

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA HIDRÁULICA E AMBIENTAL  
MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM RECURSOS HÍDRICOS

FÁBIO EDUARDO FRANCO RODRIGUES FERREIRA

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE EFEITOS DINÂMICOS DE DISSIPACÃO DE  
ENERGIA EM TRANSIENTES HIDRÁULICOS

FORTALEZA

2011

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE EFEITOS DINÂMICOS DE DISSIPACÃO DE  
ENERGIA EM TRANSIENTES HIDRÁULICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Recursos Hídricos da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Orientador: Professor Marco Aurélio Holanda de Castro, PhD.

Fortaleza, 26 de janeiro de 2011

Esta dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Recursos Hídricos, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se à disposição dos interessados na Biblioteca Central da referida Universidade.

A citação de qualquer trecho desta Dissertação é permitida, desde que seja feita de acordo com as normas da ética científica.

---

Fábio Eduardo Franco Rodrigues Ferreira

Dissertação aprovada em 26 de janeiro de 2011.

Examinadores:

---

Professor Marco Aurélio Holanda de Castro (orientador), PhD.  
Universidade Federal do Ceará- UFC

---

Professor John Kenedy de Araújo, Doutor.  
Universidade Federal do Ceará – UFC

---

Professor Rogério Campos, PhD.  
Universidade de Fortaleza - UNIFOR

*“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”*

*“O que vale na vida não é o ponto de partida e sim a caminhada. Caminhando e semeando, no fim terás o que colher.”*

*Cora Coralina*

*“[...] idéia totalmente clara tende a ser vazia. Idéia boa sempre é um pouco torta, mal acabada, um tanto aérea, e aí permite aprender, mudar, saltar [...]”*

*Pedro Demo*

## AGRADECIMENTOS

A Deus cuja perfeição reside na criação do desconhecido.

À Universidade Federal do Ceará, por realizar a disseminação do conhecimento e a minha formação como estudante, profissional e pessoa.

Ao CNPQ pela concessão de subsídio financeiro para a conclusão deste trabalho.

Ao orientador e incentivador Professor PhD Marco Aurélio pelo apoio e direcionamento desta pesquisa; pelo estímulo na superação de desafios.

Ao Professor Dr. Jonh Kennedy por fornecer boa parte da base teórica relevante para minha pesquisa.

Ao Professor PhD Rogério Campos, por ter aceitado o convite para participar da banca e pela sua grande contribuição na área de hidráulica computacional.

Aos professores do mestrado em recursos hídricos pelo estímulo e crescimento acadêmico.

À minha esposa Mônica Alves e meu filho João Victor pelo amor, apoio e compreensão na realização deste trabalho.

Aos meus pais, pela cessão genética e por tudo que em mim existe, desde o conhecimento adquirido à compleição favorável, notadamente quanto à disposição de espírito.

Aos meus irmãos Ana Lucy, Lucelindo Junior e Luciana Kamila pelo amor e amizades recíprocos.

Ao amigo Thomas Lívio pela confiança e torcida na produção dessa dissertação.

Ao amigo Herbert Lima pelo seu apoio e confiança nessa minha trajetória dentro da Universidade.

Ao amigo João Marcelo que através de seu conhecimento computacional tornou palpável a realização deste trabalho.

Ao amigo Carlos Henrique pelo apoio e pelas frutíferas discussões teóricas.

Aos colegas do curso de mestrado Alessandro, Renata Shirley, Marcos Abílio pelo apoio nas disciplinas de mestrado.

Aos colegas do laboratório de hidráulica computacional Mauro César, Marcos Vinícius pelo compartilhamento de conhecimentos valiosos para minha formação.

Aos pesquisadores do Laboratório de hidráulica computacional que contribuíram por meio de suas teses e dissertações para a confecção deste trabalho.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2. 1 - Volume de controle (análise dinâmica) .....	5
FIGURA 2. 2 - Volume de controle (análise da continuidade).....	8
FIGURA 2. 3 - Malha regular. ....	13
FIGURA 2. 4 - Linhas características.....	13
FIGURA 2. 5 - Junção em série.....	26
FIGURA 2. 6 - Chaminé de equilíbrio.....	28
FIGURA 2. 7 - Tanque de alimentação unidirecional .....	32
FIGURA 2. 8 - Válvula antecipadora de onda .....	36
FIGURA 3. 1 - linhas características para o modelo de Brunone (1991).....	44
FIGURA 3. 2 - Elemento de Kelvin-Voigt. ....	60
FIGURA 3. 3 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt. ....	62
FIGURA 3. 4 – Fluxograma do modelo de simulação hidráulica. ....	76
FIGURA 3. 5- Fluxograma dos pontos interiores. ....	77
FIGURA 4. 1 – Sistema composto por reservatório, tubulação e válvula à jusante.....	87
FIGURA 4. 2 - Cota piezométrica no nó 9 (válvula): Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração de fator de atrito variável.....	88
FIGURA 4. 3 - Cota piezométrica no nó 5 (válvula): Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração do fator de atrito variável .....	90
FIGURA 4. 4 – Sistema de laboratório utilizado por Covas et al. (2004). ....	91
FIGURA 4. 5 – Cota piezométrica na válvula: Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração de atrito variável (BRUNONE, 1991) ou comportamento viscoelástico do tubo.....	92
FIGURA 4. 6 – Cota piezométrica na válvula: Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração de atrito variável (VARDY; HWANG; BROWN, 1993) ou comportamento viscoelástico do tubo.....	93
FIGURA 4. 7 – Carga no nó 1: Resultados numéricos para os modelos elástico e viscoelástico. ....	94
FIGURA 4. 8 – Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico sem mecanismo de proteção contra o golpe de aríete.....	96
FIGURA 4. 9 - Dados do one - way e tubos de ligação.....	97
FIGURA 4. 10 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem one-way. ....	98

FIGURA 4. 11 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem one-way.....	99
FIGURA 4. 12 - Dados das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização do one-way. ....	100
FIGURA 4. 13 - Dados da chaminé de equilíbrio e dos tubos de ligação. ....	101
FIGURA 4. 14 - Gráficos das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem chaminé de equilíbrio. ....	102
FIGURA 4. 15 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem chaminé de equilíbrio. ....	103
FIGURA 4. 16 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização da chaminé de equilíbrio.....	104
FIGURA 4. 17 - Dados da válvula de alívio para o modelo elástico. ....	105
FIGURA 4. 18 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem válvula de alívio .....	106
FIGURA 4. 19 - Dados da válvula de alívio para o modelo viscoelástico. ....	107
FIGURA 4. 20 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem válvula de alívio. ....	108
FIGURA 4. 21 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização da válvula de alívio.....	109
FIGURA 4. 22 - Dados de entrada da válvula antecipadora de onda para o modelo elástico. ....	110
FIGURA 4. 23 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem válvula antecipadora de onda.....	111
FIGURA 4. 24 - Dados de entrada da válvula antecipadora de onda para o modelo viscoelástico. ....	112
FIGURA 4. 25 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem válvula antecipadora de onda.....	113
FIGURA 4. 26 - Gráficos das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização da válvula antecipadora de onda.....	114

**LISTA DE TABELAS**

TABELA 4. 1 - Dados para o sistema experimental de Pezzinga e Scandura (1995).....	88
TABELA 4. 2 - Dados para o sistema experimental de Bergant e Simpson (1994) .....	90
TABELA A.1 - Dados experimentais de Pezzinga e Scandura(1995) .....	96
.....	96
TABELA A.2 - Dados experimentais Bergant e Simpson (1994).....	101
TABELA A. 3 - Dados experimentais de Covas <i>et al.</i> (2004).....	105

**LISTA DE SÍMBOLOS**

[F]	Unidade de força	-
[L]	Unidade de comprimento	-
[M]	Unidade de massa	-
[t]	Unidade de tempo	-
$a$	Celeridade	[L] / [t]
$a^*$	Aceleração da massa de fluido	[L] / [t] <sup>2</sup>
$A$	Área interna da secção transversal do tubo	[L] <sup>2</sup>
$C^+$	Característica positiva	-
$C^-$	Característica negativa	-
$D$	Diâmetro interno do tubo	[L]
$D_0$	Diâmetro interno inicial do tubo	[L]
$e$	Espessura da parede do tubo	[L]
$e_0$	Espessura inicial da parede do tubo	[L]
$E_0$	Módulo de elasticidade da parede do conduto	[F]/[L] <sup>2</sup>
$E_k$	Módulo de elasticidade da mola do elemento Kelvin-Voigt	[F]/[L] <sup>2</sup>
$f$	fator de atrito de Darcy-Weisbach	adimensional
$F$	Força devida à pressão	[F]
$g$	Aceleração da gravidade	[L]/[t] <sup>2</sup>
$H$	Cota piezométrica	[L]
$h_f$	Perda de carga total unitária	adimensional
$h_{fs}$	Perda de carga unitária para escoamento permanente	adimensional
$h_{ft}$	Perda de carga unitária para escoamento transitório	adimensional
$J$	Função fluência	[L] <sup>2</sup> /[F]
$J_0$	Coefficiente de fluência elástico	[L] <sup>2</sup> /[F]
$J_k$	Coefficiente de fluência da mola do elemento Kelvin-Voigt	[L] <sup>2</sup> /[F]
$K_3$	Coefficiente de decaimento de Brunone	adimensional
$L$	Comprimento da tubulação	[L]
$m$	massa	[M]

$P$	Pressão	$[F]/[L]^2$
$P_0$	Pressão inicial	$[F]/[L]^2$
$Q$	Vazão	$[L]^3/[t]$
$r_0$	Raio interno do tubo	$[L]$
Re	Número de Reynolds	adimensional
$S$	Força cisalhante entre o elemento de fluido e o conduto	$[F]$
$t$	Tempo	$[t]$
$u$	Tempo utilizado na integral de convolução	$[t]$
$V$	Velocidade média do fluido	$[L]/[t]$
$W$	Função peso; peso	adimensional; $[F]$
$W_{app}$	Função peso aproximada	adimensional
$x$	Coordenada ao longo do eixo do tubo	$[L]$
$z$	Cota topográfica	$[L]$
$\Delta t$	Passo de tempo	$[t]$
$\Delta x$	Elemento de discretização ao longo do comprimento da tubulação	$[L]$
$\varepsilon$	Deformação total	adimensional
$\varepsilon_e$	Deformação instantânea elástica	adimensional
$\varepsilon_r$	Deformação lenta	adimensional
$\gamma$	Peso específico do fluido	$[F]/[L]^3$
$\lambda$	Multiplicador escalar utilizado no método das características	$[t]$
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido	$[F][t]/[L]^2$
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido	$[L]^2/[t]$
$\rho$	Massa específica do fluido	$[M]/[L]^3$
$\sigma$	Tensão	$[F]/[L]^2$
$\tau_k$	Tempo de relaxação do amortecedor do elemento Kelvin-Voigt	$[t]$
$\psi$	Parâmetro dependente das propriedades elásticas do tubo	adimensional
$\Psi$	Tempo adimensional	adimensional

## RESUMO

Elevados níveis de pressão provocados pelo desligamento de bombas são responsáveis pelo elevado índice de danos estruturais em adutoras. Um controle efetivo destas perdas requer um melhor dimensionamento do sistema ou dos dispositivos de atenuação do golpe de aríete. Esse ajuste depende das formulações propostas para as equações de continuidade e momento do golpe de aríete. Neste sentido, a consideração de modelos mais precisos tem se revelado útil para o dimensionamento de sistemas hidráulicos. Muitas análises têm sido feitas para transientes provocados por fechamento ou abertura de válvulas, mas poucos avanços têm sido feitos na análise de transientes provocados pelo desligamento de bombas. Assim, o principal objetivo deste trabalho é implementar um programa computacional que leve em consideração formulações de fator de atrito variável e comportamento mecânico de condutos plásticos em transientes provocados por desligamento de bomba em adutoras. Resultados satisfatórios foram obtidos para um modelo hidráulico que considere o comportamento viscoelástico dos tubos. Os modelos de atrito variável não apresentaram resultados satisfatórios para esse tipo de evento transiente.

**Palavras-chave:** Hidráulica transiente; fator de atrito variável; viscoelasticidade.

## ABSTRACT

Elevated pressures caused by sudden and unexpected shutdown of pumps are usually responsible for structural damage in water pipes. An effective control of these losses requires an adequate designing of system or devices whose purpose is relieving the water hammer effects. This adjustment depends on the proposed formulations for the equations of continuity and momentum of the water hammer phenomenon. In this sense, the consideration of more accurate models has been useful for the designing of hydraulic systems. Many analyses have been made for transients caused by opening or closing of valves, but little progress has been made in the analysis of transients caused by sudden and unexpected shutdown of pumps. Thus, the main objective of this work is to implement a computational program that takes into consideration formulations of variable friction term and mechanical behavior of plastic pipes in transients caused by sudden pump shutdown in water pipe. Satisfactory results were obtained for a hydraulic model that considers the viscoelastic behavior of the pipes. The variable friction models showed no satisfactory results for this type of transient event.

**Keywords:** hydraulic transient, variable friction term, viscoelasticity.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 OBJETIVOS.....</b>	<b>2</b>
<b>1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....</b>	<b>3</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1 MODELO DA COLUNA ELÁSTICA .....</b>	<b>4</b>
2.1.1 Equação do momento .....	4
2.1.2 Equação da continuidade .....	8
<b>2.2 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS .....</b>	<b>12</b>
2.2.1 Discretização do sistema – Malha de cálculo .....	13
2.2.2 Equações características .....	14
<b>2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO .....</b>	<b>17</b>
2.3.1 Reservatório com nível constante a montante.....	17
2.3.2 Reservatório com nível constante a jusante .....	18
2.3.3 Bomba centrífuga à montante .....	20
2.3.4 Junção em série .....	26
2.3.5 Chaminé de equilíbrio.....	27
2.3.6 Tanque de alimentação unidirecional .....	32
2.3.7 Válvula à jusante do tubo.....	34
2.3.8 Valvula antecipadora de onda .....	36
<b>3. METODOLOGIA .....</b>	<b>41</b>
<b>3.1 FATOR DE ATRITO VARIÁVEL NO GOLPE DE ARIETE .....</b>	<b>41</b>
3.1.1 Modelo de Brunone (1991).....	41
3.1.2 Modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993).....	47
<b>3.2 FLUXOS TRANSIENTES EM CONDUTOS PLÁSTICOS .....</b>	<b>58</b>
3.2.1 Modelo generalizado de Kelvin-Voigt .....	60
<b>3.3 ESQUEMA NUMÉRICO .....</b>	<b>73</b>
3.3.1 Fluxograma do modelo de simulação hidráulica.....	73
3.3.2 Consideração de atrito variável – Modelo de Brunone (1991) .....	78
3.3.3 Consideração de atrito variável – Modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993).....	82
3.3.4 Comportamento viscoelástico do conduto .....	85
<b>4. SIMULAÇÕES E RESULTADOS .....</b>	<b>87</b>

<b>4.1 SIMULAÇÃO PEZZINGA E SCANDURA – ANÁLISE DO ATRITO VARIÁVEL</b>	<b>87</b>
<b>4.2 SIMULAÇÃO BERGANT E SIMPSON – ANÁLISE DO ATRITO VARIÁVEL</b>	<b>89</b>
<b>4.3 SIMULAÇÃO COVAS – AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO</b>	<b>91</b>
<b>4.4 SIMULAÇÕES NA ADUTORA CUIÁ</b>	<b>93</b>
4.4.1 Adutora Cuiá sem mecanismo de proteção	94
4.4.2 Adutora Cuiá com tanque de alimentação unidirecional	97
4.4.3 Adutora Cuiá com chaminé de equilíbrio	101
4.4.4 Adutora Cuiá com válvula de alívio – Modelo elástico	105
4.4.5 Adutora Cuiá com válvula de alívio – Modelo viscoelástico	107
4.4.6 Adutora Cuiá com válvula antecipadora de onda – modelo elástico	110
4.4.7 Adutora Cuiá com válvula antecipadora de onda – modelo viscoelástico	112
<b>5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>115</b>
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>117</b>
<b>APÊNDICE 1 – DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO (3.13)</b>	<b>120</b>
<b>ANEXO 1 – DADOS EXPERIMENTAIS DE CARGA</b>	<b>121</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas de adução compostos por condutos sob pressão consistem em estruturas responsáveis pelo transporte da água desde a sua origem até a distribuição. O escoamento através dessas estruturas pode processar-se por meio de gravidade ou bombeamento. Esses tipos de escoamentos, apesar de distintos, apresentam pontos em comum no que diz respeito às variações de velocidade e pressão do fluido com o tempo e espaço.

A ocorrência de perturbações nesses regimes de escoamentos, como fechamento ou abertura de válvulas e acionamento ou desligamento de bombas, produzem os escoamentos não permanentes. Esses fluxos são caracterizados por variações temporais e espaciais na velocidade e pressão do fluido. No presente estudo será analisado o regime não permanente localizado temporalmente entre dois regimes permanentes. Esse tipo de escoamento intermediário é denominado estado transiente.

Apesar das equações para descrição do fenômeno transiente serem conhecidas há muito tempo, elas não conseguem modelar com total precisão os dados experimentais observados. Isso se deve às simplificações inerentes à formulação matemática e ao esquema numérico utilizados.

No que diz respeito à modelagem matemática pode-se destacar as simplificações relativas ao termo de atrito. Na abordagem tradicional, utiliza-se a formulação quase-estática para o termo de atrito. Ou seja, o termo de atrito é determinado como se em cada instante o regime de escoamento fosse permanente. Como essa simplificação produz resultados imprecisos em relação aos dados experimentais, novas formulações foram propostas para o termo de atrito com o intuito de produzir resultados mais realistas.

Outra simplificação inerente a modelagem matemática diz respeito à formulação do comportamento reológico das paredes de condutos sob pressão. A abordagem clássica considera que o material do tubo possui comportamento mecânico elástico linear. Ou seja, a energia mecânica do sólido se conserva durante a deformação e a tensão e a deformação estão relacionadas através de uma equação linear. Essa aproximação é satisfatória para tubos de metal e concreto. Por outro lado ela é provavelmente imprecisa no que diz respeito aos tubos plásticos como o polietileno e o PVC, que exibem comportamento mecânico viscoelástico.

A produção de resultados mais precisos tem uma implicação prática muito importante que é a de fornecer subsídios para o dimensionamento eficaz dos dispositivos atenuadores do

golpe de aríete e dessa forma evitar ou reduzir os incidentes provocados por eventos transitórios.

Apesar dos modelos analisados já terem sido abordados em outros trabalhos como Soares (2007), Covas, Ramos e Almeida (2005), Covas *et al.* (2005), Viaro (2001), dentre outros, a sua aplicação ficou restrita a transientes produzidos por manobras em válvulas. Em relação a transientes produzidos por acionamento ou desligamento de bombas, que é o foco deste trabalho, os resultados e simulações são escassos. Assim, o presente estudo visa à avaliação de modelos de atrito variável e modelo reológico viscoelástico em transientes provocados por falha em bombas.

## 1.1 OBJETIVOS

Constitui objetivo deste trabalho a implementação de modelos matemático-computacionais para análise do transiente hidráulico em sistemas de adução de água, utilizando formulações distintas para dissipação de energia e comportamento mecânico do conduto, com vistas a obter um modelo mais adequado para esse tipo sistemas.

De um modo específico, os principais objetivos deste trabalho são:

1. Implementação de um simulador para análise hidráulica em transientes provocados por falha no bombeamento, considerando fator de atrito variável e comportamento viscoelástico de condutos plásticos;
2. Avaliação dos modelos de Vardy, Hwang e Brown (1993) e Brunone (1991) para atrito variável na modelagem de sistemas de adução de água;
3. Avaliação do emprego da formulação viscoelástica na modelagem de sistemas de adução de água;
4. Comparação entre os modelos computacionais para os transientes provocados por falha no bombeamento e por fechamento de válvula.

## 1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No capítulo 2 são apresentadas as equações diferenciais, em sua formulação clássica, para transientes hidráulicos em condutos pressurizados e a solução numérica das mesmas pelo método das características. Em seguida, são apresentadas as condições de contorno utilizadas nas simulações hidráulicas.

No Capítulo 3 as equações de continuidade e momento do transiente são reformuladas de forma a considerar os efeitos dinâmicos de dissipação de energia, atrito variável e comportamento viscoelástico das paredes do tubo. As equações reformuladas são então resolvidas pelo método das características. Em seguida, é apresentado o esquema numérico utilizado no modelo computacional.

No Capítulo 4 são apresentadas as simulações e comparações entre os modelos numéricos de dissipação de energia. São considerados os fenômenos transientes produzidos por fechamento de válvula e desligamento de bomba centrífuga em adutoras, providas ou não de dispositivos de atenuação do golpe de aríete.

No Capítulo 5 são apresentadas as principais conclusões desta pesquisa e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 MODELO DA COLUNA ELÁSTICA

#### 2.1.1 Equação do momento

No estudo de transientes hidráulicos é comum a abordagem da coluna elástica. Essa abordagem consiste em considerar as paredes do conduto linearmente elásticas. Segundo Chaudhry (1979), essa hipótese é válida para alguns tipos de condutos como os feitos de metal ou concreto. Além dessa simplificação para o comportamento mecânico do conduto, adota-se como hipótese simplificadora a formulação quase-permanente para a dissipação de energia por atrito. Por fim, admite-se que o fluxo é unidimensional, ou seja, a distribuição de velocidade é uniforme em cada seção transversal do tubo.

A descrição do escoamento transiente é feita em termos das funções carga  $H(x,t)$  e vazão  $Q(x,t)$ . Essas funções estão relacionadas através da equação dinâmica e da equação da continuidade que consistem em equações diferenciais parciais de primeira ordem.

Para obtenção da equação dinâmica, Chaudhry (1979) se vale da análise do movimento de um elemento de fluido. Considerar um elemento de fluido no interior do conduto com área transversal  $A$  e comprimento  $\Delta x$  (FIGURA 2.1).

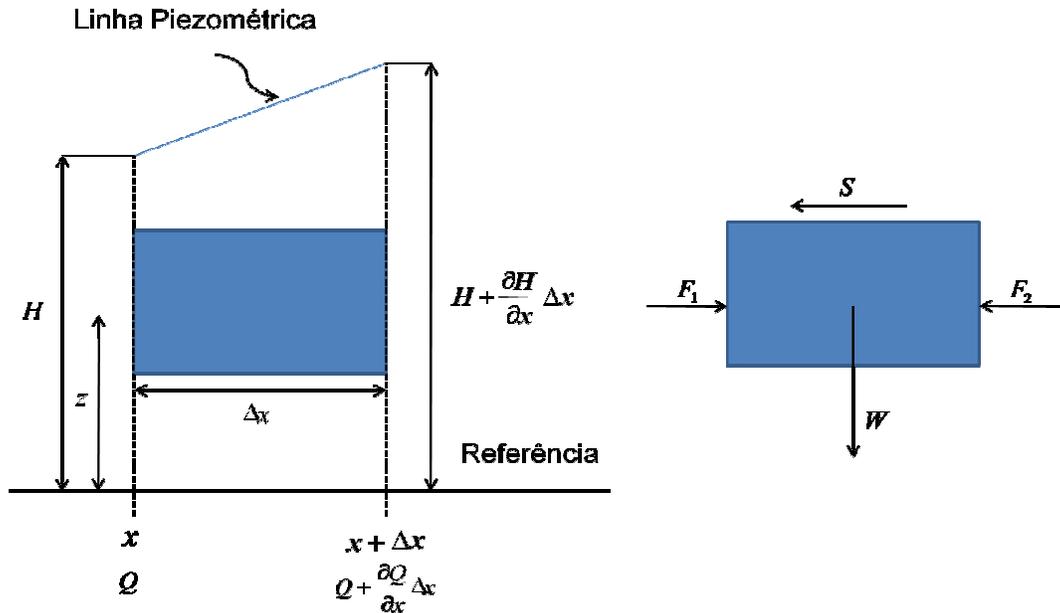


FIGURA 2. 1 - Volume de controle (análise dinâmica)

A partir do diagrama de corpo livre, na figura 2.1, fica claro que existem apenas três forças atuando no elemento de fluido, na direção  $x$  ( $F_1$ ,  $F_2$  e  $S$ ).

As forças  $F_1$  e  $F_2$  são devidas a pressão e a força  $S$  é a força cisalhante resultante do atrito entre o elemento de fluido e a parede do conduto. Como o escoamento é considerado unidimensional, grandezas como carga, pressão e velocidade são constantes para uma dada seção transversal. Utilizando-se a figura 2.1, a força  $F_1$ , devida à pressão, pode ser expressa por:

$$F_1 = \rho g A (H - z) \quad (2.1)$$

Onde  $F_1$  é a força devida à pressão a montante do elemento de fluido ([F]);  $\rho$  é a massa específica do fluido ( $[M][L]^{-3}$ );  $g$  é a aceleração da gravidade ( $[L][t]^{-2}$ );  $A$  é a área da seção transversal ( $[L]^2$ );  $H$  é a cota piezométrica ([L]);  $z$  é a cota topográfica ([L]).

Para a determinação da força devida à pressão na seção 2, deve-se notar, da figura 2.1, que a carga da seção 2 equivale à carga da seção 1 adicionada a um incremento. Como  $H = H(x, t)$ , então uma variação em  $x$  mantendo o  $t$  constante produz uma variação no valor de  $H$ . Essa variação é mensurada através do uso da taxa de variação da carga em relação à distância  $x$ . Como resultado, a força devida a pressão na seção 2 é dada por:

$$F_2 = \rho g A \left( H - z + \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x \right) \quad (2.2)$$

Onde  $F_2$  é a força devida à pressão a jusante do elemento de fluido ([F]);  $x$  é a coordenada ao longo do eixo do tubo ([L]);  $\Delta x$  é o elemento de discretização ao longo do comprimento da tubulação ([L]).

Considerando que a fórmula de Darcy- Weisbach é usada para o cálculo da dissipação de energia por atrito então a força cisalhante é:

$$S = \frac{\rho f V^2}{8} \pi D \Delta x \quad (2.3)$$

Onde  $S$  é a força cisalhante entre o elemento de fluido e a parede do conduto ([F]);  $f$  é o fator de atrito de Darcy- Weisbach [adimensional];  $V$  é a velocidade média de escoamento do fluido ([L][t]<sup>-1</sup>);  $D$  é o diâmetro interno do tubo ([L]).

A soma vetorial das forças  $F_1$ ,  $F_2$  e  $S$  produz a força horizontal resultante:

$$F = -\rho g A \left( \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x \right) - \frac{\rho f V^2}{8} \pi D \Delta x \quad (2.4)$$

Com base nessa equação de força, o objetivo é explicitar uma relação entre velocidade e pressão. Essa relação pode ser obtida a partir da utilização da equação de movimento de Newton:

$$F = ma^* \quad (2.5)$$

Onde  $m$  é a massa do elemento de fluido ( $[M]$ );  $a^*$  é a aceleração do elemento de fluido ( $[L][t]^{-2}$ ).

A massa do elemento fluido pode ser expressa em termos das dimensões e características físicas do elemento de fluido e a aceleração pode ser escrita como a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo.

$$m = \rho A \Delta x \quad (2.6)$$

$$a = \frac{dV}{dt} \quad (2.7)$$

A substituição das equações (2.4), (2.6) e (2.7) na lei de Newton fornece:

$$\rho A \frac{dV}{dt} \Delta x = -\rho g A \left( \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x \right) - \frac{\rho f V^2}{8} \pi D \Delta x \quad (2.8)$$

Dividindo ambos os membros da equação (2.8) por  $\rho A \Delta x$ .

$$\frac{dV}{dt} = -g \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{f V^2}{8A} \pi D \quad (2.9)$$

Para tubos de seção circular, a área da seção transversal é dada por  $A = \frac{\pi D^2}{4}$ .

$$\frac{dV}{dt} = -g \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{f V^2}{2D} \quad (2.10)$$

Aplicando o conceito de derivada total para a aceleração, a equação (2.10) passa a ser expressa apenas por derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -g \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{f V^2}{2D} \quad (2.11)$$

Em muitos problemas práticos, o termo  $V \frac{\partial V}{\partial x}$  é muito menor do que o termo  $\frac{\partial V}{\partial t}$ . A equação (2.11) pode ser simplificada, desprezando esse termo. Além disso, o termo relacionado à dissipação de energia deve ser modificado para levar em conta o fluxo reverso. Assim, para que sejam considerados escoamentos em qualquer sentido (positivo ou negativo) no conduto, a potência  $v^2$  deve ser alterada para  $V|V|$ . Aplicando essas modificações e reescrevendo a equação (2.11) em termos de vazão  $Q = AV$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2.12)$$

Onde  $Q$  é a vazão do escoamento ( $[L]^3[t]^{-1}$ ).

### 2.1.2 Equação da continuidade

Para a dedução da equação da continuidade, utiliza-se o volume de controle esquematizado na figura 2.2. A análise dos fluxos de massa é feita em relação a esse volume de controle. Ou seja, são analisados todos os mecanismos de variação de massa dentro do volume de controle devido ao escoamento do fluido.

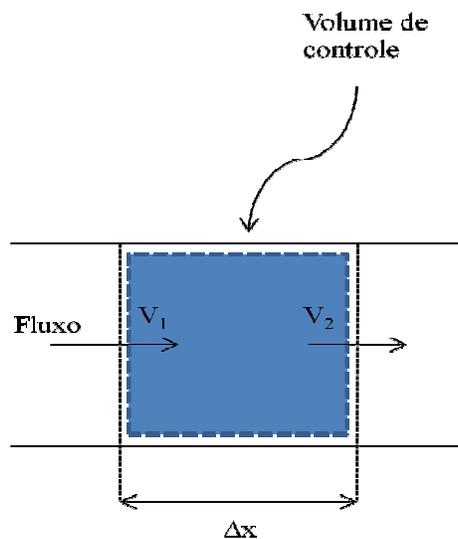


FIGURA 2. 2 - Volume de controle (análise da continuidade)

De acordo com Chaudhry (1987), a partir do teorema de Reynolds, a equação de conservação de massa para o volume de controle da figura 2.2 se resume a:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} \Delta x + (\rho AV)_2 - (\rho AV)_1 = 0 \quad (2.13)$$

Onde  $(\rho AV)_i$  representa a taxa de variação mássica na seção  $i$ ;

Dividindo a expressão (2.13) por  $\Delta x$  e tomando um volume de controle diferencial  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

Fazendo-se a expansão das derivadas parciais, a equação (2.14) adquire a seguinte configuração:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} A + \frac{\partial A}{\partial t} \rho + AV \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

Pode-se notar que algumas das parcelas dessa equação podem ser organizadas para compor uma derivada total. Agrupando as parcelas e dividindo a equação (2.15) por  $\rho A$  obtém-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

Esta relação é válida para tubos convergentes, divergentes ou tubos cilíndricos. Aplicando a definição de módulo de elasticidade volumétrica pode-se estabelecer uma relação entre a primeira parcela da equação 2.17 (compressibilidade) e esse parâmetro:

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \quad (2.18)$$

Onde  $K$  é o módulo de elasticidade volumétrica ( $[F][L]^{-2}$ );  $p$  é a pressão no fluido ( $[F][L]^{-2}$ ).

A expansão da parede do tubo por área por tempo é dada por:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{eE_0} \frac{dp}{dt} \quad (2.19)$$

Onde  $e$  é a espessura da parede do tubo ( $[L]$ );  $E_0$  é o módulo de elasticidade da parede do tubo ( $[F][L]^{-2}$ ).

Fazendo-se as devidas substituições:

$$\frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \left( 1 + \frac{KD}{eE} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

A celeridade da onda para um conduto com parede de pequena espessura e com juntas de dilatação é:

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + [(K/E)(D/e)]}} \Rightarrow \rho a^2 = \frac{K}{1 + [(K/E)(D/e)]} \quad (2.21)$$

Onde  $a$  é a celeridade da onda de pressão ( $[L][t]^{-1}$ ).

Substituindo o quadrado da celeridade na relação (2.20) e desenvolvendo  $\frac{dp}{dt}$  em termos de derivadas parciais:

$$\frac{1}{\rho a^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Para aplicações em engenharia o termo convectivo é desprezível em relação ao termo  $\frac{\partial p}{\partial t}$ , o que gera:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

Convertendo as grandezas pressão e velocidade, na equação (2.23), para carga e vazão, respectivamente, tem-se:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

As equações de governo (2.12) e (2.24) podem ser compactadas em uma única equação no formato matricial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} Q \\ H \end{Bmatrix} = -[B(Q, H)] \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} Q \\ H \end{Bmatrix} - [G(Q, H)] \quad (2.25)$$

Onde:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & gA \\ \frac{a^2}{gA} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{Bmatrix} \frac{fQ|Q|}{2DA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para determinar o tipo de equação diferencial basta obter os autovalores  $\lambda$  da matriz  $B$ . Esses valores são raízes do polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \lambda^2 - a^2 = 0 \quad (2.26)$$

Como  $a$  representa um número real, os autovalores são números reais e assim as equações diferenciais parciais são do tipo hiperbólicas. De acordo com Peroba Junior (2007), esse tipo de equação é compatível com o Método das Características.

