



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Diego Araujo Frota

Estudo de um sistema supercondutor-ferromagneto:  
efeitos da aplicação de campo magnético e corrente  
elétrica

FORTALEZA

2016

Diego Araujo Frota

# **Estudo de um sistema supercondutor-ferromagneto: efeitos da aplicação de campo magnético e corrente elétrica**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador:

Wandemberg Paiva Ferreira

Co-orientador:

Milorad Vlado Milošević

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

---

F961e Frota, Diego Araujo  
Estudo de um supercondutor-ferromagneto: efeitos da aplicação de campo magnético e corrente elétrica. / Diego Araujo Frota. - Fortaleza, 2016.

88 f.:il. color. enc.; 30 cm.

Orientação: Prof. Dr. Wandemberg Paiva Ferreira.

Coorientação: Prof. Dr. Milorad Milošević.

Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

1. Física da Matéria Condensada. 2. Vórtices. 3. Supercondutividade. 4. Híbridos SF.

I. Título.

---

CDD 630.41

Diego Araujo Frota

# Estudo de um sistema supercondutor-ferromagneto: efeitos da aplicação de campo magnético e corrente elétrica

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 27/01/2016.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Wandemberg Paiva Ferreira (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Milorad Vlado Milošević (Co-orientador)  
Universiteit Antwerpen (UA)



---

Prof. Dr. André Auto Moreira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ascânio Dias Araujo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia  
Afro-Brasileira (UNILAB)

*À Neinha e Maria,  
in memorian*

## *Agradecimentos*

Inicialmente, gostaria de deixar registrado aqui, o meu imenso agradecimento aos professores Wandemberg Paiva e Milorad Milošević. Ambos me receberam em seus respectivos grupos de pesquisa, aqui na UFC, em Fortaleza, e na UA, na Antuérpia me dando todo o suporte, atenção e paciência para a realização do meu trabalho de doutorado. Sou, realmente, muito grato à ambos, pois aceitaram me orientar mesmo com todas as dificuldades que tinha à época, quando demandaria deles muito trabalho (além do já árduo trabalho de orientação) para que eu pudesse realizar e concluir minha pesquisa.

Ao professor Andrey Chaves pelas frutíferas discussões, paciência e orientação no decorrer do meu trabalho de tese. Aos professores Gil de Aquino e François Peeters que, como líderes dos grupos de pesquisa em que estive, me receberam muito cordialmente e deram todo o apoio para a realização desta tese.

Ao professor Antônio Gomes de Sousa Filho, à época coordenador do programa de pós-graduação em física, pelo incentivo e empenho em prol da pós-graduação e dos estudantes do curso de Física no decorrer de seu mandato; Ao atual coordenador do programa de pós-graduação em física o professor Alejandro Pedro Ayala, que tenha um excelente período a frente da coordenação do programa de pós-graduação; Aos professores Paulo de Tarso, Euclimar, Jeanlex e Murilo pelas contribuições à minha formação no mestrado e doutorado e às funcionárias da pós-graduação Rejane e Ana Cleide pelo suporte burocrático quando necessário.

Aos amigos do departamento de física da UFC, Cesar Sampaio, César Menezes, Davi Dantas, Davi Figueiredo, Danilo, Diego Camarão, Diego Rabelo, Eduardo, Francisco Leandro, Heitor, Hygor Piaget, Igor Rochaid, João Philipe, Jorge André, Jorge Coelho (Capuan), Jorge Luiz, José Euclides, José Robson, Leandro Pitombeira, Levi Leite, Marceliano Oliveira, Nádia Ferreira, Rocicler Holanda e Vagner Bessa. Aos meus amigos lá da UA, Donjan, Lucas, Victor e Rebeca.

À minha família, Ana Paula, Pedrinho, Maria Letícia e Marianinha, muito obrigado por toda a compreensão de vocês. Vocês são a minha maior motivação. À minha mãe Margarida, minha madrinha Fátima, minha sogra Fransquinha, à minha prima Valéria e seu pai, sr. Ozani e ao meu primo Roberto pelo amor e incentivo; Aos professores e grandes mestres Antônio José e Antônio Siqueira, pela minha formação e apoio durante toda a graduação.

À CAPES pela bolsa concedida durante o doutorado.

“Let me tell you something you already know. The world ain’t all sunshine and rainbows. It’s a very mean and nasty place, and I don’t care how tough you are, it will beat you to your knees and keep you there permanently if you let it. You, me, or nobody is gonna hit as hard as life. But it ain’t about how hard you hit. It’s about how hard you can get hit and keep moving forward; how much you can take and keep moving forward. That’s how winning is done!”

(Rocky Balboa)

## *Resumo*

A partir da solução numérica das equações de Ginzburg-Landau, estudamos o estado supercondutor de um filme fino supercondutor sob uma camada ferromagnética, separados por um óxido isolante, na presença de campo magnético ou corrente elétrica aplicados. O ferromagneto considerado é organizado em uma série de domínios paralelos com magnetização oposta, perpendicular ao plano do ferromagneto, e suficientemente forte para induzir pares vórtice-antivórtice no supercondutor subjacente, quando na ausência de campo magnético aplicado. Pares vórtice-antivórtice se auto-organizam em um rico conjunto de configurações, algumas das quais não apresentam correspondência com a periodicidade do filme ferromagnético. A variedade das possíveis configurações é aumentada pela aplicação de campo magnético externo, caso em que vórtices adicionais podem diminuir a energia do sistema pela aniquilação dos antivórtices, que estão sob os domínios negativos do ferromagneto, ou diminuindo sua própria energia após se posicionarem sob domínios positivos do ferromagneto. Como consequência, o reordenamento de vórtices-antivórtices bem como a evolução da energia do sistema são não-triviais em função do aumento da intensidade do campo magnético externo. Por fim, revelamos efeitos curiosos da corrente elétrica *dc* aplicada sobre as configurações de pares vórtice-antivórtice, uma vez que a força de Lorentz resultante tem direção oposta para vórtices e antivórtices, enquanto que a direção da corrente aplicada em relação aos domínios ferromagnéticos é de importância crucial para a interação das correntes de Meissner e aplicada, bem como a dinâmica de vórtice-antivórtice resultante - ambas as quais estão refletidas na anisotropia da corrente crítica do sistema.

# *Abstract*

Using advanced Ginzburg-Landau simulations, we study the superconducting state of a thin superconducting film under a ferromagnetic layer, separated by an insulating oxide, in applied external magnetic field and electric current. The taken uniaxial ferromagnet is organized into a series of parallel domains with alternating polarization of out-of-plane magnetization, sufficiently strong to induce vortex-antivortex pairs in the underlying superconductor in absence of other magnetic field. We show the organization of such vortex-antivortex matter into rich configurations, some of which are not matching the periodicity of the ferromagnetic film. The variety of possible configurations is enhanced by applied homogeneous magnetic field, where additional vortices in the superconductor may lower the energy of the system by either annihilating the present antivortices under negative ferromagnetic domains, or by lowering their own energy after positioning under positive ferromagnetic domains. As a consequence, both the vortex-antivortex reordering in increasing external field and the evolution of the energy of the system are highly nontrivial. Finally, we reveal the very interesting effects of applied  $dc$  electric current on the vortex-antivortex configurations, since resulting Lorentzian force has opposite direction for vortices and antivortices, while direction of the applied current with respect to ferromagnetic domains is of crucial importance for the interaction of the applied and the Meissner current, as well as the consequent vortex-antivortex dynamics - both of which are reflected in the anisotropic critical current of the system.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução a supercondutividade . . . . .	2
1.2	A teoria de London . . . . .	5
1.3	A teoria de Ginzburg-Landau . . . . .	9
1.3.1	Derivação da primeira equação de Ginzburg-Landau e da condição de contorno geral . . . . .	11
1.3.2	Derivação da segunda equação de Ginzburg-Landau . . . . .	14
1.4	Comprimentos característicos . . . . .	16
1.5	Tipos de supercondutores . . . . .	20
1.6	Teoria BCS . . . . .	22
1.7	Matéria de vórtices . . . . .	24
1.7.1	Quantização do fluxo . . . . .	24
1.7.2	A estrutura de um vórtice . . . . .	25
1.7.3	Rede de vórtices - considerações gerais . . . . .	27
1.7.4	Fixação ('pinning') do fluxo . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Método Numérico</b>	<b>31</b>
2.1	As equações de GL adimensionais e a forma dependente do tempo da primeira equação . . . . .	31
2.2	Método das variáveis de ligação . . . . .	32
2.3	Discretização da equação de TDGL e da supercorrente . . . . .	33
2.3.1	Expressão para a energia livre . . . . .	37
2.4	Condições de contorno . . . . .	38
2.4.1	Filme ferromagnético: modelo . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>41</b>
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	Modelo teórico . . . . .	43
3.3	Matéria de vórtice-antivórtice na ausência de campo aplicado e corrente . . . . .	45
3.4	Comportamento dos pares vórtice-antivórtice na presença de um campo magnético externo homogêneo . . . . .	49
3.5	Dinâmica de vórtice-antivórtice e a corrente crítica anisotrópica . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>59</b>

A	O Potencial Vetor	61
B	A transformada de Fourier da segunda equação de GL	64
	Referências Bibliográficas	67



## *Lista de Figuras*

1	Diagrama representando os parâmetros críticos do estado supercondutor e a sua possível expansão. Figura retirada de [1]. . . . .	1
2	Resistência em ohms de uma amostra de mercúrio em função da temperatura em kelvins, obtida por Onnes [2]. Figura retirada de [3]. . . . .	3
3	Efeito Meissner: um material apresenta comportamento normal à temperatura $T > T_c$ , no qual o campo magnético atravessa a amostra, e passa a repelir o campo magnético, no estado supercondutor, quando $T < T_c$ . . . . .	4
4	Ilustração da troca de um fônon entre dois elétrons que dá origem à sua interação atrativa na teoria BCS. O elétron $k_1$ emite um fônon que é absorvido por um segundo elétron $k_2$ . Figura retirada de [4], com o autógrafo de Leon Cooper, um dos autores da teoria. . . . .	5
5	Figura ilustrando o efeito do resfriamento de uma amostra supercondutora (à esquerda) e de um condutor perfeito (à direita) inicialmente a campo magnético aplicado zero [effect of zero field cooling (ZFC)] (a) e (c), respectivamente; e do resfriamento quando as amostras, inicialmente, estão inicialmente submetidas a um campo magnético aplicado [field cooling (FC)] para (b) o supercondutor e (d) o condutor perfeito. Figura retirada de [5]. . . . .	7
6	Comportamento da densidade de energia para o caso sem campos e gradientes. Na figura (a) $\alpha > 0$ , temos o estado normal e na figura (b) $\alpha < 0$ , temos o estado supercondutor. . . . .	10
7	Ilustração da interface supercondutor/ metal, mostrando a dependência espacial do parâmetro de ordem $ \Psi $ , onde $b$ é o comprimento de extrapolação [1]. . . . .	13
8	Distribuição espacial do parâmetro de ordem $\psi$ e do campo magnético $\vec{H}$ na interface supercondutor/ metal normal [1]. . . . .	16
9	Penetração de um campo magnético aplicado $\vec{H}_a$ em um supercondutor semi-infinito. O comprimento de penetração $\lambda$ é definido como a distância ao longo da qual o campo diminui para um valor igual ao valor original dividido por $e$ . Em supercondutores puros, $\lambda$ é da ordem de $500 \overset{\circ}{\text{Å}}$ [3]. . . . .	17
10	Estrutura simplificada de um vórtice, em que é mostrado o crescimento da densidade de elétrons supercondutores $n_s$ e o comprimento de coerência $\xi$ [6]. . . . .	18
11	Diagrama de fase $H - T$ , para (a) supercondutores do tipo-I, (b) para supercondutores do tipo-II e (c) supercondutores do tipo-1.5. Figura adaptada de [7]. . . . .	19

12	Comparação entre supercondutores do tipo-I e do tipo-II, com o mesmo campo crítico termodinâmico $H_c$ . No supercondutor do tipo II, o custo de energia diamagnético para manter a supercondutividade é menor que no supercondutor do tipo I, o que permite o campo $H_{c2}$ ser muito maior que o campo $H_c$ . . . . .	20
13	Distribuição de vórtices observado por Hess et al. comprovando a predição de Abrikosov. Figura retirada de [8]. . . . .	21
14	Magnetização como uma função do campo aplicado para (a) supercondutores do tipo I e (b) supercondutores do tipo II. Figura retirada de [9]. . . . .	22
15	Figura ilustrando a estrutura espacial de um único vórtice. A esquerda é mostrado a densidade de corrente $j(r)$ que é zero no centro do vórtice e, de uma distância $\approx \xi$ , tem valor diferente de zero e decai novamente a zero através de um comprimento do ordem de $\lambda$ , comprimento de penetração. A direita é mostrado a distribuição radial do campo magnético local $h(r)$ e da densidade de elétrons supercondutores $n_{sc}(r)$ . Figura retirada de [7]. . . . .	26
16	Diagrama esquemático de uma rede triangular de vórtices com um período $a_v$ . Figura retirada de [7]. . . . .	27
17	Estrutura de um estado intermediário, dividido em faixas normais e supercondutoras (linhas escuras), em um disco de cristal de Pb a 5K obtido por técnica óptico-magnética. A amostra da esquerda foi obtida após o aumento do campo magnético aplicado com a amostra inicialmente resfriada a campo zero (ZFC), enquanto que a amostra da direita foi obtida com o decréscimo do campo magnético. Figura retirada de [10]. . . . .	28
18	Esquema do método das variáveis de ligação para uma rede quadrada, com espaçamento da grade $a_x$ , na direção de $x$ e $a_y$ , na direção de $y$ , como o usado nas simulações. Figura retirada de [9]. . . . .	34
19	Grid de dipolos magnéticos, com domínios adjacentes de polaridade magnética alternada representando o filme ferromagnético considerado nas simulações. . . . .	40
20	Visão esquemática de um filme supercondutor (com espessura $d$ ) com uma camada de óxido em cima (espessura $l$ ), sob um filme ferromagnético (espessura $D$ ) com uma magnetização $\vec{M}$ de orientação perpendicular ao filme e sentido alternado em domínios paralelos cujo o comprimento é $w$ . . . . .	43
21	Perfil espacial da componente $z$ do campo magnético não-homogêneo do filme ferromagnético considerado (largura dos domínio 470 nm, espessura 1 $\mu\text{m}$ ), no centro e na superfície do filme supercondutor subjacente (espessura 200 nm), separado por um óxido de 10 nm de espessura. A magnitude do campo em Oe é obtida pela direta substituição do valor considerado de $M$ em $\text{emu}/\text{cm}^3$ . . . . .	46

22	Energia livre de Gibbs do filme supercondutor ( $d = 200$ nm, $\xi(0) = 12$ nm, $T/T_c = 0.674$ , $\kappa = 5.1$ ) com um óxido ( $l = 10$ nm) e um filme ferromagnético com domínios alternados em seu topo ( $D = 1$ $\mu$ m), como uma função da magnetização do ferromagneto. (a)-(f) mostra a densidade de pares de Cooper de estados fundamentais de algumas configurações de vórtice-antivórtice (V-AV). (g)-(j) mostra a densidade de pares de Cooper de diversos estados estáveis, mas de energia maiores, com um número diferente de pares de V-AV em diferentes paredes de domínios. . . . .	47
23	Energia livre de Gibbs de um filme supercondutor como uma função do campo magnético externo para diferentes valores de magnetização da camada ferromagnética. O número correspondente de fluxo quântico na região de simulação para cada valor de campo magnético é indicado no eixo superior. . . . .	49
24	Densidade das correntes de Meissner no filme supercondutor sob uma camada ferromagnética de magnetização $M = 20$ G, na ausência de campo magnético externo [com a indicação vetorial das correntes de Meissner induzidas inclusa, painel (a)], e para campos aplicados homogêneos correspondendo aos fluxos magnéticos de $\Phi/\Phi_0 = 2$ (b), 5 (c) e 11 (d). . . . .	51
25	Resposta magnética de um filme supercondutor sob um filme ferromagnético $M = 50$ G, na presença de um campo magnético externo correspondendo a adição de fluxo (a) $\Phi/\Phi_0 = 5$ , (b) $\Phi/\Phi_0 = 8$ , (c) $\Phi/\Phi_0 = 17$ e (d) $\Phi/\Phi_0 = 43$ (conforme o diagrama de energia na Fig. [23]). As linhas brancas indicam as paredes dos domínio ferromagnéticos. . . . .	52
26	Corrente crítica do filme supercondutor versus o ângulo (direção) da corrente aplicada $\theta$ , para diferentes valores de magnetização $M$ do filme ferromagnético na bicamada. $\theta = 0$ denota a orientação da corrente aplicada perpendicularmente as paredes de domínio e $\theta = \pi/2$ a orientação da corrente aplicada paralelamente as paredes de domínios. Os símbolos abertos mostram a corrente crítica obtida após sua aplicação a uma amostra inicialmente no estado Meissner, e os símbolos preenchidos a corrente crítica obtida quando aplicada à amostra inicialmente na configuração, com vórtices e antivórtices, de estado fundamental para um dado $M$ . . . . .	55
27	O perfil da magnitude da corrente total ao longo da linha de $y = 0$ do supercondutor sob o filme ferromagnético com magnetização $M = 15$ G (sem qualquer par de vórtice-antivórtice presente na amostra), para os ângulos $\theta$ indicados da corrente aplicada. . . . .	56

28	Diagrama de energia livre e as correspondentes densidades de pares de Cooper do estado supercondutor sob um filme ferromagnético com $M = 50$ G, como uma função da corrente externa aplicada na direção $\theta = 0.58$ rad, mostrando mudanças subtas nas configurações de vórtice-antivórtice causadas pela corrente aplicada e sua interação com as correntes Meissner. A linha sólida mostra a sequência de estados para a um aumento gradual, a partir de zero, da corrente aplicada. . . . .	57
29	Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ na direção $z$ corresponde a um potencial vetor que gira em torno do eixo $z$ . . . . .	62
30	Função degrau $\Pi(z, -d/2, d/2)$ utilizada na definição da densidade de corrente na direção $z$ . . . . .	65

# 1 Introdução

Após o experimento revolucionário de Onnes em 1911 [2], várias aplicações práticas para a supercondutividade foram propostas [11]. Entretanto, devido a fragilidade do estado supercondutor - ele é destruído quando o campo magnético  $H$ , a densidade de corrente  $j$  ou a temperatura  $T$  excedem seus correspondentes valores críticos - as possibilidades de aplicações práticas dos materiais supercondutores estão limitadas por seus parâmetros críticos. Esse conjunto de parâmetros define uma superfície crítica que separa o estado supercondutor do estado normal no espaço definido por ele [7], conforme pode ser visto no diagrama da Fig. 1. O estado de resistência zero encontra-se abaixo da superfície crítica, portanto, um dos principais objetivos da física e da ciência dos materiais supercondutores, é ampliar o máximo possível os limites definidos pela superfície crítica (Fig. 1). As aplicações comerciais dos supercondutores tornaram-se possíveis na década de 60, com o desenvolvimento de supercondutores baseados em nióbio (Nb) [12], mas mesmo com todo o progresso alcançado, desafios como custo e refrigeração, por exemplo, têm estimulado a pesquisa em supercondutividade. Muito esforço tem sido dedicado a busca por novos materiais supercondutores e ao desenvolvimento de sistemas híbridos com altos parâmetros críticos[13, 14, 15].

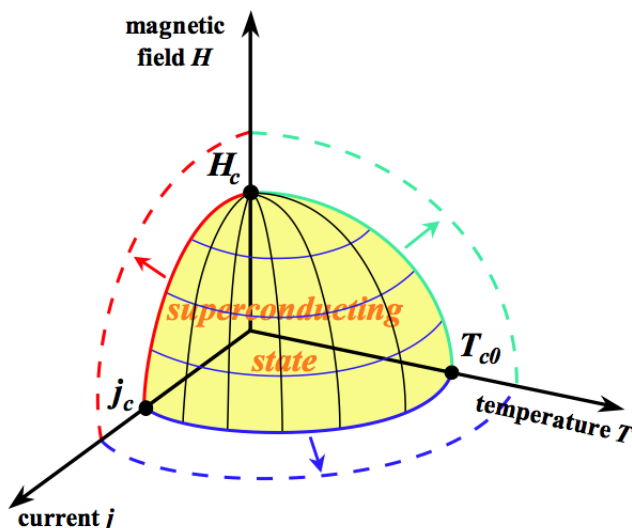


Figura 1: Diagrama representando os parâmetros críticos do estado supercondutor e a sua possível expansão. Figura retirada de [1].

Daremos enfoque ao estudo do estado supercondutor em supercondutores do tipo-II - os quais possuem  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  e permitem a passagem de fluxo magnético, com a criação de vórtices, através de sua superfície - para os quais, a fixação de vórtices tem

sido amplamente estudada por seu grande potencial em aplicações para a ampliação da densidade de corrente elétrica crítica que estes materiais podem suportar [13]. Em geral, as estruturas de fixação baseadas em defeitos, que são introduzidos nos supercondutores ou são parte deles por conta de impurezas, não têm um potencial de aprisionamento forte o suficiente para impedir o movimento dos vórtices causado pela força de Lorentz e por flutuações térmicas [16]. Entretanto, a fixação por meios magnéticos, como pontos ou filmes ferromagnéticos, são mais intensas que as não magnéticas. Além do mais, pontos ferromagnéticos com alta magnetização e o campo não homogêneo dos filmes ferromagnéticos podem induzir a criação de vórtices [17, 18] e a formação espontânea de pares de vórtice e anti vórtice (V-AV) [19, 20, 21, 22, 16], respectivamente. Portanto, além do efeito de fixação, um rico comportamento dinâmico dos vórtices surge nos elementos híbridos, o que leva a diversas possibilidades de ampliação da corrente crítica nos supercondutores.

Híbridos supercondutor-ferromagneto têm sido intensamente investigados por oferecerem diversas possibilidades para o controle da supercondutividade em nano escala [23, 24, 22, 16, 25, 21]. Nesta tese, desenvolvemos a teoria e os métodos necessários para a descrição da supercondutividade nestes sistemas híbridos, acoplados magneticamente, na qual, temos como objetivo principal investigar como essa bicamada de supercondutor e ferromagneto se comporta sob a influência de mecanismos externos, como um campo magnético e corrente elétrica aplicados, e o papel desempenhado pela matéria de vórtices formada no supercondutor. Assim, temos a possibilidade de ter um melhor entendimento da influência dos parâmetros críticos no estado supercondutor e como eles podem ser melhorados.

## 1.1 Introdução a supercondutividade

A descoberta do fenômeno da supercondutividade é creditada a um dos pioneiros da criogenia, quem pela primeira vez conseguiu liquefazer o hélio, Heike Kamerlingh Onnes em 1911, em Leiden na Holanda [11]. Com a sua descoberta, diversas possibilidades de aplicações práticas foram propostas [11, 26, 27]. Para citar algumas, têm-se os fios supercondutores, para o transporte de energia elétrica; magnetos supercondutores (solenóides para geração de campos magnéticos elevados), utilizados em equipamentos de ressonância nuclear magnética; armazenamento de energia magnética por supercondutividade; levitação magnética, que pode ser utilizada em veículos de levitação magnética; e em dispositivos eletrônicos para serem empregados em circuitos eletrônicos [26, 28].

Onnes e seu grupo, investigaram as propriedades elétricas de várias substâncias resfriadas pelo hélio líquido, a uma temperatura extremamente baixa de 4,2 K (-268,95°C). Eles notaram que a resistividade do mercúrio (Fig. 2), e também de alguns outros metais

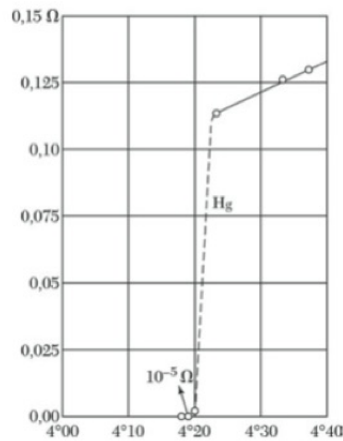


Figura 2: Resistência em ohms de uma amostra de mercúrio em função da temperatura em kelvins, obtida por Onnes [2]. Figura retirada de [3].

como o chumbo e o estanho, caíam abruptamente a valores tão pequenos que superavam a resolução de seus instrumentos [1, 3, 9]. Tal fenômeno foi chamado pela primeira vez por Onnes de supra-condutividade em sua publicação que reportava os resultados obtidos por seu grupo, conforme Ref. [2]. Foi descoberto, portanto, duas fases distintas destes materiais: o estado normal e o estado supercondutor.

No estado supercondutor, a resistividade elétrica para corrente contínua é zero ou, em outras palavras, a condutividade é infinita. Uma das evidências mais convincentes de que a resistividade  $\rho = 0$ , é a observação de correntes persistentes. Os cientistas já observaram correntes circularem sem atenuação em anéis supercondutores durante mais de um ano [3, 29]. J. File e R. G. Mills [30], estudaram o decaimento de supercorrentes em um solenóide usando métodos de ressonância magnética nuclear para medir o campo associado a supercorrente e concluíram que o tempo de decaimento da supercorrente não era menor do que 100000 anos [3].

Apesar de notável, um supercondutor não é apenas um condutor perfeito. Ele também apresenta um diamagnetismo perfeito. Essa característica magnética expulsa o campo magnético do interior do supercondutor quando ele é resfriado abaixo da temperatura crítica e o campo magnético o qual está submetido não excede um determinado valor crítico. Tal propriedade não pode ser explicada, simplesmente, considerando o supercondutor como um condutor normal cuja resistividade é zero, pois, ao invés de expelir o campo do interior da amostra, a corrente induzida aprisionaria o fluxo de campo em seu interior. Este efeito é conhecido como efeito Meissner-Ochsenfeld, descoberto em 1933 [31], e a prova fundamental de que a supercondutividade ocorre em um dado material é a sua demonstração [32]. Em outras palavras, no estado normal, as linhas de fluxo magnético podem atravessar o material, em contraste, no estado supercondutor, as linhas de fluxo não podem existir dentro da região supercondutora, conforme ilustrado na Fig. 3, exceto em camadas muito finas da superfície, com uma profundidade de penetração  $\lambda$ .

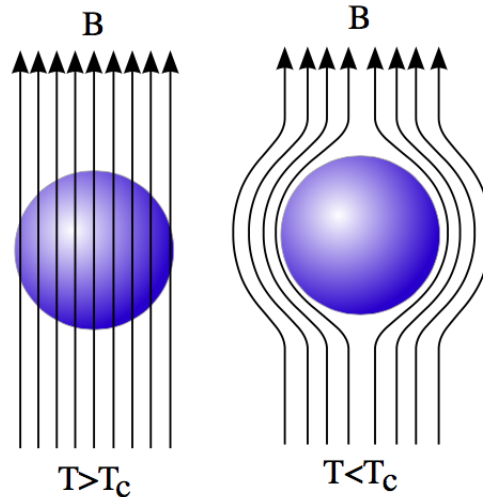


Figura 3: Efeito Meissner: um material apresenta comportamento normal à temperatura  $T > T_c$ , no qual o campo magnético atravessa a amostra, e passa a repelir o campo magnético, no estado supercondutor, quando  $T < T_c$ .

