UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EMANUEL OLIVEIRA DE ARAÚJO

CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO E ALGUMAS APLICAÇÕES

FORTALEZA

2016

EMANUEL OLIVEIRA DE ARAÚJO

CONTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

A688c Araújo, Emanuel Oliveira de
Construções com régua e compasso e algumas aplicações / Emanuel Oliveira de Araújo. - 2016.
50 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Polígonos. 3. Geometria. 4. Problemas algébricos. I. Título.

CDD 510

EMANUEL OLIVEIRA DE ARAÚJO

CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 29 / 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

“A Deus, minha mãe e meus irmãos, pelo apoio, incentivo e paciência pelas angústias, temores e desafios encontrados durante a caminhada em busca desta conquista.”

AGRADECIMENTOS

Durante todo o curso, muitos acontecimentos movimentaram minha vida. E várias pessoas estiveram ao meu lado. E citar nomes não seria uma maneira justa de direcionar esses agradecimentos. Claro que algumas pessoas se destacam pelos papéis que desempenharam nesta jornada. E antes de chegar a elas, devo agradecer a Deus pelo dom da vida e por me conceder saúde, sabedoria e fortaleza para que eu não deixasse de concluir esta pós-graduação.

Agradeço a minha mãe por ter se dedicado ao máximo para garantir uma educação de qualidade. Foram muitas as dificuldades até chegar este momento. E ela sempre se preocupou em garantir que eu obtivesse conhecimento e educação para concretizar meus objetivos. Aos meus irmãos que me apoiaram e incentivaram sempre durante esta jornada. Sempre estiveram ao meu lado compartilhando as alegrias e dificuldades.

Aos meus familiares e amigos que também me apoiaram em momentos difíceis. Familiares estes que me ajudaram sempre que puderam e da melhor maneira possível. Mesmo os mais distantes, sempre tiveram a preocupação em acompanhar o meu desenvolvimento. Meus amigos também estiveram presentes. Mesmo que de maneira virtual, sempre se importaram com o meu sucesso no curso.

Não posso deixar de agradecer também os meus colegas de trabalhos. Aso que me acompanham diariamente, e aos que vejo em outras ocasiões. Os professores das escolas com qual tive o privilégio de trabalhar e criar vínculos de amizade que ainda hoje compartilho.

Enfim, o conjunto de escolhas e oportunidades que tive na vida me trouxeram ao dia de hoje. E até chegar este momento, muitas pessoas entraram e saíram da minha vida. Umas deixam muitas saudades. Agradeço a todos que participaram de alguma forma na minha vida.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."

RESUMO

Este trabalho apresenta construções básicas realizadas com régua e compasso que foram desenvolvidas por civilizações antigas com o intuito de realizar tarefas do cotidiano e construir monumentos. Para isso, os procedimentos utilizados eram baseados em retas e circunferências com a intenção de encontrar a medida adequada para estas realizações. Mostraremos neste trabalho as principais construções realizadas com esses instrumentos, como alguns polígonos e algumas medidas algébricas. Analisaremos essas construções de forma simples e algébrica para justificar a veracidade de suas conclusões. Entenderemos também o conceito de números construtíveis e suas características. Aprenderemos a identificar se um número pode ou não ser construído com a régua e o compasso. Com isso, poderemos verificar com melhor clareza os problemas clássicos da geometria e o real motivo de não haver soluções de construção para estes problemas. A finalidade deste trabalho é recordar um pouco do desenvolvimento da Geometria e mostrar ao aluno que algumas fórmulas e equações podem ser desenhadas para que sua solução seja revelada.

Palavras-chave: Régua. Compasso. Construção. Álgebra. Equação.

ABSTRACT

This paper presents basic constructions made with ruler and compass were developed by ancient civilizations in order to perform daily tasks and build monuments. For this, the procedures used were based on lines and circles with the intention of finding the appropriate measure for these achievements. We show in this paper the main buildings made with these instruments, such as polygons and some algebraic measures. We analyze these buildings simply and algebraic way to justify the veracity of its findings. Also we will understand the concept of constructible numbers and characteristics. We learn to identify a number may or may not be constructed with ruler and compass. With this, we can see with clarity the classic problems of geometry and the real reason there is no building solutions to these problems. The purpose of this work is to recall some of the development of geometry and show the student that some formulas and equations can be designed so that your solution is revealed.

Keywords: Ruler. Compass. Construction. Álgebra. Equation.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A Grécia antiga foi uma das primeiras civilizações que contribuíram para o desenvolvimento matemático. Antes mesmo da era cristã, os gregos já desenvolviam técnicas bem elaboradas para resolver problemas matemáticos de acordo com suas necessidades.

A Geometria, que significa “medida da terra”, foi uma das principais contribuições gregas para o avanço da matemática. Naquela época o desenho geométrico era usado na resolução de problemas do dia-a-dia, de acordo com a necessidade do ser humano, a cada situação diferente, uma resolução diferente e a cada resolução era criada uma regra para assim, sempre resolvê-la. Dessa forma, todo o conjunto de conhecimento de construções gráficas era praticamente uma coleção de problemas e suas respectivas soluções.

Os primeiros desenhos eram feitos a mão. Sem nenhuma precisão exata. Apenas com a intensão de visualizar melhor o problema, mas sem exatidão. No início do século V a.C. surgiram as primeiras construções com régua e compasso. Tais construções tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega e foi com o matemático grego Euclides que a geometria se desenvolveu, fazendo da cidade egípcia de Alexandria o centro mundial da Geometria por volta de 300 a.C..

A partir daí, as técnicas de desenho geométrico e os conceitos abordados na Geometria foram evoluindo com o tempo e a influência de outros pensadores gregos, como Talles e Pitágoras. Essas técnicas evoluíram com o intuito de conciliar o conhecimento teórico e prático da Matemática.

A medida que os estudos evoluíam, novos instrumentos foram inseridos no estudo dos desenhos geométricos tais como uma régua graduada, jogo de esquadros, transferidores entre outros. E as construções mais primitivas com régua, sem graduação, e compasso foram sendo substituídas por outras mais práticas e simples de fazer com os novos instrumentos. Nas escolas, essas construções estão sendo esquecida aos poucos, transformando o ensino de figuras geométricas mais teórico do que prático.

O ensino teórico da Matemática, sem uma aplicação prática, dificulta a aprendizagem e o prazer de estudar do aluno. Sabendo utilizar a teoria e a prática na medida certa, é possível garantir um grande avanço no processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para a construção do conhecimento de forma mais concreta.

A proposta deste trabalho é mostrar as principais construções com régua e compasso de forma clara e didática para que possa ser utilizada em sala de aula como uma ferramenta para construção do conhecimento do aluno. Refletir um pouco sobre como os gregos conseguiram fazer belíssimas construções usando esses dois instrumentos. Na atualidade podem ser usados programas em computadores que simulem o uso da régua e do compasso, como o *Geogebra*.

Inicialmente, mostraremos as construções mais básicas que podem ser aplicadas nas séries de ensino fundamental. A partir dessas construções, poderão ser fundamentadas outros conceitos que poderão ser utilizadas em capítulos posteriores, tais como a realização das operações básicas como soma e subtração. Em seguida podem ser introduzidos o cálculo de raízes quadradas, paralelismo e perpendicularísmo entre retas.

Em seguida, usaremos os conceitos assimilados para construções mais elaboradas. Trata-se de construções que envolvem figuras planas. Trabalharemos também o conceito de polígonos inscritos para facilitar algumas construções. Veremos que nem todo polígono regular pode ser construído com o uso de apenas régua e compasso. E que cada polígono pode ter mais de uma maneira de ser construído.

Mostraremos algumas aplicações dessas técnicas de construção na resolução de problemas algébricos, cálculos de médias, resolução de equações. Mostrando de maneira geométrica, formas de encontrar soluções algébricas. Faremos uma breve abordagem sobre o grupo de números construtíveis e suas características. Veremos que esse tipo de número está presente em nosso cotidiano. Destacaremos também os problemas clássicos desse ramo da geometria. E o que realmente dificulta na solução desses problemas.

A partir desse trabalho, quero mostrar a importância da utilização da régua e do compasso no processo de ensino. Com essa temática em reflexão, espera-se que esse trabalho possa ser utilizado como um material de apoio aos professores de educação básica na inclusão do desenho geométrico na grade de ensino das escolas. Levar a sala de aula um conhecimento prático explorado pelos gregos que deu origem a matemática geométrica que conhecemos hoje.

2 CONSTRUÇÕES BÁSICAS

Os primeiros procedimentos utilizando régua e compasso surgiram antes mesmo da era cristã na Grécia Antiga. Através desses instrumentos era possível realizar operações matemáticas que levassem a exatidão de cálculos aritméticos e geométricos. São operações simples e com fácil compreensão para os leitores interessados em aprender.

Atualmente, muitos procedimentos simples como as operações básicas são realizados sem a utilização da régua e do compasso. Nas escolas, por exemplo, em busca da praticidade da aprendizagem dos alunos, esses instrumentos foram deixados de lado e outros métodos surgiram para substituí-los.

Para realizar as operações básicas de somar, subtrair, multiplicar e dividir, com o uso de régua e compasso, tempos que adotar segmentos de retas limitados por aberturas do compasso de diferentes tamanhos. Como um segmento é mensurável, pode ser representado por algum número real.

2.1 Realizando Operações Básicas

2.1.1 Retas Paralelas e Perpendiculares

O conceito de paralelismo e perpendicularismo são tão antigos como as primeiras construções geométricas. Sabemos que duas retas são ditas paralelas quando não possuem ponto em comum e estão no mesmo plano. E duas retas são perpendiculares quando as mesmas se cruzam em um único ponto formando um ângulo reto. Atualmente, retas paralelas e perpendiculares podem ser facilmente construídas usando um jogo de esquadros. Mas existem mais de uma maneira de construir retas paralelas e retas perpendiculares usando apenas régua e compasso.

Mostraremos a seguir uma maneira simples de construir retas paralelas a uma reta já existente. Façamos os seguintes procedimentos:

I. Tracemos uma circunferência com o centro pertencente a reta.
II. Tracemos agora duas circunferências, com raios iguais e menor que a primeira circunferência, com centros nos pontos de interseção.

III. Teremos quatro pontos de interseção da primeira circunferência com as outras duas construídas. Ao traçarmos duas retas passando por dois pontos, sem cruzarmos com a reta principal, teremos duas retas paralelas.