## 2.2 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

O método das características é uma técnica usada para resolver equações diferenciais parciais. O objetivo é explicitar uma função de duas variáveis  $x$  e  $t$ . Essa função define uma superfície sobre o plano  $x - t$ . O procedimento consiste em transformar a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária. Para isso, estabelece-se uma relação entre as variáveis independentes  $x$  e  $t$  de forma que, ao longo do domínio definido pela curva  $x(t)$ , a equação original se torne uma equação diferencial ordinária e o problema se torne mais tratável. Em alguns casos, incluindo as equações do golpe de aríete, a equação diferencial ordinária resultante não possui solução analítica. A sua solução depende da utilização de esquemas numéricos. Esses esquemas se valem de malhas de cálculo como a apresentada na Figura 2.3, onde a determinação do valor funcional em um ponto do domínio depende dos valores funcionais obtidos em outros pontos da malha. Para que seja possível o procedimento de cálculo numérico, nesses moldes, alguns valores funcionais devem ser fornecidos. Para o caso do transiente hidráulico, devem ser fornecidos os valores das variáveis independentes (vazão e carga) para o estado permanente imediatamente anterior à perturbação no fluido. Além disso, para que se tenha uma solução completa, as condições de contorno também devem estar disponíveis. Assim, durante o procedimento de cálculo no transiente hidráulico, os valores funcionais das variáveis independentes são obtidos no sentido dos eixos  $x$  e  $t$ .

### 2.2.1 Discretização do sistema – Malha de cálculo

Na malha regular de cálculo (Figura 2.3) os valores de carga e vazão em um dado ponto são calculados a partir dos valores dessas grandezas em um passo de tempo anterior.

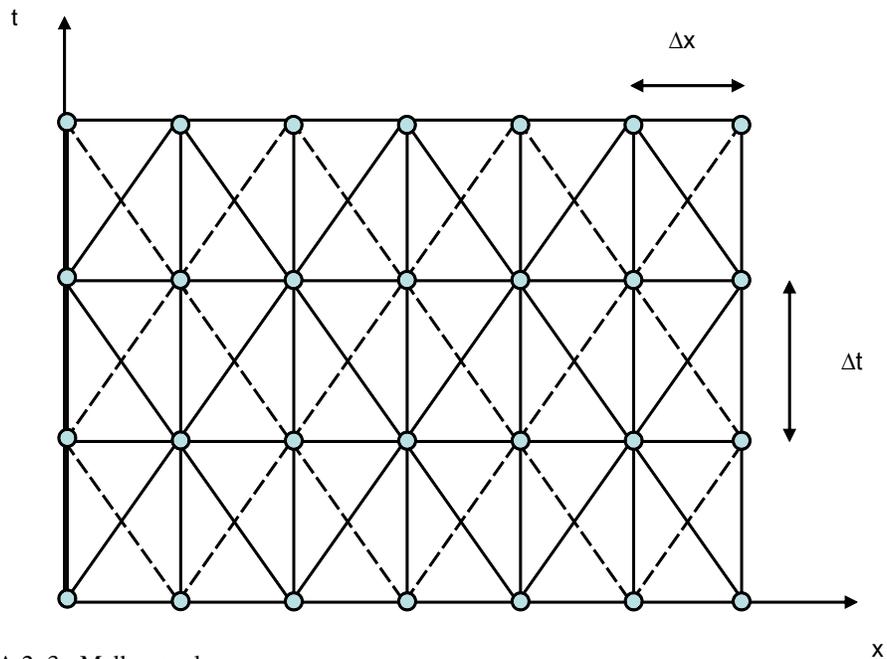


FIGURA 2. 3 - Malha regular.

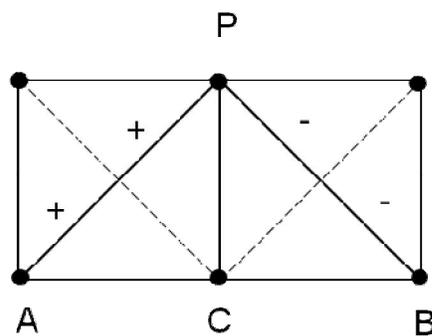


FIGURA 2. 4 - Linhas características.

Da figura 2.4, pode-se notar que é possível obter os valores de vazão e carga em um ponto P no instante  $t$  a partir dos pontos A e B em um instante anterior  $t - \Delta t$ .

De acordo com Rocha (1998), o esquema de discretização representado pela malha regular (Figura 2.3) apresenta duas malhas sobrepostas o que implica em uma menor estabilidade do programa para sistemas mais complexos. Além disso, esse tipo de formulação requer um esforço computacional relativamente grande. Por outro lado, este esquema apresenta uma menor complexidade na implementação de modelos em comparação com outros esquemas de discretização. Para sistemas mais simples, como as adutoras, esta malha é satisfatória para o cálculo do transiente hidráulico. No presente trabalho, a malha regular é utilizada como plataforma para a técnica de diferenças finitas denominada método das características.

### 2.2.2 Equações características

No método das características, as equações de continuidade e momento são, primeiro, convertidas em equações diferenciais ordinárias e depois resolvidas através de uma técnica de diferenças finitas explícita. Segundo Chaudhry (1979), o método tem como vantagem o fato de poder ser aplicado adequadamente a sistemas com condições de contorno complexas. Por outro lado, apresenta a desvantagem de exigir uma maior discretização da malha para satisfazer a condição de estabilidade da solução.

Este método consiste em transformar um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas em um conjunto de equações diferenciais ordinárias que são integradas no intervalo de um passo de tempo. A derivação que se segue foi proposta por Chaudhry (1979) com base em uma abordagem geral feita por Lister (1960). Como foi estabelecido, para o modelo elástico, as equações de governo do fluxo transiente são:

$$L_1 = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2.27)$$

$$L_2 = a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

Tomando uma combinação linear dessas duas equações:

$$L = L_1 + \lambda L_2 \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| + \lambda \left( a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Onde  $\lambda$  é um multiplicador usado na transformação das equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias ([t]).

Agrupando as derivadas parciais em  $Q$  e  $H$ :

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \lambda gA \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2.31)$$

Para a determinação de  $\lambda$  e transformação da equação diferencial parcial em equação diferencial ordinária utiliza-se o conceito de derivada total para os termos entre parênteses.

Para que os termos em parênteses sejam derivadas temporais totais é necessário que os fatores dependentes de  $\lambda$ , multiplicativos das derivadas convectivas, sejam uma velocidade de transporte. Essa restrição conduz às seguintes equações:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{dx}{dt} = \lambda a^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm a \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{a} \quad (2.32)$$

Como  $\lambda$  admite dois valores, a combinação das duas equações diferenciais parciais converte-se em duas equações diferenciais ordinárias. Essas equações são denominadas *equações de compatibilidade*. São válidas apenas em pontos interiores do tubo. Para as extremidades do conduto são necessárias condições de contorno.

Substituindo os valores de  $\lambda$ , as *equações de compatibilidade* resultantes são as seguintes:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2.34)$$

A equação (2.33) é válida para a condição  $\frac{dx}{dt} = a$  e a equação (2.34) é válida para  $\frac{dx}{dt} = -a$ .

O próximo passo é integrar numericamente as *equações de compatibilidade*. Para isso, é necessário que as expressões (2.33) e (2.34) estejam na forma diferencial. Integrando essas expressões no domínio de cada linha característica, de acordo com a notação da figura 2.4, obtém-se:

$$\int_A^P dQ + \int_A^P \frac{gA}{a} dH + \int_A^P \frac{f}{2DA} Q|Q| dt = 0 \quad (2.35)$$

$$\int_B^P dQ - \int_B^P \frac{gA}{a} dH + \int_B^P \frac{f}{2DA} Q|Q| dt = 0 \quad (2.36)$$

Fazendo-se uma aproximação de primeira ordem para a terceira parcela das equações resulta:

$$C^+ : Q_P = Q_A - \frac{gA}{a} H_P + \frac{gA}{a} H_A - \frac{f}{2DA} Q_A |Q_A| \Delta t \quad (2.37)$$

$$C^- : Q_P = Q_B + \frac{gA}{a} H_P - \frac{gA}{a} H_B - \frac{f}{2DA} Q_B |Q_B| \Delta t \quad (2.38)$$

Como os pontos A e B são relativos a passos de tempo anteriores ao tempo de cálculo então os valores de vazão e carga nesses pontos são conhecidos (malha regular) e o sistema composto pelas equações (2.37) e (2.38) trata-se de um sistema linear. As equações podem ser apresentadas em um formato mais simples:

Equação característica positiva:

$$C^+ : Q_P = C_P - \frac{gA}{a} H_P \quad (2.39)$$

Onde:

$$C_P = Q_A + \frac{gA}{a} H_A - \frac{f}{2DA} Q_A |Q_A| \Delta t$$

Equação característica negativa:

$$C^- : Q_P = C_N + \frac{gA}{a} H_P \quad (2.40)$$

Onde:

$$C_N = Q_B - \frac{gA}{a} H_B - \frac{f}{2DA} Q_B |Q_B| \Delta t$$

## 2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

### 2.3.1 Reservatório com nível constante a montante

Para essa condição de contorno parte-se do pressuposto que a carga no reservatório é constante durante o evento transiente. De fato, essa suposição é plausível para reservatórios

com grandes dimensões em eventos transitórios de duração reduzida. Além disso, se as perdas devidas ao fluxo reservatório-tubo são desprezíveis então pode-se estabelecer a aproximação:

$$H_{1,t} = H_{res} \quad (2.41)$$

Onde  $H_{res}$  é a altura da superfície da água do reservatório em relação a um nível de referência ([L]);  $H_{1,t}$  é a carga da primeira seção do tubo diretamente ligado ao reservatório em cada passo de tempo ([L]).

Como o reservatório está à montante, a vazão nesta condição de contorno será obtida através da equação característica negativa a partir dos dados de carga neste ponto e de dados de vazão e carga de um ponto em passo de tempo anterior. Para o modelo elástico apresentado por Chaudhry (1979), a formulação para vazão é a seguinte:

$$Q_{1,t} = C_n + \frac{gA}{a} H_{res} \quad (2.42)$$

Onde  $Q_{1,t}$  é a vazão no contorno em um dado passo de tempo ( $[L]^3[t]^{-1}$ );

### 2.3.2 Reservatório com nível constante a jusante

A carga em um ponto da malha localizado na extremidade jusante do sistema, considerando as perdas de carga na entrada do reservatório é expressa por:

$$H_p = H_{res} - (1-k) \frac{Q_p^2}{2gA^2} \quad (2.43)$$

Onde  $k$  é o coeficiente de perda de carga (adimensional);  $H_p$  é a carga no ponto da malha localizado na extremidade jusante do sistema ([L]);  $Q_p$  é a vazão no ponto localizado na extremidade jusante do sistema ( $[L]^3[t]^{-1}$ ).

Para essa condição de contorno utiliza-se a equação característica positiva em conjunto com a equação (2.43). Eliminando  $H_p$  desse sistema tem-se:

$$k_2 Q_p^2 - Q_p + k_3 = 0 \quad (2.44)$$

Onde:

$$k_2 = \frac{C_a(1-k)}{2gA^2}$$

$$k_3 = C_p - C_a H_{res}$$

$$C_a = \frac{gA}{a}$$

Resolvendo a equação do segundo grau em  $Q_p$ :

$$Q_p = \frac{1 + \sqrt{1 - 4k_2 k_3}}{2k_2} \quad (2.45)$$

A carga  $H_p$  pode ser determinada agora, a partir da equação característica positiva. Desprezando as perdas de carga na saída e a energia cinética:

$$H_p = H_{res} \quad (2.46)$$

Aplicando a equação característica positiva para essa hipótese, obtém-se:

$$Q_P = C_P - C_a H_{res} \quad (2.47)$$

### 2.3.3 Bomba centrífuga à montante

O desenvolvimento de uma condição de contorno exige o conhecimento da relação entre vazão e carga neste contorno. Para uma bomba centrífuga, a vazão depende da velocidade de rotação,  $N$ , da carga de bombeamento,  $H$ , e as variações de velocidade do estado transiente dependem do torque,  $T$  e do momento de inércia combinado do motor, bomba e fluido entrando no rotor da bomba. Essas variáveis são geralmente especificadas através das curvas características da bomba. Em geral os dados completos das características da bomba não estão disponíveis. Então as características de uma bomba com a mesma velocidade específica podem ser usadas como aproximação.

Dados para características de protótipos de bombas são obtidos de resultados de testes através do uso de relações homólogas. Duas bombas são homólogas se são geometricamente semelhantes e o modelo de vazões delas é semelhante. Para bombas homólogas as razões entre variáveis adimensionais são válidas:

$$\frac{h}{(\alpha^2 + v^2)} = Cte \quad (2.48)$$

$$\frac{\alpha}{v} = Cte \quad (2.49)$$

Para:

$$v = \frac{Q}{Q_R}$$

$$h = \frac{H}{H_R}$$

$$\alpha = \frac{N}{N_R}$$

$$\beta = \frac{T}{T_R}$$

Onde  $Q$  é a vazão na bomba ( $[L]^3[t]$ );  $H$  é a carga de bombeamento ( $[L]$ );  $N$  é a velocidade rotacional nominal da bomba ( $[t^{-1}]$ );  $T$  é o torque nominal da bomba centrífuga ( $[F][L]$ ). As variáveis  $\nu$ ,  $h$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são adimensionais. O subscrito  $R$  indica o valor das variáveis para condições nominais. Os sinais de  $\alpha$  e  $\nu$  dependem das zonas de operação.

No  $i$ -ésimo passo de tempo, os valores das variáveis  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $h$  e  $\beta$  no início do passo de tempo são conhecidos e os valores no fim do passo de tempo,  $\alpha_p$ ,  $\nu_p$ ,  $h_p$  e  $\beta_p$ , devem ser computados.

Para determinar o valor destas variáveis, deve-se obter a equação do segmento das características da bomba, correspondente a  $\alpha_p$  e  $\nu_p$ . Entretanto, desde que os valores destas variáveis são inicialmente desconhecidos, pode-se usar como primeira estimativa, seus valores determinados por extrapolação dos valores conhecidos no passo de tempo anterior.

$$\alpha_e = \alpha_i + \Delta\alpha_{i-1} \quad (2.50)$$

$$\nu_e = \nu_i + \Delta\nu_{i-1} \quad (2.51)$$

Onde  $\alpha_e$  e  $\nu_e$  são os valores estimados no fim do  $i$ -ésimo passo de tempo. Para um passo de tempo pequeno, uma vez que a vazão na bomba varia gradualmente, a extrapolação linear é uma estimativa suficientemente precisa. Os pontos  $\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\nu}$  são calculados e suas ordenadas  $h/(\alpha^2 + \nu^2)$   $\beta/(\alpha^2 + \nu^2)$  (parâmetros de Suter) são procuradas nos valores armazenados. A partir daí, as constantes das equações dos segmentos de linha são obtidas.

As equações das linhas retas são:

$$\frac{h_P}{\alpha_P^2 + \nu_P^2} = a_1 + a_2 \tan^{-1} \frac{\alpha_P}{\nu_P} \quad (2.52)$$

$$\frac{\beta_P}{\alpha_P^2 + \nu_P^2} = a_3 + a_4 \tan^{-1} \frac{\alpha_P}{\nu_P} \quad (2.53)$$

Onde  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são constantes adimensionais para as retas (2.52) e (2.53).

A equação (2.54) representa a carga total na bomba:

$$H_{P,i} = H_{suc} + H_P - \Delta H_{P_v} \quad (2.54)$$

Onde  $H_{suc}$  é a altura da superfície líquida no reservatório de sucção em relação à referência ([L]);  $\Delta H_{P_v}$  é a perda de carga na válvula de descarga ([L]). A perda de carga da válvula é dada pela equação:

$$\Delta H_{P_v} = C_v Q_{P,i}^2 = C_v Q_{P,i} |Q_{P,i}| \quad (2.55)$$

Onde  $C_v$  é o coeficiente de perda de carga na válvula ( $[L]^{-5}[t]^2$ ).

Para o cálculo do torque de um sistema girante, utiliza-se a equação diferencial de massas girantes. O torque é igual ao produto da aceleração angular e o momento de inércia polar do sistema. Como não há torque externo agindo na bomba em um evento de falha elétrica, o torque de desaceleração é o torque da bomba. (ALMEIDA; KOELLE, 1992)

$$T = -WR^2 \frac{2\pi}{60} \frac{dN}{dt} \quad (2.56)$$

Onde  $WR^2$  é o momento de inércia polar combinado de bomba, motor, eixo e fluido entrando no rotor da bomba ( $[F][L][t]^2$ ). Usando as equações de adimensionalidade, (2.48) e (2.49), a relação (2.56) pode ser reescrita como:

$$\beta = -WR^2 \frac{2\pi N_R}{60T_R} \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.57)$$

Nesta equação,  $T_R = 60\gamma H_R Q_R / (2\pi N_R \eta_R)$ . Onde  $\gamma$  é o peso específico do fluido ( $[F][L]^{-3}$ ),  $\eta_R$  é a eficiência da bomba em condições nominais (adimensional). Usando um valor médio de  $\beta$  durante o passo de tempo, a equação (2.57) pode ser escrita como:

$$\frac{\alpha_p - \alpha}{\Delta t} = -\frac{60T_R}{2\pi WR^2 N_R} \frac{\beta + \beta_p}{2} \quad (2.58)$$

Que pode ser simplificada para:

$$\alpha_p - C_6 \beta_p = \alpha + C_6 \beta \quad (2.59)$$

Onde:

$$C_6 = \frac{-15T_R \Delta t}{\pi WR^2 N_R}$$

Para  $\Delta t$  o passo de tempo da discretização numérica [t].

Supondo a linha de sucção curta, então necessita-se apenas da equação característica para a linha de descarga, ou seja, para a seção (i,1):

$$Q_{P_{i,1}} = C_n + C_a H_{P_{i,1}} \quad (2.60)$$

Como não há armazenamento entre o reservatório de sucção e a seção (i,1):

$$Q_{P_{i,1}} = Q_P \quad (2.61)$$

Onde  $Q_P$  é a vazão através da bomba no fim do passo de tempo ( $[L]^3[t]^{-1}$ ).

Para o desenvolvimento das condições de contorno, as equações (2.52) a (2.55), (2.59), (2.60) e (2.61) devem ser resolvidas simultaneamente. Eliminando  $H_{P_{i,1}}$ ,  $\Delta H_{P_v}$  e  $Q_{P_{i,1}}$  das equações (2.54), (2.55), (2.60) e (2.61) e usando  $Q_R$  e  $H_R$  como valores de referência, a equação resultante pode ser escrita:

$$Q_R v_P = C_n + C_a H_{suc} + C_a H_R h_p - C_a C_v Q_R^2 v_P |v_P| \quad (2.62)$$

Agora são quatro equações (2.52), (2.53), (2.59) e (2.62) nas incógnitas  $\alpha_p$ ,  $v_p$ ,  $h_p$  e  $\beta_p$ . Eliminando  $h_p$  e  $\beta_p$  destas equações tem-se:

$$\begin{aligned} F_1^* &= C_a H_R a_1 (\alpha_p^2 + v_p^2) + C_a H_R a_2 (\alpha_p^2 + v_p^2) \tan^{-1} \frac{\alpha_p}{v_p} + \\ &- Q_R v_P - C_a C_v Q_R^2 v_P |v_P| + C_n + C_a H_{suc} = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$F_2^* = \alpha_p - C_6 a_3 (\alpha_p^2 + \nu_p^2) - C_6 a_4 (\alpha_p^2 + \nu_p^2) \tan^{-1} \frac{\alpha_p}{\nu_p} - \alpha - C_6 \beta = 0 \quad (2.64)$$

Onde  $F_1^*$  e  $F_2^*$  são valores adimensionais.

As relações (2.63) e (2.64) são equações não-lineares que podem ser resolvidas pelo método de Newton-Raphson.

Sejam  $\alpha_p^{(1)}$  e  $\nu_p^{(1)}$  valores estimados inicialmente. Então, uma melhor estimativa de solução é dada por:

$$\alpha_p^{(2)} = \alpha_p^{(1)} + \Delta\alpha_p \quad (2.65)$$

$$\nu_p^{(2)} = \nu_p^{(1)} + \Delta\nu_p \quad (2.66)$$

Onde:

$$\Delta\alpha_p = \frac{F_2^* \frac{\partial F_1^*}{\partial \nu_p} - F_1^* \frac{\partial F_2^*}{\partial \nu_p}}{\frac{\partial F_1^*}{\partial \alpha_p} \frac{\partial F_2^*}{\partial \nu_p} - \frac{\partial F_1^*}{\partial \nu_p} \frac{\partial F_2^*}{\partial \alpha_p}}$$

$$\Delta\nu_p = \frac{F_2^* \frac{\partial F_1^*}{\partial \alpha_p} - F_1^* \frac{\partial F_2^*}{\partial \alpha_p}}{\frac{\partial F_1^*}{\partial \nu_p} \frac{\partial F_2^*}{\partial \alpha_p} - \frac{\partial F_1^*}{\partial \alpha_p} \frac{\partial F_2^*}{\partial \nu_p}}$$

Se  $|\Delta\alpha_p|$  e  $|\Delta\nu_p|$  forem menores que uma tolerância especificada, então  $\alpha_p^{(1)}$  e  $\nu_p^{(1)}$  são soluções das equações (2.63) e (2.64).

### 2.3.4 Junção em série

Este tipo de junção engloba condições de variação de diâmetro entre dois tubos diferentes conectados e variação de rugosidade, espessura ou condição de ancoragem para um único tubo. Os dois casos são tratados da mesma forma.

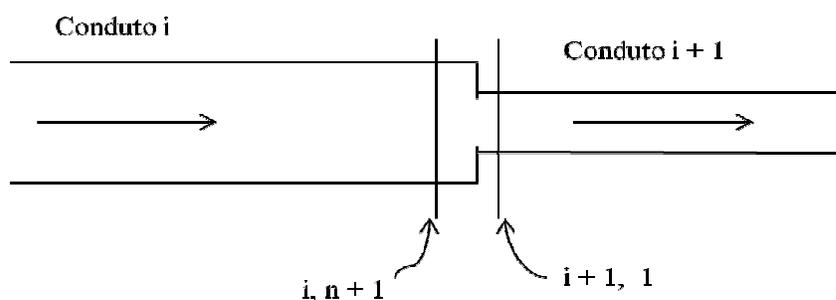


FIGURA 2.5 - Junção em série

Na junção da figura 2.5, a equação característica positiva (2.39) é válida para o tubo 1 e a equação característica negativa (2.40) é válida para o tubo 2. A expressão da continuidade e a condição de uma linha hidráulica comum fornecem duas equações:

$$Q_{P_{i,n+1}} = Q_{P_{i+1,1}} \quad (2.67)$$

$$H_{P_{i,n+1}} = H_{P_{i+1,1}} \quad (2.68)$$

Resolvendo as equações (2.67) e (2.68) simultaneamente com as equações características:

$$H_{P_{i,n+1}} = \frac{C_{P_i} - C_{n_{i+1}}}{C_{a_i} + C_{a_{i+1}}} \quad (2.69)$$

### 2.3.5 Chaminé de equilíbrio

Esse elemento consiste em um dispositivo para atenuação do golpe de aríete. Mais precisamente, consiste em um tanque instalado na tubulação que permite uma atenuação das ondas de pressão que passam por ele. De fato, as ondas entrantes nesse dispositivo são refletidas e essas ondas refletidas, fora de fase em relação às ondas que passam no tubo, provocam uma interferência destrutiva, amortecendo a onda de pressão. De acordo com Barbosa (2006), esse dispositivo é muito utilizado em adutoras por gravidade. Pode ser usado para reduzir a amplitude de ondas de pressão devidas a eventos como fechamentos bruscos de válvula e variações abruptas de vazões em turbinas ou bombas localizadas próximas ao reservatório fonte.

Em termos práticos, ao ocorrer um evento transiente, o nível de água que está na chaminé de equilíbrio oscila. É nessa oscilação que acontece a reflexão da onda de pressão.

A formulação matemática para essa condição de contorno é feita através da utilização de leis da mecânica dos fluidos em conjunto com métodos numéricos para aproximação dos termos diferenciais. Um esquema da chaminé de equilíbrio é apresentado na Figura 2.6.

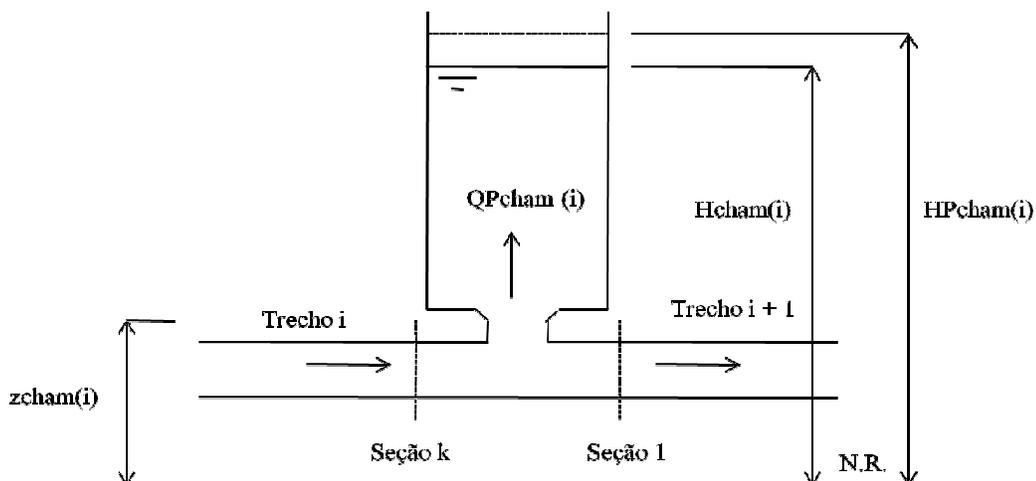


FIGURA 2. 6 - Chaminé de equilíbrio

Fonte: Barbosa (2006)

Como o nível da água oscila, pode-se aplicar a lei de Newton para esse movimento dado que se trata de uma lei de aplicação geral para os fenômenos estudados pela engenharia. De acordo com Newton:

$$\sum F = ma^* \quad (2.70)$$

Para aplicação dessa lei, considera-se como sistema de massa  $m$  o fluido contido na extensão da chaminé de equilíbrio. As forças atuantes no sistema da Figura 2.6 são: peso, força de atrito localizado, força de atrito distribuído e força devida à pressão na base da chaminé. As equações de força para essas quatro contribuições são as seguintes:

(I) Peso

$$W = \gamma A_{cham}(i) [HP_{cham}(i) - z_{cham}(i)] \quad (2.71)$$

Onde  $W$  é o peso da massa de fluido ([F]);  $A_{cham}(i)$  é a área da secção transversal da chaminé de equilíbrio no trecho  $i$  ([L]<sup>2</sup>);  $HP_{cham}(i)$  é o nível da água da chaminé de equilíbrio do trecho  $i$  no passo de tempo corrente de cálculo ([L]);  $z_{cham}(i)$  é a cota da base da chaminé de equilíbrio no trecho  $i$  ([L]).

## (II) Força de atrito distribuído

$$FAD = \frac{\gamma A_{cham}(i) F_{cham}(i) [H_{cham}(i) - z_{cham}(i)]}{2g D_{cham}(i) (A_{cham}(i))^2} Q_{cham}(i) |Q_{cham}(i)| \quad (2.72)$$

Onde  $FAD$  é a força de atrito distribuído aplicada a massa de fluido ([F]);  $F_{cham}(i)$  é o fator de atrito das paredes da chaminé de equilíbrio (adimensional);  $H_{cham}(i)$  é o nível de água da chaminé de equilíbrio do trecho  $i$  em um passo de tempo imediatamente anterior ao passo de tempo corrente de cálculo ([L]);  $Q_{cham}(i)$  é a vazão da chaminé de equilíbrio do trecho  $i$  em um passo de tempo imediatamente anterior ao passo de tempo corrente de cálculo, positiva para a entrada de fluxo e negativa para a saída de fluxo ( $[L]^3[t]^{-1}$ );  $D_{cham}(i)$  é o diâmetro da chaminé de equilíbrio no trecho  $i$  ([L]).

## (III) Força de atrito localizado

$$FAL = \frac{\gamma A_{cham}(i) K_p(i)}{2g (AO_{cham}(i))^2} Q_{cham}(i) |Q_{cham}(i)| \quad (2.73)$$

Onde  $FAL$  é a força de atrito localizado ([F]);  $K_p(i)$  é o coeficiente de perda localizada no orifício da chaminé de equilíbrio do trecho  $i$ , que pode assumir dois valores diferentes associados às vazões positiva e negativa (adimensional);  $AO_{cham}(i)$  é a área do orifício da chaminé de equilíbrio do trecho  $i$  ( $[L]^2$ ).

## (IV) Força devida a pressão na base da chaminé

$$FP = \gamma A_{cham}(i) (HP(i, k) - z_{cham}(i)) \quad (2.74)$$

Onde  $FP$  é a força devida a pressão na base da chaminé ([F]);  $HP(i, k)$  é a carga do trecho  $i$ , seção  $k$ , no passo de tempo corrente de cálculo ([L]).

A massa e aceleração são formuladas do seguinte modo:

$$m = \frac{\gamma A_{cham}(i)(H_{cham}(i) - z_{cham}(i))}{g} \quad (2.75)$$

$$a^* = \frac{QP_{cham}(i) - Q_{cham}(i)}{A_{cham}(i)\Delta t} \quad (2.76)$$

Onde  $QP_{cham}(i)$  é a vazão da chaminé de equilíbrio do trecho  $i$  no passo de tempo corrente de cálculo ( $[L]^3[t]^{-1}$ ).

Essas equações compõem a equação do movimento de Newton, que é a primeira das seis equações lineares que definem a condição de contorno chaminé de equilíbrio. Com efeito, substituindo as equações (2.71) à (2.74), (2.75) e (2.76) (força, massa e aceleração) na lei de Newton e isolando em  $QP_{cham}(i)$  tem-se:

$$QP_{cham}(i) = Q_{cham}(i) + C_2(HP(i, k) - H_{cham}(i) - C_1) \quad (2.77)$$

Para:

$$C_1 = \frac{F_{cham}(i)(H_{cham}(i) - z_{cham}(i))}{2g \left[ D_{cham}(i)(A_{cham}(i))^2 + \frac{K_p(i)}{(AO_{cham})^2} \right]} Q_{cham}(i) | Q_{cham}(i)|$$

$$C_2 = \frac{gA_{cham}(i)\Delta t}{H_{cham}(i) - z_{cham}(i)}$$

A outra equação vem da relação entre carga e vazão da chaminé de equilíbrio:

$$HP_{cham}(i) = H_{cham}(i) + \frac{0,5\Delta t(QP_{cham}(i) + Q_{cham}(i))}{A_{cham}(i)} \quad (2.78)$$

A equação da continuidade é formulada nos seguintes termos:

$$QP(i,k) = QP_{cham}(i) + QP(j,1) \quad (2.79)$$

Onde  $QP(i,k)$  é a vazão no trecho  $i$ , seção  $k$ , no passo de tempo corrente ( $[L]^3[t]^{-1}$ );  
 $QP(j,1)$  é a vazão no trecho  $j$ , seção 1, no passo de tempo corrente de cálculo ( $[L]^3[t]^{-1}$ ).

Trabalhando na hipótese de não haver perdas de carga entre uma secção e outra da Figura 2.6, incorpora-se ao modelo a equação linear:

$$HP(i,k) = HP(j,1) \quad (2.80)$$

Onde  $HP(j,1)$  é a cota piezométrica no trecho  $j$ , seção 1, no passo de tempo corrente de cálculo ( $[L]$ ).

Além dessas quatro equações, são válidas as equações características, onde a equação característica positiva é avaliada na seção  $k$  do tubo  $i$  e a equação característica negativa é avaliada na seção 1 do tubo  $j$ . Essas equações características variam de acordo com o modelo de atrito e o modelo para o comportamento mecânico dos condutos. Assim, tem-se seis equações lineares com incógnitas  $QP(i,k)$ ,  $QP_{cham}(i)$ ,  $QP(j,1)$ ,  $HP(i,k)$ ,  $HP(j,1)$  e  $HP_{cham}(i)$ . Esse sistema pode ser resolvido por qualquer método algébrico conhecido, como, por exemplo, o método de eliminação de Gauss.

### 2.3.6 Tanque de alimentação unidirecional

De acordo com Barbosa (2006), este dispositivo de proteção é normalmente aplicado para reduzir pressões negativas em sistemas de recalque. A estrutura do tanque unidirecional é basicamente um reservatório com uma válvula de retenção, que tem a função de impedir o fluxo de água para o dispositivo (Figura 2.7).

