

Gilson Pereira do Carmo Filho

*Um Ambiente Computacional de
Aprendizagem para Métodos de Resolução
de Equações Diferenciais Parciais*

Fortaleza

2006

Gilson Pereira do Carmo Filho

*Um Ambiente Computacional de
Aprendizagem para Métodos de Resolução
de Equações Diferenciais Parciais*

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Teleinformática.

Orientador:
Prof. Júlio Wilson Ribeiro, Dr.

Fortaleza

2006

Gilson Pereira do Carmo Filho

**Um Ambiente Computacional de Aprendizagem para Métodos de Resolução
de Equações Diferenciais Parciais**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Teleinformática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará.

Gilson Pereira do Carmo Filho

Banca Examinadora:

Prof. Júlio Wilson Ribeiro, Dr.

Prof. José Neuman de Sousa, Dr.

Prof. José Tarcisio Costa Filho, Dr.

Prof. José Marques Soares, Dr.

Prof. Paulo de Tarso Cavalcante Freire, Dr.

Prof. Hermínio Borges Neto, Dr.

Prof. José Armando Valente, Dr.

Fortaleza, 27 de Outubro de 2006

*“Se as coisas são inatingíveis... ora!
não é motivo para não querê-las.
Que tristes os caminhos, se não fora
a mágica presença das estrelas!”*

Mário Quintana

*Aos meus queridos pais Gilson e Graça,
à minha amada esposa Renata,
e à nossa linda filhinha Clarissa.*

Agradecimentos

Ao professor Júlio Wilson Ribeiro, por sua excelente orientação, paciência e constante incentivo ao longo desses últimos anos;

Ao professor José Neuman de Sousa, por nos levar ao PPGETI e pelo seu importante apoio;

Ao coordenador do PPGETI, professor João Cesar Moura Mota, pela acolhida ao programa e pela oportunidade de concluir este curso;

Aos professores José Tarcísio Costa Filho e José Marques Soares, pelas críticas e sugestões que muito contribuíram para o engrandecimento deste trabalho;

Aos professores Paulo de Tarso Cavalcante Freire e Hermínio Borges Neto, por participarem da banca examinadora e pelos comentários no dia da defesa;

Ao professor José Armando Valente, cuja presença na banca examinadora e sugestões apresentadas no dia da defesa agregaram valor a este trabalho;

À Techne Engenharia e Sistemas, em especial a Maristella Ribas e Maurício da Costa Melo, por me oferecerem plenas condições de cursar o Mestrado.

Aos meus pais, Gilson e Graça, por me proporcionarem uma boa educação e por tudo o que fizeram, e fazem até hoje, por mim;

À minha esposa Renata, por sua valiosa ajuda e pela imensa paciência nos longos momentos em que estive ausente;

A todos aqueles que, embora não citados aqui, contribuíram ou me ajudaram de alguma forma para que eu alcançasse esta vitória.

E a Deus, por colocar todas essas pessoas na minha vida e por não me deixar desistir deste meu sonho, dando-me força nos momentos mais difíceis.

Resumo

A análise e solução de problemas físicos associados a equações diferenciais parciais é um assunto no qual os alunos tradicionalmente encontram muitas dificuldades. Assim, para auxiliar no processo de aprendizagem de métodos analíticos e numéricos para resolução dessas equações, desenvolveu-se um ambiente computacional de aprendizagem adotando-se uma abordagem interdisciplinar, envolvendo computação simbólica, fundamentos da educação e tópicos avançados de cálculo numérico. Utilizaram-se Myers (1971) como base do conteúdo didático e a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel para organizar a estruturação deste conteúdo.

Enfatizando-se os aspectos da descrição teórica e detalhamento matemático, apresentam-se no ambiente de aprendizagem três métodos de solução para equações diferenciais parciais: o método analítico de separação de variáveis e os métodos numéricos de diferenças finitas nas variantes de Euler e de Crank-Nicolson.

O ambiente foi implementado em um sistema de computação simbólica e, portanto, conta com recursos de manipulação simbólica e visualização gráfica. Isto torna possível ao aluno desenvolver e utilizar a solução analítica, obtida pelo método de separação de variáveis, para interpretar e analisar, através de gráficos e animações, o fenômeno físico em questão. O ambiente também proporciona ao aluno meios de se calcular a solução numérica interativamente, através dos métodos de diferenças finitas de Euler e Crank-Nicolson, visualizando-se passo-a-passo os valores da função na malha e comparando-os com os resultados numéricos calculados a partir da solução analítica.

O ambiente de aprendizagem também oferece recursos para que aluno gere tabelas e gráficos para analisar e comparar os resultados numéricos obtidos pelos três métodos, adotando-se como *benchmark* a solução obtida pelo método de separação de variáveis. Dessa forma, o aprendiz poderá acessar a informação em caráter interativo e dinâmico, propiciando o aprendizado autônomo.

Como exemplo de aplicação e visando-se ilustrar o estudo de problemas físico-matemáticos, adota-se o problema de transferência de calor por condução, que é utilizado para se estudar o processo do resfriamento de circuitos eletrônicos. Assim, assume-se a difusão de calor em uma barra de *epoxy*, inicialmente a uma temperatura conhecida e resfriada subitamente em suas extremidades. Os gráficos e tabelas disponibilizados pelo ambiente também permitem que o aprendiz observe de forma crítica o processo de resfriamento da barra, quer através da visualização da evolução dos perfis de temperatura, ou pela curva de resfriamento de um ponto do domínio espacial.

Abstract

Some difficulties can be identified in teaching and learning of methods to analyze and solve physical problems associated to partial differential equations. To improve the learning process of analytical and numerical methods for partial differential equations, a hybrid approach is adopted to develop a learning computational environment involving symbolic programming, education principles and advanced topics in numerical methods. It was adopted the methodology developed by Myers (1971) and the Ausubel's theory of meaningful learning.

The learning environment presents three methods to solve parabolic differential equations, emphasizing theoretical and mathematical aspects: separation of variable and finite differences according to Euler and Crank-Nicolson variants.

The environment was implemented in a symbolic computer system and, therefore, provides symbolic manipulation and graphical visualization. Thus the learner can develop and use the analytical solution, obtained through the method of separation of variable, to interpret and analyze, with graphs and animations, the physical phenomenon in question. Moreover, the environment also provides to the learner a way to calculate the numerical solution interactively, through the methods of finite differences of Euler and Crank-Nicolson, visualizing the values of the function in the grid and comparing such values with the calculated numerical results from the analytical solution.

The learning environment also provides resources for the learner to generate tables and graphs for analysis and comparison of the numerical results obtained by the three methods, using the solution obtained by separation of variables as benchmark. Thus the learner will be able to have access the information in an interactive and dynamic way, favoring the independent learning.

As an example of application and to illustrate the study of physical-mathematical problems, the conduction heat transfer problem is adopted, which is used to study the electronic circuits cooling. Thus it is assumed heat diffusion in an epoxy bar, initially with a known temperature and cooled suddenly in its extremities. Graphs and tables provided by the environment also allow the learner to critically observe the process of bar cooling by visualizing the evolution of temperature profiles or the curve of cooling for a point in space domain.

Sumário

Lista de Símbolos

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 16
1.1	Motivação	p. 16
1.2	Objetivos	p. 18
1.3	Organização da Dissertação	p. 19
2	Revisão de Literatura	p. 21
2.1	Equações Diferenciais Parciais	p. 21
2.2	Problemas de Difusão	p. 23
2.3	Métodos de Resolução	p. 25
2.4	Sistemas de Computação Simbólica	p. 26
2.5	Pesquisas Relacionadas	p. 28
2.6	Considerações Finais	p. 31
3	Aprendizagem Auxiliada por Computador	p. 32
3.1	Histórico	p. 32
3.2	Abordagens Pedagógicas	p. 34
3.3	Classificação dos Softwares Educacionais	p. 36
3.4	Características da Qualidade do Software Educacional	p. 38

3.5	Considerações Finais	p. 39
4	Teoria da Aprendizagem de Ausubel	p. 41
4.1	Visão Geral	p. 41
4.2	Aprendizagem Significativa	p. 42
4.3	Tipos de Aprendizagem Significativa	p. 43
4.4	Condições para Aprendizagem Significativa	p. 44
4.5	Aquisição e Organização de Conceitos	p. 44
4.6	Mapas Conceituais	p. 46
4.7	Considerações Finais	p. 46
5	Resolução de Equações Parabólicas	p. 49
5.1	O Problema da Condução de Calor	p. 49
5.2	Separação de Variáveis	p. 51
5.3	Diferenças Finitas	p. 55
5.3.1	Conceitos Básicos	p. 56
5.3.2	Formulação Matemática	p. 57
5.3.3	Método de Euler	p. 58
5.3.4	Método de Crank-Nicolson	p. 61
5.4	Construção dos Mapas Conceituais	p. 63
5.5	Considerações Finais	p. 65
6	Ambiente Computacional de Aprendizagem	p. 67
6.1	Características Gerais	p. 67
6.2	Aspectos Gerais da Implementação	p. 68
6.3	Descrição do Ambiente	p. 71
6.4	Interpretação do Fenômeno Físico	p. 83
6.5	Análise dos Resultados Numéricos	p. 85

6.6	Considerações Finais	p. 88
7	Conclusões	p. 90
	Referências	p. 93
	Apêndice A – Breve Descrição do Mathematica	p. 99

Lista de Símbolos

$u(x, t)$	Variável dependente na equação diferencial, função das variáveis independentes x e t
$f(x)$	Função de distribuição inicial dos valores de x , associada à condição inicial $u(x, 0)$
α	Coefficiente de difusividade térmica
κ	Condutividade térmica
ρ	Densidade do material
s	Calor específico do material
$X(x)$	Função de x utilizada no produto de funções do método de separação de variáveis
$T(t)$	Função de t utilizada no produto de funções do método de separação de variáveis
$X''(x)$	Derivada segunda de $X(x)$
$T'(t)$	Derivada primeira de $T(t)$
λ^2	Constante de separação
x	Coordenada espacial da função $u(x, t)$
f_i	Valor de $f(x)$ em x_i
f_{i+1}	Valor de $f(x)$ em x_{i+1}
$\frac{df}{dx}$	Derivada primeira de f em relação a x
Δx	Distância entre x_i e x_{i+1}
t	Coordenada temporal da função $u(x, t)$
$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$	Derivada parcial da função $u(x, t)$ em relação a t
$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$	Derivada parcial de segunda ordem da função $u(x, t)$ em relação a x
D	Coefficiente de difusão
L	Comprimento (ou espessura) do domínio da coordenada espacial
k_1	Valor fixo para a condição de contorno $u(0, t)$
k_2	Valor fixo para a condição de contorno $u(L, t)$

Lista de Figuras

1	Descrição matemática do problema de difusão (MYERS, 1971)	p. 24
2	Abordagens pedagógicas da aprendizagem auxiliada por computador . .	p. 34
3	Organização de conceitos na estrutura cognitiva, segundo Ausubel . . .	p. 42
4	O processo de assimilação, segundo Ausubel	p. 45
5	Exemplo de um mapa conceitual mais elaborado	p. 47
6	Barra sólida condutora de calor.	p. 50
7	Solução do problema da condução de calor pelo método de separação de variáveis	p. 55
8	Malha de nós para o método de \ddot{E} uler	p. 60
9	Malha de nós para o método de Crank-Nicolson	p. 62
10	Mapa conceitual referente à resolução de problemas de difusão	p. 63
11	Mapa conceitual referente ao método de separação de variáveis	p. 64
12	Mapa conceitual referente ao método de diferenças finitas	p. 65
13	Exemplo de um <i>notebook</i> do ambiente	p. 69
14	<i>Notebook</i> com o texto didático num nível mais baixo de abstração . . .	p. 69
15	<i>Notebook</i> apresentando mapa conceitual	p. 70
16	<i>Notebook</i> de ajuda <i>on-line</i> do ambiente	p. 71
17	<i>Notebook</i> descrevendo o problema da condução de calor	p. 72
18	<i>Notebook</i> ilustrando o desenvolvimento do método de separação de variáveis	p. 72
19	<i>Notebook</i> de aplicação do método de separação de variáveis	p. 73
20	Definição da solução analítica obtida pelo método de separação de variáveis	p. 74

21	Parâmetros físicos utilizados na aplicação do método de separação de variáveis	p. 74
22	Interpretação da solução: geração de gráfico da variação da temperatura em um determinado ponto da barra	p. 75
23	Interpretação da solução: geração de gráfico da distribuição da temperatura ao longo da barra	p. 76
24	<i>Notebook</i> de aplicação do método de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$	p. 77
25	Entrada de dados para o algoritmo do método de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$	p. 77
26	Cálculos auxiliares do algoritmo do método de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$	p. 78
27	Inicialização e preenchimento da matriz com as condições de contorno	p. 79
28	Preenchimento da matriz com a condição inicial	p. 80
29	Preenchimento da matriz com as temperaturas dos pontos interiores	p. 80
30	Geração de tabela comparativa dos métodos de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$ e separação de variáveis	p. 81
31	Parâmetros para geração do gráfico comparativo dos métodos de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$ e separação de variáveis	p. 82
32	Geração do gráfico comparativo dos métodos de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$ e separação de variáveis	p. 82
33	Perfil de temperatura no resfriamento de uma barra de <i>epoxy</i> , de comprimento $L = 0,1m$, para o instante $t = 600s$	p. 84
34	Curva de resfriamento da barra de <i>epoxy</i> para a posição $x = 0,01m$	p. 84
35	Gráfico comparativo dos métodos de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$ (em verde) e Crank-Nicolson (em vermelho) com o método de separação de variáveis (em azul), apresentando-se o efeito do resfriamento em $x = 0,01$ metros, para uma malha com 10 nós e $p = 0,25$	p. 87
36	Gráfico comparativo dos métodos de $\ddot{\text{E}}\text{uler}$ (em verde) e Crank-Nicolson (em vermelho) com o método de separação de variáveis (em azul), apresentando-se o efeito do resfriamento em $x = 0,01$ metros, para uma malha com 10 nós e $p = 0,50$	p. 87
37	Estrutura do sistema <i>Mathematica</i>	p. 100

38	Visão geral do funcionamento do <i>webMathematica</i>	p.102
39	<i>webMathematica</i> acessado a partir de um telefone celular	p.102

Lista de Tabelas

1	Especialidade dos SCS atualmente disponíveis	p. 28
2	Exemplo de tabela gerada pelo ambiente, na qual confrontam-se os três métodos de resolução	p. 85
3	Tabela para análise da convergência da solução analítica, variando-se o número de termos da série, para $t = 50$ segundos	p. 86
4	Tabela para análise da convergência da solução analítica, variando-se o número de termos da série, para $t = 10.000$ segundos	p. 86

1 *Introdução*

Apresenta-se neste capítulo a motivação para a realização da pesquisa, contextualizando-se o cenário no qual ela está inserida. Em seguida, apontam-se os objetivos a serem alcançados e, por último, descreve-se a estrutura desta dissertação, apresentando-se o conteúdo abordado em cada capítulo.

