexo que contém  $S$ . O fecho convexo  $H(S)$  pode ser obtido através de sucessivos passos de infecção a partir de  $S$ , até um passo  $j$  de infecção em que seja obtido um conjunto convexo:  $I^0(S) \subset I^1(S) \subset I^2(S) \subset \dots \subset I^{j-1}(S) \subset I^j(S) = I^{j+1}(S) = H(S)$ . Ou seja, partindo do conjunto  $S$  iremos infectando o grafo passo a passo até obtermos um conjunto que não infecta mais nenhum outro vértice e esse conjunto é o fecho convexo de  $S$ . Caso  $H(S) = V(G)$ , ou seja, o conjunto  $S$  infecta todos os vértices do grafo em um número finito de passos de infecção, dizemos que  $S$  é um *conjunto de fecho* (em inglês, *hull set*). Seja  $t(S)$  o menor  $k$  tal que  $I^k(S) = I^{k+1}(S)$ . O *tempo de percolação*  $t(G)$  é o maior  $t(S)$ , onde  $S$  é um conjunto de fecho de  $G$ . Para um exemplo, veja a Figura 2.

De um modo mais geral, uma convexidade em grafos é um par  $(G, \mathcal{C})$ , onde  $G$  é um grafo simples e  $\mathcal{C}$  é uma família de subconjuntos de  $V(G)$ , satisfazendo:

- $\emptyset \in \mathcal{C}$ ;
- $V(G) \in \mathcal{C}$ ;
- se  $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ , então  $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}$ .

Os subconjuntos pertencentes a  $\mathcal{C}$  são chamados conjuntos convexos de  $G$ . De acordo com Gerard Sierksma (SIERKSMA, 1984), em 1951, Levi introduziu o conceito de espaços de convexidades com o par  $(X, \mathcal{C})$ , sendo  $X$  um conjunto e  $\mathcal{C}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  fechada sob interseção (LEVI, 1951). O estudo de convexidades aplicado em grafos começou mais tarde, em 1969 (HÖGAASEN, 1969), segundo P. Duchet (DUCHET, 1987) (veja também (HARARY; NIEMINEN, 1981; FARBER; JAMISON, 1986; VEL, 1993)). Em seguida, os parâmetros de convexi-

dade motivaram a definição de alguns parâmetros para grafos, cujo estudo tem sido uma das questões centrais para as convexidades em grafos. Em particular, aspectos relacionados com a complexidade do cálculo desses parâmetros têm sido a meta principal de vários trabalhos recentes.

## 1.1 Parâmetros de convexidade

A seguir, descrevemos alguns parâmetros relacionados com convexidade em grafos.

O *número de fecho* (em inglês, *hull number*)  $hn(G)$  de  $G$  é o tamanho de um menor conjunto de fecho, ou seja, a cardinalidade de um menor conjunto de vértices de  $G$  que, passo a passo de infecção, infecta todos os vértices do grafo (veja em (EVERETT; SEIDMAN, 1985; DOURADO et al., 2009)).

O *número de convexidade* (em inglês, *convexity number*)  $cx(G)$  é o tamanho de um maior conjunto convexo distinto de  $V(G)$ , ou seja, a cardinalidade de um maior conjunto de vértices de  $G$ , que não seja o conjunto de todos os vértices de  $G$ , que não infecta nenhum outro vértice do grafo  $G$  (veja em (CHARTRAND; WALL; ZHANG, 2002)).

O *número de intervalo*  $in(G)$  de um grafo  $G$  é a menor cardinalidade de um conjunto  $S \subseteq V(G)$ , tal que  $I(S) = V(G)$ , ou seja, é a cardinalidade do menor conjunto de vértices que infecta todos os vértices não infectados do grafo em um único passo de infecção. O número de intervalo é chamado de *número monofônico* (em inglês, *monophonic number*) e denotado por  $m(G)$  para a convexidade monofônica (veja em (PALUGA; CANOY; JR, 2007; DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2008)). Um *conjunto monofônico de arestas* de  $G$  é um conjunto  $M \subseteq V(G)$  tal que cada aresta de  $G$  está contida em algum caminho induzido entre algum par de vértices em  $M$ . O *número monofônico de arestas* (em inglês, *edge monophonic number*)  $m_1(G)$  do grafo  $G$  é a cardinalidade de um conjunto monofônico de arestas mínimo (veja em (JOHN; PAUL, 2012)).

O *número de Radon*  $rd(G)$  é o menor  $k$  tal que cada subconjunto  $V'$  de  $V(G)$  de tamanho pelo menos  $k$  tenha uma *partição Radon*, que é uma partição  $(V'_1, V'_2)$ , onde  $H(V'_1) \cap H(V'_2) \neq \emptyset$ . Alternativamente,  $rd(G)$  é o tamanho do maior conjunto anti-Radon mais um, onde um conjunto é *anti-Radon* se ele não tem partição Radon.

O Teorema de Radon (RADON, 1921) motivou a definição do parâmetro definido anteriormente.

**Teorema 1.1** (Teorema de Radon). *Todo conjunto  $V$  com pelo menos  $n + 2$  pontos em  $\mathbb{R}^n$  sempre pode ser particionado em dois conjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tais que os fechos*

convexos de  $V_1$  e  $V_2$  se intersectam.

O número de Carathéodory  $cth(G)$  é o menor inteiro  $c$  tal que, para cada conjunto  $S \subset V(G)$  e cada vértice  $u \in H(S)$ , existe um conjunto  $F \subseteq S$  com  $|F| \leq c$  e  $u \in H(F)$ . Um conjunto  $S$  de vértices de  $G$  é um *conjunto de Carathéodory* se o conjunto  $H(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H(S \setminus \{u\})$  é diferente de vazio. Esta noção nos permite uma definição alternativa para o número de Carathéodory como a maior cardinalidade do conjunto de Carathéodory.

O Teorema Fundamental de Carathéodory (CARATHÉODORY, 1911) motivou a definição do parâmetro anterior.

**Teorema 1.2** (Teorema Fundamental de Carathéodory). *Todo ponto no fecho convexo de um conjunto  $S$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma combinação convexa de  $n+1$  ou menos pontos de  $S$ .*

O número de Helly é o menor inteiro  $h$  tal que cada família de conjuntos convexos com interseção vazia contém uma subfamília de no máximo  $h$  elementos com interseção vazia.

Em 1913, Eduard Helly provou o seguinte teorema, publicado dez anos depois (HELLY, 1923). Teorema esse que motivou a definição do parâmetro anterior.

**Teorema 1.3** (Teorema de Helly). *Sejam  $C_1, \dots, C_m$ , com  $m \geq n+1$ , conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ . Se quaisquer  $n+1$  desses conjuntos convexos possuem um ponto em comum, então os  $m$  conjuntos possuem um ponto em comum.*

Denotamos por *número de  $m$ -fecho* o número de fecho para a convexidade monofônica. Analogamente, definimos o mesmo para os outros parâmetros: *número de  $m$ -convexidade*, *número de  $m$ -intervalo*, *tempo de  $m$ -percolação*, *número de  $m$ -Carathéodory*, *número de  $m$ -Helly* e *número de  $m$ -Radon*.

Claramente, a computação desses parâmetros para grafos depende de uma convexidade particular a ser considerada. Sejam  $G$  um grafo simples e  $\mathcal{P}$  um conjunto de caminhos de  $G$ . Seja  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  a família de conjuntos de  $V(G)$  tais que todo vértice em um caminho de  $\mathcal{P}$  entre dois vértices de um conjunto  $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  pertence a  $C$ . Note que  $(G, \mathcal{C}_{\mathcal{P}})$  é uma convexidade em grafos, pois claramente  $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  e, se  $S_1, S_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ , então  $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ , pois, se existisse um caminho de  $\mathcal{P}$  entre dois vértices de  $S_1 \cap S_2$  passando por um vértice de  $S_2$  que não está em  $S_1$ , então  $S_1 \notin \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ , uma contradição.

## 1.2 Convexidades em grafos

Abaixo definimos algumas convexidades através de conjuntos  $\mathcal{P}$  de caminhos de um grafo.

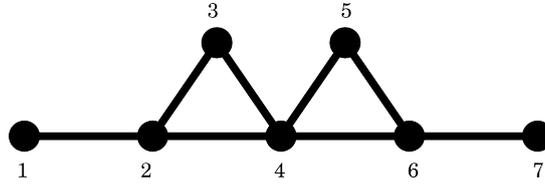


Figura 3 – Exemplos para as convexidades monofônica e  $TP$  em um grafo

Quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os caminhos induzidos de  $G$ , então  $(G, \mathcal{C}_{\mathcal{P}})$  é uma *convexidade monofônica* (veja em (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010; DUCHET, 1988; JAMISON; NOWAKOWSKI, 1984; JAMISON, 1982)). Um *caminho*  $P$  em um grafo  $G = (V, E)$  de um vértice  $v_0$  até um vértice  $v_k$  é uma sequência de vértices distintos  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  de  $V(G)$  tais que  $v_i v_{i+1} \in E$ , para  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Uma *corda* em  $P$  é uma aresta  $v_i v_j$ , onde  $j > i+1$ . Dizemos que  $P$  é um *caminho induzido* caso não possua cordas. Considerando o grafo da Figura 3 temos que o caminho  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  não é induzido, pois contém as cordas  $\{2, 4\}$  e  $\{4, 6\}$ , já o caminho  $(1, 2, 4, 6, 7)$  não possui cordas e assim é induzido. Considerando ainda o grafo da Figura 3, para  $S = I^0(S) = \{1, 7\}$ ,  $I^1(S) = I^0(S) \cup \{2, 4, 6\}$ , em outras palavras, os vértices 1 e 7 infectam os vértices 2, 4 e 6 em um passo de infecção para a convexidade monofônica. Não podemos dar prosseguimento com outro passo de infecção, pois não há caminho induzido onde seus vértices extremos estejam infectados e os vértices internos não estejam infectados. Em resumo, o que fizemos, para o grafo da Figura 3, foi encontrar um conjunto convexo em um passo de infecção a partir dos vértices 1 e 7 para a convexidade monofônica. Neste caso encontramos o fecho convexo  $H(S) = \{1, 2, 4, 6, 7\}$  para a convexidade monofônica.

Quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os caminhos induzidos de tamanho pelo menos

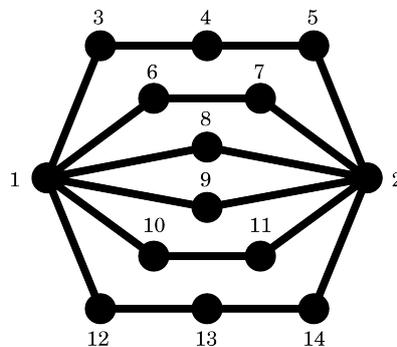


Figura 4 – Exemplos para as convexidades geodésica e  $m^3$  em um grafo

3 em  $G$ , então  $(G, \mathcal{C}_P)$  é uma *convexidade*  $m^3$  (veja em (DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999)). Note que a convexidade monofônica é uma relaxação da convexidade  $m^3$ . Na Figura 4 temos os caminhos induzidos entre os vértices 1 e 2:  $(1, 3, 4, 5, 2)$ ;  $(1, 6, 7, 2)$ ;  $(1, 8, 2)$ ;  $(1, 9, 2)$ ;  $(1, 10, 11, 2)$  e  $(1, 12, 13, 14, 2)$ . Assim para a convexidade  $m^3$  o conjunto  $S = \{1, 2\}$  não infectará os caminhos  $(1, 8, 2)$  e  $(1, 9, 2)$ , pois ambos têm tamanho 2. Daí,  $I^1(S) = V(G) \setminus \{8, 9\}$  para a convexidade  $m^3$ . Vemos que temos os caminhos induzidos  $(10, 1, 8, 2, 7)$  e  $(10, 1, 9, 2, 7)$ . Disso, os vértices 8 e 9 pertencem a  $I^2(S)$ . Assim,  $S \subset I^1(S) = V(G) \setminus \{8, 9\} \subset I^2(S) = V(G)$  para a convexidade  $m^3$ . Veja que  $S$ , com dois passos de infecção, infectou todos os vértices do grafo e deste modo  $S$  é um conjunto de fecho de  $G$  para a convexidade  $m^3$ . Note que se considerarmos a convexidade monofônica para o grafo da Figura 4 em um único passo de infecção o conjunto  $S$  infecta todos os vértices do grafo o que ocorre em dois passos de infecção para a convexidade  $m^3$ .

Quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os T-caminhos, então  $(G, \mathcal{C}_P)$  é uma *convexidade TP* (veja em (CHANGAT; MATHEW, 1999)). Um *T-caminho* é um caminho que não possui cordas para quaisquer dois vértices a uma distância maior do que 2, ou seja, é um caminho que permite cordas que formam “triângulos” no caminho. Veja que, para o grafo representado na Figura 3,  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  é um *T-caminho*, pois possui apenas as cordas  $\{2, 4\}$  e  $\{4, 6\}$  que pertencem aos “triângulos”  $\{2, 3, 4\}$  e  $\{4, 5, 6\}$ . Disso temos, para  $S = \{1, 7\}$ , que  $I^1(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = H(S) = V(G)$  para a convexidade *TP*. Note que, ainda para o grafo da Figura 3, o conjunto  $S = \{1, 7\}$  é um conjunto de fecho para a convexidade *TP*, enquanto se considerarmos a convexidade monofônica  $S$  não infecta os vértices 3 e 5 que são os vértices que estão nos “triângulos” que são permitidos infectar para a convexidade *TP*.

Quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os caminhos mínimos em  $G$ , então  $(G, \mathcal{C}_P)$  é uma *convexidade geodésica* (veja em (HARARY; NIEMINEN, 1981; DOURADO et al., 2013)). O *tamanho de um caminho* é igual ao número de vértices que ele possui menos um, assim o tamanho de  $P = (v_0, \dots, v_k)$  é  $k$ , pois possui  $k + 1$  vértices. Caso não exista outro caminho de  $v_0$  para  $v_k$  com tamanho menor que o tamanho de  $P$ , então dizemos que  $P$  é um *caminho mínimo*. Na Figura 4 temos, para  $S = \{1, 2\}$ , que  $I(S) = S \cup \{8, 9\} = H(S)$  para a convexidade geodésica. Veja que, para os vértices 4 e 13, temos os caminhos mínimos  $(4, 3, 1, 12, 13)$  e  $(4, 5, 2, 14, 13)$  e logo, para  $S = \{4, 13\}$ , temos que  $I^1(S) = S \cup \{3, 1, 12, 5, 2, 14\}$ . Podemos dar prosseguimento infectando os vértices 8 e 9, pois temos os caminhos mínimos  $(1, 8, 2)$  e  $(1, 9, 2)$  entre os vértices infectados 1 e 2, o que resulta em  $I^2(S) = I^1(S) \cup \{8, 9\}$ . Não podemos infectar outro vértice. Assim o que fizemos foi  $I^0(S) = \{1, 2\} \subset I^1(S) = S \cup \{3, 1, 12, 5, 2, 14\} \subset I^2(S) = I^1(S) \cup \{8, 9\} = H(S)$ .