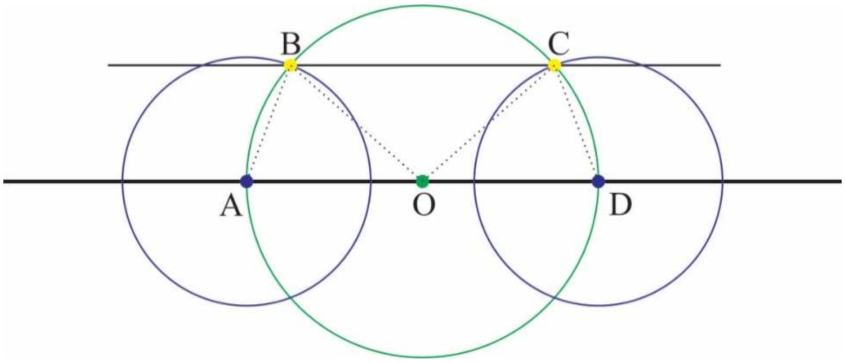

Figura 2.1: Retas paralelas

Como podemos observar na figura, os pontos A, B, C e D formam um trapézio isósceles, pois os raios AB e DC são iguais e os pontos B e C estão a mesma distância da reta principal. Isto pode ser garantido pela congruência dos triângulos ABO e DCO. Como as bases de um trapézio são paralelas, logo as retas que os contem também são paralelas.

Veremos a seguir, como construir uma reta perpendicular a uma reta já existente.

I. Escolhendo um ponto P fora da reta, tracemos uma circunferência com centro neste ponto e com o raio maior que a distância de P a reta.

II. Assim, encontraremos A e B, os pontos de interseção da circunferência com a reta. Centrando o compasso em cada um deles e mantendo o raio, tracemos outras duas circunferências.

III. Acharemos um ponto Q, interseção das duas ultimas circunferências. Traçando a reta PQ teremos uma reta perpendicular a reta principal.

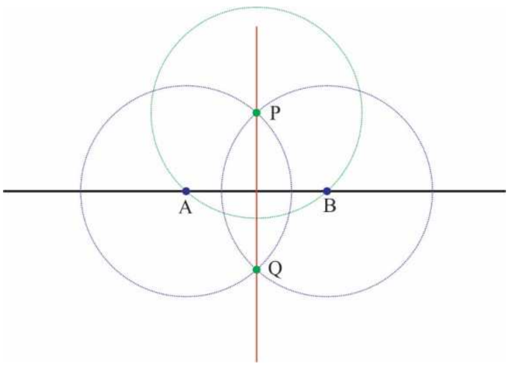

Figura 2.2: Retas perpendiculares

Como PA = PB = QA = QB, formam um losango. Como as diagonais em qualquer losango se encontram no ponto médio e formam um ângulo reto, temos que a reta PQ como mediatriz do segmento AB. Com isso podemos garantir a perpendicularidade entre PQ e AB.

2.1.2 Bissetriz de um Ângulo

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta que parte do vértice desse ângulo e o divide em duas partes iguais, ou seja, forma outros dois ângulos de mesmo valor. A construção de uma bissetriz pode ser feita de maneira simples seguindo os passos abaixo.

I. Em um ângulo qualquer, tracemos uma circunferência com centro no vértice.
II. Encontraremos dois pontos de interseção, um em cada semirreta que forma o ângulo. Chamando esses pontos de A e B, marca-se o segmento AB.
III. Com um raio visivelmente maior que a metade do segmento AB, tracemos duas circunferências. Uma com centro em A e outra com centro em B.
IV. Encontraremos assim dois pontos, C e D. Ao traçarmos a semirreta partindo do vértice e passando por esses dois pontos, teremos a bissetriz do ângulo.

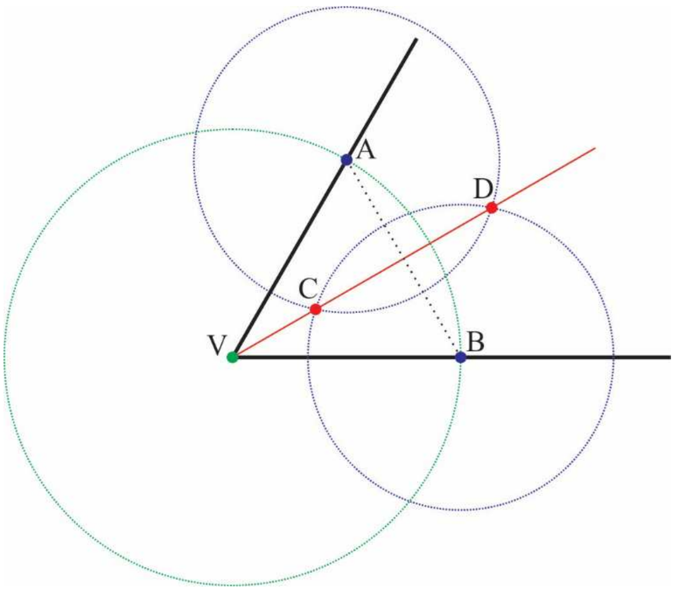

Figura 2.3: Bissetriz de um ângulo

Vimos anteriormente que o segmento CD divide o segmento AB ao meio. Então, temos um triângulo isósceles VAB (com VA = VB) dividido por uma semirreta perpendicular à base. Com isso, podemos garantir que a reta formada é a bissetriz do ângulo.

2.1.3 Adição e Subtração

O procedimento de soma é bem simples com o uso da régua e compasso. Usaremos dois segmentos de retas com tamanhos distintos. Sendo o primeiro segmento com extremidades AB e o segundo, CD.

Adotando uma reta, colocaremos os dois segmentos sobre essa reta de tal forma consecutiva. Ou seja, se o primeiro segmento termina no ponto B e o segundo segmento começa no ponto C, esses dois pontos irão se tornar um só, e a distância entre o ponto A ao ponto D será a soma dos dois segmentos.

Fazendo este procedimento com os instrumentos em estudo, basta fazer a transposição dos segmentos sobre uma determinada reta. Usando o compasso, coloca-se uma das pontas em uma extremidade do primeiro segmento, o ponto A. A outra extremidade, no ponto B. Assim, usando essa abertura do compasso, coloca-se a ponta cega sobre a reta, e com a ponta que risca, marca-se um ponto. Em seguida, coloca-se a ponta cega no ponto marcado, e em seguida, marca-se o outro ponto. Assim, teremos o primeiro segmento transposto na reta com a abertura do compasso garantindo o tamanho do segmento.

Ao repetir o procedimento de transposição com o segundo segmento, devemos garantir que o ponto C coincida com o ponto B, e o ponto D deve ser marcado no lado oposto ao ponto A. Desta forma, teremos a soma dos dois segmentos medido do ponto A ao ponto D, com os pontos B e C coincidindo e localizado entre as extremidades.

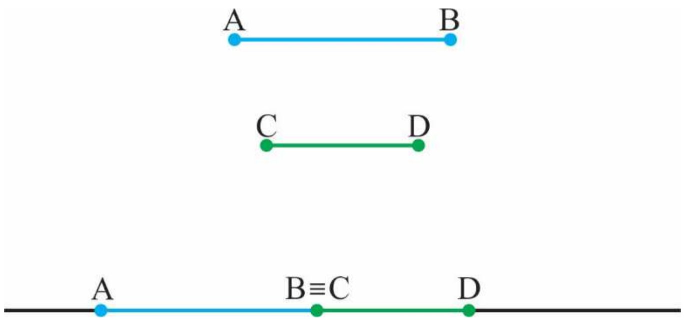

Figura 2.4: Soma dos dois segmentos

Para fazer a subtração entre os dois segmentos, basta sobrepor o segmento de menor dimensão sobre o maior de tal maneira que um de seus pontos extremos sejam coincidentes. Fazendo estra transposição, a diferença ficará visível.

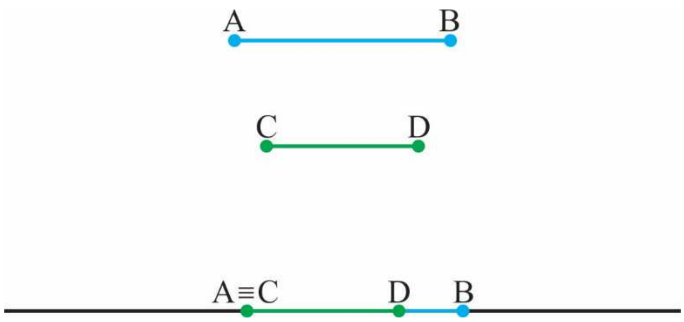

Figura 2.5: Subtração de dois segmentos

2.1.4 Multiplicação e Divisão

Podemos fazer a multiplicação por um número natural usando a soma sucessiva de um mesmo segmento. Na figura a seguir, temos um segmento multiplicado por 10. O valor deste produto é a distância do ponto de origem até o ponto que finda o último segmento.

Figura 2.6: Soma sucessiva de um segmento

Podemos também realizar a multiplicação entre dois números usando segmentos de reta. Adotando dois segmentos, AC e AD, realizaremos os seguintes procedimentos:

I. Tomando o segmento AB como uma unidade de medida, como mostra a figura, traçaremos a reta que passa pelos pontos B e C.
II. Tracemos agora, uma reta paralela a BC, passando pelo ponto D.
III. Esta reta corta a reta suporte de AC no ponto E. O segmento AE é o resultado da multiplicação que esperamos.

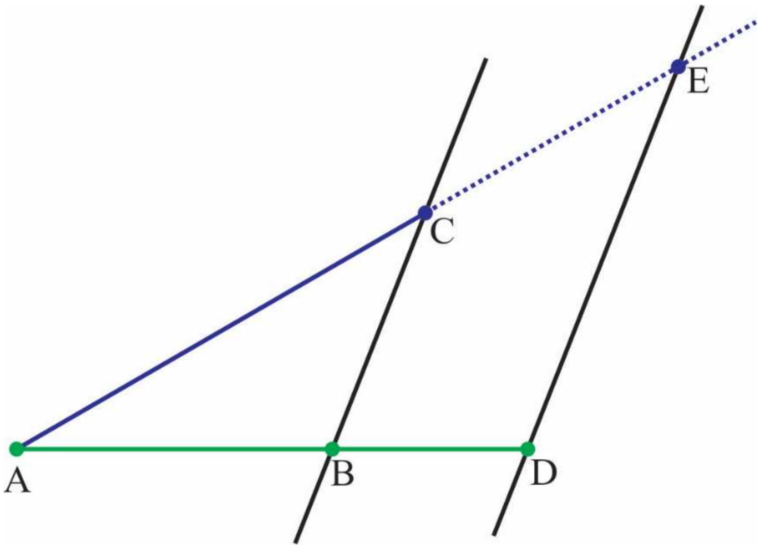

Figura 2.7: Multiplicação de dois segmentos

Podemos comprovar este resultado pelo teorema e Tales, e por adotarmos AB = 1 unidade de medida. Como as retas BC e DE são paralelas entre si, temos que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AC.AD = AB.AE \Rightarrow AC.AD = AE$$

O processo de divisão por um número natural envolve um pouco mais de trabalho para ser realizado. Devemos seguir os seguintes passos:

I. Trasponha para uma reta suporte o segmento a ser dividido.
II. Em um dos extremos do segmento, tracemos uma reta oblíqua em relação à primeira. Adotemos este extremo como origem.
III. Marque sobre a nova reta, os segmentos de mesmo comprimento, em quantidade igual ao total de partes que você quer dividir o segmento dado.
IV. Tracemos uma reta que passa pelos dois extremos opostos a origem das duas retas.
V. Tracemos agora retas paralelas a última traçada passando pelos pontos que foram marcados no segmento oblíquo. Os pontos de interseção destas retas com o segmento original dividirão este segmento em partes iguais.

