UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RICARDO CÉSAR DA SILVA GOMES

ÁLGEBRA OU GEOMETRIA? VAMOS À QUESTÃO!

JUAZEIRO DO NORTE -CE
2016

RICARDO CÉSAR DA SILVA GOMES

ÁLGEBRA OU GEOMETRIA? VAMOS À QUESTÃO!

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

JUAZEIRO DO NORTE -CE

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

G617a Gomes, Ricardo César da Silva
Álgebra ou geometria? Vamos a questão! / Ricardo César da Silva Gomes. – 2016.
54 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

1. Álgebra. 2. Geometria. 3. Resolução de problemas. I. Título.

CDD 512

RICARDO CÉSAR DA SILVA GOMES

ÁLGEBRA OU GEOMETRIA? VAMOS À QUESTÃO!

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Placido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Calvi da Cruz Junior

Prof. Ms. Francisco Calvi da Cruz Junior

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Juscelino Pereira Silva

Prof. Dr. Juscelino Pereira da Silva

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

AGRADECIMENTO ESPECIAL

Agradeço a Deus, o Grande Arquiteto do Universo. “Senhor, dai-me serenidade para aceitar as coisas que não posso mudar, a coragem de mudar as coisas que posso e a sabedoria para conhecer a diferença.”

Dedico este trabalho à minha **Vó Dolores**, *in memoriam*.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, exemplo maior de retidão de caráter que tenho na vida.

À minha esposa, Márcia Araújo, essa pessoa que eu queria ter encontrado na vida.

Aos meus filhos: Ricardo César, João Pedro e Mário Henrique que são o sentido maior de minha existência.

A todos os colegas da primeira turma, em especial, Leonardo Soares e José Alves Francisco, que partilhando saberes, alegrias, angústias e sofrimentos nunca me deixaram desanimar diante dos obstáculos necessários a construção deste trabalho.

Aos professores Gagarin Lima, Dirceu Arraes e Célio Muniz, fica o meu reconhecimento e minha gratidão por ter tido em vocês mais que um apoio para chegar até esta etapa de minha vida.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE, Campus de Jaguaribe, pelo incentivo total durante esses dois anos e meio de curso.

Aos meus professores pela compreensão e confiança depositadas em mim, sempre que necessitei.

Ao meu orientador, o professor Dr. Plácido Andrade, por todo o apoio dado à realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) que me concedeu uma bolsa de estudo.

RESUMO

O presente trabalho tem como tema: Álgebra ou Geometria? Vamos à questão! Esse estudo discute, principalmente, a relação entre essas duas áreas distintas do ponto de vista curricular, no ensino básico. O objetivo é mostrar como é tênue, e ao mesmo tempo frutífera, a fronteira que separa a Álgebra básica e a Geometria Plana e, como o professor deve investigar esta fronteira logo nas primeiras séries do ensino médio, mesmo antes de apresentar a Geometria Analítica. Este estudo está organizado em forma de capítulos, abordando as seguintes temáticas em ordem: o porquê do ensino da Matemática, o método utilizado na resolução de problemas como processo, o pressuposto teórico, dando destaque à semelhança entre triângulos, ao teorema de Pitágoras, às leis dos Senos e Cossenos, ao teorema de Ptolomeu, e à lista de problemas propostos e uma discussão epistemológica dos problemas propostos. O trabalho foi à luz das propostas teóricas de Elon Lages Lima, Terence Tao e de Paulo Freire, este último um mestre da Pedagogia. A pesquisa foi feita de modo exploratório e bibliográfico, de caráter qualitativo. Por fim, o estudo pretende deixar claro que a divisão curricular das aulas de Matemática, no ensino básico, em Álgebra e Geometria é apenas um divisão curricular e não deveria afetar a visão de que todos os conteúdos estudados fazem parte de um todo perfeitamente coerente; tendo em vista que, estando diante de um problema de matemática, estudantes e professores podem lançar mão tanto de ferramentas da álgebra quanto de resultados da geometria para resolvê-lo.

Palavras-chave: Álgebra Básica, Geometria, Resolução de Problemas, Ensino.

ABSTRACT

The present work has as its theme: Algebra or Geometry? Let the question! This study discusses mainly the relationship between these two distinct areas of the curriculum perspective, basic education. The goal is to show how tenuous, and at the same fruitful time, the border that separates the basic algebra and plane geometry, and how the teacher should investigate this boundary in the very first year of high school, even before submitting Analytic Geometry. This study is organized in the form of chapters, covering the following topics in order: why the mathematics teaching, the method used in problem solving as a process, the theoretical assumption, highlighting the similarity of triangles, the Pythagorean theorem, the laws of sines and cosines, the Ptolemy's theorem, and the list of proposed issues and an epistemological discussion of the proposed problems. The work was in the light of theoretical proposals Elon Lages Lima, Terence Tao and Paulo Freire, the latter a master of pedagogy. The survey was conducted exploratory and bibliographic way, qualitative character. Finally, the study aims to clarify that the curriculum division of mathematics classrooms in primary school in Algebra and Geometry is only one curriculum division and should not affect the view that all the contents studied are part of a whole perfectly consistent; given that, being on a math problem, students and teachers can make use of both tools of algebra as geometry of the results to solve it.

Keywords: Basic Algebra, Geometry, Problem Solving, Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IMPA	Instituto Brasileiro de Matemática Pura e Aplicada
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
POTI	Projeto Olímpico de Treinamento Intensivo
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Toda a nossa ciência, comparada com realidade, é primitiva e infantil – e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.

*Albert Einstein***.**

1.1 Motivações para a escolha desta proposta

O foco deste trabalho é no modo como o professor deve conduzir o processo de aprendizagem do educando e o seu próprio processo de ensino-aprendizagem, visto que o professor é o principal espectador de suas aulas. Concordamos com o professor e pesquisador César Camacho, diretor geral do Instituto Brasileiro de Matemática Pura e Aplicada-IMPA quando o mesmo diz que (2014, editorial de 10 anos da OBMEP).

> *São três os pilares de um bom ensino: o professor, a escola e a família. Acima deles, estão os governos em suas três esferas, como agentes responsáveis pela disseminação do bom ensino, financiamento das atividades da escola, da sua organização global e da preservação de sua qualidade.*

Neste trabalho trataremos apenas de um dos pilares para o bom ensino: a relação *professor-material usado na aula-educando*, mediada pela matemática, ou mais especificamente, pela resolução de problemas nas aulas de matemática. Ainda, segundo Camacho:

> *O baixo desempenho do Brasil nas avaliações do PISA, os relatórios das secretarias de educação e os relatórios de programas de capacitação de professores indicam que há no país uma deficiência séria na qualidade do ensino de*

> *Português e Matemática, disciplinas fundamentais na formação profissional e no exercício da cidadania.*

Neste ponto temos como objetivo principal deste trabalho participar da elaboração de atividades de ensino-aprendizagem que vão, de forma dialógica, ao encontro desta problemática do ensino brasileiro na atualidade e sugeri a apresentação de uma lista de problemas, com suas respectivas respostas, para que possa ser utilizada, por professores, logo nas primeiras séries do ensino médio; e, no caso de alguns problemas, até mesmo no último ano do ensino fundamental.

1.2 Para que ensinamos matemática?

O ensino de Matemática encontra-se, dentro de uma proposta maior que é: para que ensinamos algo a alguém? Respondendo esta nova pergunta, esperamos responder à primeira. Apoiaremos nosso argumento em dois pensadores: Immanuel Kant, filósofo alemão e Paulo Freire, educador brasileiro. Acreditamos que todo ensino deveria objetivar que o educando, ao final do processo, atingisse o estágio, segundo kant, de *Esclarecimento*. Aqui temos a seguinte pergunta: mas o que vem a ser o *Esclarecimento?* Em seu manifesto seminal, intitulado: *Resposta à pergunta: o que é Esclarecimento?* Publicado em 1874 em Königsberg, na Prússia. KANT define o que seria o *Esclarecimento:*

> *Esclarecimento é a saída do homem da sua menoridade de que ele próprio é culpado. A menoridade é a incapacidade de se servir do entendimento sem a orientação de outrem. Tal menoridade é por culpa própria, se a sua causa não residir na carência de entendimento, mas na falta de decisão e de coragem em se servir de si mesmo, sem a guia de outrem. Sapere aude - palavra latina que significa: ousa saber! Tem a coragem de te servires do teu próprio entendimento! Eis a palavra de ordem do Esclarecimento.*

Acreditamos que o melhor ensino certamente é aquele que gera autodidatas, e é este o sentido que entendemos que se deva dá ao termo *ousadia* proposto por Kant. Por outro lado, para a condução do processo necessitamos de professores, e neste ponto, cabe-nos outra pergunta: qual seria então o papel do professor na condução de tal processo? Segundo Freire, o professor deveria conduzir de forma crítica o educando na passagem da curiosidade ingênua à curiosidade epistemológica. Entretanto, durante esta travessia Freire (1996, p.34) afirma que:

> *A superação e não a ruptura se dá na medida em que a curiosidade ingênua, sem deixar de ser curiosidade, pelo contrário continuando a ser curiosidade se criticiza. Ao criticizar-se tornando-se então, permito-me repetir, curiosidade epistemológica, metodicamente “rigorizando-se” na sua aproximação ao objeto, conota-se seus achados de maior exatidão.*

Desta forma, apoiados nesses pensadores, defendemos que o ensino de matemática no ensino básico e no ensino médio, deve fomentar e cultivar o espírito de curiosidade nos estudantes. Por isso, é crucial que os professores levem problemas intrigantes para suas aulas, mesmo quando o livro didático não os trouxer na quantidade necessária. Assim, segundo João Queiró, citando um trecho da resposta dada por Terence Tao (*ganhador da medalha Fields, em 2006*) numa entrevista em 2006, esperamos que os estudantes superem a visão ingênua da matemática. Em Tao (2013) lemos:

> *Quando eu era criança, tinha uma ideia romântica da matemática, a ideia de que os problemas difíceis eram resolvidos em momentos “Eureka!” de inspiração. Depois, acrescentou: Hoje, comigo, é sempre assim: “Vamos tentar esta ideia, Isso leva-me algum progresso, ou então não funciona. Agora tentemos aquilo. Oh, há aqui um pequeno atalho.” Trabalhamos durante tempo suficiente e, a certa altura, conseguimos progredir num problema difícil entrando pela porta das traseiras. No final, o que normalmente acontece é: “Olha, resolvi o problema.*

Por fim, a matemática, segundo Lima (2007,p.176-177), através de seus métodos, influencia de forma relevante para que os jovens possam exercer sua cidadania com espírito crítico, de forma objetiva, por terem adquirido hábitos de organização e cuidado que os cálculos lhe obrigaram a ter e tendo aprendido a utilizar, em situações diversas, conhecimentos matemáticos adequados que lhes permitirão chegar a conclusões e encontrar respostas para problemas reais. No próximo capítulo veremos uma proposta de método para atingir esta meta.