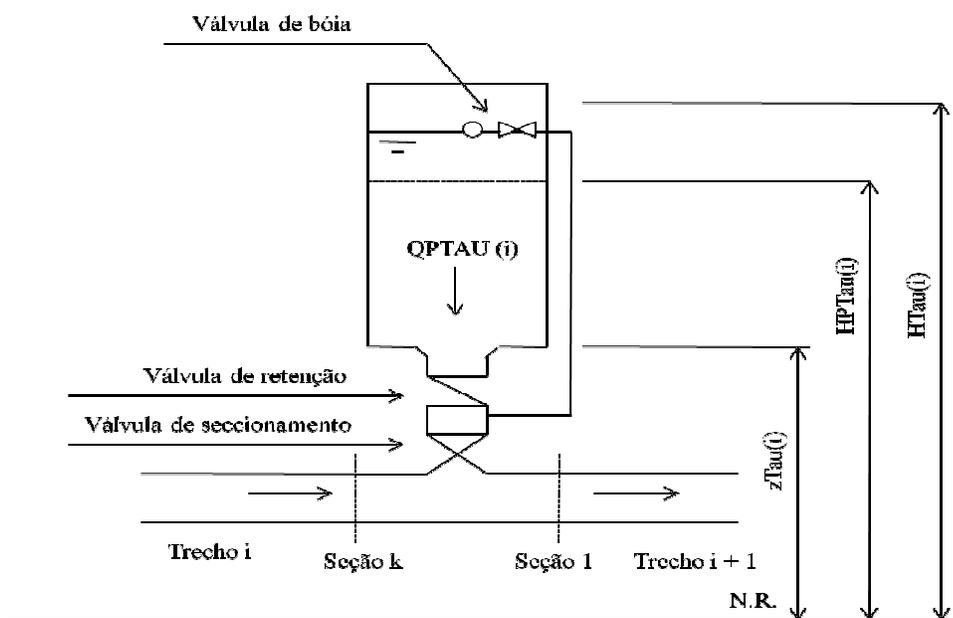


FIGURA 2. 7 - Tanque de alimentação unidirecional

Fonte: Barbosa (2006)

O equacionamento para o tanque de alimentação unidirecional (TAU) é semelhante ao proposto para a chaminé de equilíbrio. De fato, a primeira equação é obtida através da lei de Newton e as equações de força, massa e aceleração são análogas àquelas obtidas no item anterior. Diferentemente da abordagem para chaminés de equilíbrio, a primeira equação é obtida isolando  $HP(i, k)$  na equação de movimento de Newton (2.70).

$$HP(i, k) = HP_{TAU}(i) + T_1 QP_{TAU}(i) |QP_{TAU}| + T_2 (QP_{TAU}(i) - Q_{TAU}(i)) \quad (2.81)$$

Para:

$$T_1 = \frac{1}{2g} \left[ \frac{K_s(i)}{(AO_{TAU}(i))^2} + \frac{F_{TAU}(i)(H_{TAU}(i) - z_{TAU}(i))}{D_{TAU}(A_{TAU})^2} \right]$$

$$T_2 = \frac{H_{TAU}(i) - z_{TAU}(i)}{gA_{TAU}(i)\Delta t}$$

Onde  $HP_{TAU}(i)$  é o nível da água do tanque de alimentação unidirecional no trecho  $i$ , no passo de tempo corrente de cálculo ([L]);  $QP_{TAU}(i)$  é a vazão do tanque de alimentação unidirecional, do trecho  $i$ , durante o passo de tempo corrente de cálculo ( $[L]^3[t]^{-1}$ );  $Q_{TAU}(i)$  é a vazão do TAU, no trecho  $i$ , durante o passo imediatamente anterior ao passo de tempo corrente de cálculo ( $[L]^3[t]^{-1}$ );  $F_{TAU}(i)$  é o fator de atrito das paredes do TAU (adimensional);  $H_{TAU}(i)$  é o nível da água do tanque de alimentação unidirecional no trecho  $i$ , no passo de tempo anterior ao passo corrente de cálculo ([L]);  $z_{TAU}(i)$  é a cota topográfica da base do TAU no trecho  $i$  ([L]);  $D_{TAU}(i)$  é o diâmetro do tanque de alimentação unidirecional no trecho  $i$  ([L]);  $A_{TAU}$  é a área da seção transversal do TAU do trecho  $i$  ( $[L]^2$ );  $AO_{TAU}$  é a área do orifício do tanque de alimentação unidirecional do trecho  $i$  ( $[L]^2$ );  $K_s(i)$  é o coeficiente de perda localizada no orifício do TAU do trecho  $i$  (adimensional).

A vazão no TAU e o nível da água estão relacionados pela expressão:

$$HP_{TAU}(i) = T_3 + T_4 QP_{TAU}(i) \quad (2.82)$$

Para:

$$T_3 = H_{TAU}(i) + T_4 Q_{TAU}(i)$$

$$T_4 = \frac{\Delta t}{2A_{TAU}(i)}$$

Admitindo vazão positiva na direção do fluxo de saída do TAU, a equação da continuidade para o TAU, considerando a notação da figura 2.7, é dada por:

$$QP(i+1,1) = QP_{TAU}(i) + QP(i,k) \quad (2.83)$$

Além disso, também se considera a ausência de perdas de cargas entre uma seção e a outra:

$$HP(i,k) = HP(i+1,1) \quad (2.84)$$

Como se trata de um dispositivo instalado entre duas tubulações então deverão ser utilizadas as equações características positiva e negativa, da mesma forma que na chaminé de equilíbrio. Assim, tem-se também um sistema de seis equações e seis incógnitas que deverá ser resolvido nas variáveis  $QP(i,k)$ ,  $QP_{TAU}(i)$ ,  $QP(i+1,1)$ ,  $HP(i,k)$ ,  $HP(i+1,1)$  e  $HP_{TAU}(i)$ .

Para o caso particular da válvula de retenção do TAU estar fechada,  $QP_{TAU}(i) = 0$ , e o sistema de seis equações se reduzirá a um sistema de três equações. As equações válidas para este caso particular serão a equação (2.84) (conservação da carga) e as equações (2.39) e (2.40) (equações características).

### 2.3.7 Válvula à jusante do tubo

Se a referência para a elevação da linha hidráulica é tomada na válvula, a equação do orifício para escoamento de estado permanente através da válvula é:

$$Q_0 = (C_d A)_0 \sqrt{2gH_0} \quad (2.85)$$

Onde  $Q_0$  é o fluxo de estado permanente ( $[L]^3[t]^{-1}$ );  $H_0$  é a perda de carga de estado permanente através da válvula ( $[L]$ );  $(C_d A_G)_0$  a área de abertura da válvula vezes o coeficiente de descarga ( $[L]^2$ ). Para outra abertura, em geral:

$$Q_p = C_d A \sqrt{2gH_p} \quad (2.86)$$

Onde  $H_p$  é a queda instantânea na linha hidráulica através da válvula ( $[L]$ ). Definindo a abertura adimensional da válvula como:

$$\tau = \frac{C_d A}{(C_d A)_0} \quad (2.87)$$

Onde  $\tau$  é o coeficiente de abertura da válvula (adimensional).

E dividindo a equação (2.86) pela (2.85):

$$Q_p = \frac{Q_0}{\sqrt{H_0}} \tau \sqrt{H_p} \quad (2.88)$$

Para escoamento permanente  $\tau = 1$  e para ausência de fluxo com a válvula fechada,  $\tau = 0$ . O valor de  $\tau$  pode ser maior do que 1 se a válvula está mais aberta do que a posição de estado permanente.

A equação característica positiva é resolvida simultaneamente com a equação (2.88):

$$Q_p = -BC_v + \sqrt{(BC_v)^2 + 2C_v C_p} \quad (2.89)$$

Onde  $C_v = (Q_0 \tau)^2 / 2H_0$  e  $B = \frac{a}{gA}$ . A partir daí pode-se determinar o valor de  $H_p$ .

### 2.3.8 Válvula antecipadora de onda

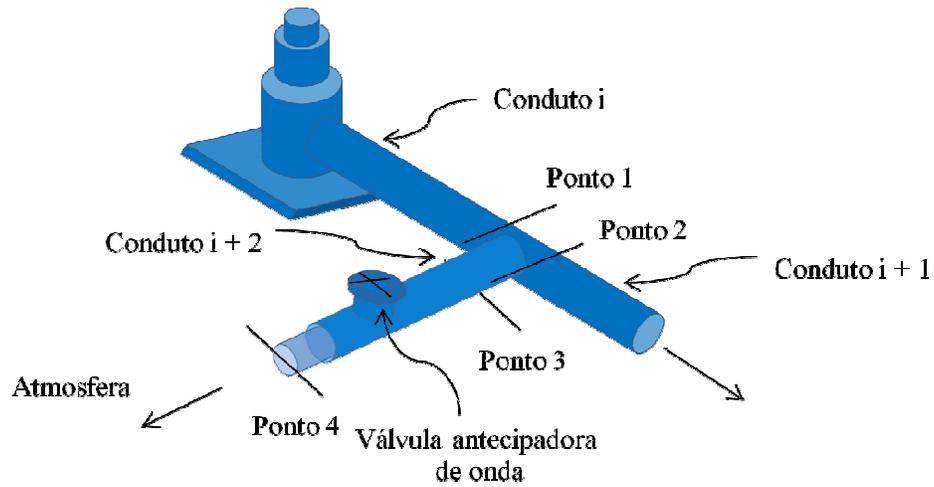


FIGURA 2. 8 - Válvula antecipadora de onda

Fonte Barbosa (2010)

Para qualquer situação de manobra da válvula (Figura 2.8), para qualquer instante, é válida a equação de Bernoulli:

$$\frac{P_3 + P_{atm}}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 = \frac{P_{atm}}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2g} + z_4 \quad (2.90)$$

Onde  $P_{atm}$  é a pressão atmosférica ( $[F][L]^{-2}$ ).

Rearranjando estes termos obtém-se:

$$\left( \frac{P_3}{\gamma} + z_3 \right) + \frac{V_3^2}{2g} = \frac{V_4^2}{2g} + z_4 \quad (2.91)$$

Considerando a cota do ponto de instalação da válvula antecipadora de onda  $z_4$  igual à cota do segundo nó  $z_{N2}$ :

$$H_3 + \frac{V_3^2}{2g} = \frac{V_4^2}{2g} + z_{N2} \quad (2.92)$$

Organizando a equação (2.92):

$$H_3 - z_{N2} = \frac{(V_4^2 - V_3^2)}{2g} \quad (2.93)$$

Considerando a vazão no ponto 3 igual a do ponto 4 (Figura 2.8) tem - se:

$$Q_3 = V_3 A_{VAO} \quad (2.94)$$

$$Q_4 = V_4 A_4 \quad (2.95)$$

Onde  $A_{VAO}$  é a área da seção transversal da válvula antecipadora de onda ( $[L]^2$ ).

O coeficiente de contração (adimensional) é definido como:

$$cc = \frac{A_4}{A_{VAO}} \quad (2.96)$$

Substituindo (2.94), (2.95) e (2.96) em (2.93):

$$(H_3 - z_{N2}) = \frac{Q_{VAO}^2}{2gA_{VAO}^2} \left( \frac{1 - cc^2}{cc^2} \right) \quad (2.97)$$

Onde  $Q_{VAO}$  é a vazão na válvula antecipadora de onda ( $[L]^3[t]^{-1}$ ).

Organizando a equação (2.97):

$$Q_{VAO} = (A_{VAO} Cd_{VAO}) \sqrt{2g(H_3 - z_{N2})} \quad (2.98)$$

$$Q_{VAO0} = (A_{VAO} Cd_{VAO})_0 \sqrt{2g(H_{3_0} - z_{N2})} \quad (2.99)$$

Onde  $Cd_{VAO}$  é o coeficiente de descarga da válvula antecipadora de onda (adimensional).

Desprezando as perdas localizadas, para cada passo de tempo são válidas as equações (2.100) e (2.101):

$$H_1 = H_2 = H_3 \quad (2.100)$$

$$H_{1_0} = H_{2_0} = H_{3_0} \quad (2.101)$$

Substituindo as equações (2.100) e (2.101) nas equações (2.98) e (2.99), respectivamente, tem-se:

$$Q_{VAO} = (A_{VAO} Cd_{VAO}) \sqrt{2g(H_1 - z_{N2})} \quad (2.102)$$

$$Q_{VAO_0} = (A_{VAO} Cd_{VAO})_0 \sqrt{2g(H_{1_0} - z_{N2})} \quad (2.103)$$

O subscrito 0 indica condição de estado permanente.

Elevando ao quadrado as equações (2.101) e (2.102) e em seguida dividindo a primeira equação pela segunda, o resultado é:

$$\left( \frac{Q_{VAO}}{Q_{VAO_0}} \right)^2 = \left[ \frac{(A_{VAO} Cd_{VAO})}{(A_{VAO} Cd_{VAO})_0} \right]^2 \left[ \frac{(H_1 - z_{N2})}{(H_{1_0} - z_{N2})} \right] \quad (2.104)$$

$$\tau = \left[ \frac{(A_{VAO} Cd_{VAO})}{(A_{VAO} Cd_{VAO})_0} \right] \quad (2.105)$$

$$Q_{VAO}^2 = \frac{(\tau Q_{VAO_0})^2}{(H_{1_0} - z_{N2})} (H_1 - z_{N2}) \quad (2.106)$$

De acordo com a figura 2.8, a equação da continuidade pode ser expressa como:

$$Q_1 = Q_2 + Q_{VAO} \quad (2.107)$$

Usando as equações características positiva (trecho  $N + 1$  do conduto  $i$ ) e negativa (trecho 1 do conduto  $i + 1$ ):

$$Q_1 = C_{p1} - C_{a1} H_1 \quad (2.108)$$

$$Q_2 = C_{n2} - C_{a2}H_2 \quad (2.109)$$

Substituindo as equações características na equação (2.107) (continuidade) e considerando a carga  $H_1 = H_2$ .

$$H_1 = \frac{(C_{p1} - C_{n2}) - Q_{VAO}}{C_{a1} + C_{a2}} \quad (2.110)$$

Substituindo a equação (2.110) na equação (2.106):

$$Q_{VAO}^2 + C_{VAO}Q_{VAO} - C_{VAO}[(C_{p1} - C_{n2}) - (C_{a1} + C_{a2})z_{N2}] = 0 \quad (2.111)$$

Onde:

$$C_{VAO} = \frac{(\tau Q_{VAO_0})^2}{(C_{a1} + C_{a2})(H_{1_0} - z_{N2})}$$

A raiz positiva da equação (2.111) é:

$$Q_{VAO} = 0,5 \left[ -C_{VAO} + \sqrt{C_{VAO}^2 + 4C_{VAO}[(C_{p1} - C_{n2}) - (C_{a1} + C_{a2})z_{N2}]} \right] \quad (2.112)$$

Essa é a equação do modelo de válvula antecipadora de onda com descarga atmosférica.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1 FATOR DE ATRITO VARIÁVEL NO GOLPE DE ARIETE

##### 3.1.1 Modelo de Brunone (1991)

Em condições de fluxo transiente, freqüentemente é utilizada uma formulação de atrito derivada das condições de estado permanente. Esta formulação está fundamentada na hipótese de que a perda de carga durante condições transientes é igual à perda de carga para fluxo permanente uniforme. O perfil de velocidade do fluxo permanente é igual ao perfil das velocidades instantâneas do fluxo transiente. Devido à imprecisão dessa modelagem, foram propostos diversos aperfeiçoamentos no sentido de modificar o termo de atrito através da inclusão de uma parcela não permanente.

Um dos modelos de dissipação de energia é o modelo de Brunone (1991). Nesse modelo a perda de carga unitária é dada por um termo de atrito permanente e outro de atrito transiente. A perda de carga unitária é expressa da seguinte forma:

$$h_f = h_{fs} + h_{fu} = \frac{f|Q|}{2gDA^2} + \frac{K_3}{gA} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - a \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

Onde  $h_f$  é a perda de carga unitária em um dado instante da simulação (adimensional);  $h_{fs}$  é a perda de carga unitária relativa ao escoamento permanente (adimensional);  $h_{fu}$  é a perda de carga unitária relativa ao escoamento não permanente (adimensional);  $K_3$  é uma constante de amortecimento (adimensional).

Vardy e Brown (1996) propuseram uma expressão para o cálculo do coeficiente de decaimento, na seguinte forma:

$$K_3 = 2\sqrt{C^*} \quad (3.2)$$

$$\text{Para } C^* = \frac{7,41}{\text{Re}^{\log\left(\frac{14,3}{\text{Re}^{0,05}}\right)}}$$

Em que Re é o número de Reynolds (adimensional).

Em contrapartida, Karney e Brunone (1999) estabeleceram uma formulação para a constante de amortecimento. Os autores adotaram, para a constante de amortecimento, a seguinte relação:

$$\frac{y_i}{y_{i-1}} = \left( \frac{1}{1 + K_3} \right)^2 \quad (3.3)$$

Onde  $y_i$  e  $y_{i-1}$  são as máximas cargas piezométricas obtidas em dois períodos consecutivos,  $i$  e  $i-1$ , depois do fechamento da válvula ([L]).

Como não existe uma lei de constante de amortecimento válida para todos os casos, a precisão dos modelos supracitados deve ser avaliada e comparada.

As equações governantes para esse modelo são expressas como se segue:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| + K_3 \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - a \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{equação do momento}) \quad (3.4)$$

$$a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{equação da continuidade}) \quad (3.5)$$

Para obter a solução numérica dessas equações utiliza-se o método das características:

$$L_1 = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| + K_3 \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - a \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.6)$$

$$L_2 = a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

Multiplicando  $L_1$  por um parâmetro  $\lambda$  e somando o resultado a  $L_2$ :

$$a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial t} + g\lambda A \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f\lambda}{2DA} Q|Q| + K_3 \lambda \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - a \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \left( gA \frac{\partial H}{\partial t} + g\lambda A \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left[ (a^2 - K_3 \lambda a) \frac{\partial Q}{\partial x} + (\lambda + K_3 \lambda) \frac{\partial Q}{\partial t} \right] + \frac{f\lambda}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow gA \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda \frac{\partial H}{\partial x} \right) + (\lambda + K_3 \lambda) \left[ \frac{(a^2 - K_3 \lambda a) \partial Q}{(\lambda + K_3 \lambda) \partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} \right] + \frac{f\lambda}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (3.10)$$

Como  $H = H(x,t)$  e  $Q = Q(x,t)$  são soluções das equações de governo nas variáveis  $x$  e  $t$ , suas derivadas totais podem ser escritas como segue:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.11)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.12)$$

Comparando as expressões para as derivadas totais, equações (3.11) e (3.12), com a equação (3.10):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda = \frac{(a^2 - K_3 \lambda a)}{(\lambda + K_3 \lambda)} \quad (3.13)$$

As raízes dessa equação são obtidas através da solução de uma equação do segundo grau em  $\lambda$  (Ver Apêndice 1):

$$\lambda = \frac{a}{(1 + K_3)} \quad (\text{solução positiva}) \quad (3.14)$$

$$\lambda = -a \quad (\text{solução negativa}) \quad (3.15)$$

Dessa forma, se  $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{(1+K_3)}$  a equação (3.10) pode ser escrita como:

$$C^+ : gA \frac{dH}{dt} + a \frac{dQ}{dt} + \frac{fa}{2DA(1+K_3)} Q|Q| = 0 \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2DA(1+K_3)} Q|Q| = 0 \quad (3.17)$$

Por outro lado, se  $\frac{dx}{dt} = -a$  a equação (3.10) terá a seguinte configuração:

$$C^- : gA \frac{dH}{dt} - a(1+K_3) \frac{dQ}{dt} - \frac{fa}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{a(1+K_3)} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2(1+K_3)DA} Q|Q| = 0 \quad (3.19)$$

Antes de dar continuidade aos cálculos é importante perceber que a linha característica positiva tem inclinação diferente daquela dada no modelo clássico. As linhas características são representadas no plano  $x-t$ , de acordo com a Figura 3.1.

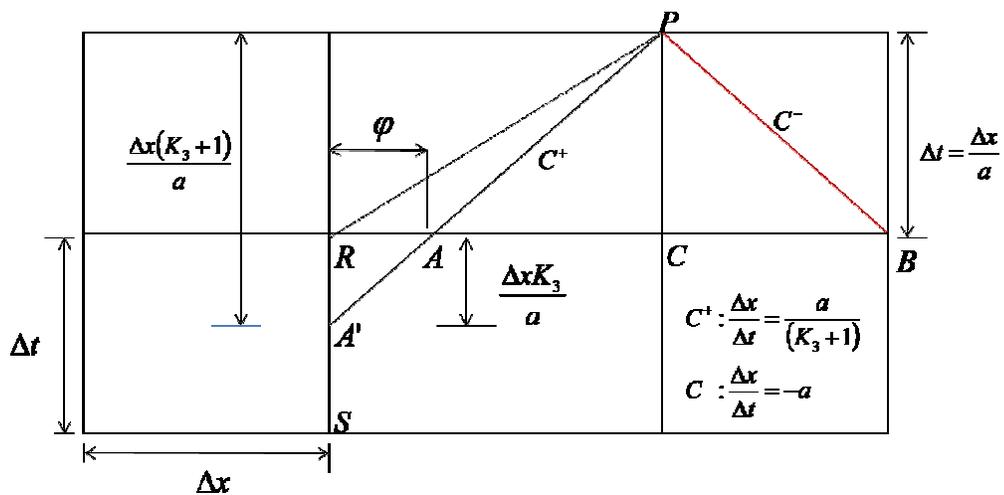


FIGURA 3.1 - linhas características para o modelo de Brunone (1991)

A integração de (3.17) (característica positiva) é feita do ponto  $A$  até  $P$  (Figura 3.1). Além disso, adota-se uma aproximação de primeira ordem para a vazão.

$$\int_A^P dQ + \frac{gA}{a} \int_A^P dH + \frac{f}{2(1+K_3)DA} \int_A^P Q|Q|dt = 0 \quad (3.20)$$

$$Q_P - Q_A + \frac{gA}{a}(H_P - H_A) + \frac{f}{2DA(1+K_3)} Q_A|Q_A|\Delta t = 0 \quad (3.21)$$

$$Q_P = Q_A - \frac{gA}{a} H_P + \frac{gA}{a} H_A - \frac{f}{2DA(1+K_3)} Q_A|Q_A|\Delta t \quad (3.22)$$

Admitindo-se as substituições  $C_{P\_Brunone} = Q_A + \frac{gA}{a} H_A - \frac{f}{2DA(1+K_3)} Q_A|Q_A|\Delta t$  e

$C_a = \frac{gA}{a}$ , a equação característica (3.22) pode ser reformulada da seguinte forma:

$$Q_P = C_{P\_Brunone} - C_a H_P \quad (3.23)$$

Observe que  $Q_P$  depende dos valores de vazão e carga em  $A$ . Como  $A$  não é um ponto da malha, então é necessária uma interpolação para a determinação de  $Q_A$  e  $H_A$ . A interpolação a ser realizada é do tipo espacial. O procedimento de interpolação é descrito nas linhas subsequentes.

Nota-se, da Figura 3.1, que a tangente da reta característica positiva é dada por  $\frac{(1+K_3)}{a}$ , o inverso de  $\frac{dx}{dt}$ . Agora, considerando o ângulo  $A'AR$ , a tangente desse ângulo é a tangente da reta característica positiva. Da figura 3.1, tem-se que:

$$\frac{\Delta x K_3}{a\varphi} = \frac{(1+K_3)}{a} \Rightarrow \varphi = \frac{\Delta x K_3}{(1+K_3)} \quad (3.24)$$

Onde  $\varphi$  é distância entre os pontos  $A$  e  $R$  na figura 3.1 ([L]).

Interpolando:

$$\frac{Q_A - Q_R}{Q_C - Q_R} = \frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x K_3}{(1 + K_3)}}{\Delta x} \Rightarrow Q_A = Q_R + \frac{K_3}{(1 + K_3)}(Q_C - Q_R) \quad (3.25)$$

Da mesma forma, obtém-se uma fórmula para a determinação de  $H_A$ .

$$\frac{H_A - H_R}{H_C - H_R} = \frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x K_3}{(1 + K_3)}}{\Delta x} \Rightarrow H_A = H_R + \frac{K_3}{(1 + K_3)}(H_C - H_R) \quad (3.26)$$

Integrando (3.19) do ponto  $B$  até o ponto  $P$ :

$$\int_B^P dQ - \frac{gA}{a(1 + K_3)} \int_B^P dH + \frac{f}{2(1 + K_3)DA} \int_B^P Q|Q|dt = 0 \quad (3.27)$$

$$Q_P - Q_B - \frac{gA}{a(1 + K_3)}(H_P - H_B) + \frac{f}{2DA(1 + K_3)} Q_B|Q_B|\Delta t = 0 \quad (3.28)$$

$$Q_P = Q_B + \frac{gA}{a(1 + K_3)} H_P - \frac{gA}{a(1 + K_3)} H_B - \frac{f}{2DA(1 + K_3)} Q_B|Q_B|\Delta t \quad (3.29)$$

Admitindo-se as substituições  $C_{N\_Brunone} = Q_B - \frac{gA}{a(1 + k_3)} H_B - \frac{f}{2DA(1 + K_3)} Q_B|Q_B|\Delta t$  e

$C_{a\_Brunone} = \frac{gA}{a(1 + K_3)}$ , a equação (3.29) pode ser reformulada da seguinte forma:

$$Q_P = C_{N\_Brunone} + C_{a\_Brunone} H_P \quad (3.30)$$

É importante perceber que para a característica negativa não é necessário fazer interpolação, já que o ponto  $B$  faz parte da malha.

Das duas equações características monta-se o sistema:

$$Q_P = C_{P\_Brunone} - C_a H_P \quad (3.31)$$

$$Q_P = C_{N\_Brunone} + C_{a\_Brunone} H_P \quad (3.32)$$

Esse sistema é muito semelhante àquele proposto por Chaudhry (1979; 1987) para o modelo elástico. Para resolver esse sistema em  $Q_P$ , basta multiplicar (3.32) por  $(1 + K_3)$  e somar o resultado por (3.31). Resolvendo o sistema em  $Q_P$  obtém-se:

$$Q_P = \frac{(1 + K_3)C_{N\_Brunone} + C_{P\_Brunone}}{(2 + K_3)} \quad (3.33)$$

Para achar  $H_P$  basta substituir o valor obtido de  $Q_P$  em (3.31) ou (3.32). A carga no ponto P fica determinada pela equação:

$$H_P = (C_{P\_Brunone} - Q_P) / C_a \quad (3.34)$$

### 3.1.2 Modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993)

De acordo com este modelo, a perda de carga unitária para o regime transitório turbulento é dada pela expressão:

$$h_f = h_{fs} + h_{fu} = \frac{fQ|Q|}{2gDA^2} + \frac{16\nu(Y_{1,t} + Y_{2,t})}{gD^2} \quad (3.35)$$

Onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido ( $[L]^2[t]^{-1}$ ). As funções  $Y_{1,t}$  e  $Y_{2,t}$  são dadas por:

$$Y_i = 0 \quad \text{se } t = 0$$

$$Y_{i,t} = Y_{i,t-\Delta t} e^{-B_i \psi^*} + A_i (V_t - V_{t-\Delta t}) \quad \text{se } t > 0 \quad (3.36)$$

Onde  $A_i$  e  $B_i$  são constantes adimensionais,  $V_t$  e  $V_{t-\Delta t}$  representam as velocidades médias na seção  $i$  nos instantes  $t$  e  $t - \Delta t$  ( $[L][t]^{-1}$ ), e  $\psi^*$  representa o tempo adimensional dado por:

$$\psi^* = v\Delta t / R^2 \quad (3.37)$$

Onde  $R$  é o raio interno do tubo ( $[L]$ ).

Nota-se que os valores das velocidades médias, na equação (3.36), dizem respeito a uma dada seção do sistema hidráulico, a seção de cálculo de carga e vazão. Dessa forma, o termo de atrito variável utiliza, através das funções  $Y_{i,t}$ , as velocidades do passo de tempo anterior ( $t-1$ ) e do passo de tempo corrente ( $t$ ), na seção de cálculo. Além disso, para fins práticos, as funções de recorrência  $Y_{i,t}$  podem ser reformuladas em termos das vazões médias de cada seção:

$$\text{Para } t > 0, \quad Y_{i,t} = Y_{i,t-\Delta t} e^{-B_i \psi^*} + \frac{A_i}{A} (Q_i - Q_{t-\Delta t}) \quad (3.38)$$

Onde  $Q_i$  e  $Q_{t-\Delta t}$  representam as vazões médias na seção  $i$  nos instantes  $t$  e  $t - \Delta t$ , respectivamente ( $[L]^3[t]^{-1}$ ).

Nota-se que cada fator  $Y_i$  do passo de tempo anterior ao tempo corrente decai exponencialmente durante qualquer intervalo de tempo antes de ser incrementado pelo último termo na equação (3.36). Cada  $Y_i$  é obtido de forma recursiva a partir de  $Y_i$ 's anteriores, através da multiplicação por um fator exponencial e o acréscimo de uma parcela. Essa fórmula recursiva reduz a influência das variações de velocidades (ou vazões) incorporadas nos vários  $Y_i$ 's durante passos de tempo anteriores. . Dessa forma, as variações de velocidade ocorridas em passos de tempo distantes do tempo de cálculo têm um peso menor do que as variações de velocidades em passos de tempo próximos ao tempo corrente.

Pode-se perceber também que a formulação de  $Y_i$  não está totalmente completa, pois os parâmetros  $A_i$  e  $B_i$  não estão definidos. Estas constantes devem ser calibradas a partir de dados experimentais.

Os valores de  $A_i$  e  $B_i$  foram determinados por Vardy, Hwang e Brown (1993) sob determinadas restrições a partir de uma função peso. Essa função, apesar de conhecida, exige uma quantidade de cálculos muito dispendiosa para obtenção de seus valores funcionais. Esse fato motivou aproximações, dentre elas a proposta por Vardy, Hwang e Brown (1993) que se utiliza de uma combinação linear de funções exponenciais:

$$W_{app}(\psi) \cong (A_1 e^{-B_1 \psi} + A_2 e^{-B_2 \psi} + \dots + A_n e^{-B_n \psi}) \quad (3.39)$$

Para  $\psi = vt^* / R^2$

Onde  $W_{app}(\psi)$  é uma aproximação para a função peso (adimensional);  $t^*$  é a medida para trás no tempo a partir do instante de tempo corrente de cálculo ([t]).

A precisão desta aproximação dependerá do número de parcelas admitidas. Entretanto, de acordo com Vardy, Hwang e Brown (1993), a utilização dos dois primeiros termos é suficientemente precisa devido à pequena variação de  $\psi$ .

A partir de medições indiretas podem-se obter valores da função peso  $W$ . Esses valores servirão de base para o processo de aproximação por mínimos quadrados. De acordo com este método, os valores de  $A_i$  e  $B_i$  são obtidos através da minimização do erro da função  $W_{app}$ .

$$S = \sum_{i=1}^N [W_i - (A_1 e^{-B_1 \psi} + A_2 e^{-B_2 \psi})]^2 \quad (3.40)$$

Onde  $S$  é o somatório dos quadrados dos resíduos;  $W_i$  são os valores de função peso medidos indiretamente e  $N$  é o número de medidas realizadas.

Existem diversos métodos para solução do problema de mínimos quadrados, dentre eles pode-se citar os métodos de Newton, Gauss – Newton e Levenberg – Marquadt. Esses métodos são iterativos, ou seja, dado um ponto inicial  $x^0 = (A_1^0, A_2^0, B_1^0, B_2^0)$ , eles produzem uma série de vetores até convergir para um mínimo local da função objetivo (função  $S$ ).

Em particular, o método de Newton se baseia no fato de que se  $x^*$  é um mínimo local então  $S'(x^*) = 0$ . Percebe-se que aqui a função  $S$  não é função de apenas uma variável, ela é função de várias variáveis  $(A_1, A_2, B_1, B_2)$ , então essa derivada não representa a derivada

ordinária para funções de uma variável. Na verdade, a expressão  $S'(x^*)=0$  é representada por:

$$S'(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial A_1^*} \\ \frac{\partial S}{\partial A_2^*} \\ \frac{\partial S}{\partial B_1^*} \\ \frac{\partial S}{\partial B_2^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A função  $S'(x)$  é não linear em relação aos parâmetros de um vetor  $x$  dado. De fato, para o modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993),  $S'(x)$  é expressa por:

$$S'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial S(x)}{\partial A_1} \\ \frac{\partial S(x)}{\partial A_2} \\ \frac{\partial S(x)}{\partial B_1} \\ \frac{\partial S(x)}{\partial B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N 2(W_i - A_1 e^{-B_1 \psi} - A_2 e^{-B_2 \psi}) (-e^{-B_1 \psi}) \\ \sum_{i=1}^N 2(W_i - A_1 e^{-B_1 \psi} - A_2 e^{-B_2 \psi}) (-e^{-B_2 \psi}) \\ \sum_{i=1}^N 2(W_i - A_1 e^{-B_1 \psi} - A_2 e^{-B_2 \psi}) (-A_1 e^{-B_1 \psi}) (-\psi) \\ \sum_{i=1}^N 2(W_i - A_1 e^{-B_1 \psi} - A_2 e^{-B_2 \psi}) (-A_2 e^{-B_2 \psi}) (-\psi) \end{bmatrix} \quad \text{(Gradiente)} \quad (3.42)$$

Onde:

$$x = (A_1, A_2, B_1, B_2)$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^N (W_i - W_{app})^2 = \sum_{i=1}^N (W_i - A_1 e^{-B_1 \psi} - A_2 e^{-B_2 \psi})^2 \quad (3.43)$$

A função não-linear  $S'(x)$ , representada pela Equação (3.42), pode ser simplificada através da aplicação de uma expansão de Taylor:

$$S'(x + \Delta x) = S'(x) + S''(x)\Delta x + O(\|\Delta x\|^2) \quad (3.44)$$

Onde  $\Delta x$  é a diferença entre o vetor  $x$  em um passo ( $x^{k+1}$ ) e o vetor  $x$  em um passo imediatamente antes ( $x^k$ ).