Finalmente, caso  $\mathcal{P}$  seja o conjunto de todos os caminhos com três vértices, então

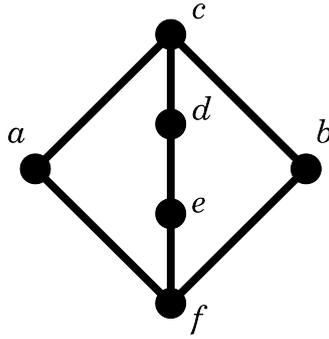


Figura 5 – Exemplos para a convexidade  $P_3$  em um grafo

$(G, \mathcal{C}_P)$  é uma *convexidade*  $P_3$  (veja em (BARBOSA et al., 2012)). Originalmente a convexidade  $P_3$  foi definida para grafos direcionados, especificamente torneios (veja em (ERDŐS et al., 1972)). Na Figura 5 temos, para  $S = \{a, b\}$ , os vértices  $a$  e  $b$  infectam os vértices  $c$  e  $f$  pelos caminhos  $(acb)$  e  $(afb)$  e assim temos  $I(S) = \{a, b, c, f\}$  para a convexidade  $P_3$ . Note que, para o grafo da Figura 4, o passo de infecção e o fecho convexo é o mesmo para o conjunto  $S = \{1, 2\}$  em ambas as convexidades  $P_3$  e geodésica.

### 1.3 Revisão bibliográfica

Em 1982, Jamison introduziu o estudo para convexidade monofônica (JAMISON, 1982).

Em 1986 (FARBER; JAMISON, 1986), provou-se que em um grafo cordal cada vértice não simplicial pertence a um caminho induzido entre dois vértices simpliciais. Provou-se também que número de  $m$ -Carathéodory de um grafo cordal é no máximo 2. Mostrou-se que se  $G$  é um grafo cordal e  $K \subseteq V(G)$  um subconjunto conexo, então  $N^j(K)$  é  $m$ -convexo para  $j \geq 1$ . Provou-se que para um grafo cordal  $G$ , um conjunto de vértices  $K$  é  $m$ -convexo se e somente se existe uma ordem  $v_1, v_2, \dots, v_l$  de  $V(G) \setminus K$  tal que para  $i = 1, \dots, l$ ,  $v_i$  é um vértice simplicial em  $G[K \cup \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_l\}]$ . Provou-se que um subconjunto de vértices  $K$ , que induz um grafo conexo, de um grafo é  $m$ -convexo se  $N(v) \cap K$  é  $m$ -convexo, para todo  $v \in K$ .

Em (DUCHET, 1988), P. Duchet mostrou uma relação entre os números de  $m$ -Helly,  $m$ -Radon e o tamanho da clique máxima. Provou que o número de  $m$ -Helly é igual ao tamanho da clique máxima e o número de  $m$ -Radon é igual ao tamanho da clique máxima mais 1 exceto para grafos livres de triângulos, onde o número de  $m$ -Radon é no máximo 4. Estendeu o resultado de (FARBER; JAMISON, 1986) mostrando que o número de  $m$ -Carathéodory é 1 para grafos completos e 2 para outros grafos.

Em 2004 e 2005 (HERNANDO et al., 2004; PUERTAS et al., 2005; CÁCERES et al., 2005), mostrou-se que não há relação geral entre o conjunto de fecho para as convexidades monofônica e geodésica. Sejam um grafo  $G = (V, E)$  e um conjunto não vazio  $W \subseteq V(G)$ . O subgrafo conexo de  $G[W]$  com o menor número de arestas é uma  $W$ -árvore de Steiner. O conjunto  $W$  é um conjunto de Steiner de arestas se as arestas pertencentes em alguma  $W$ -árvore de Steiner cobrem  $E$ . Provou-se ainda que cada conjunto de Steiner de arestas  $W$  é um conjunto monofônico de arestas, isto é, cada aresta de  $G$  pertencente a algum caminho induzido que une dois vértices de  $W$ .

Em (CHANGAT; MULDER; SIERKSMA, 2005), estendeu-se o resultado de P. Duchet (DUCHET, 1988) mostrando-se, para um grafo  $G$  livre de triângulos e  $|V(G)| \geq 3$ , que o número de  $m$ -Radon é 3 se e somente se ou  $G$  é um caminho ou  $G$  é 2-conexo e a árvore de arestas de corte (em inglês, *atom-cut-edge tree*) de  $G$  é um caminho. Para outros casos em grafos livres de triângulos o número de  $m$ -Radon é 4.

Em 2008 (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2008), foi provado que decidir se um conjunto  $X \subseteq V(G)$  é um conjunto  $m$ -convexo é decidível em tempo polinomial  $O((n+m)n|X|^2)$ . Provou-se também que decidir se um conjunto é monofônico é NP-completo. Mostrou-se que computar o fecho convexo de um conjunto pode ser feito em tempo polinomial. Finalmente, mostrou-se que decidir se o número de  $m$ -fecho de um grafo  $G$  é no máximo  $k \leq |V(G)|$  está em NP.

Em 2010 (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010), provou-se que o número de  $m$ -intervalo e o número de  $m$ -convexidade são NP-difíceis para grafos em geral. Curiosamente obtiveram um algoritmo em tempo polinomial para computar um conjunto  $m$ -convexo em tempo  $O(nm)$  e o número de  $m$ -fecho de um grafo em tempo  $O(n^3m)$ .

Em 2012 (JOHN; PAUL, 2012), mostrou-se que para um grafo bipartido completo  $K_{m,n}$ :

- (i)  $m_1(G) = 2$  se  $m = n = 1$ ;
- (ii)  $m_1(G) = n$  se  $m \geq 2, n = 1$ ;
- (iii)  $m_1(G) = \min\{m, n\}$  se  $m, n \geq 2$ .

Mostrou-se também que para qualquer grafo conexo  $G$  a desigualdade  $2 \leq m(G) \leq m_1(G) \leq |V(G)|$  é válida. Além disso, para cada inteiros positivos  $2 \leq a \leq b$ , provou-se que existe um grafo conexo  $G$  tal que  $m(G) = a$  e  $m_1(G) = b$ . Apresentam a conjectura:

**Conjectura 1.1.** *Seja  $G$  um grafo com  $|V(G)| \geq 3$  e  $m_1(G) = |V(G)| - 1$ . Existe um único vértice  $v \in V(G)$  que não é vértice semi-simplicial de  $G$ .*

Notamos a existência de poucos resultados algorítmicos conhecidos para a convexidade monofônica, embora existam muitos resultados teóricos interessantes.

Nesta dissertação, estendemos alguns desses resultados. Provamos que decidir se o número de  $m$ -intervalo é no máximo 2 e decidir se o tempo de  $m$ -percolação é no máximo 1 são problemas NP-completos mesmo em grafos bipartidos. Também provamos que o número de  $m$ -convexidade é tão difícil de aproximar quanto o problema da Clique Máxima, que é, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $O(n^{1-\varepsilon})$ -inaproximável em tempo polinomial, a menos que  $P=NP$ . Finalmente, apresentamos um algoritmo de tempo polinomial para determinar o número  $m$ -convexidade em classes hereditárias de grafos onde a computação do tamanho da clique máxima é em tempo polinomial (como grafos perfeitos e grafos planares).

Nossos resultados sobre o número de  $m$ -convexidade, o número de  $m$ -intervalo e o tempo de percolação foram apresentados no Workshop on Distance Geometry and Applications em 2013. Um artigo completo foi aceito para publicação em *Discrete Applied Mathematics* (COSTA; DOURADO; SAMPAIO, 2015).

Esta dissertação está organizada como se segue. No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos em Teoria dos Grafos que serão úteis nos demais capítulos. No Capítulo 3, introduzimos a decomposição em cortes clique minimais e apresentamos alguns resultados na literatura sobre caracterizações e algoritmos para essa decomposição. Nos Capítulos 4, 5 e 6 mostramos, respectivamente, nossos resultados acerca do número de intervalo, tempo de percolação e número de convexidade para a convexidade monofônica.

## 2 Conceitos básicos

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos em Teoria dos Grafos e Convexidade em Grafos que serão necessários para uma boa compreensão dos demais capítulos.

### 2.1 Um pouco sobre grafos

Um grafo  $G = (V, E)$  consiste em um conjunto de vértices  $V$  (ou  $V(G)$ ), um conjunto de arestas  $E$  (ou  $E(G)$ ) e uma associação que mapeia cada aresta  $e \in E$  em um par não ordenado  $\{x, y\}$ , onde  $x, y \in V$  são *extremidades* ou *vértices extremos* da aresta  $e$ .

Podemos representar graficamente um grafo  $G = (V, E)$  como na Figura 6, onde  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  e  $E(G) = \{ab, bc, cd, de, ef, bd, be\}$ . Os vértices são representados por pontos e as arestas são representadas por curvas.

Uma aresta é *múltipla* quando possui as mesmas extremidades de outra aresta. Um *laço* é uma aresta onde seus vértices extremos são iguais. Veja o grafo da Figura 7, o qual possui duas arestas múltiplas entre os vértices  $a$  e  $b$ ; duas arestas múltiplas entre os vértices  $b$  e  $c$ ; e um laço no vértice  $c$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é *finito* quando  $V$  e  $E$  são finitos. Dizemos que um grafo é *simples* quando é finito e não possui laços e nem arestas múltiplas. Note que o grafo da Figura 6 é um grafo simples, enquanto o grafo da Figura 7 não é um grafo simples. Nesta dissertação, consideramos os grafos sendo simples a menos que seja dito o contrário.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Dizemos que dois vértices  $x, y \in V(G)$  são *vizinhos*

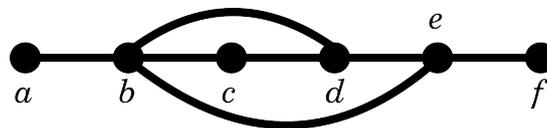


Figura 6 – Um grafo simples

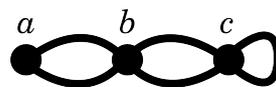


Figura 7 – Um grafo não simples

(ou *adjacentes*) em  $G$  caso  $xy \in E(G)$ . A *vizinhança* (ou *vizinhos*) de vértice  $x \in V(G)$  é o conjunto  $N(x) = \{y \neq x \mid xy \in E(G)\}$  e a *vizinhança fechada* de  $x$  é o conjunto  $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ . A vizinhança de um conjunto  $A \subseteq V(G)$  é o conjunto  $N(A) = \bigcup_{x \in A} N(x) \setminus A$  e a vizinhança fechada de  $A$  é o conjunto  $N[A] = N(A) \cup A$ . Para cada  $j > 1$ ,  $N^j(A) = N(N^{j-1}(A))$ , onde  $N^1(A) = N(A)$ .

Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e vértice  $v \in V(G)$ . Denotamos por  $d(v) = |N(v)|$  o *grau* do vértice  $v$ . Denotamos por  $\Delta(G)$  o *grau máximo* de  $G$ , isto é,  $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ . Analogamente,  $\delta(G)$  denota o *grau mínimo* de  $G$ , isto é,  $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ .

Um subconjunto de vértices de um grafo é dito *clique* quando cada par de seus vértices são adjacentes. Denotamos por  $K_n$  o grafo, chamado *grafo completo*, que contém  $n$  vértices e que  $V(K_n)$  é uma clique. Seja um grafo  $G = (V, E)$ . Denotamos por  $\omega(G)$  o tamanho do maior subconjunto de vértices de  $V(G)$  que é clique de  $G$ .

Sejam os grafos  $G = (V, E)$  e  $H = (V', E')$ . Dizemos que  $H$  é *subgrafo* de  $G$  caso  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ . Dizemos que  $H$  é um *subgrafo induzido* de  $G$  se  $H$  é subgrafo de  $G$  e para cada par de vértices  $x$  e  $y$  de  $H$ ,  $xy \in E(H)$  se e somente se  $xy \in E(G)$ . Caso  $V(H)$  seja uma clique e  $H$  subgrafo de  $G$ . Dizemos que  $V(H)$  *induz* uma clique em  $G$ . Seja  $X \subseteq V(G)$ . Denotamos por  $G[X]$  o subgrafo induzido de  $G$  com o conjunto de vértice  $X$ .

Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e  $v \in V(G)$  um vértice. O vértice  $v$  é um *vértice simplicial* se  $N(v)$  induz uma clique em  $G$ . Um vértice  $v \in V(G)$  é dito *semi-simplicial* se  $\Delta(G[N(v)]) = |N(v)| - 1$ .

### 2.1.1 Caminhos em um grafo

Um *caminho*  $P$  em um grafo  $G = (V, E)$  de um vértice  $v_0$  até um vértice  $v_k$  é uma sequência de vértices distintos  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  de  $V(G)$  tais que  $v_i v_{i+1} \in E$ , para  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Podemos denotar  $P$  ainda por  $v_0 \cdots v_k$ . Dizemos que  $v_0$  e  $v_k$  são *vértices extremos* ou as *extremidades* do caminho  $P$ . Veja no grafo da Figura 6, temos os caminhos  $(a, b, c, d, e)$ ,  $(a, b, e, f)$ ,  $(a, b, d, e)$ , dentre outros.

Uma *corda* em um caminho  $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  é uma aresta  $v_i v_j$ , onde  $j > i$  e  $j \neq i+1$ . Dizemos que  $P$  é um *caminho induzido* caso não possua cordas. No grafo da Figura 6, temos o caminho  $(abcdef)$  que possui as cordas  $bd$  e  $be$  não sendo, assim, um caminho induzido. Já os caminhos  $(a, b, e, f)$  e  $(a, b, d)$  são induzidos, pois não possuem cordas.

Um *T-caminho* é um caminho que não possui cordas para quaisquer dois vértices a distância maior do que 2, ou seja, é um caminho que permite cordas que formam “triângulos”, por exemplo, para o grafo da Figura 6, temos que o caminho  $(abcd)$

é um  $T$ -caminho, pois aceita o “triângulo”  $bcd$ , mas o caminho  $(abcde)$  não é um  $T$ -caminho, pois embora tenha o mesmo triângulo  $bcd$  também contém a corda  $be$  que o impede de ser um  $T$ -caminho.

O tamanho de um caminho  $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  é igual ao número de vértices que ele possui menos um, assim o tamanho de  $P$  é  $k$ , pois possui  $k+1$  vértices. Caso não exista outro caminho de  $v_0$  para  $v_k$  com tamanho menor que o tamanho de  $P$ , então dizemos que  $P$  é um *caminho mínimo*. Para o grafo representado na Figura 6 temos o caminho  $(a, b, c, d, e, f)$  do vértice  $a$  até o vértice  $f$  que possui tamanho 6 e não é um caminho mínimo, pois temos os caminhos  $(a, b, d, e, f)$  e  $(a, b, e, f)$  de tamanhos 4 e 3 respectivamente. Como não há outro caminho menor que  $(a, b, e, f)$  do vértice  $a$  até o vértice  $f$ , então  $(a, b, e, f)$  é um caminho mínimo.

Um *ciclo* (ou *caminho fechado*) é um caminho  $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ , onde  $v_0v_k$  é uma aresta e  $k \geq 2$ . O tamanho de um ciclo é igual ao número de seus vértices. Veja que um ciclo de tamanho  $n$  possui  $n$  vértices enquanto um caminho de tamanho  $n$  possui  $n+1$  vértices. Para o grafo representado na Figura 6 temos os ciclos  $(b, c, d)$  e  $(b, c, d, e)$ .