Este efeito faz com que correntes de blindagem fluam e produzam um campo magnético no interior do supercondutor que irão balancear o campo magnético aplicado que, em outro caso, iria penetrar o material.

Importante mencionar que, somente depois de vinte anos da descoberta da supercondutividade, em 1935, surgiu a primeira teoria fenomenológica que descrevia as duas principais propriedades dos supercondutores: a condutividade perfeita e o efeito Meissner, desenvolvida pelos irmãos London [33]. Esta teoria também demonstra que o campo magnético decai no interior do supercondutor até uma distância característica conhecida como comprimento de penetração  $\lambda$ . Apesar de macroscópica, a teoria dos irmãos London se mostrou útil em descrever o comportamento do estado supercondutor e do estado de vórtices em supercondutores do tipo-II extremos ( $\kappa \gg 1$ ) [29, 7, 34, 35], apesar de tratá-los como pontos e não levarem em conta o seu tamanho e estrutura interna.

Em 1950, Vitaly Ginzburg e Lev Landau, propuseram uma teoria fenomenológica para a supercondutividade [36], onde introduziram também o conceito de comprimento de coerência  $\xi$ , relacionado com a variação espacial do parâmetro de ordem. Esta teoria teve grande sucesso em explicar as propriedades macroscópicas dos supercondutores. Pode-se destacar, em particular, a predição feita por Abrikosov, utilizando a teoria de GL, da existência de duas categorias de supercondutores: os de tipo-I e de tipo-II, e descrito, ainda, a existência de um estado misto nos supercondutores do tipo-II [37].

Em 1957, uma teoria microscópica para o mecanismo que dá origem a supercondutividade foi proposta por Bardeen, Cooper e Schrieffer [38], a teoria BCS. Ela consiste da introdução de uma interação atrativa entre dois elétrons que, a priori, deveriam repelir-se entre si. Na maioria dos materiais, essa interação atrativa vem da troca



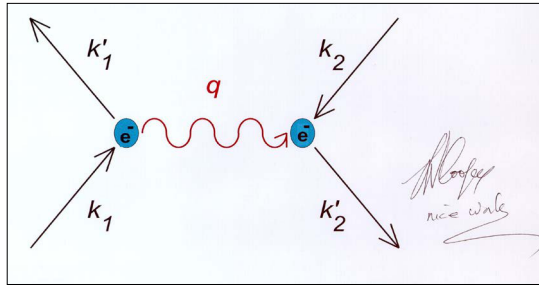


Figura 4: Ilustração da troca de um fônon entre dois elétrons que dá origem à sua interação atrativa na teoria BCS. O elétron  $k_1$  emite um fônon que é absorvido por um segundo elétron  $k_2$ . Figura retirada de [4], com o autógrafo de Leon Cooper, um dos autores da teoria.

de fônons, onde, para um par, um elétron ao mudar sua trajetória, devido a interação com a rede cristalina, emite um fônon e um outro elétron absorve esse fônon mudando também sua trajetória. Portanto, esse processo de troca de fônon, cria um estado correlacionado entre esse dois elétrons que, de outra forma, estariam movimentando-se de forma independente um do outro [4], tal par de elétrons é chamado de par de Cooper (Fig. 4). Essa teoria assume que os elétrons assim ligados carregam a supercorrente e um ‘gap’ de energia é criado entre os estados normal e supercondutor [5]. Por este trabalho, Bardeen, Cooper e Schrieffer receberam o prêmio nobel de física de 1972.

Maiores detalhes sobre as teorias acima mencionadas serão dados nas seções que seguem.

## 1.2 A teoria de London

As duas características que definem a supercondutividade, condutividade e o diamagnetismo perfeitos, não podem ser explicadas por uma teoria não quântica. Para um condutor perfeito, tem-se que a resistividade do material  $\rho \rightarrow 0$ . Levando em conta que  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ , pela condição de condutividade perfeita, temos que o campo elétrico  $\vec{E}$  deve ser zero. Isso implica, pela lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, \quad (1.1)$$

que  $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ , ou seja, que uma amostra submetida a um campo magnético deve aprisioná-lo. Um exemplo disso é o plasma, que é um ótimo condutor e aprisiona o fluxo magnético [39].

Um material supercondutor, entretanto, apresenta dois aspectos de diamagnetismo: a exclusão e a expulsão do fluxo de campo magnético [5]. Inicialmente, resfriando-se o material até ele tornar-se supercondutor e em seguida com a aplicação de um campo

magnético, observa-se que fluxo de campo será mantido fora da amostra, ou seja, temos a exclusão do campo magnético [Fig. 5 (a)]. Classicamente, tal fenômeno não representa problema algum, um condutor perfeito apresenta o mesmo efeito. Quando um condutor é colocado na presença de um campo magnético  $\vec{H}_0$ , aparecem correntes transientes que rapidamente desaparecem (em um fio de cobre de 15 cm de diâmetro, por exemplo, a constante de tempo de decaimento da corrente é de aproximadamente 0,42 ms [5]), regidas pela equação

$$-\vec{A} \cdot \frac{d\vec{H}_0}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad (1.2)$$

onde  $\vec{A}$  representa a área perpendicular à direção do campo aplicado,  $R$  a resistência do condutor,  $L$  a sua indutância e  $i$  a corrente transiente induzida devido a variação do fluxo quando o campo magnético é aplicado. Considerando que, para um condutor perfeito,  $R \approx 0$ , obtemos da Eq. (1.2), dado

$$\Phi_{Total} = Li + \vec{A} \cdot \vec{H}_0, \quad (1.3)$$

que o fluxo total permanece constante quando o campo magnético é aplicado e é zero se nenhum campo ou corrente já existia na amostra. O fluxo do campo  $\vec{H}_0$  é cancelado pelo fluxo induzido  $Li$ , mantendo o campo no interior do condutor perfeito  $\vec{B} = 0$  [Fig. 5 (c)].

Entretanto, adotando o procedimento inverso, ou seja, inicialmente submetendo a amostra a um campo magnético e em seguida resfriando-a até tornar-se supercondutora, o campo em seu interior será expulso [Fig. 5 (b)], o que não pode ser explicado classicamente, uma vez que o fluxo deveria ser aprisionado para um condutor perfeito [Fig. 5 (d)], mas o que observa-se é que  $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$ .

Os irmãos London adaptaram as leis da eletrodinâmica de forma que o efeito Meissner pudesse ser explicado também para este segundo caso, o *field cooling* [33]. A teoria dos irmãos London assume que a segunda lei de Newton possa ser escrita na forma

$$m^* \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e^* \vec{E}, \quad (1.4)$$

onde  $m^*$  é a massa dos portadores de carga da supercorrente,  $e^*$  é a carga dos portadores de carga,  $\vec{v}_s$  é a velocidade da supercorrente e  $\vec{E}$  é o campo elétrico aplicado. Reescrevendo  $\vec{v}_s$  em termos da densidade de corrente,  $\vec{j}_s = -e^* n_s \vec{v}_s$ , onde  $n_s$  é a densidade dos portadores de carga supercondutores, a Eq. (1.4) pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^{*2}}{m^*} \vec{E}. \quad (1.5)$$

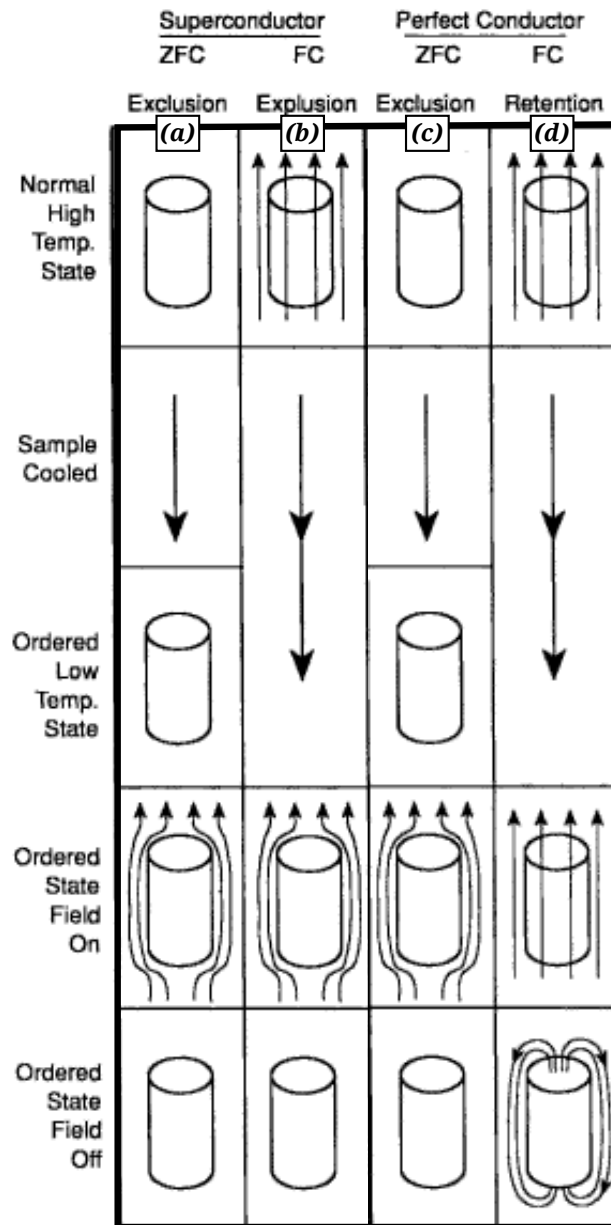


Figura 5: Figura ilustrando o efeito do resfriamento de uma amostra supercondutora (à esquerda) e de um condutor perfeito (à direita) inicialmente a campo magnético aplicado zero [effect of zero field cooling (ZFC)] (a) e (c), respectivamente; e do resfriamento quando as amostras, inicialmente, estão inicialmente submetidas a um campo magnético aplicado [field cooling (FC)] para (b) o supercondutor e (d) o condutor perfeito. Figura retirada de [5].

Considerando a lei de Faraday, Eq. (1.1), obtemos a relação a seguir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \vec{j}_s + \frac{n_s e^{*2}}{m^*} \vec{B} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Esta equação é válida para qualquer condutor perfeito. Entretanto, à fim de contornar o problema com o aprisionamento do campo no interior da amostra, uma vez que qualquer corrente e campo magnético constantes satisfazem essa relação, e a equação descrever corretamente o comportamento do supercondutor para o *field cooling*, os irmãos London propuseram a restrição da família de soluções da Eq. (1.6) para àquelas que satisfazem

$$\nabla \times \vec{j}_s = -\frac{n_s e^{*2}}{m^*} \vec{B}. \quad (1.7)$$

Esta equação diz que a supercorrente blinda o interior da amostra de um campo magnético externo e também que qualquer fluxo de campo magnético que, inicialmente, possa estar atravessando o material será expulso quando ele se tornar supercondutor. Sua combinação com a lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s, \quad (1.8)$$

considerando a identidade vetorial  $\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$  e que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , nos leva a

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}, \quad (1.9)$$

com

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*}{n_s e^{*2} \mu_0}}. \quad (1.10)$$

A solução dessa equação é um decaimento exponencial com a forma de  $B = B_0 \exp(-x/\lambda_L)$ , ou seja, no estado supercondutor o único campo permitido na amostra é atenuado exponencialmente a partir de sua superfície. Portanto,  $\lambda_L$  é uma medida da profundidade de penetração do campo magnético, que é um comprimento característico do supercondutor conhecido como comprimento de penetração de London.

A Eq. (1.9) também pode ser obtida por considerações de energia [29], permitindo concluir que um supercondutor encontra-se em um estado de equilíbrio para amostras macroscópicas, a soma de sua energia cinética e magnética é um mínimo, quando o fluxo de campo magnético é expulso. O estado Meissner é, portanto, particularmente importante em provar que um verdadeiro estado de equilíbrio foi alcançado [29].

### 1.3 A teoria de Ginzburg-Landau

O estado supercondutor e o estado metálico normal são fases termodinâmicas separadas da matéria, da mesma maneira que gases, líquidos e sólidos são fases diferentes. Esses estados, estão separados por uma transição de fase que pode ser caracterizada por singularidades em certas variáveis termodinâmicas na transição, em  $T_c$ . Podemos assim, tratar a supercondutividade do ponto de vista das transições de fase termodinâmicas.

A teoria de Ginzburg-Landau (GL) da supercondutividade é uma teoria fenomenológica construída sobre a teoria das transições de fase de segunda ordem desenvolvida por Landau em meados de 1930. Landau notou que uma transição de fase de segunda ordem típica envolve alguma mudança na simetria do sistema. Um exemplo é um ferromagneto à temperatura de Curie, para o qual, acima da temperatura de Curie,  $T_c$ , o sistema apresenta um momento magnético total nulo, mas abaixo de  $T_c$ , um momento magnético aparece espontaneamente e com uma direção particular preferencial. Na teoria de Landau, tais transições são caracterizadas por um parâmetro de ordem que é zero no estado desordenado, acima de  $T_c$ , mas torna-se diferente de zero abaixo de  $T_c$ . No caso do ferromagneto, a magnetização seria a escolha adequada para parâmetro de ordem [32, 40, 41].

Para a supercondutividade, Ginzburg e Landau postularam a existência de um parâmetro de ordem complexo denotado por  $\psi$ , que caracteriza o estado do sistema. Quando o sistema está no estado normal, acima da temperatura crítica  $T_c$ , ele é zero, enquanto que para o estado supercondutor, abaixo de  $T_c$ , ele é diferente de zero, ou seja,

$$\psi = \begin{cases} 0 & T > T_c, \\ \psi(T) \neq 0 & T < T_c. \end{cases} \quad (1.11)$$

Na época de seu trabalho original, o significado físico do parâmetro de ordem complexo,  $\psi$ , não era claro, mas com o desenvolvimento da teoria microscópica de BCS da supercondutividade, Gor'kov foi capaz de derivar da teoria BCS a teoria de GL e mostrar que  $|\psi|^2$ , a menos de algumas constantes numéricas, era a densidade de “pares de Cooper”, da teoria BCS, presentes na amostra.

O postulado básico de GL, é que se  $\psi$  for pequeno e variar pouco no espaço, a densidade de energia livre  $f$  pode ser expandida em uma série da forma [40]

$$f = f_{n0} + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{(\vec{H} - \vec{H}_o)^2}{8\pi}, \quad (1.12)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros fenomenológicos da expansão, os quais são característicos

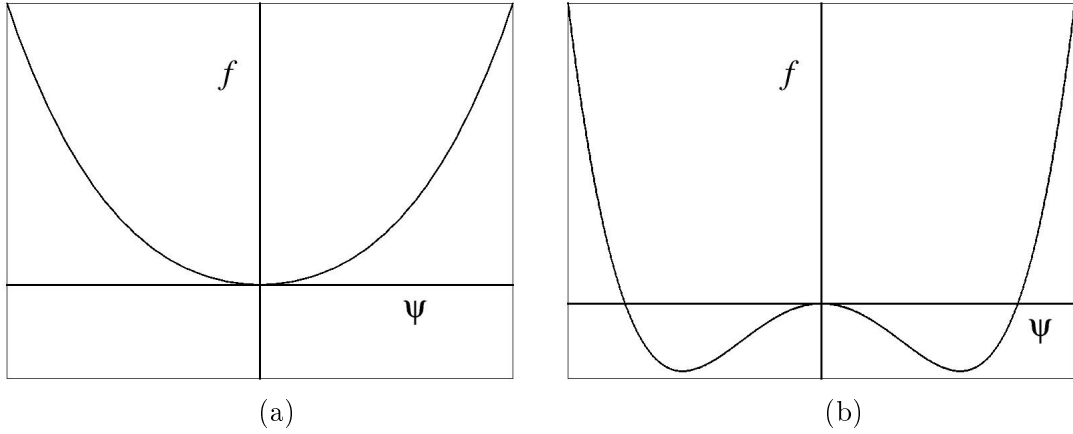


Figura 6: Comportamento da densidade de energia para o caso sem campos e gradientes. Na figura (a)  $\alpha > 0$ , temos o estado normal e na figura (b)  $\alpha < 0$ , temos o estado supercondutor.

do material,  $m^*$  é a massa e  $e^*$  é a carga dos pares de Cooper,  $\vec{A}$  é o potencial vetor relacionado com o campo local  $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$  e  $\vec{H}_0$  é o campo magnético aplicado.

É óbvio que, se  $\psi = 0$ , a densidade de energia se reduz à densidade de energia do estado normal  $f_{n0} + h^2/8\pi$ , onde  $h$  é a diferença entre o campo magnético local e o campo magnético aplicado. Os outros três termos restantes descrevem os efeitos da supercondutividade que passaremos a examinar a seguir.

Na ausência de campos e gradientes, ficamos com

$$f - f_{n0} = \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4, \quad (1.13)$$

o qual pode ser visto como uma expansão em série de potências de  $|\Psi|^2$  da diferença entre a densidade de energia dos estados supercondutor e normal para um supercondutor homogêneo e na ausência de campos magnéticos, na qual somente os dois primeiros termos são considerados [1]. A ausência de gradientes corresponde a uma região bem interna do supercondutor onde a densidade de pares de Cooper não varia com a posição. Assume-se que, num pequeno intervalo de temperaturas próximos de  $T_c$ , o parâmetro  $\beta$  é uma constante positiva e independente da temperatura e  $\alpha$  depende da temperatura dado por  $\alpha \approx -\alpha_o(1 - T/T_c)$ , onde  $\alpha_o$  é uma constante positiva.

Quando  $\alpha > 0$  [Fig. 6 (a)],  $T > T_c$ , o sistema encontra-se no estado normal e o mínimo de energia localiza-se em  $\Psi = 0$ . Para  $\alpha < 0$  [Fig. 6 (b)],  $T < T_c$ , o sistema encontra-se no estado supercondutor e a energia possui dois mínimos, localizados em  $\Psi = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$ , com um valor de energia

$$f - f_{n0} = -\frac{\alpha^2}{2\beta}. \quad (1.14)$$

O próximo termo da densidade de energia livre, é a energia cinética dos pares de Cooper

$$\frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2, \quad (1.15)$$

ele descreve o custo de energia quando a densidade de pares de Cooper é não-homogênea [1].

A densidade de energia (1.12), depende de  $\Psi(\vec{r})$  e  $\vec{A}(\vec{r})$ , minimizar o funcional de energia, dado pela integral de volume da Eq. (1.12), em relação ao parâmetro de ordem e ao potencial vetor, leva às equações de Ginzburg-Landau, que demonstraremos a seguir.

### 1.3.1 Derivação da primeira equação de Ginzburg-Landau e da condição de contorno geral

Levando em conta que a energia livre de Gibbs de um supercondutor possa ser expressa por

$$E \{ \Psi, \vec{A} \} = \int \left\{ \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{(\vec{H} - \vec{H}_o)^2}{8\pi} \right\} dV_s, \quad (1.16)$$

para obtermos o mínimo de energia, varia-se o funcional com respeito  $\Psi^\dagger$ .

Utilizando o fato de que  $|\Psi|^4 = (\Psi^\dagger\Psi)^2$  e que  $\partial|\Psi|^4/\partial\Psi^\dagger = 2(\Psi^\dagger\Psi)\Psi = 2|\Psi|^2\Psi$ , reescrevemos o termo do gradiente como

$$\left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 = \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \cdot \left( i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi^\dagger = \vec{\varphi} \cdot \left( i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi^\dagger, \quad (1.17)$$

onde  $\vec{\varphi} = \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi$ . O que nos dá, fazendo a variação da Eq. (1.16),

$$\frac{\partial E}{\partial \Psi^\dagger} \delta \Psi^\dagger = \int \left\{ \alpha \Psi \delta \Psi^\dagger + \beta |\Psi|^2 \Psi \delta \Psi^\dagger + \frac{1}{2m^*} \left( i\hbar (\vec{\varphi} \cdot \nabla \delta \Psi^\dagger) - \frac{e^*}{c} \vec{\varphi} \cdot \vec{A} \delta \Psi^\dagger \right) \right\} dV_s, \quad (1.18)$$

lembrando que  $\nabla \cdot (\vec{\varphi} \delta \Psi^\dagger) = \delta \Psi^\dagger \nabla \cdot \vec{\varphi} + \vec{\varphi} \cdot \nabla \delta \Psi^\dagger$ , reescrevemos a Eq. (1.18) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \Psi^\dagger} \delta \Psi^\dagger = \int \left\{ \alpha \Psi \delta \Psi^\dagger + \beta |\Psi|^2 \Psi \delta \Psi^\dagger + \frac{1}{2m^*} \left( i\hbar \nabla \cdot (\vec{\varphi} \delta \Psi^\dagger) \right. \right. \\ \left. \left. - i\hbar \delta \Psi^\dagger \nabla \cdot \vec{\varphi} - \frac{e^*}{c} \vec{\varphi} \cdot \vec{A} \delta \Psi^\dagger \right) \right\} dV_s. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Fazendo

$$\frac{\partial E}{\partial \Psi^\dagger} \delta \Psi^\dagger = 0, \quad (1.20)$$

para encontrar o mínimo, temos que

$$\int \delta\Psi^\dagger \left[ \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla \cdot \vec{\varphi} - \frac{e^*}{c} \vec{\varphi} \cdot \vec{A} \right) \right] dV_s \quad (1.21)$$

$$+ \frac{i\hbar}{2m^*} \int \nabla \cdot (\vec{\varphi} \delta\Psi^\dagger) dV_s = 0.$$

Pelo teorema da divergência, podemos reescrever a integral do segundo termo do lado esquerdo da Eq. (1.21) como

$$\int \nabla \cdot (\vec{\varphi} \delta\Psi^\dagger) dV_s = \oint \vec{n} \cdot (\vec{\varphi} \delta\Psi^\dagger) dS_s, \quad (1.22)$$

o que nos dá

$$\int \delta\Psi^\dagger \left[ \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla \cdot \vec{\varphi} - \frac{e^*}{c} \vec{\varphi} \cdot \vec{A} \right) \right] dV_s \quad (1.23)$$

$$+ \frac{i\hbar}{2m^*} \oint \vec{n} \cdot (\vec{\varphi} \delta\Psi^\dagger) dS_s = 0.$$

Levando em conta que

$$\left( -i\hbar\nabla \cdot \vec{\varphi} - \frac{e^*}{c} \vec{\varphi} \cdot \vec{A} \right) = \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\varphi},$$

e

$$\left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\varphi} = \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi, \quad (1.24)$$

trocando-se este termo na Eq. (1.23), ficamos com

$$\int \delta\Psi^\dagger \left[ \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi \right] dV_s \quad (1.25)$$

$$+ \frac{i\hbar}{2m^*} \oint \vec{n} \cdot (\vec{\varphi} \delta\Psi^\dagger) dS_s = 0.$$

Logo,

$$\int \delta\Psi^\dagger \left[ \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi \right] dV_s = 0, \quad (1.26)$$

e

$$\frac{i\hbar}{2m^*} \oint \vec{n} \cdot (\vec{\varphi} \delta\Psi^\dagger) dS_s = 0. \quad (1.27)$$

Para  $\delta\Psi^\dagger$  arbitrário, ficamos com

$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi = 0, \quad (1.28)$$



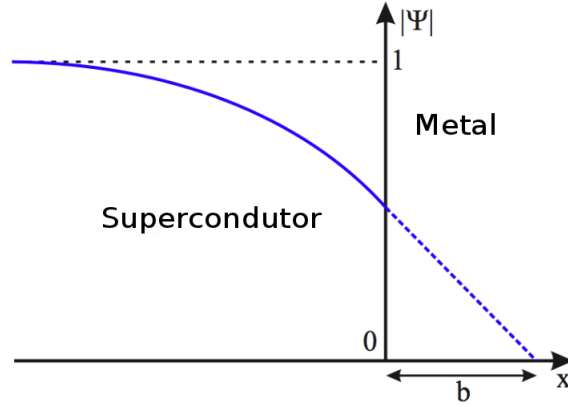


Figura 7: Ilustração da interface supercondutor/ metal, mostrando a dependência espacial do parâmetro de ordem  $|\Psi|$ , onde  $b$  é o comprimento de extrapolação [1].

e

$$\vec{n} \cdot \vec{\varphi}|_S = 0,$$

ou seja,

$$\vec{n} \cdot \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\vec{A} \right) \Psi \Big|_S = 0, \quad (1.29)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal a superfície do supercondutor.

A Eq. (1.28), é conhecida como a primeira equação de GL e tem uma forma semelhante à da equação de Schroedinger. A Eq. (1.29), é a condição de contorno para o supercondutor e expressa que nenhuma supercorrente pode atravessar perpendicularmente a o limite da amostra. De Gennes, generalizou a condição de contorno (1.29), para quando o supercondutor encontra-se em contato com outros materiais

$$\vec{n} \cdot \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\vec{A} \right) \Psi \Big|_S = \frac{i}{b} \Psi \Big|_S, \quad (1.30)$$

onde  $b$  é uma constante conhecida como comprimento de extrapolação, uma vez que ela mede a distância dentro do material que está em contato com o supercondutor, onde o parâmetro de ordem cai a zero, conforme ilustrado na Fig. 7.

O exato valor do comprimento de extrapolação é determinado pelo meio adjacente ao supercondutor, que pode ser dividido em três grupos:

- vácuo ou isolante:  $b \rightarrow \infty$ ,
- metais normais:  $b > 0$ , e para ferromagnéticos:  $b \rightarrow 0$ ,
- outro supercondutor com temperatura crítica mais alta:  $b < 0$ .