A derivada segunda  $S''(x)$  é expressa pela matriz das derivadas segundas de  $S(x)$ :

$$S''(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1^2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1 \partial B_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1 \partial B_2} \\ \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2^2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2 \partial B_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2 \partial B_2} \\ \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1 \partial A_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1^2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1 \partial B_2} \\ \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2 \partial A_2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2 \partial B_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2^2} \end{bmatrix} \quad (\text{Matriz Hessiana}) \quad (3.45)$$

Para o modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993) estes valores são dados pela matriz bloco:

$$S''(x) = [S''(x)_1 \quad S''(x)_2] \quad (3.46)$$

Onde:

$$S''(x)_1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N 2e^{-2B_1\psi} & \sum_{i=1}^N 2e^{-(B_1+B_2)\psi} \\ \sum_{i=1}^N 2e^{-(B_1+B_2)\psi} & \sum_{i=1}^N 2e^{-(2B_2)\psi} \\ \sum_{i=1}^N -2e^{-B_1\psi} \psi [-w_i + 2A_1e^{-B_1\psi} + A_2e^{-(B_2)\psi}] & \sum_{i=1}^N -2e^{-B_2\psi} \psi (A_1e^{-B_1\psi}) \\ \sum_{i=1}^N 2e^{-B_1\psi} \psi (-A_2e^{-B_2\psi}) & \sum_{i=1}^N 2\psi e^{-B_2\psi} (w_i - A_1e^{-(B_1)\psi} - 2A_2e^{-B_2\psi}) \end{bmatrix}$$

$$S''(x)_2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N 2\psi e^{-B_1\psi} (w_i - 2A_1e^{-B_1\psi} - A_2e^{-B_2\psi}) & \sum_{i=1}^N 2A_2\psi e^{-B_2\psi} (-e^{-B_1\psi}) \\ \sum_{i=1}^N 2\psi e^{-B_1\psi} A_1 (-e^{-B_2\psi}) & \sum_{i=1}^N 2\psi e^{-B_2\psi} (w_i - A_1e^{-B_1\psi} - 2A_2e^{-B_2\psi}) \\ \sum_{i=1}^N -2A_1\psi^2 e^{-B_1\psi} (w_i - 2A_1e^{-B_1\psi} - A_2e^{-(B_2)\psi}) & \sum_{i=1}^N 2A_2e^{-B_2\psi} \psi (-A_1e^{-(B_1)\psi} (-\psi)) \\ \sum_{i=1}^N 2\psi^2 A_1 e^{-B_1\psi} (A_2e^{-B_2\psi}) & \sum_{i=1}^N -2\psi^2 A_2 e^{-B_2\psi} (w_i - A_1e^{-(B_1)\psi} - 2A_2e^{-B_2\psi}) \end{bmatrix}$$

Notar que a expansão de Taylor apresentada em (3.44) é uma expansão de função de várias variáveis. Para  $\Delta x$  suficientemente pequeno, pode-se considerar:

$$S'(x + \Delta x) \cong S'(x) + S''(x)\Delta x \quad (3.47)$$

A partir de um vetor  $x$  conhecido, pode-se ajustar  $\Delta x$  de forma que  $S'(x + \Delta x)$  seja igual a zero. Matematicamente tem-se:

$$S'(x) + S''(x)\Delta x = 0 \quad (3.48)$$

Para a calibração proposta nessa análise essa equação assume a forma explícita:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1^2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1 \partial B_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_1 \partial B_2} \\ \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2^2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2 \partial B_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial A_2 \partial B_2} \\ \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1 \partial A_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1^2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_1 \partial B_2} \\ \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2 \partial A_2} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2 \partial B_1} & \frac{\partial^2 S(x)}{\partial B_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial S(x)}{\partial A_1} \\ \frac{\partial S(x)}{\partial A_2} \\ \frac{\partial S(x)}{\partial B_1} \\ \frac{\partial S(x)}{\partial B_2} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

O sistema (3.49) é linear em  $\Delta x$  e pode ser resolvido por métodos como a eliminação de Gauss. Essa equação é resolvida e um novo valor de  $x$  é obtido:

$$x \rightarrow x + \Delta x$$

Apesar de  $S'(x + \Delta x) = S'(x^*) = 0$ ,  $x^*$  pode ser diferente de  $x + \Delta x$  e isso se deve ao fato da equação (3.47) ser uma aproximação razoável apenas para  $\Delta x$  relativamente pequeno. Se  $\Delta x$  for relativamente grande serão utilizados mais termos da expansão de Taylor, implicando na solução de uma equação maior. No método de Newton não se acrescentam novos termos à equação (3.47). O que é feito é a repetição dos mesmos passos usando um novo  $x$  ( $x \rightarrow x + \Delta x$ ). O critério de convergência consiste em achar um valor mínimo (mínimo local) para o somatório dos quadrados dos resíduos e isso se dá quando  $S'(x^*) = 0$ .

Utilizando o processo de aproximação supracitado e dados experimentais, Vardy, Hwang e Brown (1993) verificaram que, para uma situação de regime transitório de escoamento, os valores obtidos para  $A_1, A_2, B_1, B_2$  são:

$$A_1 = 365$$

$$B_1 = 12000$$

$$A_2 = 35$$

$$B_2 = 5000$$

Válidos para o intervalo  $5 \cdot 10^{-7} \leq \psi \leq 5 \cdot 10^{-5}$ .

Feita a descrição completa do termo de atrito variável, pode-se dar prosseguimento ao processo de solução numérica das equações de governo do transiente hidráulico.

Aplicando o termo de atrito variável apresentado na equação (3.35) na expressão (2.12) (quantidade de movimento do regime transiente):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| + \frac{16A\nu}{D^2} (Y_{1,t} + Y_{2,t}) = 0 \quad (3.50)$$

Da mesma forma que o modelo de Brunone (1991), a equação (2.24) (continuidade) permanece inalterada em relação às formulações de atrito variável.

Fazendo a combinação linear  $L = L_2 + \lambda L_1$  onde  $L_2$  representa a equação (2.24) (continuidade) e  $L_1$  a equação (3.50):

$$a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial t} + g\lambda A \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f\lambda}{2DA} Q|Q| + \frac{16A\lambda\nu}{D^2} (Y_{1,t} + Y_{2,t}) = 0 \quad (3.51)$$

Rearranjando os termos:

$$gA \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \lambda \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{a^2}{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{f\lambda}{2DA} Q|Q| + \frac{16A\lambda\nu}{D^2} (Y_{1,t} + Y_{2,t}) = 0 \quad (3.52)$$

Como a carga piezométrica e a vazão são soluções das equações do transitório (funções das variáveis espaço e tempo), suas derivadas totais são dadas por:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.53)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.54)$$

Comparando estas expressões com os dois primeiros termos em parênteses da equação (3.52):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda = \pm a \quad (3.55)$$

Utilizando a equação (3.55) na equação (3.52), são obtidas as equações diferenciais ordinárias:

$$C^+ : \frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2DA} Q|Q| + \frac{16\nu A}{D^2} (Y_{1,t} + Y_{2,t}) = 0 \quad (3.56)$$

$$C^- : \frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2DA} Q|Q| + \frac{16\nu A}{D^2} (Y_{1,t} + Y_{2,t}) = 0 \quad (3.57)$$

Para facilitar a discussão, será utilizada a Figura 2.4 com a finalidade de relacionar cada ponto com sua função específica no processo de cálculo das vazões e cotas piezométricas.

Para obter a equação característica positiva basta integrar a equação (3.56) de A até P.

$$\int_A^P dQ + \int_A^P \frac{gA}{a} dH + \int_A^P \left[ \frac{f}{2DA} Q|Q| + \frac{16\nu A}{D^2} (Y_{1,t} + Y_{2,t}) \right] dt = 0 \quad (3.58)$$

Avaliando as integrais, fazendo uma aproximação de primeira ordem para o termo de atrito permanente e usando a equação (3.38) para os  $Y_{i,t}$  obtém-se:

$$Q_P = Q_A + \frac{gAH_A}{a} - \frac{gAH_P}{a} - \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} - \frac{16\nu A}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} + \left( \frac{A_k}{A} \right) (Q_P - Q_C) \right) \Delta t \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow Q_P + \frac{16\nu A}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) Q_P \Delta t = Q_A + \frac{gA(H_A - H_P)}{a} - \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} +$$

$$-\frac{16\nu A \Delta t}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} - \left( \frac{A_k}{A} \right) Q_C \right) \quad (3.60)$$

$$Q_P = \frac{Q_A + \frac{gA(H_A - H_P)}{a} - \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} - \frac{16\nu A \Delta t}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} - \left( \frac{A_k}{A} \right) Q_C \right)}{1 + \frac{16\nu A}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} \quad (3.61)$$

Admitindo as substituições:

$$C_{a\_Vardy} = \frac{C_a}{1 + \frac{16\nu A}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} \quad (3.62)$$

$$C_{P\_Vardy} = \frac{Q_A + \frac{gAH_A}{a} - \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} - \frac{16\nu A \Delta t}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} - \left( \frac{A_k}{A} \right) Q_C \right)}{1 + \frac{16\nu A}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} \quad (3.63)$$

Pode-se escrever a equação característica (3.61) na forma reduzida:

$$Q_P = C_{P\_Vardy} - C_{a\_Vardy} H_P \quad (3.64)$$

Integrando a equação característica negativa (3.57), de B até P:

$$\int_B^P dQ - \int_B^P \frac{gA}{a} dH + \int_B^P \left[ \frac{f}{2DA} Q|Q| + \frac{16\nu A}{D^2} (Y_{1,t} + Y_{2,t}) \right] dt = 0 \quad (3.65)$$

A avaliação das integrais através do mesmo processo utilizado para a característica positiva resulta:

$$Q_P = Q_B + \frac{gAH_P}{a} - \frac{gAH_B}{a} - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} - \frac{16vA}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} + \left( \frac{A_k}{A} \right) (Q_P - Q_C) \right) \Delta t \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_P + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) Q_P \Delta t &= Q_B + \frac{gA(H_P - H_B)}{a} - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} + \\ &\quad - \frac{16vA\Delta t}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} - \left( \frac{A_k}{A} \right) Q_C \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\Rightarrow Q_P = \frac{Q_B + \frac{gA(H_P - H_B)}{a} - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} - \frac{16vA\Delta t}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} - \left( \frac{A_k}{A} \right) Q_C \right)}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} \quad (3.68)$$

Fazendo a substituição a seguir:

$$C_{N\_Vardy} = \frac{Q_B - \frac{gAH_B}{a} - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} - \frac{16vA\Delta t}{D^2} \sum_{k=1}^2 \left( Y_{k,t-\Delta t} e^{-B_k \psi^*} - \left( \frac{A_k}{A} \right) Q_C \right)}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} \quad (3.69)$$

A equação (3.68) pode ser expressa em uma forma mais simplificada:

$$Q_P = C_{N\_Vardy} + C_{a\_Vardy} H_P \quad (3.70)$$

Esta equação pode ser utilizada em conjunto com a expressão (3.64) para a determinação da vazão no ponto P em função de valores dados em passos de tempo anteriores. Resolvendo o sistema:

$$Q_P = \frac{C_{P\_Vardy} + C_{N\_Vardy}}{2} \quad (3.71)$$

A carga no ponto P é obtida através da substituição de  $Q_P$  em qualquer uma das equações simplificadas, (3.64) ou (3.70).

$$H_P = \frac{C_{P\_Vardy} - Q_P}{C_{a\_Vardy}} \quad (3.72)$$

### 3.2 FLUXOS TRANSIENTES EM CONDUTOS PLÁSTICOS

Materiais viscoelásticos representam uma situação intermediária entre sólidos elásticos e fluidos viscosos. Os sólidos elásticos apresentam fronteira definida em uma dada situação de equilíbrio mecânico. Entretanto, a configuração de sua fronteira apresenta-se variável durante a aplicação de forças externas até atingir uma nova configuração de equilíbrio. A remoção dessas forças tem como resultado o retorno ao formato de fronteira inicial. Os fluidos viscosos apresentam fronteira indefinida e a aplicação de forças resulta em um processo irreversível.

Os sólidos elásticos comportam-se de acordo com a lei de Hooke e os fluidos viscosos de acordo com a lei da viscosidade de Newton. Ambas as leis estão sujeitas a certas restrições: A lei de Newton é válida para taxas de fluxo relativamente pequenas e a lei de Hooke é válida para tensões pequenas. Essas leis serão combinadas para estabelecer as equações constitutivas dos modelos de Kelvin- Voigt, que será utilizado para descrever o comportamento mecânico de um tubo em um sistema hidráulico.

Para o policloreto de vinila a porcentagem de comportamento viscoelástico não-linear é muito baixa. Por isso, pode-se, sem perda de generalidade, admitir a hipótese de comportamento viscoelástico linear para o PVC.

Em um sólido viscoelástico linear a deformação total é dada pela soma de duas parcelas:  $\varepsilon_e$  deformação elástica instantânea,  $\varepsilon_r$  deformação lenta. A deformação retardada está relacionada à fluência (creep), que corresponde a uma variação na deformação dependente do tempo para uma dada variação na tensão.

Em termos matemáticos, a função fluência é definida da seguinte forma:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma} \quad (3.73)$$

Onde  $J(t)$  é a função fluência do sólido viscoelástico ( $[L]^2[F]^{-1}$ );  $\sigma$  é a tensão aplicada no sólido viscoelástico ( $[F][L]^{-2}$ );  $\varepsilon(t)$  é a deformação associada à tensão aplicada  $\sigma$  (adimensional).

Outro conceito importante é o de relaxamento de tensão. Em um sólido viscoelástico, para um nível de deformação invariante a tensão aplicada irá decrescer com o tempo a partir de uma condição inicial elástica. Esse decaimento é denominado tempo de relaxação.

De forma a estabelecer uma formulação mais rigorosa ao fenômeno da viscoelasticidade, Boltzman estabeleceu o princípio da superposição. Este princípio está pautado na idéia de que cada passo de carregamento tem uma contribuição independente na deformação final, de modo que a deformação total pode ser obtida como uma soma de todas as contribuições. Além disso, de acordo com esse princípio, a fluência é função do histórico de carregamento da amostra. Dessa forma, para um carregamento em múltiplos passos, com tensões incrementais sendo adicionadas a instantes de tempo definidos, a deformação total dada em um tempo  $t$  é:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n J(t-t'_i) \Delta\sigma_i \quad (3.74)$$

Onde  $\Delta\sigma_i$  ( $[F][L]^{-2}$ ) representa as tensões incrementais adicionadas nos tempos  $t'_i$  ( $[t]$ ). As tensões incrementais adicionadas podem ser positivas ou negativas .

Esse somatório pode ser generalizado para incrementos diferenciais na seguinte forma (integral de Duhamel):

$$\varepsilon(t) = J_0 \sigma(t) + \int_0^t \sigma(t-t') \frac{\partial J(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.75)$$

Onde  $J_0$  é o coeficiente de fluência elástico ( $[L]^2[F]^{-1}$ ).

### 3.2.1 Modelo generalizado de Kelvin-Voigt

Os modelos propostos para explicar o fenômeno viscoelástico têm uma característica em comum que é o fato de serem representados graficamente por molas de Hooke e amortecedores Newtonianos. As molas de Hooke constituem-se em elementos sem massa e sujeitos ao comportamento mecânico descrito pela Lei de Hooke. Os amortecedores Newtonianos são considerados cilindros cheios de fluido Newtoniano viscoso sujeitos a ação de um pistão que se move a uma taxa proporcional à viscosidade e tensão do fluido.

O modelo consiste em um amortecedor Newtoniano de viscosidade  $\eta_k$  combinado em paralelo com uma mola com modulo de elasticidade  $E_k$ . Uma representação esquemática para esse modelo é apresentada na Figura 3.2.

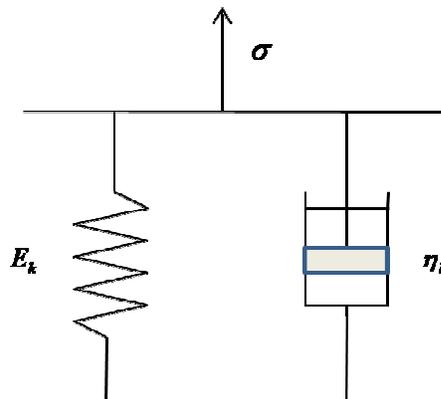


FIGURA 3.2 - Elemento de Kelvin-Voigt.

A tensão fornecida ao elemento (Figura 3.2) é distribuída entre a mola e o amortecedor de forma que as respostas de cada estrutura tenham a mesma magnitude. Dessa forma, a tensão total é igual à soma das tensões em cada estrutura:

$$\sigma = E_k \varepsilon + \eta_k \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.76)$$

Onde  $E_k$  é o módulo de elasticidade da mola do elemento de Kelvin-Voigt ( $[F][L]^{-2}$ );  $\eta_k$  é a viscosidade dinâmica do amortecedor do elemento de Kelvin-Voigt ( $[F][t][L]^{-2}$ ).

Tomando-se  $E_k = \frac{1}{J_k}$  na equação (3.76), pode-se mostrar que a dependência da fluência com o tempo é expressa por:

$$J(t) = J_k (1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.77)$$

Onde  $\tau$  é o tempo de relaxação,  $\tau = \frac{\eta_k}{E_k}$  ( $[t]$ );  $J_k$  é a fluência da mola do elemento de Kelvin-Voigt ( $[L]^2[F]^{-1}$ ).

Para que esse modelo possa representar adequadamente o comportamento mecânico de um material viscoelástico é necessário fazer uma generalização. Para descrição de tensão de relaxamento faz-se uso de uma associação em paralelo de unidades de Kelvin-Voigt. Por outro lado, para representação do comportamento de fluência emprega-se uma combinação em série das unidades, como esquematizado na Figura 3.3 (WARD; SWEENEY, 2004).

Desde que, em um arranjo em série (Figura 3.3) as deformações são aditivas, pode-se escrever, para representação do comportamento de fluência, a função fluência como um somatório das funções fluência de cada unidade de Kelvin-Voigt (FERRY, 1980):

$$J(t) = J_0 + \sum_{k=1}^N J_k (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (3.78)$$

Onde  $J_0$  é a fluência do primeiro elemento mola definido por  $J_0 = \frac{1}{E_0}$  ( $[L]^2[F]^{-1}$ );  $J_k$  é a

fluência da mola do  $k$ -ésimo elemento de Kelvin-Voigt definida por  $J_k = \frac{1}{E_k}$  ( $[L]^2[F]^{-1}$ );  $E_k$

é o módulo de elasticidade da mola do  $k$ -ésimo elemento ( $[F][L]^{-2}$ );  $\tau_k$  é o tempo de relaxação do amortecedor no  $k$ -ésimo elemento,  $\tau_k = \frac{\eta_k}{E_k}$  ( $[t]$ );  $\eta_k$  é a viscosidade do amortecedor no  $k$ -ésimo elemento ( $[F][t][L]^{-2}$ );  $N$  é o número de elementos Kelvin-Voigt utilizados no modelo. Os parâmetros  $J_k$  e  $\tau_k$  do modelo mecânico viscoelástico são ajustados aos dados experimentais da função fluência.

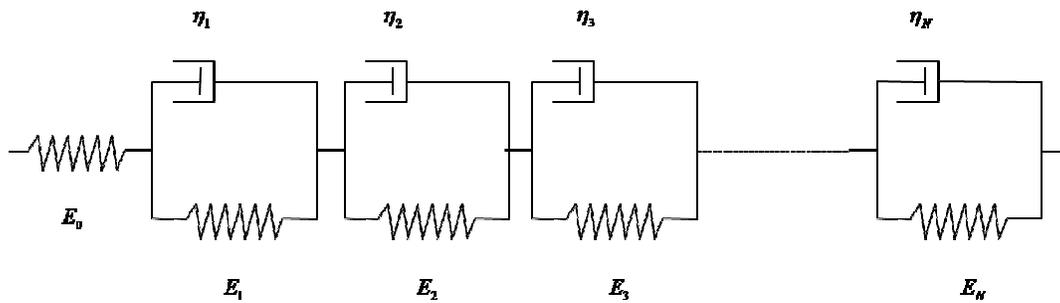


FIGURA 3. 3 - Modelo generalizado de Kelvin-Voigt.

Fonte: Soares (2007)

Para determinar a deformação total das paredes internas de condutos circulares em termos de suas características geométricas, de ancoragem e das propriedades mecânicas de pressão e fluência, utiliza-se uma combinação entre as expressões de tensão circunferencial e a formulação geral de deformação em termos da fluência e cargas aplicadas. De acordo com (CHAUDRY, 1987, WYLIE; STREETER, 1993):

$$\sigma = \alpha \frac{\Delta p D}{2e} \quad (3.79)$$

Onde  $\Delta p$  é a variação de pressão interna ( $[F][L]^{-2}$ );  $\alpha$  é um parâmetro adimensional que depende do tipo de ancoragem do conduto.

Para um tubo de pequena espessura ( $D/e < 25$ ), ancorado ao longo de seu comprimento,  $\alpha$  é dado por (WYLIE; STREETER, 1993):

$$\alpha = \frac{2e}{D}(1+\nu) + \frac{D}{D+e}(1-\nu^2) \quad (3.80)$$

Onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson (adimensional).

Aplicando a equação (3.75) e a relação para tensão em condutos circulares (3.79), pode-se obter uma equação para a deformação em termos da fluência, pressão e propriedades geométricas:

$$\varepsilon(t) = \frac{\alpha_0 D_0}{2e_0} [P(t) - P_0] J_0 + \int_0^t \frac{\alpha(t-t') D(t-t')}{2e(t-t')} [P(t-t') - P_0] \frac{\partial J(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.81)$$

Onde  $P(t)$  é a pressão no tempo,  $P_0$  é a pressão inicial ( $[F][L]^{-2}$ ),  $J(t)$  é a função fluência no tempo  $t$ ,  $D(t)$  e  $D_0$  são os diâmetros internos nos tempos  $t$  e  $t = 0$ ,  $e(t)$  e  $e_0$  representam a espessura do conduto nos tempos  $t$  e  $t = 0$ ,  $\alpha(t)$  e  $\alpha_0$  são os coeficientes de ancoragem nos tempos  $t$  e  $t = 0$ , respectivamente. O primeiro termo da equação (3.81) corresponde à deformação elástica e o segundo termo à deformação lenta. A função fluência, que descreve o comportamento viscoelástico do material pode ser determinada experimentalmente em um teste mecânico independente ou calibrada através de dados transientes. Assim, a função poderá ser representada por uma expressão matemática que poderá ser implementada.

Para levar em consideração o comportamento viscoelástico do tubo, a equação da continuidade deve ser obtida novamente a partir do teorema de transporte de Reynolds. Considerando a relação entre área da secção transversal e a deformação total ( $dA/dt = 2Ad\varepsilon/dt$ ) e o dois componentes da deformação, a equação da continuidade fica (COVAS *et al.*, 2003):

$$\frac{dH}{dt} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2a^2}{g} \frac{d\varepsilon_r}{dt} = 0 \quad (3.82)$$

Onde  $\varepsilon_r$  é a deformação lenta do material do conduto (adimensional). A deformação elástica é incluída na derivada da carga em relação ao tempo e na velocidade da onda elástica,  $a$ . A velocidade da onda elástica é calculada pela equação (2.21) considerando  $E_0 = \frac{1}{J_0}$ . A equação da continuidade resolvida com a equação do momento e a segunda parcela da equação (3.81) descrevem as variações de pressão e vazão ao longo de um conduto forçado.

Para tubos viscoelásticos, um novo conceito de velocidade de onda,  $a$ , pode ser definido em termos da função fluência (COVAS *et al.*, 2003). Esta velocidade da onda é um parâmetro dependente do tempo que decresce durante o evento transiente, como consequência do aumento da magnitude da função fluência. Isso justifica o amortecimento da onda de pressão e mudança de fase durante a propagação do evento transiente.

O conjunto das equações diferenciais é resolvido pelo método das características. A estabilidade deste método requer a verificação de uma restrição numérica para os passos de tempo e espaço, dada pela condição de Courant. Tal critério é definido pela relação entre a celeridade real ( $V \pm a$ ) e a celeridade numérica ( $\Delta x / \Delta t$ ), ou seja,  $\Delta x / \Delta t \geq V \pm a$ . Para evitar dispersão e amortecimento numérico, essa relação deve ser uma igualdade ( $\Delta x / \Delta t = V \pm a$ ). Dessa forma, podemos escrever ( $dx/dt = V \pm a$ ). Esta condição permite a transformação das equações de governo em equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + 2Aa \left( \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} \right) + gAh_f = 0 \quad (3.83)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} - 2Aa \left( \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} \right) + gAh_f = 0 \quad (3.84)$$

Válidas ao longo das linhas características curvas  $dx/dt = V \pm a$ . Para o caso elástico linear a taxa de variação da deformação lenta é nula.

Em muitos problemas de engenharia quando o fluido é a água, a velocidade do fluido é desprezível quando comparada com a velocidade da onda elástica ( $V \ll a$ ). Então, os termos convectivos nas equações (3.83) e (3.84) são desprezados conduzindo a linhas características aproximadamente retas  $dx/dt = \pm a$ . Estas equações simplificadas podem ser resolvidas pelo seguinte esquema numérico:

$$Q(i,t) - Q(i-1,t-\Delta t) + \frac{gA}{a} [H(i,t) - H(i-1,t-\Delta t)] + 2Aa \left( \frac{\partial \varepsilon_r(i,t)}{\partial t} \right) \Delta t + gAh_f \Delta t = 0 \quad (3.85)$$

$$Q(i,t) - Q(i+1,t-\Delta t) - \frac{gA}{a}[H(i,t) - H(i+1,t-\Delta t)] - 2Aa \left( \frac{\partial \varepsilon_r(i,t)}{\partial t} \right) \Delta t + gAh_f \Delta t = 0 \quad (3.86)$$

Considerando apenas o fator de atrito permanente, o termo  $h_f$  pode ser substituído por  $\frac{fQ|Q|}{2gA^2D}$ . As equações (3.85) e (3.86) são reformuladas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Q(i,t) - Q(i-1,t-\Delta t) + \frac{gA}{a}[H(i,t) - H(i-1,t-\Delta t)] + 2Aa \left( \frac{\partial \varepsilon_r(i,t)}{\partial t} \right) \Delta t + \\ + \frac{fQ(i-1,t-\Delta t)Q(i-1,t-\Delta t)}{2AD} \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} Q(i,t) - Q(i+1,t-\Delta t) - \frac{gA}{a}[H(i,t) - H(i+1,t-\Delta t)] - 2Aa \left( \frac{\partial \varepsilon_r(i,t)}{\partial t} \right) \Delta t + \\ + \frac{fQ(i+1,t-\Delta t)Q(i+1,t-\Delta t)}{2AD} \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Validas ao longo das linhas características  $dx/dt = \pm a$ . Nas equações (3.87) e (3.88) há um termo que não pode ser diretamente calculado e que requer discretização numérica adicional: a taxa de variação da deformação lenta.

A derivada da deformação lenta é obtida pela derivação da segunda parcela da equação (3.81). A função fluência do tubo pode ser representada por uma expressão matemática passível de calcular analiticamente esta derivada. O modelo mecânico de um sólido generalizado é utilizado para descrever a função fluência. Esse modelo corresponde à equação (3.78).

De acordo com este modelo, a deformação lenta e sua taxa de variação são calculadas como a soma desses fatores para cada elemento  $k$  de Kelvin-Voigt:

$$\varepsilon_r(i,t) = \sum_{k=1,\dots,N} \varepsilon_{rk}(i,t) = \sum_{k=1,\dots,N} \left\{ \frac{\alpha D}{2e} \gamma \int_0^t [H(i,t-t') - H_0(i)] \frac{J_k}{\tau_k} e^{-\frac{t'}{\tau_k}} dt' \right\} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r(i, t)}{\partial t} = \sum_{k=1, \dots, N} \frac{\partial \varepsilon_{rk}(i, t)}{\partial t} = \sum_{k=1, \dots, N} \left\{ \frac{\alpha D}{2e} \frac{J_k}{\tau_k} \gamma [H(i, t) - H_0(i)] - \frac{\varepsilon_{rk}(i, t)}{\tau_k} \right\} \quad (3.90)$$

Onde  $\varepsilon_{rk}(i, t)$  é a deformação lenta de um elemento de Kelvin-Voigt para um dado trecho, em um passo de tempo (adimensional).

Considerando a função fluência definida pelo modelo do sólido viscoelástico generalizado e introduzindo a derivada em relação ao tempo da função  $J(t)$  na segunda parcela da equação (3.81), então a seguinte relação é válida pra cada elemento de Kelvin-Voigt:

$$\varepsilon_{rk}(i, t) = \int_0^t F(i, t - t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{-\frac{t-t'}{\tau_k}} dt' \quad (3.91)$$

Onde a função  $F(i, t)$  é definida por:

$$F(i, t) = \frac{\alpha D}{2e} \gamma [H(i, t) - H_0(i)] \quad (3.92)$$

A derivada da deformação lenta pode ser diretamente calculada por diferenciação analítica da equação (3.91), para cada elemento k de Kelvin-Voigt . O procedimento para o cálculo dessa derivada é descrito nas linhas seguintes:

$$\frac{\partial \varepsilon_{rk}(i, t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_0^t F(i, t - t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t'/\tau_k} dt' \quad (3.93)$$

Usando o fato de que  $J_k$  e  $\tau_k$  são constantes para um conjunto definido de elementos de Kelvin-Voigt e fazendo a mudança de variáveis dada por  $t - t' = y$  :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F(i, t - t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t'/\tau_k} dt' = \frac{d}{dt} \left( \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy \right) \quad (3.94)$$

A aplicação da regra da derivada do produto no segundo membro da equação (3.94) resulta:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy \right) = -\frac{J_k}{\tau_k^2} e^{-t/\tau_k} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy + \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} \frac{d}{dt} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy \quad (3.95)$$

A integral da segunda parcela do segundo membro da equação (3.95) pode ser avaliada através da utilização do Teorema fundamental do cálculo na sua versão para funções de mais de uma variável.

$$\begin{aligned} -\frac{J_k}{\tau_k^2} e^{-t/\tau_k} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy + \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} \frac{d}{dt} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy &= -\frac{J_k}{\tau_k^2} e^{-t/\tau_k} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy + \\ &+ \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} F(i, t) e^{t/\tau_k} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Realizando algumas pequenas manipulações algébricas:

$$-\frac{J_k}{\tau_k^2} e^{-t/\tau_k} \int_0^t F(i, y) e^{y/\tau_k} dy + \frac{J_k}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} F(i, t) e^{t/\tau_k} = -\frac{J_k}{\tau_k} \int_0^t F(i, y) \frac{e^{y-t/\tau_k}}{\tau_k} dy + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) \quad (3.97)$$

Efetuada a mudança de variáveis novamente, agora no caminho inverso,  $y = t - t'$  obtém-se a expressão abaixo:

$$-\frac{J_k}{\tau_k} \int_0^t F(i, y) \frac{e^{\frac{y-t}{\tau_k}}}{\tau_k} dy + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) = -\frac{J_k}{\tau_k} \int_t^0 F(i, t-t') \frac{e^{\frac{-t'}{\tau_k}}}{\tau_k} (-1) dt' + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) \quad (3.98)$$

A primeira parcela do segundo membro da equação (3.98) pode ser reformulada de modo que fique em função de deformação lenta de cada elemento de Kelvin-Voigt:

$$-\frac{J_k}{\tau_k} \int_t^0 F(i, t-t') \frac{e^{\frac{-t'}{\tau_k}}}{\tau_k} (-1) dt' + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) = -\frac{1}{\tau_k} \int_0^t F(i, t-t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t'}{\tau_k}} dt' + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) \quad (3.99)$$

$$-\frac{1}{\tau_k} \int_0^t F(i, t-t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t'}{\tau_k}} dt' + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) = -\frac{\varepsilon_{rk}(i, t)}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) \quad (3.100)$$

No final desses procedimentos de cálculo, a taxa de variação da deformação lenta de um dado elemento é dada em função da própria deformação lenta desse elemento.

$$\frac{\partial \varepsilon_{rk}(i, t)}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_{rk}(i, t)}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) \quad (3.101)$$

A partir daí faz-se necessária a utilização de algum esquema numérico para a determinação da deformação lenta de cada elemento de Kelvin-Voigt. Covas *et al.* (2005) utilizou um esquema de diferenças finitas que é explicitado a seguir.