2 SOBRE O MÉTODO - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PROCESSO

Talvez a pergunta mais comum nas salas de aula atualmente seja: professor, isto que o senhor está me ensinando serve para quê? Suponhamos que esta pergunta seja feita num aula de Matemática. Qualquer que seja a resposta dada, devemos enfatizar que a Matemática tem uma peculiaridade: existe, também, para si mesma - eis um traço de sua beleza maior! Às vezes, o pragmatismo atual pode ser usado como uma camisa de forças, e neste caso deve-se evitar. Precisamos enfatizar que as componentes fundamentais para o ensino equilibrado, Segundo Lima (2007, p.139), são três: Conceituação, Manipulação e aplicações. Consequentemente, precisamos dizer o que se entende por cada conceito desses. Lima (2007, p.140-142) define o que se deve entender por cada um deles:

> *A **conceituação** compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a pratica do raciocínio dedutivo a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável pra o bom resultado das aplicações.*
>
> *A **manipulação**, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios de escalas musicais está para a música. (...) A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-lhe da perda de tempo e energia com detalhes secundários.*
>
> *(...) As **aplicações** constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender.*

Como Heródoto já disse há 24 séculos, “educar não é encher um balde, é acender um fogo”. Daí vem-nos as perguntas: Como podemos acender esta chama? Um dos grandes matemáticos do século XX, George Polya, nos afirma que a resolução de problemas é o processo ideal para este fim almejado: acender chama, ou seja, o *desejo de aprender*. Historicamente, no ocidente, desde a antiguidade, a resolução de problemas, segundo Carvalho & Roque (2012, p.137), era a parte essencial da atividade geométrica na época de Euclides, Arquimedes e Apolônio, e a compilação do saber na forma de um conjunto de teoremas devia consistir em uma atividade auxiliar. Para Polya, em Krulik & Reys (1997, p.1): Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado.

Uma vez que a resolução de problemas tenha sido escolhida como processo de ensino e aprendizagem, cabe-nos novas perguntas, como por exemplo esta: que problemas um professor deveria levar para suas aulas? Ainda para Polya, em Krulik & Reys (1997, p.3), a obrigação do professor é

> *Primeiro, ele deveria estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais e interessantes, que desfiem sua curiosidade, adequados o seu conhecimento. Ele deveria também se permitir algum tempo para apresentar o problema apropriadamente, de modo que apareça sob o ângulo correto. Depois, o professor deveria ajudar seus alunos convenientemente. Não muito pouco, senão não há progresso. Não demais, senão o aluno não terá o que fazer. Não ostensivamente, senão os alunos adquirem aversão ao problema, em cuja solução o professor ficou com a maior parte. Entretanto, se o professor auxilia seus alunos apenas o suficiente e discretamente, deixando-lhes alguma independência ou pelo menos alguma ilusão de independência, eles podem se inflamar e desfrutar a satisfação da descoberta. Tais experiências podem contribuir decisivamente para o desenvolvimento mental dos alunos.*

Ainda sobre as soluções de um problema, vejamos o que nos diz Tao (2013), prefácio à primeira edição): *(...) Uma solução deve ser relativamente curta, compreensível, e se possível ter um toque de elegância. Deve também ser divertido encontrá-la.*

Aqui, em nosso trabalho, a resolução de problemas será vista segundo Krulik & Reys(1997, p.5-9):

> Como um processo dinâmico e contínuo, através do qual aplicam-se conhecimentos previamente adquiridos a situações novas e desconhecidas. Assim, pretendemos atingir os seguintes objetivos:
>
> a) Munir o aluno de uma variedade de estratégias para a resolução de problemas.
> b) Desenvolver no aluno alguma versatilidade para lidar com a resolução de problemas.
> c) Desenvolver técnicas para o uso de representações geométricas, como uma maneira de obter novas informações sobre uma situação dada.

3 PRELIMINARES TEÓRICAS

“Aos onze anos, comecei a estudar Euclides, tendo meu irmão como tutor. Foi esse um dos grandes acontecimentos de minha vida , algo tão deslumbrante como o primeiro amor. Eu não imaginava que houvesse no mundo nada tão delicioso.”

Bertrand Russel (1872-1970)

Acreditamos que este trabalho possa ser utilizado tanto por professores e estudantes das duas últimas séries do Ensino Fundamental e das duas primeiras séries do Ensino Médio. Para tanto, dedicaremos este capítulo a construção do material teórico minimamente necessário para que esta obra seja autocontida e o leitor possa recorrer sempre que sentir necessário, durante a leitura do próximo capítulo. Sempre que possível, lançaremos mão do software livre *GEOGEBRA*, para a construção de diversas figuras que o leitor encontrará pelo corpo deste trabalho. Esta ferramenta computacional é de importante valia, e que deve ser explorada, inclusive por estudantes, mesmo em suas residências, como suporte pedagógico para o enriquecimento do ensino e da aprendizagem. Segundo Gardner (p.168-169, 2010), o PISA (sigla em inglês, que traduzida significa: Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) faz um estudo comparativo multinacional de habilidades matemáticas, científicas e de leitura, realizado com estudantes de 15 anos nos mais de 60 países membros e colaboradores de Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). As habilidades que o PISA testa são: a habilidade de se expressar oralmente, a habilidade de ler, a habilidade de fazer aritmética, a habilidade de se expressar por escrito e a habilidade de usar as tecnologias da informação e da comunicação. Neste trabalho, acreditamos que seja perfeitamente possível exercitarmos todas essas habilidades, através da resolução de problemas, seguindo o exposto no capítulo 2 deste trabalho.

3.1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos mais belos e importantes teoremas da matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história do nosso conhecimento matemático. Foi onde tudo começou. Vamos ao enunciado do teorema:

> ***Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lado cada um dos catetos.***

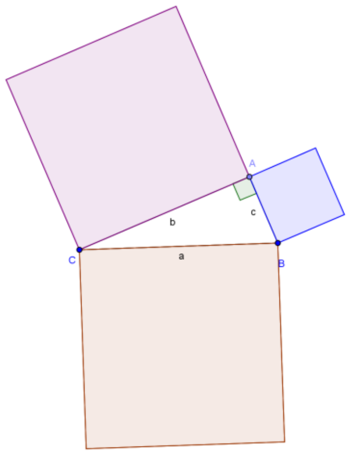


Figura 1: Ilustração do teorema de Pitágoras

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A demonstração aqui apresentada é conhecida como a demonstração de Perigal, em 1873, um livreiro em Londres publicou uma das provas mais simples e belas, que se conhece até hoje, do famoso teorema. Trata-se da forma mais evidente de demonstrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa. Vejamo-la:

Prova Seja O centro do quadrado construído sobre o maior cateto, vamos traçar dois segmentos, $\overline{GD}$ e $\overline{HK}$, perpendiculares entre si e sendo $\overline{GD}$ paralelo à hipotenusa. Assim dividimos o esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa. Agora vamos provar que a região que fica no interior do quadrado maior é realmente congruente ao quadrado menor. Sejam $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ os lados dos quadrados construídos sobre os catetos. Como as quatro peças interiores ao quadrado $ACEF$ são congruentes e tomando $\overline{AG} = \overline{DE} = x$.

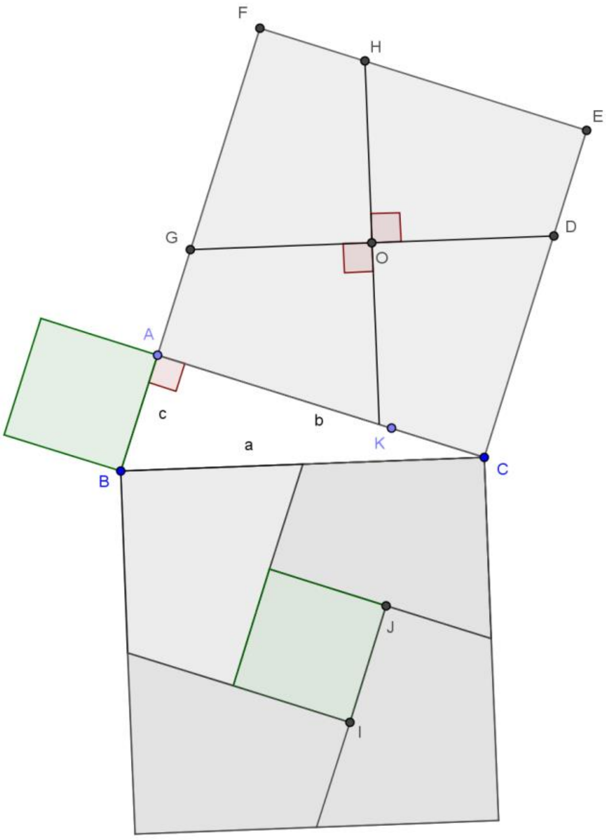


Figura 2: Triângulo retângulo

Sendo $BCDG$ um paralelogramo, $\overline{BG} = \overline{CD}$, ou seja, $c + x = b - x$, ou seja, $c = b - 2x$.