1.1 *Motivação*

O desenvolvimento de metodologias de ensino-aprendizagem assistidas por computador e voltadas para a construção do raciocínio abstrato físico-matemático vem se tornando uma promissora linha interdisciplinar de pesquisa, face aos contínuos avanços da informática (CARMO FILHO; RIBEIRO; GONCALVES, 2004; CARMO FILHO et al., 2006).

Um grande desafio que vem sendo enfrentado é a necessidade de se trabalhar conteúdos de diferentes áreas do conhecimento, onde se envolvem formalismos da educação, informática, matemática, engenharias e ciências (BERRY; DIPIAZZA; SAUER, 2003). Neste contexto, os métodos analíticos e numéricos para resolução de equações diferenciais parciais associadas a problemas físicos, e a respectiva interpretação fenomenológica, tornam-se cada vez mais difíceis quando se enfocam modelos mais avançados (RIBEIRO; COTTA, 1995; MIKHAILOV; OZISIK, 1984; OZISIK, 1980).

Para estudantes de graduação e pós-graduação, desenvolver um bom entendimento desses métodos numéricos torna-se bastante difícil sem a aprendizagem de alguns conceitos fundamentais associados ao cálculo numérico. No âmbito da matemática computacional, comumente a literatura voltada para a graduação dedica mais ênfase às técnicas de derivação e ao estudo dos métodos numéricos nos seus aspectos matemáticos e computacionais, sem se aprofundar na interpretação física dos resultados obtidos em função do problema associado. Portanto, procede-se mais ao desenvolvimento de formulações e algoritmos matemáticos (SHAMPINE; GLADWELL, 1999). Vale também ressal-

tar que o conteúdo didático é tradicionalmente disponibilizado em material impresso, caracterizando-se como informação estática (CARMO FILHO et al., 2004; VALENTE, 1998a).

Um outro aspecto importante a ser mencionado é que, em média, alunos de determinados cursos de graduação apresentam maior dificuldade para construir o raciocínio abstrato físico-matemático, em muitos casos devido a alguma insuficiência no embasamento matemático. Isto pode ser notado quando o professor deseja analisar no quadro a interpretação física de problemas associados às equações diferenciais, o que pode causar determinadas dificuldades e, conseqüentemente, a perda da motivação pela disciplina (CARMO FILHO et al., 2004).

Vale ressaltar que o ensino de disciplinas ligadas a conceitos físicos passa atualmente por uma séria dificuldade relacionada à deficiência com o trato matemático necessário para acompanhar, com a devida profundidade, o conteúdo a ser trabalhado (ARNOLD; PELA, 2004). A experiência docente demonstra que isto traz graves conseqüências, como dificuldades por parte dos alunos no entendimento dos modelos conjugados físico e matemático.

Outro tipo de dificuldade existente no processo de ensino-aprendizagem dos métodos numéricos advém da adoção de linguagens de programação procedurais, como FORTRAN e C, o que eventualmente pode requisitar maior esforço dos alunos na modelagem computacional dos problemas matemáticos, fazendo com que estes percam o foco da disciplina.

O professor, por sua vez, adotando uma metodologia mais instrucionista, planeja e constrói o conteúdo disciplinar para apresentá-lo em sala-de-aula convencional, onde se utilizam quadro negro e/ou slides. Este formato tradicional de aula torna-se propício para um comportamento passivo por parte dos estudantes.

Diante do contexto educacional acima caracterizado, o uso do computador, sob a ótica da informática educativa, mostra-se bastante promissor no sentido de tornar o contato com a informação um processo dinâmico e interativo, propiciando alternativas para se estabelecer novos recursos de mediação pedagógica (SOUSA, 2005). Em vez de simplesmente memorizarem as informações, os estudantes devem ser motivados a buscá-las e trabalhá-las, construindo e modificando o seu conhecimento. Estas mudanças podem ser introduzidas com a presença do computador, que deve propiciar condições para que os estudantes exercitem a capacidade de procurar e selecionar informações, resolver problemas e aprender independentemente (VALENTE, 1998a).

A incorporação de recursos computacionais pode proporcionar aos alunos uma nova maneira de acessar as informações para a construção de seu conhecimento, através da

utilização de ambientes computacionais de aprendizagem nos quais se possam fazer antecipações, simulações, conjecturas, experimentações e encontrar soluções para problemas propostos (MARCO, 2004; MCDERMOTT, 1991). Para os alunos, o uso desses ambientes pode surgir como uma fonte de motivação, enquanto que para os professores pode representar a possibilidade de ensinar de maneira inovadora ou de simular fatos do mundo real (OEIRAS, 1998; MCDERMOTT, 1991).

Além disso, os avanços na velocidade de processamento dos computadores viabilizaram o uso de novas linguagens, recursos e técnicas de programação. Neste sentido, aponta-se a utilização dos sistemas de computação simbólica (SCS), que realizam um grande número de operações matemáticas, tais como diferenciação, integração, resolução de equações ou expansão em série de funções.

Os sistemas de computação simbólica vêm assumindo um papel cada vez mais preponderante no ensino de graduação e pós-graduação, pois substituem as pesadas manipulações de fórmulas pela realização de cálculos concretos sobre sistemas físicos, bem como apresentam os resultados de uma forma clara (DEUS et al., 2000). Dessa forma, tais sistemas auxiliam o processo de aprendizado em diversas disciplinas dos cursos de ciências e engenharias (CARMO FILHO; RIBEIRO; GONCALVES, 2004).

Devido aos seus poderosos recursos, os sistemas de computação simbólica têm sido bastante utilizados no ensino dos métodos analíticos para resolução de equações diferenciais parciais. Entretanto, pouco se têm explorado estes sistemas no ensino dos métodos numéricos, de forma a minimizar as dificuldades subjacentes.

1.2 **Objetivos**

O objetivo geral consiste em desenvolver um ambiente computacional, direcionado a alunos de graduação e de pós-graduação, para auxiliar a aprendizagem de métodos analíticos e numéricos aplicados a equações diferenciais parciais, especificamente as do tipo parabólica, que modelam os problemas de difusão.

O ambiente computacional deverá ser capaz de realizar manipulação simbólica e processamentos analítico e numérico, permitindo a execução interativa de algoritmos matemáticos e a visualização de dados através de tabelas, gráficos e animações.

Além disso, o ambiente deve também promover uma análise unificada de um problema de condução de calor, tanto no mecanismo de convergência numérica dos métodos

matemáticos de resolução empregados, como na interpretação do problema físico associado.

O conteúdo pedagógico do ambiente é baseado em Myers (1971), o qual é indicado para educação a distância, e estruturado conforme a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1968), que explica o processo de aprendizagem segundo o ponto de vista cognitivo. Para a implementação do ambiente, utilizou-se o *Mathematica*, um poderoso sistema de computação simbólica.

Enfim, o ambiente proposto deverá servir de ferramenta para uma aprendizagem autônoma, de forma que o professor deixe de ser apenas um repassador do conhecimento e se torne, também, facilitador do processo de aprendizagem do aluno.

1.3 Organização da Dissertação

A dissertação está organizada em sete capítulos, incluindo esta introdução, e um apêndice, conforme apresentam-se a seguir:

No Capítulo 2 é feita uma revisão da literatura, abordando-se tópicos como equações diferenciais parciais, modelagem matemática dos problemas de difusão, resolução de equações diferenciais parciais e computação simbólica. Apresentam-se, também, uma discussão das pesquisas relacionadas ao capítulo.

No Capítulo 3 trata-se da aprendizagem auxiliada por computador, discutindo-se as suas abordagens pedagógicas, a classificação e as características para a qualidade dos *softwares* educacionais.

No Capítulo 4 aborda-se a teoria de aprendizagem de Ausubel, cujos princípios nortearam a estruturação do ambiente computacional, e ressalta-se a utilização dos mapas conceituais como ferramenta de auxílio à aprendizagem.

No Capítulo 5 apresentam-se o problema da condução de calor e sua solução matemática, através de três métodos para resolução de equações diferenciais parciais: os métodos de separação de variáveis, Euler e Crank-Nicolson. Constroem-se também os mapas conceituais para cada método, os quais são disponibilizados no ambiente desenvolvido.

No Capítulo 6 descreve-se o ambiente computacional de aprendizagem, destacando-se suas características gerais e aspectos de implementação. Além disso, interpretam-se fisicamente e analisam-se os resultados numéricos obtidos para o problema de condução de calor pelos três métodos de resolução abordados.

No Capítulo 7 apresentam-se as conclusões e contribuições da pesquisa, e se estabelecem direcionamentos e sugestões para futuros trabalhos.

Finalmente, no Apêndice A é feita uma breve descrição do *Mathematica*, sistema de computação simbólica que foi utilizado na implementação do ambiente computacional de aprendizagem.

2 *Revisão de Literatura*

Neste capítulo, procede-se com uma revisão sobre as equações diferenciais parciais e a modelagem matemática dos problemas de difusão. Em seguida, abordam-se alguns dos métodos de resolução para essas equações, e apresentam-se os sistemas de computação simbólica.

Finalmente, faz-se referência a trabalhos anteriormente publicados, situando-se a evolução do assunto. A revisão está limitada às contribuições mais importantes diretamente ligadas ao objetivo da pesquisa.

2.1 Equações Diferenciais Parciais

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação que contém derivadas parciais. Ao contrário das equações diferenciais ordinárias (EDOs), onde a função incógnita depende somente de uma variável, nas EDPs esta função depende de duas ou mais variáveis. Por exemplo, citam-se algumas das EDPs mais conhecidas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{equação do calor em uma dimensão})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{equação do calor em duas dimensões})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{equação da onda em três dimensões})$$

Nas equações acima, a função incógnita u sempre depende de mais de uma variável. Assim, u é chamada de variável **dependente**, enquanto que demais são chamadas de variáveis **independentes**.

A maioria das leis naturais da física, seja no domínio da dinâmica dos fluidos, ele-

tricidade, magnetismo, mecânica, ótica ou transferência de calor, podem ser expressas em termos de equações diferenciais parciais. Estas leis descrevem os fenômenos físicos relacionando as derivadas do espaço e tempo.

As equações diferenciais parciais podem ser classificadas de diversas maneiras. A classificação é um conceito importante porque, em geral, as teorias e métodos de solução comumente aplicam-se apenas a determinadas classes de equações, conforme será visto no Capítulo 5. As classificações básicas são:

- **Ordem:** A ordem de uma equação diferencial parcial consiste na mais alta ordem de uma derivada parcial na equação.
- **Linearidade:** As equações diferenciais parciais também podem ser **lineares** ou **não-lineares**. Nas equações lineares, a variável dependente u e todas as suas derivadas aparecem na forma linear, ou seja, não há produtos da variável dependente ou de suas derivadas. Mais precisamente, uma equação linear de segunda ordem, a duas variáveis, é uma equação na seguinte forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (2.1)$$

onde A , B , C , D , E , F e G podem ser constantes ou funções de x e y .

- **Homogeneidade:** A Equação 2.1 é chamada de **homogênea** se o termo à direita do sinal de igualdade, G , é igual a zero para todo x e y . Se G não for igual a zero, então a equação é denominada **não-homogênea**.
- **Tipos Básicos de Equações Lineares:** Todas as EDPs lineares semelhantes à Equação 2.1 enquadram-se num dos seguintes tipos:
 - (a) **Parabólica:** As equações parabólicas descrevem os processos de difusão (ou propagação), como por exemplo a transferência de calor, e satisfazem a propriedade $B^2 - 4AC = 0$.
 - (b) **Hiperbólica:** As equações hiperbólicas descrevem os sistemas que vibram, como por exemplo o movimento de onda, e satisfazem a propriedade $B^2 - 4AC > 0$.
 - (c) **Elíptica** As equações elípticas descrevem fenômenos em estado estável (*steady-state*) e satisfazem a propriedade $B^2 - 4AC < 0$.

Exemplos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{Parabólica})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{Hiperbólica})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Elíptica})$$

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Elíptica para } y > 0, \text{ parabólica para } y = 0 \text{ e} \\ \text{hiperbólica para } y < 0)$$

Geralmente, $B^2 - 4AC$ é uma função de variáveis independentes. Por esta razão, uma equação pode mudar de uma forma básica para outra, dependendo do domínio da equação.

2.2 Problemas de Difusão

Difusão é o processo através do qual a matéria é transportada de uma região para outra de um sistema como resultado do movimento aleatório de suas moléculas (CRANK, 1975). Este processo é encontrado em várias investigações físicas, tais como transferência de calor (OZISIK, 1985), eletromagnetismo (KUNZ; LUEBBERS, 1993) e na tecnologia de dispositivos semicondutores (BOLTAKS, 1963). O processo de difusão também é de grande importância, teórica e prática, para as ciências biológicas (JACOBS, 1967).

De um modo geral, os processos de difusão podem ser modelados matematicamente pela seguinte equação diferencial parcial parabólica:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

Na equação acima, $u(x, t)$ representa a variável dependente, função das variáveis independentes x e t , e D expressa o coeficiente de difusão. Em problemas físicos, pode-se atribuir à variável x a coordenada espacial, cujo domínio apresenta comprimento (ou espessura) L , e à variável t a coordenada temporal.

O processo acima modelado apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = k_1, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

e

$$u(L, t) = k_2, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

onde k_1 e k_2 a princípio podem ser considerados valores fixos. O processo tem ainda a seguinte condição inicial:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.5)$$

onde f é uma função conhecida.

O problema consiste, portanto, em encontrar $u(x, t)$ que satisfaça a equação diferencial 2.2, sujeita às equações 2.3 e 2.4, que representam as condições de contorno, e à equação 2.5, que expressa a condição inicial.