Na figura abaixo podemos ver o segmento AB dividido em dez partes iguais. Essa divisão pode ser verificada pelo teorema de Tales.

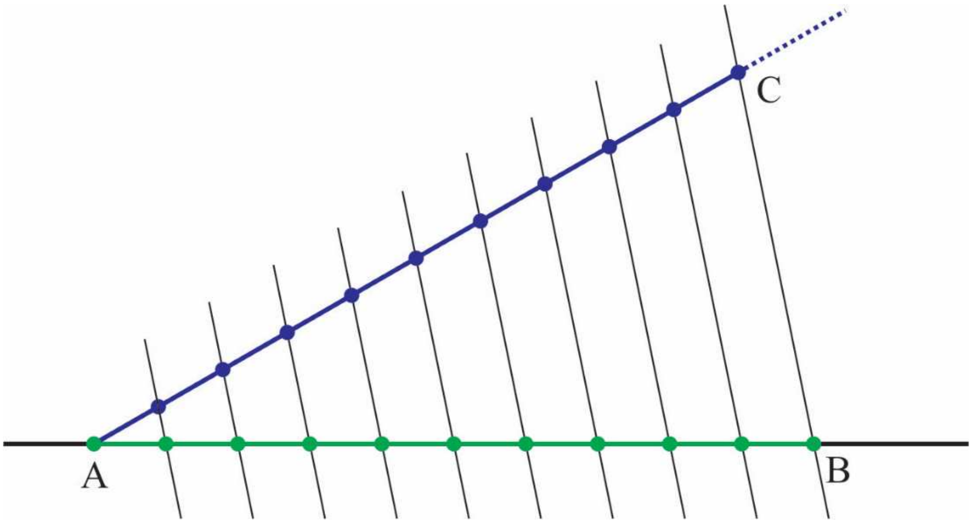

Figura 2.8: Divisão de um segmento em partes iguais

O processo de divisão entre dois segmentos é análogo ao processo de multiplicação mostrado na figura 2.7. Ao fazer o segmento AC = 1, teremos o seguinte resultado:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AC.AD = AB.AE \Rightarrow AE = \frac{AD}{AB}$$

2.2 Construindo polígonos regulares

2.2.1 Teorema de Gauss

Os polígonos são formados com construções um pouco mais elaboradas, mas que podem ser trabalhadas com alunos de ensino fundamental. Para cada polígono podem existir mais de uma maneira de realizar sua construção.

Existem construções onde os polígonos são feitos inscritos em uma circunferência. Diz-se que um polígono regular está inscrito em uma circunferência quando todos os vértices estão sobre a linha da circunferência e ambas figuras possuem o mesmo centro. Quando isso acontece, os vértices do polígono dividem a circunferência em arcos iguais.

Porém, nem todo polígono pode ser construído desta forma. Para identificar quais os polígonos podem realmente ser construídos, devemos fazer uso do Teorema de Gauss para Polígonos Construtíveis.

O teorema afirma que, só é possível dividir uma circunferência, com régua e compasso, em "n" partes este número satisfazer uma das seguintes condições:

I. $n = 2^k$; onde: $k \in N$ e $k \geq 1$.

II. $n = 2^k * p_1 * p_2 * \cdots * p_j$; onde: $k \in N$ e $k \geq 1$ e $p_1; p_2; \ldots; p_j$ são números primos na forma $P = 2^{2^m} + 1$ com $m \in N$.

De acordo com este teorema, os números primos que compõem a fatoração do número *n* devem ser os números Primo de Fermat. Um heptágono, por exemplo, não pode ser construído com régua e compasso, pois o número 7 é primo, mas não se adequa a fórmula de Fermat. Porém, existem construções que podem formar um heptágono não regular. Por se tratar de uma aproximação, podemos ter um dos lados diferente dos demais.

Outro exemplo é o eneágono. Como não é possível dividir uma circunferência em 9 partes usando uma régua sem graduação e um compasso. As construções deste polígono que existem atualmente são complexas demais para serem exploradas com alunos de ensino fundamental. Como isto foge a nossa proposta, não incluiremos a construção desse polígono.

2.2.2 Triângulo Equilátero

A construção de um triângulo com os três lados iguais é bem simples. Usando o a construção da mediatriz de um segmento, facilmente teremos, não apenas um, mas dois triângulos equiláteros.

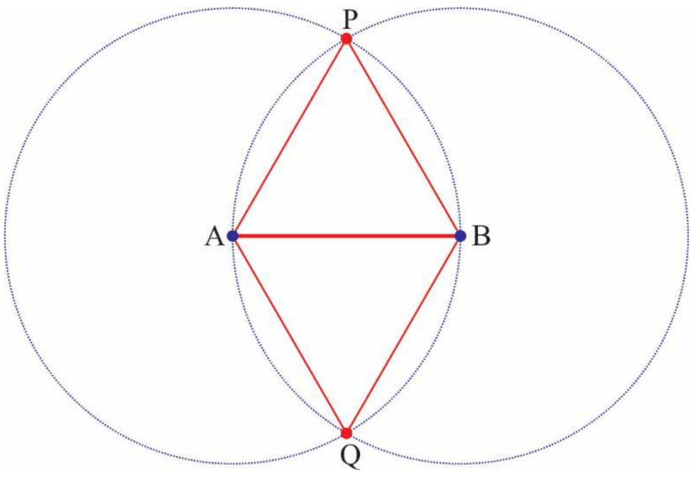

Figura 2.9: Dois triângulos Equiláteros

De acordo com a figura, temos que PAB e QAB são dois triângulos equiláteros onde a medida do segmento AB corresponde ao seu lado.

2.2.3 Quadrado

Para construir um quadrado usando um segmento AB como seu lado, basta seguir os paços abaixo.

I. Colocar o segmento em uma reta qualquer.
II. Construir uma reta perpendicular sobre o ponto A.
III. Encontrar, nessa reta, o ponto D usando a abertura do compasso no tamanho do segmento AB. Basta traçar o arco de B para D com centro em A.

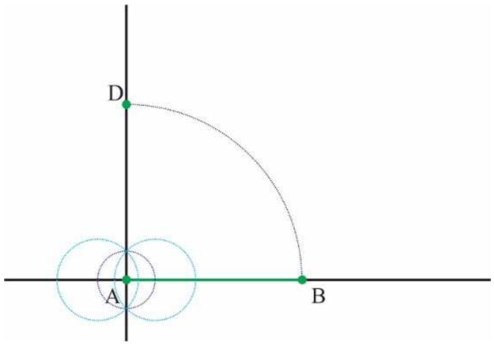

Figura 2.10: Construção do quadrado após os três primeiros passos.

IV. Construir uma reta perpendicular sobre o vértice B.
V. E da mesma forma que o passo III, construir um arco com a abertura do segmento AB, desta vez com o centro em B, e encontrar o ponto C na reta perpendicular a B.
VI. Uma vez encontrado todos os vértices, basta liga-los e teremos o quadrado com o lado do tamanho do segmento AB.

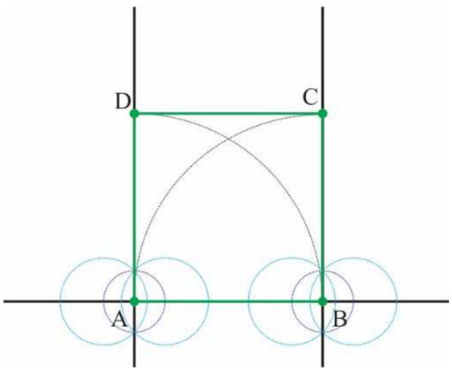

Figura 2.11: Quadrado ABCD completo.

2.2.4 Pentágono Regular.

A construção de um pentágono a partir do segmento AB requer um pouco mais de detalhes. Mostraremos um passo a passo feito em um aplicativo chamado Régua e Compasso, desenvolvido pelo professor René Grothmann da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha, que garante a regularidade do polígono.

I. Em um segmento AB, traçar duas circunferências com raio AB. Uma com o centro em A e outra com o centro em B.

II. Traçar a reta que passa pelos pontos de interseção das duas circunferências marcando o ponto M, ponto médio de AB.

III. Traçar uma reta perpendicular ao raio AB no ponto A e marcar o ponto de interseção superior da reta com a circunferência como ponto F.

IV. Traçar uma circunferência, com centro em M e raio MF. Prolongar o raio a partir do ponto B e marcar a interseção deste prolongamento com esta nova circunferência como ponto Q.

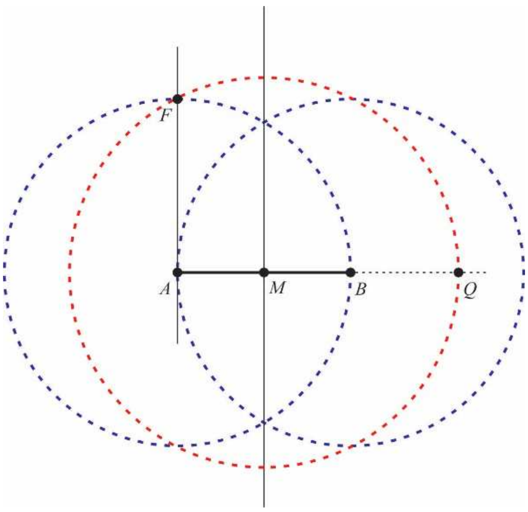

Figura 2.12: Construção de um pentágono regular após encontrar o ponto Q.

V. Com o centro em A, traçar uma circunferência com raio AQ e marcar as interseções da mesma com a reta mediatriz do segmento

AB e com a circunferência de centro em B e raio AB. A primeira interseção será o ponto D e a segunda será o ponto C.

VI. Com o centro em B, traçar uma circunferência com raio BD e marcar a interseção da mesma com a primeira circunferência como ponto E.