Como $\overline{HJ} = \overline{GF} = \overline{CD}$ e $\overline{HI} = \overline{DE}$, temos $\overline{IJ} = \overline{HJ} - \overline{HI} = b - x - x = b - 2x = c$.

3.2 Triângulos Semelhantes

Antes de tudo fixaremos notações. Sejam A e B dois pontos do plano. Denotaremos por:

1. $\overleftrightarrow{AB}$ a reta determinada pelos dois pontos;
2. $\overrightarrow{AB}$ a semi-reta de $\overleftrightarrow{AB}$ com extremidade em A que contém B;
3. $\overline{AB}$ a medida do segmento de reta com extremidades naqueles pontos.

Sejam A, B e C são três pontos não colineares. Indicaremos o ângulo com vértice em B por $\widehat{B}$ e sua medida, também, por $\hat{B}$. Para denotarmos que dois ângulos $\hat{B}$ e $\widehat{N}$ são congruentes utilizaremos $\hat{B} \equiv \widehat{N}$.

O símbolo ΔABC denotará um triângulo com vértices naqueles três pontos. Os segmentos determinado pelos vértices do triângulo será denominado lados. Por simplicidade, algumas vezes indicaremos por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ os ângulos do triângulo.

- **Definição 01:** Dizemos que dois triângulos são **semelhantes** quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma, vejamos a figura abaixo:

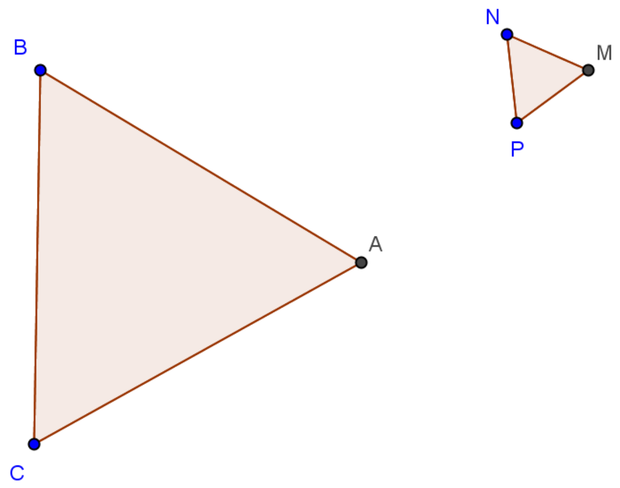


Figura 3: Triângulos semelhantes

Fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações. Na figura acima, os triângulos ABC e MNP são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow M, B \leftrightarrow N, C \leftrightarrow P$. Assim, $\hat{A} \equiv \widehat{M},\ \hat{B} \equiv \widehat{N}, \hat{C} \equiv \hat{P}$ e existe $k > 0$ tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = k.$$

Tal real positivo k é **denominado razão** de semelhança entre os triângulos ABC e MNP, nessa ordem. Escrevemos ABC ~ MNP para denotar que os triângulos ABC e MNP são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow M, B \leftrightarrow N, C \leftrightarrow P$.

Teorema 01 (Triângulos Semelhantes) Sejam $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$ os ângulos do triângulo ABC e $\widehat{M} \leq \widehat{N} \leq \ \hat{P}$ os ângulos do triângulo MNP. Se $\hat{A} \equiv \widehat{M}$, $\hat{B} \equiv \widehat{N}$ e $\hat{C} \equiv \hat{P}$ então os triângulos ABC e MNP são semelhantes.

Prova Se $\hat{A} \equiv \widehat{M}$, é possível fazermos os vértices A e M coincidirem; e em seguida, basta transladarmos e/ou rotacionarmos um dos triângulos dados de tal sorte que os lados do triângulo MNP fiquem sobrepostos aos lados do triângulo ABC. Ver figura abaixo.

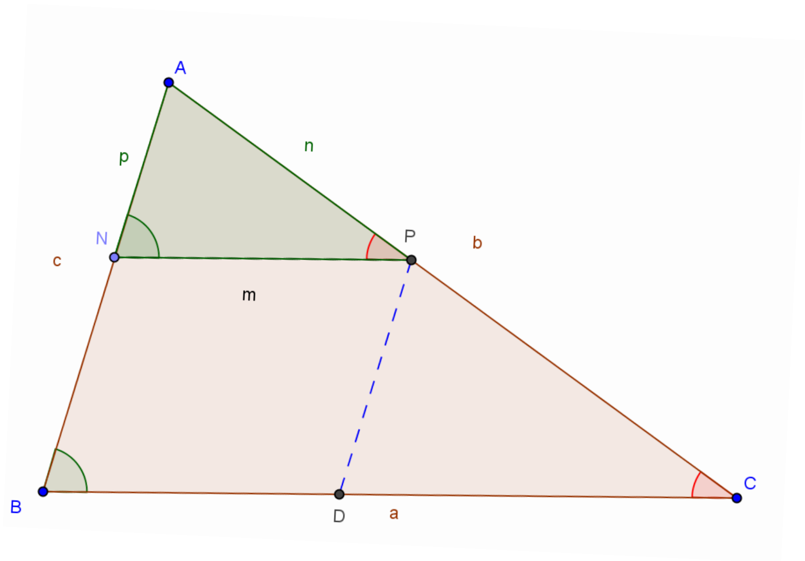


Figura 4:Demonstrando o teorema sobre triângulos semelhantes

É possível concluirmos que $\overline{NP} = m$ é paralelo a $\overline{BC} = a$, pois $\hat{B} \equiv \hat{N}$ e $\hat{C} \equiv \hat{P}$. Portanto, do Teorema de Tales, temos:

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{p} \ (1)$$

Por P, tracemos uma paralela ao lado $\overline{AB} = c$, que intersecta $\overline{BC} = a$ em D. Como BNPD é um paralelogramo, então $\overline{BD} = \overline{NP} = m$. Analogamente, pelo Teorema de Tales:

$$\frac{b}{n} = \frac{a}{m} \ (2)$$

Deste modo, concluímos que $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$, ou seja, ABC ~ MNP.

3.3 Lei dos Senos

Teorema 02 (Lei dos Senos) Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Se R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, então:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R$$

Prova De acordo com a figura abaixo

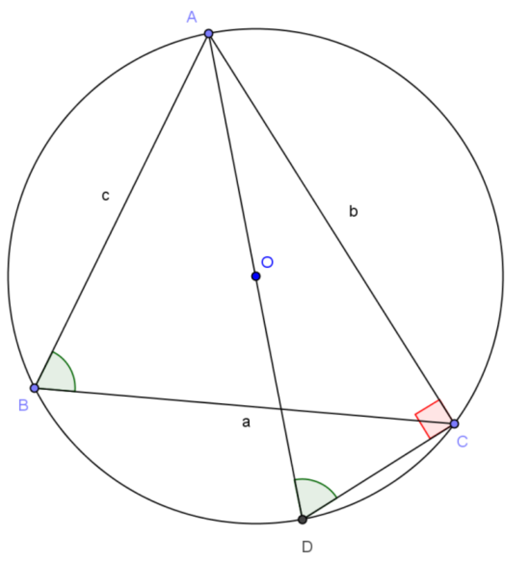


Figura 5: Ilustração de um triângulo para a demonstração da Lei dos Senos

Seja AD um diâmetro. É fácil ver que $\widehat{D} = \hat{B}$, pois ambos são ângulos inscritos na mesma circunferência. Assim, no triângulo ADC,

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{2R} \Leftrightarrow \frac{b}{sen\ \hat{B}} = 2R$$

Analogamente,

$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$. Portanto, concluímos que

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R.$$

3.4 Lei dos Cossenos

Teorema 03 (Lei dos Cossenos) Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$. Então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

Prova De acordo com a figura abaixo, temos que:

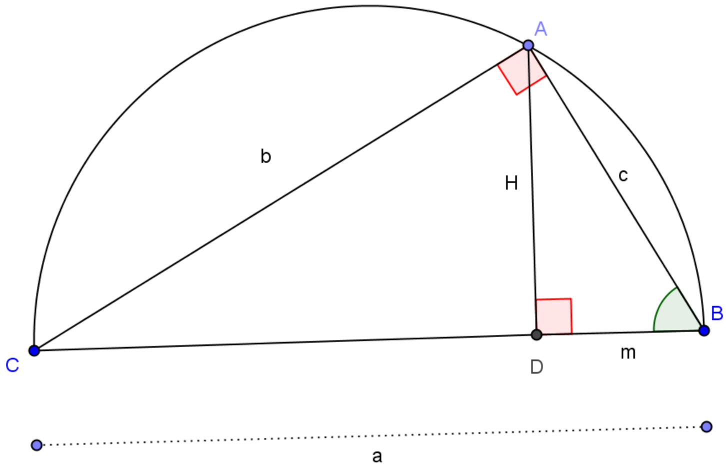


Figura 6: Ilustração de um triângulo para a demonstração da Lei dos Cossenos

Vamos fazer o caso em que o triângulo é acutângulo. O caso em que o triângulo é obtusângulo fica como exercício, para o leitor. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABD e ACD, temos:

$$c^2 = m^2 + H^2 \text{ e}$$

$$b^2 = (a - m)^2 + H^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + H^2.$$

Assim, $b^2 = a^2 + c^2 - 2am$. Por outro lado, $cos\,\hat{B} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow m = c.cos\hat{B}$. Finalmente, $b^2 = a^2 + c^2 - 2c.\cos\hat{B}$. Analogamente,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

3.5 Teorema de Ptolomeu

Teorema 04 (Teorema de Ptolomeu)

Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Prova De acordo com a figura baixo, temos:

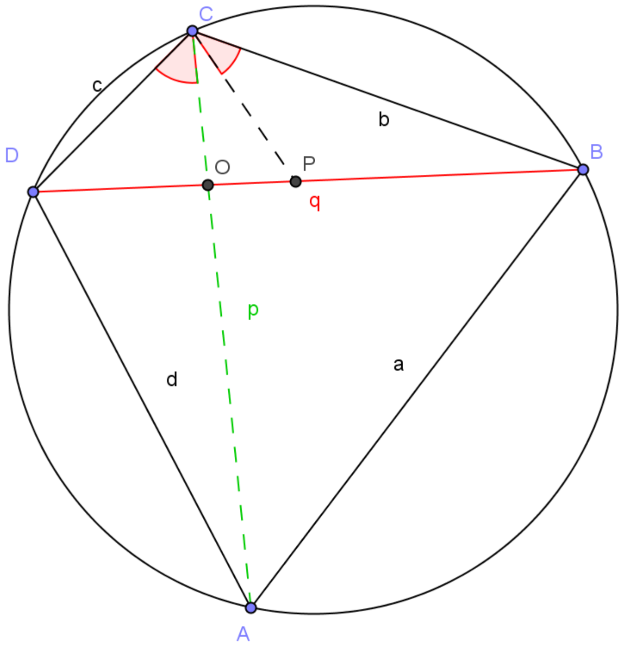


Figura 7: Quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência

Uma semelhança entre os triângulos CBP e CAD, e outra semelhança entre os triângulos CPD e CAB. Tomando $PD = m$ e $PB = n$. E chamando as diagonais de $BD = p$ e $AC = q$. Partir destes fatos, temos:

$$(1)\ \frac{n}{b} = \frac{d}{p} \Leftrightarrow pn = bd$$

e

$$(2)\ \frac{a}{p} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow pm = ac$$

Somando, membro a membro, as equações acima obtemos o resultado desejado.

Observação: Pra um quadrilátero qualquer valerá a desigualdade, ou seja, o produto das diagonais é menor do que ou é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

3.6 Um resultado sobre Ortocento e Circuncentro

Teorema 05 (Sobre o Ortocentro e o Circuncentro) Se O e H são, respectivamente, o ortocentro (ponto de encontro das alturas de um triângulo) e o circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes relativas aos lados do triângulo) de um triângulo não equilátero e M o é o ponto médio do lado oposto ao vértice A do triângulo ABC então $\overline{AH} = 2\overline{OM}$.

Prova Nossa prova usará a figura abaixo

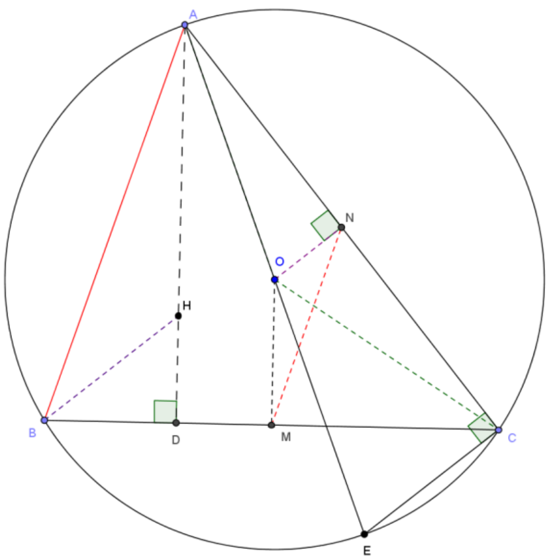


Figura 8: Circunferência e triângulo inscrito

Sejam M e N os pontos médios de $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Note que O e H estão, respectivamente, sobre $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$. Por outro lado, sabemos que $\overline{MN}$ é base média e, consequentemente, $\overline{MN}$ é paralela a $\overline{AB}$. Ligando $\overline{OC}$ obtemos um triângulo isósceles. Portanto, $\overline{ON}$ é perpendicular a $\overline{AC}$ e, neste caso, também é paralela a $\overline{BH}$. Temos dois triângulos (AHB e MNO) cujos lados são dois a dois paralelos, podemos concluir então que eles são semelhantes. Portanto, $\frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = 2 \therefore \overline{AH} = 2\overline{OM}$.

3.7 Um resultado sobre Áreas

Teorema 06 (razão entre áreas) Sobre um plano são escolhidos cinco pontos de forma que A, B e C sejam colineares e P e Q estejam em diferentes semi-planos determinados pela reta que contém A e C. Sob estas condições vale:

$$\frac{(APBQ)}{(BPCQ)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Prova Tracemos duas perpendiculares, a partir de P e Q, à reta que contém A e C. Suponha, sem perda de generalidade, que B está entre A e C (ver figura baixo).

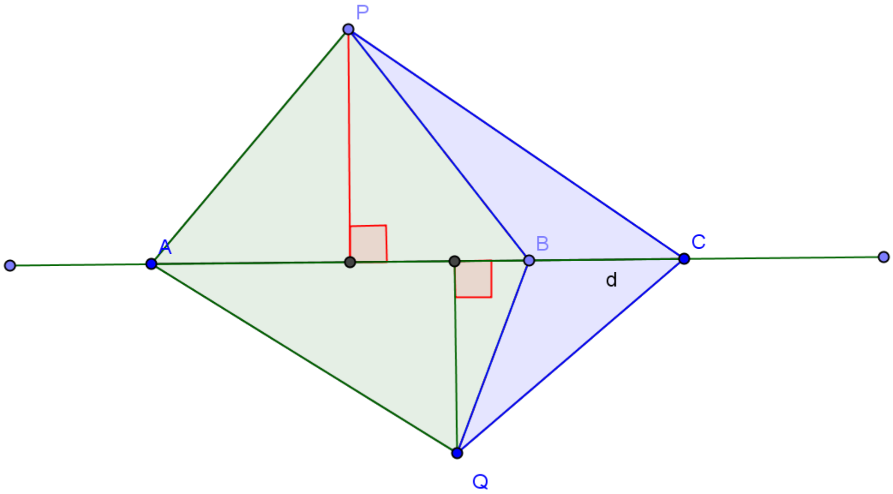


Figura 9: Quadrilátero APCQ

Chamando a área do triângulo APB de (APB), temos então que

$$\frac{(APB)}{(PBC)} = \frac{(AQB)}{(BQC)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Na primeira igualdade podemos usar a propriedades das proporções e encontrarmos

$$\frac{(APB)+(AQB)}{(PBC)+(BQC)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \therefore \quad \frac{(APBQ)}{(BPCQ)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \ .$$

4 LISTA DE PROBLEMAS

"O coração da Matemática são os seus problemas"

Paul Hamos.

Neste capítulo serão apresentados 10 problemas, com suas soluções completas, e uma discussão epistemológica detalhada das soluções de todos eles. Procuraremos ser bastante claros acerca de como o professor deverá conduzir a busca das soluções de cada problema, inclusive sugerimos em que séries deveriam ser apresentadas cada problema.

Problema 1: (A REGRA DOS SINAIS): Responda à uma das perguntas mais intrigantes do ensino básico: Por que $(-1).(-1) = +1$?

Solução: Construa o retângulo ABCD onde $\overline{AD} = d, \overline{CD} = c, \overline{DH} = a, \overline{DE} = b$ e $\overline{HF} \perp \overline{EG}$.

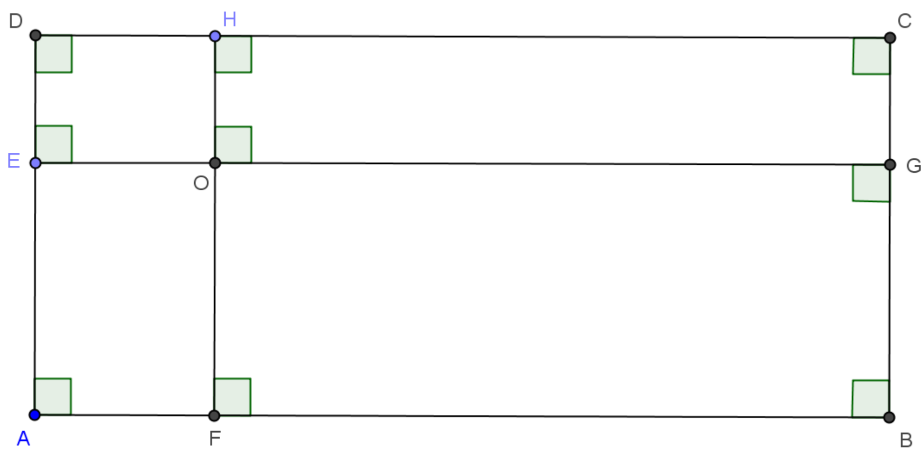


Figura 10: Retângulo ABCD

Sabemos, da geometria, que a somas das áreas dos quatro retângulos obtidos após traçarmos os segmentos perpendiculares $\overline{HF}\ e\ \overline{EG}$ é igual à área do retângulo ABCD. Daí temos:

$$ab + b(c - a) + a(d - b) + (c - a)(d - b) = cd \quad (1)$$

Agora vamos aplicar a propriedade distributiva do produto em relação à subtração, tanto à direita quanto à esquerda, em (1). Portanto:

$$ab + b(c - a) + a(d - b) - b(c - a) + d(c - a) = cd$$

$$ab + a(-b) + ad + dc - ad = cd$$

Por fim,

$$ab = -a(-b) \Rightarrow (-1).(-1) = +1.$$

Problema 2: Sejam x e y números reais positivos. Encontre o valor de $4xy$, a partir do sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{y^2 + 1} = 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Solução: Observe com cuidado o lado esquerdo da 2ª equação. Que teorema ele nos faz lembrar? Veja o expoente de x e y dentro dos radicais, lembre-se que x e y são positivos, e sempre que isso acontecer poderemos afirmar que eles representam a medida de segmentos. Se você não notou nada, veja que $25 = 5^2\ e\ 1 = 1^2$. Isso mesmo (espero que você tenha notado!): estamos diante do Teorema de Pitágoras! Assim, esta ideia nos levará a construir a seguinte figura:

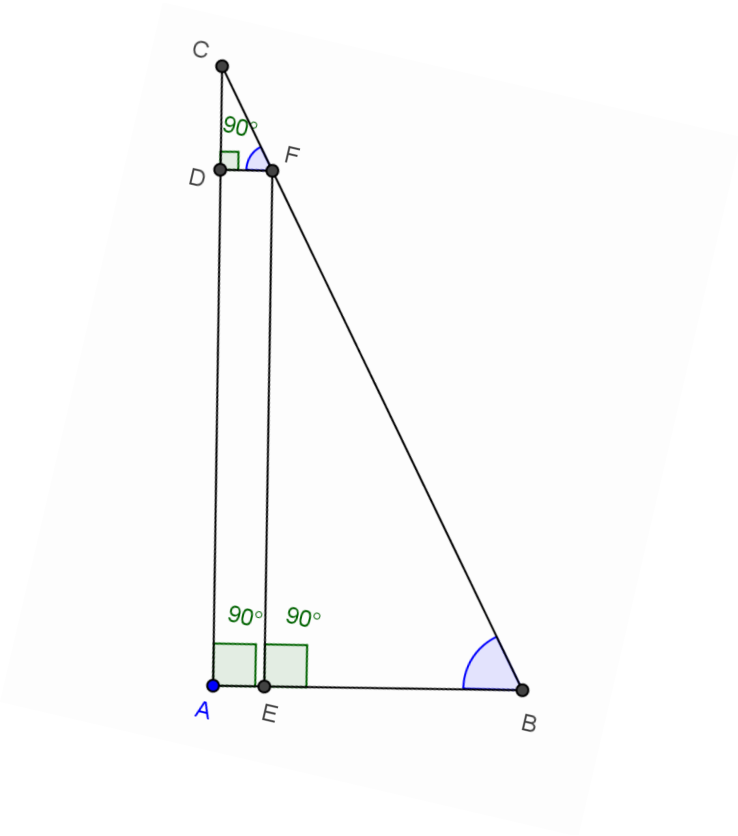


Figura 11: Triângulo retângulo ABC

Onde os triângulos CDF, CAB e FEB são todos retângulos. Na figura temos: $\overline{AD} = \overline{EF} = 5, \overline{CD} = 1, \overline{DF} = \overline{AD} = y$ e $\overline{EB} = x$, e pelo teorema de Pitágoras nos triângulos citados temos: $\overline{CF} = \sqrt{y^2 + 1}$ e $\overline{BF} = \sqrt{x^2 + 25}$. Portanto, acabamos de dar uma interpretação geométrica ao sistema de equações dado. Note que nesta figura, os triângulos CAB e FEB são semelhantes (pelo caso A.A.(ângulo-ângulo)), e deste fato obtemos a seguinte equação:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{5}{6}$$

Mas $x + y = 3$. Dessas equações obtemos os valores das incógnitas: $x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Portanto $4xy = 5$.

Problema 3: Um dos mais importantes teoremas da geometria plana é o Teorema de Ptolomeu que nos diz o seguinte:

"Se ABCD é um quadrilátero inscritível de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AD}.\overline{BC}=\overline{AC}.\,\overline{BD}$"

Vale destacar que, se o quadrilátero não fosse inscritível, então valeria a desigualdade $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AD}.\overline{BC}\geq\overline{AC}.\overline{BD}$. Use o teorema de Ptolomeu para demonstrar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=sen\alpha.cos\beta+sen\beta.cos\alpha.$$

Solução: A figura abaixo e o uso do teorema de Ptolomeu são suficientes para tal demonstração**.**

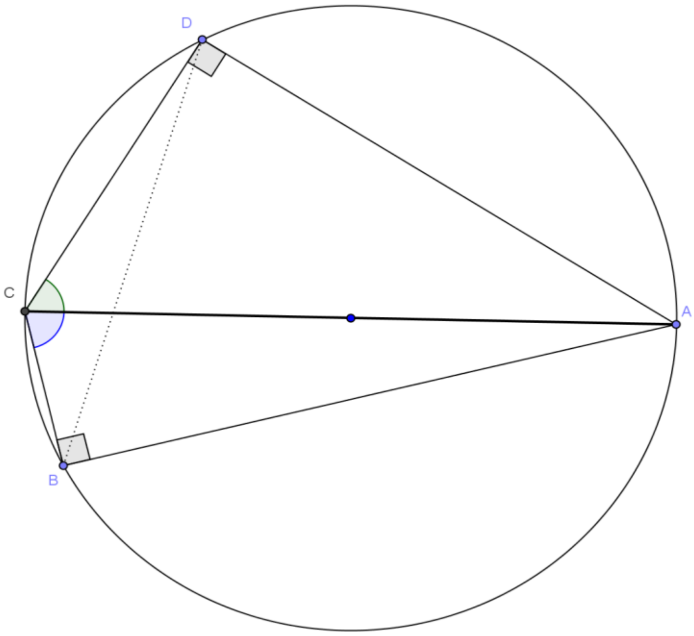


Figura 12: Quadrilátero inscrito em uma circunferência: Teorema de Ptolomeu

Basta tomarmos o diâmetro $\overline{AC} = 1$ e, consequentemente, os triângulo ADC e ABC serão retângulo, respectivamente, em $\widehat{D}$ e $\widehat{B}$. Chamemos $\hat{C} = \alpha$ e $\hat{C} = \beta$, daí teremos $\overline{AB} = sen\beta, \overline{BC} = cos\beta, \overline{CD} = cos\alpha, \overline{DA} = sen\alpha$. Por fim, da lei dos senos, no triângulo BCD, temos $\overline{BD} = sen(\alpha + \beta)$.

Problema 4: (JORNAL SIGMA) Sejam a, b e c reais positivos. Mostre que:

$$c\sqrt{a^2 - ab + b^2} + a\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq b\sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

Solução: Será que você já está imaginando que esta questão encontra-se ligeiramente ligada, por uma questão de estética, ao problema de número 2? Só há um pequeno detalhe, que fará toda a diferença, em cada radical aparece algo indesejável: os produtos ab, bc e ac. Lembre-se que a, b e c são números reis e positivos. Que figura plana poderia traduzir o seguinte número positivo $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$? Isso mesmo, estamos pensando na lei dos cossenos! Na figura abaixo, temos $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{BD} = b, \overline{CD} = x, \overline{DA} = y = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ e $\overline{AC} = w = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

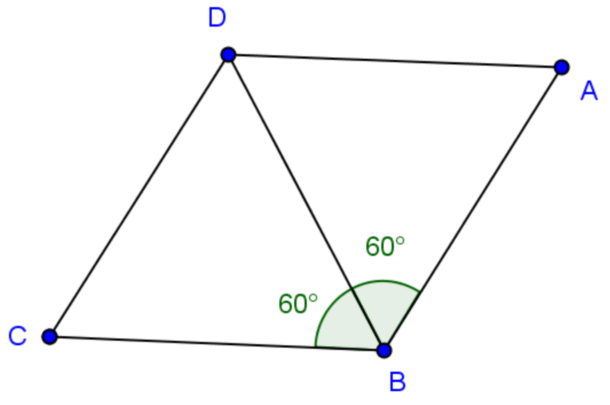


Figura 13: Quadrilátero ABCD

Por fim, a desigualdade de Ptolomeu(ver problema 03) para quadriláteros quaisquer nos garante que:

$$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$$

Ou seja,

$$c\sqrt{a^2 - ab + b^2} + a\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq b\sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Problema 5: (OBMEP) O semicírculo da figura tem centro *O* e diâmetro $\overline{PQ}$= 2 cm. O raio $\overline{OR}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$. Por um ponto qualquer *M* de $\overline{OR}$ traçasse a corda $\overline{AB}$ perpendicular a *OR.* Sejam *x* o comprimento de $\overline{RM}$, em cm, e *y* a área do quadrado de lado $\overline{AB}$, em cm^2. Qual dos gráficos abaixo expressa a relação entre *x* e *y*?

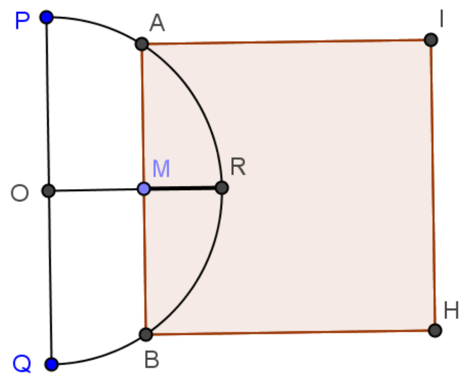
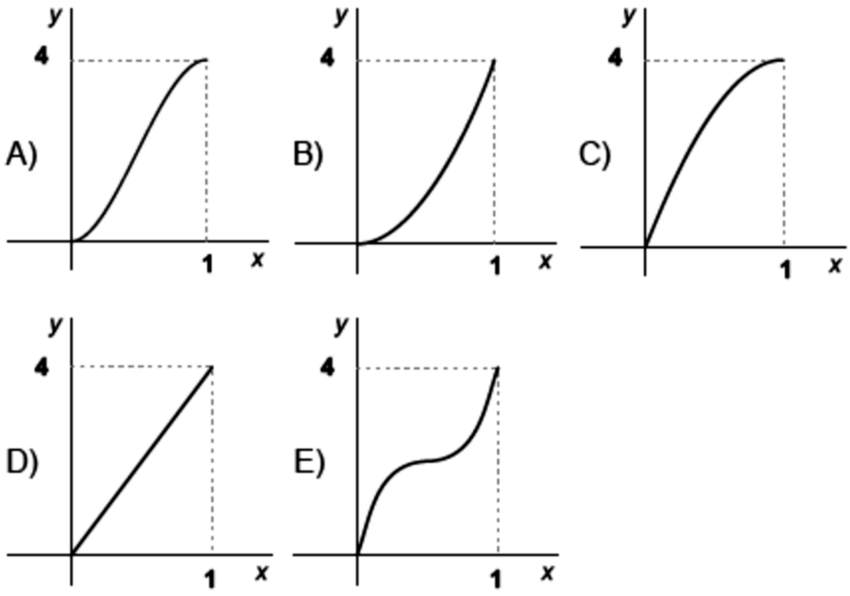


Figura 14: Quadrado e semicircunferência



Solução: O enunciado nos informa que $\overline{OR}$ é perpendicular $\overline{AB}$, isto sugere algo? Que tipo de triângulo é o triângulo AMO? Isso mesmo: é retângulo! Daí, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$(1-x)^2 + a^2 = 1 \quad (1)$$

Notemos que o triângulo OAB é isósceles e, portanto, $\overline{OM}$ que é perpendicular à base deste triângulo, também é mediana. Por fim, temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = a$ e $\overline{MR} = x$. Desenvolvendo (1), obtemos:

$$a^2 = -x^2 - 2x$$

Área do quadrado cujo lado mede $2a$, valerá então:

$$y = y(x) = -4x^2 - 8x$$

Esta última equação, claramente, é de uma função quadrática. Portanto a alternativa correta é a letra C.