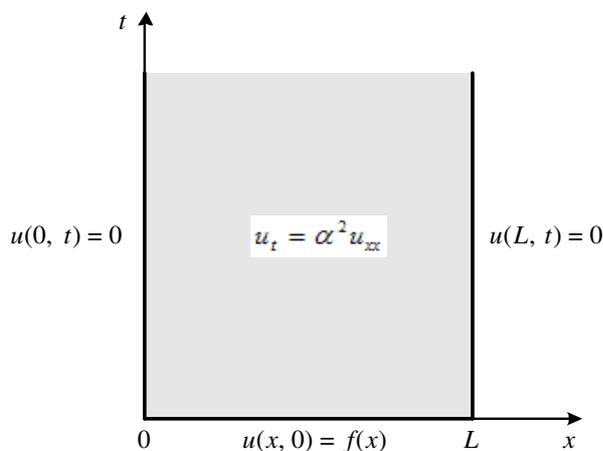


Figura 1: Descrição matemática do problema de difusão (MYERS, 1971)

Pode-se, também, considerar o problema como de condição de contorno no plano xt , conforme ilustra a Figura 1 acima. As condições de contorno 2.3 e 2.4, juntamente com a condição inicial 2.5, determinam o valor de u em três lados da região, enquanto a equação diferencial 2.2 descreve o comportamento de u dentro da região. O problema é solucionado quando encontra-se uma função u que satisfaça a equação diferencial parcial, as condições de contorno e a condição inicial (MYERS, 1971).

2.3 Métodos de Resolução

A princípio, existem duas maneiras de se resolver equações diferenciais parciais: analiticamente ou através de métodos numéricos (BARKESHLI; VOLAKIS, 2004a, 2004b). A primeira lida com modelos matemáticos na sua forma literal, buscando uma solução analítica exata, enquanto a segunda utiliza uma seqüência finita de operações lógicas e aritméticas para encontrar uma solução aproximada (CLAUDIO; MARINS, 2000; OZISIK, 1985).

Em domínios espaciais com geometrias arbitrárias e com condições de contorno complexas, o método analítico pode não ser aplicável, principalmente se as equações diferenciais parciais forem não-lineares. Nesses casos, métodos numéricos tais como diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos podem ser utilizados na obtenção das soluções dessas equações (CHAPRA; CANALE, 1988; CARNAHAN; LUTHER; WILKES, 1969; MYERS, 1971).

A aplicação dos métodos numéricos sofreu grandes restrições antes do advento dos computadores, pois muitos dos cálculos necessários demandavam grande esforço humano ou mesmo sobre-humano. Embora facilitassem alguns cálculos, os dispositivos então existentes criavam muitos problemas na sua utilização. A partir do surgimento dos computadores, na década de 40, muitos problemas passaram a ser resolvidos de forma satisfatória e, desde então, o tipo e o número de problemas tratáveis pela nova máquina ampliaram-se cada vez mais (CLAUDIO; MARINS, 2000; RIBEIRO; DUARTE; ANDRADE, 1999).

Os métodos numéricos, entretanto, não permitem que o usuário transfira para seus algoritmos as informações analíticas de seus problemas originais. Pode-se observar, nas informações contidas no algoritmo, que não há nenhum tipo de correlação matemática entre o problema original e o sistema algébrico subjacente (RIBEIRO; DUARTE; ANDRADE, 1999). Assim, se o algoritmo apresentar problemas de instabilidade ou convergência numérica, torna-se necessário aplicar procedimentos associados aos respectivos métodos numéricos para tentar controlar tais efeitos. Este tipo de procedimento, portanto, pode ser exaustivo ou comprometedor, à medida em que o problema apresenta maior complexidade (RIBEIRO; DUARTE; ANDRADE, 1999).

Como alternativa para o tratamento e solução de equações diferenciais parciais, surgiram os métodos híbridos analítico-numéricos, que se destinam a produzir códigos computacionais mais eficientes do que os obtidos a partir dos métodos numéricos. Uma das características dos métodos híbridos é a capacidade de preservar no código fonte

informações analíticas explícitas do problema físico (ANDRADE, 1996; RIBEIRO; COTTA, 1995).

Como exemplo de método híbrido, cita-se a técnica da transformada integral generalizada (GITT) (MIKHAILOV; OZISIK, 1984), que permite transformar analiticamente, através de uma metodologia sistemática e com controle prescrito de erro, sistemas de equações diferenciais parciais parabólicas em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Em outras palavras, a GITT reduz a dependência das variáveis independentes a uma única variável, gerando um problema bem mais simples e diminuindo significativamente o esforço computacional para obtenção de sua solução (ANDRADE, 1996; RIBEIRO; COTTA, 1995).

2.4 Sistemas de Computação Simbólica

A computação simbólica constitui uma área da ciência da computação que lida com a manipulação de equações e expressões matemáticas na sua forma simbólica, buscando automatizar os processos envolvidos na resolução de problemas matemáticos (WOLFRAM, 2003). Trata-se de uma área muito ampla e, portanto, com várias vertentes, dentre as quais citam-se: manipulação e solução de equações polinomiais e diferenciais, cálculo exato de integrais indefinidas de funções elementares etc. Cada uma dessas vertentes possui métodos próprios, oriundos da área da matemática subjacente. Entretanto, em quase todas, os métodos se entrelaçam com técnicas de áreas afins e de computação.

Historicamente, a computação simbólica surgiu da necessidade de se atribuir à máquina a cansativa tarefa de manipular algebricamente extensas expressões matemáticas, a fim de se permitir o estudo e análise de modelos cada vez mais complexos (ANDRADE, 1996).

As primeiras referências documentadas sobre o uso da manipulação de símbolos por computador datam de 1953 (KAHRIMANIAN, 1953; NOLAN, 1953). Ao longo dessa mesma década, surgiram programas computacionais capazes de manipular polinômios, resolver equações e calcular derivadas de funções. Na década de 1960, as pesquisas se intensificaram e, em 1966, houve as duas primeiras conferências sobre cálculo simbólico, ocorridas em Washington e Pisa (ANDRADE, 1996). No início da década de 1970, já existiam programas computacionais que integravam funções analiticamente e, ao final dessa mesma década, outros programas surgiram para resolver simbolicamente equações diferenciais e integrais (CUNHA, 2002).

Desde então, uma série de programas de propósito geral vêm sendo implementados,

incorporando uma série de recursos de computação numérica e gráfica ao poder de processamento simbólico. Inicialmente chamados de sistemas de computação algébrica, ou simplesmente CAS (*Computer Algebra Systems*), atualmente esses programas também são conhecidos como sistemas de computação simbólica (SCS).

Os sistemas de computação simbólica, portanto, são programas que permitem manipular expressões matemáticas simbolicamente, oferecendo ao usuário uma ampla diversidade de recursos de computação simbólica, numérica e gráfica (ANDRADE, 1996).

Devido às suas extensas necessidades de memória, os primeiros SCS estavam restritos aos computadores de grande porte. Graças à crescente evolução dos microcomputadores nas duas últimas décadas, hoje encontram-se disponíveis versões para as mais diversas plataformas de *hardware* e sistemas operacionais (PINTO, 2002).

Dentre os primeiros SCS, citam-se *Reduce* e *Macsyma*, os quais começaram a ser desenvolvidos na década de 1960 e ainda estão disponíveis comercialmente. Vários outros sistemas surgiram a partir da década de 1980, dentre os quais citam-se *Derive*, MATLAB, *Maple*, *Mathematica* e *Mathcad* (SILVEIRA, 1998). Atualmente, os SCS mais utilizados são: *Mathematica*, *Maple* e MATLAB.

Tradicionalmente, os sistemas de computação simbólica são utilizados para execução automática dos seguintes tipos de operações (ANDRADE, 1996):

Aritméticas: Envolvem soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, sendo possível se obterem tanto soluções exatas como aproximadas, com precisão prescrita pelo usuário, limitada apenas pela memória do computador utilizado. Números racionais e complexos também podem ser representados de maneira exata. As funções matemáticas, quando utilizadas, são mantidas em sua forma simbólica até o momento em que o usuário requisite resultados numéricos.

Algébricas: Abrangem transformações de expressões contendo variáveis (incógnitas). Dentre essas operações, citam-se: fatoração e expansão de expressões, fatoração do denominador comum, separação a denominadores simples, solução de sistemas de equações, extração de raízes de polinômios etc.

Cálculo Avançado: Envolvem diferenciação, integração, cálculo de limites, cálculo vetorial, representação em séries de Taylor, dentre outras. Estes recursos vêm sendo utilizados sistematicamente no tratamento de inúmeros problemas aplicados à ciência e tecnologia.

Além dessas operações, um grande número de funções matemáticas encontram-se implementadas nos SCS, o que aumenta consideravelmente o potencial do aplicativo. Muitos sistemas também permitem que se definam novas funções matemáticas a partir das operações e funções já disponíveis.

Alguns SCS focam em uma área específica de aplicação, enquanto outros foram desenvolvidos para propósitos gerais. Por exemplo, o MATLAB (MOLER, 2004) é mais adequado para análise numérica e álgebra linear, sendo freqüentemente usado na comunidade de engenharia. Por sua vez, o *Mathematica* (WOLFRAM, 2003) possui uma manipulação simbólica superior, tornando-se popular entre os físicos e matemáticos. A Tabela 1 abaixo apresenta a especialidade de alguns dos SCS atualmente disponíveis.

Tabela 1: Especialidade dos SCS atualmente disponíveis

Especialidade	SCS
Propósito Geral	Axiom, GiNaC, Maxima, Yacas, Derive DoCon, Magma, Maple, Mathematica, MuPAD, Reduce
Análise Numérica	MATLAB, GNU Octave, Mathcad, Scilab
Computação Polinomial e Geometria Algébrica	Macaulay, SINGULAR
Teoria dos Grafos	VEGA
Teoria dos Grupos e Álgebra	GAP
Teoria dos Números	PARI-GP
Calculadoras	TI-89, TI-92, HP 49G
Estatística	S, R

2.5 Pesquisas Relacionadas

Segundo Andrade e Zaparoli (2002), o ensino dos métodos de solução para problemas de difusão tem sido abordado em uma série de livros. Arpaci (1966) apresenta a seqüência de formulação de problemas de condução de calor e procedimentos de solução. Ozisik (1980) exhibe uma extensa exposição sobre as técnicas analíticas como o método de separação de variáveis, método da superposição, método da função de Green, método da transformada de Laplace, método da transformada integral, métodos analíticos aproximados e método de diferenças finitas. Mikhailov e Ozisik (1984) apresentam uma nova abordagem do método de transformada integral aplicada a uma série de classes de problemas de transferência de calor e massa. Myers (1971) apresenta de uma forma didática

métodos analíticos (separação de variáveis, superposição, transformada de Laplace) e numéricos (diferenças finitas e elementos finitos) aplicados a problemas de transferência de calor por condução. Patankar (1980) descreve a aplicação do método de volumes finitos em problemas de condução, convecção e difusão. Huang e Usmani (1994) apresentam, didaticamente, a seqüência dos elementos conceituais relacionados com a aplicação do método de elementos finitos em condução de calor, mudança de fase e convecção.

O advento dos sistemas de computação simbólica trouxe significativas mudanças para o ensino desses métodos, assunto que tradicionalmente coloca barreiras na sua aprendizagem. Originalmente, tais sistemas foram projetados para serem usados como ferramentas de pesquisa. Entretanto, não há dúvida de que os recursos de manipulação simbólica e visualização gráfica de tais sistemas podem ser extremamente úteis para fins educacionais, agindo como facilitadores da aprendizagem. Nos últimos anos, vários estudos e experiências vêm sendo realizados com o objetivo de explorar cada vez mais as potencialidades dos SCS como ferramentas educacionais (DOMNISORU, 2005).

Silveira (1998) verificou a possibilidade de se utilizar o *Mathematica* como ferramenta de apoio ao ensino de Matemática, tanto no ensino médio quanto no superior. As experiências realizadas com professores e alunos mostraram que a utilização desse *software* no ensino de Matemática é viável, mas que não se pode dispensar o trabalho do professor, o qual deve ser responsável pelo planejamento das atividades a serem desenvolvidas e, especialmente, pela criação de pacotes que adaptem o *software* às necessidades dos conteúdos abordados.

Lima e Lima (2002) mostram a importância do uso do *Mathematica* pelos docentes e pesquisadores das diversas áreas da Engenharia Mecânica, tendo em vista a melhoria do ensino e da pesquisa nos níveis de graduação e pós-graduação. Os autores também abordam a iniciativa do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande, o qual introduziu, no currículo dos cursos de graduação e mestrado em Engenharia Mecânica e de doutorado em Engenharia de Processos, disciplinas que apresentam e exploram os recursos de tal ferramenta. Segundo os autores, esta reforma curricular permitirá uma melhor formação profissional e acadêmica de seus alunos, elevando assim a qualidade dos cursos.

Com o objetivo de facilitar a assimilação do conhecimento e a construção do raciocínio abstrato físico-matemático, Blum (2003) desenvolveu, e validou em sala-de-aula, um ambiente informatizado de aprendizagem teórico-prático direcionado à área de conhecimento de ciências térmicas, sendo público alvo os alunos de ensino médio da disciplina **Refri-**

geração, do curso técnico do CEFET-CE. O ambiente, desenvolvido com os recursos de programação funcional do *Mathematica*, permite minimizar o alto grau de abstração física e o esforço exigido dos aprendizes na extensa manipulação de fórmulas matemáticas.

Sit (1997) descreve o uso experimental do *Mathematica* em um curso de equações diferenciais na *The City College*, uma das dezenove instituições de ensino superior que compõem a *City University of New York*. Segundo sua própria visão pedagógica, o autor propôs uma modificação no plano de estudos do curso e desenvolveu tutoriais eletrônicos no *Mathematica*, visando enfatizar as habilidades algébricas, a interpretação gráfica e o relacionamento entre a teoria e os algoritmos matemáticos. Apesar dos resultados preliminares terem sido animadores, o aparente sucesso pode estar relacionado a outros fatores, o que só poderá ser esclarecido através de mais experiências.