VII. O pentágono será formado ao ligarmos os pontos A, B, C, D e E.

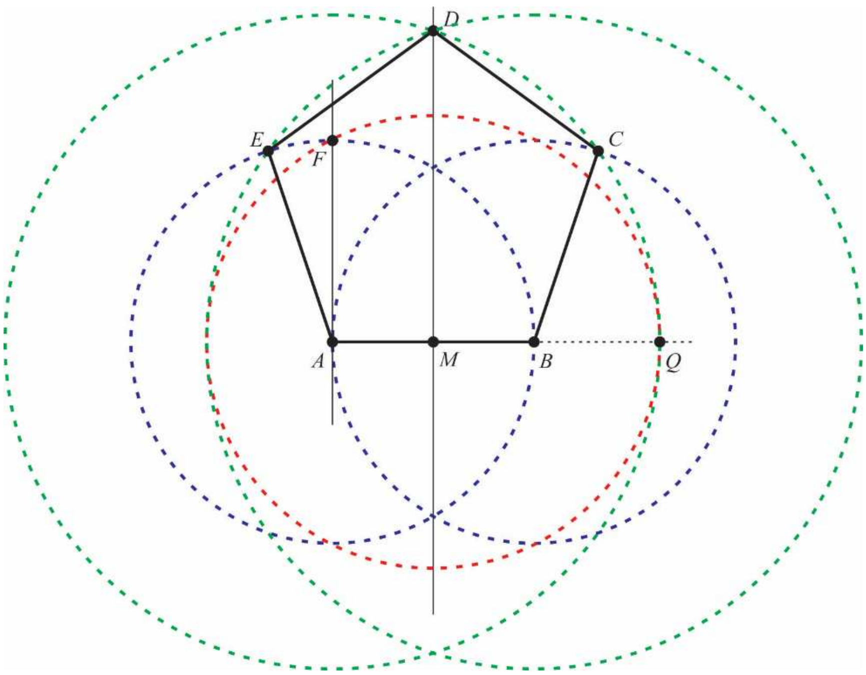

Figura 2.13: Pentágono Regular ABCDE completo.

Podemos observar que os raios das circunferências maiores com centros em A e B são as diagonais do pentágono formado. Como estas circunferências são iguais, com raio AQ, temos que suas diagonais são iguais. Com isso, temos um pentágono regular. Com a ajuda do aplicativo Régua e Compasso, podemos garantir que seus ângulos internos também são iguais.

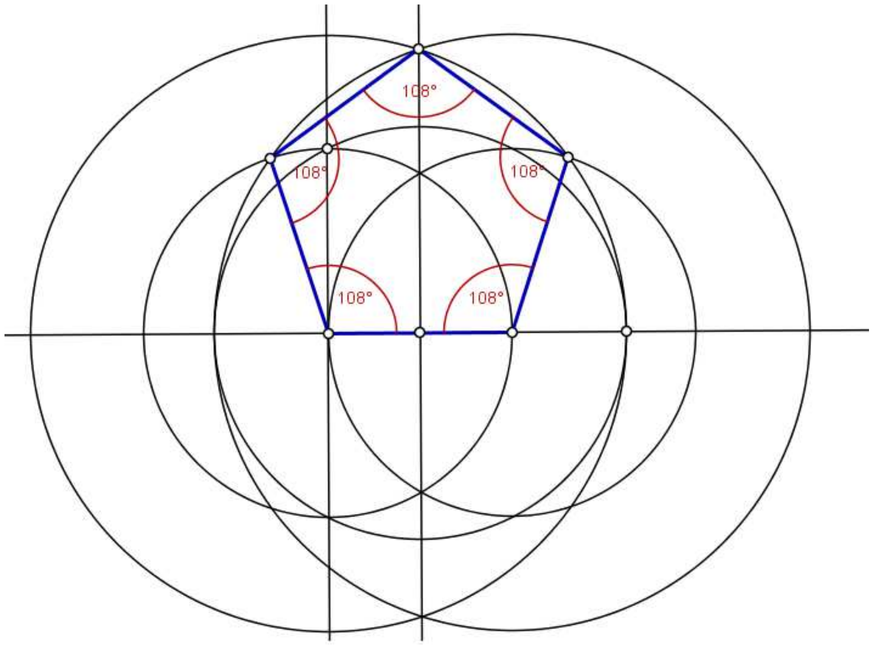

Figura 2.14: Ângulos internos do pentágono no aplicativo Régua e Compasso.

2.2.5 Hexágono Regular.

A construção do hexágono regular será influenciada pelo conceito de inscrição de um polígono em uma circunferência. Usando essa ideia, podemos construir um hexágono regular, a partir de um segmento AB de maneiras simples.

I. No segmento AB, traçar duas circunferências, uma com centro em A, outra com centro em B. Ambas com a abertura do compasso igual ao segmento.
II. Em um dos pontos de interseção, traçar outra circunferência, com mesmo raio.
III. Usando a abertura do compasso, dividir esta circunferência em partes iguais.
IV. Por fim, basta ligar os pontos encontrados e o hexágono será formado.

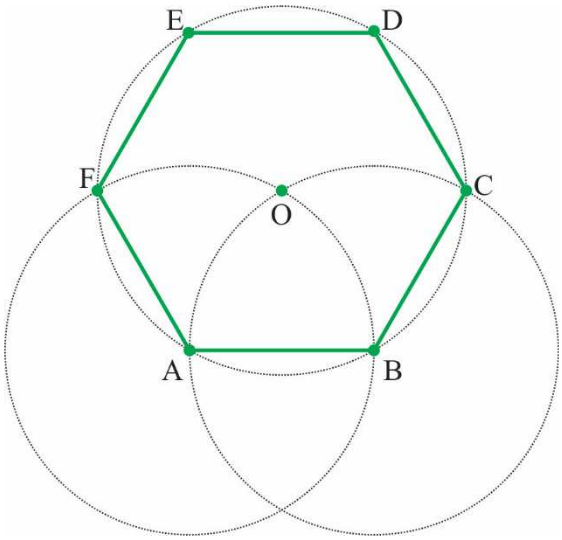

Figura 2.15: Hexágono Regular ABCDEF completo.

O quadrado e o pentágono regular também podem ser construídos inscritos em uma circunferência, porém, não poderiam ser feitos a partir de um segmento AB. Como no hexágono regular, o valor do raio da circunferência é o mesmo que a medida do lado, essa construção pode ser feita a partir de um segmento.

2.2.6 Heptágono

A construção do heptágono a seguir é uma aproximação de uma figura regular. Como foi colocado antes, um heptágono regular não pode ser construído com régua e compasso de acordo com o teorema de Gauss. Segue os passos desta construção.

I. Colocar o segmento AB sobre uma reta qualquer e traçar uma circunferência com centro em B e raio do tamanho do segmento. Com isso, podemos marcar o ponto M, interseção da reta e da circunferência.
II. Traçar uma reta perpendicular no ponto B.
III. Com centro em A e com a abertura do compasso do tamanho do segmento AM, traçar um arco intersectando a reta perpendicular no ponto N.
IV. Ao formar o ângulo MÂN, traçar a bissetriz do mesmo, intersectando a reta perpendicular no ponto P.

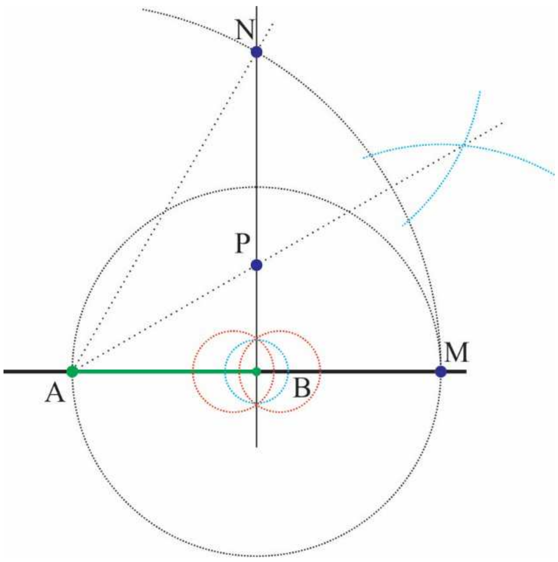

Figura 2.16: Construção do heptágono. Identificando o ponto P.

V. Com o centro novamente em A, desta vez com o raio do tamanho do segmento AP, traçar uma circunferência. Com o mesmo raio, traçar outra circunferência com centro em B. Qualquer um dos pontos de interseção destas ultimas circunferências podem ser usados para ser o centro daquela que irá circunscrever o heptágono.

VI. Escolhendo o ponto superior ao segmento AB, e chamando de ponto O, traçar uma circunferência com centro em O e raio AO. Notar que o primeiro lado do heptágono é o segmento AB.

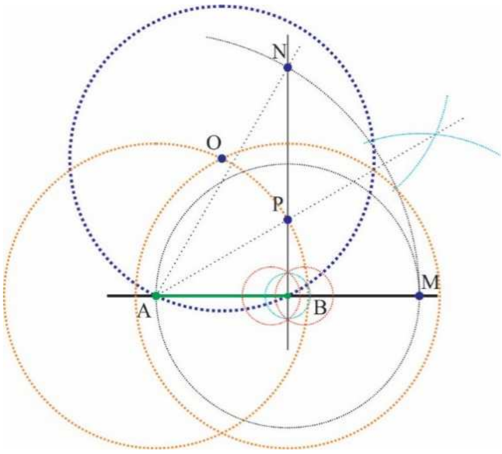

Figura 2.17: Construção do heptágono. Identificando o ponto O.

VII. Com a abertura do compasso igual ao segmento AB, dividir a circunferência em partes iguais. Ao ligar os pontos, teremos um heptágono regular.

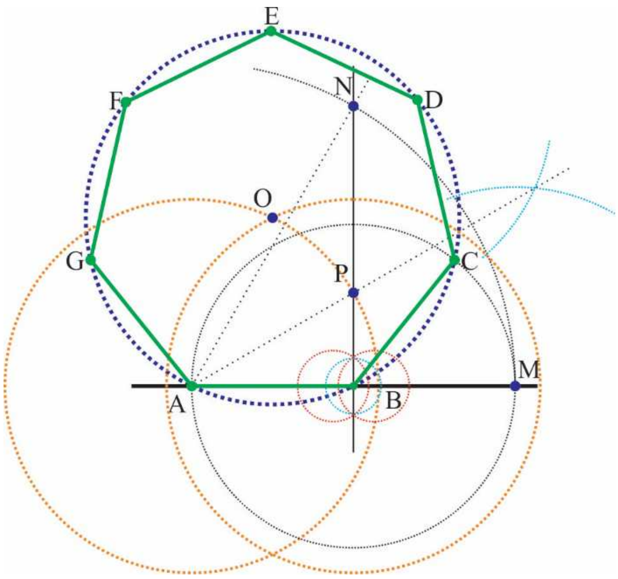

Figura 2.18: Heptágono Regular ABCDEFG completo.

2.2.7 Octógono Regular

Continuando a ideia de construir o polígono a partir de um segmento influenciado pela ideia da inscrição do mesmo na circunferência, podemos ver que a problemática principal é achar o centro da circunferência que irá circunscrever a figura. A construção do octógono é simples usando este método. Observe os passos a seguir.