Problema 6: Sejam x, y e z números reis positivos. Mostre que:

$$i)\ \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$ii)\ \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

$$iii)(\ x+y+z).\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$$

Solução de *(i)*: Inicialmente, lembremos que todo triângulo retângulo está inscrito numa semicircunferência. Vejamos a figura abaixo:

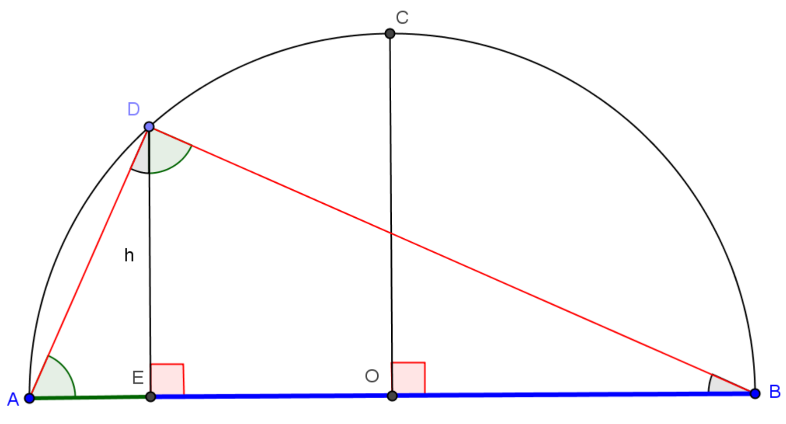


Figura 15: Semicircunferência e triângulo retângulo

À medida que o ponto D deslizar sobre a semicircunferência teremos sempre $\overline{DE} \leq \overline{OC}$, a igualdade só ocorrerá quando os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$ forem iguais. Por outro lado, vemos que os triângulos AED e DEB são semelhantes, se fizermos $\overline{AE} = x, \overline{BE} = y, \overline{OC} = \overline{AO} = \overline{BO} = R = \frac{x+y}{2}$ e $\overline{DE} = h$, obtemos:

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{y} \therefore h^2 = xy \Longrightarrow \overline{DE} = h = \sqrt{xy}$$

Ou seja, $\overline{OC} = R = \frac{x+y}{2} \geq h = \sqrt{xy}$.

Solução de *(ii)*: Esta demonstração exige muita criatividade, porém esta desigualdade (Desigualdade de Nesbitt) admite diversas demonstrações. Tomemos:

$$A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \qquad B = \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z} + \frac{x}{x+y}$$

e $\quad C = \frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{x+y}$

Note que $B + C = 3$. Por outro lado,

$$A + C = \frac{x+z}{y+z} + \frac{x+y}{x+z} + \frac{y+z}{x+y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x+z}{y+z} \cdot \frac{x+y}{x+z} \cdot \frac{y+z}{x+y}} = 3$$

Analogamente,

$$A + B = \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} \geq 3$$

Adicionando, membro a membro, as desigualdades acima obtemos:

$$2A + B + C \geq 6 \therefore 2A \geq 3 \Longrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Solução de *(iii)*: Aplicando a propriedade distributiva obtemos:

$$(\,x + y + z).\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 + 1 + 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} +$$
$$2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} = 9.$$

Problema 7: Sejam $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ as medidas dos lados de um hexágono. Sabendo que

$\overline{AB} = \overline{BC}, \overline{CD} = \overline{DE}$ e $\overline{EF} = \overline{FA}$. Prove que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{DA}} + \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}} \geq \frac{3}{2}$$

Solução: Veja que queremos provar uma desigualdade envolvendo as medidas dos lados de um polígono. Lembremos que o Teorema de Ptolomeu é para quadriláteros inscritíveis, neste caso usaremos a desigualdade, que é o caso geral deste teorema. Aplicando a desigualdade, sucessivamente, nos quadriláteros: ACEF, ABCE e ACDE obtemos, respectivamente, (i), (ii) e (iii):

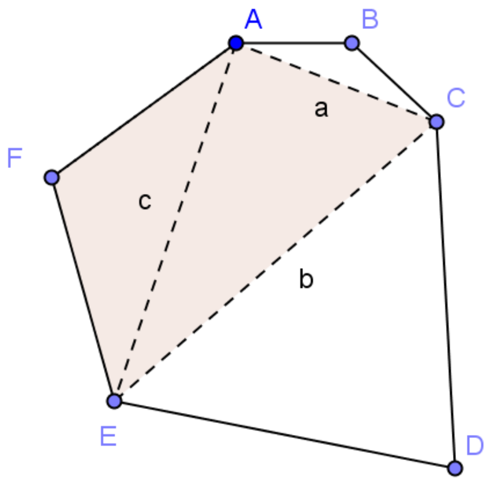


Figura 16: Hexágono ABCDEF

(i) $b.\overline{FA} + a.\overline{EF} \geq c.\overline{FC} \Rightarrow \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}} \geq \frac{c}{a+b}$

(ii) $b.\overline{AB} + c.\overline{BC} \geq a.\overline{BE} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \geq \frac{a}{b+c}$

(iii) $a.\overline{DE} + c.\overline{CD} \geq b.\overline{DA} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{DA}} \geq \frac{b}{a+c}$

Em seguida, pela desigualdade de Nesbitt, concluímos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{DA}} + \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}} \geq \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} \geq \frac{3}{2}$$

Problema8: (OBMEP-modificada) Na figura ao lado, as retas *r* e *s* são paralelas. O segmento *AB* é perpendicular a essas retas e o ponto *P*, nesse segmento, é tal que *AP* = 2 e *BP* = 1. O ponto *X* pertence à reta *r* e a medida do segmento *BX* é indicada por *x*. O ponto *Y* pertence à reta *s* e o triângulo *XPY* é retângulo em *P*.

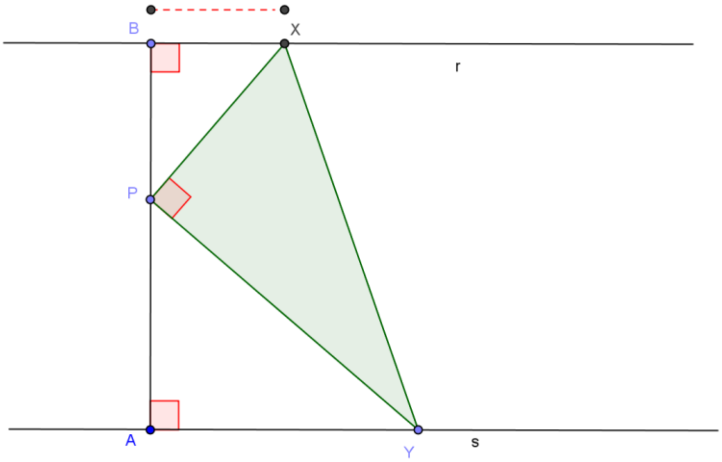


Figura 17: Retas paralelas e triângulos

a) Explique por que os triângulos *PAY* e *XBP* são semelhantes.
b) Calcule a área do triângulo *XPY* em função de *x*.
c) Determine o valor de *x* para o qual a área do triângulo *XPY* é mínima e calcule o valor dessa área.

Solução:

a) Chamemos os ângulos $\hat{P}$ e $\hat{P}$, respectivamente, de α e β. Notemos que $\alpha + \beta = 90°$. Assim teremos nos triângulos retângulos XBP e YAP os seguintes valores para os ângulos $\hat{X} = \hat{P} = \beta$ e $\hat{Y} = \hat{P} = \alpha$. Ficando provado que os triângulos PAY e XPB são semelhantes.
b) Da semelhança de triângulos encontrada no item anterior, temos:

$$\frac{y}{1} = \frac{2}{x}, \text{ onde } y = \overline{AY}$$

Portanto, a área do triângulo XPY será: $(XPY) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\right).\left(\sqrt{4+\frac{4}{x^2}}\right)$

c) Lembremos que $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$. Daí, temos:

$$(XPY) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\right).\left(\sqrt{4+\frac{4}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8+4(x^2+\frac{1}{x^2})}\right)$$

Portanto a área mínima é igual a 2.

Problema 9: (JORNAL SIGMA) Seja ABC um triângulo acutângulo e, H e O o ortocentro e o circuncentro de ABC, respectivamente. Mostre que:

$$\frac{(AHB)}{(AOB)} + \frac{(BHC)}{(BOC)} + \frac{(CHA)}{(COA)} \geq 3.$$

Solução: Este é um problema difícil. É bom lembrarmos se existe algum resultado entre o ortocentro(H) e o circuncentro(O) de um triângulo, pois ambos são citados no enunciado. Existe sim! um resultado que diz o seguinte: $\overline{AH} = 2\overline{OM}$(tente prová-lo!). Seja H_a o pé da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC. Defina H_b e H_c de modo análogo.