### 1.3.2 Derivação da segunda equação de Ginzburg-Landau

Para obter-se a segunda equação de GL, varia-se a Eq. (1.16) em relação ao potencial vetor,

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{A}} \delta \vec{A} = \frac{\partial}{\partial \vec{A}} \int \left\{ \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{(\vec{H} - \vec{H}_o)^2}{8\pi} \right\} dV_s. \quad (1.31)$$

Reescrevendo o termo do gradiente como

$$\left| \left( -i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 = \left( i\hbar \nabla \Psi^\dagger - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi^\dagger \right) \cdot \left( -i\hbar \nabla \Psi - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi \right), \quad (1.32)$$

e o termo do campo como

$$(\vec{H} - \vec{H}_o)^2 = (\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o)^2, \quad (1.33)$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \vec{A}} \delta \vec{A} &= \frac{1}{2m^*} \int \left[ \left( -\frac{e^*}{c} \delta \vec{A} \Psi^\dagger \right) \cdot \left( -i\hbar \nabla \Psi - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( i\hbar \nabla \Psi^\dagger - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi^\dagger \right) \cdot \left( -\frac{e^*}{c} \delta \vec{A} \Psi \right) \right] dV_s \\ &\quad + \int \frac{2(\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) \cdot (\nabla \times \delta \vec{A})}{8\pi} dV_s. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Fazendo

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{A}} \delta \vec{A} = 0,$$

lembrando que  $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$  e fazendo  $\vec{a} = \delta \vec{A}$  e  $\vec{b} = \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o$ , temos que

$$(\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) \cdot (\nabla \times \delta \vec{A}) = \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) + \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \nabla \times \vec{H}_o),$$

logo, podemos reescrever o último termo da Eq. (1.34) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int (\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) \cdot (\nabla \times \delta \vec{A}) dV_s &= \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) dV_s \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \nabla \times \vec{H}_o) dV_s. \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência

$$\frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) dV_s = \oint \vec{n} \cdot (\delta \vec{A} \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) dS,$$

na superfície, o  $\nabla \times \vec{A} = \vec{H}_o$  o que faz a última integral ir à zero. Assim, da Eq. (1.34), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m^*} \int \left[ \left( -\frac{e^*}{c} \Psi^\dagger \right) \left( -i\hbar \nabla \Psi - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi \right) + \left( i\hbar \nabla \Psi^\dagger - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi^\dagger \right) \left( -\frac{e^*}{c} \Psi \right) \right] \cdot \delta \vec{A} dV_s \\ + \frac{1}{4\pi} \int \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) dV_s = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Trabalhando agora com o termo

$$\begin{aligned} \left( -\frac{e^*}{c} \Psi^\dagger \right) \left( -i\hbar \nabla \Psi - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi \right) + \left( i\hbar \nabla \Psi^\dagger - \frac{e^*}{c} \vec{A} \Psi^\dagger \right) \left( -\frac{e^*}{c} \Psi \right) = \\ = \frac{i\hbar e^*}{c} \Psi^\dagger \nabla \Psi + \left( \frac{e^*}{c} \right)^2 \Psi^\dagger \vec{A} \Psi + \frac{-i\hbar e^*}{c} \Psi \nabla \Psi^\dagger + \left( \frac{e^*}{c} \right)^2 \vec{A} \Psi^\dagger \Psi = \\ = \frac{i\hbar e^*}{c} (\Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger) + 2 \left( \frac{e^*}{c} \right)^2 \vec{A} \Psi^\dagger \Psi, \end{aligned}$$

substituindo de volta na Eq. (1.35), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m^*} \int \left[ \frac{i\hbar e^*}{c} (\Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger) + 2 \left( \frac{e^*}{c} \right)^2 \vec{A} \Psi^\dagger \Psi \right] \cdot \delta \vec{A} dV_s + \\ + \frac{1}{4} \int \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) dV_s = 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Reorganizando todos os termos,

$$\int \left[ \frac{i\hbar e^*}{2m^* c} (\Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger) + \frac{e^{*2}}{m^* c^2} \vec{A} \Psi^\dagger \Psi + \frac{1}{4} (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) \right] \cdot \delta \vec{A} dV_s = 0. \quad (1.37)$$

Para um  $\delta \vec{A}$  arbitrário, ficamos com

$$\frac{i\hbar e^*}{2m^* c} (\Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger) + \frac{e^{*2}}{m^* c^2} \vec{A} \Psi^\dagger \Psi + \frac{1}{4} (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) = 0, \quad (1.38)$$

logo

$$\frac{1}{4} (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_o) = -\frac{i\hbar e^*}{2m^* c} (\Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger) - \frac{e^{*2}}{m^* c^2} \vec{A} \Psi^\dagger \Psi. \quad (1.39)$$

Como

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s \Rightarrow \vec{j}_s = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \nabla \times \vec{A}), \quad (1.40)$$

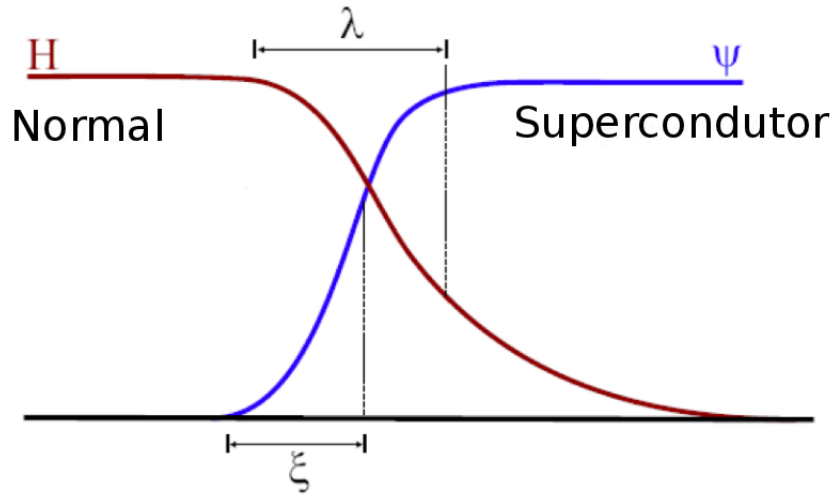


Figura 8: Distribuição espacial do parâmetro de ordem  $\psi$  e do campo magnético  $\vec{H}$  na interface supercondutor/ metal normal [1].

logo

$$\vec{j}_s = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger) - \frac{e^{*2}}{m^* c} \vec{A} |\Psi|^2, \quad (1.41)$$

equação conhecida como segunda equação de GL.

## 1.4 Comprimentos característicos

Da teoria de GL é possível obter dois comprimentos característicos, relacionados com o sistema: o comprimento de penetração  $\lambda(T)$  e o comprimento de coerência  $\xi(T)$ , conforme pode ser visto na Fig. 8.

O comprimento de penetração está relacionado com o decaimento do campo no interior do supercondutor, conforme ilustrado na Fig. 9. Ele pode ser obtido, considerando-se uma região do supercondutor onde a densidade de pares de Cooper é constante, ou seja, longe das interfaces do supercondutor com outros materiais [9] e em um campo magnético fraco. Tomando o rotacional da Eq. (1.41), ficamos com

$$\nabla \times \vec{j}_s = -\frac{e^{*2}}{m^* c} |\Psi|^2 \nabla \times \vec{A}, \quad (1.42)$$

ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -\frac{4\pi e^{*2}}{m^* c^2} |\Psi|^2 \vec{H}, \quad (1.43)$$

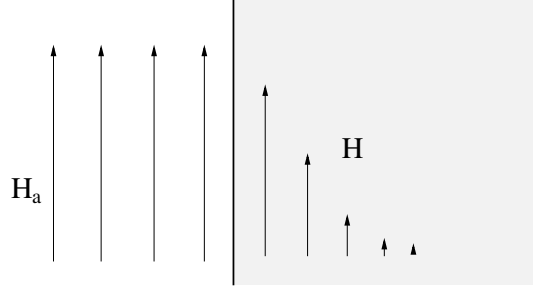


Figura 9: Penetração de um campo magnético aplicado  $\vec{H}_a$  em um supercondutor semi-infinito. O comprimento de penetração  $\lambda$  é definido como a distância ao longo da qual o campo diminui para um valor igual ao valor original dividido por  $e$ . Em supercondutores puros,  $\lambda$  é da ordem de 500 Å [3].

onde, utilizando a identidade vetorial  $\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$ , ficamos com

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi e^{*2} |\Psi|^2}{m^* c^2} \vec{H}. \quad (1.44)$$

Rescrevendo a Eq. (1.44) como

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{H},$$

cuja a solução, como já visto anteriormente, é dada por  $H = H' e^{-\frac{r}{\lambda}}$ , ou seja, o campo magnético decai exponencialmente com a posição. Pode-se, portanto, identificar  $\lambda$ , como sendo o comprimento típico no qual o campo magnético pode variar, o comprimento de penetração é assim dado por

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^* c^2}{4\pi e^{*2} |\Psi|^2}}. \quad (1.45)$$

Podemos ainda, em uma aproximação de primeira ordem, utilizar o valor do parâmetro de ordem que minimiza a energia livre para o caso sem campo,  $|\Psi| = \Psi_\infty = \sqrt{-\alpha/\beta}$ , e reescrever a Eq. (1.45) como

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^* c^2 \beta}{4\pi e^{*2} |\alpha|}} = \sqrt{\frac{m^* c^2}{2\pi e^{*2} n_s}}, \quad (1.46)$$

onde  $n_s = 2|\Psi_\infty| = 2|\alpha|/\beta$ , é a densidade de elétrons supercondutores. Devemos notar ainda que, como  $\alpha(T) = -\alpha_o (1 - T/T_c)$ , o comprimento de penetração tem uma dependência com a temperatura na forma

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}}, \quad (1.47)$$

onde  $\lambda_o$  é independente da temperatura. É importante destacar que tal parâmetro carac-

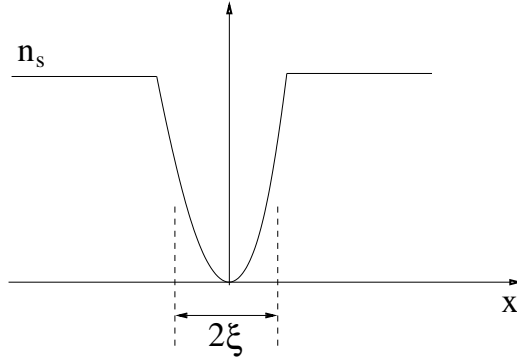


Figura 10: Estrutura simplificada de um vórtice, em que é mostrado o crescimento da densidade de elétrons supercondutores  $n_s$  e o comprimento de coerência  $\xi$  [6].

terístico já havia sido determinado na teoria de London.

Já o comprimento de coerência está relacionado com a variação espacial da densidade de pares de Cooper, ele indica o comprimento típico sobre o qual o parâmetro de ordem pode variar. Pode ser visto também como uma distância característica a partir da superfície da amostra, ou do núcleo de um vórtice onde o valor da densidade de elétrons supercondutores  $n_s$  cresce de zero até um valor máximo, conforme ilustrado na Fig. 10.

Para obter esse comprimento, considera-se o caso sem campo magnético, em que o parâmetro de ordem é real e varia somente em uma dimensão, supomos  $z$ . Neste caso, a primeira equação de GL (1.28) torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \beta \Psi^3 + \alpha \Psi = 0. \quad (1.48)$$

Adicionando um parâmetro de ordem adimensional como  $\Psi = f \Psi_o$ , onde  $\Psi_o$  corresponde ao estado de menor energia e  $f$  é um parâmetro de ordem normalizado, quando  $\alpha < 0$ , ficamos então com

$$-\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \beta f^3 + \alpha f = 0, \quad (1.49)$$

onde pode-se observar que

$$-\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.50)$$

é um operador adimensional e assim, definimos um comprimento de escala para a variação espacial do parâmetro de ordem

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|}}, \quad (1.51)$$

conhecido como comprimento de coerência. Assim como o comprimento de penetração, ele também é dependente da temperatura, por depender de  $\alpha$ , e pode ainda ser escrito na

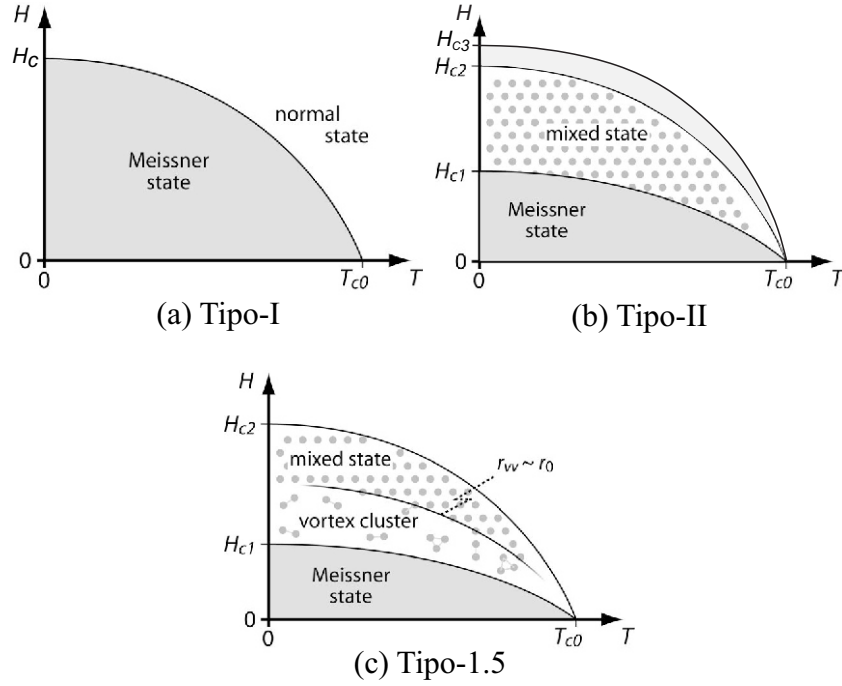


Figura 11: Diagrama de fase  $H-T$ , para (a) supercondutores do tipo-I, (b) para supercondutores do tipo-II e (c) supercondutores do tipo-1.5. Figura adaptada de [7].

forma

$$\xi(T) = \frac{\xi_o}{\sqrt{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}}, \quad (1.52)$$

onde  $\xi_o$  é independente da temperatura.

Notemos que os comprimentos característicos divergem na temperatura crítica e a exata dependência de  $\lambda$  e  $\xi$  dependem da pureza do material, definida pelo livre caminho médio  $\ell$  como descrito em [40, 29].

Além destes, pode-se definir, ainda, um terceiro parâmetro adimensional  $\kappa = \lambda/\xi$  que é independente da temperatura e é conhecido como o parâmetro de GL. Dependendo do valor deste parâmetro os supercondutores de uma única componente são classificados em supercondutores do tipo-I ( $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ) e supercondutores do tipo-II ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ), conforme veremos em detalhes a seguir. Um estado especial, entretanto, é encontrado nas proximidades do ponto de transição  $\kappa = 1/\sqrt{2}$ , onde o estado Meissner e o estado de vórtices podem coexistir na amostra - estado intermediário-misto [7]. Em supercondutores de duas componentes, pode-se encontrar um regime notável, chamadado de tipo-1.5, quando no mesmo material, as condições de tipo-I e II são aplicadas as subcomponentes do supercondutor. Neste regime, além dos estados Meissner e de vórtices, um novo estado de vórtices existe entre eles, com a característica de aglomerados de vórtices [Fig. 11 (c)] [7, 42]. Entretanto, nos restringiremos, nesta tese, à supercondutores de uma única componente.

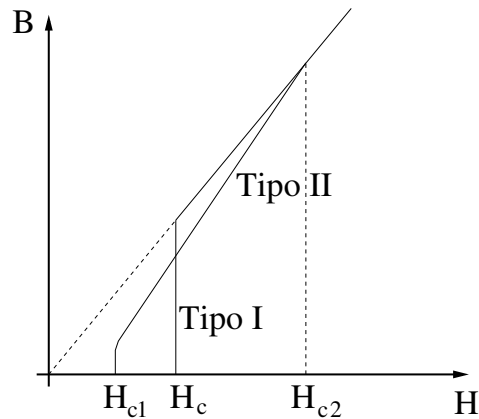


Figura 12: Comparação entre supercondutores do tipo-I e do tipo-II, com o mesmo campo crítico termodinâmico  $H_c$ . No supercondutor do tipo II, o custo de energia diamagnética para manter a supercondutividade é menor que no supercondutor do tipo I, o que permite o campo  $H_{c2}$  ser muito maior que o campo  $H_c$ .

## 1.5 Tipos de supercondutores

O supercondutores do tipo-I, são aqueles em que o campo magnético em seu interior permanece zero até que bruscamente a supercondutividade é destruída. Isso acontece quando um campo crítico,  $H_c$ , é atingido. Portanto, os supercondutores do tipo-I, apresentam dois estados: o estado Meissner e o estado normal, conforme pode ser visto na Fig. 11 (a).

Em 1957, Abrikosov publicou um trabalho em que estudava o que aconteceria com a teoria de GL se  $\kappa$  fosse grande, ou seja, se  $\xi < \lambda$ . O comportamento encontrado foi tão diferente do já até então conhecido que ele resolveu chamá-lo de supercondutores do tipo-II, para distinguir do primeiro tipo.

Ele mostrou que o exato ponto em que começam as diferenças entre os dois tipos é em  $\kappa = 1/\sqrt{2}$ . Para materiais com  $\kappa > 1/\sqrt{2}$ , ele encontrou que ao invés de uma quebra descontínua da supercondutividade, em uma transição de primeira ordem em  $H_c$ , existe um crescimento contínuo do fluxo de campo que penetra a amostra supercondutora, a partir de um campo  $H_{c1}$  e atingindo um limite superior em  $H_{c2}$  [40], no qual a supercondutividade desaparece e o campo penetra totalmente na amostra, como mostrado na Fig. 12. É importante ressaltar aqui, que uma camada na superfície da amostra pode permanecer supercondutora até ser atingido um campo ainda maior,  $H_{c3}$  [3], conforme mostrado na Fig. 11 (b). Por conta dessa penetração parcial de fluxo de campo magnético, o custo de energia diamagnética para manter o campo fora do supercondutor é menor. Então, o campo  $H_{c2}$  pode ser muito maior que o campo  $H_c$ , no qual, nesse tipo-II, nada de especial acontece [40]. Essa propriedade torna possível supercondutores que suportam altos campos magnéticos.

Outro resultado da análise de Abrikosov foi que no estado, então chamado,



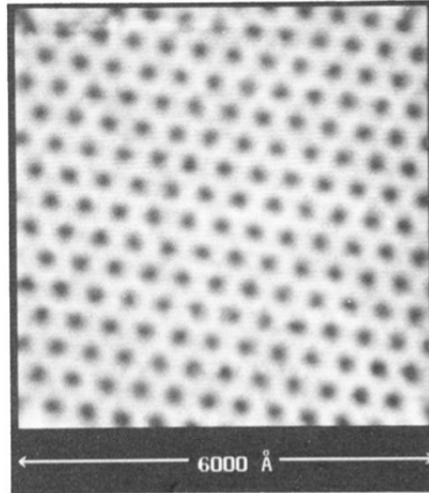


Figura 13: Distribuição de vórtices observado por Hess et al. comprovando a predição de Abrikosov. Figura retirada de [8].

misto, ou estado de Schubnikov, entre  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ , o fluxo não deveria penetrar em domínios laminares, mas em redes regulares de tubos de fluxo, cada um levando um fluxo quantizado de

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ G cm}^2. \quad (1.53)$$

Dentro de cada dessas células da rede, existe um vórtice de supercorrente, concentrando o fluxo em torno do centro desse vórtice. Embora, inicialmente, ele tenha predito que a rede seria retangular, posteriormente foi mostrado, após a correção de um erro numérico, que uma rede triangular deveria ter uma energia livre menor. Essa estrutura de vórtices foi demonstrada experimentalmente pela primeira vez por U. Essmann e H. Trauble [43] e posteriormente por Hess et al. em [8], conforme pode ser visto na Fig. 13.

Nos supercondutores do tipo-II, o estado Meissner existe somente para campos menores que o  $H_{c1} < H_c$ , onde

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} H_c \ln(\kappa), \quad (1.54)$$

com  $H_c = \Phi_0/2\sqrt{2}\pi\lambda\xi$ . Para campos mais intensos, tem-se a penetração do fluxo magnético na forma de vórtices. Quanto mais intenso for o campo, mais vórtices penetram o supercondutor, até o campo crítico  $H_{c2}$ , dado por

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} = \sqrt{2}\kappa H_c. \quad (1.55)$$

Como dito anteriormente, acima deste valor, pode-se ainda encontrar uma camada supercondutora superficial, que tem espessura  $\xi(T)$  e que sobrevive até um valor de campo

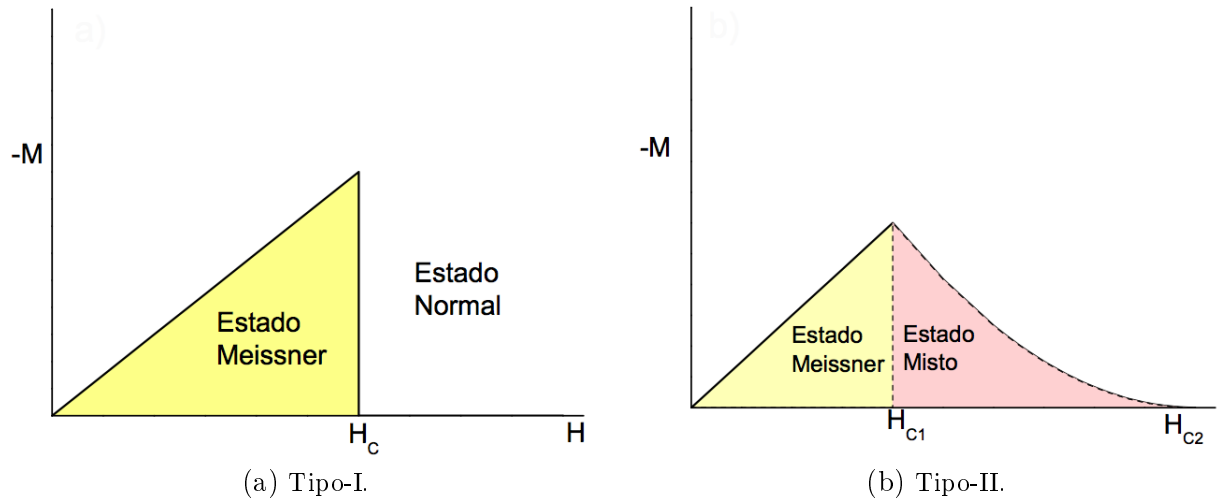


Figura 14: Magnetização como uma função do campo aplicado para (a) supercondutores do tipo I e (b) supercondutores do tipo II. Figura retirada de [9].

$H_{c3}$ , que está relacionado com  $H_c$  e  $H_{c2}$  por

$$H_{c3} = 2,4\kappa H_c = 1,69H_{c2}. \quad (1.56)$$

Os dois tipos de supercondutores, apresentam um comportamento de magnetização com relação ao campo magnético aplicado. Para o caso dos supercondutores macroscópicos do tipo-I, conforme a Fig. 14 (a), quando o campo aplicado é menor que o campo crítico  $H_c$ , o campo no interior do supercondutor é zero e, portanto, a magnetização é uma função decrescente do campo aplicado, ou seja, quanto mais intenso o campo aplicado, mais negativa é a magnetização [9]. Quando o campo aplicado é maior que  $H_c$ , a amostra está no estado normal e a magnetização é zero. Para os supercondutores do tipo-II, conforme a Fig. 14 (b), a dependência linear da magnetização acontece apenas para valores do campo aplicado menores que  $H_{c1}$ , onde a amostra está no estado Meissner; para valores maiores que  $H_{c1}$  e menores que  $H_{c2}$ , a magnetização aumenta até chegar a zero em  $H_{c2}$ .

Os supercondutores do tipo-I, que não são suficientemente longos, não apresentam o comportamento representado na Fig. 14 (a). Eles conseguem neutralizar o campo no interior da amostra, mas reforçam este campo nas bordas, gerando regiões de estado normal e de estado Meissner, conhecido como estado intermediário dos supercondutores do tipo-I [9].

## 1.6 Teoria BCS

A teoria microscópica da supercondutividade foi proposta independentemente por Bogoliubov e Bardeen, Cooper e Schrieffer, e é comumente conhecida como teoria

BCS [44]. O formalismo teórico dessa teoria é bastante complexo e a teoria de Ginzburg-Landau permite calcular com precisão a estrutura de um vórtice e os parâmetros críticos do sistema a ser considerado, de modo que um tratamento a nível microscópico não será necessário para os propósitos desta tese. Portanto, a discussão da teoria BCS será limitada aqui ao básico.

A teoria consiste na adição de uma interação atrativa entre elétrons que supere a repulsão coulombiana. Essa interação atrativa é necessária para a formação de um par, ou um estado ligado, entre dois elétrons. Conceitualmente a supercondutividade é bastante similar à superfluidez do hélio-4 ao longo de capilaridades, a qual não é submetida a atrito algum. A supercondutividade pode, nesse sentido, ser interpretada como a superfluidez de pares de Cooper - pares de elétrons. Em metais, essa atração vem da interação elétron-fônon que tem a forma de uma interação local e é efetiva somente à frequências menores que a frequência típica do fônon  $\omega_D$  [44].

Uma vez que os elétrons estão ligados em um par de Cooper, uma quantidade finita de energia é necessária para “quebrar” o par e deixar os dois elétrons independentes. Isso significa que existe um gap de energia para a excitação de uma única partícula ( $E \geq \Delta$ ), diferentemente dos metais normais, onde uma pequena adição de energia é suficiente para alterar o estado de um elétron [1, 29]. Este gap está relacionado a temperatura de transição supercondutora  $T_c$ , sendo alto a baixas temperaturas e desaparecendo na temperatura de transição, quando a supercondutividade acaba. O parâmetro de ordem que caracteriza a transição de fase supercondutora é um número complexo com o valor absoluto igual ao do tamanho  $\Delta$  do gap e com fase  $\varphi$ .

O tamanho de um par de Cooper pode ser estimado da relação de incerteza  $\xi \equiv \delta r \sim \hbar/\delta p \sim \hbar v_F/\Delta$ , onde  $\delta p = \Delta/v_F$  é a espessura da casca no espaço dos momentos e  $v_F$  é a velocidade de Fermi. Considerando  $v_F \sim 10^6$  m/s e que tipicamente  $\Delta/k_B \sim T_c \sim 10$  K, tem-se  $\xi \sim 1 \mu\text{m}$ , que é muito maior que a distância média entre os elétrons. Portanto, é errado pensar nos pares de Cooper como pequenas estruturas de bolas rígidas. Ao invés disso, devemos imaginá-los como correlações de elétrons a distâncias da ordem de  $\xi$  [29, 44], que como dito anteriormente, é chamado de comprimento de coerência ou correlação.

Em 1959, Gor'kov mostrou que a teoria de GL é um caso limite da teoria BCS, válida para valores de temperatura próximo de  $T_c$ , e que o parâmetro de ordem  $\Psi$  pode ser visto com a função de onda do movimento do centro de massa dos pares de Cooper [1, 45].

## 1.7 Matéria de vórtices

Como dito inicialmente, Abrikosov mostrou que os vórtices, nos supercondutores do tipo-II ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ), se alinham em redes regulares, com a rede triangular sendo a de menor energia. Entretanto, a estrutura de vórtices pode se organizar de diversas maneiras, formando uma grande variedade de estados. Acredita-se que a rede de fluxo nunca forma uma rede cristalina verdadeira, existe sempre uma perda de ordem na estrutura periódica por conta de flutuações térmicas [32]. Essas flutuações térmicas levam ao movimento dos vórtices e assim à uma dissipação de energia, sendo, tal fato, muito ruim para as aplicações comerciais dos supercondutores, pois o material não apresentaria mais uma condutividade perfeita. Entretanto, a dissipação de energia pode ser atenuada com a redução do movimento dos vórtices ou, até mesmo, eliminando o seu movimento. Isso pode ser feito, criando-se centros de fixação para os vórtices, que podem ser impurezas ou defeitos naturais dos cristais, de maneira que não existirá resistência até um certo valor finito de corrente ser atingido, ou seja, até a força de Lorentz sobre o vórtice ser maior que a força de fixação (pinning) sobre ele [34, 1, 46, 47, 32].