Baseado na sua experiência pessoal de implementar algumas mudanças no curso de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) da *Texas A&M University - Corpus Christi*, Abudiab (2001) sugere uma metodologia de ensino reforçada pelo uso da tecnologia num ambiente de laboratório em conjunção com a aprendizagem cooperativa. Um dos pilares desta metodologia é a utilização do *Mathematica* pelos alunos na realização de tarefas. Segundo o autor, os estudantes podem atribuir a maioria das manipulações algébricas, características daquele curso, ao SCS, bem como construir gráficos e visualizar animações. Com isso, o seu objetivo é ajudar aos alunos a entenderem e analisar as equações diferenciais na resolução e interpretação de problemas físico-matemáticos. Vale também ressaltar que os alunos trabalham com aplicações em situações reais, interpretando os resultados matemáticos em termos do problema físico.

Para auxiliar na construção do raciocínio abstrato físico-matemático, extremamente importante na aprendizagem de métodos da Matemática Computacional, Pinto (2002) propõe uma metodologia sistemática de tratamento unificado do conhecimento. Segundo esta metodologia, os estágios de conceituação fenomenológica, modelagem matemática das equações governantes, solução matemática, visualização dos resultados e interpretação fenomenológica podem ser disponibilizados simultaneamente e acessados interativamente em um mesmo ambiente, implementado com técnicas de programação simbólica do *Mathematica*.

Rocha et al. (2004) propõem a utilização de um ambiente computacional algébrico para o estudo da transferência de calor em um cilindro imerso em um fluido. Este ambiente, implementado com os recursos do *Maple*, possibilita o conhecimento dos passos necessários para se desenvolver, em diferentes geometrias, os modelos algébricos,

simbólicos e numéricos no caso da condução de calor em regime transiente. Partindo-se das equações gerais de condução de calor em regime transiente, soluções analíticas são obtidas passo-a-passo em diferentes sistemas de coordenadas, assim como os resultados numéricos, a partir do desenvolvimento das séries de Fourier geradas nas soluções desses problemas.

Finalmente, citam-se algumas disciplinas de pós-graduação ofertadas pelo Departamento de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). Em uma dessas disciplinas, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, por exemplo, apresentam-se os fundamentos de modernas técnicas numéricas para resolução de equações diferenciais parciais (elípticas, parabólicas e hiperbólicas) e de equações integrais, com uma ampla variedade de aplicações na ciência, na engenharia e em outros campos (OPENCOURSEWARE, 2003). Como trabalho prático, os algoritmos matemáticos são executados pelos alunos no MATLAB, o qual disponibiliza recursos de manipulação algébrica e visualização gráfica.

2.6 Considerações Finais

Fenômenos físicos, como os problemas de difusão, são modelados por equações diferenciais parciais do tipo parabólica. Estas podem ser resolvidas através de métodos analíticos, numéricos ou híbridos.

Esses métodos tradicionalmente colocam barreiras na sua aprendizagem, muitas vezes em virtude de um conhecimento insuficiente, por parte dos alunos, dos conceitos matemáticos associados aos mesmos.

Observou-se, através de pesquisas realizadas nesta última década, uma crescente utilização dos sistemas de computação simbólica como ferramenta de apoio ao processo de ensino-aprendizagem dos métodos de resolução de equações diferenciais. Ressalta-se, porém, que pouca ênfase tem sido dada ao estudo dos métodos numéricos para equações diferenciais parciais.

Apesar do grande interesse em utilizar tais sistemas como ferramenta educacional, nota-se a falta de uma fundamentação pedagógica e do suporte de uma teoria de aprendizagem.

No próximo capítulo, tratam-se da aprendizagem auxiliada por computador e de suas abordagens pedagógicas, bem como da classificação dos *softwares* educacionais.

3 *Aprendizagem Auxiliada por Computador*

Segundo o IEEE/LTSC (2001), a aprendizagem auxiliada por computador consiste no uso das tecnologias da computação para o desenvolvimento, distribuição e armazenamento de materiais de aprendizagem, bem como para a organização do processo educacional.

Neste capítulo, descreve-se a evolução histórica da aprendizagem auxiliada por computador, e apresentam-se as suas duas abordagens pedagógicas: o instrucionismo e o construcionismo. Além disso, discutem-se as diversas maneiras de se classificar os *softwares* utilizados no contexto educacional, e abordam-se as características associadas à qualidade desses *softwares*.

3.1 Histórico

As origens da aprendizagem auxiliada por computador datam de 1924, quando Sidney Pressey inventou uma máquina para corrigir testes de múltipla escolha. Tais equipamentos foram desenvolvidos porque, segundo Pressey, o comportamento do aluno é alterado consideravelmente quando o resultado de um teste lhe é fornecido imediatamente, podendo causar um importante efeito educativo (MAGALHAES; CARPINTEIRO, 2004; VALENTE, 1998a).

Posteriormente, a idéia de Pressey foi aperfeiçoada por B. F. Skinner, professor de Harvard que, no início de 1950, propôs uma máquina de ensinar baseada no conceito de **instrução programada** (SKINNER, 1972). Esta consiste em dividir o material a ser ensinado em pequenos segmentos logicamente encadeados, denominados módulos. Cada conceito é então apresentado em módulos seqüenciais, que terminam com uma questão onde o aluno deve responder preenchendo espaços em branco ou escolhendo a resposta certa entre diversas alternativas apresentadas. Se a resposta for correta, pode-se passar para o próximo módulo. Porém, se for errada, pode-se fornecer a resposta certa, rever

módulos anteriores ou, ainda, ver outros módulos, com o objetivo de remediar o processo de ensino (VALENTE, 1998a).

Inicialmente, a instrução programada formulada por Skinner era apresentada na forma impressa e foi muito usada do final de 1950 até o início dos anos 60. Entretanto, esta idéia não se tornou muito popular pelo fato da produção do material instrucional ser muito difícil e dos materiais então existentes não possuírem nenhuma padronização, dificultando a sua disseminação (VALENTE, 1998a). Com o advento do computador, notou-se que os módulos do material instrucional poderiam ser apresentados por essa nova máquina com grande flexibilidade. Assim, durante o início dos anos 60 diversos programas de instrução programada foram implementados no computador. Nascia então a instrução auxiliada por computador, também conhecida como CAI (*Computer Aided Instruction*) (VALENTE, 1998a).

Durante os anos 60, houve um grande investimento por parte do governo americano na produção de CAI. Diversas empresas de computadores como IBM, RCA e Digital investiram no desenvolvimento de CAI para comercialização. No entanto, os computadores ainda eram muito caros e somente as universidades tinham condições de desenvolver e disseminar este recurso educacional (VALENTE, 1998a). Assim, em 1963, a Universidade de Stanford, na Califórnia, desenvolveu diversos cursos para alunos do 1º grau através do *Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences* (SUPPES, 1972). Posteriormente, diversos cursos desta universidade foram ministrados através do computador (SUPPES; SMITH; BEAR, 1975).

No início de 1970, a fábrica de computadores Control Data Corporation e a Universidade de Illinois desenvolveram o PLATO (*Programmed Logic for Automated Teaching Operations*), sistema implementado em um computador de grande porte usando terminais sensitivos a toque e vídeo com alta capacidade gráfica. A sua última versão, o PLATO IV, dispunha de 950 terminais, localizados em 140 locais diferentes e com cerca de 8.000 horas de material instrucional, produzido por cerca de 3.000 autores (ALPERT, 1975).

A disseminação do CAI fora das universidades somente aconteceu no início dos anos 80, com o advento dos microcomputadores. A diminuição de tamanho e a melhoria da capacidade de processamento e armazenamento de dados tornaram os computadores mais eficazes. Com a redução dos custos destas máquinas, a aquisição ficou mais fácil, tornando-se mais acessíveis às escolas e residências, o que permitiu uma produção em maior escala de *softwares* educativos e a diversificação dos tipos de CAI.

Nos anos 90, a eficiência e o baixo custo dos modernos sistemas de telecomunicações,

aliados à crescente popularização dos microcomputadores, possibilitaram a rápida expansão da Internet, fazendo com que novos aplicativos fossem desenvolvidos e a educação passasse a se beneficiar com a disponibilização e utilização de informações na *Web* (CAMPOS; CAMPOS, 2001; FERRAZ et al., 1999). Este cenário propiciou o surgimento da terceira geração da educação a distância (EAD), cujas duas primeiras gerações baseavam-se, respectivamente, em correspondências e em transmissões por rádio e televisão (ARAUJO, 2000; SIQUEIRA, 2003).

Atualmente, esta nova geração da EAD é considerada uma solução aberta e flexível, capaz de superar novas necessidades de aprendizagem, bem como responder às preferências e aos diferentes estilos de aprendizagem de cada indivíduo (ARAUJO, 2000; HARRIS, 1999; STAFFORD, 2005). Essa possibilidade de customização do processo de aprendizado é uma característica de fundamental importância, pois os alunos podem estudar em casa e em horários nos quais se sintam melhor, com uma carga de trabalho diferente e adequada a cada indivíduo (AUSSERHOFER, 1999; SANTOS, 1999).

3.2 Abordagens Pedagógicas

Atualmente, a abordagem pedagógica da aprendizagem auxiliada por computador é bastante variada e oscila entre dois paradigmas, caracterizados pelos mesmos componentes: computador, *software* e aluno (VALENTE, 1998a). O que diferencia um paradigma do outro, entretanto, é a maneira como esses componentes interagem. De um lado, o computador instrui o aluno através do *software*. Do outro, é o aluno que usa o *software* para instruir o computador. A Figura 2 abaixo ilustra esses paradigmas.

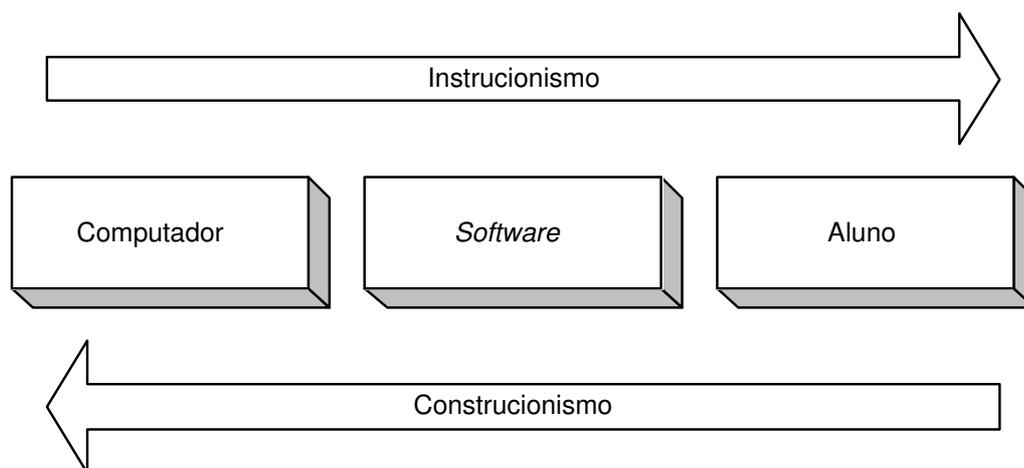


Figura 2: Abordagens pedagógicas da aprendizagem auxiliada por computador

A abordagem **instrucionista** está fundamentada na teoria behaviorista de Skinner (1972), que baseia-se no estudo de comportamentos observáveis e mensuráveis dos alunos. Segundo esta teoria, a mente é como uma "caixa preta" que responde a estímulos que podem ser observados e medidos, não interessando os processos mentais no seu interior (FIOLHAIS; TRINDADE, 2003). A abordagem instrucionista originou-se a partir dos métodos de instrução programada, porém utilizando o computador no lugar do papel e do livro. Portanto, esta abordagem consiste na informatização dos métodos tradicionais de ensino, onde o computador assume o papel de máquina de ensinar (SCHLEMMER, 2005; VALENTE, 1998b).

Segundo Campos e Campos (2001), as principais características dos *softwares* educacionais que representam a abordagem instrucionista são: definição de objetivos educacionais mensuráveis, definição da estratégia de ensino, avaliação objetiva, informação aos alunos sobre suas notas e reforço para as respostas corretas.

Na abordagem **construcionista**, assim denominada por Papert (1986), o aprendiz instrui o computador, ou seja, constrói seu próprio conhecimento, e o *software*, neste caso, é uma linguagem de programação ou um aplicativo que permite ao aprendiz representar suas idéias (VALENTE, 1998b). Nessa abordagem, pode-se ver o computador como uma ferramenta que permite ao aprendiz resolver problemas ou realizar tarefas (SCHLEMMER, 2005).

Segundo Papert (1986), existem dois motivos fortes para diferenciar o construcionismo do construtivismo de Piaget (1977). No construcionismo, o aluno constrói algo do seu interesse, e por isso torna-se bastante motivado, resultando numa aprendizagem com um envolvimento afetivo e mais significativa. No construtivismo, o conhecimento adquirido é uma construção que resulta desde a infância até a fase adulta, através de interações com os objetos que procura conhecer.

Para Valente (1998b), a principal diferença entre essas duas maneiras de construir o conhecimento é a presença do computador, ou seja, o aprendiz constrói algo através do computador. Neste caso, o computador é utilizado como ferramenta, ou uma máquina a ser "ensinada".

De acordo com Campos e Campos (2001), as características dos *softwares* educacionais voltados para essa abordagem são: definição de macro objetivos e de contextos para incentivar a construção do conhecimento e a participação do aluno no processo de aprendizagem; avaliação qualitativa; escolha de caminhos de navegação por parte do aluno e liberdade na busca da informação (não-linearidade); apresentação de problemas reais, in-

interessantes e relevantes para que os alunos possam testar diversas soluções; e colaboração, diálogo e negociação no trabalho em grupo.

Na abordagem construcionista os estudantes possuem mais responsabilidades sobre o gerenciamento de suas tarefas e o papel do professor passa a ser também o de orientador, facilitador e/ou mediador. Portanto, a ênfase está na autonomia do aluno, que interage com o *software* e se concentra no processo de construção do conhecimento, não apenas no domínio pré-definido do conhecimento a ser adquirido (CAMPOS; CAMPOS, 2001).

3.3 Classificação dos Softwares Educacionais

Com relação ao uso das novas tecnologias de informação e comunicação no processo de ensino-aprendizagem, observa-se na literatura que vários autores propõem diversas maneiras de classificar os *softwares* utilizados no contexto educacional.