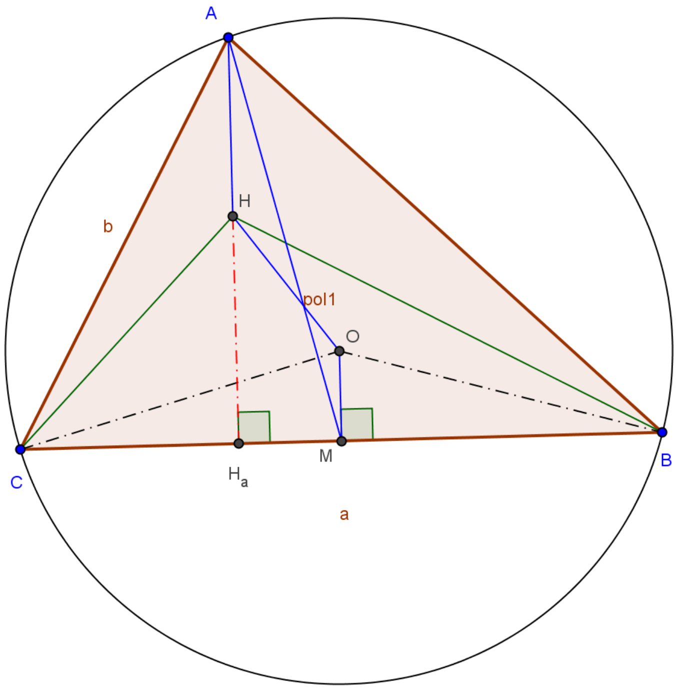


Figura 18: Circunferência, triângulo inscrito, ortocentro e circuncentro

Assim,

$$\frac{(BHC)}{(BOC)} = \frac{HH_a.BC}{OM.BC} = \frac{2HH_a}{HA},$$

Onde M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Por outro lado, usando o resultado demonstrado no teorema, obtemos

$$\frac{HH_a}{HA} = \frac{(BHC)}{(AHB) + (AHC)}$$

Analogamente,

$$\frac{HH_b}{HB} = \frac{(AHC)}{(BHC)+(AHB)} \quad \text{e} \quad \frac{HH_c}{HC} = \frac{(AHB)}{(BHC)+(AHC)}$$

Por fim,

$$\frac{(AHB)}{(AOB)}+\frac{(BHC)}{(BOC)}+\frac{(CHA)}{(COA)}=\frac{2HH_a}{HA}+\frac{2HH_b}{HB}+\frac{2HH_c}{HC}=2\left(\frac{(BHC)}{(AHB)+(AHC)}+\frac{(AHC)}{(BHC)+(AHB)}+\right.$$
$$\left.\frac{(AHB)}{(BHC)+(AHC)}\right)\geq 2.\frac{3}{2}=3$$

Note que na última passagem usamos a desigualdade de Nesbitt!

Problema 10: Sejam h_a, h_b e h_c as três alturas de uma triângulo ABC e r o raio da circunferência inscrita neste triângulo. Prove que:

a) $\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=1$ $\qquad$ $b)\ h_a+\ h_b+h_c\geq 9r$

Solução (a): Note que o inraio, no triângulo IBC, é perpendicular ao lado BC. Isso sugere que pensemos em áreas? Investiguemos, a partir da figura baixo:

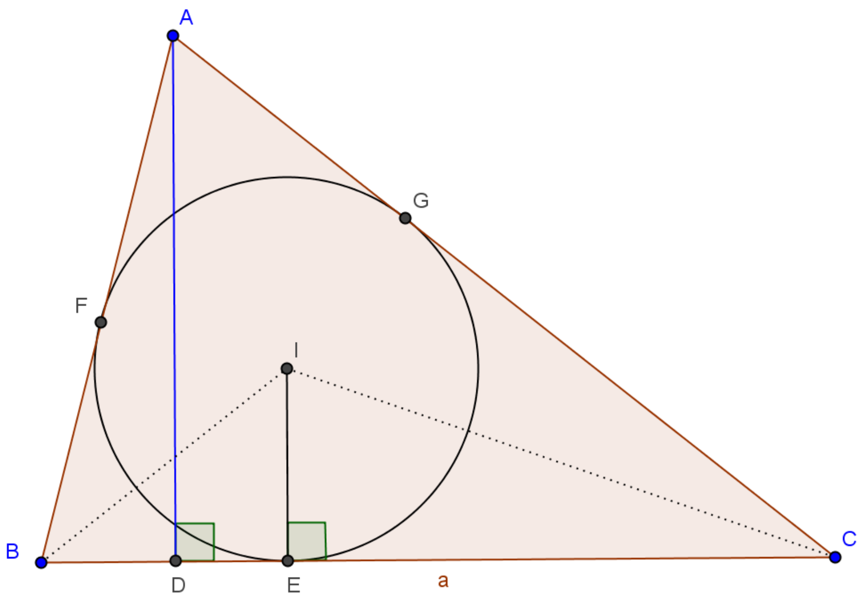


Figura 19: Triângulo, circunferência e inraio

A área do triângulo IBC é dada por: $(IBC) = \frac{ar}{2}$; enquanto a área do triângulo ABC é dada por $(ABC) = \frac{ah_a}{2}$. Observe que temos a razão $\frac{r}{h_a}$. Assim basta tomarmos:

$\frac{r}{h_a} = \frac{(IBC)}{(ABC)}$, analogamente para h_b e h_c temos $\frac{r}{h_b} = \frac{(IAC)}{(ABC)}$ e $\frac{r}{h_c} = \frac{(IBA)}{(ABC)}$, respectivamente. Portanto,

$$\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = \frac{(IBC)}{(ABC)} + \frac{(IAC)}{(ABC)} + \frac{(IBA)}{(ABC)} = \frac{(IBC)+(IAC)+(IBA)}{(ABC)} = 1$$

Solução (b): Do item anterior sabemos que $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. Veja o item (iii), do problema 7. E aí, já temos uma ideia? Exatamente! Vamos imitar a solução daquele item e usar o resultado do item a) obtido anteriormente:

$$\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).\ (h_a + h_b + h_c) \geq 9 \Longrightarrow h_a + h_b + h_c \geq 9r \ .$$

5 DISCUSSÃO EPISTEMOLÓGICA DAS SOLUÇÕES

Nesta seção expomos uma breve discussão acerca das soluções de cada problema anterior. Trata-se de compartilharmos nossa experiência, visto que nos últimos anos temos discutido estes problemas em cursos ministrados a alunos e professores do ensino básico, no Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Ceará- Campus Jaguaribe.

- **Sobre a Solução do Problema 1:**

Note que o problema é de álgebra, mas a resolução envolve uma ideia bastante simples da geometria plana: áreas de figuras simples, neste caso o retângulo. Observe também, que neste caso, o professor tem uma ótima oportunidade de enfatizar que a matemática parte sempre de alguns resultados aceitos *a priori*; neste caso, estamos falando da propriedade distributiva do produto em relação à soma. Sugerimos que este problema seja apresentado às turmas de 9° ano ou a qualquer turma do ensino médio. Esta solução é devida a Diofanto (acredita-se que esse matemático viveu no século III, da era cristã) Para um leitor interessado em mais detalhes acerca da história desta solução, sugerimos a leitura do capítulo 12 do belíssimo livro: *O Romance das Equações algébricas*, de Gilberto Gerardo Garbi.

- **Sobre a Solução do Problema 2:**

Num seminal artigo intitulado: “*10 mandamentos para professores de Matemática”*. G. Polya, nos diz que:

> ➢ *Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico (quinto mandamento).*
>
> ➢ *Faça-os aprender a dar palpites (sexto mandamento).*

> ➢ *Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível (nono mandamento).*
>
> ➢ *Sugira; não os faça engolir à força (décimo mandamento).*

Este tipo de problema é ideal para exercitar tais mandamentos. Também podemos mostrar aos estudantes, através desta solução, como é bem-vinda uma interpretação geométrica das equações do sistema dado, preparando-o desde já para o estudo de sistemas lineares no ensino médio. Este tipo de interpretação é ótimo para exercitarmos a criatividade, habilidade esta que deve ser cultivada por parte de quem pretende sentir o gosto da sensação maravilhosa que é resolver problemas que exigem algo mais do que a simples utilização de uma fórmula ou de um algoritmo.

- **Sobre a Solução do Problema 3:**

É natural que os estudantes mais experientes perguntem: é possível construir outras identidades trigonométricas, a partir deste teorema? E a resposta é: sim! Mais uma vez, o professor poderá alargar os horizontes, incluindo este teorema importantíssimo, que infelizmente é negligenciado pela maioria dos autores de livros didáticos adotados em nossas escolas!

- **Sobre a Solução do Problema 4:**

Este problema é muito difícil, mesmo para professores experientes. Temos que ter muita criatividade para imaginarmos tal construção geométrica; por isso indicamos que problemas como esse não sejam apresentados somente na hora da prova, isto levaria os estudantes e desenvolverem um sentimento de impotência, ao invés de se sentirem desfiados. Por outro lado, acreditamos que problemas desta natureza devem ser inseridos nas aulas através da resolução de problemas similares como os que estão sendo propostos neste trabalho.

- **Sobre a Solução do Problema 5:**

Perceba como esta questão é desafiadora. Nela o professor tem a possibilidade de mostrar que assuntos aparentemente disjuntos: Função quadrática e geometria plana, podem ser conectados e gerar um problema belíssimo. Mesmo antes de se falar em Geometria Analítica. Aqui também cabe a seguinte análise: não se aplica uma parte da matemática apenas a outras áreas do saber, podemos aplicar uma de suas partes, na busca da resolução de problemas de outra parte da mesma matemática. Afinal de contas não podemos achar menor o fato da matemática servi a *si mesma*!