I. Em um segmento AB, construir sua mediatriz identificando o seu ponto médio como ponto M.
II. Com o centro em M, traçar um semicírculo partindo de A até B. Identificar o ponto N, interseção do arco com a mediatriz.
III. Com o centro agora em N, e com o raio do tamanho do segmento AN, traçar um arco de A até B. Identificar agora o ponto O, interseção do novo arco com a mediatriz. Este ponto será o centro da circunferência que irá circunscrever o polígono de oito lados.

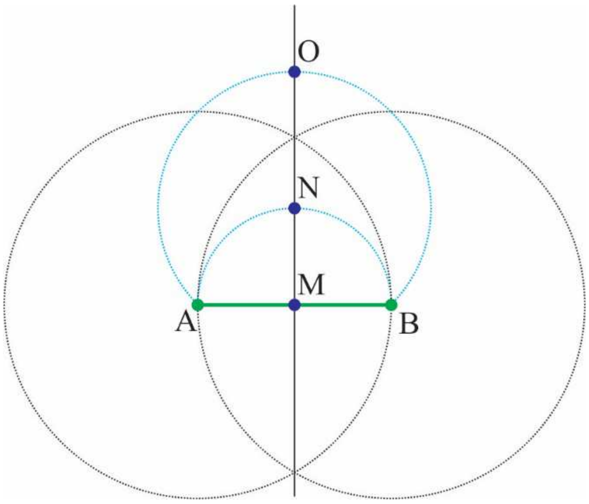

Figura 2.19: Construção do octógono regular. Identificando o ponto O.

IV. Com o centro em O, e com o raio do tamanho do segmento OA, ou OB, traçar uma circunferência completa.

V. Com a abertura do compasso do tamanho do segmento AB, dividir a nova circunferência em oito partes iguais identificando cada ponto. Ao ligar esses pontos teremos um octógono regular com o lado do mesmo tamanho do segmento AB.

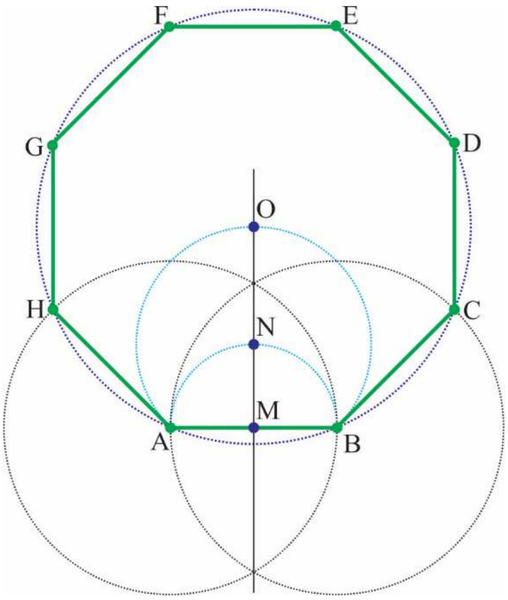

Figura 2.20: Octógono Regular ABCDEFGH completo.

2.2.8 Decágono Regular

Nas construções anteriores, os polígonos eram construídos a partir de um segmento de reta que era usado como o lado da figura. Para o decágono, a construção será a partir de uma circunferência, e nela será inscrito o polígono.

I. Traçar duas retas perpendiculares entre si.

II. Traçar uma circunferência com raio qualquer com o centro no cruzamento das retas. Chamar o centro de ponto O. Será nesta circunferência que o decágono será construído.

III. Marcar dois pontos na circunferência. O primeiro deve ser a interseção de uma reta com a circunferência, o outro deve ser a interseção com a outra reta. Chamar de ponto A e ponto K.

IV. Traçar a mediatriz do segmento OA. Marcar o ponto de interseção como ponto M.

V. Com o centro e M, traçar um arco começando de K até a reta em que o ponto A está contido. Nesta reta, marcar o ponto L.

VI. Com o compasso com centro em A e abertura do tamanho do segmento AL, marcar o ponto B na circunferência. Em seguida, com o centro em B, marcar o ponto C, e assim sucessivamente até completar o ciclo.

VII. Ao ligar os pontos marcados, teremos um decágono regular com o lado do tamanho do segmento AL.

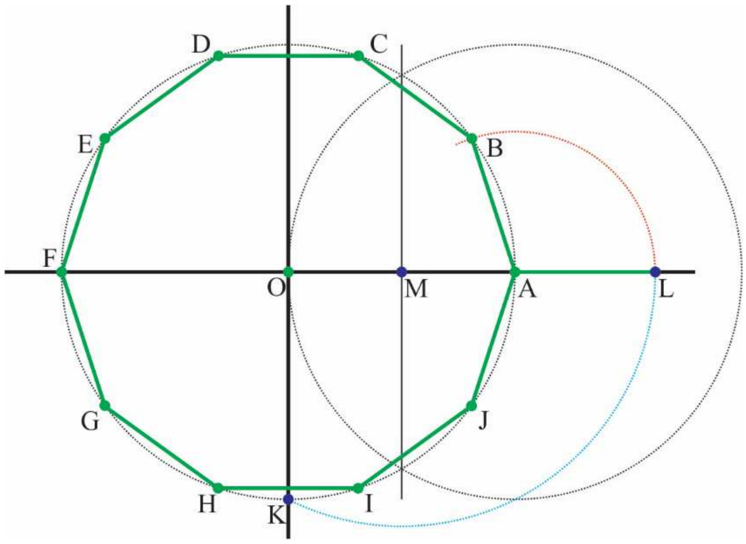

Figura 2.21: Decágono Regular ABCDEFGHIJ completo.

3 SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

No estudo de Geometria no século atual não se faz mais uso de equipamentos que possibilitassem compreender melhor as soluções impostas por problemáticas na projeção e construção de algo. Por exemplo, para distribuirmos alguns pontos de forma proporcional em algumas retas, usamos o Teorema de Tales para saber exatamente onde estarão esses pontos. Se ainda usássemos régua e compasso, teríamos que desenhar o problema para saber essas localizações. Seria uma maneira concreta de ver o problema, porém demandaria um pouco mais de tempo.

Ao longo do tempo, a álgebra tem ajudado no estudo da geometria no que diz respeito à agilidade de obtenção de resultados com seus métodos e fórmulas. Porém, o conhecimento concreto foi, aos poucos, sendo deixado de lado. Tornando, assim, o estudo da geometria mais teórico e menos prático. Contribuindo para a dificuldade de aprendizagem dos alunos.

Veremos a seguir algumas situações simples em que na álgebra as soluções são bem conhecidas. Mas, usando a régua e o compasso, podemos construir a solução usando procedimentos já visto neste trabalho. Usaremos alguns segmentos com tamanhos conhecidos para propor uma solução em cada problemática apresentada.

3.1 A 4ª Proporcional

Considerando três segmentos de retas com tamanhos *a*, *b* e *c*; dizemos que a 4ª proporcional é um segmento *x* que obedece a seguinte relação:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Essa relação resulta na equação $ax = bc$. Porém, ao nos lembrar do Teorema de Tales, podemos obter uma construção que nos mostra o tamanho do segmento x. No capítulo anterior mostramos essa construção abordando uma multiplicação entre segmentos. Os procedimentos são bem semelhantes.

I. Traçar duas semirretas formando um ângulo agudo no ponto de encontro das mesmas. Identificar esse ponto como ponto O.
II. Transpor para uma das retas o segmento *a* começando do ponto O, e identificar o ponto A no fim do segmento.
III. Começando do ponto A, transpor o segmento *c*. Identificar o ponto C no fim deste segmento.

IV. Na outra semirreta, transpor o segmento *b*, começando do ponto O e identificar o ponto B no fim deste segmento.

V. Traçar a reta AB. Em seguida, uma paralela que passa pelo ponto C. Identificar o ponto D, interseção desta ultima reta traçada com a semirreta que contém o segmento OB.

VI. Identificar o segmento *x*, limitado pelos pontos B e D.

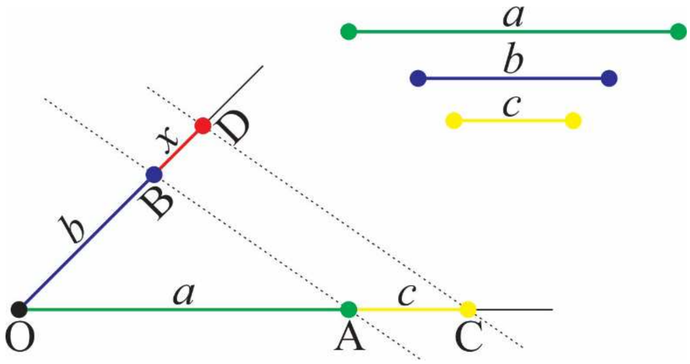

Figura 3.1: A 4ª Proporcional dos segmentos *a*, *b* e *c*.

3.2 Média Aritmética

A média aritmética é muito usada principalmente no ramo da estatística. É uma medida de tendência central calculada de forma simples pela fórmula:

$$Ma = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Vamos admitir que x_i sejam segmentos com seus comprimentos conhecidos e *n* o número total de segmentos usados para calcular a média. Quando temos $n = 2$, usaremos apenas dois segmentos para calcular a média. A construção desta média fica bem simples, basta construir a soma desses dois segmentos e em seguida aplicar o método da mediatriz.

Para calcularmos a média aritmética com $n \geq 3$, usaremos o método da soma seguido pelo método da divisão de segmentos. A soma dos segmentos será dividida em partes iguais onde cada parte representa a média aritmética. Vamos aos procedimentos para encontrarmos o segmento que representa a média dos segmentos *a*, *b* e *c*.

I. Desenhar duas semirretas partindo de um ponto O formando um ângulo agudo qualquer.

II. Colocar, em uma das semirretas, os segmentos *a*, *b* e *c* de forma consecutiva formando a soma dos mesmos, fazendo AO o segmento *a*, AB o segmento *b* e BC o segmento *c*.

III. Na outra semirreta, colocar três pontos, M, N e P de tal forma que OM = MN = NP.

IV. Traçar a reta que passa por P e C.

V. Traçar a reta que passa por M e que é paralela a reta PC. Fazer o mesmo no ponto N.

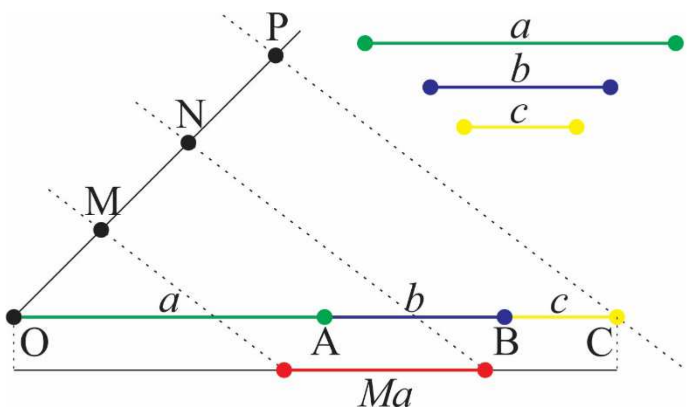

Figura 3.2: Média Aritmética dos segmentos *a*, *b* e *c*.