Taylor (1980), por exemplo, os classifica em **Tutor**, *software* que instrui o aluno, **Tutorado**, *software* que permite ao aluno instruir o computador, e **Ferramenta**, *software* com o qual o aluno manipula a informação. Assim, o tutor equivale aos programas da abordagem instrucionista e os *softwares* do tipo tutorado e ferramenta equivalem aos programas da abordagem construcionista.

Knezek, Rachlin e Scannell (1988) preferem classificar os *softwares* educativos de acordo com a maneira como o conhecimento é manipulado: Geração de Conhecimento, Disseminação de Conhecimento e Gerenciamento da Informação.

Valente (1998a), por sua vez, apresenta uma classificação segundo duas modalidades. Na primeira, que pode ser caracterizada como uma versão computadorizada dos métodos tradicionais de ensino, onde o computador assume o papel de máquina de ensinar, as categorias mais comuns são:

- **Tutoriais:** Apresentam o material didático com outras características que não são possíveis em um livro comum, tais como: animação, som e recursos para facilitar a administração das lições. Constituem, portanto, uma versão informatizada da didática já empregada em sala de aula, sendo bastante utilizados devido ao fato de permitirem a introdução do computador no ensino sem provocar mudanças radicais.
- **Exercício-e-prática:** Apresentam exercícios elaborados através de instrução programada, exigindo a resposta do aluno e fornecendo *feedback* imediato. São utilizados tipicamente para a revisão de conteúdos vistos em sala de aula, principalmente

os que envolvem memorização e repetição, explorando as características gráficas e sonoras do computador.

- **Jogos:** Nesta categoria, os conteúdos pedagógicos são apresentados na forma de jogos, tornando-se uma maneira mais divertida de aprender, o que motiva e estimula o aluno. A pedagogia por trás desta abordagem, portanto, é a de exploração auto-dirigida ao invés da instrução explícita e direta.
- **Simulação:** Este tipo de *software* possibilita a criação de modelos dinâmicos e simplificados do mundo real, permitindo a exploração de situações fictícias ou arriscadas, e de experimentos complicados, caros ou que levam muito tempo para se processarem. A simulação oferece, portanto, a possibilidade do aluno desenvolver hipóteses, testá-las, analisar resultados e refinar os conceitos.

Na segunda modalidade, conforme Valente (1998a), o computador não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo. Nesta modalidade citam-se as seguintes categorias:

- **Aplicativos:** Consistem em *softwares* que manipulam informação, tais como programas de processamento de texto, planilhas, sistemas de banco de dados, construção e transformação de gráficos, sistemas de autoria e calculadores numéricos.
- **Resolução de problemas:** Esta categoria de *software* propicia um ambiente de aprendizado baseado na resolução de problemas, onde o aprendiz tem que expressar a solução através de uma linguagem de programação. A princípio, a linguagem para representação da solução do problema pode ser qualquer uma, porém deve-se notar que o objetivo não é ensinar programação de computadores, e sim representar a solução de um problema segundo uma linguagem computacional.
- **Controle de Processo:** Estes programas permitem ao aprendiz entender processos e controlá-los. Como exemplo, cita-se a construção de um veículo, na qual o aprendiz tem a oportunidade de manusear dispositivos que alteram a direção, engrenagens, eixos e opera com conceitos de velocidade, atrito e deslocamento.
- **Comunicação:** Estes softwares têm como função transmitir dados através de uma rede de computadores. Como exemplo citam-se os programas de correio eletrônico, mensagens instantâneas, bate-papo etc. Também incluem-se nesta categoria os *softwares* que complementam certas funções dos nossos cinco sentidos, facilitando o

acesso ou o fornecimento da informação. Isto é especialmente interessante quando o computador é usado por indivíduos portadores de deficiência física.

Ressalta-se que, no caso das categorias jogos e simulação da classificação de Valente (1998a), a pedagogia utilizada é a exploração autodirigida, em vez da instrução explícita e direta. Atualmente, devido aos avanços no processamento dos computadores e advento de novos paradigmas de programação, alguns *softwares* pertencentes a essas categorias permitem um maior grau de intervenção do aluno. Assim, o computador passa a ser usado mais como ferramenta do que como máquina de ensinar.

Por último, cita-se Miskulin (1999), que classifica os diversos tipos de *softwares* utilizados no contexto educacional nas seguintes categorias: Repetição e Prática, Sistemas Tutoriais, Simulação, *Softwares* de Resolução de Problemas, *Software* de Ferramenta (aplicativos), Linguagem de Programação e Sistemas Integrados de Ensino.

Observa-se, portanto, que não há uma classificação padronizada para os *softwares* educacionais, e as diversas classificações existentes são muitas vezes ortogonais.

3.4 Características da Qualidade do Software Educacional

Um aspecto extremamente relevante no desenvolvimento de um *software* educacional é a questão da qualidade. Segundo Campos e Campos (2001), a qualidade de um *software* consiste num conjunto de características capazes de satisfazer as necessidades implícitas dos usuários. Os autores citam algumas características que devem ser consideradas no desenvolvimento de um *software* educacional:

Características Pedagógicas: Referem-se à conveniência e à viabilidade de utilização do *software* em situações educacionais, isto é, o *software* deve permitir a identificação do ambiente educacional e do modelo de aprendizagem que ele privilegia, ser adequado e pertinente a um dado contexto educacional ou disciplina específica e possuir aspectos didáticos, tais como conteúdos claros, corretos e recursos motivacionais.

Facilidade de Uso: O *software* deve ser fácil de se aprender a usar e as informações importantes para o seu uso devem ser fáceis de se memorizar. Além disso, ele deve manter o processamento corretamente a despeito de ações inesperadas (robustez).

Interface Amigável: O *software* deve possuir meios e recursos que facilitem a sua interação com o usuário. A concepção da interface deve ser conservada idêntica em contextos idênticos e diferente em contextos distintos, devendo haver adequação entre as informações apresentadas ou solicitadas. Além disso, também é importante a existência de mecanismos que permitam evitar ou reduzir a ocorrência de erros, e que favoreçam a sua correção quando eles ocorrerem.

Adaptabilidade: O *software* deve ser capaz de se adaptar às necessidades e preferências do usuário e ao ambiente educacional selecionado. Assim, a sua interface deverá ser facilmente personalizada para o uso por diferentes usuários e o *software* deve ser adequado ao modelo e aos objetivos educacionais pretendidos.

Documentação: A documentação para instalação e uso do *software* deve estar completa, consistente, legível e organizada. Deve haver também uma ajuda *on-line* disponível.

Portabilidade: O *software* deve ser capaz de adequar-se aos equipamentos do laboratório de informática, isto é, as tecnologias utilizadas pelo *software* devem ser compatíveis com as facilidades disponíveis no mercado e na instituição de ensino.

3.5 Considerações Finais

Ao se desenvolver um *software* para a aprendizagem auxiliada por computador, o primeiro item a ser analisado deve ser o seu critério didático-pedagógico. De um modo geral, duas abordagens pedagógicas podem ser verificadas: a instrucionista e a construcionista.

A abordagem instrucionista refere-se à instrução programada, a qual apresenta a informação em seções breves, testam o aluno a cada seção e fornecem um *feedback* imediato para as respostas dadas. Neste caso, o computador é visto como uma máquina de ensinar. Por sua vez, a abordagem construcionista refere-se a *softwares* com os quais o aprendiz pode interagir e construir o seu conhecimento. Neste caso, o computador é visto como uma ferramenta de desenvolvimento cognitivo.

Dentro desse contexto, o ambiente computacional de aprendizagem proposto terá uma abordagem **construcionista**, pois proporcionará ao aluno liberdade na busca da informação e autonomia na escolha dos caminhos de navegação. Além disso, o ambiente apresentará um problema real, possibilitando que o aluno teste diversas soluções.

Embora não haja uma classificação padronizada para os *softwares* educacionais, o

ambiente desenvolvido será do tipo **resolução de problemas**, segundo a classificação de Valente (1998a), uma vez que o aprendiz deverá encontrar a solução de um problema apresentado através de uma linguagem de programação.

Vale também ressaltar que o desenvolvimento de um produto voltado para a aprendizagem auxiliada por computador é baseado no ponto de vista de como se dá a aquisição do conhecimento. Assim, as teorias de aprendizagem passam a ter uma grande influência no desenvolvimento de um *software* educacional. No próximo capítulo aborda-se a teoria da aprendizagem significativa, de David P. Ausubel, cujos conceitos foram incorporados ao ambiente computacional de aprendizagem desenvolvido.

4 *Teoria da Aprendizagem de Ausubel*

Uma teoria de aprendizagem é uma tentativa de se interpretar sistematicamente a área do conhecimento relacionada à aprendizagem. Representa o ponto de vista de um autor sobre como interpretar esse tema, tentando explicar o que é e como funciona a aprendizagem. Essas teorias, portanto, refletem visões profundamente diferentes sobre como ela ocorre, tendo grande impacto no desenvolvimento dos *softwares* educacionais.

Neste capítulo, aborda-se a teoria da aprendizagem significativa, de David P. Ausubel, destacando-se seus tipos e as condições para que ela ocorra. Descrevem-se também os processos de aquisição e organização de conceitos, e apresentam-se os mapas conceituais, representações gráficas da estrutura hierárquica desses conceitos.

4.1 *Visão Geral*

Segundo Moreira (1999), a aprendizagem ocorre em três níveis: o cognitivo, o afetivo e o psicomotor. A aprendizagem cognitiva é aquela que consiste no armazenamento organizado de informações na mente do aprendiz, também chamada de estrutura cognitiva. A aprendizagem afetiva se dá a partir de sinais internos que se traduzem como experiências de dor, prazer, satisfação e contentamento. Essa aprendizagem sempre está vinculada à aprendizagem cognitiva, havendo uma relação mútua entre as duas. Já a psicomotora está ligada a respostas musculares adquiridas através de treinos e da prática diária.

Embora reconheça a importância da experiência afetiva, Ausubel (1968) propõe uma teoria que explica o processo de aprendizagem segundo o ponto de vista cognitivo. Para Ausubel a aprendizagem significa organização e integração de informações na estrutura cognitiva do aprendiz e é entendida como o conjunto total de idéias de uma pessoa e sua correspondente organização. Assim, a sua teoria prioriza principalmente a aprendizagem cognitiva.

O fator mais importante para que ocorra aprendizagem, segundo Ausubel, é aquilo que o aprendiz já sabe. Novas idéias e conceitos podem ser aprendidos e retidos à medida que se relacionam com conceitos claros e organizados aprendidos anteriormente, que servem de âncora para a nova informação. Essa experiência cognitiva não se limita apenas à influência dos conceitos âncora na nova aprendizagem, mas envolve também a modificação de elementos importantes na estrutura cognitiva como um todo.

4.2 Aprendizagem Significativa

Segundo Ausubel (1968), a **aprendizagem significativa** é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um conceito relevante já existente na estrutura cognitiva do aprendiz, o qual Ausubel define como **subsunçor**. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados e assimilados a conceitos mais abrangentes. A aprendizagem significativa, portanto, ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Esta hierarquia é ilustrada pela Figura 3 abaixo.

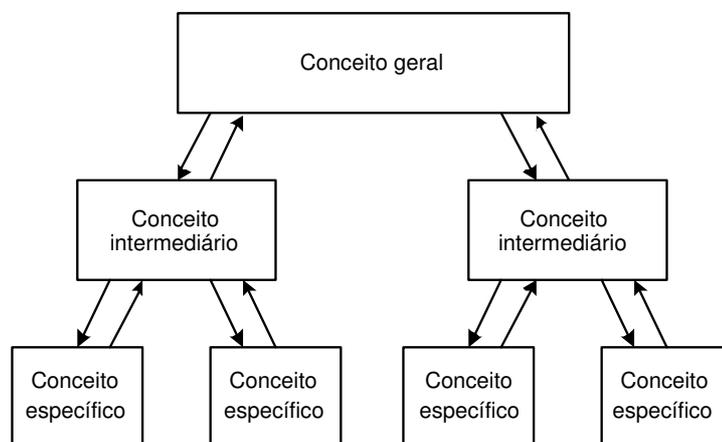


Figura 3: Organização de conceitos na estrutura cognitiva, segundo Ausubel

Este processo de "ancoragem" da nova informação resulta em crescimento e modificação do conceito subsunçor. Isso significa que os subsunçores existentes na estrutura cognitiva podem ser abrangentes e bem-desenvolvidos, ou limitados e pouco desenvolvidos, dependendo da freqüência com que ocorre aprendizagem significativa em conjunção com um determinado subsunçor (MOREIRA, 1999).

Ausubel define também a **aprendizagem mecânica**, que consiste na aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes existentes

na estrutura cognitiva. Neste caso, a nova informação é armazenada de maneira arbitrária, não havendo interação entre a nova informação e aquela já armazenada. O conhecimento assim adquirido fica arbitrariamente distribuído na estrutura cognitiva, sem ligar-se a conceitos subsunçores específicos.

A aprendizagem mecânica é sempre necessária quando o indivíduo adquire informações em uma área de conhecimento completamente nova para ele, isto é, ela ocorre até que alguns elementos de conhecimento, relevantes a novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados. À medida que a aprendizagem começa a ser significativa, esses subsunçores vão ficando cada vez mais elaborados e mais capazes de ancorar novas informações.

Para o desenvolvimento de conceitos subsunçores, Ausubel recomenda o uso de materiais introdutórios que devem ser apresentados antes do assunto a ser aprendido, denominados **organizadores prévios**. Segundo o próprio Ausubel, a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o novo assunto possa ser aprendido de forma significativa. O uso desses organizadores, portanto, constitui uma estratégia para manipular a estrutura cognitiva e, assim, facilitar a aprendizagem significativa. Ao contrário dos sumários, os quais simplesmente destacam certos aspectos de um assunto, os organizadores prévios são apresentados em um nível mais alto de abstração (MOREIRA, 1999).

4.3 Tipos de Aprendizagem Significativa

De acordo com Ausubel, existem três tipos de aprendizagem significativa. O processo descrito anteriormente, segundo o qual a nova informação adquire significado por meio da interação com subsunçores, reflete uma relação de subordinação do novo material em relação à estrutura cognitiva pré-existente. A esse tipo de aprendizagem dá-se o nome de **subordinada**.