Dividindo a integral (3.91):

$$\varepsilon_{rk}(i, t) = \int_0^\Delta F(i, t-t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t'}{\tau_k}} dt' + \int_\Delta^t F(i, t-t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t'}{\tau_k}} dt' \quad (3.102)$$

Fazendo a mudança de variável  $t'' = t - t'$ , a primeira parcela da equação (3.102) resulta:

$$\int_0^{\Delta t} F(i, t - t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t'}{\tau_k}} dt' = - \int_t^{t-\Delta t} F(i, t'') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{t''-t}{\tau_k}} dt'' \quad (3.103)$$

Aplicando a integração por partes na variável  $t''$  por meio das funções  $u(i, t'') = F(i, t'')$  e  $v(t'', t) = J_k e^{(t''-t)/\tau_k}$  obtém-se:

$$- \int_t^{t-\Delta t} F(i, t'') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{t''-t}{\tau_k}} dt'' = \left[ -F(i, t'') J_k e^{(t''-t)/\tau_k} \right]_t^{t-\Delta t} + \int_t^{t-\Delta t} \frac{\partial F(i, t'')}{\partial t''} J_k e^{(t''-t)/\tau_k} dt'' \quad (3.104)$$

Fazendo novamente a integral por partes, a expressão (3.104) resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} F(i, t - t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t'}{\tau_k}} dt' &= J_k \left[ F(i, t) - F(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t/\tau_k} \right] + J_k \tau_k \frac{\partial F(i, t'')}{\partial t''} e^{(t''-t)/\tau_k} \Bigg|_t^{t-\Delta t} - \\ &+ \int_t^{t-\Delta t} \frac{\partial^2 F(i, t'')}{\partial t''^2} J_k \tau_k e^{(t''-t)/\tau_k} dt'' \end{aligned} \quad (3.105)$$

A última parcela da equação (3.105) pode ser desprezada, pois possui uma variação de segunda ordem no integrando. Além disso, a segunda parcela do segundo membro de (3.105) pode ser aproximada numericamente:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} F(i, t - t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t'}{\tau_k}} dt' &\approx J_k \left[ F(i, t) - F(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t/\tau_k} \right] + \\ &- J_k \tau_k \frac{F(i, t) - F(i, t - \Delta t)}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t/\tau_k}) \end{aligned} \quad (3.106)$$

Para a segunda parcela da equação (3.102) é feita a mudança de variável  $t' = u + \Delta t$  :

$$\int_{\Delta t}^t F(i, t - t') \frac{J_k}{\tau_k} e^{-\frac{t'}{\tau_k}} dt' = \int_0^{t-\Delta t} F(i, t - \Delta t - u) \frac{J_k}{\tau_k} e^{(-u-\Delta t)/\tau_k} du \quad (3.107)$$

Pode-se notar que a substituição de  $t$  por  $t - \Delta t$  e  $t'$  por  $u$  na equação (3.91), seguida pela multiplicação por  $e^{-\Delta t/\tau_k}$  resulta na equação (3.107):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rk}(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t/\tau_k} &= \left[ \int_0^{t-\Delta t} F(i, t - \Delta t - u) \frac{J_k}{\tau_k} e^{-\frac{u}{\tau_k}} du \right] e^{-\Delta t/\tau_k} = \\ &= \int_0^{t-\Delta t} F(i, t - \Delta t - u) \frac{J_k}{\tau_k} e^{(-u-\Delta t)/\tau_k} du \end{aligned} \quad (3.108)$$

A deformação lenta aproximada para cada elemento de Kelvin-Voigt é dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rk}(i, t) &= J_k \left[ F(i, t) - F(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t/\tau_k} \right] - J_k \tau_k \frac{F(i, t) - F(i, t - \Delta t)}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t/\tau_k}) + \\ &+ \varepsilon_{rk}(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t/\tau_k} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Assim, a derivada da deformação lenta para cada elemento de Kelvin-Voigt é calculada por meio da equação (3.101). A deformação lenta nas equações características é calculada pela soma das taxas de variação das deformações lentas de cada elemento dadas pela equação (3.89).

Podemos agrupar as equações características do mesmo modo que no modelo elástico. Usando as aproximações numéricas para a taxa de variação da deformação lenta, a equação característica positiva pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} Q(i, t) &= Q(i-1, t - \Delta t) + \frac{gA}{a} H(i-1, t - \Delta t) - \frac{gA}{a} H(i, t) - 2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left( -\frac{\varepsilon_{rk}(i, t)}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) \right) \\ &- \frac{fQ(i-1, t - \Delta t) \left| Q(i-1, t - \Delta t) \right|}{2AD} \Delta t \end{aligned} \quad (3.110)$$

Onde:

$$F(i, t) = \frac{\alpha D}{2e} \gamma [H(i, t) - H_0(i)]$$

$$\varepsilon_{rk}(i, t) = J_k [F(i, t) - F(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k}] - J_k \tau_k \frac{F(i, t) - F(i, t - \Delta t)}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) + \varepsilon_{rk}(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k}$$

Pode-se agrupar todas as parcelas que tenham o fator  $H(i, t)$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rk}(i, t) = F(i, t) \left( J_k - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) \right) - J_k F(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k} + J_k \tau_k \frac{F(i, t - \Delta t)}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) + \\ + \varepsilon_{rk}(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k} \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon_{rk}(i, t) = \frac{\alpha D}{2e} \gamma H(i, t) \left( J_k - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) \right) - \frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \left( J_k - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) \right) - J_k F(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k} + \\ + J_k \tau_k \frac{F(i, t - \Delta t)}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) + \varepsilon_{rk}(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Assim, apenas a primeira parcela admite valores de carga no passo de tempo corrente de cálculo. Denotando-se o somatório das parcelas restantes por:

$$\begin{aligned} R(\varepsilon_{rk}(i, t)) = -\frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \left( J_k - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) \right) - J_k F(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k} + \\ + J_k \tau_k \frac{F(i, t - \Delta t)}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) + \varepsilon_{rk}(i, t - \Delta t) e^{-\Delta t / \tau_k} \end{aligned} \quad (3.113)$$

A equação original (3.110) resulta:

$$\begin{aligned} Q(i, t) = Q(i - 1, t - \Delta t) + \frac{gA}{a} [H(i - 1, t - \Delta t) - H(i, t)] - 2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left[ -\frac{\alpha D}{2e} \gamma J_k \frac{H(i, t)}{\tau_k} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha D}{2e} \gamma \frac{H(i, t)}{\tau_k} \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) - \frac{R(\varepsilon_{rk}(i, t))}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} F(i, t) \right] + \\ - \frac{fQ(i - 1, t - \Delta t) Q(i - 1, t - \Delta t)}{2AD} \Delta t \end{aligned} \quad (3.114)$$

Usando a fórmula (3.92) e colocando em evidência a carga em  $(i,t)$ , o fator que multiplica essa carga terá a seguinte configuração:

$$C_{aVisc.} = \frac{gA}{a} + 2Aa\Delta t \frac{\alpha D}{2e} \gamma \sum_{k=1, \dots, N} \left( \frac{J_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) \right) \quad (3.115)$$

A equação característica positiva pode assumir um formato mais simples:

$$Q(i,t) = C_{pVisc.} - C_{aVisc.} H(i,t) \quad (3.116)$$

Onde :

$$C_{pVisc.} = Q(i-1, t - \Delta t) + \frac{gA}{a} H(i-1, t - \Delta t) - 2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left( -\frac{R(\varepsilon_{rk}(i,t))}{\tau_k} - \frac{J_k}{\tau_k} \frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \right) - \frac{fQ(i-1, t - \Delta t)Q(i-1, t - \Delta t)}{2AD} \Delta t$$

Raciocínio semelhante é feito para a simplificação da equação característica negativa.

$$Q(i,t) = Q(i+1, t - \Delta t) - \frac{gA}{a} H(i+1, t - \Delta t) + \frac{gA}{a} H(i,t) + 2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left( -\frac{\varepsilon_{rk}(i,t)}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} F(i,t) \right) - \frac{fQ(i+1, t - \Delta t)Q(i+1, t - \Delta t)}{2AD} \Delta t \quad (3.117)$$

Feitas as devidas manipulações algébricas, essa equação é modificada:

$$\begin{aligned}
 Q(i,t) = & Q(i+1,t-\Delta t) - \frac{gA}{a} [H(i+1,t-\Delta t) - H(i,t)] + 2Aa\Delta t \sum_{k=1,\dots,N} \left[ -\frac{\alpha D}{2e} \gamma J_k \frac{H(i,t)}{\tau_k} + \right. \\
 & + \frac{\alpha D}{2e} \gamma \frac{H(i,t)}{\tau_k} \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) - \frac{R(\varepsilon_{rk}(i,t))}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} F(i,t) + \\
 & \left. - \frac{fQ(i+1,t-\Delta t)Q(i+1,t-\Delta t)}{2AD} \Delta t \right]
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

O formato mais simples da equação característica negativa é expresso por:

$$Q(i,t) = C_{NVisc.} + C_{aVisc.} H(i,t) \tag{3.119}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 C_{NVisc.} = & Q(i+1,t-\Delta t) - \frac{gA}{a} H(i+1,t-\Delta t) + 2Aa\Delta t \sum_{k=1,\dots,N} \left( -\frac{R(\varepsilon_{rk}(i,t))}{\tau_k} - \frac{J_k}{\tau_k} \frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \right) \\
 & - \frac{fQ(i+1,t-\Delta t)Q(i+1,t-\Delta t)}{2AD} \Delta t
 \end{aligned}$$

### 3.3 ESQUEMA NUMÉRICO

#### 3.3.1 Fluxograma do modelo de simulação hidráulica

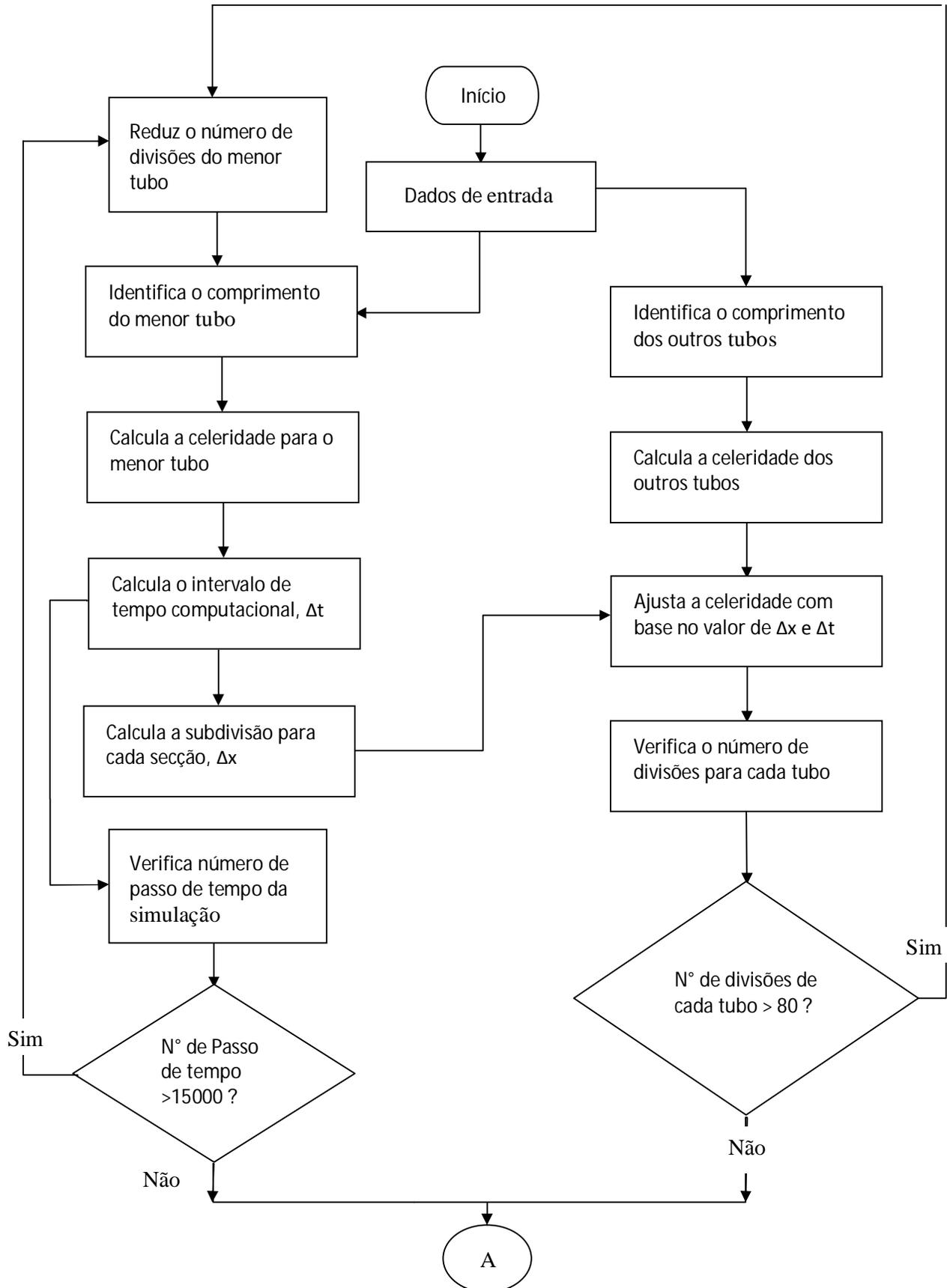
Na Figura 3.4 é apresentado o fluxograma do modelo para análise hidráulica do escoamento em sistemas de adução implementado nesta pesquisa. O trecho do esquema, referente ao cálculo dos pontos internos, é mostrado com mais detalhes na Figura 3.5. O cálculo do golpe de aríete é feito com base nos desenvolvimentos teóricos propostos, tendo como elementos basais as equações de momento e continuidade.

O procedimento tem início com a ordenação dos comprimentos dos tubos fornecidos e identificação do menor tubo para o cálculo da celeridade. Simultaneamente à determinação da

celeridade no menor tubo, calculam-se as celeridades nos outros tubos do sistema de adução. A celeridade é obtida através da expressão (2.21) e depende das propriedades físicas do fluido, das propriedades geométricas do tubo e do tipo de ancoragem. São considerados condutos de parede espessa e parede fina. Os casos de ancoragem disponíveis no código computacional são: conduto rígido, ancorado contra movimento longitudinal, com juntas de dilatação e tubo com uma extremidade ancorada. Em seguida, são determinados o incremento de tempo e espaço para o ajuste das celeridades obtidas em cada tubo. Esse ajuste é estabelecido quando o número de divisões de qualquer tubo não for inteiro. A partir daí, são obtidos os comprimentos de cada seção em cada tubo. Esse comprimento está condicionado às limitações do programa, o número de divisões de cada tubo não deve exceder 80. Esse primeiro passo corresponde à discretização da malha computacional.

O próximo passo corresponde à identificação de condições iniciais e condições de contorno. As condições iniciais são obtidas através das considerações de estado permanente e do cálculo das variáveis carga e vazão para esse estado. As condições de contorno são também verificadas. O programa tem condições de identificar as seguintes condições de contorno: reservatório de montante, reservatório e jusante, bomba e válvula de retenção, ondegway, chaminé de equilíbrio, reservatório hidropneumático, válvula antecipadora de onda, ventosa, válvula de alívio, válvula de controle jusante e junção. Após a identificação das condições de contorno, são efetuados os cálculos para determinação de vazão e carga no contorno.

O último passo é a determinação dos pontos internos da malha (Figura 3.5), que caracterizam o transiente hidráulico. Os valores de vazão e carga são obtidos através da solução de sistemas lineares derivados da aplicação do método das características nas equações governantes do transiente hidráulico em condutos pressurizados. O procedimento de cálculo leva em consideração todas as formulações de efeitos dinâmicos de dissipação e energia desenvolvidas neste trabalho.



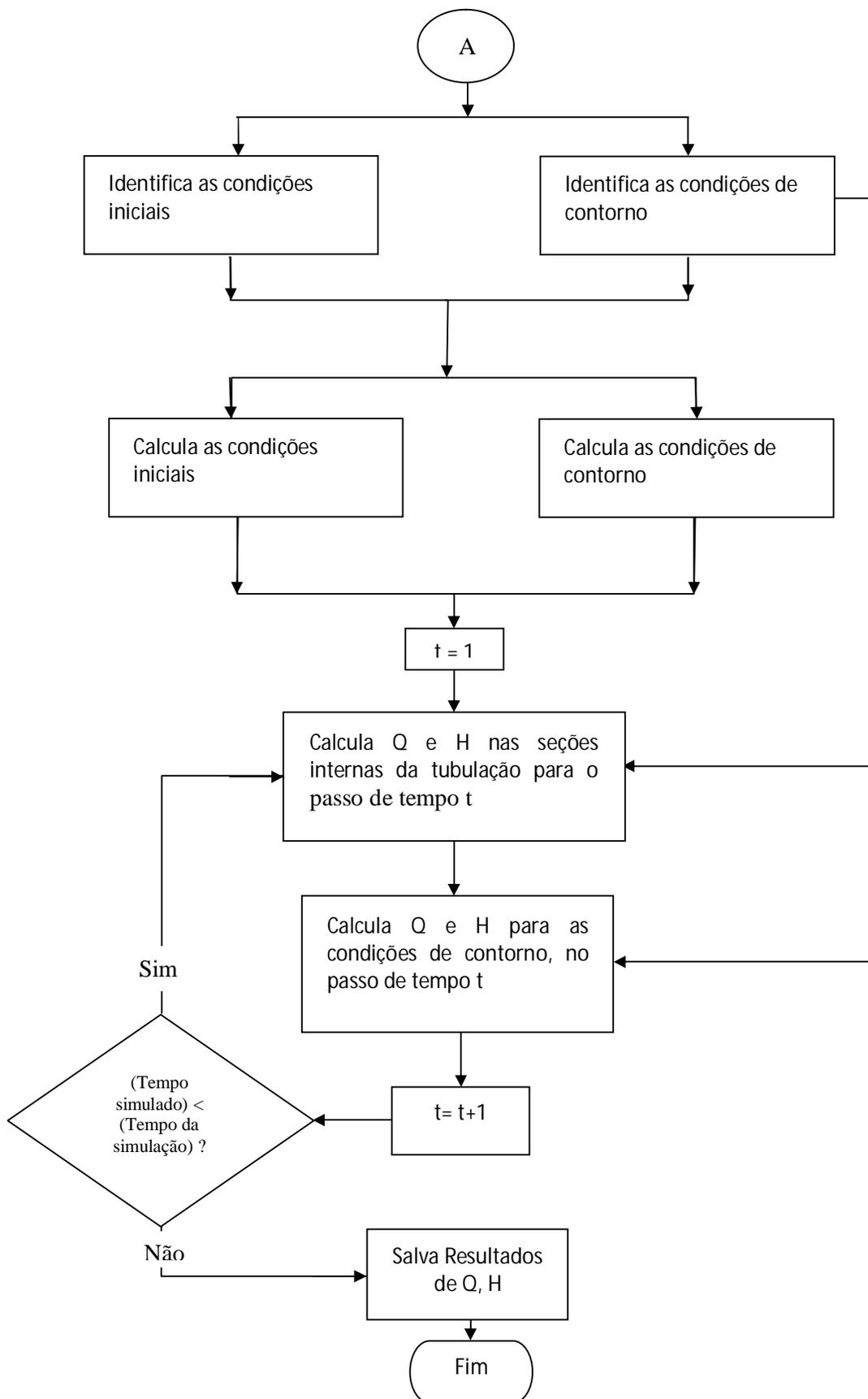


FIGURA 3. 4 – Fluxograma do modelo de simulação hidráulica.

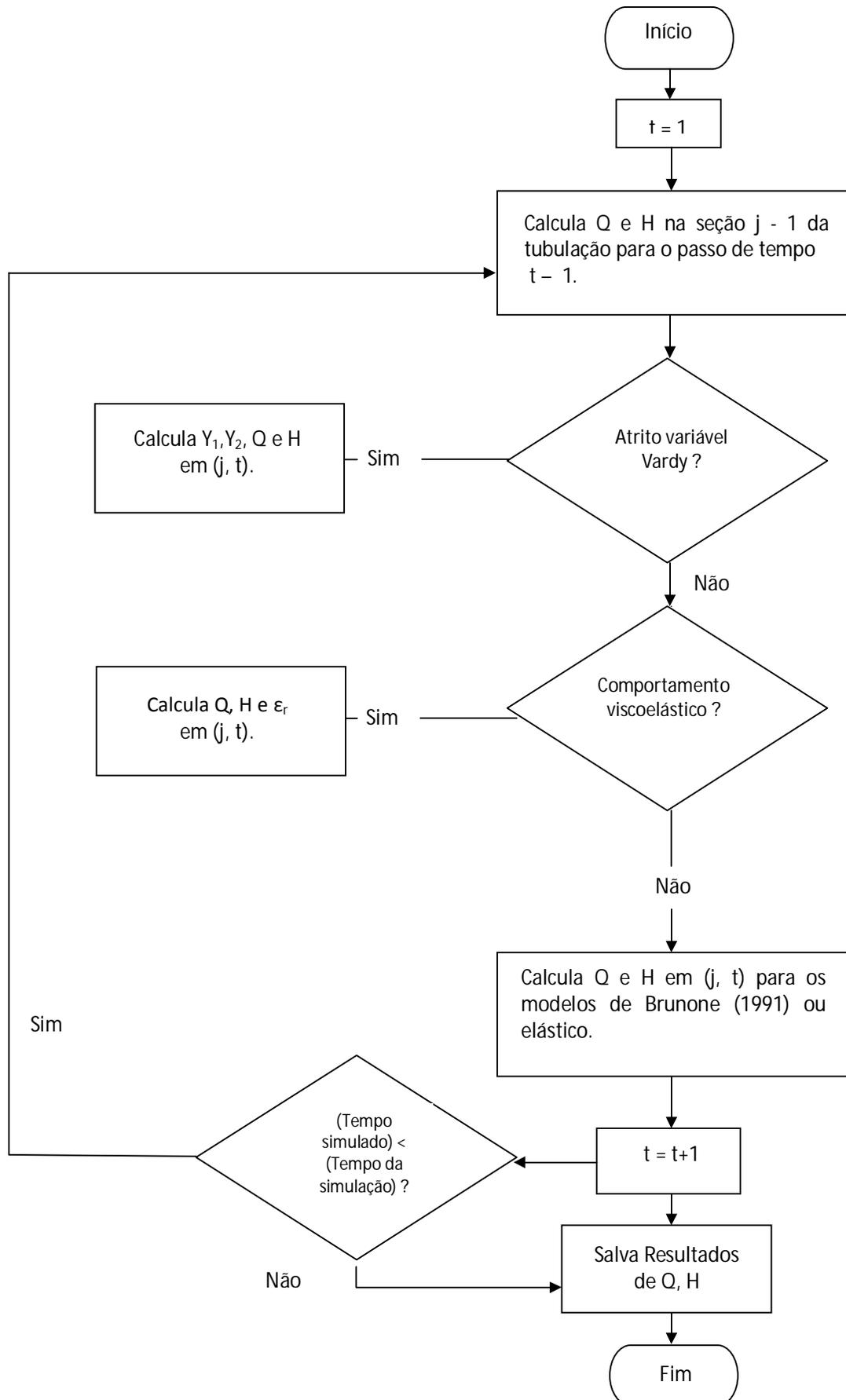


FIGURA 3. 5- Fluxograma dos pontos interiores.

### 3.3.2 Consideração de atrito variável – Modelo de Brunone (1991)

Para a modelagem computacional dos modelos de dissipação de energia foi empregada uma formulação genérica proposta por Covas *et al.* (2003). Essa formulação foi utilizada por outros autores para o termo de atrito variável e efeitos da viscoelasticidade. Apresenta a vantagem de ser aplicável a diversas modelagens de efeitos dinâmicos de dissipação de energia. É estabelecida pelo conjunto de equações:

$$Q_p = C_p - C_{a+} H_p \quad (3.120)$$

$$Q_p = C_N + C_{a-} H_p \quad (3.121)$$

Onde:

$$C_p = \frac{Q_A + C_a H_A + C_{p1}' + C_{p1}'' + C_{p1}'''}{1 + C_{p2}' + C_{p2}''};$$

$$C_{a+} = \frac{C_a + C_{p2}'''}{1 + C_{p2}' + C_{p2}''};$$

$$C_N = \frac{Q_B - C_a H_B + C_{N1}' + C_{N1}'' + C_{N1}'''}{1 + C_{N2}' + C_{N2}''};$$

$$C_{a-} = \frac{C_a + C_{N2}'''}{1 + C_{N2}' + C_{N2}''}.$$

Os coeficientes com os sobrescritos ', '' e '''' referem-se, respectivamente, ao atrito de estado permanente, atrito variável e ao comportamento mecânico do conduto. Neste estudo, as equações (3.120) e (3.121) são resolvidas considerando precisão de primeira ordem do atrito

de estado permanente, atrito variável de Brunone (1991) e Vardy, Hwang e Brown (1993) e comportamento mecânico elástico e viscoelástico linear para o tubo.

Para achar as expressões de  $C_{P1}$ ,  $C_{P2}$ ,  $C_{N1}$  e  $C_{N2}$  para o modelo de Brunone (1991), é necessário fazer uma comparação entre as expressões obtidas para  $C_P$ ,  $C_N$ ,  $C_{a+}$ ,  $C_{a-}$  com o modelo de Brunone (1991) e a formulação geral proposta por Covas *et al.* (2003).

Como já foi discutido:

$$Q_P = C_{P\_Brunone} - C_a H_P \quad (3.122)$$

$$Q_P = C_{N\_Brunone} + C_{a\_Brunone} H_P \quad (3.123)$$

Onde :

$$C_{P\_Brunone} = Q_A + \frac{gA}{a} H_A - \frac{f}{2DA(1+K_3)} Q_A |Q_A| \Delta t$$

$$C_a = gA/a$$

$$C_{N\_Brunone} = Q_B - \frac{gA}{a(1+k_3)} H_B - \frac{f}{2DA(1+K_3)} Q_B |Q_B| \Delta t$$

$$C_{a\_Brunone} = gA/(a(1+K_3))$$

É importante perceber que essa formulação, pelo menos para o modelo de Brunone (1991), não corresponde totalmente àquela apresentada por Covas *et al.* (2003). De fato, para o modelo de Brunone (1991), o valor da variável  $Q_A$  deve ser obtido através de interpolação espacial e não corresponde ao valor de  $Q(i-1, t-1)$  do modelo original. De antemão admite-se que para tubos com comportamento reológico elástico,  $C_{P1}''' = C_{P2}''' = C_{N1}''' = C_{N2}''' = 0$ . Considerando precisão de primeira ordem para o termo de atrito em escoamento permanente, os coeficientes  $C_{P1}'$ ,  $C_{P2}'$ ,  $C_{N1}'$ ,  $C_{N2}'$  admitem os seguintes valores:

$$C_{P1}' = -\frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} \quad (3.124)$$

$$C_{N1}' = -\frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} \quad (3.125)$$

$$C_{P2}' = C_{N2}' = 0 \quad (3.126)$$

Substituindo esses valores nas equações genéricas (3.120) e (3.121) e comparando o resultado com as equações específicas obtidas a partir de considerações de atrito variável.

$$C_P = \frac{Q_A + C_a H_A - \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} + C_{P1}''}{1 + C_{P2}''} = Q_A + C_a H_A - \frac{f}{2DA(1 + K_3)} Q_A|Q_A|\Delta t \quad (3.127)$$

$$C_N = \frac{Q_B - C_a H_B - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} + C_{N1}''}{1 + C_{N2}''} = Q_B - \frac{C_a}{(1 + k_3)} H_B - \frac{f}{2DA(1 + K_3)} Q_B|Q_B|\Delta t \quad (3.128)$$

$$C_{a'} = \frac{C_a}{1 + C_{P2}''} = C_a \quad (3.129)$$

$$C_{a'} = \frac{C_a}{1 + C_{N2}''} = \frac{C_a}{1 + k_3} \quad (3.130)$$

Das equações (3.129) e (3.130) são obtidos  $C_{P2}''$  e  $C_{N2}''$ :

$$C_{P2}'' = 0 \quad (3.131)$$

$$C_{N2}'' = k_3 \quad (3.132)$$

Dispondo desses valores e usando as equações (3.127) e (3.128) pode-se determinar os valores de  $C_{P1}''$  e  $C_{N1}''$ . Da equação (3.127), tem-se:

$$-\frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} + C_{P1}' = -\frac{f}{2DA(1+k_3)} Q_A|Q_A|\Delta t \quad (3.133)$$

Resolvendo em  $C_{P1}''$ :

$$C_{P1}'' = \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} \left( \frac{k_3}{1+k_3} \right) \quad (3.134)$$

Agora, usando  $C_{N2}'' = k_3$  na equação (3.128) e realizando manipulações algébricas devidas:

$$C_N = \frac{Q_B - C_a H_B - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} + C_{N1}''}{1+k_3} = \frac{Q_B(1+k_3) - C_a H_B - \frac{f}{2DA} Q_B|Q_B|\Delta t}{1+k_3} \quad (3.135)$$

Comparando o membro da direita com o da esquerda conclui-se que:

$$C_{N1}'' = Q_B k_3 \quad (3.136)$$

### 3.3.3 Consideração de atrito variável – Modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993)

Para este modelo, as variáveis  $C_{P1}$ ,  $C_{P2}$ ,  $C_{N1}$  e  $C_{N2}$  da formulação geral são reformuladas para considerar o modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993). O procedimento utilizado é análogo ao que foi discutido no item anterior. Como já foi estabelecido:

$$Q_P = C_{N\_Vardy} + C_{a\_Vardy} H_P \quad (3.137)$$

$$Q_P = C_{P\_Vardy} - C_{a\_Vardy} H_P \quad (3.138)$$

Onde:

$$C_{N\_Vardy} = \frac{Q_B - \frac{gAH_B}{a} - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} - \frac{16vA\Delta t}{D^2} \left[ Y_{1,t-\Delta t} e^{-B_1\psi^*} + Y_{2,t-\Delta t} e^{-B_2\psi^*} - \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) Q_C \right]}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t}$$

$$C_{P\_Vardy} = \frac{Q_A + \frac{gAH_A}{a} - \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} - \frac{16vA\Delta t}{D^2} \left[ Y_{1,t-\Delta t} e^{-B_1\psi^*} + Y_{2,t-\Delta t} e^{-B_2\psi^*} - \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) Q_C \right]}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t}$$

$$C_{a\_Vardy} = \frac{C_a}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t}$$

É claro, da comparação entre estas expressões e as equações (3.120) e (3.121), que:

$$C_{a\_Vardy} = C_{a+} = C_{a-} \quad (3.139)$$

Desprezando as variáveis viscoelásticas e considerando precisão numérica de primeira ordem para o fator de atrito quase- permanente, essas igualdades são um sistema linear com duas incógnitas. De fato:

$$C_{a\_Vardy} = \frac{C_a}{1 + \frac{16\nu A}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} = \frac{C_a}{1 + C_{P2}''} = C_{a+} \quad (3.140)$$

$$C_{a\_Vardy} = \frac{C_a}{1 + \frac{16\nu A}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} = \frac{C_a}{1 + C_{N2}''} = C_{a-} \quad (3.141)$$

Resolvendo esse sistema em  $C_{P2}''$  e  $C_{N2}''$  tem-se:

$$C_{N2}'' = C_{P2}'' = \frac{16\nu A}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t \quad (3.142)$$

As variáveis  $C_{P1}''$  e  $C_{N1}''$  são obtidas pelas comparações seguintes:

$$C_{N\_Vardy} = C_N \quad (3.143)$$

$$C_{P\_Vardy} = C_P \quad (3.144)$$

Para a primeira expressão pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 C_{N\_Vardy} &= \frac{Q_B - \frac{gAH_B}{a} - \frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA} - \frac{16vA\Delta t}{D^2} \sum_{i=1}^2 \left( Y_{i,t-\Delta t} e^{-Bi\psi^*} - \frac{A_i}{A} Q_c \right)}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} = \\
 &= \frac{Q_B - \frac{gAH_B}{a} + C_{N1}' + C_{N1}''}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} = C_N \quad (3.145)
 \end{aligned}$$

Onde  $C_{N1}' = -\frac{fQ_B|Q_B|\Delta t}{2DA}$ . Nota-se que fica explicita a relação que determina  $C_{N1}''$ :

$$C_{N1}'' = -\frac{16vA\Delta t}{D^2} \sum_{i=1}^2 \left( Y_{i,t-\Delta t} e^{-Bi\psi^*} - \frac{A_i}{A} Q_c \right) \quad (3.146)$$

Para a segunda expressão o processo é análogo:

$$\begin{aligned}
 C_{P\_Vardy} &= \frac{Q_A + \frac{gAH_A}{a} - \frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA} - \frac{16vA\Delta t}{D^2} \sum_{i=1}^2 \left( Y_{i,t-\Delta t} e^{-Bi\psi^*} - \frac{A_i}{A} Q_c \right)}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} = \\
 &= \frac{Q_A + \frac{gAH_A}{a} + C_{P1}' + C_{P1}''}{1 + \frac{16vA}{D^2} \left( \frac{A_1 + A_2}{A} \right) \Delta t} = C_P \quad (3.147)
 \end{aligned}$$

Onde  $C_{P1}' = -\frac{fQ_A|Q_A|\Delta t}{2DA}$ . Assim, fica claro que:

$$C_{P1}'' = -\frac{16vA\Delta t}{D^2} \sum_{i=1}^2 \left( Y_{i,t-\Delta t} e^{-Bi\psi^*} - \frac{A_i}{A} Q_c \right) = C_{N1}'' \quad (3.148)$$

### 3.3.4 Comportamento viscoelástico do conduto

Para simplificar a obtenção das variáveis correspondentes ao comportamento viscoelástico do tubo, são desprezados os efeitos de atrito variável no escoamento e a aproximação numérica utilizada no método das características é de primeira ordem. O procedimento de simplificação das equações características considerando comportamento reológico viscoelástico do conduto resulta nas seguintes fórmulas:

$$Q_P = C_{PVisc.} - C_{aVisc.} H_P \quad (3.149)$$

$$Q_P = C_{NVisc.} + C_{aVisc.} H_P \quad (3.150)$$

Onde:

$$C_{PVisc.} = Q(i-1, t-\Delta t) + \frac{gA}{a} H(i-1, t-\Delta t) - 2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left( -\frac{R(\varepsilon_{rk}(i, t))}{\tau_k} - \frac{J_k}{\tau_k} \frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \right) - \frac{fQ(i-1, t-\Delta t)|Q(i-1, t-\Delta t)|}{2AD} \Delta t$$

$$C_{NVisc.} = Q(i+1, t-\Delta t) - \frac{gA}{a} H(i+1, t-\Delta t) + 2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left( -\frac{R(\varepsilon_{rk}(i, t))}{\tau_k} - \frac{J_k}{\tau_k} \frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \right) - \frac{fQ(i+1, t-\Delta t)|Q(i+1, t-\Delta t)|}{2AD} \Delta t$$

$$C_{aVisc.} = \frac{gA}{a} + 2Aa\Delta t \frac{\alpha D}{2e} \gamma \sum_{k=1, \dots, N} \left( \frac{J_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t/\tau_k}) \right)$$

Para este caso em particular, as relações de  $C_p$ ,  $C_{a+}$ ,  $C_N$ ,  $C_{a-}$ , relativas às equações (3.120) e (3.121) ficam resumidas a:

$$C_p = Q(i-1, t-\Delta t) + C_a H(i-1, t-\Delta t) + C_{p1}''' + C_{p1}'''' \quad (3.151)$$

$$C_{a+} = C_a + C_{p2}'''' \quad (3.152)$$

$$C_N = Q(i+1, t-\Delta t) - C_a H(i+1, t-\Delta t) + C_{N1}''' + C_{N1}'''' \quad (3.153)$$

$$C_{a-} = C_a + C_{N2}'''' \quad (3.154)$$

A partir das expressões (3.152) e (3.154), podem-se determinar  $C_{p2}''''$  e  $C_{N2}''''$ .

$$C_{p2}'''' = C_{N2}'''' = 2Aa \frac{\alpha D}{2e} \gamma \Delta t \left( \sum_{k=1, \dots, N} \left( \frac{J_k}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) \right) \right) \quad (3.155)$$

Usando as equações (3.151) e (3.153) e as expressões (3.124) à (3.126) para atrito permanente obtém-se  $C_{p1}''''$  e  $C_{N1}''''$ .

$$C_p = C_{pVisc.} \quad (3.156)$$

$$\Rightarrow C_{p1}'''' = -2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left( -\frac{R(\varepsilon_{rk}(i, t))}{\tau_k} - \frac{J_k}{\tau_k} \frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \right) \quad (3.157)$$

$$C_N = C_{NVisc.} \quad (3.158)$$

$$\Rightarrow C_{N1}'''' = 2Aa\Delta t \sum_{k=1, \dots, N} \left( -\frac{R(\varepsilon_{rk}(i, t))}{\tau_k} - \frac{J_k}{\tau_k} \frac{\alpha D}{2e} \gamma H_0(i) \right) \quad (3.159)$$

## 4. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo são empregados os procedimentos analíticos desenvolvidos nos tópicos anteriores para testes dos sistemas hidráulicos hipotéticos e de laboratório. Os sistemas hidráulicos analisados são sistemas simples de um único tubo e sistemas compostos por tubos conectados em série. Em princípio, são verificados sistemas de topologia simples, compostos por reservatório-tubo-válvula, para análise dos modelos de atrito variável. Em seguida, o modelo viscoelástico é avaliado em conjunto com as formulações de termo de atrito transiente para um sistema composto por tubos em série com tanque hidropneumático a montante e válvula a jusante. Esses casos são considerados com a finalidade de verificar o simulador hidráulico implementado. A partir daí, são consideradas algumas situações hipotéticas para transiente hidráulico produzido por desligamento de bomba. Nessas situações são considerados os efeitos dinâmicos de dissipação de energia. Outra variante do simulador desenvolvido para análise hidráulica do transiente são as rotinas que permitem a avaliação de diversas condições de contorno: reservatório de jusante a nível constante, bomba centrífuga, tanque de alimentação unidirecional, chaminé de equilíbrio, válvula de alívio e válvula antecipadora de onda.