### 1.7.1 Quantização do fluxo

O fluxo magnético através de um supercondutor é quantizado e se apresenta como um múltiplo inteiro do fluxo quântico  $\Phi_0$ , dado pela Eq. (1.53). Esta condição pode ser obtida do formalismo de Ginzburg-Landau introduzindo-se o módulo  $|\Psi|$  e a fase  $\varphi$  do parâmetro de ordem na segunda equação, que pode ser escrita como

$$\vec{j}_s = \frac{e^* \hbar}{m^*} |\Psi|^2 \nabla \varphi - \frac{e^{*2}}{m^* c} \vec{A} |\Psi|^2. \quad (1.57)$$

Considerando que

$$\Phi = \int_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}, \quad (1.58)$$

onde  $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ ,  $C$  um caminho fechado, e substituindo-se a Eq. (1.57) na (1.58), obtemos que

$$\Phi = \frac{\hbar c}{e^*} \oint \nabla \varphi \cdot d\vec{\ell} - \frac{m^* c}{e^{*2}} \oint \frac{\vec{j}_s}{|\Psi|^2} \cdot d\vec{\ell}. \quad (1.59)$$

O único requisito existente é o de que o módulo do parâmetro de ordem  $|\Psi|$  seja uma função univalorada, logo, nenhum dos termos da Eq. (1.59) pode ser cancelado e a fase  $\varphi$  varia de  $2\pi n$ , onde  $n$  é um número inteiro. Escolhendo-se um contorno fechado onde  $\vec{j}_s = 0$ , ou  $\vec{j}_s$  é perpendicular a  $d\vec{\ell}$ , obtemos que

$$\Phi = \frac{\hbar c}{e^*} \oint \nabla \varphi \cdot d\vec{\ell} = \frac{\hbar c}{e^*} \oint d\varphi = \frac{\hbar c}{e^*} (2\pi n), \quad (1.60)$$

levando em conta que  $\hbar = h/2\pi$  e que  $e^* = 2e$ , ficamos então com

$$\Phi = \frac{hc}{2e} \mathbf{n} = \Phi_0 \mathbf{n}, \quad (1.61)$$

mostrando, portanto, que o fluxo aprisionado em um supercondutor é quantizado.

### 1.7.2 A estrutura de um vórtice

Na seção acima foi mostrado que a quantidade de fluxo carregado por um único vórtice em um supercondutor é quantizado e igual a um fluxo quântico  $\Phi_0$ . Um vórtice é constituído de correntes que circulam em torno de um núcleo, no qual o material encontra-se no estado normal, de raio  $\xi$  [7]. O parâmetro de ordem supercondutor é zero no centro do núcleo do vórtice, com o campo magnético local  $\vec{H}$  sendo mais intenso no núcleo e decaindo, devido as correntes de blindagem, por uma distância dada pelo comprimento de penetração  $\lambda$ . Na Fig. 15, a ilustração de um único vórtice é apresentada de forma esquemática, mostrando o campo local  $h$  e a densidade dos elétrons supercondutores  $n_{sc}$  como uma função da distância  $r$  do centro do vórtice.

Escrevendo-se a segunda equação de GL Eq. (1.41) como

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi e^*}{c^2 m^*} |\Psi|^2 (\hbar c \nabla \varphi - \vec{A}), \quad (1.62)$$

onde o parâmetro de ordem foi escrito em termos de seu módulo e fase. Fazendo  $|\Psi(\vec{r})| = f(\vec{r}) |\Psi_\infty|$ , onde  $\vec{r}$  é o vetor posição com origem no centro do núcleo do vórtice que localiza outros pontos do supercondutor num plano perpendicular ao vórtice e  $|\Psi_\infty|$  é o módulo do parâmetro de ordem distante do núcleo do vórtice. Assumindo que  $\xi \ll \lambda$ , isto é, que o condensado de pares de Cooper, mesmo estando perto do núcleo do vórtice, terá seu valor de “bulk” ( $|\Psi| = |\Psi_\infty|$ ) e que o potencial vetor só apresentará variações estando à distâncias muito grandes, pode-se escrever  $f(\vec{r}) = 1$  para  $\vec{r} \neq 0$  e assim, após tomar o rotacional da Eq. (1.62), ficamos com

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi e^* |\Psi_\infty|^2}{c^2 m^*} \nabla \times \vec{A} \therefore \quad (1.63)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{H}, \quad (1.64)$$

onde  $\lambda = \sqrt{c^2 m^* / 4\pi e^* |\Psi_\infty|^2}$ , conforme Eq. (1.45), que é a equação de London, Eq. (1.9), para  $\vec{r} \neq 0$ . Para que se possa levar em conta o núcleo do vórtice ( $\vec{r} = 0$ ), a Eq. (1.64) deve ser ajustada para a rápida variação sofrida por  $f(\vec{r})$ , que resulta numa contribuição

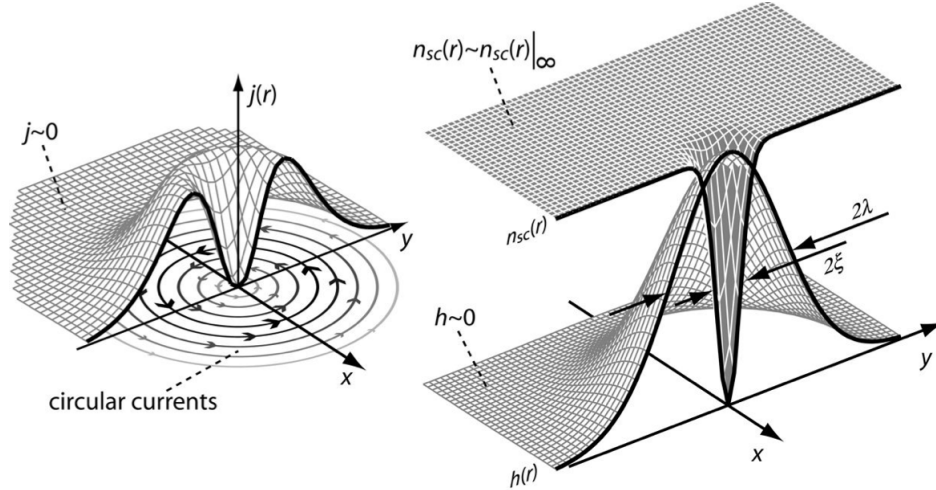


Figura 15: Figura ilustrando a estrutura espacial de um único vórtice. A esquerda é mostrado a densidade de corrente  $j(r)$  que é zero no centro do vórtice e, de uma distância  $\approx \xi$ , tem valor diferente de zero e decai novamente a zero através de um comprimento do ordem de  $\lambda$ , comprimento de penetração. A direita é mostrado a distribuição radial do campo magnético local  $h(r)$  e da densidade de elétrons supercondutores  $n_{sc}(r)$ . Figura retirada de [7].

do tipo função delta bidimensional, logo

$$\lambda^2 \nabla^2 \vec{H} - \vec{H} = \Phi_0 \delta(\vec{r}) \hat{e}_z, \quad (1.65)$$

onde  $\hat{e}_z$  é um vetor unitário na direção  $z$ , ao longo do vórtice, o coeficiente da função delta tem unidade de fluxo magnético e a intensidade da função delta é o próprio fluxo quântico  $\Phi_0$ . Combinando esta equação com as equações de Maxwell, pode-se calcular o campo magnético local e a distribuição de correntes de um vórtice [7].

A distribuição local de campo magnético em torno do vórtice ( $\vec{r} \neq 0$ ), considerando  $\vec{H} = H(r) \hat{e}_z$ , pode ser expressa como [5, 29, 7, 39]

$$H(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left( \frac{r}{\lambda} \right), \quad (1.66)$$

onde  $K_0$  é a função de Bessel modificada de segundo tipo de ordem zero, cujas expressões assintóticas são

$$H(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \left( \frac{\lambda}{r} \right), \quad \text{quando } \xi < r \ll \lambda \quad (1.67)$$

e

$$H(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}} \exp \left( -\frac{r}{\lambda} \right), \quad \text{para } r \gg \lambda. \quad (1.68)$$

A distribuição de corrente de um único vórtice pode ser calculada a partir da dependência radial do campo magnético local [5, 7], o que leva a

$$j(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^3} K_1 \left( \frac{r}{\lambda} \right), \quad (1.69)$$

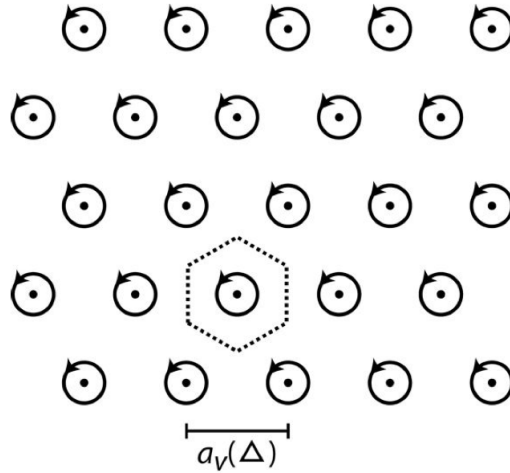


Figura 16: Diagrama esquemático de uma rede triangular de vórtices com um período  $a_v$ . Figura retirada de [7].

onde  $K_1$  é a função de Bessel modificada de segundo tipo de primeira ordem, cujas expressões assintóticas, usadas para calcular as correntes muito próximas e distantes do núcleo do vórtice são

$$j(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}, \text{ quando } \xi < r \ll \lambda \quad (1.70)$$

e

$$j(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right), \text{ para } r \gg \lambda. \quad (1.71)$$

### 1.7.3 Rede de vórtices - considerações gerais

Em supercondutores de uma componente, os vórtices interagem entre si de forma repulsiva. Eles tendem a se arranjar em posições que maximizem as suas distâncias mútuas, o que leva a formar uma rede de vórtices bidimensional hexagonal [5] conhecida como rede de Abrikosov [7]. Cada linha de fluxo, como mostrado anteriormente, carrega consigo um fluxo quantizado  $\Phi_0$  produzido pelas supercorrentes que circulam em torno do núcleo do vórtice, conforme ilustrado à esquerda na Fig. 15. O campo magnético tem um pico no centro do vórtice e o parâmetro de ordem supercondutor é zero no seu centro (à direita na Fig. 15). Portanto, a posição de um vórtice fica bem definida pela linha que passa por este ponto onde o parâmetro de ordem é nulo. O vórtice pode ser visto como um tubo no qual a supercondutividade é fraca, cujo raio é da ordem do comprimento de penetração  $\lambda$  e o raio do seu núcleo é da ordem do comprimento de coerência  $\xi$ , quando ele está isolado ou bem separado dos outros vórtices, Fig. 15.

A energia de interação repulsiva, por unidade de comprimento, entre dois vór-

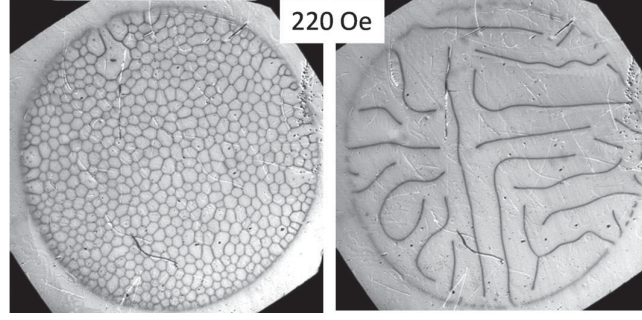


Figura 17: Estrutura de um estado intermediário, dividido em faixas normais e supercondutoras (linhas escuras), em um disco de cristal de Pb a 5K obtido por técnica óptico-magnética. A amostra da esquerda foi obtida após o aumento do campo magnético aplicado com a amostra inicialmente resfriada a campo zero (ZFC), enquanto que a amostra da direita foi obtida com o decréscimo do campo magnético. Figura retirada de [10].

tices ‘ $i$ ’ e ‘ $j$ ’ distante entre si de  $r_{ij}$  é dada por [7, 29]

$$U_{ij}(r_{ij}) = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r_{ij}}{\lambda}\right), \quad (1.72)$$

a qual decresce exponencialmente a grandes distâncias,  $r_{ij} \gg \lambda$ , como

$$U_{ij}(r_{ij}) = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r_{ij}}} \exp\left(-\frac{r_{ij}}{\lambda}\right), \quad (1.73)$$

e diverge a curtas distâncias,  $\xi < r_{ij} \ll \lambda$  como

$$U_{ij}(r_{ij}) = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{r_{ij}}\right). \quad (1.74)$$

A força repulsiva entre dois vórtices é, portanto

$$f_{ij}(r_{ij}) = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^3} K_1\left(\frac{r_{ij}}{\lambda}\right). \quad (1.75)$$

Para uma dada densidade de vórtices  $n_v$ , a distância mútua máxima entre os vórtices é obtida para um arranjo triangular, o qual é a configuração de vórtices mais favorável energeticamente, Fig. 16. Com o aumento do campo magnético, a densidade de vórtices  $n_v$  aumenta e a distância  $a_v$  entre dois vórtices vizinhos decresce. O campo magnético e a distância  $a_v$  estão relacionados através da expressão [1, 7]

$$B_\Delta = \Phi_0 n_v = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_0}{a_v^2}. \quad (1.76)$$

A segunda configuração mais favorável, com uma energia apenas um pouco



maior que a da rede triangular, é de uma rede quadrada de vórtices, que possui uma relação entre a distância de dois vórtices vizinhos e o campo magnético dada por [7]

$$B_{\square} = \Phi_0 n_v = \frac{\Phi_0}{a_v^2}. \quad (1.77)$$

Se dois vórtices são gerados em um supercondutor do tipo-I, seus núcleos se sobrepõem inicialmente, uma vez que  $\xi$  é maior que  $\lambda$ , levando a um ganho na energia de condensação e, conseqüentemente, à atração entre estes vórtices. Essa interação atrativa entre os dois vórtices, num supercondutor de tipo-I, é o que leva a formação de domínios macroscópicos normais no estado intermediário [7, 48, 49, 10, 50], conforme pode ser visto na Fig. 17. Embora termodinamicamente instáveis em supercondutores do tipo-I, os vórtices aparecem como zeros nas equações de GL aplicadas aos supercondutores do tipo-I [7]. Em supercondutores do tipo-II, dois vórtices, entretanto, sobrepõem inicialmente suas correntes, uma vez que  $\lambda$  é maior que  $\xi$ , o que leva a uma interação repulsiva entre os vórtices, e assim à formação da rede de Abrikosov, Fig. 13.

#### 1.7.4 Fixação ('pinning') do fluxo

Um supercondutor é capaz de conduzir corrente contínua sem perda alguma desde que não ultrapasse a densidade de corrente crítica  $j_c$  do material [29, 7, 40]. Em supercondutores do tipo-II, com a presença de vórtices, a aplicação de corrente no material leva ao movimento dos vórtices produzindo dissipação de energia e limitando o seu estado supercondutor. A origem do movimento destes vórtices, e, conseqüentemente, da dissipação de energia está ligada à força de Lorentz que surge da interação entre a densidade de corrente no supercondutor e o fluxo de campo magnético carregado pelo vórtice. Essa densidade de corrente pode tanto ser devido a uma corrente aplicada quanto a outros vórtices, também presentes no supercondutor, que interagem repulsivamente entre si, em supercondutores do tipo-II. Para um par de vórtices, cuja separação é suficiente para que a densidade de corrente possa ser considerada constante na região onde os vórtices se encontram, e para a densidade de correntes aplicadas, a força de Lorentz, por unidade de comprimento, é dada por

$$\vec{f}_L = \vec{j} \times \Phi_0 \hat{e}_z. \quad (1.78)$$

onde o fluxo de campo magnético está orientado segundo a direção ao longo do eixo  $z$ . Quando em movimento, os vórtices passam a sofrer a ação de uma força de atrito, por unidade de comprimento, do tipo  $\vec{f} = \eta \vec{v}$  que retarda seu movimento e de uma terceira força, chamada força *Magnus*<sup>1</sup> que é da forma  $\alpha n_s e (\vec{v} \times \Phi_0 \hat{e}_z)$ , onde  $n_s$  é a densidade de elétrons supercondutores. Pode-se, portanto, escrever a força total, por unidade de

<sup>1</sup>Para maiores detalhes sobre a origem da força *Magnus* ver Ref. [5], capítulo 12, sec. E.

comprimento, que atua sobre um vórtice como sendo [7]

$$\vec{f} = \vec{f}_L - \eta \vec{v}_v - \vec{f}_M, \quad (1.79)$$

em que foi considerada a contribuição da força de Lorentz por unidade de comprimento  $\vec{f}_L$ , da força de atrito e da força *Magnus*  $\vec{f}_M$ , que usualmente é desprezível. A fim de aumentar o valor da corrente crítica dos supercondutores na presença de um campo magnético, evita-se que os vórtices se movimentem e, portanto, dissipem energia, pela adição de algum mecanismo que possa contra-balancear a força de Lorentz. Esses mecanismos de fixação dos vórtices produzem uma força de fixação (*pinning*), por unidade de volume  $\vec{f}_P$ , que tem o módulo de sua média macroscópica dado pela expressão [7]

$$f_P = j_c B, \quad (1.80)$$

que a relaciona com a densidade de corrente crítica  $j_c$  através do campo magnético  $B$ . Entretanto, uma fórmula geral para  $\vec{f}_P$  é complicada, uma vez que ela depende do tipo de mecanismo utilizado para a fixação. O limite teórico para a corrente crítica é determinado pela corrente  $i_c^{GL}(T)$ , para a qual os pares de Cooper são destruídos, é expressa como [7]

$$i_c^{GL} = \frac{4}{3\sqrt{6}} \frac{H_c(T)}{\lambda(T)}, \quad (1.81)$$

onde  $H_c$  é o campo crítico termodinâmico e  $\lambda$  é o comprimento de penetração. As forças de fixação, em geral, não são bem entendidas, vários modelos e teorias foram propostos para explicá-las [5]. A fixação eletromagnética dos vórtices tem se mostrado mais efetiva que a fixação por defeitos, uma vez que o potencial de aprisionamento dos defeitos é bastante limitado. A fixação eletromagnética consiste da perturbação das supercorrentes em torno do vórtice e de seus campos magnéticos locais, quebrando assim sua simetria rotacional. A energia cinética das supercorrentes pode ser diminuída quando os vórtices estão situados sob os sítios de aprisionamento, o que resulta na atração dos vórtices e destes centros de fixação [1].

As equações de GL serão utilizadas para o estudo de uma bicamada supercondutor-ferromagneto, objeto de estudo considerado neste trabalho. O ferromagneto, consiste de domínios magnéticos com polarização alternada em domínios vizinhos. Além da fixação dos vórtices adicionados, pela atração com os domínios de mesma polaridade que o campo aplicado, o ferromagneto pode induzir a formação espontânea de pares de vórtice-antivórtice nas paredes de domínio.

No capítulo seguinte, será apresentada uma descrição detalhada da discretização destas equações e do método numérico para sua solução, o qual foi utilizado para a obtenção dos resultados de simulação que serão apresentados no seu respectivo capítulo.

## 2 Método Numérico

As equações de Ginzburg-Landau (GL) são um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, cuja solução analítica não é possível exceto em poucos casos específicos [41, 51]. Portanto, utilizamos, para resolver o conjunto de equações, o método das diferenças finitas, onde o espaço contínuo é substituído por um domínio discreto equivalente. Em cada ponto do espaço discreto obtém-se uma solução aproximada para o parâmetro de ordem a partir das condições iniciais e das condições de contorno.

### 2.1 As equações de GL adimensionais e a forma dependente do tempo da primeira equação

Para estudar a dinâmica do sistema é necessário escrever uma versão dependente do tempo para a primeira equação de GL. Para se obter tal equação, a primeira equação de Ginzburg-Landau dependente do tempo (TDGL)<sup>1</sup>, assume-se que o caminho para o equilíbrio segue um processo de relaxação.

Considerando-se as variáveis adimensionais,

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{r}} &= \vec{r}/\xi(T), \\ \tilde{\psi} &= \Psi/\psi_\infty(T), \\ \tilde{\vec{A}} &= \vec{A}/A_o,\end{aligned}\tag{2.1}$$

as equações de GL (1.28), (1.41) e a Eq. (1.40), tomam a forma (omitindo-se o til) adimensional a seguir, respectivamente,

$$\left(-i\nabla - \vec{A}\right)^2 \psi + (|\psi|^2 - 1) \psi = 0,\tag{2.2}$$

$$\vec{j}_s = \frac{1}{2i} (\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger) - \vec{A} |\psi|^2\tag{2.3}$$

e

$$\vec{j}_s = -\kappa^2 \nabla \vec{A},\tag{2.4}$$

com  $\xi(t) = \sqrt{-\hbar^2/2m^*|\alpha|}$ ,  $\psi_\infty = \sqrt{-\alpha(T)/\beta}$ ,  $A_o = \hbar c/2e\xi$ ,  $\kappa = \lambda/\xi$  e  $\lambda = \sqrt{m^*c^2/4\pi e^{*2}\psi_\infty^2}$ .

---

<sup>1</sup>Abreviatura do inglês “Time dependent Ginzburg-Landau equation”.

Para obter-se a primeira equação na forma dependente do tempo, adiciona-se uma derivada temporal para o parâmetro de ordem à Eq. (2.2), conforme descrito em [52, 9, 47] e, além disso, a fim de garantir a sua invariância de calibre, adiciona-se uma transformação de calibre para o parâmetro de ordem, o potencial vetor e o potencial escalar da forma

$$\begin{aligned}\Psi &\rightarrow \Psi \exp\left(-i\frac{2e}{\hbar c}\chi\right), \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \nabla\chi, \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi,\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde  $\chi$  é um campo escalar arbitrário e, admitindo-se a escolha do calibre  $\phi = 0$  para todos os tempos, com  $\phi$  sendo eliminado das equações TDGL, tem-se a seguinte equação dependente do tempo

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{\eta} \left[ \left( i\nabla + \vec{A} \right)^2 \psi + (|\psi|^2 - 1) \psi \right],\tag{2.6}$$

onde  $\eta$  é um coeficiente real arbitrário, útil para garantir a estabilidade numérica no processo iterativo realizado, e que, no caso das equações de GL dependentes do tempo, é determinado pela teoria microscópica, BCS, para diferentes casos limites [47, 53]. Adota-se  $\eta = 1$  quando utilizamos um modelo de Drude para o estado normal,  $\eta = 12$  para supercondutores com impurezas magnéticas e  $\eta = 5,79$  para supercondutores com acoplamento fraco [47].

## 2.2 Método das variáveis de ligação

A TDGL é uma equação invariante de calibre, mas quando discretizada, a equação resultante pode não preservar sua invariância em todo o domínio discreto. Para contornar esse problema e garantir a invariância de calibre para tal sistema, utiliza-se o método das variáveis de ligação.

As variáveis de ligação são variáveis auxiliares que estão associadas à união de dois sítios vizinhos do domínio discreto e substituem o potencial vetor na forma discretizada da equação a fim de garantir que ela permaneça invariante [54]. Elas estão relacionadas às componentes do potencial vetor, nas direções  $x$  e  $y$ , por [47]

$$\mathcal{U}^x(x, y, t) = \exp\left(-i \int_{x_0}^x A_x(\xi, y, t) d\xi\right),\tag{2.7}$$

$$\mathcal{U}^y(x, y, t) = \exp\left(-i \int_{y_0}^y A_y(x, \eta, t) d\eta\right).\tag{2.8}$$

É importante notar que, para cada célula, podemos ainda definir uma terceira variável auxiliar,  $\mathcal{L}$ , avaliada no centro da célula, que está associada à integral da variável de ligação no contorno da célula, ou seja, ela representa o fluxo magnético no centro da célula. Se estendermos esse processo para toda a rede, teremos o fluxo magnético na superfície supercondutora.

## 2.3 Discretização da equação de TDGL e da supercorrente

Podemos escrever  $\mathcal{U}^x$  e  $\mathcal{U}^y$ , em termos de seus análogos discretos,  $U_{i,j}^x$  e  $U_{i,j}^y$ , pelas relações

$$\mathcal{U}_{i,j}^x = \prod_{k=1}^{i-1} U_{k,j}^x, \quad \mathcal{U}_{i,j}^y = \prod_{k=1}^{j-1} U_{i,k}^y, \quad (2.9)$$

onde

$$U_{i,j}^x = \exp\left(-i \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x dx\right) = \exp(-ia_x \langle A_x \rangle), \quad (2.10)$$

é a variável de ligação entre os pontos da malha  $(i, j)$  e  $(i+1, j)$  e similarmente,

$$U_{i,j}^y = \exp\left(-i \int_{y_j}^{y_{j+1}} A_y dy\right) = \exp(-ia_y \langle A_y \rangle), \quad (2.11)$$

é a variável de ligação entre os pontos da malha  $(i, j)$  e  $(i, j+1)$ , conforme pode ser observado na Fig. 18. Em nossos cálculos, todo o sistema é mapeado em uma rede quadrada, composta de  $N_x \times N_y$  células, com espaçamento da grade de  $a_x$  e  $a_y$ . O parâmetro de ordem  $\psi$  é definido nos vértices da rede, enquanto o potencial vetor  $\vec{A}$  é definido entre dois sítios vizinhos dessa rede. Entretanto, trocamos  $\vec{A}$  por  $\mathcal{U}_{i,j}^\mu$ , em que  $\mu = (x, y)$ .