Por outro lado, a aprendizagem **superordenada** é a que se dá quando um conceito ou proposição potencialmente significativo **A**, mais geral e inclusivo do que idéias ou conceitos **a₁**, **a₂**, **a₃** já estabelecidos na estrutura cognitiva, é adquirido a partir destes e passa a assimilá-los. As idéias **a₁**, **a₂**, **a₃** são identificadas como instâncias mais específicas de uma nova idéia superordenada **A**, definida por um novo conjunto de atributos essenciais que abrange os das idéias subordinadas.

A aprendizagem **combinatória**, por sua vez, é a aprendizagem que não tem uma

relação de subordinação ou superordenação com proposições ou conceitos específicos, e sim, com conteúdo amplo, relevante de uma maneira geral existente na estrutura cognitiva, isto é, a nova proposição não pode ser assimilada por outras já estabelecidas na estrutura cognitiva, nem é capaz de assimilá-las. É como se a nova informação fosse potencialmente significativa por ser relacionável à estrutura cognitiva como um todo e não com aspectos específicos dessa estrutura, como ocorre na aprendizagem subordinada e mesmo na superordenada.

4.4 Condições para Aprendizagem Significativa

Segundo Ausubel, para que a aprendizagem significativa ocorra são necessárias duas condições (MOREIRA, 1999):

- O material a ser aprendido deve ser **potencialmente significativo**, ou seja, relacionável à estrutura cognitiva do aprendiz;
- O aprendiz deve manifestar uma disposição para relacionar de maneira substantiva e não-arbitrária o novo material, potencialmente significativo, à estrutura cognitiva.

A primeira condição implica não só que o material seja suficientemente não-arbitrário em si, de modo que possa ser aprendido, mas também que o aprendiz tenha disponível em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados.

A outra condição implica que, independentemente de quão potencialmente significativo seja o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for simplesmente a de memorizá-lo, tanto o processo de aprendizagem como seu produto serão mecânicos. De maneira recíproca, nem o processo nem o produto da aprendizagem serão significativos se o material não for potencialmente significativo, independentemente de quão disposto para aprender estiver o indivíduo.

4.5 Aquisição e Organização de Conceitos

Para tornar mais claros e precisos os processos de aquisição e organização de conceitos na estrutura cognitiva, Ausubel sugere que os conceitos são adquiridos, ainda na infância, por meio de um processo conhecido como **formação de conceitos**, que consiste em generalizações de instâncias específicas. A partir daí, os novos conceitos são adquiridos

através de **assimilação**, **diferenciação progressiva** e **reconciliação integrativa** de conceitos (MOREIRA, 1999).

A **assimilação** é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição **a**, potencialmente significativo, é assimilado sob uma idéia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva. Conforme ilustrado na Figura 4, não só a nova informação **a**, mas também o conceito subsunçor **A**, com o qual ela se relaciona, são modificados pela interação. Além disso, **a'** e **A'** permanecem relacionados como componentes de uma nova unidade **A'a'**, que corresponde ao subsunçor modificado.

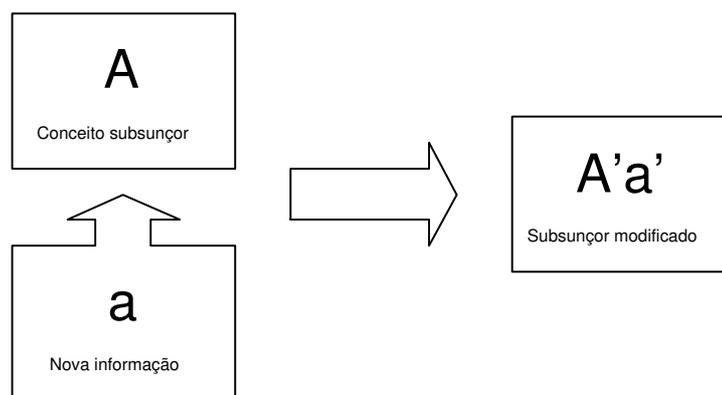


Figura 4: O processo de assimilação, segundo Ausubel

Vale ressaltar que descrever o processo de assimilação em termos de uma única interação **A'a'** é apenas uma simplificação, pois uma nova informação pode interagir também com outros subsunçores.

Quando um novo conceito é aprendido através de um processo de ancoragem e interação com um subsunçor, este também se modifica. A ocorrência desse processo uma ou mais vezes resulta na **diferenciação progressiva** do conceito subsunçor (MOREIRA, 1999).

Por outro lado, idéias estabelecidas na estrutura cognitiva ao longo de novas aprendizagens podem ser reconhecidas como relacionadas. Assim, novas informações são adquiridas e elementos existentes na estrutura cognitiva podem reorganizar-se e adquirir novos significados. Esta recombinação de elementos previamente existentes na estrutura cognitiva é referida por Ausubel como **reconciliação integrativa**.

Sob o ponto de vista instrucional, a diferenciação progressiva é um princípio programático da matéria de ensino, segundo o qual os conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo devem ser apresentados no início da instrução e diferenciados progressivamente em termos de detalhe e especificidade (MOREIRA, 1999). Já a reconciliação integrativa é o

princípio segundo o qual a instrução deve também explorar as relações entre idéias, apontar similaridades e diferenças importantes, e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes.

Segundo Ausubel, esses dois princípios programáticos podem ser implementados na prática através do uso de organizadores prévios adequados ou com a utilização de mapas conceituais (MOREIRA, 1999).

4.6 Mapas Conceituais

Segundo Moreira e Buchweitz (1993), mapas conceituais são representações gráficas semelhantes a diagramas de blocos dentro dos quais estão os conceitos de uma determinada área do conhecimento, estando as relações entre esses conceitos ligadas por palavras. Representam assim uma estrutura hierárquica que vai desde os conceitos mais gerais até os mais específicos.

A função do mapa conceitual consiste em organizar logicamente um determinado tema, destacando as relações significativas entre os conceitos. O mapa conceitual representa, portanto, as relações entre conceitos, isto é, como um determinado conceito se relaciona de maneira lógica e coerente com um outro.

Os mapas conceituais podem ser elaborados a partir de conceitos soltos, de parágrafos de um capítulo de um livro-texto ou de uma determinada área do conhecimento. Os conceitos mais gerais devem vir no alto da representação e os mais específicos ligados a estes e aos demais por linhas e palavras, formando proposições mediante frases simplificadas.

Um mapa conceitual simples é formado por dois nós conectados por uma linha, representando uma frase simples. Mapas conceituais mais elaborados consistem de vários conceitos hierarquicamente distribuídos, conectados por linhas que mostram as relações entre eles e interligados através de palavras ou frases simples. Na Figura 5 a seguir apresenta-se um exemplo de mapa conceitual mais elaborado, onde palavras ou frases de ligação são necessárias para relacionar os diversos conceitos adequadamente.

4.7 Considerações Finais

A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel tenta explicar o processo de aprendizagem segundo o ponto de vista cognitivo. Segundo o autor, a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um conceito

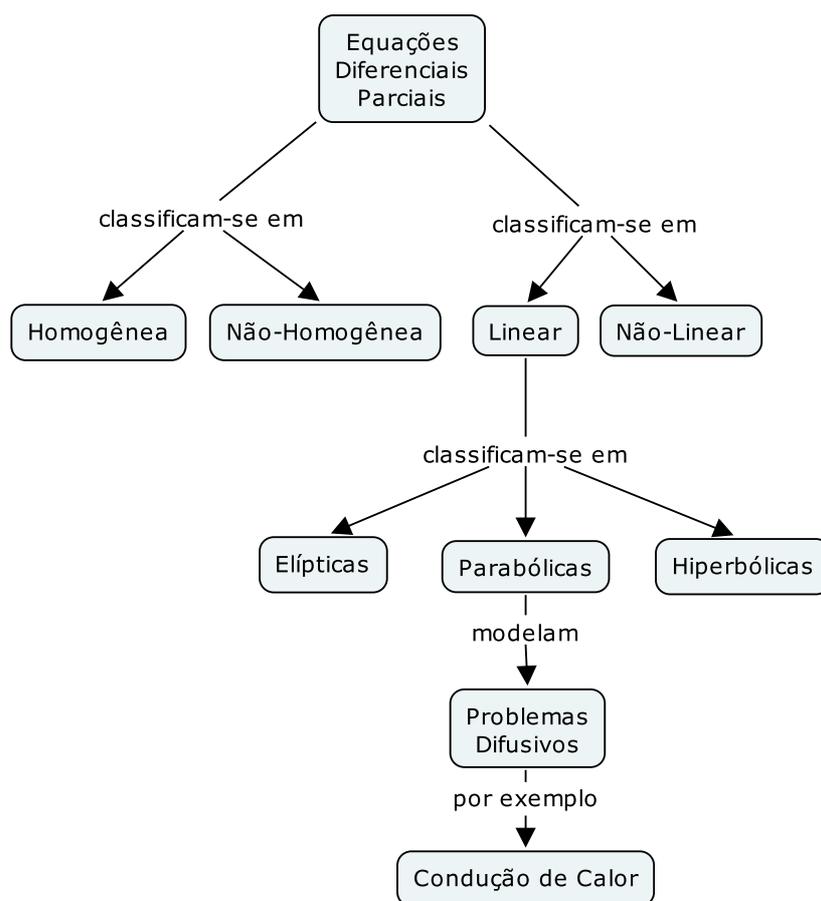


Figura 5: Exemplo de um mapa conceitual mais elaborado

relevante já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Esta teoria vem sendo bastante utilizada como um poderoso recurso pedagógico, inclusive no ensino de engenharia (CARVALHO; TORRES, 2004).

A utilização dessa teoria no desenvolvimento do ambiente computacional de aprendizagem proposto se dará de duas formas: através da apresentação de mapas conceituais sobre o assunto abordado e da diferenciação progressiva do texto didático.

Para a estruturação do conteúdo didático do ambiente, identifica-se primeiramente a estrutura conceitual da matéria de ensino, isto é, os conceitos mais abrangentes são identificados e organizados hierarquicamente, de modo que, progressivamente, abranjam os menos inclusivos até chegar aos exemplos e dados específicos. Como resultado, obtém-se os mapas conceituais do conteúdo didático.

A partir daí, procede-se com a identificação dos subsunçores que são relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado. Ressalta-se que, para aprender significativa-

mente este conteúdo, o aluno deverá ter aqueles subsunçores em sua estrutura cognitiva.

Por último, os mapas conceituais e os subsunçores devem ser disponibilizados para o aluno no ambiente computacional, visando facilitar a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de uma maneira significativa.

A função do ambiente, portanto, será auxiliar o aluno na assimilação da matéria de ensino e organização da sua própria estrutura cognitiva nessa área de conhecimentos, por meio da aquisição de significados claros e relacionáveis.

No próximo capítulo aborda-se o problema da condução de calor como um exemplo de problema de difusão, e apresentam-se os métodos de separação de variáveis e de diferenças finitas, este último segundo as variantes de Euler e Crank-Nicolson. Constroem-se também os mapas conceituais para cada método, os quais são disponibilizados no ambiente desenvolvido.

5 *Resolução de Equações Parabólicas*

Descreve-se neste capítulo o problema da condução de calor transiente, o qual modela-se matematicamente por uma EDP parabólica, e que será tratado pelo ambiente computacional de aprendizagem. Em seguida, visando-se a resolução desse problema, abordam-se o método analítico de separação de variáveis, e os métodos numéricos de diferenças finitas nas variantes de *Ëuler* e *Crank-Nicolson*.

Finalmente, procede-se com a construção de mapas conceituais para os três métodos apresentados. Estes mapas serão incorporados ao ambiente computacional como um recurso pedagógico para auxiliar a aprendizagem dos métodos.

5.1 O Problema da Condução de Calor

Considere-se o problema de condução de calor transiente numa barra retilínea, de seção transversal uniforme e de material homogêneo. Denomina-se por x o eixo longitudinal de simetria da barra, sendo $x = 0$ e $x = L$ suas extremidades, conforme ilustrado na Figura 6 a seguir. Suponha-se que as superfícies laterais da barra estejam perfeitamente isoladas termicamente, de modo que não haja passagem de calor através delas. Considere-se também que as dimensões da seção transversal sejam tão pequenas que a temperatura pode ser considerada uniforme em qualquer ponto desta seção.

Uma vez que a condução de calor trata-se um problema de difusão, a variação de temperatura ao longo da barra é modelada pela seguinte equação diferencial parcial, conhecida como **equação da condução de calor**:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (5.1)$$

onde a constante α é denominada **difusividade térmica** e depende somente do material

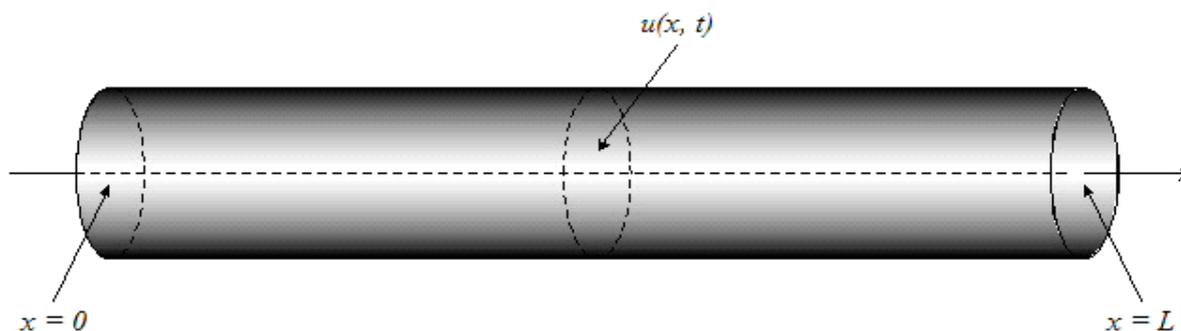


Figura 6: Barra sólida condutora de calor.

de que é constituída a barra. Esta constante, que aqui representa o coeficiente de difusão da Equação 2.2, é definida por $\alpha = \kappa/\rho s$, onde κ é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s o calor específico do material. As unidades de α são comprimento²/tempo.