Um grafo é *conexo* caso exista um caminho entre cada par de seus vértices. Um grafo é *desconexo* caso não seja conexo. Quando um grafo é desconexo seus subgrafos conexos maximais são chamados de *componentes conexas*.

### 2.1.2 Classes de grafos

Uma *árvore* é um grafo conexo e não possui ciclos. Se um grafo  $T$  é uma árvore, então  $|E(T)| = |V(T)| - 1$ . Um vértice em uma árvore é também chamado de *nó*. Os nós, em uma árvore, que possuem apenas um vizinho são chamados de *folhas* e os demais são chamados de *nós internos*. Podemos escolher um nó  $r$ , chamado nó raiz, em uma árvore e chamá-la de *árvore enraizada em  $r$* . Seja  $T$  uma árvore enraizada em  $r$  e um vértice  $v \in V(T)$ . Um *descendente* do nó  $v$  é um nó  $u$  tal que  $v$  é um vértice interno ao caminho entre os vértices  $r$  e  $u$ . Um *filho* de  $v$  é um descendente que possui distância um de  $v$ . Se  $u$  é filho de  $v$ , dizemos que  $v$  é *pai* de  $u$ .

Um grafo é *cordal* se não possui cordas nos seus ciclos de tamanho estritamente maior que três.

Um grafo  $G = (V, E)$  é dito *bipartido* se  $V$  pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos  $(X, Y)$  tais que  $V = X \cup Y$  e para todo  $v \in X$  cada vizinho de  $v$  pertence a  $Y$  e para todo  $u \in Y$  cada vizinho de  $u$  pertence a  $X$ . Veja o grafo da Figura 8, temos um grafo bipartido com as partições  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{d, e, f\}$ . Note ainda que esse grafo da Figura 8 possui o maior número de arestas possíveis

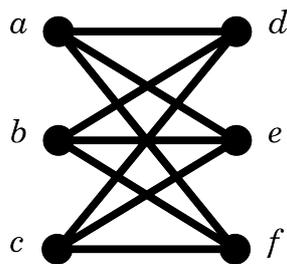


Figura 8 – Um grafo bipartido

para um grafo bipartido, pois se adicionarmos alguma aresta o grafo torna-se não bipartido. Deste modo, o grafo da Figura 8 é um grafo *bipartido completo*, ou seja, é um grafo bipartido com o maior número de arestas possíveis. Denotamos por  $K_{m,n}$  o grafo bipartido completo com partições  $A$  e  $B$  tais que  $m = |A|$  e  $n = |B|$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é *planar* caso exista uma representação gráfica de  $G$  em um plano sem cruzamento de arestas. Veja que o grafo da Figura 6 é um grafo planar, pois a própria figura é uma representação gráfica sem cruzamento de arestas. Enquanto o grafo da Figura 8 não é planar, pois não há representação gráfica sua sem cruzamento de arestas.

Para outras definições básicas em Teoria dos Grafos veja (BONDY; MURTY, 2008).

### 3 Número de fecho monofônico

Neste capítulo, introduzimos a decomposição em cortes clique minimais, apresentamos um algoritmo polinomial que computa o número de fecho para a convexidade monofônica e descrevemos o algoritmo que computa os átomos (definidos na seção a seguir) de um grafo qualquer.

#### 3.1 Decomposição em cortes clique minimais

Nesta seção, explicamos a decomposição em cortes cliques minimais usando a terminologia de (BERRY; POGORELCNIK; SIMONET, 2010).

Sejam  $G = (V, E)$  um grafo,  $S \subseteq V$  e  $a, b \in V$ . Dizemos que  $S$  é um *separador* (ou, *conjunto de corte*) se  $G[V \setminus S]$  possui mais componentes conexas do que o grafo  $G$ . Dizemos que  $S$  é um *ab-separador* se  $a$  e  $b$  estão em componentes conexas distintas de  $G[V \setminus S]$ , e  $S$  é um *ab-separador minimal* se  $S$  é um *ab-separador* e nenhum subconjunto próprio de  $S$  é um *ab-separador*. Um separador  $S$  é um *separador minimal* se existe algum par  $\{a, b\}$  tal que  $S$  é um *ab-separador minimal*. Um separador  $S$  é um *separador clique minimal* (ou *clique minimal separadora*) se é separador minimal e induz uma clique. Um grafo é *primo* se é conexo e não possui separador clique minimal. Um *átomo* (ou um *mp-subgrafo*) de  $G$  é um subgrafo primo maximal de  $G$ .

Veja o grafo da Figura 9. Temos, por exemplo, os separadores  $\{x, b\}$ ,  $\{a, x, y\}$ ,  $\{a, b, x\}$ . Note que  $\{c, x, y\}$  é *ab-separador*;  $\{x, y\}$  é *ab-separador minimal* e  $\{x\}$  é *ac-separador minimal*. Temos apenas os separadores minimais  $\{x\}$ ,  $\{y\}$  e  $\{x, y\}$ . Note também que os separadores minimais induzem cliques, neste exemplo particular.

Uma *decomposição* de um grafo  $G$  é um conjunto de subgrafos  $H_1, \dots, H_k$  de  $G$

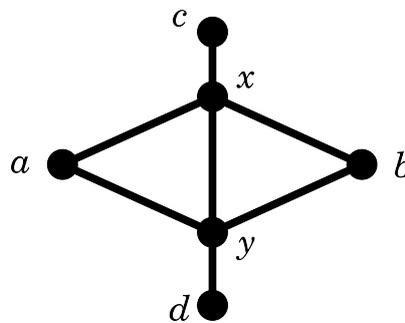


Figura 9 – Exemplos de separadores minimais em um grafo

tais que  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i = G$ .

A decomposição baseada em separadores clique minimais, aplicada a um grafo  $G = (V, E)$ , pode ser obtida recursivamente do seguinte modo. Se  $G$  não tem um separador clique minimal, retorne  $G$ . Caso contrário, seja  $S$  um separador clique minimal e sejam  $G'_1, \dots, G'_k$  componentes conexas de  $G[V \setminus S]$  e  $G_i$  o subgrafo induzido por  $V(G'_i) \cup N(V(G'_i))$  para  $i = 1, \dots, k$ . Aplicar de forma recursiva a decomposição em  $G_1, \dots, G_k$ .

Leimer provou que o conjunto de subgrafos obtido é único, podendo ser obtido em tempo  $O(nm)$  e que os subgrafos obtidos são exatamente os átomos (os mp-subgrafos) de  $G$  (LEIMER, 1993). Além disso, se  $C$  é uma clique minimal separadora, então  $C$  é interseção entre os conjuntos de vértices de pelo menos dois átomos.

Note que essa decomposição induz uma *árvore de decomposição em cortes clique*  $T$ , para um grafo  $G$ , que definimos recursivamente como se segue:

- (i) se  $G$  é um átomo, então  $T$  é apenas um vértice (também chamada *trivial*).
- (ii) se  $G$  tem um separador clique  $C$ , então  $C$  é a raiz de  $T$  e seja  $G_1, \dots, G_k$  as componentes conexas de  $G[V \setminus C]$ , assim  $T_1, \dots, T_k$  são as subárvores da raiz de  $T$ , onde  $T_i$  é uma árvore de decomposição em cortes clique de  $G[V(G_i) \cup C]$ .

Uma árvore de decomposição em cortes clique é minimal quando seus separadores cliques são minimais. Veja que os nós internos de uma árvore de decomposição em cortes clique são cliques e suas folhas são os átomos do grafo. Dada uma árvore  $T$  de decomposição em cortes clique de  $G$ , denotamos por  $\mathcal{T}_T$  a família de cliques que são nós internos de  $T$  e denotamos por  $V(\mathcal{T}_T)$  a união das cliques pertencentes a  $\mathcal{T}$ .

Considere o grafo  $G$  da Figura 10. Seja  $T$  a árvore de decomposição em cortes clique minimais de  $G$  e seja  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_T$ . Primeiro consideramos a clique  $\{y\}$ , disso temos que  $\{y\}$  separa  $G$  nos dois subgrafos  $G_1 = G[\{a, b, c, x, d, e, f, g, u, v, y\}]$  e  $G_2 = G[\{y, h\}]$ . Vemos que  $G_2$  não possui separador clique e logo é uma folha de  $T$ . Prosseguindo, a árvore de decomposição em cortes clique minimais  $T_1$  de  $G_1$  terá a raiz  $\{x\}$  que separa  $G_1$  nos subgrafos  $G[\{a, b, c, x\}]$ ,  $G[\{x, d, e, f, g\}]$  e  $G[\{x, y, u, v\}]$  que por sua vez não possuem separador clique e logo são átomos, isto é, são folhas da árvore  $T$ . Assim temos que  $\mathcal{T} = \{\{x\}, \{y\}\}$ . Note que uma árvore de decomposição em cortes clique minimal pode não ser única, veja que se escolhermos primeiro o separador clique  $\{x\}$  e depois  $\{y\}$  teremos uma nova árvore. Note também que na Figura 10 obtemos uma árvore de decomposição em cortes clique minimais.

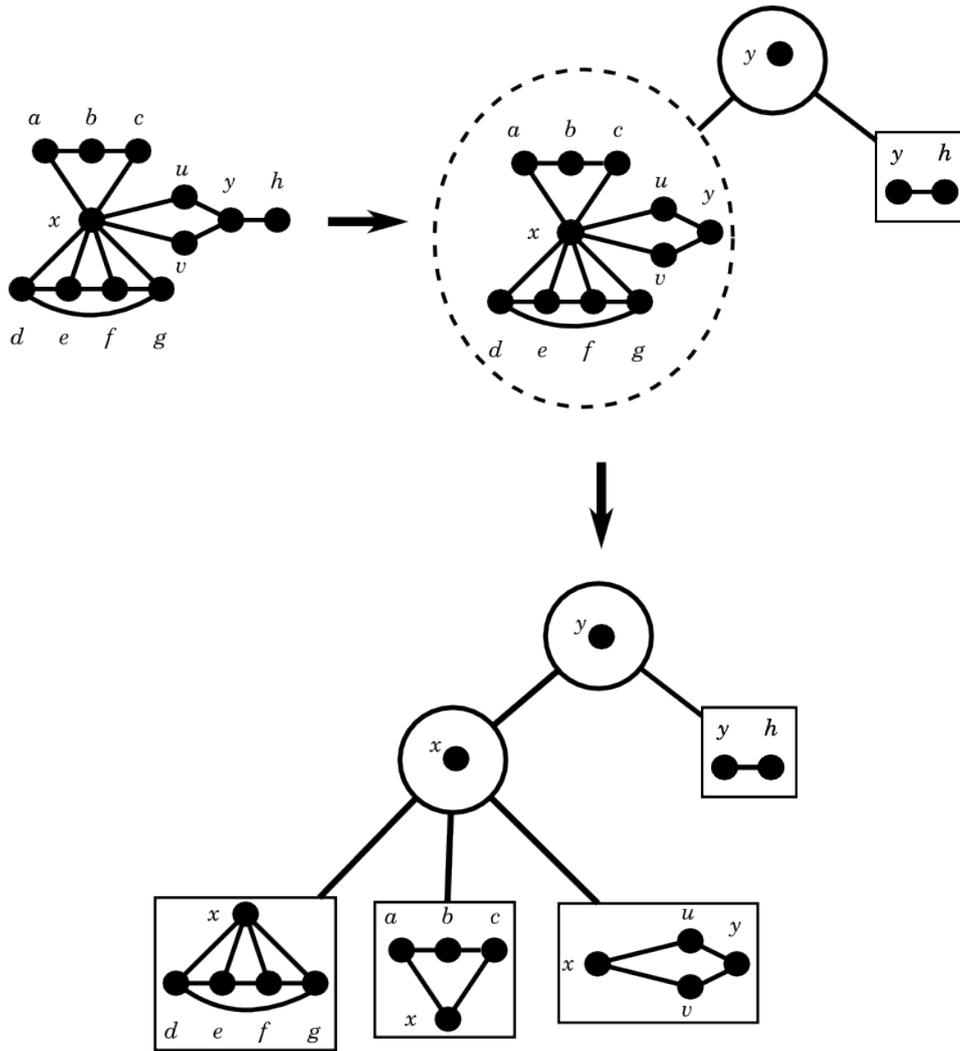


Figura 10 – Árvore de decomposição em cortes clique minimais de um grafo

### 3.2 Algoritmo polinomial para o número de fecho monofônico

No que se segue, explicamos o algoritmo polinomial para o número de fecho monofônico que encontra-se em (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010), na quinta seção. Damos uma explicação do algoritmo de modo diferente.

O *fecho convexo* (em inglês, *convex hull*) de  $S$ , denotado por  $H(S)$ , é o menor conjunto convexo que contém  $S$ . Caso  $H(S) = V(G)$ , ou seja, o conjunto  $S$  infecta todos os vértices do grafo em número finito de passos de infecção, dizemos que  $S$  é um *conjunto de fecho* (em inglês, *hull set*).

O *número de fecho* (em inglês, *hull number*)  $hn(G)$  de  $G$  é o tamanho de um menor conjunto de fecho, ou seja, a cardinalidade de um menor conjunto de vértices de  $G$  que passo a passo de infecção infecta todos os vértices do grafo.

A principal ideia do algoritmo para computar o número de fecho é computar um

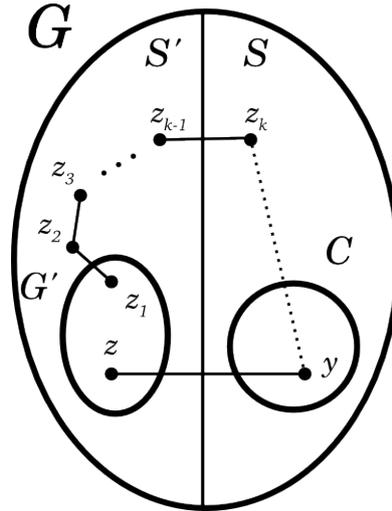


Figura 11 – Esquema para prova do Teorema 3.1

menor conjunto de fecho  $S$  verificando em cada átomo de  $G$  quais vértices podem ser adicionados em  $S$ . O algoritmo em tempo polinomial  $O(n^3m)$  segue na prova do Teorema 3.2.

Sejam  $G$  um grafo e  $C$  um separador clique de  $G$ . O próximo resultado mostra, para  $G$  não completo, que se  $G$  é um átomo, então  $hn(G) = 2$  para a convexidade monofônica. Em outras palavras, são necessários apenas dois vértices para infectar um átomo em número finito de passos de infecção para a convexidade monofônica.

**Teorema 3.1** (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). *Se  $G$  é um átomo e  $G$  não é um grafo completo, então cada par de vértices não adjacentes é um conjunto de fecho monofônico de  $G$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x, x' \in V(G)$  dois vértices não adjacentes e  $S = H(\{x, x'\})$ . Suponha que  $S' = V(G) \setminus S$  seja diferente de vazio (veja a Figura 11). Considere um subconjunto maximal  $C \subseteq S$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i)  $C$  é uma clique;
- (ii) existe um subgrafo conexo  $G'$  de  $G[S']$  tal que cada  $y \in C$  tem pelo menos um vizinho  $z \in V(G')$ .