Podemos ainda, escrever uma versão discreta das Eq. (2.10) e (2.11), como

$$U_{i,j}^x \approx \exp(-iA_x(x_i + a_x/2, y_j) a_x), \quad U_{i,j}^y \approx \exp(-iA_x(x_i, y_j + a_y/2) a_y). \quad (2.12)$$

Vamos agora discretizar a TDGL (2.6), começando pelo termo  $(-i\nabla - \vec{A})^2 \psi$ : para uma componente  $\mu$ , temos que

$$\begin{aligned} (-i\nabla_\mu - \vec{A}_\mu)^2 \psi_{i,j} &= -\nabla_\mu^2 \psi_{i,j} + i \left( \nabla_\mu \vec{A}_\mu - i\vec{A}_\mu^2 \right) \psi_{i,j} + 2i\vec{A}_\mu \nabla_\mu \psi_{i,j} \\ &= \frac{1}{-\mathcal{U}_{i,j}^\mu} \left[ \mathcal{U}_{i,j}^\mu \nabla_\mu^2 \psi_{i,j} - i\mathcal{U}_{i,j}^\mu \left( \nabla_\mu \vec{A}_\mu - i\vec{A}_\mu^2 \right) \psi_{i,j} - 2i\vec{A}_\mu \mathcal{U}_{i,j}^\mu \nabla_\mu \psi_{i,j} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde nesta última equação, incluímos a variável auxiliar  $\mathcal{U}_{i,j}^\mu$ . Para ela, temos as seguintes

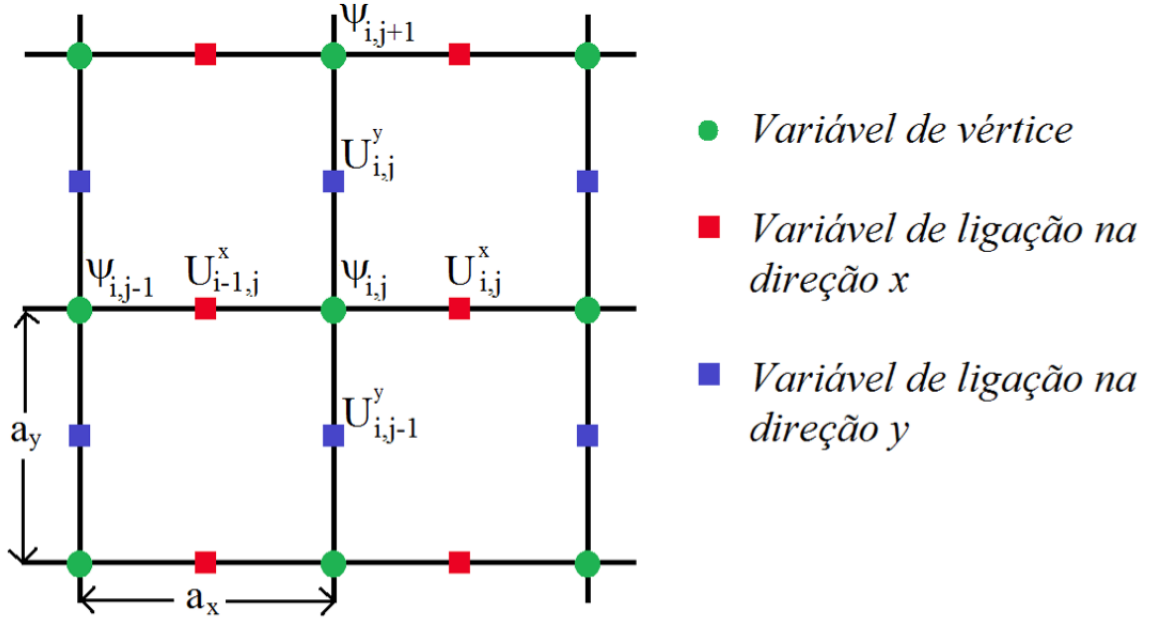


Figura 18: Esquema do método das variáveis de ligação para uma rede quadrada, com espaçamento da grade  $a_x$ , na direção de  $x$  e  $a_y$ , na direção de  $y$ , como o usado nas simulações. Figura retirada de [9].

igualdades:

$$\nabla_\mu \mathcal{U}_{i,j}^\mu = -i \vec{A}_\mu \mathcal{U}_{i,j}^\mu, \quad (2.14)$$

$$\nabla_\mu^2 \mathcal{U}_{i,j}^\mu = -i \mathcal{U}_{i,j}^\mu \left( \nabla_\mu \vec{A}_\mu - i \vec{A}_\mu^2 \right). \quad (2.15)$$

Utilizando estas igualdades na Eq. (2.13), obtem-se

$$\left( -i \nabla_\mu - \vec{A}_\mu \right)^2 \psi_{i,j} = -\frac{1}{\mathcal{U}_{i,j}^\mu} \left( 2 \left( \nabla_\mu \mathcal{U}_{i,j}^\mu \right) \nabla_\mu \psi_{i,j} + \nabla_\mu^2 \mathcal{U}_{i,j}^\mu \psi_{i,j} + \mathcal{U}_{i,j}^\mu \nabla_\mu^2 \psi_{i,j} \right), \quad (2.16)$$

e finalmente

$$\left( -i \nabla_\mu - \vec{A}_\mu \right)^2 \psi_{i,j} = -\frac{1}{\mathcal{U}_{i,j}^\mu} \nabla_\mu \left( \nabla_\mu \left( \mathcal{U}_{i,j}^\mu \psi_{i,j} \right) \right). \quad (2.17)$$

Escrevendo a expressão equivalente em diferenças finitas, para  $\mu = x$ , ficamos com

$$\left( -i \nabla_x - \vec{A}_x \right)^2 \psi_{i,j} = -\frac{1}{\mathcal{U}_{i,j}^x} \left( \frac{\mathcal{U}_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\mathcal{U}_{i,j}^x \psi_{i,j} + \mathcal{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right). \quad (2.18)$$

Neste ponto é importante conhecer a seguinte relação, que pode ser obtida das Eqs. (2.9),

$$U_{i,j}^x = \overline{\mathcal{U}_{i,j}^x} \mathcal{U}_{i+1,j}^x. \quad (2.19)$$

Ela nos permite reescrever a Eq. (2.18) como

$$\left( -i \nabla_x - \vec{A}_x \right)^2 \psi_{i,j} = -\left( \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right). \quad (2.20)$$

Levando em conta que todo o procedimento descrito acima vale para a componente  $y$ , pode-se, então, escrever

$$\begin{aligned} (-i\nabla - \vec{A})^2 \psi &= - \left( \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}}{a_y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, a Eq. (2.6) na sua forma discreta fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left( \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}}{a_x^2 \eta} \right) \\ &\quad + \left( \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}}{a_y^2 \eta} \right) + \frac{1}{\eta} (1 - |\psi_{i,j}|^2) \psi_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

A integração temporal pode ser aproximada por um passo simples de Euler, [9]

$$\psi_{i,j}^{t+\Delta t} = \psi_{i,j}^t + \Delta t \frac{\partial \psi_{i,j}^t}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t). \quad (2.23)$$

O método de Euler é uma aproximação de primeira ordem no tempo, sendo necessário utilizar passos muito pequenos para garantir sua estabilidade. O tamanho do passo temporal ( $\Delta t$ ) depende do tamanho do passo espacial ( $h$ ), estando relacionado com ele por  $\Delta t < h^2/4$  [9, 55].

Convém notar que a equação TDGL na sua forma discreta pode ser resolvida por recorrência [55], dada a condição inicial,  $\psi_{i,j}^1$  em todos os pontos da rede, é possível determinar o seu valor seguinte; os pontos extremos,  $\psi_{1,j}^t$  e  $\psi_{i,N}^t$  são dados pela condição de contorno (1.29). Entretanto, para garantir a convergência, o  $\Delta t$  deve ser muito pequeno e isso leva a um custo computacional muito grande. Para contornar esta dificuldade um artifício numérico é empregado, o qual consiste na escolha de termos para associar com a nova solução para  $\psi$  e outros para calcular baseados em  $\psi^o$ , o parâmetro de ordem corrente [56]. Além disso, o termo não-linear é linearizado para facilitar a convergência como segue

$$\begin{aligned} |\psi|^2 \psi &= \psi^2 \psi = [\psi^o + (\psi - \psi^o)]^2 [\psi^{o\dagger} + (\psi^\dagger - \psi^{o\dagger})] \\ &\approx |\psi^o|^2 \psi^o + 2|\psi^o|^2 (\psi - \psi^o) + \psi^{o2} (\psi^\dagger - \psi^{o\dagger}) \\ &= 2|\psi^o|^2 \psi - 2|\psi^o|^2 \psi^o + \psi^{o2} \psi^\dagger. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim, pode-se reescrever a Eq. (2.22) como

$$\begin{aligned} \Upsilon (\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^o) &= \left( \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}^o - 2\psi_{i,j}^n + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}^o}{a_x^2} \right) \\ &+ \left( \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}^o - 2\psi_{i,j}^n + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}^o}{a_y^2} \right) + \psi_{i,j}^n \\ &- 2 |\psi_{i,j}^o|^2 \psi_{i,j}^n + 2 |\psi_{i,j}^o|^2 \psi_{i,j}^o - (\psi_{i,j}^o)^2 \psi_{i,j}^{n\dagger}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde os superescritos  $n$  e  $o$  se referem ao novo valor (obtido) e o valor corrente para o parâmetro de ordem, respectivamente, e  $\Upsilon = -\eta/\Delta t$ . Reorganizando os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} \left( \Upsilon - 1 - \frac{2}{a_x^2} - \frac{2}{a_y^2} + 2 |\psi_{i,j}^o|^2 \right) \psi_{i,j}^n &= \Upsilon \psi_{i,j}^o + \left( \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}^o + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}^o}{a_x^2} \right) \\ &+ \left( \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}^o + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}^o}{a_y^2} \right) \\ &+ 2 |\psi_{i,j}^o|^2 \psi_{i,j}^o - (\psi_{i,j}^o)^2 \psi_{i,j}^{n\dagger}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} c &= \left( \Upsilon - 1 - \frac{2}{a_x^2} - \frac{2}{a_y^2} + 2 |\psi_{i,j}^o|^2 \right), \\ a &= \Upsilon \psi_{i,j}^o + \left( \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}^o + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}^o}{a_x^2} \right) + \left( \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}^o + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}^o}{a_y^2} \right) + 2 |\psi_{i,j}^o|^2 \psi_{i,j}^o, \\ e &= (\psi_{i,j}^o)^2, \end{aligned}$$

o que nos permite escrever a Eq. (2.26) como

$$c\psi_{i,j}^n = a - e\psi_{i,j}^{n\dagger}, \quad (2.27)$$

cuja a solução é

$$\psi^n = \frac{a^\dagger e - ac^\dagger}{|e|^2 - |c|^2}, \quad (2.28)$$

onde o lado direito depende apenas do valor de  $\psi^o$ . É importante ressaltar aqui, que a escolha dos termos com  $\psi^o$  e  $\psi^n$  não é única, mas a apresentada tem demonstrado estabilidade em uma grande quantidade de simulações como descrito por [56].

Conhecendo-se o valor do parâmetro de ordem  $\psi$  em todos os pontos da malha de discretização, pode-se utilizar seus valores para calcular as densidades de corrente  $j_x$  e



$j_y$ , componentes da Eq. (2.3), que pode ser reescrita como [1]

$$j_{x,y} = \frac{1}{2} \left[ \psi^\dagger \left( -i \frac{\partial}{\partial x,y} - A_{x,y} \right) \psi + \psi \left( -i \frac{\partial}{\partial x,y} - A_{x,y} \right)^\dagger \psi \right], \quad (2.29)$$

e que, a partir do mesmo procedimento desenvolvido para a equação TDGL (2.6), pode ter sua componente  $x(y)$  reescrita na forma discreta como

$$j_{x(y)} = \frac{1}{4ia_x(a_y)} \left[ \left( \overline{U_{i,j}} \psi_{i,j}^\dagger + \psi_{i-1,j}^\dagger \right) (U_{i,j} \psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}) - (U_{i,j} \psi_{i,j} + \psi_{i-1,n}) \left( \overline{U_{i,j}} \psi_{i,j}^\dagger - \psi_{i,j}^\dagger \right) \right]. \quad (2.30)$$

A partir do valor da supercorrente, um novo valor para o potencial vetor pode ser calculado pela Eq. (2.4), que para ser resolvida, com  $\vec{A}$  desconhecido, emprega-se a transformada de Fourier, conforme desenvolvida no apêndice **B**, em que variações da corrente na direção  $z$  foram desprezadas. Com a determinação de um novo valor para o potencial vetor, o substituímos de volta na primeira Eq. GL (2.2) e todo o procedimento descrito anteriormente é repetido até que se chegue a uma solução convergente para ambas as equações. Desta forma, tem-se resolvido as duas equações de GL acopladas de forma auto-consistente a um campo magnético fixo.

### 2.3.1 Expressão para a energia livre

A fim de calcular a energia livre do sistema, determinaremos uma expressão bastante útil em nossas simulações, a energia livre de Gibbs. Para isso, partiremos da sua forma adimensional dada por [1]

$$\mathcal{F} = \frac{E \{ \Psi, \vec{A} \}}{H_c^2 V / 8\pi} = \int \left\{ -2 |\Psi|^2 + |\Psi|^4 + 2 \left| \left( -i \nabla - \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + 2\kappa^2 \left( \vec{H} - \vec{H}_o \right)^2 \right\} dV_s. \quad (2.31)$$

Considerando o termo cinético da energia, podemos reescrevê-lo como

$$\int 2 \left| \left( -i \nabla - \vec{A} \right) \Psi \right|^2 dV_s = \oint \vec{n} \cdot \left[ \Psi^\dagger \left( -i \nabla - \vec{A} \right) \Psi \right] dS + \int \Psi^\dagger \left( -i \nabla - \vec{A} \right)^2 \Psi dV_s. \quad (2.32)$$

Levando em conta a condição de contorno (1.29) e a primeira equação de GL em sua forma adimensional

$$\left( -i \nabla - \vec{A} \right)^2 \Psi = \Psi (1 - |\Psi|^2), \quad (2.33)$$

o termo cinético pode ser escrito como

$$\int 2 \left| \left( -i \nabla - \vec{A} \right) \Psi \right|^2 dV_s = \int (|\Psi|^2 - |\Psi|^4) dV_s. \quad (2.34)$$

Substituindo de volta na Eq. (2.31), ficamos com

$$\mathcal{F} = \int \left[ 2\kappa \left( \vec{H} - \vec{H}_o \right)^2 - \frac{1}{2} |\Psi|^4 \right] dV_s. \quad (2.35)$$

Considerando que  $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$  e o calibre de London  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , a energia livre torna-se

$$\mathcal{F} = \int \left\{ \left( \vec{A} - \vec{A}_o \right) \cdot \left[ \nabla^2 \left( \vec{A} - \vec{A}_o \right) \right] \kappa^2 - \frac{1}{2} |\Psi|^4 \right\} dV_s, \quad (2.36)$$

onde  $\vec{A}_o$  é o potencial vetor que corresponde ao campo magnético aplicado sem a presença de um supercondutor. Fazendo uso da expressão  $\vec{j}_s = -\kappa \nabla^2 \vec{A}$ , obtemos que a energia livre de Gibbs em unidades de  $H_c^2 V / 8\pi$  é dada por

$$\mathcal{F} = \int \left\{ 2 \left( \vec{A} - \vec{A}_o \right) \cdot \vec{j}_s - |\Psi|^4 \right\} dV_s, \quad (2.37)$$

com  $\vec{j}_s$  dado pela Eq. (2.3).

## 2.4 Condições de contorno

Como descrito anteriormente, os pontos internos da malha podem ser determinados a partir da condição inicial do problema, mas os pontos da borda da rede necessitam das condições de contorno. Em geral, para os supercondutores, considera-se as interfaces supercondutor/ metal ou supercondutor/ isolante (vácuo).

Quando temos a condição supercondutor/ isolante, a condição de contorno implica que nenhuma corrente supercondutora pode transpor o limite da amostra supercondutora [9], ou seja,

$$\vec{n} \cdot \left( -i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \Big|_S = 0,$$

da forma generalizada de De Gennes, o  $b \rightarrow \infty$ .

Em nosso estudo, utilizamos condições de contorno periódicas, ou seja, pontos extremos da malha representam um mesmo ponto da amostra estudada. É necessário, no entanto, para aplicarmos a condição de contorno periódica que o potencial vetor também seja periódico, ou seja, que seu valor nas fronteiras da amostra estudada sejam iguais. Assim, de uma forma geral, as condições de contorno periódicas para o potencial vetor e para o parâmetro de ordem são da forma [57, 9]

$$\vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_\mu) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla \chi_\mu(\vec{r}), \quad (2.38)$$

$$\Psi(\vec{r} + \vec{r}_\mu) = \Psi(\vec{r}) \exp \left[ i \frac{2e}{\hbar c} \chi_\mu(\vec{r}) \right], \quad (2.39)$$

onde  $\mu = x, y$ ,  $\vec{r}_\mu$  são os vetores da rede e  $\chi_\mu(\vec{r})$  é o calibre dos potenciais associados com cada vetor  $\vec{r}_\mu$ . A escolha do calibre tem de ser adequada de modo que permita manter a condição de que o potencial vetor e o parâmetro de ordem sejam univalorados, o que implica na quantização do fluxo magnético, pelo teorema do Virial [57]. Um exemplo para o potencial vetor está feito no apêndice **A**.

Para que se possa fazer a implementação da condição de contorno periódica, é preciso ter uma versão discreta das Eq. (2.38) e (2.39). Como a invariância de calibre do potencial vetor é dada pelas variáveis de ligação  $U^x$  e  $U^y$ , utiliza-se, portanto, sua forma discreta. Para uma rede de tamanho  $L_x \times L_y$ , temos na direção  $x$ ,

$$\begin{aligned} U_{N_x+1,j}^x &= \exp \left( -i \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x(L_x + 1, j) dx \right) = \exp \left( -i \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x(1, j) dx \right), \\ U_{N_x+1,j}^x &= U_{1,j}^x, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} U_{N_x+1,j}^y &= \exp \left( -i \int_{y_i}^{y_{i+1}} A_y(L_x + 1, j) dy \right) = \exp \left( -i \int_{y_i}^{y_{i+1}} A_y(1, j) dy \right) \exp \left( -i \frac{2\pi a_y n}{L_y} \right), \\ U_{N_x+1,j}^y &= U_{1,j}^y \exp \left( -i \frac{2\pi a_y n}{L_y} \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\psi_{N_x+1,j} = \psi_{1,j} \exp \left( \frac{i2\pi n y}{L_y} \right), \quad (2.42)$$

onde  $n$  é o número de fluxo quantizado [57], dado por  $\Phi = n\Phi_0$ . Na direção  $y$ , ficamos com

$$U_{i,N_y+1}^x = U_{i,1}^x, \quad (2.43)$$

$$U_{i,N_y+1}^y = U_{i,1}^y, \quad (2.44)$$

$$\psi_{i,N_y+1} = \psi_{i,1}. \quad (2.45)$$

### 2.4.1 Filme ferromagnético: modelo

O filme ferromagnético, parte do híbrido a ser simulado, é posicionado no topo do filme supercondutor conforme ilustrado na Fig. [20]. Ele é adicionado as equações de GL através de seu potencial vetor, que pode ser construído a partir do potencial vetor de um único dipolo magnético, dado por

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2},$$

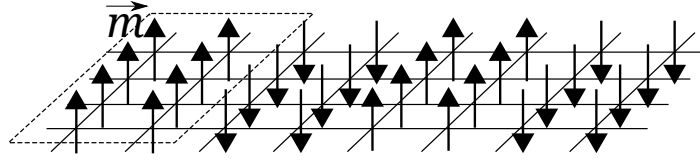


Figura 19: Grid de dipolos magnéticos, com domínios adjacentes de polaridade magnética alterada representando o filme ferromagnético considerado nas simulações.

onde  $\vec{m} = m\hat{z}$  é o momento de dipolo magnético perpendicular ao plano do filme. O nosso modelo é um arranjo de dipolos magnéticos, em que um domínio magnético é determinado pela região onde todos os dipolos estão com a mesma orientação (região envolvida por uma linha tracejada na Fig. [19]). O potencial vetor do filme é então determinado pela integração do potencial vetor, devido a todos os dipolos, em todos os pontos no centro do filme supercondutor,

$$\vec{A}_{fm}(\vec{r}) = \int \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} dV,$$

onde  $\vec{M} (= d\vec{m}/dV)$  é a magnetização do ferromagneto, oposta em domínios adjacentes, e o volume de integração é o do filme supercondutor.

No capítulo a seguir, os resultados obtidos através da simulação numérica das equações de GL para um filme supercondutor com um filme ferromagnético em seu topo são apresentados.

## 3 *Resultados*

### 3.1 Introdução

As propriedades fundamentais dos supercondutores são objeto de fundamental importância na pesquisa da física da matéria condensada do último século. Apesar de todo o progresso alcançado, os novos materiais supercondutores têm oferecido consistentemente novos desafios. Entretanto, independente do mecanismo da supercondutividade e suas manifestações precisas em um dado material, uma questão comum está sempre presente: quais são os parâmetros críticos do estado supercondutor e como esses parâmetros podem ser manipulados por meios externos. A respeito disso, muito esforço tem sido dedicado ao desenvolvimento de sistemas híbridos [13, 58, 59, 7], onde nano estruturas artificiais de supercondutor, ou seu acoplamento com outro material, podem levar a uma melhora controlável dos parâmetros críticos do material.

Na maioria dos casos, o comportamento crítico dos supercondutores na presença de um campo magnético aplicado e/ou corrente elétrica é determinada pelo comportamento dos vórtices. Sendo localmente normal, vórtices móveis dão origem a dissipações e flutuações térmicas da supercondutividade, as quais limitam fortemente suas aplicações práticas na presença de qualquer campo magnético ou flutuações térmicas. Nesse sentido, a fixação artificial dos vórtices por nano cadeias de defeitos têm sido amplamente estudadas com o objetivo de aumentar a corrente elétrica máxima que um supercondutor do tipo-II pode sustentar [12, 7, 60]. Entretanto, tais estruturas de fixação tem um potencial finito, determinado pelo tamanho do buraco ou defeito. Os nano magnetos surgem, então, como alternativa [13, 58, 59], os quais quando colocados próximos do supercondutor podem atrair os vórtices magneticamente com um potencial proporcional ao seu tamanho/espessura [61, 62, 15] bem como por sua magnetização (a qual pode ser ajustada em alguns casos, ver Ref. [63]). Uma característica bastante interessante desses nano pontos magnéticos ou de seus arranjos é que eles produzem um campo magnético não-homogêneo, mas com um fluxo magnético líquido igual a zero em qualquer plano subjacente onde exista um supercondutor. Além disso, eles produzem uma forte perturbação local no estado supercondutor, causando assim uma forte depleção na densidade de pares de Cooper na região próxima as bordas dos magnetos, onde o campo magnético muda de sinal e a corrente Meissner é muito grande e pode, espontaneamente, induzir pares de vórtice-antivórtice nos domínios onde o campo magnético é positivo ou negativo, respectivamente [64, 17, 65, 22, 16]. Portanto, além do efeito de fixação, uma rica estrutura de

vórtice-antivórtice surge em híbridos supercondutor-ferromagneto, as quais precisam ser cuidadosamente consideradas quando estuda-se os parâmetros críticos do sistema. Um exemplo peculiar disso foi demonstrado nas Refs. [66, 67, 68, 69, 70], onde para um filme supercondutor com uma cadeia regular de pontos magnéticos conseguiu-se uma corrente e temperatura críticas máximas controláveis como uma função do campo magnético aplicado, pela correspondência do número de vórtices adicionados devido ao campo magnético aplicado no sistema com o número de antivórtices induzido pelos magnetos que maximizavam os efeitos de suas aniquilações.

Desde a década passada, as bicamadas supercondutor-ferromagneto (SF) acopladas magneticamente assumiram o lugar dos híbridos com pontos magnéticos, sendo inclusive mais fáceis de produzir. Em tais híbridos, o ferromagneto se auto-organiza em estados magnéticos com domínios adjacentes de polaridades opostas, onde os domínios podem ser manipulados por um campo magnético aplicado ao longo do plano do ferromagneto [71]. Tal campo aplicado não tem praticamente efeito algum no fino filme supercondutor que está adjacente, mas a mudança no campo que é produzido pelo ferromagneto irá afetá-lo. Em tais estruturas de bicamadas, os estudos experimentais e teóricos têm revelado o acoplamento entre os padrões de domínio e a fixação dos vórtices [59, 21, 19], bem como o comportamento peculiar da supercondutividade sob as paredes de domínios [72, 20]. Na presença de uma corrente aplicada, a anisotropia direcional da corrente crítica com respeito a direção dos domínios tem sido medida [23, 25, 24]. Na ausência de qualquer influência externa, os pares de vórtice e antivórtice induzidos pela camada ferromagnética no filme supercondutor subjacente foram visualizados diretamente [22, 16]. Apesar de todo esse progresso, não existe estudo teórico de uma bicamada SF que conecte a fenomenologia de vórtice e antivórtice com o comportamento (anisotrópico) observado quando a amostra é submetida a um campo magnético e/ou corrente elétrica. Motivado por isso, e pela rica e interessante dinâmica (acoplada mas opostamente influenciada) da matéria de vórtice e antivórtice sob a influência de excitações eletromagnéticas externas é que nesta tese apresentamos simulações de Ginzburg-Landau de um filme supercondutor sob um filme ferromagnético (com uma estrutura de domínios periódicos bem ordenados, Fig. [20]). Os dois filmes estão interagindo somente magneticamente, estando eles separados por uma fina camada isolante (tipicamente por uma oxidação no experimento).

O capítulo de resultados é organizado como segue. Na seção 3.2, as simulações realizadas são descritas, tanto a abordagem teórica quanto a numérica. Na seção 3.3, discuti-se as configurações de vórtice-antivórtice esperadas na bicamada SF considerada na ausência de fatores externos. Na sequência, seção 3.4, os efeitos de um campo magnético aplicado é abordado, na seção 3.5 as condições anisotrópicas críticas e as configurações não-triviais de vórtice-anti vórtice e sua dinâmica na presença de uma corrente elétrica *dc*. Os resultados são apresentados de forma resumida no capítulo de conclusões.

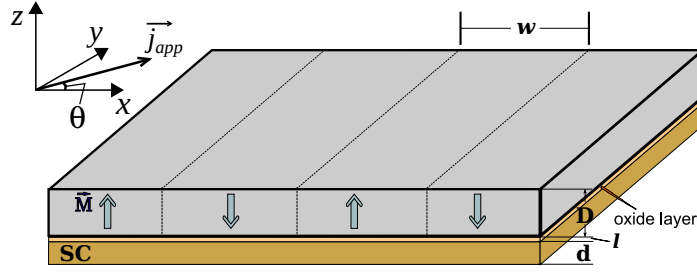


Figura 20: Visão esquemática de um filme supercondutor (com espessura  $d$ ) com uma camada de óxido em cima (espessura  $l$ ), sob um filme ferromagnético (espessura  $D$ ) com uma magnetização  $\vec{M}$  de orientação perpendicular ao filme e sentido alternado em domínios paralelos cujo o comprimento é  $w$ .

## 3.2 Modelo teórico

Estudamos o estado supercondutor de um filme supercondutor do tipo-II efetivamente extremo de espessura  $d$ , muito mais fino que o comprimento de penetração  $\lambda$ . Consideramos uma camada ferromagnética no topo do filme supercondutor (ver Fig. [20]), com domínios de magnetização  $M$  com polaridade perpendicular ao filme e sentidos alternados entre domínios vizinhos, cujo o comprimento de cada domínio  $w$  é tipicamente proporcional a raiz quadrada da espessura  $D$  do ferromagneto (ver Ref. [73]). O acoplamento eletrônico entre os filmes supercondutor e ferromagneto é evitado por uma camada isolante (óxido) de espessura  $l$ , difícil de evitar na fabricação experimental de dois estágios de tal bicamada.

Na teoria de Ginzburg-Landau, a diferença de energia entre os estados supercondutor e normal é dada por

$$\Delta E_{s/n} = \int \left[ -|\Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2} \left| (-i\nabla - \vec{A}) \Psi \right|^2 + \kappa^2 (\vec{H} - \vec{H}_0)^2 \right] dV, \quad (3.1)$$

onde, no presente caso,  $\vec{H}_0 = \vec{H}_{fm} + \vec{H}_{ext}$  denota o campo magnético total sobre o supercondutor, decorrentes tanto do filme ferromagnético ( $\vec{H}_{fm}$ ) quanto do campo externo homogêneo aplicado ( $\vec{H}_{ext}$ ). A equação (3.1) é dada em sua forma adimensional, onde a energia está em unidades de  $H_c^2/4\pi$  ( $H_c$  é o campo crítico termodinâmico), todas as distâncias estão em unidade do comprimento de coerência  $\xi$ , o potencial vetor  $\vec{A}$  está em unidades de  $c\hbar/2e\xi$ , o campo magnético  $\vec{H}$  está em unidades do campo crítico superior  $H_{c2} = c\hbar/2e\xi^2$ , e o parâmetro de ordem  $\Psi$  é ajustado pela  $\sqrt{-\alpha/\beta}$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  sendo os parâmetros fenomenológicos de Ginzburg-Landau (GL).