### 4.1 SIMULAÇÃO PEZZINGA E SCANDURA– ANÁLISE DO ATRITO VARIÁVEL

Com a finalidade de avaliar os algoritmos que fazem uso do termo de atrito variável utilizou-se dados experimentais coletados para um sistema de topologia simples, composto por reservatório, tubulação e válvula a jusante (figura 4.1).



FIGURA 4.1 – Sistema composto por reservatório, tubulação e válvula à jusante.

Foram utilizados dados experimentais obtidos por Pezzinga e Scandura (1995), publicados no trabalho de Ghidaoui e Mansour (2002). Os parâmetros geométricos, cinemáticos e dinâmicos relativos ao sistema são apresentados na tabela 4.1:

TABELA 4. 1 - Dados para o sistema experimental de Pezzinga e Scandura (1995)

Vazão ( $m^3 / s$ )	Diâmetro ( $m$ )	Celeridade ( $m / s$ )	Comprimento da tubulação ( $m$ )	Coefficiente de atrito	Carga de estado permanente na válvula ( $m$ )	Tempo de fechamento da válvula ( $s$ )
0,0006	0,0532	1360,00	77,80	0,0330	52,61	0,04

Usando o sistema descrito, Pezzinga e Scandura (1995) realizaram um ensaio de dois segundos e obtiveram os dados de carga dispostos no Anexo 1. No presente trabalho, dois modelos de termo de atrito transiente são comparados entre si e com o modelo clássico em termos das cotas piezométricas simuladas em um nó, onde se localiza a válvula.

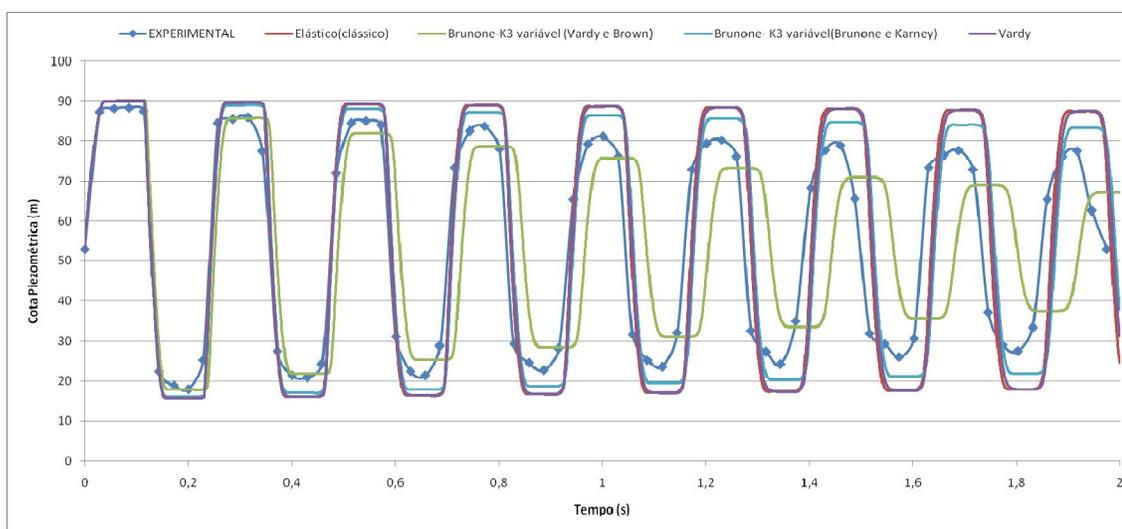


FIGURA 4. 2 - Cota piezométrica no nó 9 (válvula): Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração de fator de atrito variável.

Na Figura 4.2, o modelo da coluna elástica é comparado com duas formulações de termo de atrito variável: Brunone (1991) e Vardy, Hwang e Brown (1993). Os modelos de simulação são comparados com os dados experimentais obtidos por Pezzinga e Scandura (1995). Os parâmetros da formulação de Vardy, Hwang e Brown (1993) foram calibrados pelos autores para diversas condições de escoamento nas quais se enquadra esse fluxo em particular. Com relação ao parâmetro  $K_3$ , coeficiente de amortecimento, não existe um consenso entre os pesquisadores sobre um método ou formulação mais apropriada. Por essa dificuldade na adoção de um coeficiente  $K_3$ , foram avaliados os desempenhos de duas formulações : formulação proposta por Karney e Brunone (1999) e formulação proposta por Vardy, Hwang e Brown (1993).

Pode-se notar que o modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993) não apresentou nenhuma diferença significativa em relação ao modelo clássico. Por outro lado, sua utilização é computacionalmente mais dispendiosa do que a do modelo clássico (coluna elástica).

O modelo de Brunone (1991), considerando a formulação de Karney e Brunone (1999) para o coeficiente de amortecimento, reproduziu, com melhor precisão, o efeito de atenuação da onda de pressão. Por outro lado, a consideração do coeficiente de amortecimento segundo Vardy, Hwang e Brown (1993) apresentou uma dispersão e atenuação incompatíveis com os dados experimentais.

Os resultados estão condizentes com conclusões obtidas por outros autores em sistemas hidráulicos semelhantes. Dessa forma, ficam verificados os modelos de simulação relativos ao atrito variável.

## **4.2 SIMULAÇÃO BERGANT E SIMPSON – ANÁLISE DO ATRITO VARIÁVEL**

Bergant e Simpson (1994) analisaram um sistema semelhante ao estudado por Pezzinga e Scandura (1995) (Figura 4.1). No presente trabalho, esse experimento será utilizado para avaliação das formulações de termo de atrito transiente. Os dados de carga, obtidos por Bergant e Simpson (1994), também foram publicados no trabalho de Ghidaoui e Mansour (2002). Os parâmetros físicos e hidráulicos, referente ao sistema, estão sumarizados na Tabela 4.2.

TABELA 4. 2 - Dados para o sistema experimental de Bergant e Simpson (1994)

Vazão ( $m^3 / s$ )	Diâmetro ( $m$ )	Celeridade ( $m/s$ )	Comprimento da tubulação ( $m$ )	Coefficiente de atrito	Carga de estado permanente na válvula ( $m$ )	Tempo de fechamento da válvula ( $s$ )
0,000114	0,0220	1319,00	37,20	0,0360	29,71	0,009

Usando o sistema descrito, Bergant e Simpson (1994) realizaram um ensaio de dois segundos e obtiveram os dados de carga dispostos no Anexo 1 (Tabela A.2). Os resultados para a variação da cota piezométrica estão dispostos graficamente na Figura 4.3:

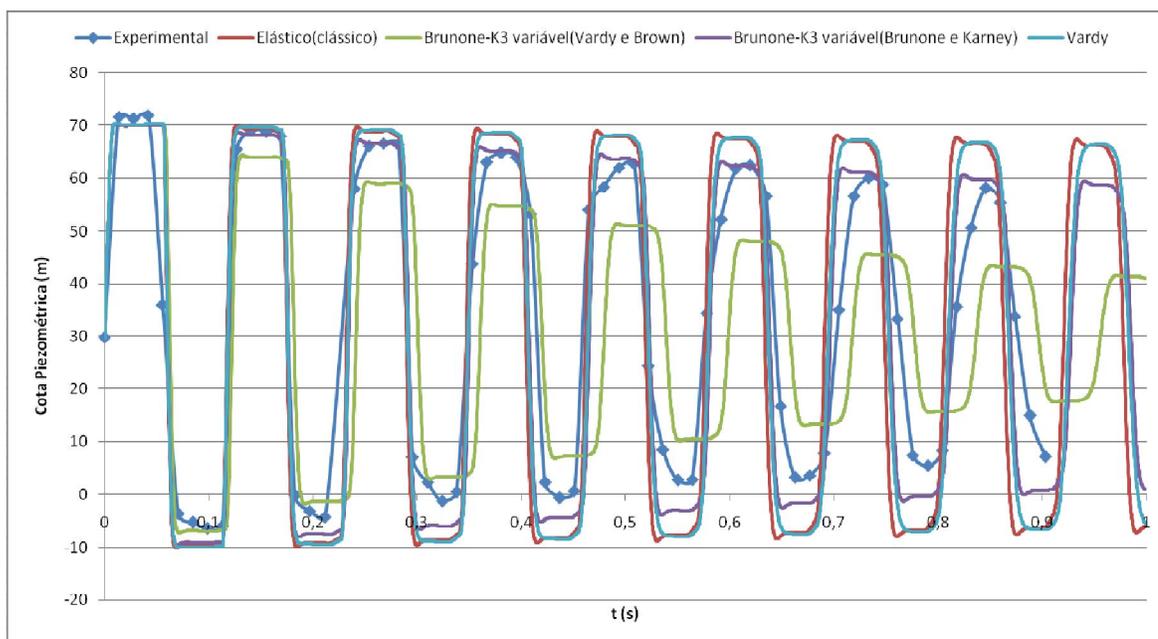


FIGURA 4. 3 - Cota piezométrica no nó 5 (válvula): Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração do fator de atrito variável

Os comportamentos observados nesta simulação são semelhantes aos observados na Figura 4.2. Neste caso, a atenuação devida ao termo de atrito de Vardy, Hwang e Brown (1993) se tornou mais evidente, porém, ainda representa uma diferença não muito

significativa. Pode-se observar também que no pico inicial todos os modelos coincidem em seus valores de carga.

Pelo menos para esses dois experimentos o modelo de Brunone (1991) apresenta-se mais ajustado aos dados experimentais do que os demais modelos e simulação.

### 4.3 SIMULAÇÃO COVAS – AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO

Para a verificação do modelo viscoelástico implementado dados apresentados por Covas *et al.* (2004) foram utilizados. A autora utilizou um sistema em série composto por tubos de polietileno de alta densidade com 50,6 mm de diâmetro e 6,25mm de espessura, tanque hidropneumático com 750 L de volume a montante do sistema e uma válvula do tipo globo a jusante do sistema destinada a controlar a vazão e gerar os eventos transitórios. O modelo apresenta a topologia mostrada na Figura 4.4:

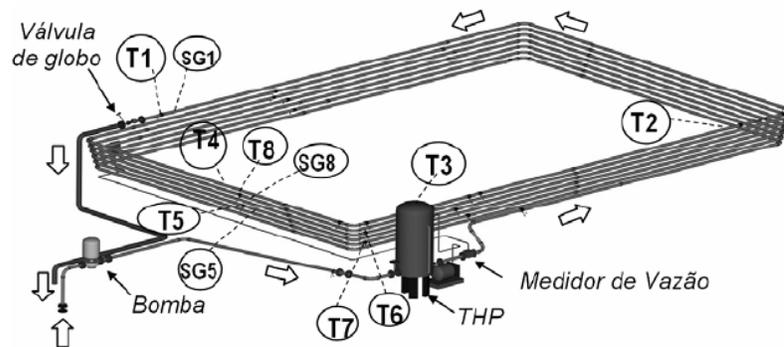


FIGURA 4. 4 – Sistema de laboratório utilizado por Covas et al. (2004).

Fonte: Covas et al. (2004)

Tomando como base os resultados para os transientes avaliados nos tópicos anteriores, utilizou-se como modelo para o coeficiente de amortecimento,  $K_3$ , a formulação de Karney e Brunone (1999), que apresentou resultados mais ajustados aos dados experimentais. Na Figura 4.5 é feita uma comparação entre os modelos de dissipação de energia, incluindo o modelo viscoelástico.

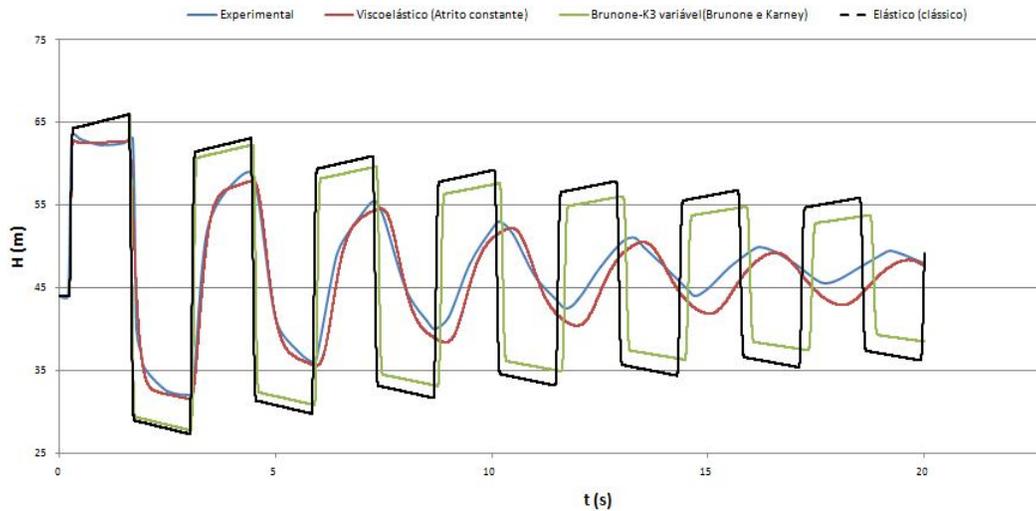


FIGURA 4. 5 – Cota piezométrica na válvula: Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração de atrito variável (BRUNONE, 1991) ou comportamento viscoelástico do tubo.

Percebe-se, na Figura 4.5, que o modelo viscoelástico reproduz com uma considerável precisão os efeitos de atenuação e dispersão observados nos dados experimentais. Como os testes dos modelos de atrito foram independentes do teste do comportamento mecânico do tubo, então pode-se concluir que grande parcela dos efeitos dinâmicos de dissipação, em tubos plásticos, são devidos ao comportamento reológico viscoelástico das paredes do tubo. O modelo de Brunone (1991) apresentou um comportamento esperado, para transientes provocados por fechamento de válvula.

Realizou-se uma outra simulação utilizando o mesmo sistema experimental da Figura 4.4. Nessa simulação, o modelo viscoelástico é comparado com o modelo clássico e o modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993), como mostrado na Figura 4.6. O modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993) apresentou praticamente os mesmos resultados do modelo clássico. O modelo viscoelástico reproduziu satisfatoriamente os efeitos de atenuação e dispersão da onda de pressão. Os resultados serviram para a verificação do modelo de simulação referente ao comportamento viscoelástico do conduto.

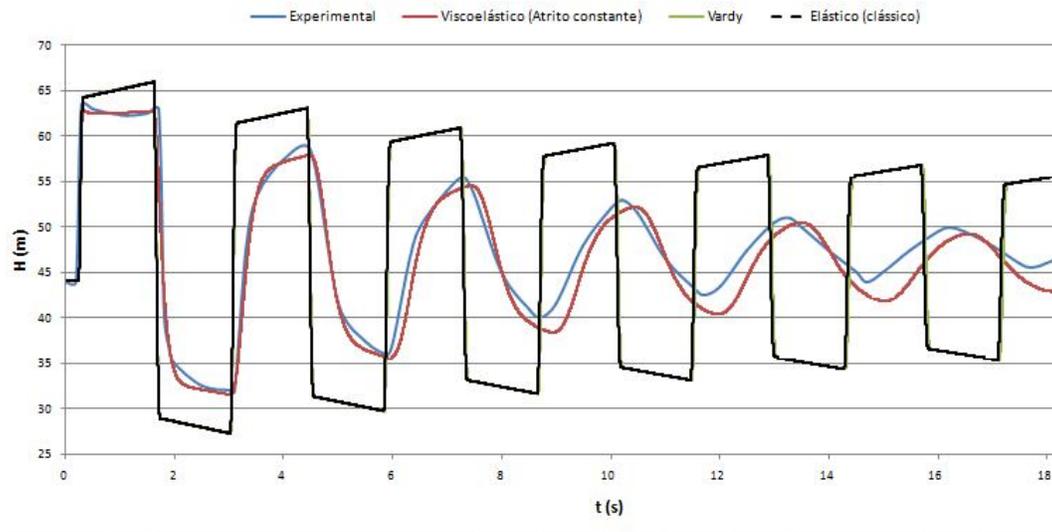


FIGURA 4. 6 – Cota piezométrica na válvula: Dados experimentais e resultados numéricos resultantes da consideração de atrito variável (VARDY; HWANG; BROWN, 1993) ou comportamento viscoelástico do tubo.

#### 4.4 SIMULAÇÕES NA ADUTORA CUIÁ

Os modelos de atrito variável foram simulados considerando duas hipóteses. Primeiro considerou-se que os efeitos de dissipação de energia eram totalmente devidos ao termo de atrito variável. Para este caso, observou-se uma inadequação dos modelos de atrito variável. Para o modelo de Brunone (1991) verificou-se um comportamento de aumento dos picos de pressão, contrariando sua característica dissipadora. O modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993) não apresentou nenhuma melhora significativa em relação ao modelo da coluna elástica. Dessa forma, é apresentada nos gráficos apenas uma comparação entre o modelo viscoelástico e o modelo clássico (elástico) em um sistema composto por condutos plásticos de PVC. Os parâmetros do modelo viscoelástico utilizados foram os calibrados por Soares (2007) para uma rede hidráulica. Como esses parâmetros se aproximaram muito dos valores obtidos em um ensaio mecânico independente, então foram entendidos como uma característica própria do material. Os modelos simulados a seguir incluem rotinas que envolvem os seguintes dispositivos de atenuação do golpe de aríete: one – way, chaminé de equilíbrio, válvula de alívio e válvula antecipadora de onda.

#### 4.4.1 Adutora Cuiá sem mecanismo de proteção

Para a determinação de um mecanismo de alívio adequado a um sistema hidráulico é necessário que o modelador avalie o comportamento da onda de pressão em um nó representativo da adutora. Em adutoras por recalque esse nó encontra-se próximo a bomba. Os efeitos do transiente produzido por falha no funcionamento da bomba para a adutora cuiá são apresentados na Figura 4.7:

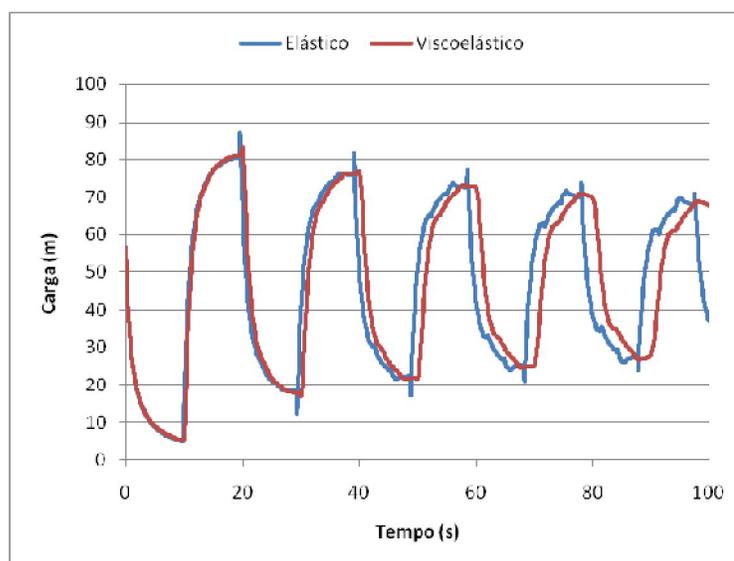


FIGURA 4. 7 – Carga no nó 1: Resultados numéricos para os modelos elástico e viscoelástico.

Verifica-se que o modelo viscoelástico reproduz os efeitos de atenuação e dispersão da onda de pressão. Trabalha-se na hipótese de que, em um sistema real, os dados de carga apresentem esse tipo de comportamento, uma vez que no modelo da coluna elástica são feitas algumas hipóteses simplificadoras acerca da perda de energia.

Na Figura 4.8 são apresentadas as envoltórias máximas e mínimas considerando o modelo elástico e o modelo viscoelástico. É importante perceber que os valores de carga mínima e máxima devem mudar e com isso o dimensionamento de alguns dispositivos de atenuação do golpe de aríete.

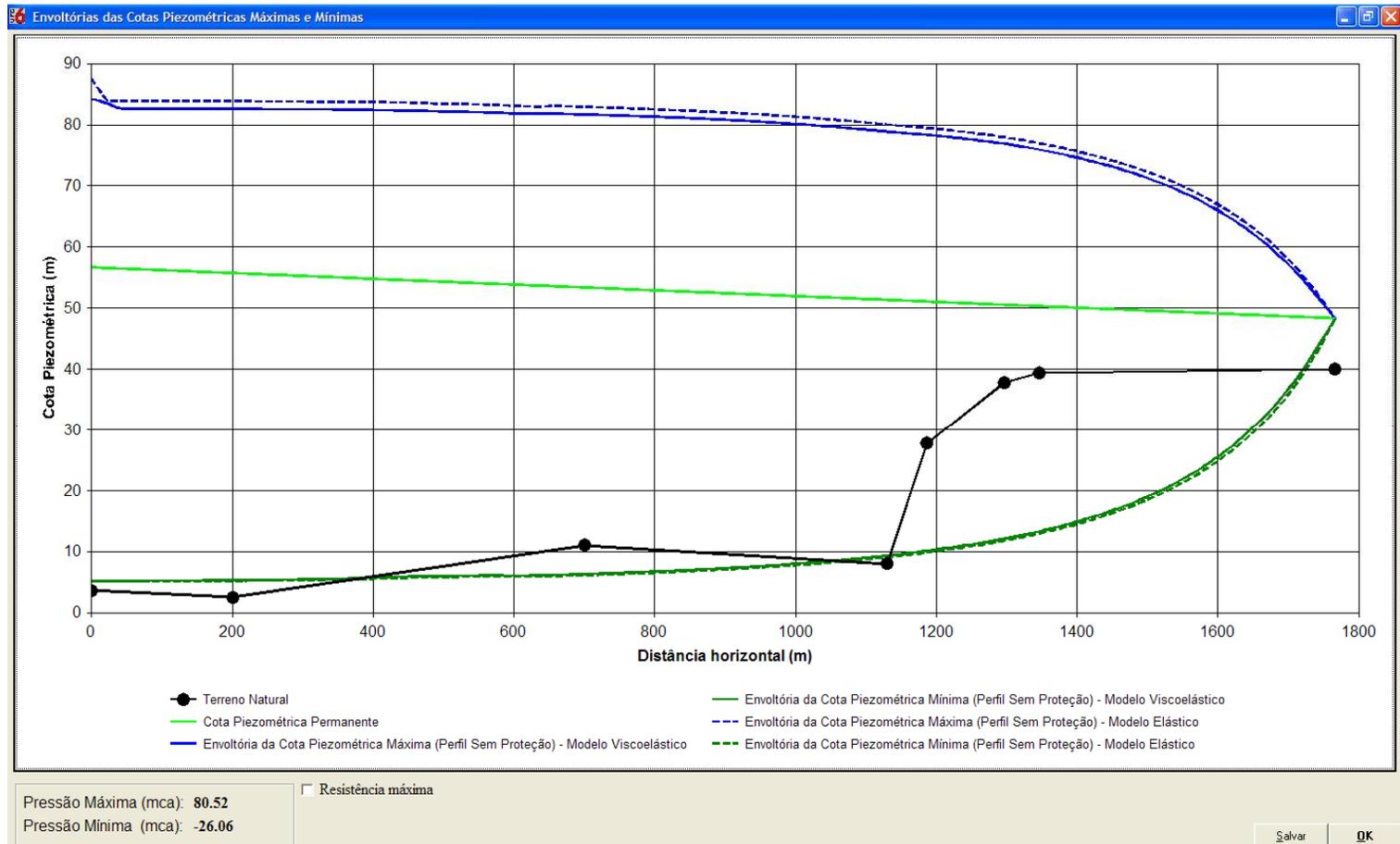
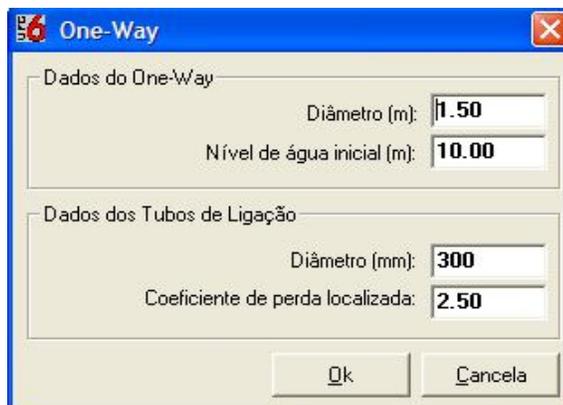


FIGURA 4. 8 – Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico sem mecanismo de proteção contra o golpe de aríete.

#### 4.4.2 Adutora Cuiá com tanque de alimentação unidirecional

Os modelos elástico e viscoelástico foram comparados considerando a instalação do tanque de alimentação unidirecional. Os dados de entrada para esse dispositivo são os apresentados na Figura 4.9:



Dados do One-Way	
Diâmetro (m):	1.50
Nível de água inicial (m):	10.00

Dados dos Tubos de Ligação	
Diâmetro (mm):	300
Coeficiente de perda localizada:	2.50

FIGURA 4. 9 - Dados do one - way e tubos de ligação.

Na Figura 4.10 é estabelecida uma comparação entre o caso com mecanismo de proteção e o caso sem proteção do one-way. O simulador hidráulico considera o modelo da coluna elástica. A linha pontilhada indica o caso sem a proteção do one-way e a linha cheia o caso com o dispositivo.

Na Figura 4.11 é apresentada uma comparação entre o caso com e sem mecanismo de proteção levando em conta a formulação viscoelástica para comportamento mecânico do conduto. A legenda para as linhas é a mesma da Figura 4.10.

Por fim, na Figura 4.12, é apresentada uma comparação entre os dois modelos de simulação considerando a instalação do tanque de alimentação unidirecional. A linha pontilhada indica a utilização do modelo elástico e a linha cheia indica a utilização do modelo viscolástico.

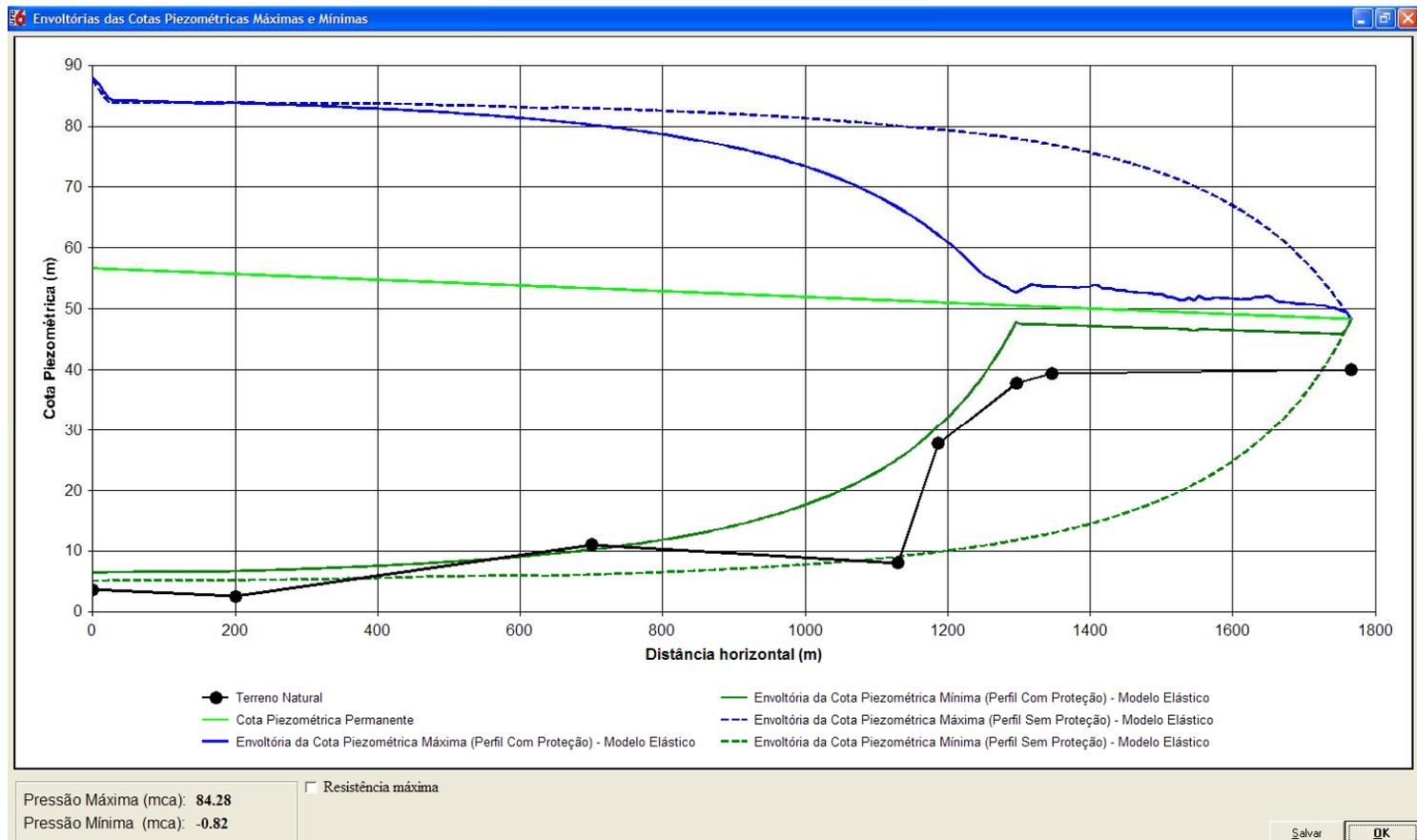


FIGURA 4. 10 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem one-way.