Veja que existe  $C \neq \emptyset$  satisfazendo essas propriedades. Uma vez que  $G$  não contém separador clique, o grafo  $H = G[V(G) - C]$  é conexo. Então  $H$  contém um caminho induzido  $z_1 z_2 \dots z_k$ ,  $k \geq 2$ , tal que  $z_1 \in V(G')$ ,  $\{z_2, \dots, z_{k-1}\} \subseteq S'$  e  $z_k \in S$ . O vértice  $z_k \in S \setminus C$  existe porque  $S$  não é uma clique, pois  $xx'$  não é aresta. Uma vez que  $C$  é maximal, existe  $y \in C$  que não é adjacente a  $z_k$  (caso contrário,  $C \cup \{z_k\}$  e  $G[V(G') \cup \{z_2, \dots, z_{k-1}\}]$  satisfazem as condições (i) e (ii), respectivamente). Seja

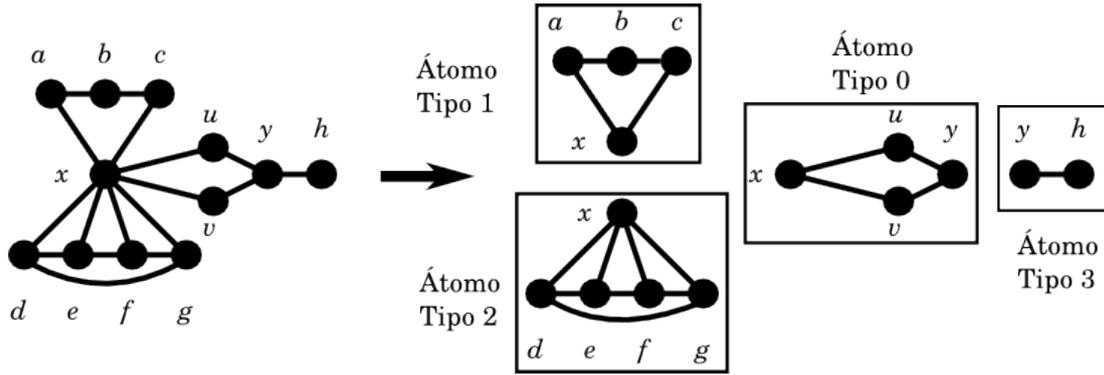


Figura 12 – Decomposição em cortes clique minimais

$z \in V(G')$  um vizinho de  $y$ . Uma vez que existe um caminho em  $G'$  entre  $z$  e  $z_1$ , concluímos que existe algum caminho induzido entre  $y$  e  $z_k$  cujos vértices internos pertencem à  $S'$ , uma contradição à hipótese que  $S = H(\{x, x'\})$ .  $\square$

Seja  $A_i$  um átomo de  $G$ . Definimos o *corte*  $C_i$  de  $A_i$  como sendo o conjunto dos vértices de  $A_i$  que também pertencem a algum outro átomo. Ou seja, excluem-se os vértices de  $A_i$  que pertencem apenas a um átomo (o próprio  $A_i$ ).

Temos uma classificação para cada átomo  $A_i$  nos seguintes tipos:

- Tipo 0: se  $C_i$  não induz uma clique;
- Tipo 1: se  $C_i$  induz uma clique e existe um vértice  $u \in V(A_i)$  não adjacente a algum vértice de  $C_i$ ;
- Tipo 2: se  $C_i$  induz uma clique e  $A_i$  não é um grafo completo e cada vértice de  $C_i$  é vizinho de todos os vértices de  $A_i$ ;
- Tipo 3: se  $C_i$  induz uma clique e se  $A_i$  é um grafo completo.

Veja a Figura 12. Temos dois separadores clique minimais  $\{x\}$  e  $\{y\}$ . Temos os átomos  $A_1 = \{a, b, c, x\}$ ,  $A_2 = \{d, e, f, g, x\}$ ,  $A_3 = \{y, h\}$  e  $A_4 = \{x, y, u, v\}$ , veja que  $C_1 = C_2 = \{x\}$ ,  $C_3 = \{y\}$  e  $C_4 = \{x, y\}$ . Os tipos dos átomos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  são 1, 2, 3 e 0, respectivamente.

**Lema 3.1** (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). *Uma decomposição em cortes clique minimais não trivial contém pelo menos dois átomos  $A_i$  e  $A_j$  de tipos 1, 2 ou 3.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo que não é um átomo e seja  $T$  uma árvore de decomposição em cortes clique minimais de  $G$ . Sejam  $n'$  e  $f$  o número de vértices

(incluindo as folhas) e folhas de  $T$ , respectivamente. Primeiro, note que em qualquer árvore de decomposição em cortes clique minimais cada vértice interno tem pelo menos dois filhos, logo o número  $f$  de folhas é maior que o número  $ni$  de vértices internos. Então  $n' = ni + f < 2f$ .

Agora suponha por absurdo que pelo menos  $f - 1$  átomos são do tipo 0. Dada uma folha  $A_i$  de  $T$  (que é um átomo de  $G$ ), seja  $d_i$  o número de cortes clique minimais de  $G$  (ou seja, nós internos de  $T$ ) que estão contidos em  $A_i$ . Segue-se que  $t = \sum_{\text{átomo } A_i \text{ de } G} d_i \geq 2(f - 1) + 1 = 2f - 1$ , pois cada átomo do Tipo 0 contém pelo menos dois cortes clique minimais de  $\mathcal{T}$ . Note ainda que cada nó interno de  $T$  contribui para  $t$  com no máximo o número de seus filhos e, como existem  $n' - 1$  filhos em  $T$  (visto que a raiz não é filho de ninguém), temos que  $t \leq n' - 1$ . Portanto,  $n' - 1 \geq t \geq 2f - 1$ , uma contradição. □

**Lema 3.2** (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). *Sejam  $G$  um grafo,  $C$  um separador clique de  $G$  e  $V'$  a união dos conjuntos de vértices de algumas componentes conexas de  $G[V(G) - C]$ . Então  $V' \cup C$  é um conjunto convexo monofônico de  $G$ .*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $V' \cup C$  não é convexo. Então  $V' \cup C$  contém dois vértices  $u$  e  $v$  em diferentes componentes de  $G[V(G) - C]$  tais que  $P = uv_1 \dots v_k v$ , para  $k \geq 1$  é um caminho induzido contendo um vértice  $v_j \notin V' \cup C$ , com  $1 \leq j \leq k$ . Seja  $p$  (resp., seja  $r$ ) o menor (resp. maior) índice tal que  $v_p \in C$  (resp.  $v_r \in C$ ). Então  $1 \leq p < j < r \leq k$  e, uma vez que  $C$  é um separador clique de  $G$ ,  $v_p v_r \in E(G)$  é uma corda para  $P$  e logo  $P$  não é um caminho induzido, uma contradição. □

**Lema 3.3** (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). *Seja  $A_i$  um átomo. Se  $A_i$  é do tipo  $t$ , onde  $t \in \{1, 2\}$ , então cada conjunto de fecho de  $G$  contém pelo menos  $t$  vértices de  $V(A_i) \setminus C_i$ .*

*Demonstração.* Seja  $S = V(A_i) \setminus C_i$ , e  $\bar{S} = V(G) \setminus S$ . Veja que  $C_i$  é um separador clique de  $G$ . Então, pelo Lema 3.2,  $\bar{S}$  é um conjunto convexo. Isso implica que cada conjunto de fecho de  $G$  contém pelo menos um vértice de  $S$ . Se  $t = 2$ , observe que, para cada  $u \in S$ ,  $\bar{S} \cup \{u\}$  é também um conjunto convexo de  $G$ . □

**Lema 3.4** (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). *Um vértice  $v$  é simplicial em  $G$  se e somente se pertence a um átomo  $A_i$  do Tipo 3 em  $G$  e  $v \notin C_i$ .*

*Demonstração.* Seja  $v$  um vértice simplicial de  $G$ . Uma vez que um vértice simplicial não pertence a nenhum separador clique minimal de nenhum subgrafo de  $G$ ,  $v \notin C_i$ .

Isso implica que  $v$  pertence a exatamente um átomo  $A_i$ . Suponha, por contradição, que  $A_i$  não é do Tipo 3, isto é,  $A_i$  não é um grafo completo. Então existe um vértice  $u$  não adjacente a  $v$ . Então  $N(v)$  é um separador clique de  $A_i$ , contradizendo que  $A_i$  é um átomo.

Por outro lado, seja  $s$  um vértice de um átomo  $A_i$  do Tipo 3 tal que  $v \notin C_i$ . Note que  $N(v) \subseteq V(A_i)$ ; uma vez que  $A_i$  é um grafo completo,  $v$  é um vértice simplicial de  $G$ .  $\square$

**Teorema 3.2** (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). *Um conjunto  $S$  é conjunto de fecho de cardinalidade mínima de um grafo  $G$  se e somente se para cada átomo  $A_i$  de  $G$ ,  $S$  satisfaz as seguintes condições:*

- (i) se  $A_i$  é do tipo 0, então  $S \cap V(A_i) = \emptyset$ ;
- (ii) se  $A_i$  é do tipo 1, então  $S \cap (V(A_i) \setminus C_i) = \{u\}$  para um vértice  $u$  não adjacente a algum vértice de  $C_i$ ;
- (iii) se  $A_i$  é do tipo 2, então  $S \cap (V(A_i) \setminus C_i) = \{u, v\}$  para algum par  $u$  e  $v$  de vértices não adjacentes;
- (iv) se  $A_i$  é do tipo 3, então  $V(A_i) \setminus C_i \subseteq S$ .

*Demonstração.* Primeiro provamos a afirmação que se segue:

**Afirmação 1:** Se  $S$  é um subconjunto de vértices de  $G$  tal que, para cada átomo  $A_i$  na decomposição em cortes clique minimais de  $G$ ,  $S$  satisfaz as condições (i)-(iv), então  $S$  é um conjunto de fecho monofônico de  $G$ .

Por indução no número de átomos  $h$  na decomposição. Se  $h = 1$ , então  $G$  é um átomo do Tipo 2 ou 3, pois  $C_i = \emptyset$ . No primeiro caso, como  $S$  satisfaz a condição (iii), então, pelo Teorema 3.1, qualquer par de vértices não adjacentes é um conjunto de fecho monofônico; no segundo caso, uma vez que  $S$  satisfaz a condição (iv),  $S$  é um conjunto de fecho de  $G$  e como  $C_i = \emptyset$ , então  $V(G) = S$ . Suponha agora que  $h > 1$  e que a Afirmação 1 seja verdadeira para o número de átomos menor que  $h$ . Considere um separador clique minimal  $C_1$  e seja  $\{G_1, \dots, G_k\}$  a família de subgrafos de  $G$  tal que  $G_i = G[V(G'_i) \cup N(V(G'_i))]$ ; onde  $\{G'_1, \dots, G'_k\}$  são as componentes conexas de  $G[V(G) - C_1]$ . Seja  $C_j^i$  o corte para um átomo  $A_j^i$  em  $G_i$  e  $S_i \subseteq V(G_i)$  tal que  $S_i$  satisfaz as condições (i)-(iv) em  $G_i$ .

Se  $C_1$  está contido em um separador clique, faça  $S_i = S \cap V(G_i)$ . Caso contrário, inicialize  $S_i = \emptyset$  e para cada átomo  $A_j^i$  de  $G_i$ , faça o seguinte. Primeiro suponha que  $A_j^i$  é do mesmo tipo  $t$  em  $G$  e  $G_i$ . Se  $t = 3$ , adicione a  $S_i$  todos os vértices de  $V(A_j^i) \setminus C_j^i$ ; observe que, neste caso, uma vez que  $C \setminus \bigcup C_j^i \subseteq C_1$  (onde  $C$  é o conjunto de todos os separadores clique de  $G$ ), cada vértice de  $A_j^i$  pertencente a

$S_i \setminus S$  está contido em  $C_1$ . Se  $t = 2$ , adicione a  $S_i$  os vértices de  $S \cap V(A_j^i)$ . Se  $t = 1$ , temos duas possibilidades: se  $u \in S \cap V(A_j^i)$  não é adjacente a algum vértice de  $C_j^i$ , adicione  $u$  a  $S_i$ ; caso contrário, adicione a  $S_i$  um vértice  $w \in V(A_j^i) \setminus C_j^i$  tal que  $w$  não é adjacente a algum vértice de  $C_j^i$ . Note que  $w \notin C_1$ .

Agora, considere o caso onde o Tipo de  $A_j^i$  em  $G$  é diferente do Tipo em  $G_i$ . Uma análise de casos mostra que as possibilidades são: o Tipo de  $A_j^i$  é 2 em  $G_i$  e Tipo 1 em  $G$ ; ou do Tipo 1 em  $G_i$  e Tipo 0 em  $G$ . Para o primeiro caso, faça  $\{u\} = V(A_j^i) \cap S$ . O que implica em algum vértice  $w$ , não adjacente a  $u$ , pertencente a  $C$  e não pertencente a  $C_j^i$ ; portanto adicione  $u$  e  $w$  a  $S_i$ . Para o segundo caso, adicione algum vértice  $w$  em  $V(A_j^i) \setminus C_j^i$  tal que  $w$  não é adjacente a algum vértice de  $C_j^i$ . Note que em ambos os casos  $w \in C_1$ .

Pela hipótese indutiva,  $S_i$  é um conjunto de fecho monofônico de  $G_i$ . Portanto,  $S' = \bigcup S_i$  é um conjunto de fecho monofônico de  $G$ . Agora vamos mostrar que  $S' \subseteq H(S)$ .

Seja  $v \in S' \setminus S$ . Se  $v \in C_1$ , considere algum  $G_i$  do grafo  $G$ . Se  $G_i$  é um átomo ou  $C_1$  está contido em um separador clique de  $G_i$ , veja que  $S_i \cap S$  é diferente de vazio. Caso contrário, pelo Lema 3.1,  $G_i$  tem os átomos  $A_j^i$  e  $A_k^i$  do tipos 1, 2 ou 3, tais que  $V(A_j^i) \cap S_i \neq \emptyset$  e  $V(A_k^i) \cap S_i \neq \emptyset$ . Uma vez que  $C_1$  está contido em apenas um átomo de  $G_i$ , para pelo menos um átomo  $A_\ell^i$  de  $G_i$  temos que  $C_\ell^i \neq V(A_\ell^i) \cap C$ . Então ou  $C_j^i = V(A_j^i) \cap C$  ou  $C_k^i = V(A_k^i) \cap C$ . Portanto,  $S_i \cap S$  é não vazio neste caso.

Seja  $w_i^1 \in S_i \cap S$ . Como  $G[V(G_i) - C_1]$  é conexo, existe um caminho  $w_i^1 \cdots w_i^t$  em  $G[V(G_i) - C_1]$ ,  $t \geq 1$ , onde  $w_i^t$  é vizinho de  $v$ . O vértice  $w_i^t$  existe, pois  $C_1$  é um separador clique minimal de  $G$ . Sem perda de generalidade suponha que  $w_i^1 \cdots w_i^t v$  é o menor caminho entre  $w_i^1$  e  $v$ . Analogamente, em  $G[V(G_j) - C_1]$ ,  $j \neq i$ , existe um menor caminho  $w_j^1 \cdots w_j^r v$ ,  $r \geq 1$ , onde  $w_j^1 \in S_j \cap S$ . Uma vez que  $w_i^1 \cdots w_i^t v w_j^r \cdots w_j^1$  é um caminho induzido em  $G$ , isso mostra que  $v \in H(S)$ .