O parâmetro  $\kappa = \lambda/\xi$  em (3.1) é determinante para o comportamento magnético do supercondutor. A minimização do funcional de energia (3.1) leva às duas equações diferenciais acopladas de GL, uma para o parâmetro de ordem  $\Psi$  e a outra

para o potencial vetor  $\vec{A}$

$$\left(-i\nabla - \vec{A}\right)^2 \Psi = \psi (1 - |\Psi|^2), \quad (3.2)$$

$$-\kappa^2 \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{j}, \quad (3.3)$$

respectivamente, onde

$$\vec{j} = \frac{1}{2i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - |\Psi|^2 \vec{A}, \quad (3.4)$$

é a densidade de supercorrente na sua forma adimensional (em unidades de  $j_0 = cH_{c2}\xi/4\pi\lambda^2$ ). Notavelmente, para filmes finos de supercondutores o parâmetro de ordem é uniforme na direção  $z$ , e a média das equações de GL leva ao comportamento efetivo de tipo-II, com o parâmetro de GL efetivo  $\kappa_{eff} \approx \kappa^2/d \gg 1/\sqrt{2}$  [74]. Isso faz com a resposta magnética do supercondutor seja desprezível, e, portanto, podemos restringir as simulações de GL a resolução somente da equação (3.2), tomando  $\vec{A} = \vec{A}_0$ . Neste trabalho, embora estejamos considerando um caso tipo-II extremo, resolvemos o sistema completo de equações de GL de forma auto consistente, para sermos capazes de considerar cuidadosamente a distribuição de correntes no sistema, bem como o campo magnético dos vórtices e antivórtices emergentes. Mais detalhes da abordagem numérica também podem ser encontrados nas Ref. [17, 67] e nas referências citadas nestes trabalhos, bem como no capítulo precedente. Aqui, é importante de mencionar que nos cálculos é possível simular tanto o caso com condições experimentais de ‘field-cooled’ quanto o de ‘zero-field-cooled’, pela inicialização de um parâmetro de ordem muito fraco ou aleatório ou com seu valor de ‘bulk’ não perturbado, respectivamente. Em ambos os casos, as simulações foram realizadas centenas de vezes à fim de obter todos os possíveis estados estáveis da rica matéria de vórtices e antivórtices. Por este fato, e também por estarmos tratando da solução auto consistente de duas equações diferenciais não lineares em um grid numérico denso (com espaçamento típico de  $0.1\xi$ ), é que o esforço computacional para o presente estudo é bem desafiante.

Nossa amostra é considerada lateralmente periódica, logo as condições de contorno são consideradas periódicas para  $\vec{A}$  e  $\Psi$  [57, 17]. Na célula unitária com a periodicidade considerada, a camada ferromagnética tem quatro faixas de domínios com magnetização alternada anti paralela (como mostrado na Fig.[20]). Devido a esta particular geometria e periodicidade, o potencial vetor devido ao ferromagneto tem componente diferente de zero somente na direção  $y$ , ao longo dos domínios ferromagnéticos (veja Fig. [20]). Este potencial vetor ( $A_{fm}$ ) é calculado numericamente, dependendo dos parâmetros geométricos do filme ferromagnético e de sua magnetização, no plano central do supercondutor (isto é, a uma distância de  $l + d/2$  abaixo da camada ferromagnética). O comportamento do ferromagneto, por outro lado, não é considerado nas simulações, ou seja, assumimos que seu estado magnético não é afetado pelo fraco campo magnético do supercondutor [75], ou pelo campo magnético externo aplicado (para o qual usamos o calibre



simétrico  $A_{ext}^{x(y)} = (-)H_{ext}y(x)/2$ , ou o calibre de Landau  $A_{ext}^y = -H_{ext}x$ . Para as bicamadas típicas consideradas de SF (ex. de nióbio-permalói, considerada neste trabalho) tais premissa são bem justificadas. Finalmente, a adição de corrente elétrica ao nosso formalismo estacionário é feita pela adição de uma constante  $\vec{A}_j$  ao potencial vetor, na direção da corrente aplicada desejada (maiores detalhes podem ser encontrados nas Ref. [67, 76]). Portanto, para um supercondutor sob uma camada ferromagnética, na presença de um campo magnético externo e corrente aplicada, o potencial vetor total aplicado é  $\vec{A}_0 = \vec{A}_{fm} + \vec{A}_{ext} + \vec{A}_j$ . Quando a corrente aplicada excede a corrente crítica a solução estacionária das equações de GL, escritas acima, não podem ser mais determinadas.

### 3.3 Matéria de vórtice-antivórtice na ausência de campo aplicado e corrente

Daqui em diante, iremos dar enfoque principalmente à bicamada de nióbio (Nb)- permalói (Py) considerada experimentalmente nas Refs. [22, 16], com parâmetros: espessura do filme supercondutor  $d = 200$  nm,  $\xi(0) = 12$  nm,  $\lambda(0) = 61$  nm, temperatura de operação de 6 K ( $T/T_c = 0.674$ ), espessura do óxido  $l = 10$  nm e espessura do filme ferromagnético de Py  $D = 1$   $\mu$ m, com domínios de comprimento  $w = 470$  nm. Nesta temperatura de operação o campo magnético crítico superior para o filme de Nióbio considerado é  $H_{c2} = 7474$  Oe. O parâmetro variável remanescente é a magnetização de saturação do ferromagneto, a qual é variada obter e discutir o amplo intervalo das possíveis configurações de vórtice-antivórtice. É também importante mencionar que consideramos a magnetização do ferromagneto como uniforme em todo o seu volume e domínios com magnetização perpendicular ao plano do filme bastante intensos, embora esse não seja exatamente o caso para filmes reais de Py. Embora esses domínios com magnetização perpendicular tenham sido claramente observados nas Refs. [22, 16], a baixa razão de energia  $Q$  dos filmes de Py ( $Q = K/2\pi M_s^2 \approx 0.012 \ll 1$ , onde  $K$  é a anisotropia uniaxial perpendicular ao plano do filme) sugere uma significativa componente no plano do filme da magnetização e domínios fechados que reduzem significativamente o campo não homogêneo criado fora do filme magnético ([77]). Uma vez que não temos a exata estrutura micromagnética do filme de Py, usamos o modelo mostrado na Fig. [20] para que o campo não-homogêneo na superfície do supercondutor  $H_{fm}$  (mostrado na Fig. 21) corresponde aos valores experimentais medidos nas Refs. [22, 16]. Isto, resulta em baixos valores de  $M_s$  nas análises realizadas (até 50 emu/cm<sup>3</sup>, significativamente menor que 800 emu/cm<sup>3</sup>, esperado para o Py; entretanto, note que nossos valores estão em muito boa concordância os valores estimados de  $M_s = 20 - 30$  emu/cm<sup>3</sup> na Ref. [16] para a mesma geometria de domínio). A componente não-homogênea do campo do ferromagneto paralela ao plano do filme não é levada em consideração em nossas simulações uma vez que

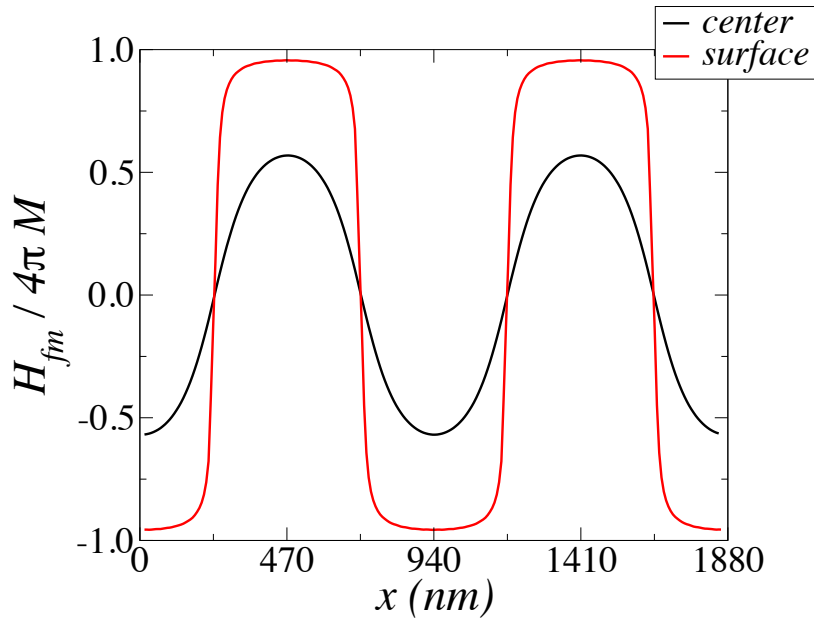


Figura 21: Perfil espacial da componente  $z$  do campo magnético não-homogêneo do filme ferromagnético considerado (largura dos domínio 470 nm, espessura  $1 \mu\text{m}$ ), no centro e na superfície do filme supercondutor subjacente (espessura 200 nm), separado por um óxido de 10 nm de espessura. A magnitude do campo em Oe é obtida pela direta substituição do valor considerado de  $M$  em  $\text{emu}/\text{cm}^3$ .

tais campos magnéticos, também paralelos ao plano do filme supercondutor, influenciam muito fracamente filmes supercondutores finos.

Começamos nossas considerações do caso sem campo magnético externo aplicado ou corrente elétrica. A camada ferromagnética é a única fonte de campo magnético sentida pelo supercondutor. À fim de encontrarmos todas as configurações de vórtices possíveis e explorarmos o estado supercondutor, buscamos por soluções estáveis das Eqs. (3.2) e (3.3), assim, tanto o estado fundamental e os estados de maior energia, metaestáveis (típicos em supercondutividade mesoscópica, ex. podem ser vistos na Ref. [78]). Inicialmente o parâmetro de ordem é aleatorizado antes de encontrarmos uma solução para um dado  $M$ , após a qual, a magnetização do ferromagneto é aumentada e diminuída adiabaticamente, sempre utilizando a configuração obtida previamente como condição inicial para o próximo valor de magnetização. Este procedimento, revela não somente os estados, mas também possíveis transições entre eles. Acoplada a inicialização aleatória para todos os valores de magnetização, este procedimento leva a um completo diagrama de energia de todos os possíveis estados no filme supercondutor como uma função da magnetização da camada ferromagnética. Este diagrama de energia é mostrado na Fig. (22), para o conjunto de parâmetros apresentados acima, correspondendo aos experimentos das Refs. [22, 16].

Como esperado, devido ao balanço ideal dos (especialmente separados) fluxos

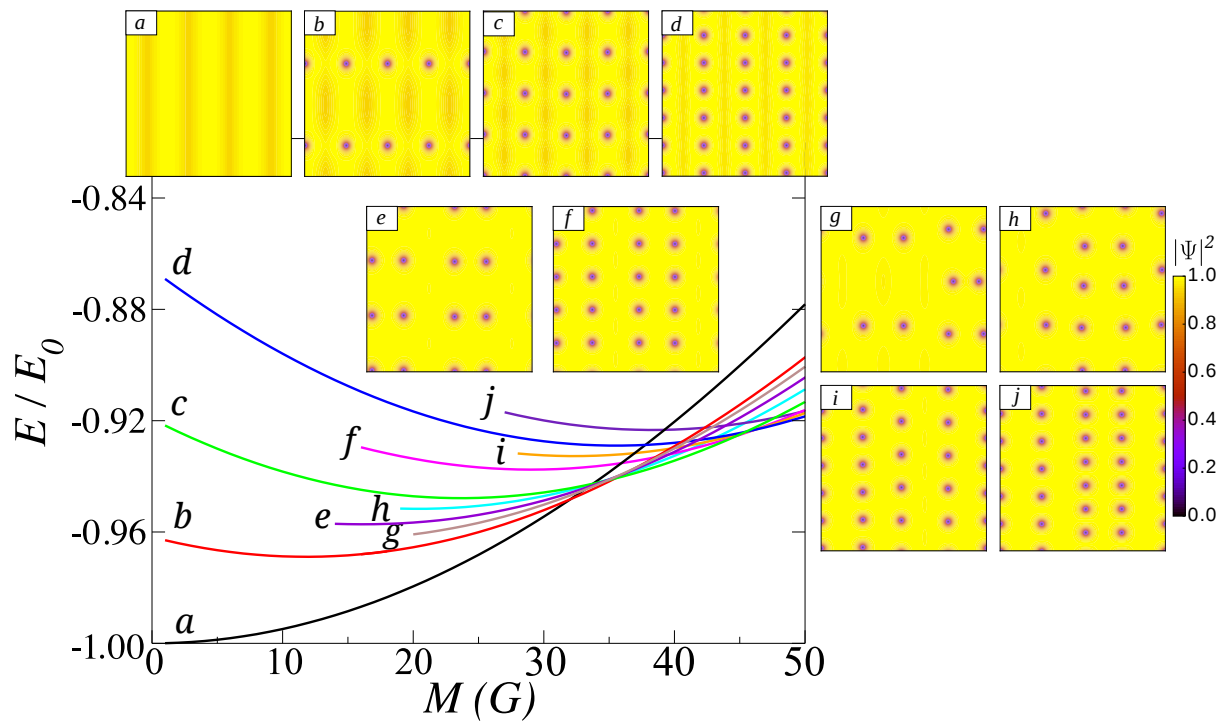


Figura 22: Energia livre de Gibbs do filme supercondutor ( $d = 200$  nm,  $\xi(0) = 12$  nm,  $T/T_c = 0.674$ ,  $\kappa = 5.1$ ) com um óxido ( $l = 10$  nm) e um filme ferromagnético com domínios alternados em seu topo ( $D = 1$   $\mu$ m), como uma função da magnetização do ferromagneto. (a)-(f) mostra a densidade de pares de Cooper de estados fundamentais de algumas configurações de vórtice-antivórtice (V-AV). (g)-(j) mostra a densidade de pares de Cooper de diversos estados estáveis, mas de energia maiores, com um número diferente de pares de V-AV em diferentes paredes de domínios.

magnéticos positivos e negativos sob o ferromagneto, o estado misto do filme supercondutor é composto de pares de vórtice-antivórtices (V-AV), formando cadeias ao longo das paredes de domínios. Os pares de V-AV nucleam sob as paredes de domínios, onde as correntes de Meissner induzidas são máximas [62]. Diversas configurações de V-AV características são mostradas como densidade de pares de Cooper na Fig. (22) (note-se que V e AV parecem os mesmos nesta figura, e podem ser distinguidos somente pelo conhecimento da distribuição do campo magnético). Assinalamos que as configurações de menor energia tem um número idêntico de pares de V-AV nucleados em todas as paredes de domínio, de modo que os estados finais são idealmente simétricos. Assinalamos também que tal estado atinge primeiramente o estado fundamental do sistema a uma magnetização  $M \approx 34$  G, que está em excelente acordo com a estiva experimental da Ref. [16]. Entretanto, Fig. (22) revela que as configurações de V-AV já são estáveis para magnetizações muito baixas, embora que sejam como estados metaestáveis - mas continuam alcançáveis em, por exemplo, experimento de ‘field-cooled’. Bastante interessante, é que os metaestados são os mais curiosos. Por exemplo, para baixas magnetizações os pares de V-AV estão ligados mais fortemente, assim (anti)vórtices se aproximam mais das paredes de domínio ao invés de permanecerem no centro do domínio (negativo)positivo. Além do mais, o número de pares de V-AV não é necessariamente uniforme ao longo de todas as paredes de domínios da amostra. A vorticidade total continua sendo zero, mas o supercondutor é capaz de minimizar sua energia permitindo a nucleação dos pares de V-AV em poucas localizações, ao invés de em todas as paredes de domínio simultaneamente. As paredes de domínios que são deixadas sem pares de V-AV então depletam um pouco mais fortemente o condensado supercondutor subjacente, devido ao excesso de correntes de Meissner que não foram convertidos em nucleação de pares de V-AV. Isto muda o balanço das interações competitivas no sistema (atração de V-AV, repulsão (A)V-(A)V, atração de vórtices pelos domínios e a repulsão dos vórtices pela corrente de Meissner) de forma que topologias mais ricas de V-AV tornam-se possíveis, com diferentes números de pares de V-AV em paredes de domínios adjacentes, diferentes tamanhos de pares de V-AV participantes, etc. Concluimos que, devido a supressão da supercondutividade em todas as paredes de domínios, o filme supercondutor efetivamente se comporta como uma superposição de faixas sob cada par de domínios (+-) do ferromagneto, quando ele está na iminência da nucleação de pares de V-AV, onde em cada faixa, para um dado fluxo magnético de  $N$  fluxos quantizados sob cada domínio, até  $N$  pares de V-AV puderem aparecerem. Uma vez nucleados, os pares de V-AV sentem a presença um dos outros de faixas vizinhas, e a configuração de equilíbrio para todo o filme é formada - com topologia muito mais rica que aquelas em supercondutores na presença de campos magnéticos homogêneos.

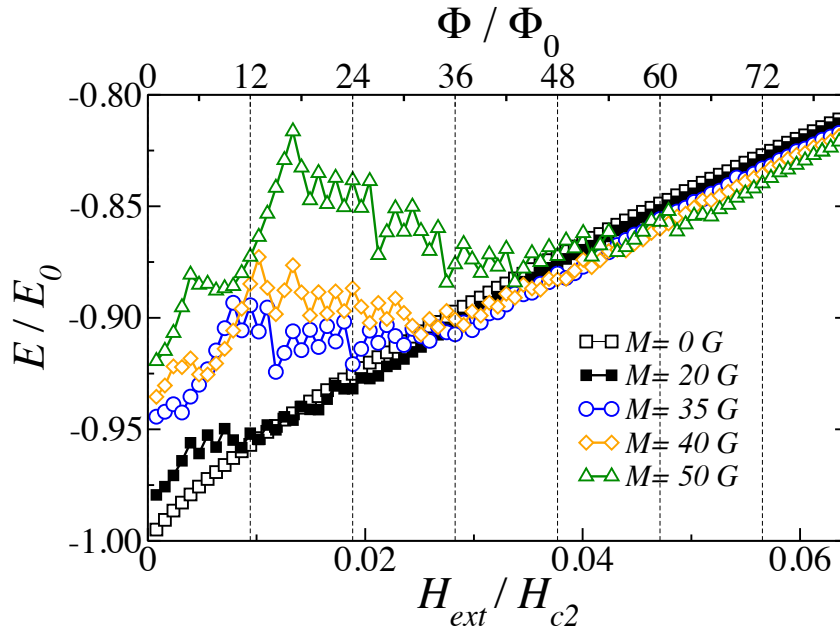


Figura 23: Energia livre de Gibbs de um filme supercondutor como uma função do campo magnético externo para diferentes valores de magnetização da camada ferromagnética. O número correspondente de fluxo quântico na região de simulação para cada valor de campo magnético é indicado no eixo superior.

### 3.4 Comportamento dos pares vórtice-antivórtice na presença de um campo magnético externo homogêneo

No que segue, discutimos os efeitos de um campo magnético externo homogêneo aplicado perpendicularmente à bicamada supercondutor-ferromagneto da seção anterior. Nossa condição de contorno periódica requer um número inteiro de fluxo quântico na região de simulação (devido ao teorema do virial, conforme Ref. [57]), de forma que o campo magnético externo  $H_{ext}$  só pode assumir valores  $i\pi/8w^2$ , onde  $i$  é um número inteiro. Já é bem estabelecido que um ferromagneto atrai um vórtice se seu momento é paralelo ao campo magnético aplicado, e vice e versa. Por outro lado, os antivórtices que residem sob os domínios negativos atraem os vórtices adicionados externamente. Conseqüentemente a aniquilação de uma par V-AV deveria em princípio diminuir a energia do sistema, mas somente se o vórtice puder penetrar a barreira repulsiva imposta pelo momento negativo do domínio onde os antivórtices estão. Portanto, o comportamento resultante irá depender do valor exato da magnetização do ferromagneto [79], bem como da localização exata da penetração dos vórtices adicionados externamente.

Para qualquer amostra de tamanho finito, vórtices induzidos pelo campo magnético aplicado nucleam nas laterais da amostra. Para mostrar as conseqüências mais extremas deste fato, escolhemos o calibre de Landau para o potencial vetor devido a  $H_{ext}$ ,

o qual, combinado com as condições de contorno periódicas leva a nucleação de todos os vórtices adicionados por meio do campo magnético aplicado a ocorrerem no lado direito da região de simulação, simulando, portanto, uma proximidade a lateral de uma outra amostra naquele lado. Para  $M = 0$ , isto é, sem a presença de um ferromagneto, os vórtices penetram e se distribuem na amostra em uma rede triangular sem qualquer impedimento ou obstáculo, portanto, a energia do sistema aumenta linearmente com o campo aplicado (como mostrado na Fig. [23]). Entretanto, mesmo para um  $M$  fraco, por exemplo  $M = 20$  G, no qual a amostra ainda permanece no estado Meissner (veja Fig. [22]), a penetração dos vórtices é fortemente afetada pela presença dos domínios magnéticos. Os vórtices estão se acumulando no domínio positivo mais a direita, num estado com uma energia claramente maior que o estado com os vórtices distribuídos uniformemente na amostra. Com o aumento do campo magnético, isto é, mais vórtices entrando na amostra, devido a crescente densidade de vórtices e assim a crescente repulsão vórtice-vórtice, os vórtices começam a pentrar o restante da amostra. Curiosamente, depois do campo magnético para o qual os vórtices estão uniformemente espalhados sob todos os domínios positivos, a energia livre do nosso sistema híbrido torna-se menor que a energia do filme supercondutor sem a influência do ferromagneto para o mesmo campo magnético aplicado! A saber, o campo de transição para este fenômeno,  $H^*$ , fornece o fluxo positivo que aniquila quase completamente todo o fluxo negativo sob os domínios magnéticos negativos, o qual restaura a supercondutividade nesta região e remove a forte corrente Meissner nas paredes de domínio as quais impõem uma forte barreira para a distribuição dos vórtices ao longo da amostra (ver Fig. [24]; note que os vórtices estão muito perto das paredes de domínios e não no meio do domínio, exatamente por conta da compensação da corrente na parede ser a ótima). A conclusão de que  $H^*$  está relacionado ao cancelamento ótimo do fluxo entre o campo aplicado e o ferromagneto é embasado pelo fato de que  $H^*$  ser proporcional a  $M$ , como pode ser visto no diagrama de energia da Fig. [23]. Notadamente, o efeito do cancelamento é maior e assim mais significativo para maiores  $M$ , de forma que energia do sistema a campos além de  $H^*(M)$  é menor para grandes  $M$ . Isto é essencialmente um princípio bastante similar ao que é empregado na Ref. [70], onde a magnetização de uma cadeia de pontos magnéticos é ajustada a um dado campo magnético de modo que o estado supercondutor tivesse uma melhora ótima e alcançasse a sua máxima temperatura crítica possível  $T_c(H_{ext})$ .

Para as magnetizações  $M = 35, 40$  e  $50$  G, observa-se um comportamento bastante similar (e não monotônico) da energia na Fig. [23]. Em todos estes casos, o ferromagneto induz pares de V-AV no supercondutor antes da adição do campo magnético homogêneo, isto é,  $N = 2, 3$  e  $5$  pares por paredes de domínios, respectivamente. Na presença do campo magnético aplicado, os vórtices, adicionados, penetram a amostra pelo lado direito, encontram e aniquilam  $N$  antivórtices que já se encontravam lá, por conta da presença do ferromagneto, Fig. [25] (a). Intuitivamente, espera-se que a energia

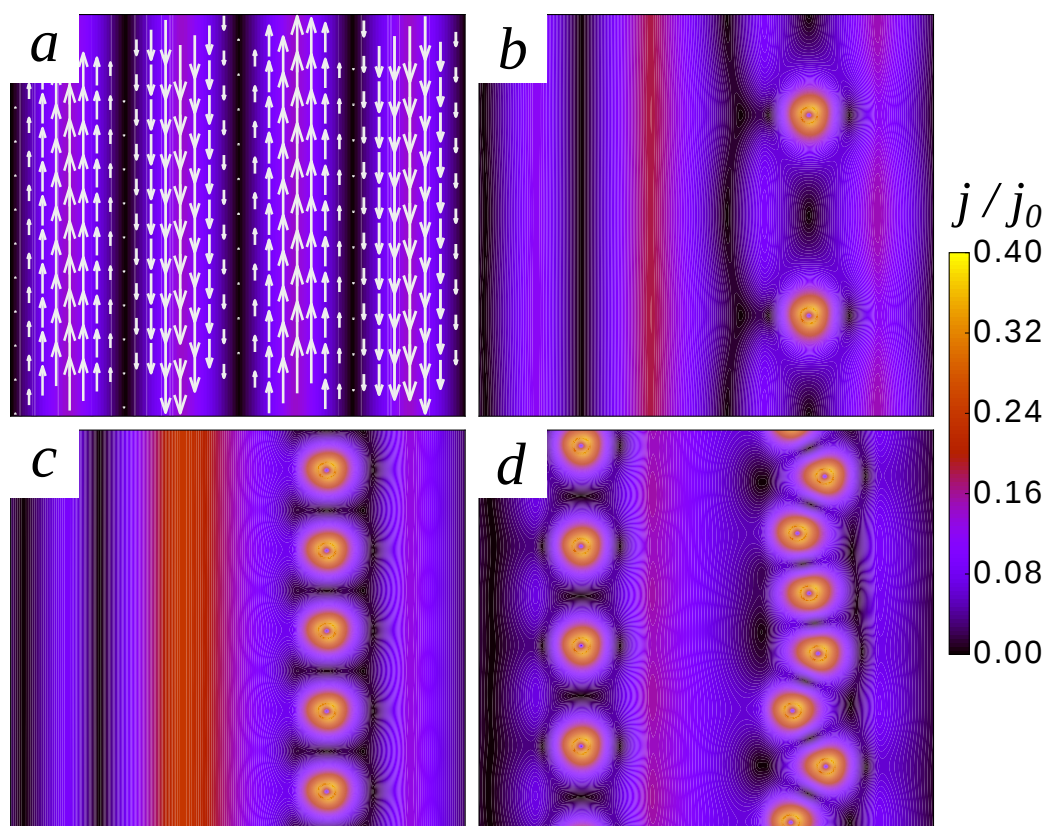


Figura 24: Densidade das correntes de Meissner no filme supercondutor sob uma camada ferromagnética de magnetização  $M = 20$  G, na ausência de campo magnético externo [com a indicação vetorial das correntes de Meissner induzidas inclusa, painel (a)], e para campos aplicados homogêneos correspondendo aos fluxos magnéticos de  $\Phi/\Phi_0 = 2$  (b), 5 (c) e 11 (d).