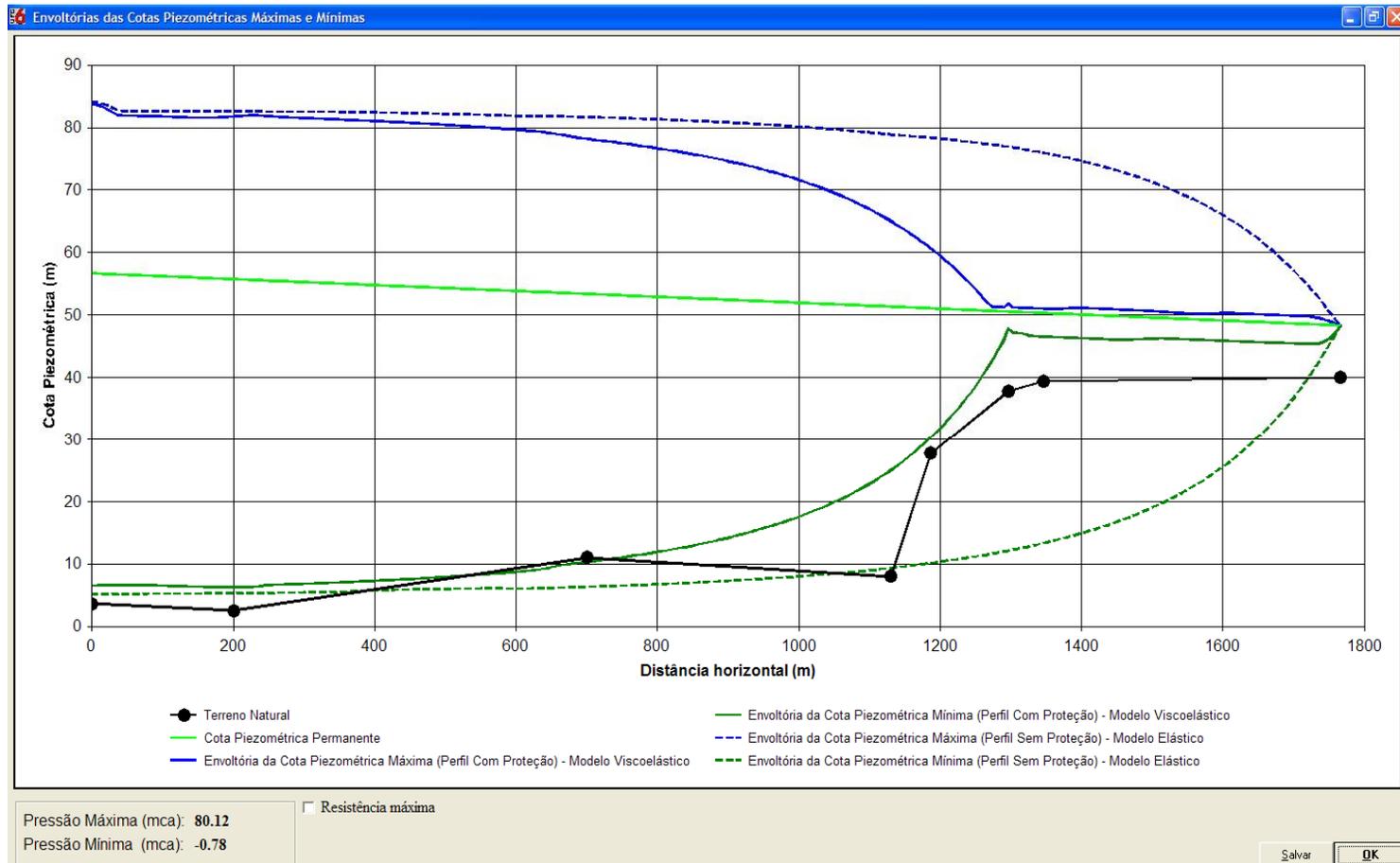


FIGURA 4. 11 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem one-way.

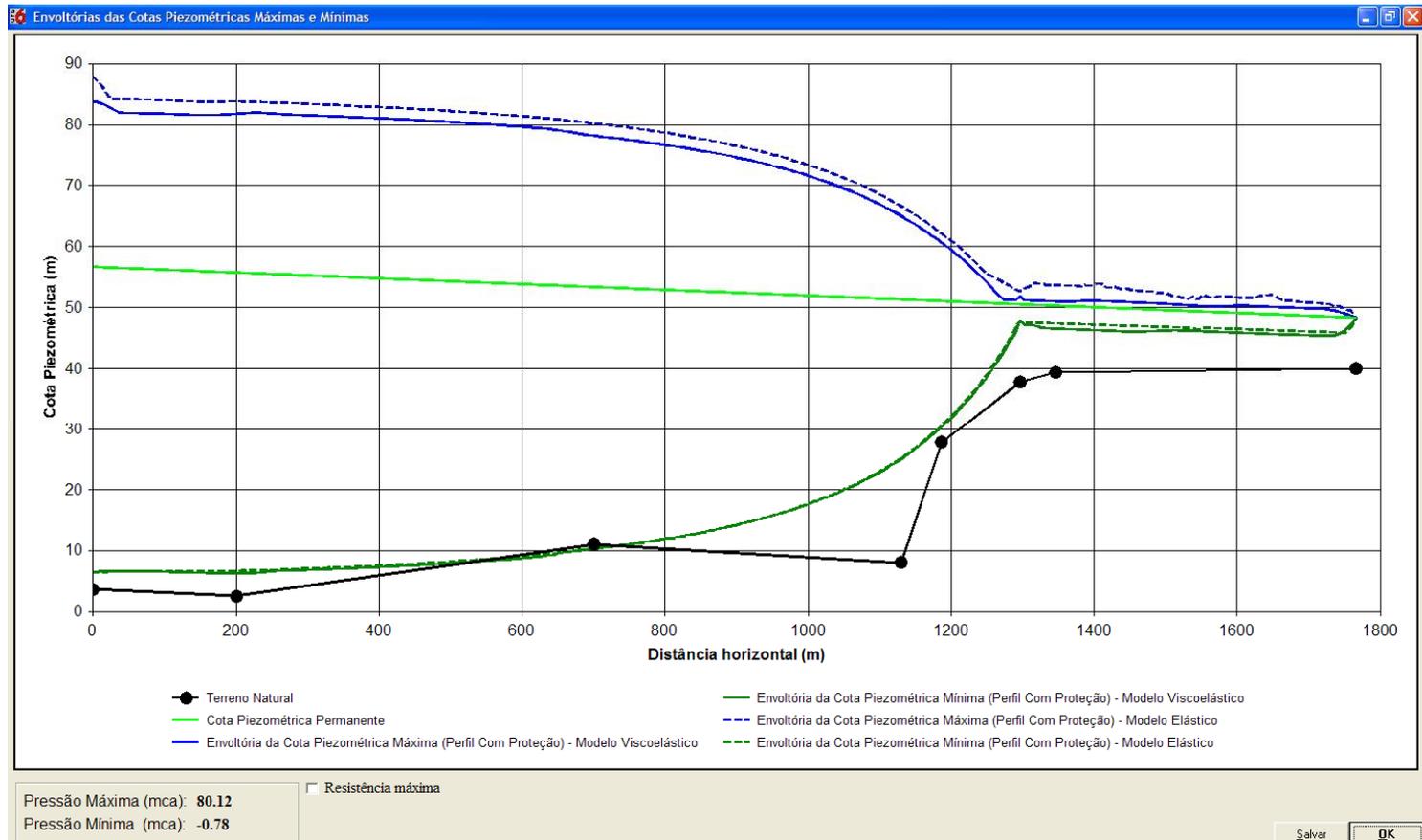


FIGURA 4. 12 - Dados das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização do one-way.

#### 4.4.3 Adutora Cuiá com chaminé de equilíbrio

A comparação entre os modelos elástico e viscoelástico é feito de forma análoga ao caso do one –way. Para o caso da chaminé de equilíbrio, os dados de entrada estão dispostos na Figura 4.13:



Dados da Chaminé	
Diâmetro (m):	2.00
Nível de Água (m):	10.00

Dados do Tubo de Ligação	
Diâmetro (mm):	300
Coeficiente de Perda na Entrada:	1.00

FIGURA 4. 13 - Dados da chaminé de equilíbrio e dos tubos de ligação.

Na Figura 4.14 é estabelecida uma comparação entre o caso com mecanismo e proteção e o caso sem proteção da chaminé de equilíbrio. O dispositivo de proteção é instalado no nó 6. Nesta situação, considera-se o modelo clássico, onde o comportamento do material da tubulação é elástico e o termo de atrito tem o mesmo comportamento do atrito no escoamento permanente. A linha pontilhada indica o caso sem a proteção da chaminé de equilíbrio e a linha cheia o caso com o mecanismo de proteção.

Na Figura 4.15 é apresentada uma comparação entre o caso com e sem mecanismo de proteção levando em conta a formulação viscoelástica para comportamento mecânico do conduto. A legenda para as linhas é a mesma da Figura 4.14.

No último gráfico de envoltórias (Figura 4.16) é apresentada uma comparação entre os dois modelos de simulação considerando a instalação do tanque de alimentação unidirecional. A linha pontilhada indica a utilização do modelo elástico e a linha cheia indica a utilização do modelo viscolástico.

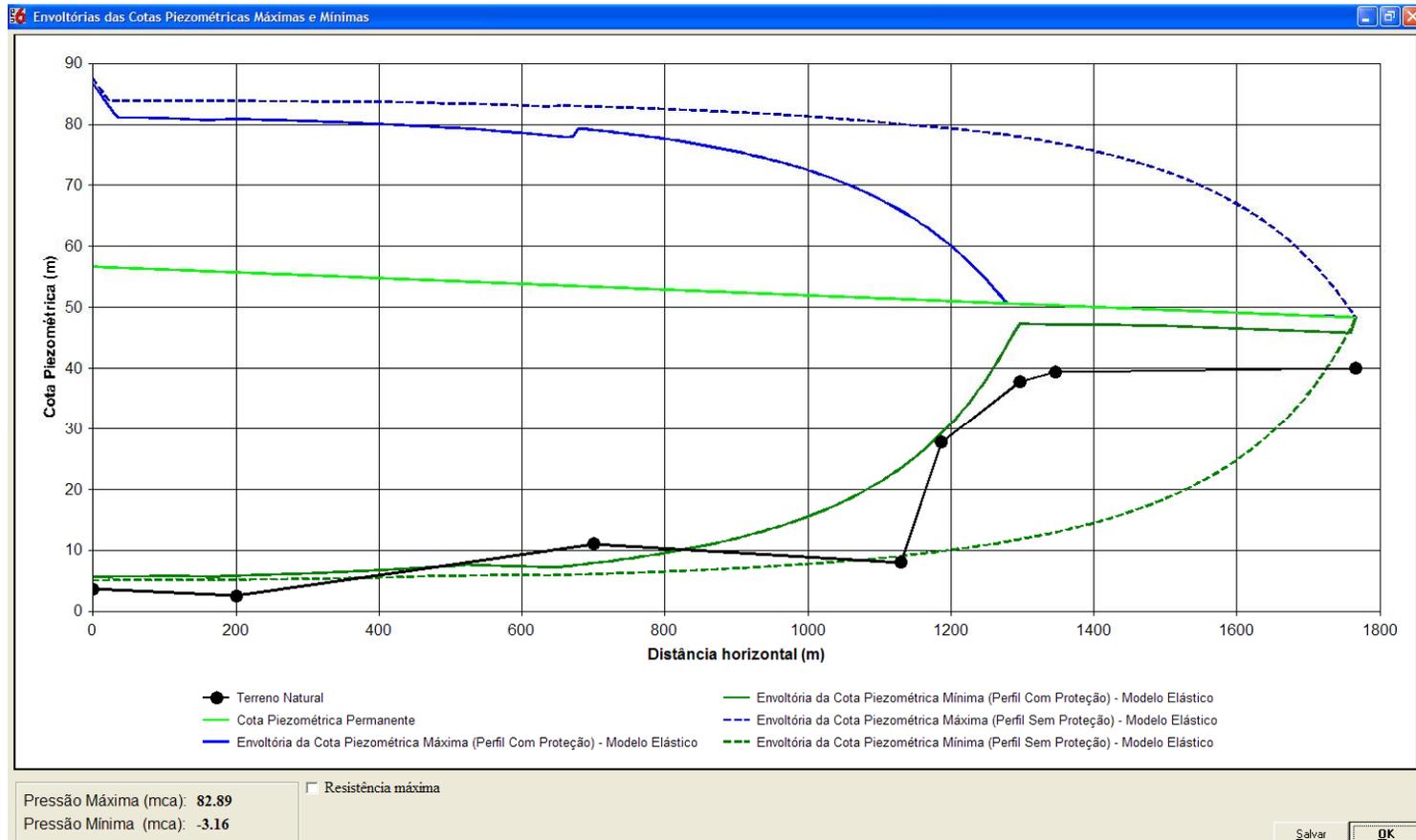


FIGURA 4. 14 - Gráficos das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem chaminé de equilíbrio.

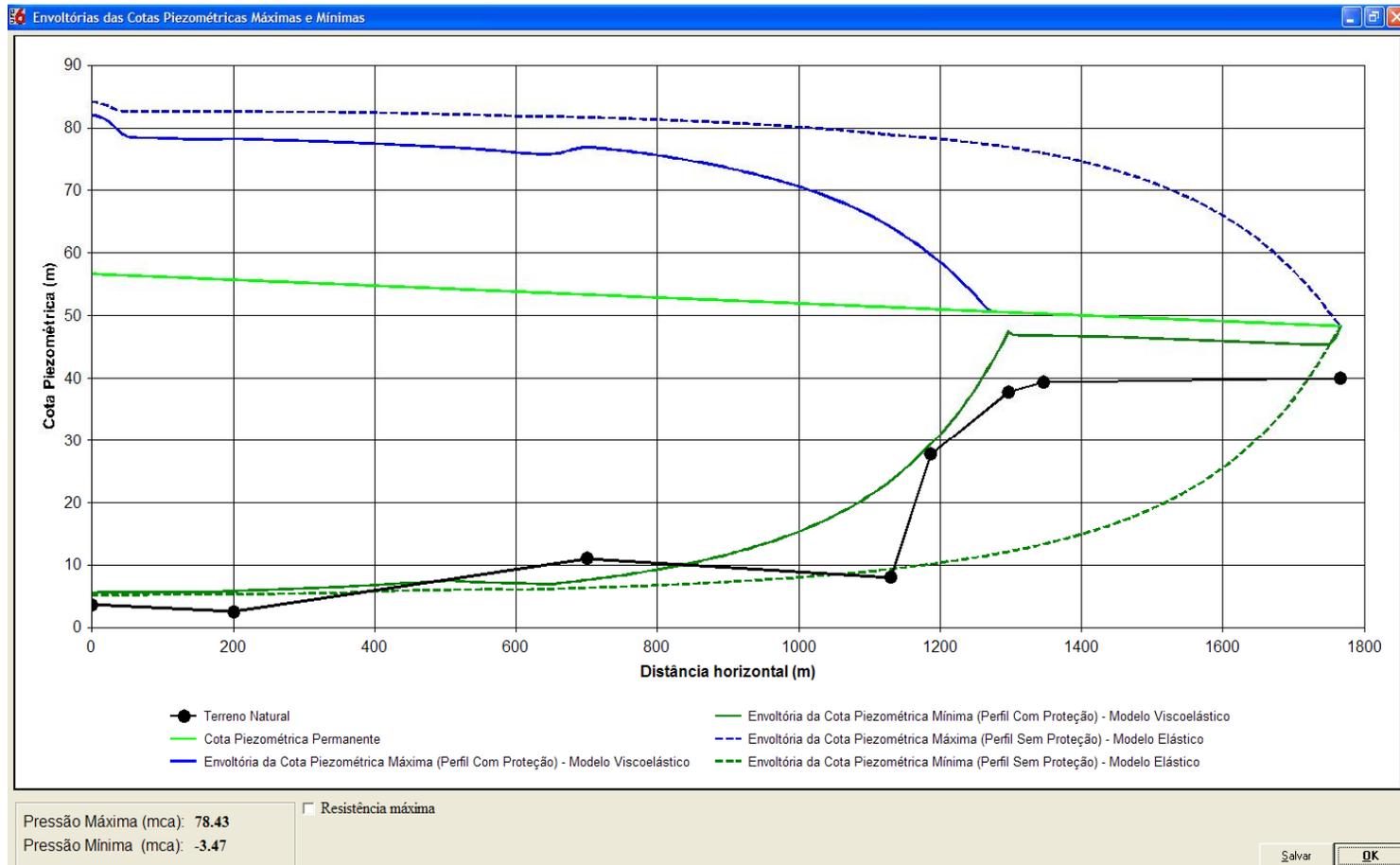


FIGURA 4. 15 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem chaminé de equilíbrio.

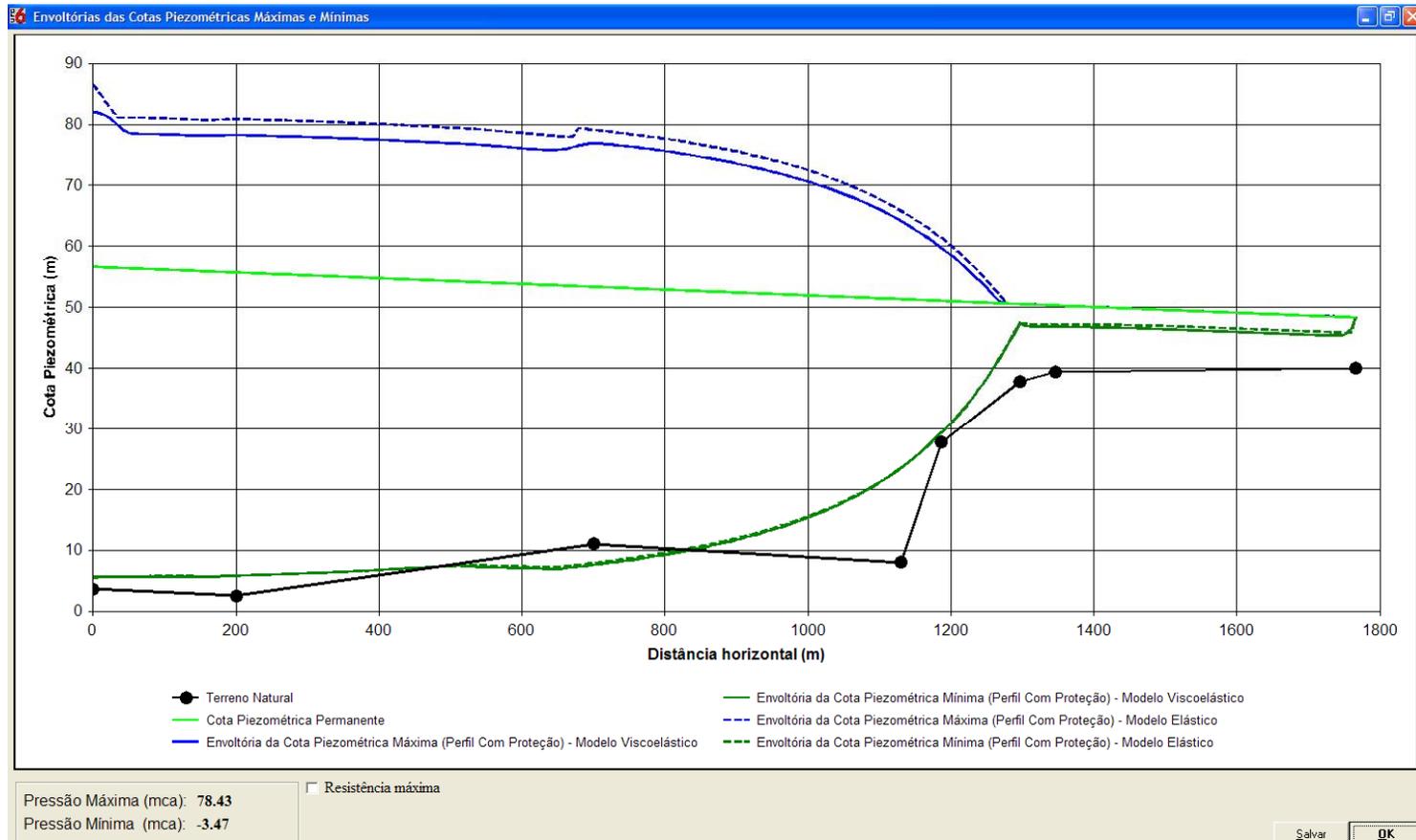
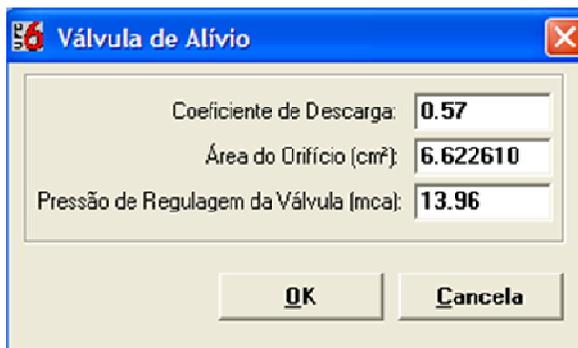


FIGURA 4. 16 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização da chaminé de equilíbrio.

#### 4.4.4 Adutora Cuiá com válvula de alívio – Modelo elástico

Como a válvula de alívio é dimensionada a partir dos dados obtidos nas simulações e essas informações dependem da formulação matemática utilizada, então torna-se necessária a consideração de duas configurações distintas para a válvula e alívio, uma para o modelo elástico e outra para o modelo viscoelástico. Os dados de entrada do dispositivo para a formulação clássica estão apresentados na Figura 4.17:



Parâmetro	Valor
Coeficiente de Descarga:	0.57
Área do Orifício (cm <sup>2</sup> ):	6.622610
Pressão de Regulagem da Válvula (mca):	13.96

FIGURA 4. 17 - Dados da válvula de alívio para o modelo elástico.

No gráfico de envoltória máxima e mínima da Figura 4.18 é estabelecida uma comparação entre o caso com mecanismo e proteção e o caso sem proteção da válvula de alívio. O dispositivo de proteção é instalado no nó 6. Nesta situação, considera-se o modelo clássico, onde o comportamento do material da tubulação é elástico e o termo de atrito tem o mesmo comportamento do atrito no escoamento permanente. A linha pontilhada indica o caso sem a proteção da válvula de alívio e a linha cheia o caso com o mecanismo de proteção.

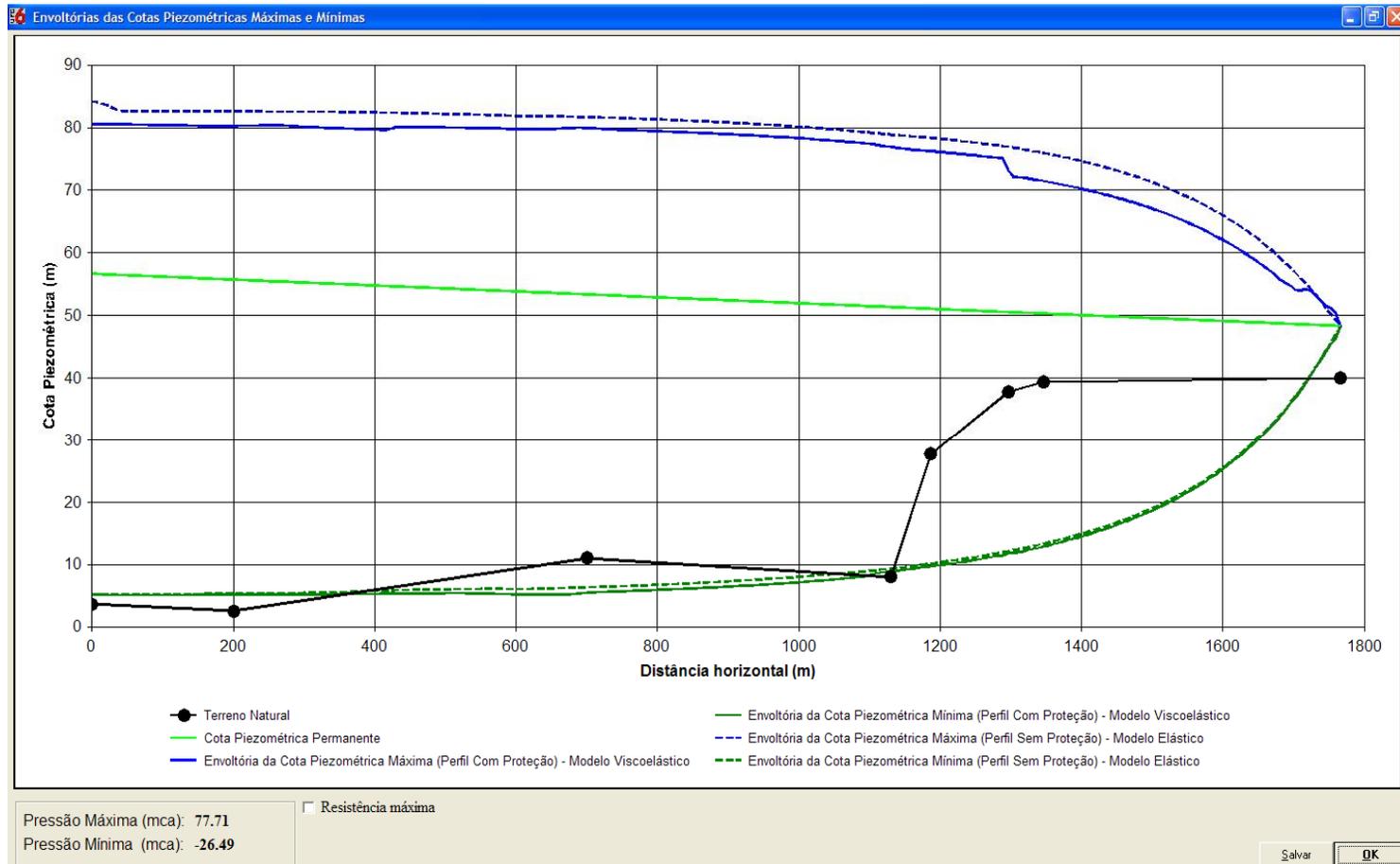
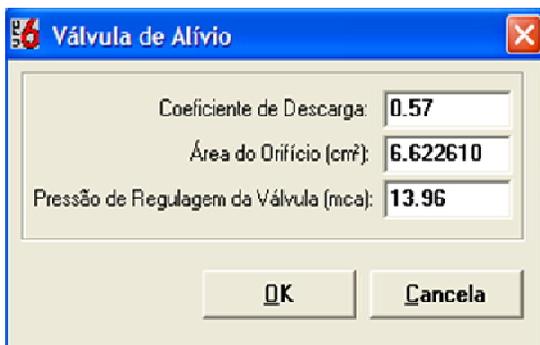


FIGURA 4. 18 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem válvula de alívio

#### 4.4.5 Adutora Cuiá com válvula de alívio – Modelo viscoelástico

A válvula de alívio é dimensionada considerando o comportamento reológico viscoelástico para o material do tubo e formulação quasi-permanente para o termo de atrito. Os dados de entrada do dispositivo para o modelo viscoelástico estão expressos na Figura 4.19:



The image shows a software dialog box titled "Válvula de Alívio" with a blue header bar and a close button in the top right corner. The dialog contains three input fields with their respective values:

Coeficiente de Descarga:	0.57
Área do Orifício (cm <sup>2</sup> ):	6.622610
Pressão de Regulagem da Válvula (mca):	13.96

At the bottom of the dialog are two buttons: "OK" and "Cancela".

FIGURA 4. 19 - Dados da válvula de alívio para o modelo viscoelástico.

Na Figura 4.20 é apresentada uma comparação entre o caso com e sem válvula de alívio, levando em conta a formulação viscoelástica para comportamento mecânico do conduto. A linha pontilhada indica o sistema sem o mecanismo de alívio do golpe de aríete enquanto que a linha cheia indica o sistema com o dispositivo.

Na Figura 4.21 é apresentada uma comparação entre os dois modelos de simulação considerando a instalação da válvula de alívio. A linha pontilhada indica a utilização do modelo elástico e a linha cheia indica a utilização do modelo viscolástico.

Observa-se que os efeitos de atenuação e dispersão não são muito evidentes para este tipo de contorno. Assim, os modelos elástico e viscolástico possuem envoltórias máximas e mínimas muito próximas entre si.

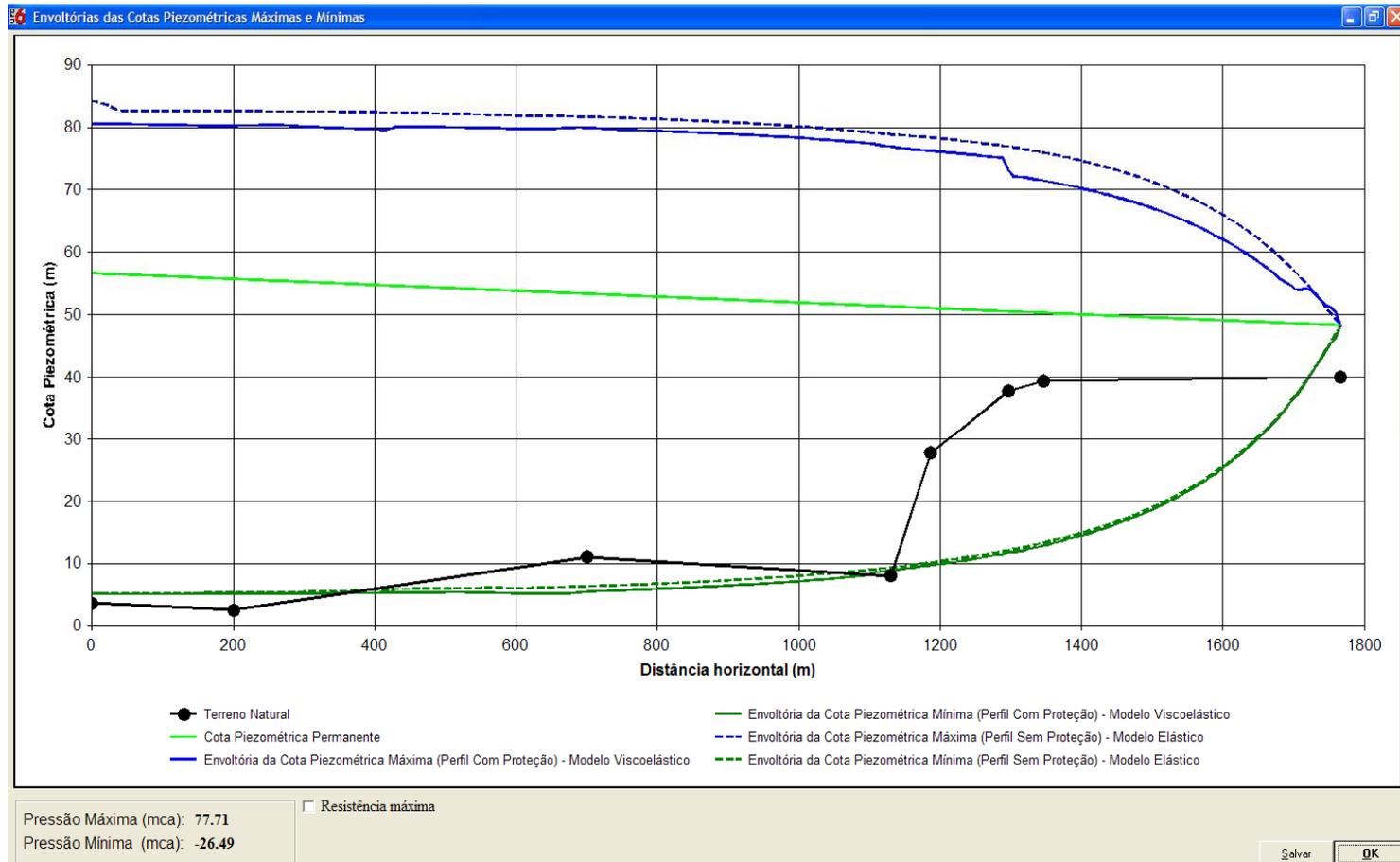


FIGURA 4. 20 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem válvula de alívio.