Agora suponha que  $v \notin C_1$ . Isso significa que, pela definição de um conjunto  $S_i$ , onde  $v$  pertence a algum átomo  $A_j^i$  de um subgrafo  $G_i$  tal que  $A_j^i$  é do Tipo 1 em  $G$  e  $G_i$ . Além disso,  $C_1 \subseteq V(A_j^i)$ . Assim, existe um vértice  $w \in V(A_j^i) \cap S$  tal que  $v \neq w$ . Note que  $w$  não é adjacente a nenhum vértice  $u \in C_1$ . Pelo Teorema 3.1,  $v \in H(\{u, w\})$ , e uma vez que  $C_1 \subseteq H(S)$ , concluímos que  $v \in H(S)$ . Isso completa a prova da afirmação 1.

Agora provaremos o Teorema. Seja  $S$  um conjunto de fecho monofônico mínimo de um grafo  $G$ . Para cada átomo  $A_i$  de  $G$  seja  $S_i = S \cap (V(A_i) \setminus C_i)$ . Pelo Lema 3.3,  $|S_i| \geq t$ , se  $A_i$  é do Tipo  $t \in \{1, 2\}$ ; e, pelo Lema 3.4,  $|S_i| = |A_i \setminus C_i|$ , se  $A_i$  é um átomo do Tipo 3. Pela afirmação 1, qualquer subconjunto  $S'$  de  $G$  que satisfaz as condições (i)-(iv) é um conjunto de fecho monofônico de  $G$ . Veja que o conjunto

$S'$  existe. Uma vez que  $S$  é mínimo, concluímos que  $|S_i| = t$  para cada átomo  $A_i$  do Tipo  $t \in \{0, 1, 2\}$ . Para cada átomo do Tipo 1, faremos  $S_i = \{u_i\}$ . Note que se  $u_i$  é adjacente a todos os vértices em  $C_i$ , corte de  $A_i$ , então  $H(S)$  não contém  $V(A_i) \setminus C_i$ . Agora, para cada folha do Tipo 2 faça  $S_i = \{v_i, w_i\}$ . Veja que  $v_i$  e  $w_i$  são não adjacentes. Isso implica que  $S$  satisfaz as condições (i)-(iv).

Por outro lado, seja  $S$  um subconjunto de vértices de  $G$  tal que, para cada átomo  $A_i$  de  $G$ ,  $S$  satisfaz as condições (i)-(iv). Pela afirmação 1,  $S$  é um conjunto de fecho de  $G$ . Além disso, pelo Lema 3.3,  $S$  contém pelo menos  $t$  vértices de cada átomo  $A_i$  do Tipo  $t \in \{1, 2\}$ ; e, pelo Lema 3.4,  $S$  contém todos os vértices de  $V(A_i) \setminus C_i$ , para cada folha  $A_i$  do tipo 3. Uma vez que  $S$  é mínimo, completamos a prova.  $\square$

### 3.3 Algoritmo de Decomposição em Cortes Clique Minimais

No que se segue, apresentamos o algoritmo que computa os átomos de um grafo na decomposição em cortes clique minimais que encontra-se em (BERRY; POGORELCNIK; SIMONET, 2010). Descrevemos o algoritmo e seu funcionamento.

Uma *triangularização* é um acréscimo cordal de um grafo  $G = (V, E)$ , ou seja, um grafo cordal  $H = (V, E \cup F)$ , onde  $F$  é um conjunto de arestas (chamadas *arestas de preenchimento*) que adicionadas ao grafo  $G$  tornam-o um grafo cordal  $H$ .

Sejam um grafo  $G = (V, E)$  e o grafo cordal  $H = (V, E \cup F)$  uma triangularização de  $G$ , e  $F$  um preenchimento. A triangularização é dita:

- Minimal, se para nenhum subconjunto próprio  $F'$  de  $F$ ,  $H' = (V, E \cup F')$  é cordal.
- Mínima, se nenhuma outra triangularização de  $G$  tem menos arestas do que  $F$ .

As principais ideias no algoritmo para computar os átomos de um grafo  $G$  são: transformar  $G$  em um grafo cordal  $H$  (uma triangularização minimal de  $G$ ), computar os separadores clique minimais de  $H$  e verificar se induzem cliques em  $G$  e, finalmente, computar os átomos de  $G$  a partir de seus separadores clique minimais. Essas ideias apoiam-se na seguinte propriedade:

**Propriedade 3.5** (BERRY; POGORELCNIK; SIMONET, 2010). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $H = (V, E + F)$  uma triangularização minimal de  $G$ . Os separadores clique minimais de  $G$  são exatamente os separadores minimais de  $H$  que induzem cliques em  $G$ .*

Um grafo é cordal se e somente se podemos, repetidamente, escolher um vértice simplicial e removê-lo, até não restar mais vértices. Esse processo é chamado de *esquema de eliminação simplicial* e define uma ordem dos vértices chamada de *ordem de eliminação perfeita (peo)*. Uma vez que cada vértice é removido temos um *grafo transitório*: no passo  $i + 1$ , o grafo transitório é o grafo de entrada  $G$  no qual os primeiros  $i$  vértices foram removidos.

Um grafo é cordal se e somente se cada separador minimal de  $G$  é uma clique (DIRAC, 1961).

Cada separador minimal de um grafo cordal  $H$  é a vizinhança de um vértice  $v$  em um grafo transitório em um esquema de eliminação simplicial (ROSE, 1970). Dizemos que  $v$  gera um separador minimal de  $H$  (com respeito a uma peo de  $H$ ).

Assim, para computar os separadores clique de um grafo cordal  $H$ , é suficiente computar uma peo de  $H$  e selecionar os vértices que geram separadores clique de  $H$  com respeito a  $\alpha$ . Isso é facilmente acoplável com um tipo especial de peo definida por um algoritmo como o MCS (BERRY; POGORELCNIK, 2011).

A computação de uma triangularização mínima é NP-completo (YANNAKAKIS, 1981), mas a computação de uma triangularização minimal pode ser obtida em tempo  $O(nm)$  ou até menos para grafos densos (KRATSCH; SPINRAD, 2006; HEGGERNES; TELLE; VILLANGER, 2005).

Um caminho para computar uma triangularização de um grafo  $G = (V, E)$  é forçar o grafo a ter uma ordem de eliminação perfeita. Defina uma ordem  $\alpha$  para  $V(G)$ , repetidamente pegue um vértice  $v$ , seguindo a ordem de  $\alpha$ , adicione arestas a  $N(v)$  para que se torne uma clique (isso no subgrafo induzido que ainda contém  $v$ ), remova  $v$ , continue até não restar mais vértices. Isso produzirá uma triangularização  $G_\alpha^+ = (V, E \cup F)$  cujo preenchimento  $F$  é o conjunto de todas as arestas adicionadas no processo.

Uma ordem  $\alpha$  no conjunto de vértices de  $G$  é uma *ordem de eliminação minimal (meo)* de  $G$  se a triangularização  $G_\alpha^+$  de  $G$  é uma triangularização minimal de  $G$ .

O algoritmo LEX M (ROSE; TARJAN, 1975) foi criado para obter uma meo. A seguir usamos uma versão simples dos algoritmos LEX M e MCS-M (BERRY et al., 2004). Ambos algoritmos retornam uma triangularização minimal  $H$  de um grafo  $G$  de entrada e uma ordem  $\alpha$  que é uma meo de  $G$  e uma peo de  $H$ , e computa facilmente o conjunto de vértices geradores de separadores minimais de  $H$ .

Dos diferentes modos existentes para computar os átomos de um grafo usaremos o algoritmo MCS-M (BERRY et al., 2004). Primeiro ele percorre cada vértice de  $n$  para 1, e a ordem  $\alpha$  obtida é uma meo do grafo  $G$  de entrada e uma peo de uma triangularização minimal  $H$  de  $G$  (BERRY; KRUEGER; SIMONET, 2009). Uma

vez que a ordem e triangularização estão computadas usamos um segundo algoritmo (Algoritmo Átomos), que gera os átomos varrendo os vértices de 1 até  $n$ .

Apresentamos primeiro um algoritmo geral MCS-M. Depois expandimos essa versão para MCS-M+, que explicamos mais adiante, e, finalmente, apresentamos o algoritmo que retorna os átomos.

---

**Algoritmo 1: MCS-M**


---

**Entrada:** Um grafo não direcionado  $G = (V, E)$

**Saída:** Uma ordem de eliminação minimal  $\alpha$  em  $V$  e uma triangularização  $H = (V, E \cup F)$  de  $G$

```

1 inicio
2   inicialize:  $F \leftarrow \emptyset$ ;  $G' \leftarrow G$ ; inicialize os rótulos de todos os vértices com 0.
3   para  $i = n$  até 1 faça
4     Escolha um vértice  $x$  de  $G'$  de rótulo máximo;  $Y \leftarrow N_{G'}(x)$ ;
5     para cada  $y \in V(G')$  não pertencente a  $N_{G'}[x]$  faça
6       se existe um caminho de  $x$  para  $y$  em  $G'$  tal que cada vértice
          interno no caminho tem rótulo estritamente menor que  $\text{rótulo}(y)$ 
7         então
8            $Y \leftarrow Y + \{y\}$ ;
9         fim
10      para cada  $y \in Y$  faça
11         $F \leftarrow F + xy$ ;  $\text{rótulo}(y) \leftarrow \text{rótulo}(y) + 1$ ;
12      fim
13       $\alpha(i) \leftarrow x$ ; Remova  $x$  de  $G'$ ;
14    fim
15     $H \leftarrow (V, E + F)$ ;
16 fim

```

---

Considere as duas expansões do algoritmo anterior.

Primeiro, implementamos “existe um caminho de  $x$  para  $y$  em  $G'$  tal que cada vértice interno no caminho tem rótulo estritamente menor que  $\text{rótulo}(y)$ ”.

Fazemos isso com a forma implementada de LEX M dada em (ROSE; TARJAN, 1975) por uma única busca em  $G'$ . Para cada valor de rótulo  $j$ , o conjunto  $\text{rótulo}(j)$  contém os vértices alcançados no rótulo de  $j$ , assim como os vértices tendo um rótulo estritamente menor que  $j$  alcançam um vértice tendo rótulo  $j$ .

Segundo, computamos o conjunto  $X$  de vértices que geram os separadores minimais de uma triangularização de  $H$ , como descrito em (BERRY; POGORELCNIK, 2011). A ideia contida nisso é que, enquanto os rótulos dos vértices escolhidos continuam recebendo mais, estamos dentro de um grupo exclusivo de  $H$ ; quando subitamente o rótulo do vértice escolhido  $x$  para de ficar maior,  $x$  gera um separador minimal de  $H$ . Cada vértice  $x$  é adicionado ao conjunto  $X$ .

**Algoritmo 2: MCS-M+****Entrada:** Um grafo não direcionado  $G = (V, E)$ **Saída:** Uma ordem de eliminação minimal  $\alpha$  em  $V$ , uma triangularização  $H = (V, E + F)$  de  $G$  e um conjunto de vértices  $X$  que gera um separador minimal de  $H$ 

```

1 inicio
2   inicialize:  $F \leftarrow \emptyset$ ;  $G' \leftarrow G$ ; inicialize os rótulos de todos os vértices com 0;
    $s \leftarrow -1$ ;  $X \leftarrow \emptyset$ ;
3   para  $i = n$  até 1 faça
4     Escolha um vértice  $x$  de  $G'$  de rótulo maximal;  $Y \leftarrow N_{G'}(x)$ ;
5     se  $\text{rótulo}(x) \leq s$  então
6       |  $X \leftarrow X + \{x\}$ ;
7     fim
8      $s \leftarrow \text{rótulo}(x)$ ;
9     Marque  $x$  como alcançado e marque os outros vértices de  $G'$  como não
   alcançados;
10    para  $j = 0$  até  $n - 1$  faça
11      | alcançados( $j$ )  $\leftarrow \emptyset$ ;
12    fim
13    para cada  $y \in N_{G'}(x)$  faça
14      | Marque  $y$  como alcançado;
15      | Adicione  $y$  a alcançados( $\text{rótulo}(y)$ );
16    fim
17    para  $j = 0$  até  $n - 1$  faça
18      | enquanto alcançados( $j$ )  $\neq \emptyset$  faça
19        | Remova um vértice  $y$  de alcançados( $j$ );
20        | para cada  $z \in N_{G'}(y)$  faça
21          | se  $z$  não está alcançado então
22            | Marque  $z$  como alcançado;
23            | se  $\text{rótulo}(z) > j$  então
24              |  $Y \leftarrow Y + \{z\}$ ;
25              | Adicione  $z$  a alcançados( $\text{rótulo}(z)$ );
26            | senão
27              | Adicione  $z$  a alcançados( $j$ );
28            | fim
29          | fim
30        | fim
31      | fim
32    fim
33    para cada  $y \in Y$  faça
34      |  $F \leftarrow F + \{xy\}$ ;  $\text{rótulo}(y) \leftarrow \text{rótulo}(y) + 1$ ;
35    fim
36     $\alpha(i) \leftarrow x$ ; Remova  $x$  de  $G'$ ;
37  fim
38   $H \leftarrow (V, E + F)$ ;
39 fim

```

Uma vez que temos uma ordem  $\alpha$ , assim como uma correspondente triangulação minimal  $H$  de  $G$  e um conjunto  $X$  de geradores de separadores minimais de  $H$ , percorrendo os vértices de 1 até  $n$ . Usamos os subgrafos transitórios  $G'$  e  $H'$  de  $G$  e  $H$ , inicializados com  $G$  e  $H$ , respectivamente. Em cada passo  $i$  processando  $x = \alpha(i)$ , verificamos se  $x$  está em  $X$ . Se está  $N_{H'}(x)$  é um separador minimal de  $H$ . Verificamos se é uma clique em  $G$ . Se é, então é um separador clique minimal em  $G$ . Neste caso computa-se uma componente conexa  $C$  de  $G[V - S]$  que contém  $x$ ;  $G'[V - S]$  é um átomo (TARJAN, 1985), que é armazenado como átomo;  $C$  é então removido de  $G'$ . Em um caso qualquer removemos  $x$  de  $H'$ .

---

**Algoritmo 3: Átomos**


---

**Entrada:** Um grafo  $G = (V, E)$ , uma meo  $\alpha$  de  $G$ , uma triangularização  $H = (V, E + F)$  de  $G$ , um conjunto de vértices que geram um separador minimal de  $H$ .

**Saída:** Um conjunto  $\mathcal{A}$  de átomos de  $G$ , o conjunto  $\mathcal{L}_H$  de separadores minimais de  $H$ , o conjunto  $\mathcal{L}_C$  de separadores clique minimais de  $G$

```

1 inicio
2    $G' \leftarrow G; H' \leftarrow H; \mathcal{A} \leftarrow \emptyset; \mathcal{L}_H \leftarrow \emptyset; \mathcal{L}_C \leftarrow \emptyset;$ 
3   para  $i = 1$  até  $n$  faça
4      $x \leftarrow \alpha(i);$ 
5     se  $x \in X$  então
6        $S \leftarrow N_{H'}(x); \mathcal{L}_H \leftarrow \mathcal{L}_H \cup \{S\};$ 
7       se  $S$  é uma clique em  $G$  então
8          $\mathcal{L}_C \leftarrow \mathcal{L}_C \cup \{S\};$ 
9          $C \leftarrow$  a componente conexa de  $G' - S$  contendo  $x$ ;
10         $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} + \{G'(S \cap C)\}; G' \leftarrow G' - C;$ 
11      fim
12    fim
13    Remova  $x$  de  $H'$ ;
14  fim
15   $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{G'\};$ 
16 fim

```

---

## 4 Número de $m$ -intervalo

Em 2010, provou-se que decidir se um conjunto é monofônico é um problema NP-Completo (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). Provou-se ainda que o número de  $m$ -intervalo é NP-difícil para grafos em geral (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). Neste capítulo, estendemos esses resultados provando que decidir se um conjunto com dois vértices é um conjunto monofônico e decidir se o número de  $m$ -intervalo é no máximo 2 são problemas NP-Completos, mesmo em grafos bipartidos.