- **Sobre a Solução do Problema 6:**

Um resultado envolvendo as médias aritmética e geométrica de dois números reais positivos, obtidos de um fato puramente geométrico. Admito que toda vez que apresento esta demonstração em aulas, tanto para estudantes quanto para professores, todos ficam profundamente encantados com a conexão entre álgebra e geometria, numa demonstração de um fato tão elementar. Infelizmente os livros didáticos ainda não enfatizam este resultado belíssimo! Este resultado pode ser apresentado em qualquer turma a partir do 9° ano.

- **Sobre a Solução do Problema 7:**

O estudante logo perceberá que a fração 3/2, sugere uma possível relação com a desigualdade de *Nesbitt*. Antes disso, veja que o problema trata de razão entre os lados de um polígono, o que nos leva a desigualdade de Ptolomeu. E desta forma, temos um belo exemplo de como desigualdades geométricas podem conectar geometria e álgebra em um único problema.

- **Sobre a Solução do Problema 8:**

A beleza deste problema vem do fato de encontrarmos conectados diversos assuntos do ensino médio. Álgebra e geometria aparecem unidas, dialogando uma com a outra, través da construção geométrica escolhida. A resolução lança mão de uma desigualdade elementar entre a média geométrica e aritmética de dois números.

- **Sobre a Solução do Problema 9:**

Eis um problema muito difícil. Sugerimos ao leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos no famoso “Truque das áreas”, procurar o belíssimo artigo de Bruno Holanda, intitulado “O truque das Áreas”. Este artigo encontra-se na quinta edição do JORNAL SIGMA, o mesmo pode ser encontrado no seguinte endereço eletrônico: https://www.dropbox.com/sh/gmos27wwfriuepv/mp5ytkxwRT

- **Sobre a Solução do Problema 10:**

Aqui temos um ponto máximo de nossa proposta: Geometria plana junto com desigualdades da álgebra. Para um estudo mais detalhado sobre desigualdade e problemas intrigantes de geometria, sugerimos os belíssimos trabalhos de Eduardo Landim Silva e Elion Souza da Silva cujos títulos são, respectivamente, *Desigualdades* entre *as médias Geométrica e Aritmética e de Cauchy-Schwarz* e *Problemas de Máximos e* Mínimos *e Desigualdades Geométricas* . Ambas podem ser encontradas, respectivamente, em

1. http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/391
2. http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/328

6 PROBLEMAS PROPOSTOS

No apêndice estarão as dicas para a solução de cada problema proposto. Sugerimos ao leitor que não procure ver as soluções antes de ter dedicado um tempo razoável para a tentativa de encontrar por si só as soluções de cada problema desta seção.

Problema 1. Resolva o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}=10 \\ x+y+z=8 \end{cases}$$

Sabendo que x, y e z são números reais positivos.

Problema 2. Sejam x, y e z reais positivos tais que:

$$\begin{cases} x^2+xy+\frac{y^2}{3}=25 \\ \frac{y^2}{3}+z^2=9 \\ z^2+zx+x^2=16 \end{cases}$$

Determine o valor de $xy+2yz+3zx$.

Problema 3: (RPM-75) - Uma vela queima completamente em três horas, e outra, da mesma altura, queima completamente em 4 horas. Depois de quanto, após o início do processo, uma vela terá o dobro d altura da outra?

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos diversos problemas intrigantes. Em todos eles, tentamos mostrar como é flexível a fronteira que limita um problema de álgebra; e como é desafiador pensarmos numa solução geométrica para problemas de álgebra, ou pelo menos, problemas com “aparência algébrica”. Vimos que desigualdades simples, como a que envolve a média aritmética e a média geométrica, podem ser bastante úteis quando queremos resolver problemas que envolvam desigualdades geométricas. Caberá ao professor, cada vez mais, inserir esse tipo de problema em suas aulas. Como fonte inesgotável sugerimos que sejam vistos os problemas propostos nas Olimpíadas de Matemática.

Não há dúvida quanto à importância do papel do professor, no processo de ensino e aprendizagem. Por isso, esperamos que este trabalho venha contribuir para que os jovens que estão iniciando suas carreiras no magistério possam encontrar, neste singelo trabalho, uma fonte desafiadora de problemas para suas aulas. Esperamos ter exibido as vantagens didáticas do hábito de estabelecer conexões entre as diferentes partes da Matemática Elementar.

Para um aprofundamento, das ideias aqui defendidas, sugerimos ao leitor que procure complementar seus estudos pesquisando nos sites:

1. Projeto Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI):

   http://poti.impa.br/

2. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP):

   http://www.obmep.org.br/

3. Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM):

   http://www.obm.org.br/opencms/

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMINHA, A. **Tópicos de Matemática Elementar: números reais (vol. 1)**. 1. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

__________ **Tópicos de Matemática Elementar: números reais (vol. 2)**. 1. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

CARVALHO, J.B.P.; ROQUE, T. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SMB, 2012.p.137.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo. Editora Paz e Terra, 1996.

GARBI, G. A **Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2006.

_______. **C.Q.D.: explicações e demonstrações sobe conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2010.

GARDINER, H. *et al*. **Inteligências múltiplas: Ao redor do mundo**. Tradução: Roberto Cataldo & Ronaldo Cataldo. Porto Alegre: Artmed, 2010. P.168-169.

KRULIK, S.; REYS, R.E. **A resolução de problemas na Matemática escolar**. Tradução de Higino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo. Editora Atual, 1997.

LIMA, E. *et al.* **Temas e Problemas elementares**. Sociedade Brasileira de Matemática. 2.ed. Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, E. **Matemática e Ensino**. Sociedade Brasileira de Matemática. 3.ed. Rio de Janeiro, 2007.

MANFRINO, R.B.; ORTEGA, J.A.G.; DELGDO, R.V. **Inequalities: A mathematical Olimpiad Approach**. 1 ed. Berlin: Birkäuser Verlag, 2009.

OLIVEIRA, M.;PINHEIRO, M. **Coleção Elementos de Matemática(vol.2)**.3 .ed., Fortaleza. Editora Vestseller, 2010.

TAO, T. **Como resolver problemas matemáticos: uma perspectiva pessoal**. Tradução de Paulo Ventura Sociedade Brasileira de Matemática. 1.ed. Rio de Janeiro,2013.

APÊNDICE

Sugestão para a resolução do problema 1:

Inicialmente, note que este problema é análogo ao segundo problema da lista anterior. Em seguida, tente imitar a ideia da solução daquele problema através da figura:

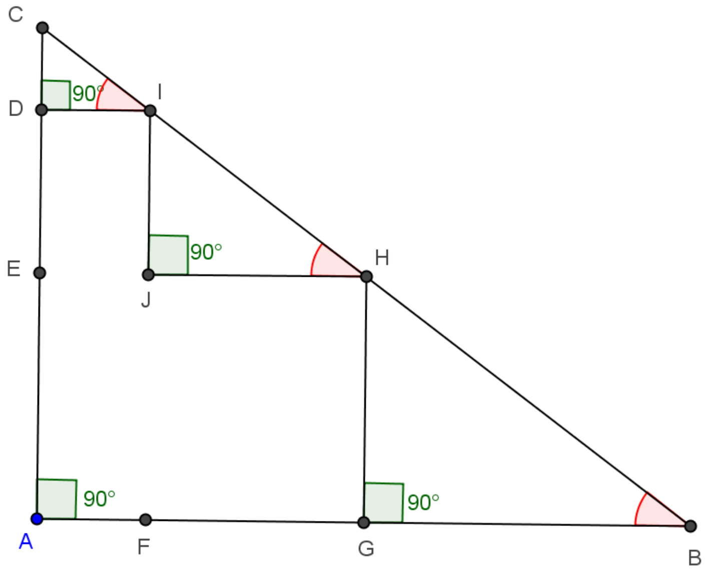


Figura 20: Triângulo retângulo ABC

Sugestão para a resolução do problema 2:

Use a figura abaixo e imite a ideia usada para resolver o problema 04 da lista anterior.

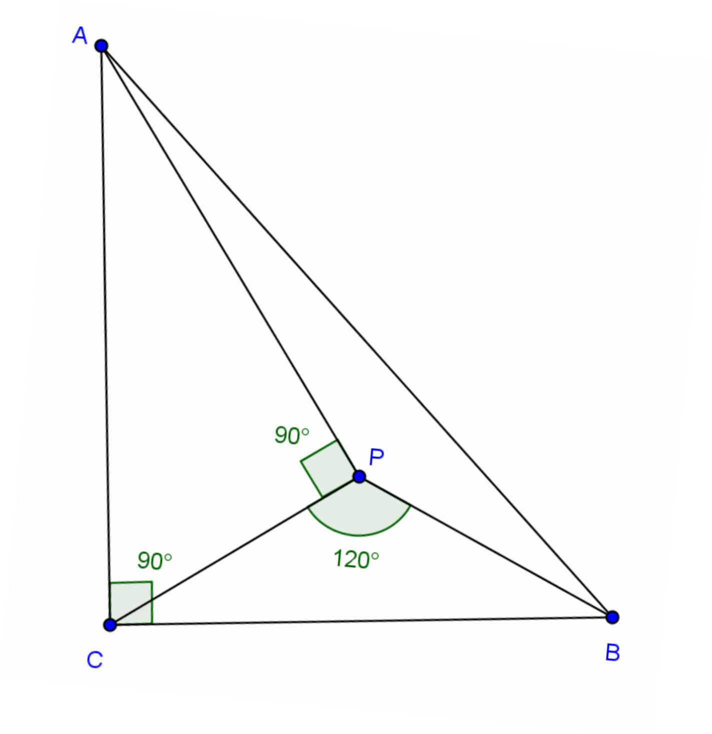


Figura 21: Triângulo retângulo ABC e ponto interior