Considere-se também que as extremidades da barra sejam mantidas a temperaturas fixas, ou seja, em $x = 0$ a temperatura é T_1 e em $x = L$ a temperatura é T_2 . Entretanto, basta se considerar o caso em que $T_1 = T_2 = 0$, uma vez que pode-se reduzir o problema mais geral a este caso especial (MYERS, 1971; BOYCE; DIPRIMA, 1992). Assim, como resultado dessa restrição, u será nula quando $x = 0$ ou $x = L$:

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.2)$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.3)$$

Finalmente, considere-se que a distribuição inicial de temperatura da barra seja dada através de uma função f conhecida. Assim, tem-se:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.4)$$

O problema da condução de calor, portanto, consiste em encontrar a temperatura da barra, aqui genericamente denominada u , em função das coordenadas espacial x e temporal t (BOYCE; DIPRIMA, 1992). A Equação 5.4 representa a condição inicial do problema, enquanto que as Equações 5.2 e 5.3 representam as condições de contorno.

Para resolver este problema, podem-se utilizar métodos de natureza analítica ou numérica. Nas seções a seguir, apresentam-se o método analítico de separação de variáveis

e os métodos numéricos de diferenças finitas de Euler e de Crank-Nicolson. Apresentam-se também mapas conceituais para esses três métodos, ressaltando os conceitos que precisam ser assimilados para que se tenha uma aprendizagem significativa.

5.2 Separação de Variáveis

O método de separação de variáveis é uma poderosa técnica de resolução analítica de equações diferenciais parciais. Este método pode ser utilizado em problemas das mais diversas áreas, tais como propagação de onda e condução de calor, porém a sua aplicação é restrita às equações lineares homogêneas (MYERS, 1971; FARLOW, 1982; BOYCE; DIPRIMA, 1992; EVANS; BLACKLEDGE; YARDLEY, 2000).

De um modo mais abrangente, o método de separação de variáveis utiliza a linearidade e a homogeneidade do problema para gerar várias soluções especiais $u_n(x, t)$, que satisfazem a equação diferencial e suas condições de contorno. Em seguida, estas soluções são multiplicadas por constantes c_n apropriadas e então somadas, obtendo-se uma solução que também satisfaz a condição inicial (MYERS, 1971). Assim, a solução será expressa como:

$$u(x, t) = \sum_n c_n u_n(x, t)$$

O primeiro passo do método consiste em encontrar algumas soluções especiais da Equação 5.1 na forma de um produto de uma função de x por uma função de t . Portanto, assume-se que:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (5.5)$$

Substituindo a equação acima na Equação 5.1, obtém-se:

$$\alpha X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad (5.6)$$

Separando as variáveis, tem-se:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (5.7)$$

A única maneira de uma função de x ser sempre igual a uma função de t , para quaisquer x e t , é se ambas forem iguais a uma mesma constante. No caso em questão, a escolha de uma constante negativa resultaria numa solução que decai a zero à medida em que o tempo aumenta, enquanto que uma constante positiva (ou zero) resultaria numa solução que se torna infinita (MYERS, 1971). Uma vez que a última opção não se encaixa no entendimento físico de que a solução eventualmente deve se aproximar das condições de contorno, deve-se então descartá-la. Assim, fazendo cada lado da Equação 5.7 igual a uma constante $-\lambda^2$, onde λ^2 é um número positivo arbitrário, tem-se:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \Rightarrow X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (5.8)$$

A Equação 5.8 trata-se de um caso particular do problema clássico de Sturm-Liouville, assunto de conhecimento prévio dos alunos de cálculo numérico.

Do termo à direita da igualdade da Equação 5.7, e aplicando as considerações postuladas anteriormente, resulta:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2 \Rightarrow T'(t) + \lambda^2 \alpha T(t) = 0 \quad (5.9)$$

O problema foi agora reduzido à solução de duas equações diferenciais ordinárias em vez de uma equação diferencial parcial. Sem perda de generalidade, as soluções para X e T são muito claras e dadas por:

$$X_\lambda = c_{1\lambda} \operatorname{sen} \lambda x + c_{2\lambda} \operatorname{cos} \lambda x \quad (5.10)$$

$$T_\lambda = c_{3\lambda} e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad (5.11)$$

onde o símbolo subscrito λ em c_1 , c_2 e c_3 indica que estas constantes podem ser diferentes para valores distintos de λ . Uma vez que assumiu-se um produto das soluções, tem-se:

$$u_\lambda(x, t) = X_\lambda T_\lambda = (A_\lambda \operatorname{sen} \lambda x + B_\lambda \operatorname{cos} \lambda x) e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad (5.12)$$

onde u_λ denota que a solução contém um parâmetro λ . Esta solução especial satisfaz a Equação 5.1 para qualquer valor de λ . Espera-se agora que λ , A_λ e B_λ possam ser escolhidos de tal maneira que u_λ também satisfaça as condições de contorno.

Para satisfazer a condição de contorno em $x = 0$,

$$u_\lambda(0, t) = 0 = B_\lambda e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad (5.13)$$

e, portanto, B_λ deve ser zero. Para satisfazer a condição de contorno em $x = L$,

$$u_\lambda(L, t) = 0 = A_\lambda \operatorname{sen} \lambda L e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad (5.14)$$

Observa-se que A_λ não pode ser zero, já que isto resultaria em $u_\lambda(x, t) = 0$ para quaisquer valores de x e t . Portanto $\operatorname{sen} \lambda L$ deve ser zero, de tal modo que esta condição vale para todo t . Conseqüentemente, faz-se necessária a escolha de $\lambda_n = n\pi/L$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Assim, se $B_\lambda = 0$ e $\lambda_n = n\pi/L$, as soluções especiais $u_\lambda(x, t)$ para a Equação 5.1 também satisfarão as condições de contorno. Portanto,

$$u_\lambda(x, t) = A_\lambda \operatorname{sen} \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 \alpha t}$$

ou

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \alpha t / L^2}$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$, satisfaz a equação diferencial parcial e as condições de contorno¹.

Em seguida, espera-se que a condição inicial possa ser satisfeita somando-se todas essas soluções especiais com valores devidamente escolhidos de A_λ . Assim, A_λ será escolhido de tal modo que:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \quad (5.15)$$

a qual satisfaz a equação diferencial parcial e as condições de contorno, também se ajustará à condição inicial dada pela Equação 5.4. Em $t = 0$ a Equação 5.15 torna-se:

¹Os valores especiais de $\lambda_n = n\pi/L$ são chamados de **autovalores** e o termo $\operatorname{sen} \lambda x$ é chamado de **autofunção**.

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

A constante A_n deve ser determinada de tal forma que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (5.16)$$

A Equação 5.16 pode ser reescrita como:

$$f(x) = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + A_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + \dots + A_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} + \dots$$

Multiplicando ambos os lados por $\operatorname{sen} m\pi x/L$, onde m é um inteiro qualquer, e integrando de 0 a L , a equação acima torna-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= A_1 \int_0^L \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ A_2 \int_0^L \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx + \dots \\ &+ A_m \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{L} dx + \dots \end{aligned}$$

Uma vez que as funções $\operatorname{sen} n\pi x/L$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$, são ortogonais², cada integral da equação acima é igual a zero, exceto aquela associada ao coeficiente A_m . Assim,

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = A_m \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{L} dx = A_m \frac{1}{2} L$$

O que resulta em:

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx$$

Portanto, a solução do problema descrito na Seção 5.1 é:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \quad (5.17)$$

²Duas funções v_1 e v_2 são ortogonais no intervalo (a, b) quando $\int_a^b v_1 v_2 dx = 0$.

onde os coeficientes A_n são dados pela expressão:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (5.18)$$

Esta solução é apresentada na Figura 7 abaixo. Ela satisfaz a EDP, as condições de contorno e a condição inicial. É simétrica e decai a zero à medida em que t se torna infinito, conforme esperado, já que os extremos da barra estão sendo mantidos a 0°C .

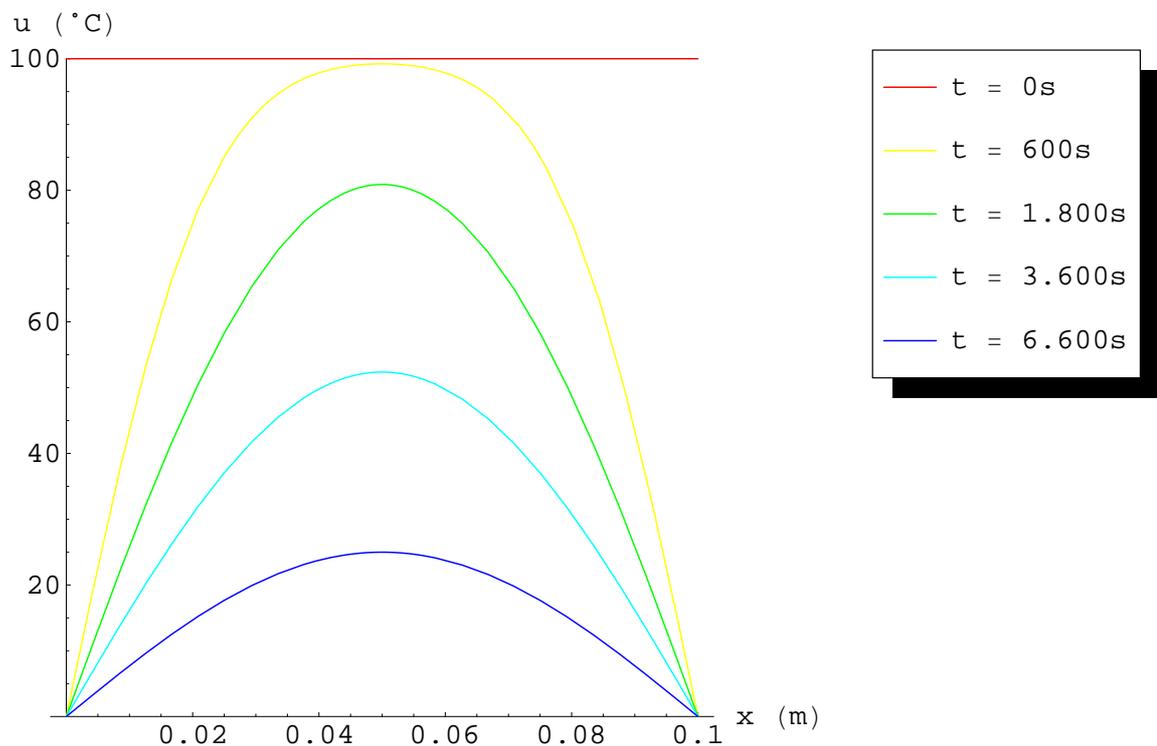


Figura 7: Solução do problema da condução de calor pelo método de separação de variáveis

5.3 Diferenças Finitas

O amplo uso dos computadores tornou os métodos de diferenças finitas extremamente valiosos para a resolução de problemas não sujeitos aos métodos analíticos. Conforme mencionado, os métodos analíticos são comumente restritos a geometrias e condições de contorno muito simples. Assim, para problemas mais complexos, os métodos de diferenças finitas são mais prováveis de serem utilizados (MYERS, 1971).

Os métodos de diferenças finitas também são muito úteis em problemas que envolvem

a falta de linearidade, tais como a radiação. Neste casos, os métodos analíticos raramente funcionam. Problemas com propriedades variáveis muitas vezes devem ser tratados numericamente (MYERS, 1971).

Entretanto, deve-se mencionar que, embora a maioria dos problemas práticos possam exigir métodos de diferenças finitas para se obter resultados minuciosos, os métodos analíticos ainda são importantes. Ao se configurar um problema complexo usando diferenças finitas, os casos limitantes são muitas vezes considerados como um obstáculo para os cálculos. Estes casos freqüentemente têm soluções analíticas que podem ser usadas para comparação com os resultados obtidos por diferenças finitas. Muitas vezes as soluções analíticas podem ser utilizadas juntamente com o computador para produzir melhores soluções (MYERS, 1971).

A solução de uma equação diferencial parcial pelo método de diferenças finitas é feita em dois passos. Primeiro, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias para aproximar o comportamento da EDP. Isto pode ser feito através de uma formulação matemática. Em seguida, obtém-se uma solução numérica para este sistema.

Esses dois passos são abordados nas próximas seções, após a exposição de alguns conceitos básicos necessários para a aplicação do método de diferenças finitas.

5.3.1 Conceitos Básicos

A idéia básica por trás dos métodos de diferenças finitas é transformar a equação diferencial em uma equação algébrica, substituindo-se as derivadas da equação original por aproximações em termos de diferenças finitas (MYERS, 1971).

Suponha-se que uma dada função $f(x)$ seja contínua e que tenha derivadas de todas as ordens em um determinado intervalo fechado. Expandindo-se $f(x)$ em série de Taylor³ em torno de x_i , o valor de $f(x)$ em x_{i+1} (isto é, f_{i+1}) é dado por:

$$f_{i+1} = f_i + \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + O[(\Delta x)^2]$$

o símbolo $O[(\Delta x)^2]$ significa que a ordem de grandeza dos termos restantes é $(\Delta x)^2$.

³A expansão em série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de um ponto a é definida como

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Resolvendo-se para a derivada, resulta:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (5.19)$$

À medida que Δx torna-se pequeno, os termos restantes, cuja ordem de grandeza é $(\Delta x)^2$, podem ser considerados desprezíveis.

A segunda derivada de $f(x)$ pode ser encontrada considerando-se a expansão em série de Taylor em torno do ponto x_i . Os valores de f_{i+1} e f_{i-1} podem ser escritos como:

$$f_{i+1} = f_i + \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i (\Delta x)^3 + O[(\Delta x)^4]$$

$$f_{i-1} = f_i - \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i (\Delta x)^3 + O[(\Delta x)^4]$$

Somando-se estas duas equações, obtém-se:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2f_i + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]$$

Resolvendo-se para a segunda derivada, resulta:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (5.20)$$

5.3.2 Formulação Matemática

Primeiramente, a formulação matemática do método de diferenças finitas começa com a equação diferencial parcial mais as suas condições de contorno e inicial. Para o problema da condução de calor descrito na Seção 5.1, considera-se as Equações 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. Em seguida, uma malha de nós pode ser configurada, subdividindo-se a direção x da barra em nós igualmente espaçados, a uma distância Δx .