### 4.1 Resultados de NP-Completude

O *número de intervalo*  $in(G)$  de um grafo  $G$  é a menor cardinalidade de um conjunto  $S \subseteq V(G)$ , tal que  $I(S) = V(G)$ , ou seja, é a cardinalidade do menor conjunto de vértices que infecta todos os vértices não infectados do grafo em um único passo de infecção.

O teorema a seguir será útil para mostrar que decidir se o número de intervalo é no máximo 2 é NP-Completo mesmo em grafos bipartidos para a convexidade monofônica.

**Teorema 4.1.** (MEZZINI, 2010) *Dados um grafo bipartido conexo  $G$  e três vértices distintos  $x, y, z$  em  $V(G)$ , é NP-completo decidir se existe um caminho induzido de  $x$  para  $y$  no qual  $z$  é vértice interno ao caminho.*

Dado um subconjunto  $S \subseteq V(G)$ , se  $I(S) = V(G)$ , dizemos que  $S$  é um *conjunto monofônico* de  $G$ . O seguinte corolário é consequência direta do Teorema 4.1.

**Corolário 4.1.** *Dados um grafo bipartido conexo  $G$  e três vértices distintos  $x, y, z$ , decidir se  $z \in I(\{x, y\})$  é NP-completo.*

Do corolário acima, o problema de determinar o intervalo monofônico de um conjunto  $X$  é NP-difícil, mesmo se  $X$  tem apenas dois elementos e o grafo seja bipartido.

O teorema a seguir prova que decidir se um conjunto  $S$  de vértices é um conjunto monofônico é NP-Completo, mesmo se o grafo é bipartido e  $S$  tem no máximo 2 elementos. Como uma consequência da prova, o teorema também implica que decidir se  $in(G) \leq 2$  é NP-Completo mesmo em grafos bipartidos.

**Teorema 4.2.** *Dado um grafo bipartido conexo  $G$  e um conjunto  $S$  com no máximo 2 vértices de  $G$ , os seguintes problemas são NP-Completo:*

- *decidir se  $S$  é um conjunto monofônico;*
- *decidir se  $in(G) \leq 2$ .*

*Demonstração.* Um certificado para o primeiro problema pertencer a NP é um conjunto de no máximo  $|V(G)| - |S|$  caminhos induzidos, cada um começando e terminando em vértices distintos de  $S$ , tal que cada vértice de  $V(G) \setminus S$  aparece em pelo menos um desses caminhos. Um certificado para o segundo problema pertencer a NP é um conjunto  $S$  com no máximo 2 vértices e um conjunto de no máximo  $|V(G)| - |S|$  caminhos induzidos entre dois vértices de  $S$ , tal que cada vértice de  $V(G) \setminus S$  pertence a pelo menos um desses caminhos.

Primeiro provamos a NP-Completo do primeiro problema. Descrevemos adiante uma redução do problema de decisão dado no Corolário 4.1 ao problema de decisão em questão. Seja  $H$  um grafo bipartido com bipartição  $(A, B)$  e seja  $x, y, z$  três vértices distintos de  $H$ . Caso  $x$  seja vizinho de  $z$ , subdivida a aresta  $xz$  em três arestas (para continuar bipartido e não ter a possibilidade de possuir ciclo ímpar). Analogamente, subdivida a aresta  $yz$  em três arestas, caso  $y$  e  $z$  sejam vizinhos. Sem perda de generalidade, suponha que  $z \in B$ . Defina o grafo bipartido  $G$  adicionando, a  $H$ , 10 novos vértices  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) tais que  $a_1$  e  $a_2$  são adjacentes a todos os vértices em  $B \setminus \{z\}$ , e  $b_1$  e  $b_2$  são adjacentes a todos os vértices em  $A$ . Também inclua as arestas  $c_i d_i, d_i e_i, e_i b_i, b_i a_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ). Finalmente, se  $x \in A$ , inclua a aresta  $x d_1$ ; caso contrário, inclua a aresta  $x e_1$ . Analogamente, se  $y \in A$ , inclua a aresta  $y d_2$ ; caso contrário, inclua a aresta  $y e_2$ . Veja a Figura 13. Claramente,  $G$  é bipartido com bipartição  $(A \cup \{a_i, c_i, e_i : i \in \{1, 2\}\}, B \cup \{b_i, d_i : i \in \{1, 2\}\})$ . Observe que todo conjunto de fecho contém  $S = \{c_1, c_2\}$ , pois ambos vértices  $c_1$  e  $c_2$  possuem grau um.

Veja que  $x, y \in I(\{c_1, c_2\})$ , uma vez que temos os caminhos induzidos  $c_1 d_1 x b_2 e_2 d_2 c_2$  e  $c_1 d_1 e_1 b_1 y d_2 c_2$ . Note que  $A \subseteq I(\{c_1, c_2\})$ , uma vez que, para cada vértice  $v \in A \setminus \{x, y\}$ , tem um caminho induzido  $c_1 d_1 e_1 b_1 v b_2 e_2 d_2 c_2$ . Também note que  $B \setminus \{z\} \subseteq I(\{c_1, c_2\})$ , pois para cada vértice  $v \in B \setminus \{z\}$ , tem um caminho induzido  $c_1 d_1 e_1 b_1 a_1 v a_2 b_2 e_2 d_2 c_2$ . Assim  $I(\{c_1, c_2\}) \supseteq V(G) \setminus \{z\}$ .

Temos que mostrar que  $z \in I(\{x, y\})$  em  $H$  se e somente se  $S$  é um conjunto monofônico de  $G$ . Se  $x d_1$  é uma aresta seja  $h_1 = d_1$ , caso contrário  $h_1 = e_1$ . Se  $y d_2$  é uma aresta seja  $h_2 = d_2$ , caso contrário  $h_2 = e_2$ .

Assuma que  $z \in I(\{x, y\})$  em  $H$ . Uma vez que cada caminho induzido de  $H$  é também caminho induzido de  $G$ , então  $z \in I(\{x, y\})$  em  $G$ . Isso implica a

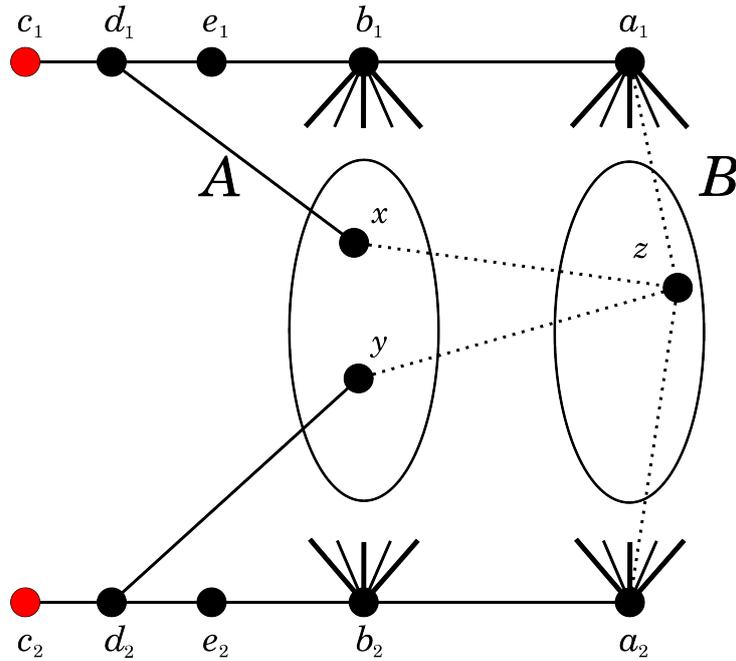


Figura 13 – Redução para o Teorema 4.2

existência de um caminho induzido  $c_1 \cdots h_1 x \cdots z \cdots y h_2 \cdots c_2$ . Então  $z \in I(\{c_1, c_2\})$  e, conseqüentemente,  $I(\{c_1, c_2\}) = V(G)$ .

Agora assumamos que  $I(\{c_1, c_2\}) = V(G)$ . Isso implica que  $z \in I(\{c_1, c_2\})$  e existe um caminho induzido  $P$  de  $c_1$  até  $c_2$  em que  $z$  é um vértice interno de  $P$ . Afirma-mos que  $P$  é do tipo  $c_1 \cdots h_1 x \cdots z \cdots y h_2 \cdots c_2$  e, conseqüentemente,  $P$  contém um caminho induzido de  $x$  até  $y$  no qual  $z$  é um vértice interno.

Note que não existe um caminho induzido de  $c_1$  para  $c_2$  no qual  $z$  e  $b_1$  sejam vértices internos, uma vez que cada caminho induzido contendo  $z$  deve ter dois vizinhos de  $z$ , que estão em  $A$  e ambos são adjacentes a  $b_1$ . Analogamente, o mesmo ocorre para  $b_2$ . Também veja que não existe caminho induzido no qual  $z$  e  $a_1$  sejam vértices internos, uma vez que cada caminho induzido contendo  $z$  e não contendo  $b_1$  ou  $b_2$  deve conter dois vértices de  $B$  (lembrando que  $xz$  e  $yz$  não são arestas), que são adjacentes a  $a_1$ . Analogamente, o mesmo ocorre para  $a_2$ .

Portanto, a única possibilidade é que  $P$  seja do tipo  $c_1 \cdots h_1 x \cdots z \cdots y h_2 \cdots c_2$ . Então temos um caminho induzido entre  $x$  e  $y$  no qual  $z$  é vértice interno em  $H$  e  $z \in I(\{x, y\})$  em  $H$ .

Finalmente, para provar que o segundo problema é também NP-Completo, observe que  $S = \{c_1, c_2\}$  contém os únicos dois vértices de grau um em  $G$ . Isso implica que cada conjunto monofônico de  $G$  deve conter  $S$ . Portanto,  $in(G) = 2$  se e somente se  $S$  é conjunto monofônico.  $\square$

## 5 Tempo de percolação

Neste capítulo mostramos que o número mínimo de vértices em um grafo com tempo de percolação  $T$ , para  $T \geq 2$ , é  $T + 3$  para as convexidades monofônica, geodésica,  $P_3$  e  $P_3^*$ . Além disso, existe um grafo bipartido planar com tempo de percolação  $T$  e  $T + 3$  vértices para as convexidades monofônica, geodésica,  $P_3^*$  e  $P_3$ . Mostramos também que é NP-Completo decidir se o tempo de percolação na convexidade monofônica e no máximo 1, mesmo para grafos bipartidos.

### 5.1 Tempo de percolação monofônico, geodésico, $P_3^*$ e $P_3$

O *fecho convexo* (em inglês, *convex hull*) de  $S$ , denotado por  $H(S)$ , é o menor conjunto convexo que contém  $S$ . O fecho convexo  $H(S)$  pode ser obtido através de sucessivos passos de infecção a partir de  $S$ , até um passo  $j$  de infecção em que seja obtido um conjunto convexo:  $I^0(S) \subset I^1(S) \subset I^2(S) \subset \dots \subset I^{j-1}(S) \subset I^j(S) = I^{j+1}(S) = H(S)$ . Ou seja, partindo do conjunto  $S$  iremos infectando o grafo passo a passo até obtermos um conjunto que não infecta mais nenhum outro vértice e esse conjunto é o fecho convexo de  $S$ . Caso  $H(S) = V(G)$ , ou seja, o conjunto  $S$  infecta todos os vértices do grafo em um número finito de passos de infecção, dizemos que  $S$  é um *conjunto de fecho* (em inglês, *hull set*). Seja  $t(S)$  o menor  $k$  tal que  $I^k(S) = I^{k+1}(S)$ . O *tempo de percolação*  $t(G)$  é o maior  $t(S)$ , onde  $S$  é um conjunto de fecho de  $G$ . Relacionado a convexidade geodésica, existe o *número de iteração geodésico de um grafo* (CHAE; PALMER; SIU, 2002; HARARY; NIEMINEN, 1981) que é similar a definição do tempo de percolação, onde  $S$  é um conjunto qualquer pertencente aos vértices de  $G$  não sendo necessariamente um conjunto de fecho. Recentemente, foi provado em (BENEVIDES et al., 2013a) que decidir se o tempo de percolação geodésico é 2 é NP-Completo, mas é decidível em tempo polinomial para tempo 1.

Em relação ao tempo de percolação para a convexidade  $P_3$ , foi provado que é decidível em tempo polinomial em grades (BENEVIDES; PRZYKUCKI, 2013b; BENEVIDES; PRZYKUCKI, 2013a) e em grafos cordais (BENEVIDES et al., 2013b), é decidível em tempo polinomial se é no máximo 2 (BENEVIDES et al., 2013b), mas é NP-Completo decidir se é no máximo 4 (BENEVIDES et al., 2013b). A questão sobre o tempo de percolação no máximo 3 para a convexidade  $P_3$  está ainda em aberto.