Como podemos observar na figura, o segmento que representa a média aritmética foi construído em uma reta paralela à semirreta que contem a soma dos três segmentos.

3.3 Média Geométrica

Como já sabemos, a média geométrica pode ser calculada pela fórmula a seguir: $Mg = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \cdots * x_n}$. Então, para *n* = *2*, teremos uma média de dois números. Assim, passaremos a ter a média calculada desta forma: $Mg = \sqrt{a * b}$. E construir o resultado desta ultima fórmula é bem simples, uma vez que tenhamos *a* e *b* como segmentos conhecidos. Podemos fazer os seguintes procedimentos.

I. Colocar os segmentos *a* e *b* em uma reta de tal modo que possamos ter a soma dos dois segmentos.

II. Encontrar o ponto médio desta soma. E traçar um semicírculo de uma extremidade a outra deste segmento.

III. No ponto em comum de *a* e *b*, traçar uma reta perpendicular. Identificar o ponto de encontro desta reta com o semicírculo. O segmento encontrado representa o resultado esperado.

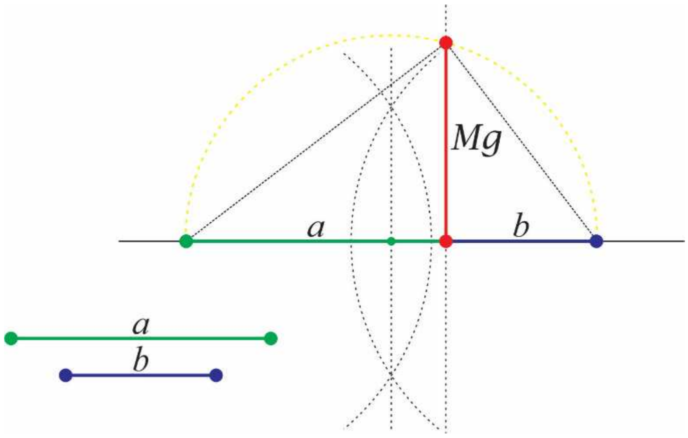

Figura 3.3: Média Geométrica dos segmentos *a* e *b*.

A justificativa está no fato que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência, onde um de seus lados é o diâmetro, esse triângulo é retângulo. E de acordo com a figura, temos que o segmento formado é a altura relativa à hipotenusa. Temos então que o quadrado desta altura é igual ao produto destas projeções. Assim, temos:

$$h^2 = a * b \Rightarrow h = \sqrt{a * b} = Mg$$

Para $n \geq 3$ não temos como construir todos resultados, pois nem todas as raízes podem ser construídas com régua e compasso. Portanto, nos limitaremos a encontrar a média geométrica de dois números pois iremos usar esse procedimento em outras soluções.

3.4 Teorema de Pitágoras

Desenhar um triângulo retângulo usando régua e compasso não é complicado. E esta construção nos ajuda a construir vários números racionais ou irracionais. Conhecendo apenas dois segmentos, *a* e *b*, podemos encontrar as soluções das seguintes expressões: $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Para encontrarmos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ basta usarmos *a* e *b* como catetos de um triângulo retângulo. Assim, teremos *x* como sua hipotenusa. Quando encontramos $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, temos que *x* é agora um dos catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa *a* e outro cateto igual a *b*.

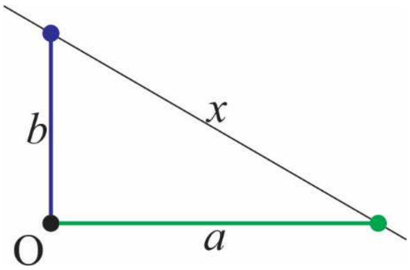

Figura 3.4: Teorema de Pitágoras onde *x* é a hipotenusa.

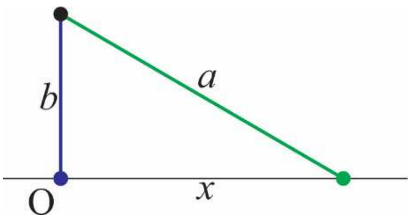

Figura 3.5: Teorema de Pitágoras onde *x* é um dos catetos.

Usando a construção do Teorema de Pitágoras podemos construir outras expressões como $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \cdots}$ bastando repetir as construções do teorema usando os resultados encontrados. Podemos, por exemplo, construir a diagonal de um paralelepípedo retângulo com dimensões *a*, *b* e *c*, sem precisar construir o objeto.

Usando os segmentos a e b, podemos fazer um triângulo retângulo com hipotenusa $m = \sqrt{a^2 + b^2}$. Usando agora o segmento *m* e o segmento *c*, podemos fazer outro triângulo retângulo onde teremos $x = \sqrt{m^2 + c^2}$. Usando o valor de *m* encontrado anteriormente, temos que $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ que corresponde a diagonal de um paralelepípedo retângulo.

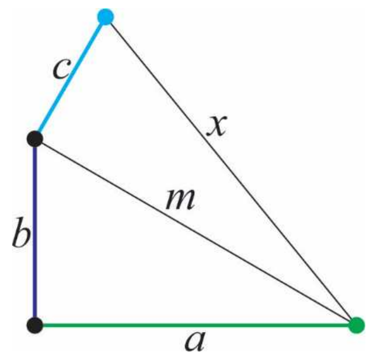

Figura 3.6: Encontrando o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Usando este método é possível também construir números do tipo $a\sqrt{n}$ com n sendo um número natural maior ou igual a dois. Para fazermos a construção de $a\sqrt{2}$, basta fazermos um triângulo retângulo com os dois catetos a. Usando a hipotenusa encontrada como um cateto de outro triângulo retângulo juntamente com outro cateto valendo a, encontraremos a hipotenusa $a\sqrt{3}$. Ao repetirmos este processo, podemos encontrar a sequência $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, ... como podemos observar na figura.

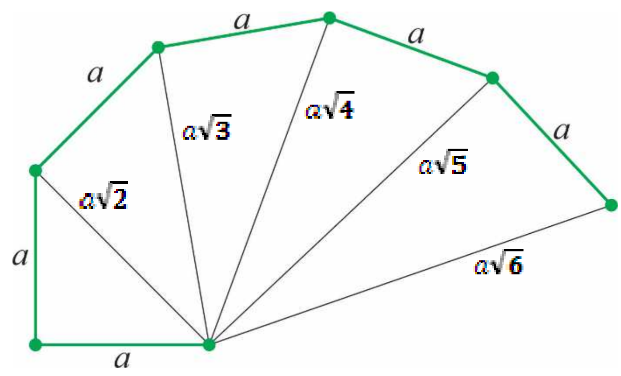

Figura 3.7: Construção da sequencia $a\sqrt{n}$ com $n \geq 2$.

3.5 Equação do 1º Grau.

Para resolver uma equação do 1º grau são necessárias apenas as operações mais básicas que já foram mostradas neste trabalho. Qualquer aluno acostumado a resolver esse tipo de equação pode perceber que sua forma mais simples é $ax + b = c$, onde *x* é a incógnita e *a*, *b* e *c* são valores conhecidos. Desta forma temos que $x = \frac{c - b}{a}$. Logo, as operações que precisaremos serão a subtração (ou soma, caso o valor de b seja negativo) e a divisão. Tomando como exemplo a equação $2x + 3 = 7$ podemos fazer os seguintes procedimentos:

I. Adotar um segmento qualquer, com *k* cm, como uma unidade de medida.

II. Multiplicar esse segmento em uma reta pelo número 7. Marcar os extremos desta multiplicação com os pontos A e B.

III. Na extremidade B, fazer a subtração de 3 unidades de medida. Marcar o ponto C.

IV. Usando o método da divisão, dividir o segmento AC em 2 partes iguais.

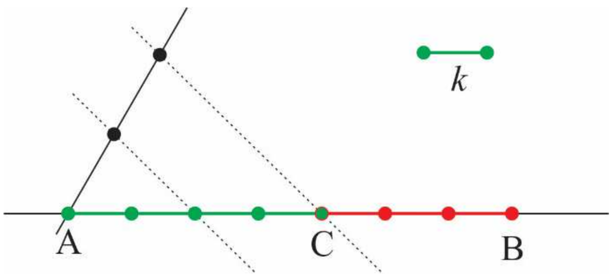

Figura 3.8: Solução da Equação $2x + 3 = 7$.

Podemos ver na figura que a medida de cada parte encontrada corresponde à solução desejada. De acordo com o exemplo vale 2 unidades de medidas, ou seja, se o segmento escolhido como unidade de medida vale *k*, o comprimento da solução será 2*k*.

3.6 Equação do 2º Grau

O modelo de construção das soluções quadráticas não é tão simples como a construção da equação do 1º grau, porém tem fácil compreensão. Nos métodos abordados a seguir é necessário mensurar os segmentos que serão usados ou adotar uma unidade de medida para que possamos descobrir as raízes a partir dos coeficientes expostos na equação. Ambos os métodos são eficazes apenas para $a = 1$.

3.6.1 Método de Descartes.

Descartes, em sua obra *La Géométrie*, afirmou que o grau da equação determinava a complexidade da construção de suas soluções. Ele criou um método de resolução para um grupo limitado de equações do 2º grau. Seu método permite resolver equações do tipo: $x^2 \pm bx - c^2 = 0$. Segue então os procedimentos elaborados por Descartes.

I. Traçar um segmento AB com o tamanho igual a "*c*".
II. No ponto A, traçar uma reta perpendicular. Nesta reta, identificar o ponto O. O segmento AO deve ter o tamanho igual a "$b/2$".
III. Com o centro em O, traçar uma circunferência com raio igual ao tamanho AO.
IV. Traçar a reta que passa em B e em O e intersectando a circunferência em dois pontos: o ponto C, que fica mais distante que o ponto B, e o ponto D.
V. Se o valor de "b" for positivo, o segmento BC é a solução desejada. Se o valor de "b" for negativo, o segmento BD é a solução desejada.