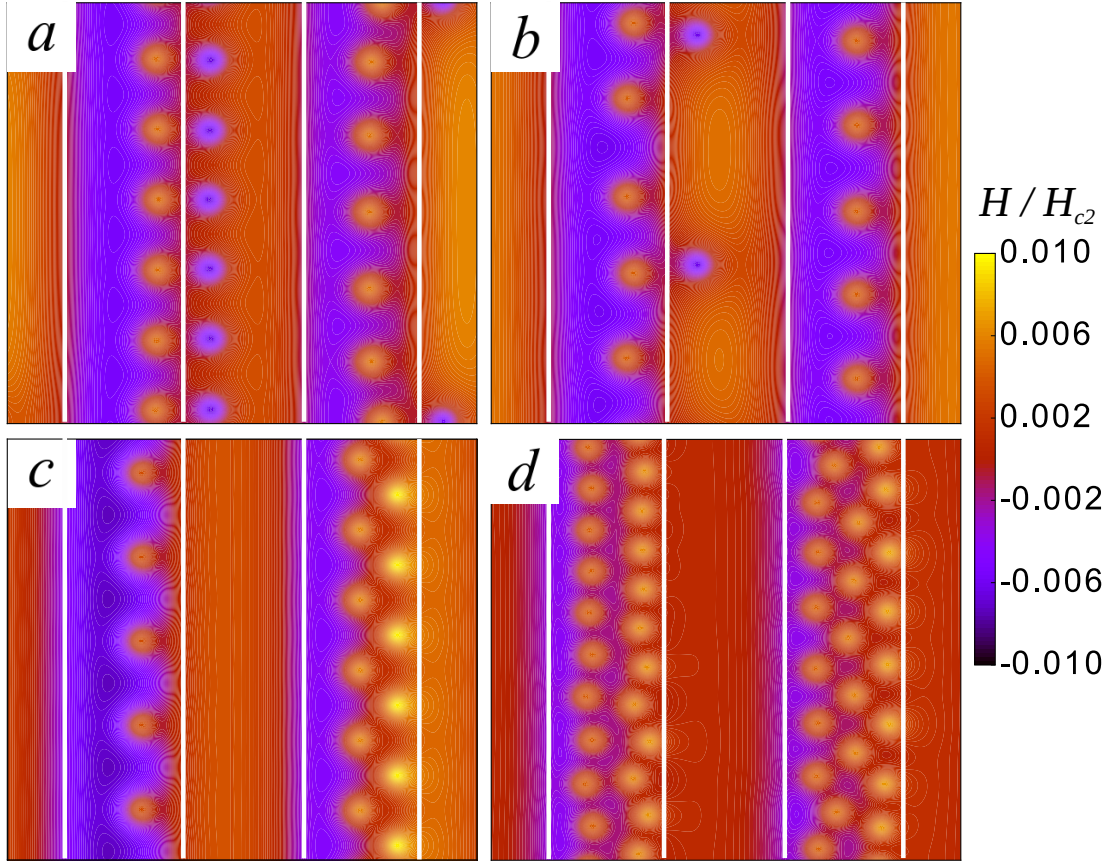


Figura 25: Resposta magnética de um filme supercondutor sob um filme ferromagnético  $M = 50$  G, na presença de um campo magnético externo correspondendo a adição de fluxo (a)  $\Phi/\Phi_0 = 5$ , (b)  $\Phi/\Phi_0 = 8$ , (c)  $\Phi/\Phi_0 = 17$  e (d)  $\Phi/\Phi_0 = 43$  (conforme o diagrama de energia na Fig. [23]). As linhas brancas indicam as paredes dos domínio ferromagnéticos.

seja menor uma vez que o número total de vórtices da amostra diminui. Entretanto, devido ao alto valor de  $M$ , fortes correntes de Meissner (que inicialmente levaram à nucleação dos pares de V-AV) estão sendo restauradas, e a densidade de pares de Cooper sob as paredes de domínios está, correspondentemente, sendo suprimida - ao custo do ganho de energia devido a aniquilação dos V-AV. Com  $H_{ext}$  crescente, após todos os vórtices estarem aniquilados no primeiro domínio negativo da direita, os vórtices externos começam a penetrar os outros domínios, acompanhado por um decréscimo na curva  $E(H_{ext})$  sendo acompanhado por um aumento na energia seguindo o mesmo princípio - mas agora devido a aniquilação dos V-AV no próximo domínio negativo, Fig. [25] (b).

Finalmente, após todos os antivórtices terem sido aniquilados, os vórtices externos começa penetrar sob os domínios magnéticos positivos, uma vez que eles são atraídos pela magnetização positiva daquele domínio (Fig. [25]). Isto é energeticamente favorável, e também reduz a corrente líquida de Meissner nas parede de domínio - levando a uma energia decrescente como uma função do campo magnético aplicado. Tal tendência continua até  $H_{ext} = H^*$ , onde as correntes nas paredes de domínio estão completamente



compensadas, os vórtices, então, começam a penetrar a região sob os domínios magnéticos e o campo em toda a amostra torna-se efetivamente unipolar (como pode ser visto na distribuição de campo magnético na Fig. [25] (d)) e a energia do híbrido torna-se menor que a energia do filme supercondutor sem a presença do filme ferromagnético para o mesmo campo - como discutido acima em relação à Fig. [23].

### 3.5 Dinâmica de vórtice-antivórtice e a corrente crítica anisotrópica

É bem claro da discussão na Sec. 1.4 que a interação de diferentes campos magnéticos e vórtices na nossa bicamada SF pode ser traduzida em termos do comportamento das correntes supercondutoras de blindagem. Mais uma vez, chamamos atenção que a corrente Meissner no supercondutor, induzida em resposta ao campo não homogêneo da camada ferromagnética, tem valor máximo sob as paredes de domínios (onde o campo do ferromagneto muda de polaridade), e que a direção da corrente é oposta em paredes de domínio adjacentes (ver Fig. [24]). Nesta seção, analisamos o efeito de uma corrente  $dc$  aplicada ao supercondutor. Tal corrente interage com a corrente de Meissner pré-existente, compensando/aumentando a corrente em diferentes partes da amostra dependendo de sua direção [80]. Portanto, é claro que os efeitos de uma corrente aplicada serão bastante anisotrópicos com respeito ao ângulo entre a corrente  $dc$  e os domínios ferromagnéticos. Isto pode ser considerado nos experimentos, onde quatro estruturas pontuais de transporte são geralmente cortadas de um filme supercondutor (portanto a direção da corrente aplicada é mantida fixa), e a direção dos domínios na camada ferromagnética acima pode ser variado por um campo magnético aplicado na direção paralela ao plano do ferromagneto [71]. De tal maneira, diferenças claras entre a corrente crítica na amostra foram observadas na Ref. [24], para direções ao longo dos domínios e perpendiculares a ele. Entretanto, nenhuma informação adicional pode ser encontrada na literatura.

O problema da corrente aplicada em bicamadas SF é particularmente interessante para casos quando configurações de V-AV estão presentes na amostra. Como dito anteriormente, corrente aplicada exerce uma força de Lorentz nos vórtices no supercondutor, a qual vai ter uma direção exatamente oposta no caso dos antivórtices. Em outras palavras, corrente ao longo dos pares de V-AV força um vórtice para um lado e o antivórtice para o outro, causando uma quebra na ligação desse par. Quando a corrente é aplicada numa direção perpendicular ao par de V-AV, vórtices e antivórtices são aproximados ou afastados, dependendo do sentido da corrente aplicada. Para um ângulo arbitrário da corrente com respeito aos domínios nos quais os vórtices estão ligados, esperamos uma dinâmica não trivial dos V-AV, com repercussões não claras na corrente crítica

do sistema.

Portanto, o objetivo nesta seção é investigar o comportamento da corrente crítica que a camada supercondutora pode manter, para diferentes orientações  $\theta$  de corrente aplicada (conforme Fig. [20]), onde  $\theta = 0$  corresponde a direção perpendicular aos domínios ferromagnéticos (ou seja,  $\pi/2$  é a direção ao longo dos domínios). Isto é feito pela adição das constantes  $A_j \cos \theta$  e  $A_j \sin \theta$  nas componentes  $x$  e  $y$  do potencial vetor, respectivamente. Além disso, a orientação da corrente aplicada, determinada por  $\theta$ , é mantida fixa enquanto  $A_j$  é aumentado - correspondendo ao aumento da intensidade da corrente. Quando a corrente crítica é alcançada, V-AVs são colocados em movimento permanente (nucleação, locomoção e aniquilação, sequencialmente) e uma solução estacionária não pode ser determinada. Em experimentos, tal movimento é acompanhado por aquecimento e consequente destruição da supercondutividade. Para qualquer  $A_j$  aplicado, a corrente aplicada ao supercondutor é calculada pela equação (3.4), pela integração da componente da corrente paralela a  $\vec{A}_j$  na amostra (notemos que a corrente total induzida pelo ferromagneto é zero, e isso não afeta o cálculo da corrente aplicada).

Primeiro, consideramos o filme supercondutor sem a influência da camada ferromagnética e sem qualquer V(AV) presente, para os ângulos de corrente aplicada  $0 < \theta < \pi/2$ . Como mostrado na Fig. [26], a densidade de corrente crítica é independente, neste caso, é independente de  $\theta$  e exatamente igual a  $j_{dp} \approx 0.38j_0$ . Entretanto, a presença do ferromagneto muda significativamente essa característica. Começamos nossa análise do caso com a magnetização do ferromagneto fraca,  $M = 15$  G e  $M = 20$  G, para as quais o estado fundamental do supercondutor é o estado Meissner (conforme Fig. [22]). A corrente crítica calculada como uma função do ângulo  $\theta$  apresenta um comportamento não monotônico. Ela inicialmente decresce com o aumento de  $\theta$ , alcançando o seu valor mínimo em  $\theta = 0.51$  rad e em  $\theta = 0.66$  rad, respectivamente para  $M = 15$  G e  $M = 20$  G, e então cresce suavemente com o aumento de  $\theta$ . Tal comportamento não monotônico da corrente crítica é exatamente a consequência da complexa interação da corrente aplicada com as correntes Meissner.

Para  $\theta = 0$ , a corrente crítica é menor que a crítica para  $M = 0$ , devido a supressão da supercondutividade sob as paredes de domínio. For  $\theta = \pi/2$ , a corrente crítica é determinada pela superposição da corrente aplicada com a corrente Meissner paralela mais forte nas paredes de domínio. Encontramos que sempre  $j_c(\theta = \pi/2) < j_c(\theta = 0)$ , o que é esperado de acordo com a explicação dada acima, mas também em acordo com os resultados experimentais de Ref. [24]. O comportamento encontrado para a corrente crítica no intervalo  $0 < \theta < \pi/2$  é menos intuitivo, mas continua sendo devido a compensações específicas para cada ângulo  $\theta$ . Como mostrado na Fig. [27], a condição crítica para cada  $\theta$  é determinada pela condição de que a corrente total na amostra atinja a corrente crítica ('depairing'). A corrente crítica mínima é determinada para o ângulo

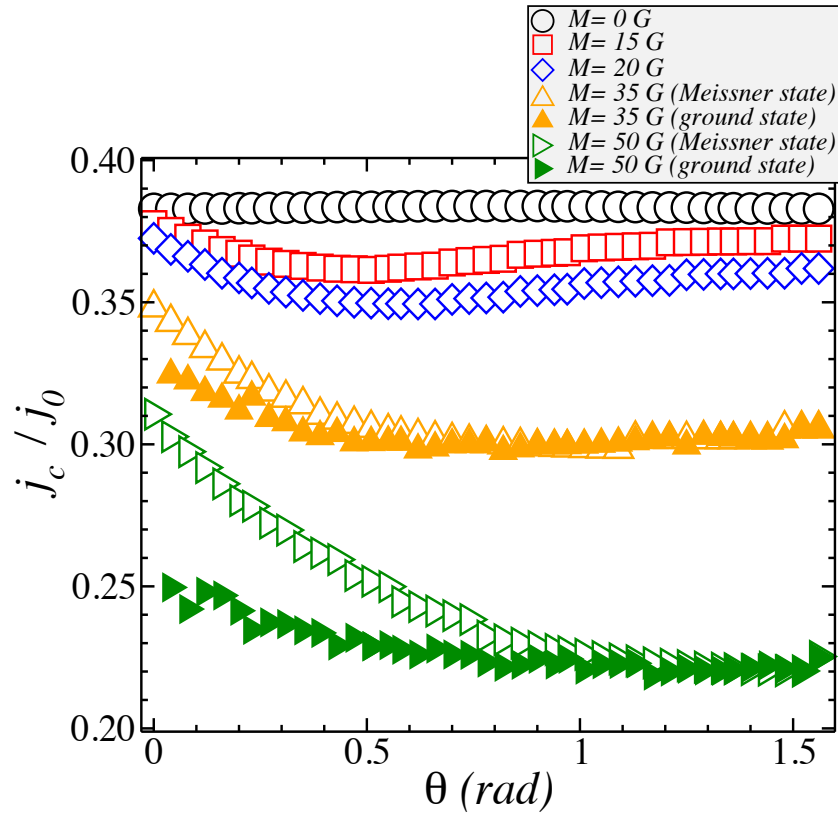


Figura 26: Corrente crítica do filme supercondutor versus o ângulo (direção) da corrente aplicada  $\theta$ , para diferentes valores de magnetização  $M$  do filme ferromagnético na bicamada.  $\theta = 0$  denota a orientação da corrente aplicada perpendicularmente as paredes de domínio e  $\theta = \pi/2$  a orientação da corrente aplicada paralelamente as paredes de domínios. Os símbolos abertos mostram a corrente crítica obtida após sua aplicação a uma amostra inicialmente no estado Meissner, e os símbolos preenchidos a corrente crítica obtida quando aplicada à amostra inicialmente na configuração, com vórtices e antivórtices, de estado fundamental para um dado  $M$ .

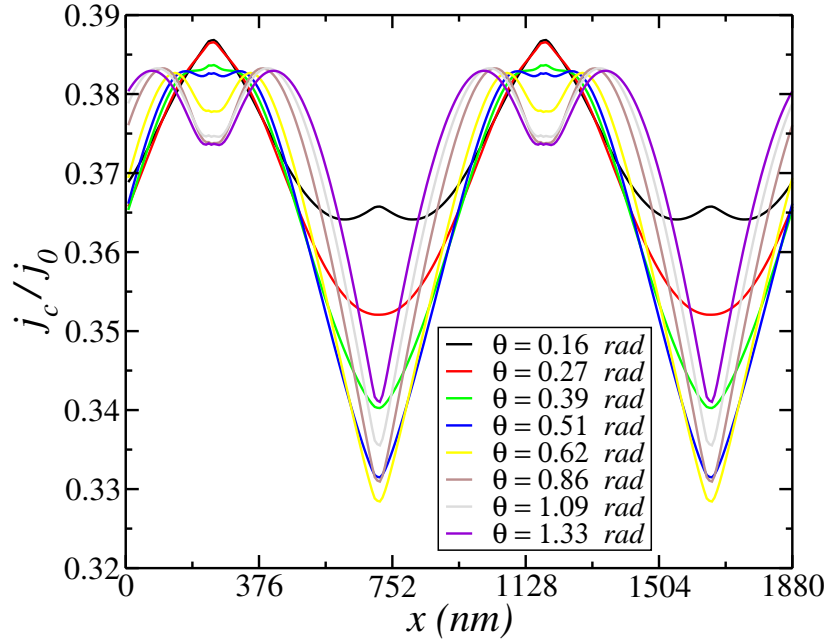


Figura 27: O perfil da magnitude da corrente total ao longo da linha de  $y = 0$  do supercondutor sob o filme ferromagnético com magnetização  $M = 15$  G (sem qualquer par de vórtice-antivórtice presente na amostra), para os ângulos  $\theta$  indicados da corrente aplicada.

que maximiza o impacto da corrente aplicada, de modo que sua componente  $x$  continua tendo uma influência significativa, enquanto que a superposição de correntes na direção  $y$  é também relativamente forte. Para  $M$  crescente, o mínimo para a corrente crítica é deslocado para maiores valores de  $\theta$ .

Para  $M = 35$  e  $50$  G, as estruturas preexistentes de vórtice-antivórtice devem ser levadas em consideração na análise do comportamento da corrente crítica. Separamos, portanto, dois casos: (1) a corrente crítica obtida para uma dada magnetização quando corrente é adicionada ao estado Meissner ( $j_c^{(1)}$ ), e (2) a corrente crítica obtida para uma dada magnetização quando corrente é adicionada ao estado fundamental, com um número igual de pares de V-AV nas paredes de domínio ( $j_c^{(2)}$ ). Ambos os casos estão plotados como uma função de  $\theta$  na Fig. 26, e geralmente mantém a tendência encontrada para magnetização menor. Entretanto, uma diferença é encontrada entre  $j_c^{(1)}$  e  $j_c^{(2)}$ , a qual se torna maior para  $M$  maiores e é uma consequência da dinâmica de V-AV. Para ilustrar isso, na Fig. 28, mostramos a evolução das configurações de V-AV com a corrente aplicada (sob um ângulo  $\theta = 0.58$  rad) para  $M = 50$  G, onde a amostra na ausência de corrente aplicada possui  $N = 6$  pares de V-AV em cada parede de domínio (conforme Fig. 22). Quando a corrente aplicada é fraca, notamos, inicialmente, uma mudança da posição dos pares de V-AV na direção ao longo das paredes de domínio, causadas pela componente  $x$  da corrente aplicada. Este efeito cresce com o aumento da corrente, até que o efeito da componente  $y$  da corrente torna-se significativo - de modo que as correntes sob as paredes

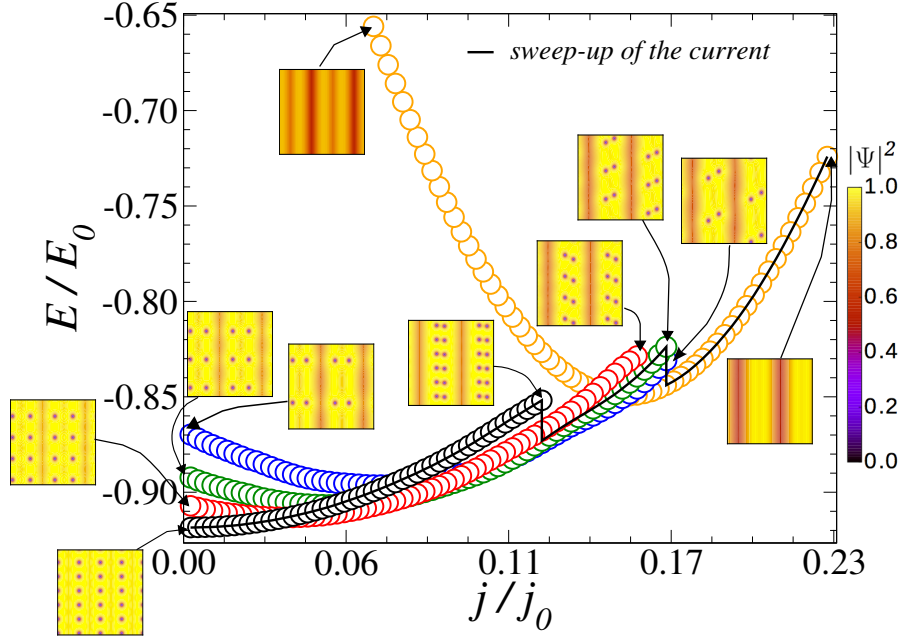


Figura 28: Diagrama de energia livre e as correspondentes densidades de pares de Cooper do estado supercondutor sob um filme ferromagnético com  $M = 50$  G, como uma função da corrente externa aplicada na direção  $\theta = 0.58$  rad, mostrando mudanças subitas nas configurações de vórtice-antivórtice causadas pela corrente aplicada e sua interação com as correntes Meissner. A linha sólida mostra a sequência de estados para a um aumento gradual, a partir de zero, da corrente aplicada.

de domínios são fortemente afetadas e os pares de V-AV começam a se aproximar, em direção a respectiva parede de domínio. Com o crescente aumento da corrente aplicada, a parede de domínio não é mais capaz de manter separados os  $N = 6$  pares iniciais de V-AV, três dos quais se aniquilam acompanhados por um salto para um estado de menor energia (ver linha sólida na Fig. 28). O estado remanescente, com  $N = 3$ , repete então o comportamento acima descrito, até que todos os pares de V-AV são aniquilados. O estado livre de vórtices formado se mantém até a corrente aplicada  $j_c^{(2)}$  que, geralmente, é menor que  $j_c^{(1)}$ , obtido quando corrente é aplicada à amostra inicialmente no estado Meissner. A razão é que a corrente máxima na amostra após a aniquilação dos V-AV, devido a corrente aplicada, é maior que a máxima corrente na amostra para a mesma corrente aplicada para o estado Meissner. A diferença entre  $j_c^{(1)}$  e  $j_c^{(2)}$  diminui para  $M$  menores (portanto menos pares de V-AV na amostra), e/ou para  $\theta \rightarrow \pi/2$ , onde mesmo uma fraca corrente aplicada já aniquila os pares nas paredes de domínios (com quase nenhum movimento inicial ao longo das paredes de domínios) e o estado livre de vórtices é muito próximo do estado Meissner para a mesma corrente aplicada.

Quando decrescendo a corrente aplicada a partir da corrente crítica  $j_c^{(2)}$ , notamos um estabilidade pronunciada do estado livre de vórtices devido a uma mudança de criticalidade das paredes de domínio ímpares (contadas da esquerda para a direita) para as paredes pares, o que requer uma grande mudança na corrente aplicada antes de os

---

pares de V-AV serem induzidos novamente. Assim, o estado então formado,  $N = 2$ , não foi encontrado quando a corrente aplicada é aumentada a partir de zero. Nós, portanto, repetimos o processo de aumento e decréscimo da corrente aplicada para todos os estados encontrados, a fim de obter um conjunto completo de estados possíveis, mostrados na Fig. 28, levando em conta os efeitos de histerese. Finalmente, enfatizamos novamente que todos os estados descritos nesta seção estão em equilíbrio para um dado valor de corrente injetada, podendo, assim, serem diretamente observados experimentalmente. Na presença de campo magnético aplicado, o balanço dos pares de V-AV nas diferentes paredes de domínios será perturbado pelo excesso de vorticidade, e uma rica dinâmica de V-AV é esperada, embora ainda estejam ligados pelos princípios descritos acima.

## 4 Conclusões

Em resumo, apresentamos a variedade do estado supercondutor de uma bicamada supercondutor-ferromagneto (SF), onde discutimos principalmente a estabilidade das configurações de vórtice-antivórtice induzidas no filme supercondutor pelo campo magnético não homogêneo do ferromagneto adjacente, seu comportamento sob a influência de campo magnético externo homogêneo (onde vórtices adicionados aniquilam antivórtices preexistentes), e seu comportamento quando uma corrente elétrica é aplicada (exercendo uma força de Lorentz oposta sobre os vórtices e os antivórtices) - com diversos ângulos de aplicação da corrente aplicada em relação a direção dos domínios do ferromagneto. Enquanto a magnetização do ferromagneto é determinada pela magnetização de saturação do material, todos os outros parâmetros considerados podem ser ajustados experimentalmente.

O filme ferromagnético é dividido em uma série de domínios ferromagnéticos com magnetização orientada perpendicularmente ao plano do filme, mas com sentidos opostos em domínios vizinhos. Como consequência, o fluxo total no supercondutor devido ao campo magnético produzido pelo ferromagneto é zero e espera-se o aparecimento de pares de vórtice-antivórtice (V-AV). Este é de fato o caso, e o número de pares induzidos escala com a magnetização do ferromagneto. O número total de pares por parede de domínio é uniforme quando considera-se o estado fundamental da amostra, mas estados de alta energia revelam a possibilidade de ter-se a quebra espontânea de simetria - a saber, um número menor de pares induzidos que o esperado para a periodicidade do sistema, portanto não estando distribuídos uniformemente ao longo da amostra. Isso não viola qualquer propriedade fundamental da supercondutividade, uma vez que o fluxo do campo magnético do filme ferromagnético é estritamente zero.

No caso do campo magnético homogêneo aplicado, mostrou-se que é de crucial importância neste sistema considerar o efeito das bordas da amostra e sua orientação com respeito a orientação dos domínios ferromagnéticos quando analisa-se os estados de vórtice-antivórtice, uma vez que os vórtices se acumulam próximos da borda lateral e não são capazes de ultrapassar os domínios paralelos e mais próximos dessa borda. Tal acúmulo diminui a corrente crítica do sistema, levando facilmente à avalanches de vórtices. Mostrou-se também que para cada magnetização, e portanto, para cada número de pares de vórtice-antivórtice por parede de domínio, existe um campo magnético aplicado ótimo para o qual o campo magnético produzido pelo ferromagneto é compensado em cada um dos domínios com magnetização com sentido oposto ao do campo aplicado, removendo, conseqüentemente, a barreira para a penetração uniforme dos vórtices e minimizando a

energia do sistema. Este efeito está relacionado de perto com o fenômeno estabelecido da supercondutividade de parede de domínio e campo induz a melhora de parâmetros críticos em híbridos SF.

Em casos quando uma corrente  $dc$  é aplicada, revela-se que o fenômeno mais importante neste sistema está relacionado a interação das correntes de Meissner (induzidas para diminuir o efeito do campo não homogêneo do ferromagneto) e a corrente aplicada. Uma vez que a corrente de blindagem está inicialmente orientada ao longo das paredes de domínio, a interação acima mencionada é bastante dependente da angulação. Como uma consequência, prevemos que a corrente crítica do sistema é dependente da angulação e se diferencial em dois sub-casos: um com pares de vórtices-antivórtices presentes no sistema, e o outro sem a sua presença. Mostrou-se que o primeiro caso é levado ao segundo caso com o aumento da corrente aplicada através de uma sequência de reconfigurações e aniquilações de vórtices e antivórtices. Neste caminho, ricas configurações estáveis são encontradas e que são dignas de investigação experimental. Ainda, o estado Meissner sempre exibe a maior corrente crítica, mesmo em casos quando ele tem maior energia que os estados de vórtice-antivórtices na ausência de corrente aplicada (típicos para altas magnetizações da camada ferromagnética). Portanto, realizar o procedimento de resfriamento a campo nulo diminui loops de campo que demagnetizam e magnetizam o filme ferromagnético na bicamada antes de aplicar a corrente do supercondutor será benéfico para aplicações onde correntes críticas mais altas são desejadas.

Levando tudo em consideração, bicamadas supercondutor-ferromagneto mostram-se ser um sistema de fácil fabricação, ajuste (pela espessura dos constituintes, por exemplo), manipulação (pela corrente externa, pelo campo magnético ao longo e perpendicular ao plano da amostra) e estudo da gama de efeitos relacionados a simetrias competitivas, padrões de formação, duas espécies interagentes, mas também em efeitos de transporte e calorimetria ligados a aniquilação de vórtices e antivórtices estimulada externamente que pode, em particular, útil em detectores supercondutores para fótons isolados [81].