Uma questão sobre o tempo de percolação monofônico é se, para cada inteiro  $T > 0$ , existe um grafo  $G$  com  $t(G) \geq T$ . Observe que o grafo da Figura 14 tem



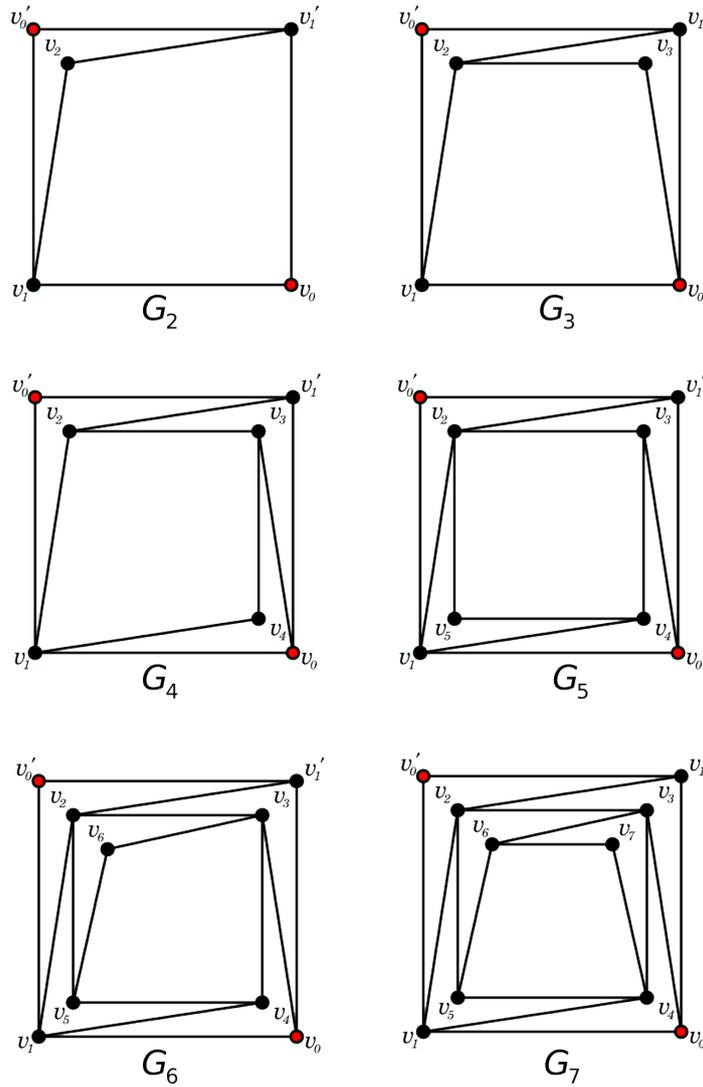


Figura 15 – Construindo  $G_T$

números pares e números ímpares são as partes da bipartição). Considere agora um grafo  $G$  com tempo de percolação monofônico  $T \geq 2$ . Veja que  $|V(G)| \geq T + 2$ , uma vez que é necessário pelo menos dois vértices de tempo 0 e pelo menos um vértice de cada tempo  $1, \dots, T$ . Suponha que  $|V(G)| = T + 2$ . Logo, existem exatamente dois vértices de tempo 0 e um vértice de cada tempo  $1, \dots, T$ . Note que, o vértice de tempo 1 deve ser adjacente aos vértices de tempo 0 e o vértice de tempo 2 não é adjacente a ambos os vértices de tempo 0 (caso contrário, seu tempo seria um). Em seguida o vértice de tempo 2 deve ser adjacente ao vértice de tempo 1. Veja que, nesta configuração, não temos caminho induzido entre o vértice de tempo 1 e um vértice de tempo 0 passando pelo vértice de tempo 2, uma contradição. Assim, a família de grafos  $\mathcal{G}$  é a menor com esta propriedade.  $\square$

Em (ARAÚJO; SAMPAIO; SZWARCFITER, 2013), foi introduzida a convexi-

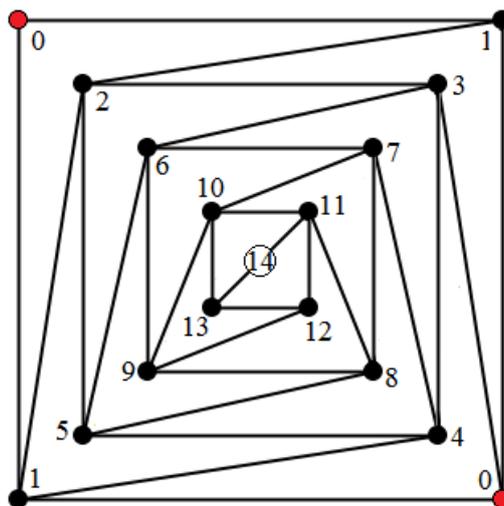


Figura 16 – Um grafo com tempo de percolação monofônico  $t(G) = 14$  e  $t(G) + 3$  vértices

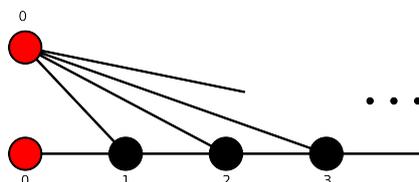


Figura 17 – Grafo com tempo de percolação  $T$  e  $T + 2$  vértices

dade  $P_3^*$ , definida por caminhos induzidos de ordem três. Foi provada a relação entre a convexidade  $P_3^*$  e a convexidade geodésica, o que leva a vários resultados de complexidade da convexidade  $P_3$  para a convexidade geodésica. Uma vez que todos os caminhos induzidos na construção da proposição acima tem tamanho dois (e, conseqüentemente, são também caminhos mínimos), esta proposição implica no Corolário a seguir.

**Corolário 5.2.** *Seja  $T \geq 2$  um inteiro. O número mínimo de vértices em um grafo com tempo de percolação  $T$  é  $T + 3$  para as convexidades monofônica, geodésica e  $P_3^*$ . Além disso, existe um grafo bipartido planar com tempo de percolação  $T$  e  $T + 3$  vértices para as convexidades monofônica, geodésica,  $P_3^*$  e  $P_3$ .*

Para a convexidade  $P_3$ , é possível obter um grafo com tempo de percolação  $T$  e com  $T + 2$  vértices. Veja a Figura 17.

## 5.2 Resultado de NP-Completo

Relacionado a resultados de complexidade, obtemos o seguinte corolário da prova do Teorema 4.2.

**Corolário 5.3.** *Dado um grafo bipartido  $G$ , é NP-Completo decidir se o tempo de percolação para a convexidade monofônica é no máximo 1.*

*Demonstração.* Seguindo a prova do Teorema 4.2 e ignorando o caso trivial quando  $z$  tem grau um em  $H$ , note que o grafo  $G$  construído tem apenas dois vértices de grau um, isto é,  $c_1$  e  $c_2$ . Lembrando que, se existe um caminho induzido em  $H$  de  $x$  para  $y$  passando por  $z$ , então  $I(\{c_1, c_2\}) = V(G)$ . Caso contrário,  $I(\{c_1, c_2\}) = V(G) \setminus \{z\}$ . Claramente,  $\{c_1, c_2\}$  é um conjunto de fecho contido em cada conjunto de fecho. Portanto o tempo de percolação monofônico é um se e somente se existe um caminho induzido em  $H$  de  $x$  para  $y$  passando por  $z$ . Uma vez que esse problema é NP-Completo em grafos bipartidos, a prova está concluída.  $\square$

## 6 Número de $m$ -convexidade

Neste capítulo, mostramos que o número de  $m$ -convexidade é tão inaproximável quanto o tamanho da Clique Máxima e apresentamos um algoritmo de tempo polinomial para calcular o número de  $m$ -convexidade em classes hereditárias de grafos tais que a computação da clique máxima é polinomial (como os grafos perfeitos ou os grafos planares).

### 6.1 Redução contínua entre problemas de otimização

No que se segue, usamos as definições de (AUSIELLO et al., 1999). Dado um problema de otimização  $P$ , seja  $opt_P(I)$  denotando o valor da solução ótima para alguma instância  $I$  de  $P$  e, para uma solução  $S$  de  $I$ , seja  $val_P(I, S)$  denotando o valor associado. Dada uma instância  $I$  de  $P$  e uma solução  $S$  de  $I$ , a *relação de desempenho*  $\mathcal{R}_P(I, S)$  é definido por

$$\mathcal{R}_P(I, S) = \max \left\{ \frac{opt_P(I)}{val_P(I, S)}, \frac{val_P(I, S)}{opt_P(I)} \right\}.$$

Dada uma constante  $r \geq 1$ , um *algoritmo  $r$ -aproximativo* para  $P$  é um algoritmo que, aplicado para qualquer instância  $I$  de  $P$ , executa em tempo polinomial no tamanho de  $I$  e produz uma solução  $S$  tal que  $\mathcal{R}(I, S) \leq r$ . Se tal algoritmo existe,  $P$  pertence à classe de problemas APX.

Uma redução de  $P_1$  para  $P_2$  consiste de um par  $(f, g)$  de funções computáveis em tempo polinomial tais que, para cada instância  $I$  de  $P_1$ :

- (a)  $f(I)$  é uma instância de  $P_2$ , e
- (b)  $g(I, S)$  é uma solução viável de  $I$ , para cada solução viável  $S$  de  $f(I)$ .

Dizemos que uma redução  $(f, g)$  de um problema  $P_1$  para um problema  $P_2$  é uma *redução contínua* com fator  $\gamma \geq 1$  de  $P_1$  para  $P_2$  se  $\mathcal{R}_{P_1}(I, g(I, S)) \leq \gamma \cdot \mathcal{R}_{P_2}(f(I), S)$  para cada instância  $I$  de  $P_1$  e para cada solução viável  $S$  para  $f(I)$ . Denotamos pela 3 tupla  $(f, g, \gamma)$  uma redução contínua.

Usaremos o resultado abaixo.

**Proposição 6.1** (AUSIELLO et al., 1999). *Seja  $P_2$  um problema de otimização que possui um algoritmo  $r$ -aproximativo polinomial. Se existe uma redução contínua  $(f, g, \gamma)$  de um problema de otimização  $P_1$  para  $P_2$ , então  $P_1$  tem um algoritmo  $\gamma r$ -aproximativo polinomial.*

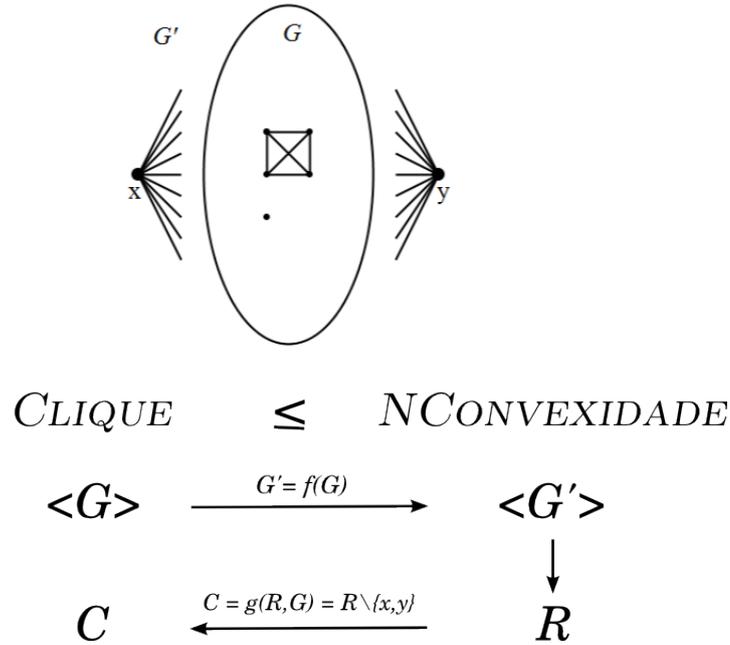


Figura 18 – Redução do problema CLIQUE para o problema NCONVEXIDADE

## 6.2 Resultado de Inaproximabilidade

O *número de convexidade* (em inglês, *convexity number*)  $cx(G)$  é o tamanho de um maior conjunto convexo distinto de  $V(G)$ , ou seja, a cardinalidade de um maior conjunto de vértices de  $G$ , que não seja o conjunto de todos os vértices de  $G$ , que não infecta nenhum outro vértice do grafo  $G$  (veja em (CHARTRAND; WALL; ZHANG, 2002)).

Seja CLIQUE o problema de determinar o tamanho da clique máxima  $\omega(G)$ : o tamanho do maior subgrafo completo de um grafo  $G$ .

Em (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010), provou-se que o número de  $m$ -convexidade é NP-Completo. Mostramos, a seguir, uma afirmação mais forte.

**Teorema 6.1.** *Para cada  $\varepsilon > 0$ , a aproximação do número de  $m$ -convexidade com fator  $O(n^{1-\varepsilon})$  é NP-difícil.*

*Demonstração.* Mostramos uma redução contínua do problema CLIQUE para o problema NCONVEXIDADE, onde NCONVEXIDADE é o problema de determinar o tamanho do maior conjunto convexo próprio, ou seja, que não é o conjunto de todos os vértices do grafo.

Seja o grafo  $G$  uma instância para o problema CLIQUE. Seja  $G' = f(G)$  o grafo tal que  $V(G') = V(G) \cup \{x, y\}$ , onde  $x$  e  $y$  são novos vértices, e  $E(G') = E(G) \cup \{vx, vy : v \in V(G)\}$  (veja a Figura 18).

Dada uma solução viável  $R$  de  $G'$  (isto é,  $R$  é um maior conjunto convexo de  $G'$  que não é  $V(G')$ ), seja  $C = g(G, R) = R \setminus \{x, y\}$  (veja a Figura 18). Note que  $R$  não tem pares de vértices não adjacentes. Caso contrário, se  $R$  tem dois vértices não adjacentes  $\{u, w\}$ , então eles infectam  $x$  e  $y$  que infectam  $V(G') \setminus \{x, y\}$ , o que induz uma clique  $C$  de  $G$ . Por outro lado, a maior clique  $C$  de  $G$  induz o maior conjunto convexo  $C \cup \{x\}$  de  $G'$  que não é  $V(G')$ . Isso implica em uma redução contínua  $(f, g, 1)$  do problema CLIQUE para o problema do maior conjunto convexo monofônico que não é o grafo todo.

Em 2006, provou-se que, para cada  $\varepsilon > 0$ , uma aproximação do número da clique máxima com fator  $O(n^{1-\varepsilon})$  é NP-difícil (ZUCKERMAN, 2007). Então, isso também é verdade para o problema NCONXIDADE.  $\square$

Note que, pela demonstração anterior, podemos concluir o mesmo resultado para o número de convexidade  $P_3^*$ .

**Corolário 6.2.** *Para cada  $\varepsilon > 0$ , a aproximação do número de convexidade  $P_3^*$  com fator  $O(n^{1-\varepsilon})$  é NP-difícil.*

### 6.3 Caracterizações e Algoritmo

Em (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010), foi obtido um algoritmo de tempo polinomial para computar o número de  $m$ -fecho de um grafo que apresentamos no Capítulo 3. Esse algoritmo é aplicado em uma decomposição baseada em cliques minimais separadoras. Usamos a ideia principal desse algoritmo para obter uma forte relação entre o número de convexidade e o tamanho da maior clique, o que leva a um algoritmo de tempo polinomial para determinar o número de  $m$ -convexidade em classes hereditárias de grafos, onde a computação do tamanho da maior clique é solucionável em tempo polinomial. Dizemos que uma classe de grafos  $C$  é *hereditária* se todo subgrafo induzido de um grafo em  $C$  também pertence a  $C$  (como, por exemplo, grafos perfeitos e grafos planares).

Nosso principal resultado sobre a computação do número de convexidade é o seguinte.

**Teorema 6.2.** *Seja  $G$  um grafo.*

- *Se  $G$  é completo, então  $cx(G) = n - 1$ .*
- *Se  $G$  não possui separador clique, então  $cx(G) = \omega(G)$ .*
- *Caso contrário, para cada clique minimal separadora  $C$  de  $G$  e cada componente  $H_{C,i}$  de  $G - C$ , seja  $k_{C,i}$  o tamanho da maior clique  $W$  de  $H_{C,i}$*

tal que cada vértice de  $W$  é adjacente a todo vértice em  $C$ . Seja  $\ell_C = \max\{1, \min_i\{|V(H_{C,i})| - k_{C,i}\}\}$ . Então o número de convexidade monofônica  $cx(G)$  é igual a  $n - \min\{\ell_C : C \text{ é clique minimal separadora}\}$ .

O Teorema 3.1 (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010) mostra que  $cx(G) = \omega(G)$  para cada átomo que não é completo.

O Lema 3.2 (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010) apresenta alguns conjuntos convexos quando o grafo não é um átomo.

Com isso, a prova do seguinte corolário é direta.