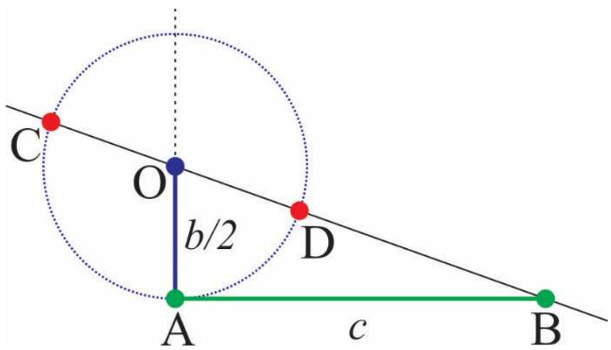

Figura 3.9: Raízes de uma Equação Quadrática pelo Método de Descartes

Ao desenvolvermos algebricamente a mesma equação, encontraremos uma solução positiva e outra negativa, pois o produto das raízes é um número negativo. Ao observarmos os valores obtidos em BC e BD, podemos ver que estes valores representam os módulos das raízes, já que a geometria não trabalha com números negativos para definir a medida de um segmento de reta.

A justificativa da construção de Descartes está relacionada ao Teorema das Cordas. Observado a figura e aplicando o teorema, temos que:

$$AB^2 = BC * BD \Rightarrow AB^2 = (BD + DO + OC) * BD$$

Como BD é raiz, podemos substituí-lo por *x*. E temos também que:

$$DO = OC = {}^{b}/_{2}.$$

Fazendo as devidas substituições, teremos o seguinte desenvolvimento:

$$c^2 = \left(x + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) * x \Rightarrow c^2 = x^2 + bx \Rightarrow x^2 + bx - c^2 = 0$$

3.6.2 Método Alternativo

Como o método de Descartes não abrange todos os tipos de equações quadráticas, outros métodos surgem buscando uma maior abrangência. Ainda não foi encontrado um método genérico para todas as equações do 2º grau.

Neste método alternativo, iremos trabalhar com um conjunto maior de equações com o auxílio de mensurações. Trabalharemos agora com as equações do tipo: $x^2 - Sx + P = 0$, onde *S* representa a soma das duas raízes e *P* o produto das mesmas.

Usando as construções das médias entre dois números com as raízes x_1 e x_2 da equação, podemos deduzir os módulos das raízes. Como vimos anteriormente, temos que as médias aritméticas e geométricas entre dois números são definidas pelas fórmulas a seguir:

$$Ma = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$Mg = \sqrt{x_1 * x_2}$$

Fazendo as devidas substituições, temos que:

$$Ma = \frac{S}{2} \Rightarrow S = 2 * Ma$$

$$Mg = \sqrt{P} \Rightarrow P = Mg^2$$

Com isso, podemos concluir que as duas raízes deverão ter o mesmo sinal, pois o produto delas é um valor positivo. Sendo assim, continuaremos a trabalhar com os módulos das raízes, pois existe a possibilidade das duas raízes serem negativas.

Outro fator limitante para este método é que a desigualdade das médias deve ser respeitada, ou seja:

$$Ma \geq Mg$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 * x_2}$$

$$\frac{S}{2} \geq \sqrt{P}$$

$$S^2 \geq 4P$$

$$S^2 - 4P \geq 0$$

Esta inequação se assemelha com o discriminante usado por Bháskara que é: $\Delta = b^2 - 4ac$, usado para encontrar a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Para que existam de fato raízes reais que possam ser representadas por segmentos de reta, esse discriminante deve ter um valor não negativo.

Sabemos que a média aritmética é o raio de um semicírculo onde seu diâmetro é composto pela soma dos dois valores. E que a média geométrica é o segmento de reta perpendicular a esse diâmetro que partia do ponto que separa os dois números em questão.

Sendo assim, basta construir o semicírculo usando o valor de S como o diâmetro. E, em seguida, colocar o segmento correspondente à média geométrica das raízes perpendicular ao diâmetro de tal forma que seus limites sejam o próprio diâmetro e o semicírculo traçado. Para isso, temos que encontrar o valor de $\sqrt{P}$. Podemos fazer isto usando o Método do Teorema de Pitágoras, basta encontrar dois números *a* e *b*, tal que : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{P}$.

Uma vez que temos a construção do semicírculo e de $\sqrt{P}$, basta colocar o segmento de forma perpendicular sobre um dos extremos do diâmetro. Em seguida, traçar uma paralela ao diâmetro que passa pelo outro extremo do segmento que representa a $\sqrt{P}$. Esta reta paralela irá intersectar o semicírculo em dois pontos. Ao ligarmos um desses pontos ao diâmetro de forma perpendicular, teremos o ponto que separa as duas raízes.

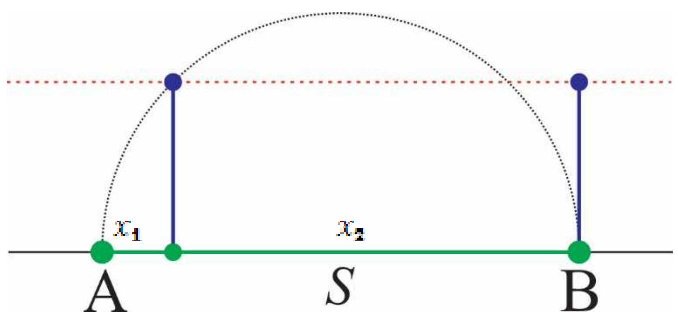

Figura 3.10: Método alternativo de solução de uma Equação do 2º Grau.

3.7 Número Áureo

O número áureo ou razão áurea é um número irracional cuja representação geométrica pode ser obtida por meio da divisão de um segmento em média e extrema razão. Tal divisão consiste em dividir um segmento em duas partes de tal modo que uma dessas partes seja a média proporcional entre a outra parte e o segmento original.

Portanto, dado um segmento qualquer AB, deve-se determinar um ponto C pertencente ao segmento AB, tal que a igualdade a seguir seja satisfeita:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Segue os procedimentos para a obtenção deste ponto.

I. Determinar o ponto médio M do segmento AB.
II. Determinar uma reta perpendicular ao segmento AB que passe pelo ponto B.
III. Com o centro do compasso em B e abertura igual a MB, identificar o ponto D sobre esta reta.
IV. Traçar o segmento AD.
V. Com a mesma abertura do compasso e centro no ponto D, identificar o ponto E no segmento AD.
VI. Com centro em A, e abertura igual ao segmento AE, identificar o ponto C no segmento AB.

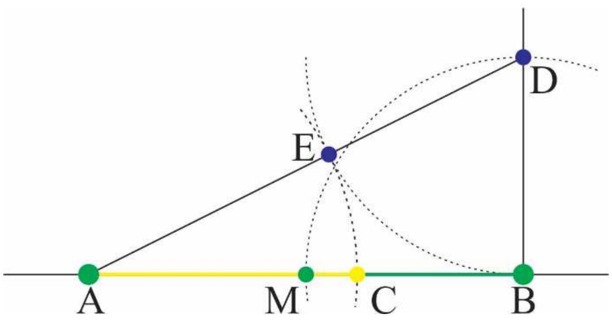

Figura 3.11: Construção da Razão Áurea

A justificativa da construção acima é bem simples de mostrar. Considerando o segmento AB como uma unidade, temos que BD = $\frac{1}{2}$. Usando o teorema de Pitágoras no triângulo da figura, temos que:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow AD^2 = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como o segmento BD é igual ao segmento ED que vale $\frac{1}{2}$, então, podemos concluir que:

$$AE = AD - ED \Rightarrow AE = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

Como o segmento AC tem o mesmo tamanho que o segmento AE, temos que: $AE = AC = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Com isso, teremos a razão áurea ao dividirmos AB por AC.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{2}{(\sqrt{5} - 1)} * \frac{(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} + 1)} \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2 * (\sqrt{5} + 1)}{4} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} \cong 1{,}618$$

Este número pode ser encontrado em vários elementos da natureza como a proporção entre as abelhas fêmeas e macho e o crescimento do raio interno da concha do caramujo. No corpo humano tem medidas, que relacionadas, também resulta na razão áurea, como a medida da altura com a medida do umbigo até o solo.

Antigas civilizações já usavam a relação áurea na arquitetura buscando harmonia em suas obras. O Partenon Grego, por exemplo, foi construído a mais de 400 anos antes de Cristo, teve sua faixada construída em forma retangular. A razão entre a largura e a altura deste retângulo na faixada do templo resulta no número de ouro.

4 PROBLEMAS CLÁSSICOS

Nos capítulos anteriores foram mostradas algumas construções partindo de um segmento de reta. Claro que este segmento tem algum valor que pode ser verificado em uma régua graduada. Mas nosso objetivo é, partindo deste segmento, construir figuras planas e outros segmentos pré-definidos sem fazer uso da mensuração.

A partir dessas construções, outras mais complexas surgiram para enriquecer a arquitetura da Grécia Antiga e outras civilizações da época. Mas, nem sempre, a régua e o compasso eram suficientes para realizar determinadas construções.

Um exemplo claro disso são os três problemas clássicos gregos. São eles:

I. *Duplicação do cubo (ou Problema de Delos)*: construir a aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro do volume de um cubo dado.

II. *Quadratura do círculo*: construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

III. *Trissecção do ângulo*: dividir um ângulo qualquer em três partes iguais.

Para que possamos nos aprofundar um pouco sobre cada problema, temos que aprender a identificar melhor quais números podemos encontrar usando a régua e o compasso. Logo, temos que estudar um pouco sobre o *Conjunto de Números Construtíveis*, que é o conjunto de todos os números que podem ser construídos com régua e compasso. Analisando suas propriedades, podemos entender melhor a dificuldade de fazer essas construções clássicas.

4.1 Números Construtíveis

Consideremos, inicialmente, o conjunto $\mathscr{C}$, dos números reais que podem ser obtidos, por construção com régua e compasso, através de uma unidade linear pré-fixada. Mostraremos aqui quais são as principais características que esses números reais devem ter para fazer parte desse conjunto $\mathscr{C}$.

De acordo com a Geometria Euclidiana, construir com régua e compasso significa que podemos utilizar apenas os seguintes procedimentos:

I. Traçar uma reta conhecendo dos de seus pontos já construídos.

II. Traçar um círculo conhecendo seu centro e um de seus pontos, ambos já construídos.

Uma vez que conhecemos os procedimentos, podemos afirmar então que um número real x é construtível se $x = 0$ ou se for possível construir, com régua e compasso, através de um número finito desses procedimentos, um segmento com o comprimento igual a $|x|$, a partir de um segmento de reta tomado como a unidade.

4.1.1 Propriedades

Como já foi mostrado que algumas construções são possíveis de serem realizadas apenas com os instrumentos euclidianos (régua e compasso), não nos deteremos mais na descrição dos passos utilizados para realizá-las. Por exemplo, já vimos que é possível construir perpendiculares, paralelas, mediatrizes e bissetrizes, com algumas condições preestabelecidas.

Vimos também que as quatro operações básicas também podem ser construídas com a régua e o compasso. Então, podemos elencar algumas propriedades baseadas em construções já vistas neste trabalho, sem a necessidade de demonstrações.