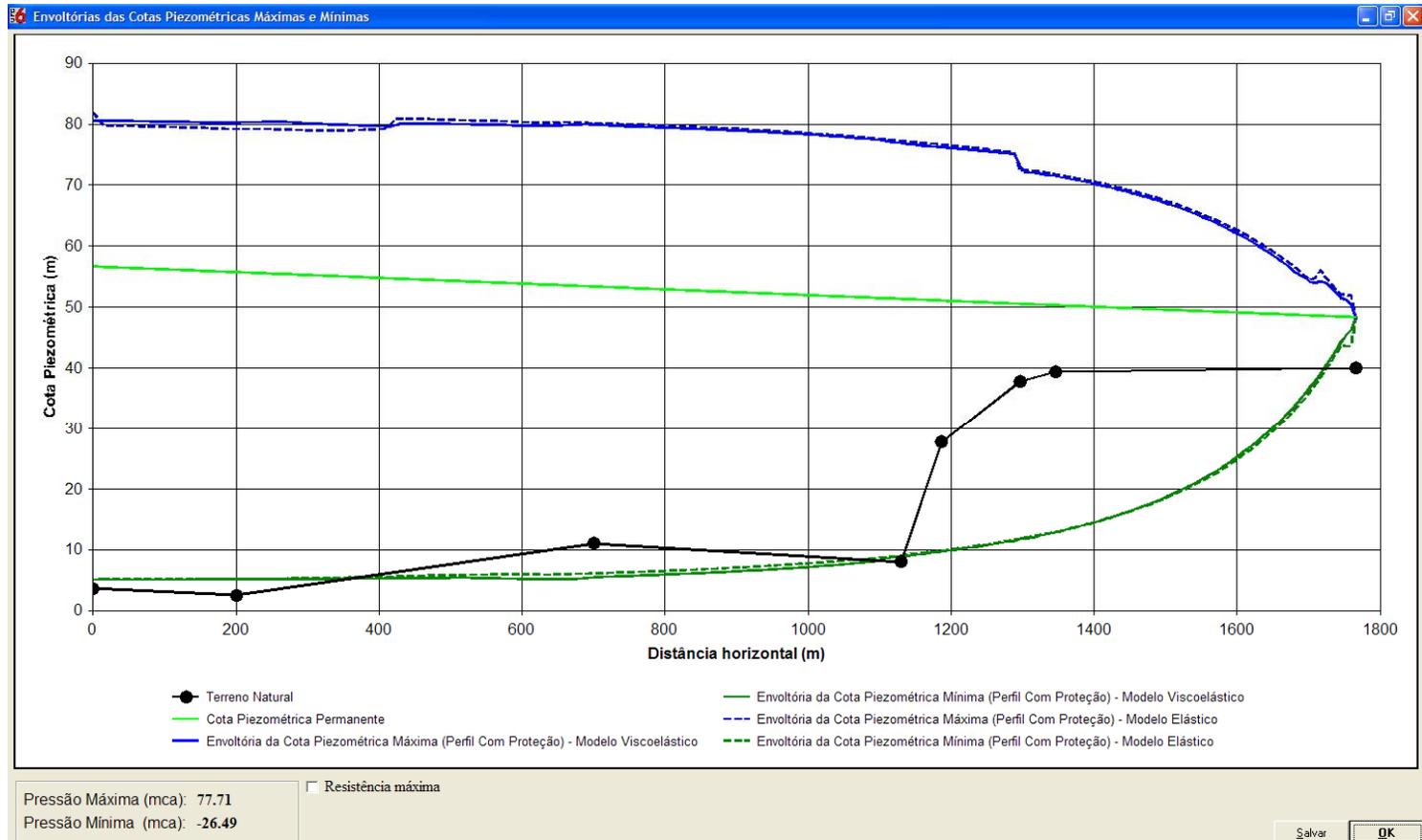


FIGURA 4. 21 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização da válvula de alívio.

#### 4.4.6 Adutora Cuiá com válvula antecipadora de onda – modelo elástico

Como a válvula antecipadora de onda é dimensionada a partir dos dados de vazão obtidos nas simulações e essas informações dependem da formulação matemática utilizada, então torna-se necessária a consideração de duas configurações distintas para válvula antecipadora de onda, uma para o modelo elástico e outro para o modelo viscoelástico. Os dados de entrada do dispositivo para o modelo elástico estão apresentados na Figura 4.22:

The image shows a software dialog box titled "Válvula Antecipadora de Onda". It is divided into three main sections:

- Função Alívio:** Contains a text field for "Pressão Máxima de Regulagem (mca)" with the value 50.40.
- Função Antecipadora de Onda:** Contains four text fields: "Pressão Mínima de Regulagem (mca)" (26.58), "Tempo Inicial de Abertura da Válvula (s)" (10.22), "Intervalo do Tempo de Abertura da Válvula (s)" (1.56), and "Intervalo do Tempo de Permanência da Válvula Aberta (s)" (1.00). Below these is another text field for "Intervalo do Tempo de Fechamento da Válvula (s)" (30.00).
- Dados da Tubulação:** Contains a dropdown menu for "Material" set to "válvula antecipadora de onda" and another dropdown for "Diâmetro Nominal (mm)" set to 75.

At the bottom of the dialog are two buttons: "OK" and "Cancela".

FIGURA 4. 22 - Dados de entrada da válvula antecipadora de onda para o modelo elástico.

No gráfico de envoltória máxima e mínima da Figura 4.23 é estabelecida uma comparação entre o caso com mecanismo e proteção e o caso sem proteção da válvula antecipadora de onda. O dispositivo de proteção é instalado no nó 2. Nesta situação, considera-se o modelo clássico, onde o comportamento do material da tubulação é elástico e o termo de atrito tem o mesmo comportamento do atrito no escoamento permanente. A linha pontilhada indica o caso sem a proteção da válvula antecipadora de onda e a linha cheia, o caso com o mecanismo de proteção.

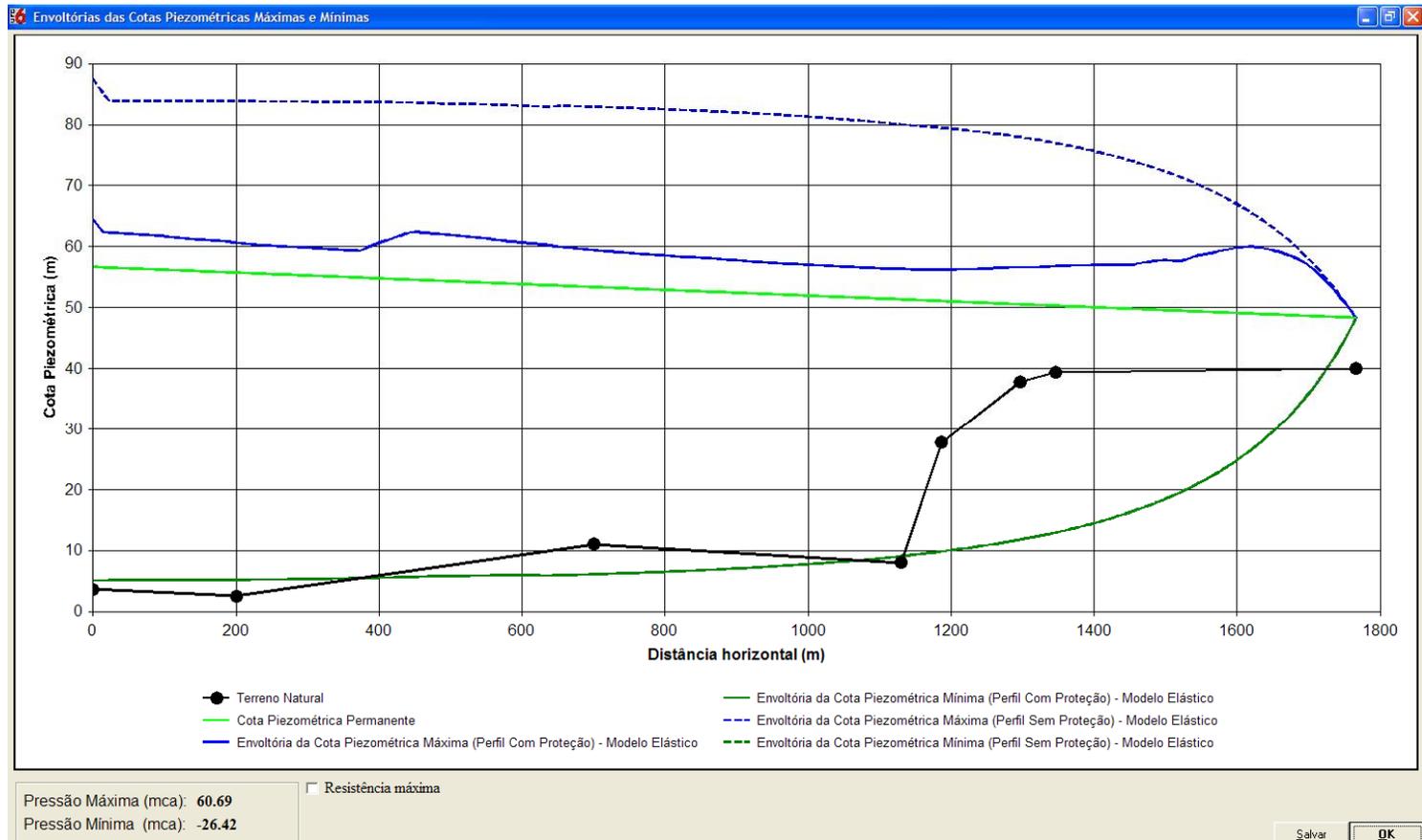


FIGURA 4. 23 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo elástico para os casos com e sem válvula antecipadora de onda.

#### 4.4.7 Adutora Cuiá com válvula antecipadora de onda – modelo viscoelástico

A válvula antecipadora de onda é dimensionada considerando o comportamento reológico viscoelástico para o material do tubo e formulação quasi-permanente para o termo de atrito. Os dados de entrada do dispositivo para o modelo viscoelástico são dados segundo a Figura 4.24:

The image shows a software dialog box titled "Válvula Antecipadora de Onda". It contains three main sections of input fields:

- Função Alívio:** A single input field for "Pressão Máxima de Regulagem (mca)" with the value 58.48.
- Função Antecipadora de Onda:** Five input fields: "Pressão Mínima de Regulagem (mca)" (26.58), "Tempo Inicial de Abertura da Válvula (s)" (10.71), "Intervalo do Tempo de Abertura da Válvula (s)" (1.30), "Intervalo do Tempo de Permanência da Válvula Aberta (s)" (1.00), and "Intervalo do Tempo de Fechamento da Válvula (s)" (30.00).
- Dados da Tubulação:** Two dropdown menus: "Material" (set to "válvula antecipadora de onda") and "Diâmetro Nominal (mm)" (set to 75).

At the bottom of the dialog are two buttons: "OK" and "Cancela".

FIGURA 4. 24 - Dados de entrada da válvula antecipadora de onda para o modelo viscoelástico.

Na Figura 4.25 é apresentada uma comparação entre o caso com e sem válvula antecipadora de onda, levando em conta a formulação viscoelástica para comportamento mecânico do conduto. A linha pontilhada indica o sistema sem o mecanismo de alívio do golpe de aríete enquanto que a linha cheia indica o sistema com o dispositivo.

No gráfico de envoltórias subsequente (Figura 4.26) é apresentada uma comparação entre os dois modelos de simulação considerando a instalação da válvula antecipadora de onda. A linha pontilhada indica a utilização do modelo elástico e a linha cheia indica a utilização do modelo viscolástico. Observa-se uma atenuação mais acentuada na envoltória máxima. Também fica evidente o efeito de dispersão, observado pelo deslocamento lateral da envoltória máxima.

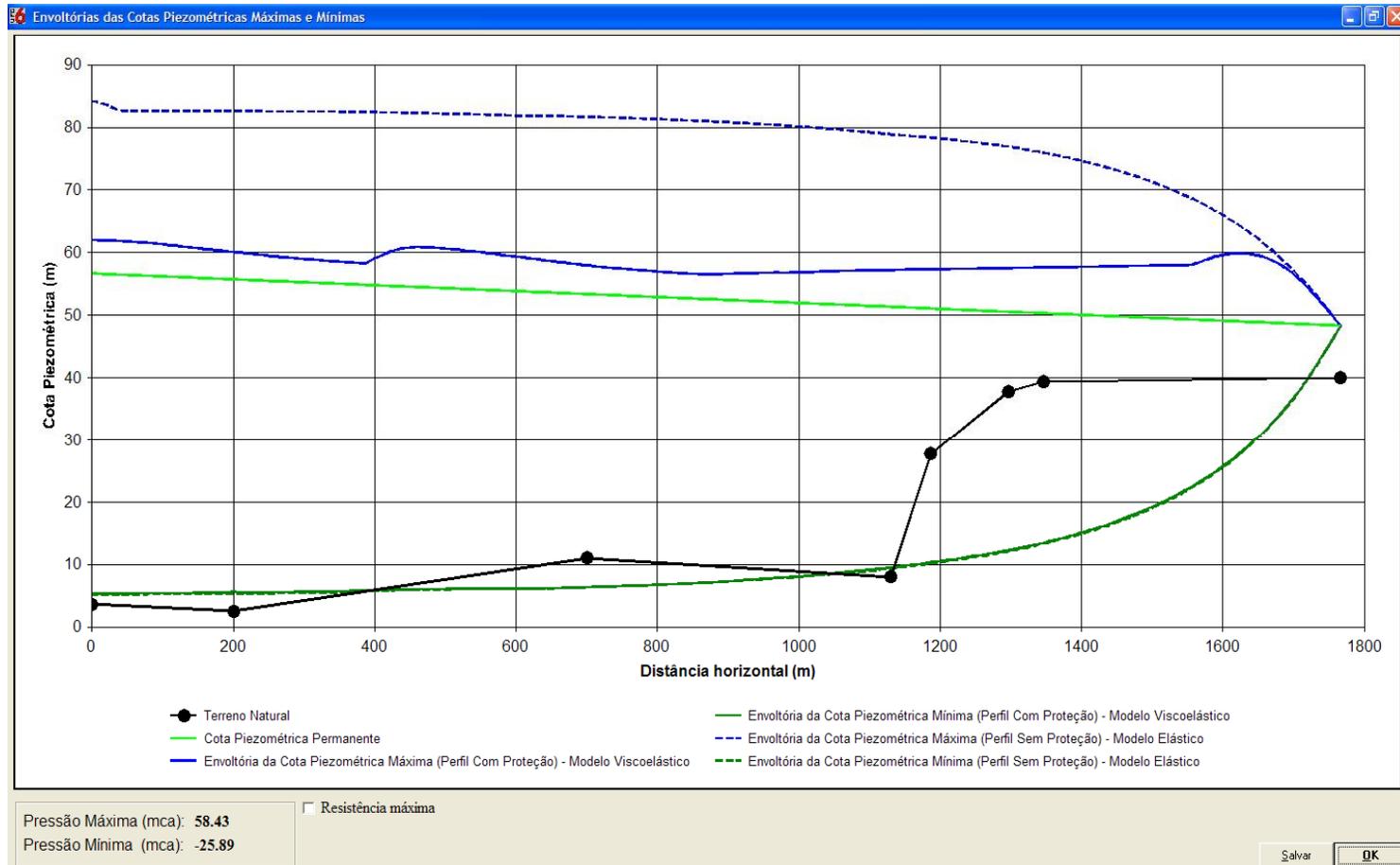


FIGURA 4. 25 - Gráfico das envoltórias máximas e mínimas: Comparação do modelo viscoelástico para os casos com e sem válvula antecipadora de onda.

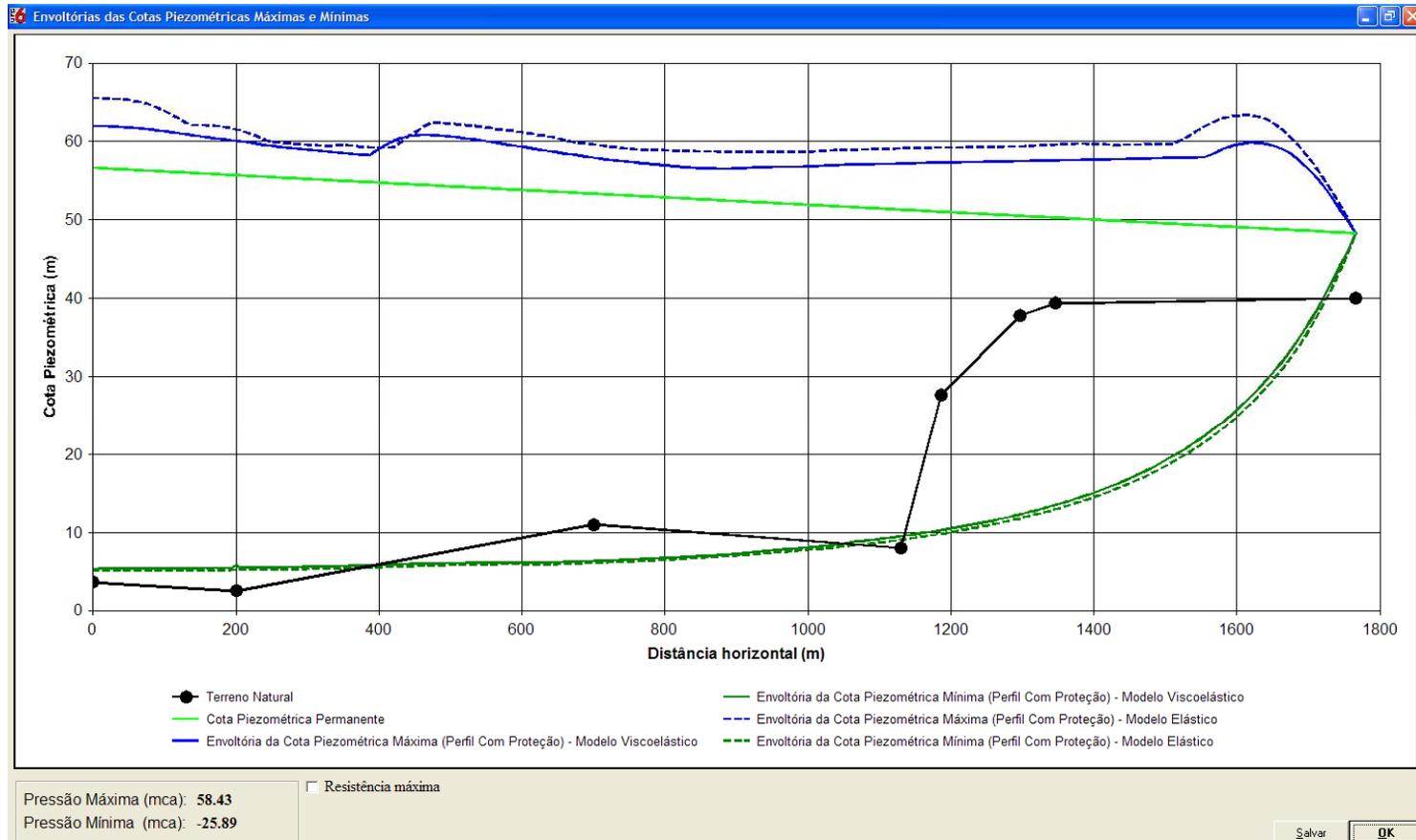


FIGURA 4. 26 - Gráficos das envoltórias máximas e mínimas: Comparação entre os modelos elástico e viscoelástico considerando a utilização da válvula antecipadora de onda.

## 5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Foi elaborado um código computacional para simulação de transientes hidráulicos produzidos por falha no bombeamento em sistemas de adução por recalque.

No algoritmo de avaliação hidráulica, as equações diferenciais parciais representativas do escoamento transitório em condutos pressurizados foram resolvidas através do método das características. O simulador hidráulico foi objeto de testes sobre sistemas experimentais e hipotéticos compostos por uma única tubulação ou condutos em série.

Os sistemas experimentais foram utilizados com a finalidade de verificar os modelos de simulação desenvolvidos. As formulações de atrito variável foram empregadas nos sistemas experimentais simples estudados por Pezzinga e Scandura (1995), Bergant e Simpson (1994) e no sistema em série estudado por Covas *et al.* (2003). O modelo viscoelástico foi verificado para o sistema em série do Imperial College de Londres estudado por Covas *et al.* (2003). Os sistemas hipotéticos foram empregados para a avaliação do transiente provocado por falha no bombeamento. Assim, os algoritmos verificados nos sistemas experimentais, onde os transientes são produzidos por fechamento de válvula, foram estendidos aos sistemas de adução por recalque.

Foi realizada uma avaliação do fator de atrito variável na modelagem de sistemas simples e em série. Os modelos apresentados por Brunone (1991) e Vardy, Hwang e Brown (1993) foram adotados para as simulações e uma análise do coeficiente de amortecimento foi realizada. Considerando os transientes produzidos por fechamento de válvula, observou-se que a formulação para  $K_3$  proposta por Karney e Brunone (1999), levando em conta a razão entre as máximas cargas piezométricas consecutivas, apresentou uma maior adequação aos dados experimental em relação a fórmula proposta por Vardy, Hwang e Brown (1993), onde  $K_3$  depende do número de Reynolds. Na comparação entre as formulações de atrito variável o modelo de Brunone (1991) se ajustou melhor aos dados experimentais do que o modelo de Vardy, Hwang e Brown (1993). Em comparação com o modelo clássico, o modelo Vardy, Hwang e Brown (1993) apresentou poucas diferenças. Além disso, consiste em um modelo computacionalmente mais dispendioso que o modelo elástico. De fato, o simulador hidráulico se comportou de acordo com as simulações efetuadas por Covas *et al.* (2005) verificando, assim, o modelo. Este simulador foi aplicado a uma adutora de recalque com fenômeno transiente gerado por desligamento de bomba e diversas condições de contorno. Verificou-se

que os modelos de atrito variável não apresentaram nenhum efeito de dissipação de energia para esse sistema.

A formulação viscoelástica conseguiu reproduzir, com boa precisão, os efeitos de atenuação e dispersão da onda de pressão para transientes produzidos por desligamento de bomba. Para a obtenção da função fluência, foram utilizados os parâmetros calibrados por Covas *et al.* (2005).

Uma sugestão para trabalhos futuros seria a utilização de modelos mais precisos e mais eficientes para simulação do fator de atrito variável de forma a superar instabilidades numéricas, interpolações e imprecisões dos modelos de atrito variável analisados.

Outra sugestão seria a aplicação dos modelos computacionais estudados a sistemas de topologia mais complexa como as redes hidráulicas. Nesse caso, sugere-se também uma análise dos transientes provocados por falha no bombeamento.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. B.; KOELLE, E. **Fluid Transients in Pipe Networks**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1992.

BARBOSA, J. M. C. Modelagem Computacional da Válvula Antecipadora de Onda como Mecanismo de Alívio para o Golpe de Aríete. Dissertação (Mestrado). 2010. Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza- CE, 2010.

BARBOSA, M. P. R. Modelagem Computacional de Chaminés de Equilíbrio e Tanques de Alimentação Unidirecional como Dispositivos Atenuadores do Golpe de Aríete em Adutores. Dissertação (Mestrado). 2006. Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza-CE, 2006.

BERGANT, A.; SIMPSON, A. R. . Estimating Unsteady Friction in Transient Cavitating Pipe Flow. **Proceedings of the 2nd International Conference on Water Pipeline Systems**. Edinburgh, 1994.

BERGANT, A.; SIMPSON, A. R.; VITKOVSKY, J. P. Developments in Unsteady Pipe Flow Friction Modelling. **Journal of Hydraulic Research**, v. 39, n. 3, p. 249-257, 2001.

BRUNONE, B.; GOLIA, U. M.; GRECO, M. Modelling of Fast Transients by Numerical Methods. In: CABRERA, E. e FANELLI, M., **Proceedings of the International Meeting on Hydraulic Transients and Water Column Separation**. Valencia, 1991.

CHAUDHRY, M. H. **Applied Hydraulic Transients**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1979.

CHAUDHRY, M. H. **Applied Hydraulic Transients**. 2nd. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1987.

COVAS, D. *et al.* An Assessment of the Application of Inverse Transient Analysis for Leak Detection: Part II - Collection and Application of Experimental Data. In: MAKSIMOVIC, C.; BUTLER, D., *et al.* (Ed.). **Advances in Water Supply Management**. Lisse: Swets and Zeitlinger, 2003.

COVAS, D. *et al.* The Dynamic Effect of Pipe-Wall Viscoelasticity in Hydraulic Transients. Part I - Experimental Analysis and Creep Characterization. **Journal of Hydraulic Research**, v. 42, n. 5, p. 516-530, 2004.

COVAS, D.; RAMOS, H.; ALMEIDA, A. B. Standing Wave Difference Method for Leak Detection in Pipeline Systems. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 131, n. 12, p. 1106-1116, 2005.

COVAS, D. *et al.* The Dynamic Effect of Pipe-Wall Viscoelasticity in Hydraulic Transients. Part II - Model Development, Calibration and Verification. **Journal of Hydraulic Research**, v. 43, n. 1, p. 56-70, 2005.

DAILY, J. W. *et al.* Resistance Coefficients for Accelerated and Decelerated Flows Through Smooth Tubes and Orifices. **Journal of Basic Engineering**, v. 78, n. 7, p. 1071-1077, 1956.

FERRY, J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. New York: John Wiley and Sons, 1980.

GHIDAOU, M. S.; MANSOUR, S. Efficient Treatment of the Vardy-Brown Unsteady Shear in Pipe Transients. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 128, n. 1, p. 102-112, 2002.

KARNEY, B. W.; BRUNONE, B. Water Hammer in Pipe Network: Two Case Studies. In: SAVIC, D. A. e WALTERS, G. A. (Ed.). **Water Industry Systems: Modelling and Optimization Applications**. Research Studies Pre, 1999.

LISTER, M. The Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations by the Method of Characteristics In: RALSTON, A. e WILF, H. S. (Ed.). **Mathematical Methods for Digital Computers**. New York: Wiley and Sons, 1960.

PEROBA JR., F. Modelagem Computacional de Ventosas de Duplo Efeito como um Mecanismo de Alívio do Golpe de Aríete. Dissertação (Mestrado). 2007. Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza-CE, 2007.

PEZZINGA, G. Local Balance Unsteady Friction Model. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 135, n. 1, p. 45-56, 2009.

PEZZINGA, G.; SCANDURA, P. . Unsteady flow in installations with polymeric additional pipe. **Journal of Hydraulic Division**, v.121, n.11, 802–811, 1995.

ROCHA, M. S. Influência do fator de atrito no cálculo do transiente hidráulico. Dissertação (Mestrado). 1998. Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas. Campinas-SP, 1998.

ROCHA, M. S.; ANDRADE, J. G. P.; LUVIZOTTO JUNIOR, E. El Factor de Fricción en el Transitório., **5ª Reunión del Grupo de Trabajo sobre Hidromecánica**. Montevideo, 1999.

SAIKIA, M. D.; SARMA, A. K. Simulation of water hammer flows with unsteady friction factor. **Journal of engineering and applied sciences**, v. 1, n. 4, p. 35-40, 2006.

SILVA-ARAYA, W. F.; CHAUDHRY, M. H. Unsteady Friction in Rough Pipes. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 127, n. 7, p. 607-618, 2001.

SOARES, A. K. Calibração e Detecção de Vazamentos em Modelos de Sistemas Hidráulicos no Escoamento Transitório. Tese (Doutorado). 2007. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos-SP, 2007.

VARDY, A. E.; BROWN, J. M. B. On Turbulent, Unsteady, Smooth-Pipe Friction. **Proceedings of the 7th. International Conference on Pressure Surges and Fluid Transients in Pipelines and Open Channels**. Harrogate, 1996.

VARDY, A. E.; HWANG, K. L.; BROWN, J. M. B. A Weighting Function Model of Transient Turbulent Pipe Friction. **Journal of Hydraulic Research**, v. 31, n. 4, p. 533-548, 1993.

VIARO, V. L. Influência do Fator de Atrito Variável na Avaliação de Escoamentos Transitórios em Sistemas Hidráulicos. Dissertação (Mestrado). 2001. Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas. Campinas-SP, 2001.

WARD, I. M.; SWEENEY, J. **An introduction to the mechanical properties of solid polymers**. New York: John Wiley & Sons, 2004.

WHITE, F. M. **Viscous Fluid Flow**. New York: McGraw-Hill, 1991.

WYLIE, E. B.; STREETER, V. L. **Fluid Transients in Systems**. New York: Prentice Hall, 1993.

ZIELKE, W. Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow. **Journal of Basic Engineering**, v. 90, n. 1, p. 109-115, 1968.

### APÊNDICE 1 – DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO (3.13)

Da relação  $\lambda = \frac{(a^2 - K_3 \lambda a)}{(\lambda + K_3 \lambda)}$  obtemos a seguinte relação derivada:

$$\lambda(\lambda + K_3 \lambda) = a^2 - K_3 a \lambda$$

$$(1 + K_3) \lambda^2 + a K_3 \lambda - a^2 = 0$$

Essa expressão é uma equação do segundo grau na variável  $\lambda$ . Aplicando o método de Bhaskara:

$$\lambda = \frac{-aK_3 \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 + K_3)}$$

$$\text{Onde } \Delta = (aK_3)^2 + 4(1 + K_3)a^2 = a^2 K_3^2 + 4a^2 + 4K_3 a^2$$

$$\lambda = \frac{-aK_3 \pm \sqrt{a^2 K_3^2 + 4a^2 + 4K_3 a^2}}{2(1 + K_3)}$$

$$\lambda = \frac{-aK_3 \pm \sqrt{a^2 (K_3 + 2)^2}}{2(1 + K_3)}$$

$$\lambda = \frac{-aK_3 \pm a(K_3 + 2)}{2(1 + K_3)}$$

A solução positiva para a equação acima é dada por :

$$\lambda = \frac{a}{(1 + K_3)}$$

A solução negativa é expressa por:

$$\lambda = -a$$

## ANEXO 1 – DADOS EXPERIMENTAIS DE CARGA

TABELA A.1 - Dados experimentais de Pezzinga e Scandura (1995)

Tempo (s)	Carga na válvula (m)
0	52,97
0,029	87,3
0,057	88,2
0,086	88,4
0,114	87,5
0,143	22,5
0,172	19
0,2	18
0,229	25,3
0,257	84,5
0,286	85,5
0,315	86
0,343	77,4
0,372	27,5
0,4	21,4
0,429	20,9
0,458	24,2

TABELA A.1 – Dados experimentais de Pezzinga e Scandura (1995)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
0,486	71,8
0,515	84,5
0,543	85,1
0,572	84
0,601	31,2
0,629	22,5
0,658	21,4
0,686	28,8
0,715	73,3
0,744	82,5
0,772	83,8
0,801	78
0,829	29,3
0,858	24,5
0,887	22,7
0,915	28,2
0,944	65,4

TABELA A.1 - Dados experimentais de Pezzinga e Scandura (1995)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
0,972	79,2
1,001	81,2
1,03	76,1
1,058	31,7
1,087	25,3
1,116	23,6
1,144	32,1
1,173	72,8
1,201	79,4
1,23	80,3
1,259	76,1
1,287	32,6
1,316	27,3
1,344	24,2
1,373	35
1,402	68,2
1,43	77,7

TABELA A.1 - Dados experimentais de Pezzinga e Scandura (1995)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
1,459	79
1,487	65,6
1,516	32
1,545	29,3
1,573	26
1,602	30,6
1,63	73,3
1,659	76,4
1,688	77,7
1,716	72,8
1,745	37,2
1,773	29,1
1,802	27,5
1,831	33,4
1,859	65,4
1,888	76,1
1,916	77,4

TABELA A.1 - Dados experimentais de Pezzinga e Scandura (1995)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
1,945	62,6
1,974	52,97

TABELA A.2 - Dados experimentais Bergant e Simpson (1994)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
0	29,71
0,014	71,7
0,028	71,3
0,042	72
0,056	36
0,071	-3,7
0,085	-5,3
0,099	-6,4
0,113	-6
0,127	65,5
0,141	69,1
0,155	68,8
0,169	68
0,183	-0,2
0,197	-3,1
0,212	-4,2
0,24	58

TABELA A. 2 - Dados experimentais Bergant e Simpson (1994)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
0,254	66
0,268	66,6
0,282	66,4
0,296	7
0,31	2,3
0,324	-1,3
0,338	0,5
0,353	43,8
0,367	63
0,381	64,8
0,395	64
0,409	53,2
0,423	2,3
0,437	-0,6
0,451	0,7
0,465	54
0,479	58,3

TABELA A.2 - Dados experimentais Bergant e Simpson (1994)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
0,494	62
0,508	62,8
0,522	24,4
0,536	8,5
0,55	2,7
0,564	2,7
0,578	34,4
0,592	52,3
0,606	61,7
0,62	62,4
0,635	56,6
0,649	16,8
0,663	3,2
0,677	3,6
0,691	7,9
0,705	35,1
0,719	56,6

TABELA A.2 - Dados experimentais Bergant e Simpson (1994)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
0,733	60
0,747	58,8
0,761	33,3
0,776	7,4
0,79	5,4
0,804	8,3
0,818	35,6
0,832	50,7
0,846	58,1
0,86	55,4
0,874	33,8
0,888	15
0,903	7,2

TABELA A. 3 - Dados experimentais de Covas *et al.* (2004)

Tempo (s)	Carga na válvula (m)
0	44
0,2	44
0,3	63,5
0,5	63
1	62,3
1,5	62,5
1,7	63
1,8	40
1,9	37
2	35
2,5	32,5
3	32
3,1	31,9
3,3	47,5
3,5	53,5
4	57,5
4,5	58,5

TABELA A.3 - Dados experimentais de Covas *et al.* (2004)

Tempo (s)	Carga na válvula (m)
5	41,5
5,5	37,5
5,9	36
6	37,5
6,3	46
6,5	50
7	54
7,3	55,5
7,5	53,5
8	45
8,5	41
8,7	40
9	41,5
9,5	48
10	52
10,2	53
10,5	51,5

TABELA A.3 - Dados experimentais de Covas et al. (2004)

<b>Tempo (s)</b>	<b>Carga na válvula (m)</b>
11	46,5
11,5	43,5
11,7	42,5
12	43,5
12,5	47,5
13	50,5
13,3	51
13,5	50
14	47,5
14,5	45
14,7	44
15	45
15,5	47,5
16	49,5
16,2	50