**Corolário 6.3.** *Sejam  $G = (V, E)$  um grafo,  $C$  um separador clique de  $G$  e  $V'$  o conjunto de vértices de uma componente conexa de  $G[V - C]$ . Seja  $V'' \subsetneq V'$  um subconjunto de vértices de  $V'$  que induz uma clique e tal que cada vértice de  $V''$  é adjacente a cada vértice de  $C$ . Então  $(V(G) \setminus V') \cup V''$  é um conjunto convexo próprio de  $G$ .*

*Demonstração do Teorema 6.2.* Temos que o Corolário 6.3 mostra que  $cx(G) \geq n - \min_C\{\ell_C\}$ , onde o mínimo está entre todas as cliques minimais separadoras. Afirmamos que isto é uma igualdade. Seja  $C$  uma clique minimal separadora tal que  $\ell_C$  seja mínimo. Entre todas as componentes de  $G - C$ , seja  $H_{C,i}$  uma componente tal que  $|V(H_{C,i})| - k_{C,i}$  seja mínimo. Note que, pela minimalidade de  $C$ ,  $V(H_{C,i}) \cup C$  deve induzir um átomo.

Suponha que  $cx(G) > n - \ell_C$  e seja  $S'$  um conjunto conexo com  $|S'| > n - \ell_C$  vértices. Se  $\ell_C \leq 1$ , obtemos uma contradição. Então,  $\ell_C \geq 2$ .

Seja  $W$  uma clique de  $H_{C,i}$  com  $k_{C,i}$  vértices tais que cada vértice de  $W$  é adjacente a todo vértice de  $C$  em  $G$ . Isto é,  $W$  é a maior clique com essa propriedade. Observe que  $W \neq V(H_{C,i})$ , senão  $\ell_C = 1$ .

Veja que o conjunto  $S = (V(G) \setminus V(H_{C,i})) \cup W$  é conjunto convexo com  $n - \ell_C$  vértices. Uma vez que  $|S'| > |S|$ , então  $S' \cap V(H_{C,i})$  contém um vértice  $x$  que não é adjacente a algum vértice de  $C$ , pois, caso contrário,  $S' \cap V(H_{C,i})$  seria uma clique tal que cada vértice é adjacente a todos os vértices de  $C$ , contradizendo a maximalidade de  $W$ .

Além disso, concluímos que, do tamanho de  $S'$ ,  $S'$  contém um vértice  $y \notin V(H_{C,i}) \cup C$  tal que  $C$  é um  $xy$ -separador minimal. Uma vez que  $S'$  é convexo e  $C$  é uma clique minimal  $xy$ -separadora, o que implica que  $C \subseteq S'$  (isso porque, para cada vértice  $z$  de  $C$ , existe um caminho induzido entre  $x$  e  $y$  passando por  $z$ ).

Seja  $c \in C$  um vértice que não é adjacente a  $x$ . Uma vez que  $H_{C,i} \cup C$  é um átomo e  $x, c \in S'$ , então, pelo Teorema 3.1,  $S' \supseteq V(H_{C,i})$  (lembrando que  $S'$  é convexo). Da minimalidade de  $\ell_C$ , isto também acontece para cada clique minimal

separadora  $C'$  e cada componente  $H_{C',j}$  de  $G - C'$ . Isso implica que  $S' = V(G)$ , uma contradição.  $\square$

Em (LEIMER, 1993), mostrou-se que uma árvore de decomposição em cliques minimais separadoras pode ser obtida em tempo  $O(nm)$  para todo grafo (veja também (BERRY; POGORELCNIK; SIMONET, 2010)). Seja  $f(n, m)$  uma função e considere uma classe hereditária de grafos tal que a computação do tamanho da maior clique pode ser feita em tempo  $O(f(n, m))$ , onde  $n$  e  $m$  são respectivamente o número de vértices e arestas. Seja  $G = (V, E)$  um grafo dessa classe.

Para cada clique minimal separadora  $C$  de  $G$  e cada componente  $H_{C,i}$  de  $G[V \setminus C]$ , não é difícil computar  $k_{C,i}$ : obtendo a maior clique  $W$  do grafo  $R_{C,i} = G[\cap_{c_i \in C} N(c_i) \cap V(H_{C,i})]$  (o grafo que contém cada vértice de  $H_{C,i}$  que é adjacente a todo vértice de  $C$ ). Como a classe de grafos é hereditária, a computação do tamanho da maior clique de  $R_{C,i}$  também é feita em tempo polinomial  $O(f(n, m))$ .

Temos  $O(n)$  cliques minimais separadoras  $C$ , cada uma com  $O(n)$  componentes  $H_{C,i}$  de  $G[V \setminus C]$  que podem ser obtidas em tempo  $O(n + m)$  por busca em largura. O grafo  $R_{C,i}$  pode ser obtido em tempo  $O(n + m)$  e a obtenção da clique  $W$  pode ser feita em tempo  $O(f(n, m))$ . Com isso, todos os valores  $k_{C,i}$  podem ser obtidos em tempo  $O(n^2(n + m)^2 f(n, m))$ .

Com isso, é possível determinar  $\ell_C$  para cada clique minimal separadora  $C$  em tempo polinomial. Do Teorema 6.2, obtemos o número de convexidade de  $G$  em tempo polinomial  $O(n^2(n + m)^2 f(n, m))$ .

## 7 Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, estudamos parâmetros para a convexidade monofônica. Obtemos algoritmos polinomiais e resultados de NP-Completo e inaproximabilidade.

Em 2010, provou-se que o número de  $m$ -intervalo é NP-difícil para grafos em geral (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010). Provamos que decidir se o número de  $m$ -intervalo é no máximo 2 é um problema NP-completo mesmo em grafos bipartidos. Mostramos também que decidir se o tempo de  $m$ -percolação é no máximo 1 é um problema NP-completo mesmo em grafos bipartidos. Em (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2010), mostrou-se que o número de  $m$ -convexidade é NP-difícil para grafos em geral. Provamos que o número de  $m$ -convexidade é tão difícil de aproximar quanto o problema da Clique Máxima, que é, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $O(n^{1-\varepsilon})$ -inaproximável em tempo polinomial, a menos que  $P=NP$ . Finalmente, apresentamos um algoritmo de tempo polinomial para determinar o número  $m$ -convexidade em classes hereditárias de grafos onde a computação do tamanho da clique máxima é em tempo polinomial (como grafos perfeitos e grafos planares).

Para trabalhos futuros, uma ideia é melhorar o cálculo da complexidade de tempo desse algoritmo (que se sabe polinomial para estas classes) e a implementação computacional do mesmo (a ser aplicada em grafos perfeitos, por exemplo). Outra sugestão para trabalhos futuros é estudar os parâmetros mencionados nesta dissertação para as convexidades  $m^3$  (DRAGAN; NICOLAI; BRANDSTÄDT, 1999) e  $TP$  (CHANGAT; MATHEW, 1999), o que parece ser um trabalho bastante promissor.

Abaixo mostramos uma tabela com os resultados obtidos nesta dissertação.

Parâmetro	Complexidade	Classe de grafo
Número de intervalo	NP-difícil para $k \leq 2$	Bipartidos
Tempo de percolação	NP-difícil para $k \leq 1$	Bipartidos
Número de Convexidade	$O(n^{1-\varepsilon})$ -inaproximável	Gerais
Número de Convexidade	Polinomial	Hereditárias

Tabela 1 – Resultados neste trabalho para a convexidade monofônica

# Referências

- ARAÚJO, R.; SAMPAIO, R.; SZWARCFITER, J. The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 44, p. 109 – 114, 2013.
- AUSIELLO, G. et al. *Complexity and Approximation: Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties*. 1st. ed. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- BARBOSA, R. M. et al. On the Carathéodory number for the convexity of paths of order three. *SIAM J. Discrete Math.*, v. 26, n. 3, p. 929–939, 2012.
- BENEVIDES, F. S. et al. The geodesic percolation time, manuscript. 2013a.
- BENEVIDES, F. S. et al. The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: algorithmic aspects. European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EUROCOMB), Piza, Italy. *crm series*. v. 16, p. 135–139, 2013b.
- BENEVIDES, F. S.; PRZYKUCKI, M. Maximum percolation time in two-dimensional bootstrap percolation, submitted for publication. 2013a.
- BENEVIDES, F. S.; PRZYKUCKI, M. On slowly percolating sets of minimal size in bootstrap percolation. *Electr. J. Comb.*, v. 20, n. 2, p. P46, 2013b.
- BERRY, A. et al. Maximum cardinality search for computing minimal triangulations of graphs. *Algorithmica*, Springer-Verlag, v. 39, n. 4, p. 287–298, 2004.
- BERRY, A.; KRUEGER, R.; SIMONET, G. Maximal label search algorithms to compute perfect and minimal elimination orderings. *SIAM J. Discrete Math.*, p. 428–446, 2009.
- BERRY, A.; POGORELCNIK, R. A simple algorithm to generate the minimal separators and the maximal cliques of a chordal graph. *Information Processing Letters*, v. 111, n. 11, p. 508 – 511, 2011.
- BERRY, A.; POGORELCNIK, R.; SIMONET, G. An introduction to clique minimal separator decomposition. *Algorithms*, v. 3, n. 2, p. 197–215, 2010.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory*. New York: Springer, 2008. (Graduate Texts in Mathematics, v. 244).
- CARATHÉODORY, C. Über den variabilitätsbereich der fourier’schen konstanten von positiven harmonischen funktionen. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, v. 32, p. 193–217, 1911.
- CHAE, G. byung; PALMER, E. M.; SIU, W. cheong. Geodetic number of random graphs of diameter 2. *The Australasian Journal of Combinatorics*, v. 26, p. 11–20, 2002.
- CHANGAT, M.; MATHEW, J. On triangle path convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, v. 206, n. 1–3, p. 91 – 95, 1999.

- CHANGAT, M.; MULDER, H. M.; SIERKSMA, G. Convexities related to path properties on graphs. *Discrete Mathematics*, v. 290, n. 2–3, p. 117 – 131, 2005.
- CHARTRAND, G.; WALL, C. E.; ZHANG, P. The convexity number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, p. 209–217, 2002.
- COSTA, E. R.; DOURADO, M. C.; SAMPAIO, R. M. Inapproximability results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, v. 197, p. 70 – 74, 2015. Distance Geometry and Applications.
- CÁCERES, J. et al. Rebuilding convex sets in graphs. *Discrete Mathematics*, v. 297, n. 1–3, p. 26 – 37, 2005.
- DIRAC, G. A. On rigid circuit graphs. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, v. 25, p. 71 – 76, 1961.
- DOURADO, M. C. et al. On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 18, p. 5668 – 5674, 2009.
- DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. Algorithmic aspects of monophonic convexity. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 30, p. 177 – 182, 2008. The IV Latin-American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium.
- DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, n. 12, p. 1268 – 1274, 2010. Traces from LAGOS'07 IV Latin American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium Puerto Varas - 2007.
- DOURADO, M. C. et al. Polynomial-time algorithm for the Radon number of grids in the geodetic convexity. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 44, p. 371–376, 2013.
- DRAGAN, F. F.; NICOLAI, F.; BRANDSTÄDT, A. Convexity and hhd-free graphs. *SIAM J. Discrete Math*, v. 12, n. 1, p. 119–135, 1999.
- DUCHET, P. Convexity in combinatorial structures. *Circolo Matematico di Palermo*, p. [261]–293, 1987.
- DUCHET, P. Convex sets in graphs, ii. minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 44, n. 3, p. 307 – 316, 1988.
- ERDŐS, P. et al. Some remarks on simple tournaments. *Algebra Universalis.*, v. 2, n. 3, p. 238–245, 1972.
- EVERETT, M. G.; SEIDMAN, S. B. The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 57, n. 3, p. 217 – 223, 1985.
- FARBER, M.; JAMISON, R. E. Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM J. on Algebraic Discrete Methods*, v. 7, p. 433–444, 1986.
- HARARY, F.; NIEMINEN, J. Convexity in graphs. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 16, n. 2, p. 185–190, 1981.

- HEGGERNES, P.; TELLE, J. A.; VILLANGER, Y. Computing minimal triangulations in time  $o(n^\alpha \log n) = o(n^{2.376})$ . *SIAM J. Discrete Math.*, v. 19, n. 4, p. 900–913, 2005.
- HELLY, E. Über mengen konvexer körper mit gemeinschaftlichen punkte. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, v. 32, p. 175–176, 1923.
- HERNANDO, C. et al. On geodesic and monophonic convexity. 2004. 20th European Workshop on Computational Geometry, Sevilla, Spain.
- HÖGAASEN, J. F. Ordres partiels et permutoèdre. *Mathématiques et Sciences Humaines*, v. 28, p. 27–38, 1969.
- JAMISON, R. A perspective on abstract convexity: Classifying alignments by varieties. *Convexity and Related Combinatorial Geometry, Proc. 2nd Univ. of Oklahoma Conf. (D.C. Ray, M. Breens eds)*, p. 113–150, 1982.
- JAMISON, R. E.; NOWAKOWSKI, R. A Helly theorem for convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, v. 51, n. 1, p. 35 – 39, 1984.
- JOHN, J.; PAUL, P. S. A. On the edge monophonic number of a graph. *Filomat*, v. 26, n. 9–10, p. 11081 – 1089, 2012.
- KRATSCHE, D.; SPINRAD, J. Minimal fill in time. *Discrete Mathematics*, v. 306, n. 3, p. 366 – 371, 2006. Minimal Separation and Minimal Triangulation.
- LEIMER, H.-G. Optimal decomposition by clique separators. *Discrete Mathematics*, v. 113, n. 1–3, p. 99 – 123, 1993.
- LEVI, F. W. On Helly’s theorem and the axioms of convexity. *J. Indian Math. Soc.*, v. 15, p. 65 – 76, 1951.
- MEZZINI, M. On the complexity of finding chordless paths in bipartite graphs and some interval operators in graphs and hypergraphs. *Theor. Comput. Sci.*, v. 411, n. 7-9, p. 1212–1220, 2010.
- PALUGA, E. M.; CANOY, S. R.; JR. Monophonic numbers of the join and composition of connected graphs. *Discrete Mathematics*, v. 307, n. 9–10, p. 1146 – 1154, 2007.
- PUERTAS, M. et al. On monophonic sets in graphs. 2005. 20th British Combinatorial Conference, Durham, England.
- RADON, J. Mengen konvexer körper, die einen gemeinsamen punkt enthalten. *Mathematische Annalen*, v. 83, p. 113–115, 1921.
- ROSE, D. J. Triangulated graphs and the elimination process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 32, n. 3, p. 597 – 609, 1970.
- ROSE, D. J.; TARJAN, R. E. Algorithmic aspects of vertex elimination. In: *Proceedings of Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. New York, NY, USA: ACM, 1975. (STOC ’75), p. 245–254.

- SIERKSMA, G. *Exchange properties of convexity spaces*, *Convexity and Graph Theory*. New York: Elsevier Science, 1984. (North-Holland).
- TARJAN, R. E. Decomposition by clique separators. *Discrete Mathematics*, v. 55, n. 2, p. 221 – 232, 1985.
- VEL, L. van de. *Theory of Convex Structures*. Amsterdam: Elsevier Science, 1993. (North-Holland Mathematical Library).
- YANNAKAKIS, M. Computing the minimum fill-in is np-complete. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, v. 2, n. 1, p. 77–79, 1981.
- ZUCKERMAN, D. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. *Theory of Computing*, Theory of Computing, v. 3, n. 6, p. 103–128, 2007.