- A soma e a subtração entre dois números construtíveis resultam em um número construtível.
- A multiplicação e a divisão entre dois números construtíveis resultam em um número construtível.
- A raiz quadrada de um número construtível maior que zero resulta em um número construtível.

Analisando as características citadas, podemos construir uma reta numérica com todos os números racionais. Para isso, é necessário uma origem e um outro ponto para determinar a unidade de medida, ou seja, os pontos 0 e 1. Partindo desta unidade, os pontos podem ser colocados à direita como pontos positivos e a esquerda com sinal negativo.

Para completar o conjunto dos números reais, precisamos saber se os números irracionais também são construtíveis. Já vimos que algumas rizes são contrutíveis, mas existem aquelas que não podem ser construídas por régua e compasso. Então, como identificar ser um número é construtível ou não?

Quando analisamos as construções de forma analítica, podemos perceber que elas são feitas de interações entre retas e circunferências. E que as interseções formam os pontos que desejamos para construir um segmento. Na geometria analítica, aprendemos que, no plano cartesiano, a reta é representada pela seguinte equação:

$ax + by + c = 0$, onde *a*, *b* e *c* são os coeficientes da equação. E a equação da circunferência é: $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$ onde x_C e y_C são as coordenadas do centro e *R* é o tamanho do raio. Para que possamos ter retas e circunferências construtíveis, é preciso que seus pontos também sejam. Um ponto no plano cartesiano é construtível quando suas coordenadas também são. Assim, os coeficientes das equações citadas devem ser números construtíveis.

Um número construtível é obtido através de soluções de sistemas envolvendo retas e circunferências. Um sistema formado por duas retas é um sistema formado por equações do 1ºgrau. Uma interação entre reta e circunferência é um sistema de equação do 1º grau com uma equação do 2º grau. E duas circunferências só podem gerar um sistema com duas equações do 2º grau. Então, para saber se um número é construtível, devemos procurar um polinômio do 2º grau, com coeficientes construtíveis, onde este número seja a raiz.

Porém, existem números que não são raízes de uma equação quadrática, porém são construtíveis. Esses números são soluções de equações biquadráticas. Como já foi mostrado que $\sqrt{a}$ é um número que pode ser obtido com régua e compasso, então $\sqrt[n]{a}$ também pode ser construída desde que $n = 2^k$ onde k é um número inteiro. Logo, equações do tipo: $ax^{(2^k)} + bx^{2^{k-1}} + c = 0$ onde *a*, *b* e *c* são números construtíveis e k é um número inteiro também fornecem raízes construtíveis.

Depois desta análise, entenderemos melhor a inviabilidade da construção proposta pelos problemas clássicos citados anteriormente.

4.2 Duplicação do Cubo ou Problema de Delos

Uma das lendas acerca da origem desse problema é mitológica e afirma que por volta de 427 a.C. o oráculo anunciou aos habitantes da cidade de Delos, que para se livrarem da peste, eles deveriam dobrar o altar cúbico do Deus Apolo. Assim sendo, os arquitetos dobraram as dimensões do altar. Em consequência disso, multiplicaram por oito o seu volume, e não duplicá-lo, como pedira o oráculo. Vários matemáticos propuseram soluções para o problema. Entre eles podemos citar Hipócrates, Platão, Erástotenes, Nicomedes, Arquitas, Menécmo, Diocles, Hierão, Viète, Descartes, Fermat, Newton, Clairaut, entre outros.

O problema consiste em achar um cubo com o volume igual ao dobro do original. Ou seja:

$$V_2 = 2V_1 \Rightarrow a_2^3 = 2a_1^3 \Rightarrow a_2 = a_1\sqrt[3]{2}$$

Como podemos ver, a aresta do novo cubo depende do fator $\sqrt[3]{2}$. Este fator não é um número construtível, pois nenhuma interação entre retas e circunferências poderão gerar um polinômio com esta raiz. Com isso, concluímos que não é possível criar um cubo com seu volume duplicado apenas com régua e compasso.

4.3 Quadratura do círculo

Possivelmente o problema de construir um quadrado cuja área seja igual ao de um círculo dado foi um dos que exerceu um fascínio maior ou mais duradouro em toda história. Expresso por meio de um enunciado muito simples, a resolução utilizando apenas régua e compasso se revelou como grande desafio a várias gerações de matemáticos e permaneceu sem solução por cerca de 2.000 anos.

Em 1800 a.C, os egípcios haviam feito uma aproximação para a solução, tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado. As tentativas de demonstrar uma solução ou a sua impossibilidade serviram como motivação à criação de novas teorias, principalmente aquelas referentes à origem do número π.

O problema consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo, conhecendo o tamanho do seu raio. Considerando que *x* é o valor do lado do quadrado e *R* o raio do círculo, podemos analisar a igualdade das áreas da seguinte maneira:

$$x^2 = \pi R^2 \Rightarrow x = R\sqrt{\pi}$$

Podemos observar que para encontrar o valor do lado do quadrado, precisamos saber se o fator $\sqrt{\pi}$ é construtível. Então, este fator precisa ser raiz de um polinômio com o grau menor ou igual a dois. De fato, o polinômio $p(x) = x^2 - \pi$ atende este requisito. Logo, precisamos saber se o valor π é construtível.

Em 1882, o matemático Ferdinand von Lindemann demonstrou a transcendentalidade de π, ou seja, o número π não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais. Com isso, podemos afirmar que π não é construtível. Logo, $\sqrt{\pi}$ também não será construtível. Portanto, não é possível construir o quadrado desejado.

4.4 Trissecção de um ângulo

Este problema consiste em conseguir dividir um ângulo em três ângulos menores com a mesma medida. Ou seja, adotando um ângulo com o valor de 3θ e construtível, queremos saber se o ângulo θ também é.

Ao identificarmos o ângulo de 3θ num ciclo trigonométrico, podemos afirmar que, se este ângulo é construtível, suas coordenadas também são. Com isso, temos que seu cosseno também é construtível. Assim, sabendo que $\cos 3\theta$ é construtível, vamos analisar o $\cos\theta$.

Sabemos que:

$\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta)$

$\cos 3\theta = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$

$\cos 3\theta = \cos\theta\left(cos^2\theta - sin^2\theta\right) - sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$\cos 3\theta = \cos\theta\left(cos^2\theta - 1 + cos^2\theta\right) - \left(2sin^2\theta\cos\theta\right)$

$\cos 3\theta = 2cos^3\theta - cos\theta - 2\left(1 - \cos^2\theta\right)cos\theta$

$\cos 3\theta = 2cos^3\theta - cos\theta + 2\cos^3\theta - 2cos\theta$

$\cos 3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$

Fazendo a seguinte troca: $x = 2cos\theta$ temos que:

$\cos 3\theta = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}$

Analisando a equação resultante, podemos perceber que, para alguns valores de $cos3\theta$ a equação poderá ser fatorada, surgindo assim um polinômio do 1º grau e outro do 2º grau. Para ilustrar, façamo $cos3\theta = -1$ s, assim, teremos que $3\theta = 180º$ e $\theta = 60º$. Já sabemos que o ângulo de 60º é construtível, logo o ângulo de 180º pode ser trissectado. Mostraremos como é possível ver esta conclusão usando a equação encontrada. Começaremos substituindo $cos3\theta = -1$, temos:

$\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} = -1$

$\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} + 1 = 0$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$

As raízes de cada polinômios são construtíveis, logo mostramos algebricamente que o ângulo de 180º é trissectável. Ao usarmos este método com o ângulo de 60º, podemos ver que o mesmo não tem a mesma característica.

Fazendo $3\theta = 60º$ teremos que o $cos3\theta = -\frac{1}{2}$. Substituindo na equação encontrada, teremos:

$$\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Esta equação não pode ser fatorada em equações de grau menores pois não possui raízes racionais. Com isso, o ângulo de 60º não pode ser trissectável. Portanto, o ângulo de 20º não é construtível.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vários estudos apontam que a melhor maneira de aprender algo é quando colocamos em prática ou associamos o conhecimento ao nosso cotidiano. As crianças, por exemplo, tem muita facilidade em aprender estudos simples como as cores, o alfabeto, as formas geométricas, elementos da natureza entre outros ensinamentos. Essa facilidade se dá ao concretismo destes conhecimentos e suas evidentes presenças no dia a dia da criança.

Ao avançarmos nos estudos, o conhecimento trabalho em sala de aula vai se tornando mais teórico. Com isso, o aprendizado vai ficando mais comprometido. Na Matemática isto é bastante evidente, principalmente com alunos do Ensino Médio. É comum um professor ser questionado pelos alunos sobre a aplicabilidade do conhecimento na vida.

A proposta deste trabalho é amenizar esta ausência do conhecimento concreto. E fazer os alunos enxergarem a Matemática que foi desenvolvida a partir de instrumentos rudimentares, como uma régua sem marcações e um compasso. E que, através destes instrumentos, houve grande desenvolvimento matemático que é usado nos tempos atuais.

Com este trabalho podemos mostrar ao aluno um pouco das construções que eram usadas nos tempos de Euclides e sua evolução a partir da álgebra. Com as técnicas de construção, outros problemas podem ser solucionados. Neste trabalho vimos que algumas técnicas se repetem em contextos diferentes como a mediatriz que foi usada para encontrar o ponto médio de um segmento de reta, como também auxiliou na construção de um triângulo equilátero. Também percebemos que os procedimentos usados podem ser justificados com o uso da álgebra. Vimos que algumas equações eram resolvidas sem o uso de fórmulas ou métodos algébricos. Com isso, podemos associar o conhecimento prático a um conhecimento teórico.

Que este trabalho possa ser o ponto de partida para pesquisas mais abrangentes e que professores possam usá-lo como um instrumento de aula mais dinâmico mostrando aos seus alunos a verdadeira essência do conhecimento matemático, bem como suas origens e utilidades práticas no contexto de vida dos alunos. E que os alunos possam entender, com essas práticas, a origem do conhecimento que usamos atualmente nas salas de aula.

REFERÊNCIAS

GONÇALVES, Adilson: **Introdução a Álgebra**. 5 e.d. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

WAGNER, Eduardo: **Construções Geométricas**. 6 e.d. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

SILVA, A. G.: **Construções Geométricas com Régua e Compasso**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL 2013.

AZEVEDO, N. C.: **O número de Ouro e Construções Geométricas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática), Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia-GO, 2013.

COSTA, V. C.: **Números Construtíveis**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande-PB, 2013.

MEIRA, A. C. P. F.: **Aplicações da Álgebra no Estudo de Segmentos Construtíveis**, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei-MG, 2013

KILHIAN, K.: **Construções Geométricas**. Disponível em http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/. Acessado em 15/08/2015.