## A O Potencial Vetor

Pelo fato de não existirem monopolos magnéticos, o divergente de  $\vec{B}$  é sempre zero, logo pode-se representar  $\vec{B}$  como o rotacional de um outro campo vetorial, uma vez que o divergente do rotacional é sempre zero. Portanto, pode-se sempre relacionar  $\vec{B}$  com um campo que, em geral, representa-se por  $\vec{A}$ , conhecido como potencial vetor, como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (\text{A.1})$$

ou, mais explicitamente em termos das componentes, por

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

É importante notar que podemos ter diferentes potenciais vetores  $\vec{A}$  que fornecem os mesmos campos magnéticos. Como  $\vec{B}$  é obtido de  $\vec{A}$  por uma diferenciação, adicionar uma constante à  $\vec{A}$  não muda nada fisicamente. Supondo ter um  $\vec{A}$  que forneça corretamente o campo magnético  $\vec{B}$  para alguma situação física, podemos escrever um novo potencial vetor  $\vec{A}'$  que represente o mesmo campo  $\vec{B}$  como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = 0, \quad (\text{A.3})$$

logo,

$$\nabla \times (\vec{A}' - \vec{A}) = 0, \quad (\text{A.4})$$

se o rotacional de um vetor vale zero, ele deve ser o gradiente de algum campo escalar, o que nos leva a escrever  $\vec{A}' - \vec{A} = \nabla\chi$ . O que significa que se  $\vec{A}$  for um potencial vetor adequado para a situação física, então para qualquer  $\chi$ ,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi, \quad (\text{A.5})$$

será também um potencial vetor adequado, levando ao mesmo  $\vec{B}$ .

Como exemplo, para ilustrar o que acontece com o potencial vetor, vamos estudar o  $\vec{A}$  para um campo magnético  $\vec{B} = B_0\hat{k}$  uniforme na direção de  $z$ . As componentes

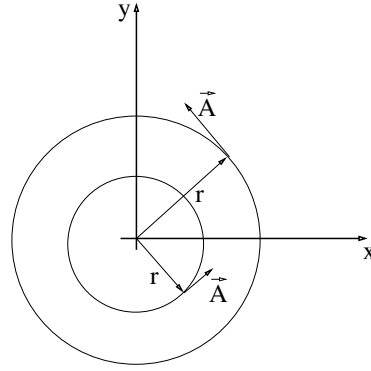


Figura 29: Um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  na direção  $z$  corresponde a um potencial vetor que gira em torno do eixo  $z$ .

de  $\vec{B}$  serão,

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ B_y &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Pelo conjunto de Eq. (A.6) podemos ter algumas soluções, em particular,

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0, \quad A_y = \frac{1}{2}xB_0, \quad A_z = 0, \quad (\text{A.7})$$

é uma solução, que nos permite escrever

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2} \sqrt{x^2 - y^2} \hat{k} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}. \quad (\text{A.8})$$

O potencial vetor,  $\vec{A}$ , assim definido apresenta algumas características interessantes: ele é perpendicular ao vetor  $\vec{r}$ , que parte do eixo  $z$ , é proporcional à  $\sqrt{x^2 - y^2}$  e conseqüentemente a  $r$ , e além disso gira em torno do eixo  $z$ , conforme pode ser visto na Fig. 29. Se o campo  $\vec{B}$  fosse um campo axial no interior de um solenóide, então o potencial vetor circularia no mesmo sentido das correntes deste solenóide.

Considerando agora um sistema periódico, de dimensões  $L_x \times L_y$ , e utilizando como solução das Eq. (A.6),

$$A_x = 0, \quad A_y = xB_0, \quad A_z = 0, \quad (\text{A.9})$$

percebemos que o potencial vetor dado por  $\vec{A} = xB_0\hat{j}$ , não representaria adequadamente o potencial vetor para o sistema periódico, pois este apresentaria uma descontinuidade nas fronteiras do sistema, obteríamos um comportamento em “zig-zag” ao invés de um

comportamento monotônico. Para contornar esse problema levaremos em conta a Eq. (A.5), com

$$\chi = yB_0L_x = \frac{y\Phi}{L_y}. \quad (\text{A.10})$$

O que nos dá,

$$\vec{A}' = \left( xB_0 + \frac{\Phi}{L_y} \right) \hat{j}, \quad (\text{A.11})$$

assim, temos, naturalmente, as condições de contorno na direção  $x$

$$\begin{aligned} A_x(L_x, y) &= A_x(0, y), \\ A_y(L_x, y) &= A_y(0, y) + \frac{\Phi}{L_y}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e ainda, na direção  $y$

$$\begin{aligned} A_x(x, L_y) &= A_x(x, 0), \\ A_y(x, L_y) &= A_y(x, 0). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

## *B A transformada de Fourier da segunda equação de GL*

Após a solução da primeira equação de TDGL (2.6), a partir da condição inicial  $\psi^o$ , um novo valor do parâmetro de ordem  $\psi$  é determinado em todos os pontos da malha de discretização e então, a partir desses valores, calcula-se a densidade de supercorrente, Eq. (2.29), em todos esses pontos. Para dar continuidade ao processo de determinação da solução auto-consistente das equações de GL, é preciso que se determine o novo potencial vetor  $\vec{A}$  (icógnita) pela Eq. (2.4). Tal equação tem a forma de uma equação do tipo difusão e que, como já é bem conhecido, tem sua solução simplificada no espaço recíproco, obtida por uma transformada de Fourier

$$\hat{\mathcal{F}} \left\{ \vec{j}_s \right\} = -\kappa^2 \hat{\mathcal{F}} \left\{ \nabla^2 \vec{A} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Com a determinação da solução no espaço recíproco a transformada de Fourier inversa é realizada a fim de obter-se a solução da Eq. (2.4) no espaço real.

Considerando o limite de “bulk”, em que a variação da corrente na direção  $z$  possa ser desprezada, o que também se justifica para supercondutores muito finos, com  $d < \lambda, \xi$ , a densidade de corrente supercondutora pode ser expressa, com auxílio de uma função do tipo degrau, como

$$j_{m,n}(z) = j_{m,n} \Pi(z, -d/2, d/2), \quad (\text{B.2})$$

em que  $\Pi(z, -d/2, d/2)$  é uma função degrau que assume valor 1 no intervalo de  $(-d/2, d/2)$  e zero fora dele, conforme ilustrado na Fig. 30, o que possibilita o uso de uma transformada de Fourier contínua na direção  $z$  e uma expansão em série de Fourier discreta para as componentes  $x$  e  $y$ . Seguindo o mesmo argumento de [56], utilizamos aqui uma série de Fourier exponencial, a fim de garantir que as condições de contorno periódica para o potencial vetor nas direções  $x$  e  $y$  sejam satisfeitas. Considerando, como antes,  $a_x = L_x/M$  e  $a_y = L_y/N$ , o potencial vetor pode ser escrito como  $A(ma_x, na_y, z) = A_{mn}(z)$ . O que nos leva a reescrever (B.1) como

$$\hat{\mathcal{F}} \{ j_{mn}(z) \} = -\kappa^2 \hat{\mathcal{F}} \{ \nabla^2 A_{mn}(z) \}. \quad (\text{B.3})$$

É importante ressaltar aqui, que o potencial vetor a que nos referimos está relacionado à resposta magnética do supercondutor e, portanto, não inclui o campo magnético aplicado.

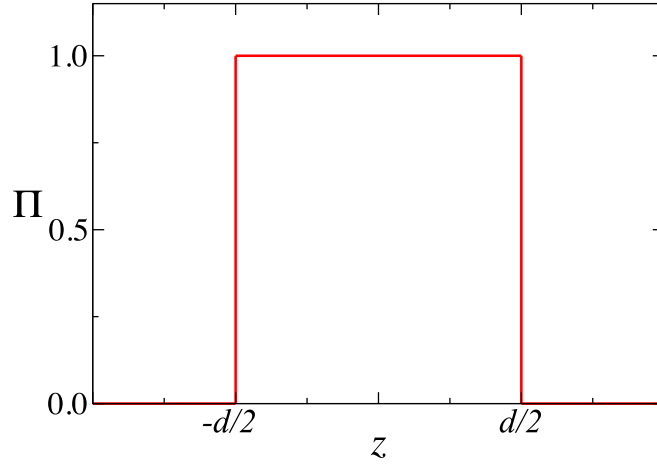


Figura 30: Função degrau  $\Pi(z, -d/2, d/2)$  utilizada na definição da densidade de corrente na direção  $z$ .

A transformada de Fourier para  $A_{mn}(z)$  e  $j_{mn}(z)$  é, então, dada por

$$\hat{A}_{\alpha\beta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn}(z) e^{2\pi izk} e^{2\pi i \frac{m}{M} \alpha} e^{2\pi i \frac{n}{N} \beta}, \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{j}_{\alpha\beta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} j_{mn}(z) e^{2\pi izk} e^{2\pi i \frac{m}{M} \alpha} e^{2\pi i \frac{n}{N} \beta}, \quad (\text{B.5})$$

onde  $m$  e  $n$  são números inteiros e  $z$  pode ser qualquer número real. Utilizando a propriedade da transformada de Fourier da derivada de uma função, pode-se reescrever a transformada de Fourier do termo a direita da Eq. (B.3) como

$$\hat{\mathcal{F}} \{ \nabla^2 A_{mn}(z) \} = \left[ -(2\pi k)^2 - \left( \frac{2\pi\alpha}{L_x} \right)^2 - \left( \frac{2\pi\beta}{L_y} \right)^2 \right] \hat{\mathcal{F}} \{ A_{mn}(z) \}, \quad (\text{B.6})$$

logo a Eq. (B.3) pode ser reescrita como segue

$$\hat{A}_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\hat{j}_{\alpha\beta}(k)}{(2\pi k)^2 + q_{\alpha\beta}^2}, \quad (\text{B.7})$$

onde  $q_{\alpha\beta}^2 = \left( \frac{2\pi\alpha}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{2\pi\beta}{L_y} \right)^2$ . Levando em conta (B.2), a Eq. (B.5) fica

$$\hat{j}_{\alpha\beta}(k) = \left( \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} j_{mn} e^{2\pi i \frac{m}{M} \alpha} e^{2\pi i \frac{n}{N} \beta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \Pi(z, -d/2, d/2) e^{2\pi izk}, \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{j}_{\alpha\beta}(k) = \hat{j}_{\alpha\beta} \int_{-d/2}^{d/2} dz e^{2\pi izk} \quad \therefore \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{j}_{\alpha\beta}(k) = \hat{j}_{\alpha\beta} \frac{\text{sen}(\pi kd)}{\pi k}, \quad (\text{B.10})$$

nos fornecendo, portanto, uma fórmula para a determinação do potencial vetor no espaço recíproco,  $\hat{A}_{\alpha\beta}(k)$ . Pode-se, finalmente, fazer a transformada de Fourier inversa e determinar a expressão para o potencial vetor no espaço real

$$A_{mn}(z) = \frac{1}{MN} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{\alpha=0}^{M-1} \sum_{\beta=0}^{N-1} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\hat{j}_{\alpha\beta}}{(2\pi k)^2 + q_{\alpha\beta}^2} \frac{\text{sen}(\pi kd)}{\pi k} e^{-2\pi izk} e^{-2\pi i \frac{m}{M} \alpha} e^{-2\pi i \frac{n}{N} \beta}. \quad (\text{B.11})$$

A integral em  $k$ ,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{(2\pi k)^2 + q_{\alpha\beta}^2} \frac{\text{sen}(\pi kd)}{\pi k} e^{-2\pi izk}, \quad (\text{B.12})$$

tem solução analítica dada por [56, 41]

$$I = \begin{cases} [1 - \cosh(q_{\alpha\beta} z) \exp(-dq_{\alpha\beta}/2)] / q_{\alpha\beta}^2, & z < d/2 \\ \sinh(dq_{\alpha\beta}/2) \exp(-q_{\alpha\beta} z) / q_{\alpha\beta}^2, & z > d/2. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

A fim de determinar o comportamento da resposta magnética do supercondutor, pode-se calcular  $I$ , Eq. (B.13), num plano de  $z = 0$ , o que nos leva a

$$I = [1 - \exp(-dq_{\alpha\beta}/2)] / q_{\alpha\beta}^2, \quad (\text{B.14})$$

e portanto, a

$$A_{mn}(0) = \frac{1}{MN} \sum_{\alpha=0}^{M-1} \sum_{\beta=0}^{N-1} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\hat{j}_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}^2} [1 - \exp(-dq_{\alpha\beta}/2)] e^{-2\pi i \frac{m}{M} \alpha} e^{-2\pi i \frac{n}{N} \beta}. \quad (\text{B.15})$$

O potencial vetor é, então, determinado pela expressão acima, onde deve-se primeiro calcular a transformada de Fourier para a densidade de corrente a fim de determinar os coeficientes  $\hat{j}_{\alpha\beta}$ . Alternativamente ao cálculo do potencial vetor no plano de  $z = 0$ , pode-se calcular um potencial vetor médio (calculado ao longo da direção  $z$ ) no interior da amostra supercondutora, cuja expressão pode ser encontrada em [41].

## *Referências Bibliográficas*

- [1] MILOŠEVIĆ, M. V. *Vortex Matter in Mesoscopic Superconductor/ Ferromagnet Heterosystems*. Tese (Doutorado) — Universiteit Antwerpen, 2004.
- [2] ONNES, H. K. The resistance of pure mercury at helium temperatures. *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden*, v. 12, n. 120, p. 1, 1911.
- [3] KITTEL, C. *Introdução à física do estado sólido*. 8a. ed. [S.l.]: LTC, 2013.
- [4] FROLOV, S. Superconductivity. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=dT6-iyz3DNY>>.
- [5] JR, C. P. P. et al. *Superconductivity, (2007)*.
- [6] OLIVEIRA, T. M. de. *Picos de magnetização em supercondutores do tipo II*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Física "Gleb Wataghin", 2005.
- [7] MOSHCHALKOV, V. V.; FRITZSCHE, J. *Nanostructured superconductors*. [S.l.]: World Scientific, 2011.
- [8] HESS, H. F. et al. Scanning-tunneling-microscope observation of the abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid. *Physical Review Letters*, v. 62, n. 2, p. 214, 1989.
- [9] VELÁSQUEZ, J. C. P. *Confinamento mesoscópico de vórtices em supercondutores de uma e duas bandas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
- [10] PROZOROV, R. Equilibrium topology of the intermediate state in type-i superconductors of different shapes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, p. 257001, Jun 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.257001>>.
- [11] DELFT, D. van; KES, P. The discovery of superconductivity. *Physics today*, v. 63, n. 9, p. 38, 2010.
- [12] DEW-HUGHES, D. The critical current of superconductors: an historical review. *Low Temperature Physics*, v. 27, n. 9, p. 713–722, 2001.
- [13] VÉLEZ, M. et al. Superconducting vortex pinning with artificial magnetic nanostructures. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 320, n. 21, p. 2547 – 2562, 2008. ISSN 0304-8853.
- [14] GENKIN, G. M.; SKUZOVATKIN, V. V.; TOKMAN, I. D. Magnetization of the ferromagnetic-superconductor structures. *Journal of Magnetism and Magnetic Materi-*

- als*, v. 130, n. 1-3, p. 51– 56, 1994.
- [15] ERDIN, S. et al. Topological textures in a ferromagnet-superconductor bilayer. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 017001, Dec 2001.
- [16] BOBBA, F. et al. Vortex-antivortex coexistence in nb-based superconductor/ferromagnet heterostructures. *Phys. Rev. B*, v. 89, p. 214502, Jun 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.214502>>.
- [17] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Vortex-antivortex lattices in superconducting films with magnetic pinning arrays. *Phys. Rev. Lett.*, v. 93, p. 267006, Dec 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.267006>>.
- [18] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. Vortex-antivortex nucleation in superconducting films with arrays of in-plane dipoles. *Physica C: Superconductivity*, v. 437-438, n. 0, p. 208 – 212, 2006. ISSN 0921-4534.
- [19] LAIHO, R. et al. Penetration of vortices into the ferromagnet/type-ii superconductor bilayer. *Physical Review B*, v. 67, n. 14, p. 144522, 2003.
- [20] ALADYSHKIN, A. Y.; MOSHCHALKOV, V. V. Thin-film superconductor-ferromagnet hybrids: Competition between nucleation of superconductivity at domain walls and domains centers. *Physical Review B*, v. 74, n. 6, p. 064503, 2006.
- [21] KARAPETROV, G. et al. Transverse instabilities of multiple vortex chains in magnetically coupled nbse<sub>2</sub>/permalloy superconductor/ferromagnet bilayers. *Phys. Rev. B*, v. 80, p. 180506, Nov 2009.
- [22] IAVARONE, M. et al. Imaging the spontaneous formation of vortex-antivortex pairs in planar superconductor/ferromagnet hybrid structures. *Phys. Rev. B*, v. 84, p. 024506, Jul 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.024506>>.
- [23] BELKIN, A. et al. Tunable transport in magnetically coupled moge/permalloy hybrids. *Applied Physics Letters*, v. 93, n. 7, 2008. ISSN 0003-6951.
- [24] BELKIN, A. et al. Superconductor/ferromagnet bilayers: Influence of magnetic domain structure on vortex dynamics. *Phys. Rev. B*, v. 77, p. 180506, May 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.180506>>.
- [25] KARAPETROV, G. et al. Anisotropic superconductivity and vortex dynamics in magnetically coupled f/s and f/s/f hybrids. *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, v. 24, n. 1-2, p. 905–910, 2011. ISSN 1557-1939.
- [26] OSTERMANN, F.; PUREUR, P. *Supercondutividade*. 1a. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2005. (Temas atuais de física).
- [27] ROGALLA, H.; KES, P. H. *100 years of superconductivity*. [S.l.: s.n.], 2011.



- [28] GRANT, P. M. Down the path of least resistance. *Phys. World*, v. 24, p. 18–22, 2011.
- [29] GENNES, P. G. D. *Superconductivity of Metals and Alloys (Advanced Book Classics)*. [S.l.: s.n.], 1999.
- [30] FILE, J.; MILLS, R. G. Observation of persistent current in a superconducting solenoid. *Physical Review Letters*, v. 10, n. 3, p. 93, 1963.
- [31] MEISSNER, W.; OCHSENFELD, R. *Naturwiss*, v. 21, n. 787, 1933.
- [32] ANNETT, J. F. *Superconductivity, superfluids and condensates*. [S.l.]: Oxford University Press, 2004.
- [33] LONDON, F.; LONDON, H. The electromagnetic equations of the supraconductor. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 1935. v. 149, n. 866, p. 71–88.
- [34] MILOŠEVIĆ, M. V.; YAMPOLSKII, S. V.; PEETERS, F. M. Magnetic pinning of vortices in a superconducting film: The (anti)vortex-magnetic dipole interaction energy in the london approximation. *Physical Review B*, v. 66, n. 17, p. 174519, 2002.
- [35] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Vortex pinning in a superconducting film due to in-plane magnetized ferromagnets of different shapes: The london approximation. *Physical Review B*, v. 69, n. 10, p. 104522, 2004.
- [36] LANDAU, L. D.; GINZBURG, V. L. On the theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 20, p. 1064, 1950.
- [37] ABRIKOSOV, A. A. The magnetic properties of superconducting alloys. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, v. 2, n. 3, p. 199–208, 1957.
- [38] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, v. 108, p. 1175–1204, Dec 1957. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>>.
- [39] TEMPERE, J. *Bose-Einstein condensation, superfluidity and superconductivity*. [S.l.]: Universiteit Antwerpen, 2015.
- [40] TINKHAM, M. *Introduction to superconductivity*. 2a. ed. [S.l.]: Dover, 1996.
- [41] MILOŠEVIĆ, M. V.; GEURTS, R. The ginzburg-landau theory in application. *Physica C: Superconductivity*, v. 470, n. 19, p. 791–795, 2010.
- [42] BABAEV, E.; SPEIGHT, M. Semi-meissner state and neither type-i nor type-ii superconductivity in multicomponent superconductors. *Physical Review B*, v. 72, n. 18, p. 180502, 2005.
- [43] TRÄUBLE, H.; ESSMANN, U. Flux-line arrangement in superconductors as revealed by direct observation. *Journal of Applied Physics*, v. 39, n. 9, p. 4052–4059, 1968.

- [44] NAZAROV, Y. V.; BLANTER, Y. M. *Quantum transport: introduction to nanoscience*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [45] GORKOV, L. P. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, v. 9, n. 6, p. 1364–1367, 1959.
- [46] SILHANEK, A. V. et al. Optimization of superconducting critical parameters by tuning the size and magnetization of arrays of magnetic dots. *Physical Review B*, v. 76, n. 10, p. 100502, 2007.
- [47] MILLÁN, M. A. Z. *Propriedades críticas e de transporte de materiais supercondutores nanoestruturados e híbridos supercondutor-ferromagneto*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2013.
- [48] HUEBENER, R. P. *Magnetic flux structures in superconductors: extended reprint of a classic text*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [49] DORSEY, A. T.; GOLDSTEIN, R. E. Shapes of flux domains in the intermediate state of type-i superconductors. *Phys. Rev. B*, v. 57, p. 3058–3072, Feb 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.57.3058>>.
- [50] PROZOROV, R. et al. Suprafroth in type-i superconductors. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 4, p. 327–332, 2008.
- [51] GEURTS, R. *Vortex-antivortex molecules in mesoscopic quantum systems*. Tese (Doutorado) — Universiteit Antwerpen, 2011.
- [52] THOMPSON, R. S.; HU, C.-R. Dynamic structure of vortices in superconductors. *Physical Review Letters*, v. 27, n. 20, p. 1352, 1971.
- [53] KATO, R.; ENOMOTO, Y.; MAEKAWA, S. Effects of the surface boundary on the magnetization process in type-ii superconductors. *Physical Review B*, v. 47, n. 13, p. 8016, 1993.
- [54] BUSCAGLIA, G. C.; BOLECH, C.; LÓPEZ, A. On the numerical solution of the time-dependent ginzburg-landau equations in multiply connected domains. *Connectivity and Superconductivity*, 2000.
- [55] SCHERER, C. *Métodos computacionais da física*. 1a. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2005.
- [56] KOMENDOVIĆ, L. *Characteristic length scales and vortex interactions in two-component superconducting systems*. Tese (Doutorado) — Universiteit Antwerpen, 2013.
- [57] DORIA, M. M.; GUBERNATIS, J. E.; RAINER, D. Virial theorem for ginzburg-landau theories with potential applications to numerical studies of type-ii superconductors. *Phys. Rev. B*, v. 39, p. 9573–9575, May 1989.

- [58] ALADYSHKIN, A. Y. et al. Nucleation of superconductivity and vortex matter in superconductor–ferromagnet hybrids. *Superconductor Science and Technology*, v. 22, n. 5, p. 053001, 2009.
- [59] LYUKSYUTOV, I. F.; POKROVSKY, V. L. Ferromagnet–superconductor hybrids. *Advances in Physics*, Taylor & Francis, v. 54, n. 1, p. 67–136, 2005.
- [60] BERDIYOROV, G. R.; MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Vortex configurations and critical parameters in superconducting thin films containing antidot arrays: Nonlinear ginzburg-landau theory. *Physical Review B*, v. 74, n. 17, p. 174512, 2006.
- [61] MILOŠEVIĆ, M. V.; YAMPOLSKII, S. V.; PEETERS, F. M. Magnetic pinning of vortices in a superconducting film: the (anti) vortex-magnetic dipole interaction energy in the london approximation. *Physical Review B*, v. 66, n. 17, p. 174519, 2002.
- [62] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Interaction between a superconducting vortex and an out-of-plane magnetized ferromagnetic disk: Influence of the magnet geometry. *Physical Review B*, v. 68, n. 9, p. 094510, 2003.
- [63] GILLIJNS, W.; SILHANEK, A. V.; MOSHCHALCOV, V. V. Tunable field-induced superconductivity. *Physical Review B*, v. 74, n. 22, p. 220509, 2006.
- [64] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Superconducting wigner vortex molecule near a magnetic disk. *Physical Review B*, v. 68, n. 2, p. 024509, 2003.
- [65] NEAL, J. S. et al. Competing symmetries and broken bonds in superconducting vortex-antivortex molecular crystals. *Physical review letters*, v. 99, n. 12, p. 127001, 2007.
- [66] LANGE, M. et al. Nanoengineered magnetic-field-induced superconductivity. *Physical review letters*, v. 90, n. 19, p. 197006, 2003.
- [67] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Field-enhanced critical parameters in magnetically nanostructured superconductors. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 70, n. 5, p. 670, 2005.
- [68] GILLIJNS, W. et al. Influence of magnet size on magnetically engineered field-induced superconductivity. *Physical Review B*, v. 76, n. 18, p. 184516, 2007.
- [69] MILOŠEVIĆ, M. V. et al. Guided nucleation of superconductivity on a graded magnetic substrate. *Applied physics letters*, v. 96, n. 3, p. 032503, 2010.
- [70] SILHANEK, A. V. et al. Optimization of superconducting critical parameters by tuning the size and magnetization of arrays of magnetic dots. *Physical Review B*, v. 76, n. 10, p. 100502, 2007.
- [71] VLASKO-VLASOV, V. et al. Guiding superconducting vortices with magnetic domain walls. *Physical Review B*, v. 77, n. 13, p. 134518, 2008.

- [72] YANG, Z. et al. Domain-wall superconductivity in superconductor–ferromagnet hybrids. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 11, p. 793–798, 2004.
- [73] SZYMCZAK, R. A modification of the kittel open structure. *Journal of Applied Physics*, v. 39, p. 875–876, 1968.
- [74] MILOŠEVIĆ, M. V.; GEURTS, R. The ginzburg–landau theory in application. *Physica C: Superconductivity*, v. 470, n. 19, p. 791–795, 2010.
- [75] SONIN, E. B. Comment on “ferromagnetic film on a superconducting substrate”. *Physical Review B*, v. 66, n. 13, p. 136501, 2002.
- [76] BERDIYOROV, G. R.; MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Superconducting films with antidot arrays–novel behavior of the critical current. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 74, n. 3, p. 493, 2006.
- [77] HUBERT, A.; SCHÄFER, R. *Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures*. [S.l.]: Springer, Berlin, 1998.
- [78] SCHWEIGERT, V. A.; PEETERS, F. M.; DEO, P. S. Vortex phase diagram for mesoscopic superconducting disks. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, p. 2783–2786, Sep 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2783>>.
- [79] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Vortex pinning in a superconducting film due to in-plane magnetized ferromagnets of different shapes: The london approximation. *Physical Review B*, v. 69, n. 10, p. 104522, 2004.
- [80] MILOŠEVIĆ, M. V.; PEETERS, F. M. Vortex–antivortex nucleation in superconducting films with arrays of in-plane dipoles. *Physica C: Superconductivity*, v. 437, p. 208–212, 2006.
- [81] NATARAJAN, C. M.; TANNER, M. G.; HADFIELD, R. H. Superconducting nanowire single-photon detectors: physics and applications. *Superconductor science and technology*, v. 25, n. 6, p. 063001, 2012.