Seguindo a discussão na Seção 5.3.1, a segunda derivada na equação diferencial pode ser substituída por sua aproximação de diferença finita, resultando:

$$\frac{du_i}{dt} = \alpha \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (5.21)$$

Considerando-se M divisões na direção x da barra, haverá então $M - 1$ equações diferenciais ordinárias simultâneas para se resolver:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \alpha \frac{(-2u_1 + u_2)}{(\Delta x)^2} \\ \frac{du_2}{dx} &= \alpha \frac{(u_1 - 2u_2 + u_3)}{(\Delta x)^2} \\ \frac{du_3}{dx} &= \alpha \frac{(u_2 - 2u_3 + u_4)}{(\Delta x)^2} \\ &\vdots \\ \frac{du_{M-1}}{dx} &= \alpha \frac{(u_{M-2} - 2u_{M-1})}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Na primeira e na última equações, admitiu-se que $u_0 = u_M = 0$, por causa das condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$.

Este sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser classificado como um problema de valor inicial, pois estas equações são resolvidas para incógnitas que representam uma função do tempo que começa com um determinado valor inicial (MYERS, 1971). No caso do problema da condução de calor, os valores iniciais são obtidos a partir da distribuição inicial de temperatura da barra. Assim, as condições iniciais que acompanham as Equações 5.22 são:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= f_1 \\ u_2(0) &= f_2 \\ u_3(0) &= f_3 \\ &\vdots \\ u_{M-1}(0) &= f_{M-1} \end{aligned}$$

Nas próximas seções, discutem-se dois métodos de diferenças finitas para a resolução de equações diferenciais parciais.

5.3.3 Método de Euler

Como o problema em questão é um problema de valor inicial, conhecendo-se a solução $u^{(n)}$ em algum ponto no instante $t^{(n)}$, é possível se encontrar a solução $u^{(n+1)}$ em algum ponto no instante $t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t$. A forma mais simples de se estimar a solução em $t^{(n+1)}$ é calcular a derivada em $t^{(n)}$ e então avançar no tempo da seguinte maneira:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \left. \frac{du}{dt} \right|^{(n)} \Delta t \quad (5.23)$$

Sem perda de generalidade, tem-se

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \left. \frac{du_i}{dt} \right|^{(n)} \Delta t \quad (5.24)$$

O valor da derivada pode ser obtido a partir da Equação 5.21 e substituído na Equação 5.24, resultando

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [u_{i-1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}] \quad (5.25)$$

Considerando-se M divisões na direção x da barra, haverá então o seguinte sistema de $M - 1$ equações algébricas:

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)} &= u_1^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [-2u_1^{(n)} + u_2^{(n)}] \\ u_2^{(n+1)} &= u_2^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [u_1^{(n)} - 2u_2^{(n)} + u_3^{(n)}] \\ u_3^{(n+1)} &= u_3^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [u_2^{(n)} - 2u_3^{(n)} + u_4^{(n)}] \\ &\vdots \\ u_{M-1}^{(n+1)} &= u_{M-1}^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [u_{M-2}^{(n)} - 2u_{M-1}^{(n)}] \end{aligned}$$

admitindo-se que $u_0 = u_M = 0$ por causa das condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$.

Estas equações podem então ser arranjadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)} &= (1 - 2p)u_1^{(n)} + pu_2^{(n)} \\ u_2^{(n+1)} &= pu_1^{(n)} + (1 - 2p)u_2^{(n)} + pu_3^{(n)} \\ u_3^{(n+1)} &= pu_2^{(n)} + (1 - 2p)u_3^{(n)} + pu_4^{(n)} \\ &\vdots \\ u_{M-1}^{(n+1)} &= pu_{M-2}^{(n)} + (1 - 2p)u_{M-1}^{(n)} \end{aligned}$$

onde $p = \alpha \Delta t / (\Delta x)^2$. Por se tratar de um sistema de equações algébricas, convém utilizar uma representação matricial. Assim, pode-se expressar o sistema acima da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & & & \\ p & 1-2p & p & & \\ & p & 1-2p & p & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & p & 1-2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{bmatrix}^{(n)} \quad (5.26)$$

A matriz tridiagonal no lado direito da equação é conhecida e constante, uma vez escolhido o incremento temporal. Os valores conhecidos de u em $t^{(n)}$ (isto é, $u^{(n)}$) são multiplicados por essa matriz para se obter os valores de u em $t^{(n+1)}$. Este é um cálculo **explícito** para se obter os novos valores de u a partir de seus valores anteriores. O processo é então repetido várias vezes para se avançar no tempo (MYERS, 1971).

A Figura 8 apresenta uma malha para o método de Euler, e mostra os valores envolvidos no cálculo da solução. Os valores $u_i^{(n)}$ na base e nas laterais da malha representam, respectivamente, a condição inicial e as condições de contorno. Para o cálculo de $u_2^{(3)}$, por exemplo, é necessário utilizar os valores numéricos de $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$ e $u_3^{(2)}$, conforme a Equação 5.25.

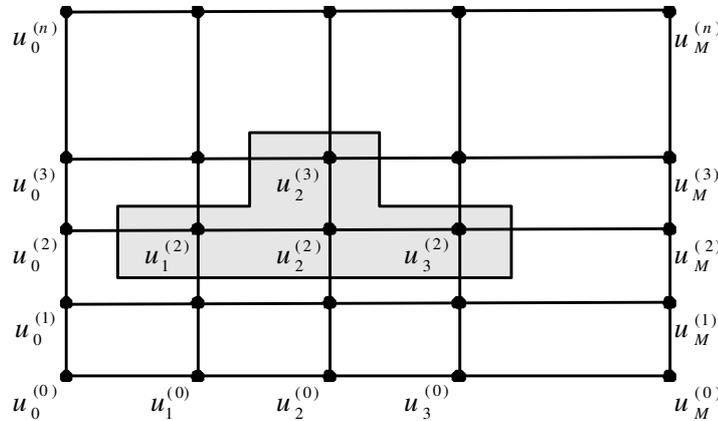


Figura 8: Malha de nós para o método de Euler

Carnahan, Luther e Wilkes (1969) mostram que este método é numericamente convergente e estável⁴ se $p \leq 1/2$. Além do mais, $p \leq 1/2$ pode resultar em uma solução na qual os erros não crescem porém oscilam, $p \leq 1/4$ assegura que a solução não oscilará e $p \leq 1/6$ tende a minimizar o erro de truncamento (CHAPRA; CANALE, 1988).

⁴**Convergência** significa que, à medida em que Δx e Δt se aproximam de zero, o resultado do método numérico se aproxima da solução verdadeira. **Estabilidade** significa que, à medida em que o método numérico progride, os erros em qualquer passo não aumentam, e sim diminuem (CHAPRA; CANALE, 1988).

5.3.4 Método de Crank-Nicolson

No método de Euler, usou-se o valor da derivada no início do intervalo temporal para se avançar no tempo. Um método mais preciso seria usar a média aritmética das derivadas no início e no final desse intervalo. Isto é, em vez de se usar a Equação 5.23 para avançar no tempo, usaria-se

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{1}{2} \left[\left. \frac{du}{dt} \right|^{(n)} + \left. \frac{du}{dt} \right|^{(n+1)} \right] \Delta t \quad (5.27)$$

Sem perda de generalidade, tem-se

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \frac{1}{2} \left[\left. \frac{du_i}{dt} \right|^{(n)} + \left. \frac{du_i}{dt} \right|^{(n+1)} \right] \Delta t \quad (5.28)$$

Os valores das derivadas podem ser obtidos a partir da Equação 5.21 e substituídos na Equação 5.28, resultando

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} [(u_{i-1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}) + (u_{i-1}^{(n+1)} - 2u_i^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n+1)})] \quad (5.29)$$

Considerando-se M divisões na direção x da barra, haverá então o seguinte sistema de $M - 1$ equações algébricas:

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)} &= u_1^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [(-2u_1^{(n)} + u_2^{(n)}) + (-2u_1^{(n+1)} + u_2^{(n+1)})] \\ u_2^{(n+1)} &= u_2^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [(u_1^{(n)} - 2u_2^{(n)} + u_3^{(n)}) + (u_1^{(n+1)} - 2u_2^{(n+1)} + u_3^{(n+1)})] \\ u_3^{(n+1)} &= u_3^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [(u_2^{(n)} - 2u_3^{(n)} + u_4^{(n)}) + (u_2^{(n+1)} - 2u_3^{(n+1)} + u_4^{(n+1)})] \\ &\vdots \\ u_{M-1}^{(n+1)} &= u_{M-1}^{(n)} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [(u_{M-2}^{(n)} - 2u_{M-1}^{(n)}) + (u_{M-2}^{(n+1)} - 2u_{M-1}^{(n+1)})] \end{aligned}$$

admitindo-se que $u_0 = u_M = 0$ por causa das condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$.

Observa-se que os valores desconhecidos de u^{n+1} aparecem agora em ambos os lados da equação. Transferindo-se estes valores para o lado esquerdo e combinando-os com os valores já existentes, pode-se escrever o sistema de equações acima na seguinte forma

matricial:

$$\begin{bmatrix} 1+p & -\frac{p}{2} & & & \\ -\frac{p}{2} & 1+p & -\frac{p}{2} & & \\ & -\frac{p}{2} & 1+p & -\frac{p}{2} & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & -\frac{p}{2} & 1+p & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & & & \\ \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} & & \\ & \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & \frac{p}{2} & 1-p & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{bmatrix}^{(n)} \quad (5.30)$$

onde $p = \alpha\Delta t/(\Delta x)^2$.

Assim como no método de Euler, o lado direito da Equação 5.30 pode ser calculado diretamente, pois todos os componentes são conhecidos. Isto resulta numa matriz coluna. A diferença vem do fato de que não se obtém um resultado explícito para as incógnitas do lado esquerdo. Em vez disso, obtém-se um sistema tridiagonal **implícito** de equações algébricas, que deve então ser resolvido. O processo é repetido a cada passo no tempo (MYERS, 1971).

A Figura 9 apresenta uma malha para o método de Crank-Nicolson, e mostra os valores envolvidos no cálculo da solução. Os valores $u_i^{(n)}$ na base e nas laterais da malha representam, respectivamente, a condição inicial e as condições de contorno. Para o cálculo de $u_2^{(3)}$, por exemplo, é necessário utilizar não só os valores numéricos de $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$ e $u_3^{(2)}$, mas também de $u_1^{(3)}$ e $u_3^{(3)}$, conforme a Equação 5.29.

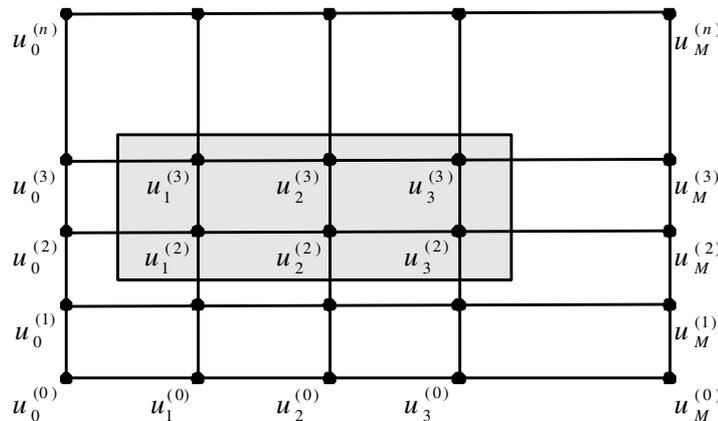


Figura 9: Malha de nós para o método de Crank-Nicolson

É evidente que haverá mais esforço computacional no método implícito de Crank-Nicolson do que no método explícito de Euler. Entretanto, há três razões que podem justificar esse trabalho extra em cada passo no tempo. Primeiro, usando a média das

derivadas para se avançar no tempo, a solução deve ser mais precisa do que no método de Euler. Segundo, pode-se utilizar incrementos temporais maiores, reduzindo assim o número total de passos necessários para se chegar a um certo ponto no tempo. Finalmente, o método de Euler é muito mais apto a produzir oscilações numéricas indesejáveis do que o método de Crank-Nicolson, se um incremento temporal muito grande for utilizado.

Na próxima seção, precede-se com a construção dos mapas conceituais referentes aos métodos de resolução de equações diferenciais parciais aqui apresentados.

5.4 Construção dos Mapas Conceituais

O ambiente computacional de aprendizagem desenvolvido utiliza mapas conceituais como recurso para a apresentação de organizadores prévios. Assim, construíram-se mapas conceituais sobre os métodos de resolução para problemas de difusão. Estes mapas são disponibilizados pelo ambiente para que o aluno possa ter acesso a um material introdutório antes do assunto a ser aprendido.

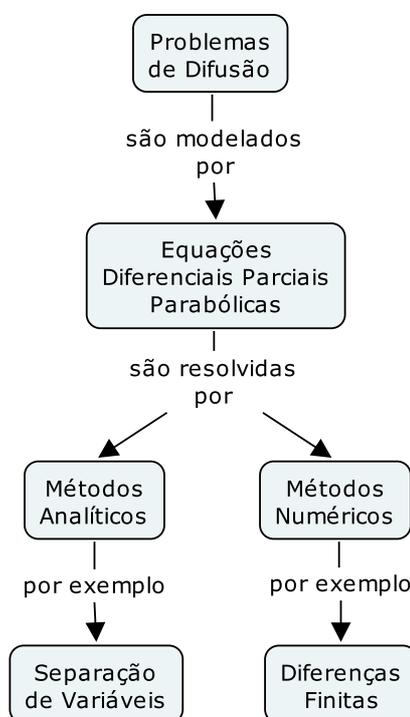


Figura 10: Mapa conceitual referente à resolução de problemas de difusão

Conforme já abordado no início deste capítulo, os problemas de difusão são modelados matematicamente por equações diferenciais parciais do tipo parabólica. Estas podem ser resolvidas por métodos analíticos, tais como separação de variáveis, ou por métodos numéricos, como por exemplo diferenças finitas. Isto pode ser representado graficamente pelo mapa conceitual ilustrado na Figura 10.

Segundo um nível mais alto de abstração, o método de separação de variáveis pode ser utilizado na resolução de equações diferenciais parciais lineares e homogêneas, dos tipos parabólica ou hiperbólica (EVANS; BLACKLEDGE; YARDLEY, 2000). O método gera soluções especiais, compostas por um autovalor e uma autofunção ortogonal, que satisfazem as condições de contorno da equação. Estas soluções são então somadas para se obter a solução final, que também satisfaz a condição inicial da equação. A Figura 11 abaixo ilustra o mapa conceitual para o método de separação de variáveis.

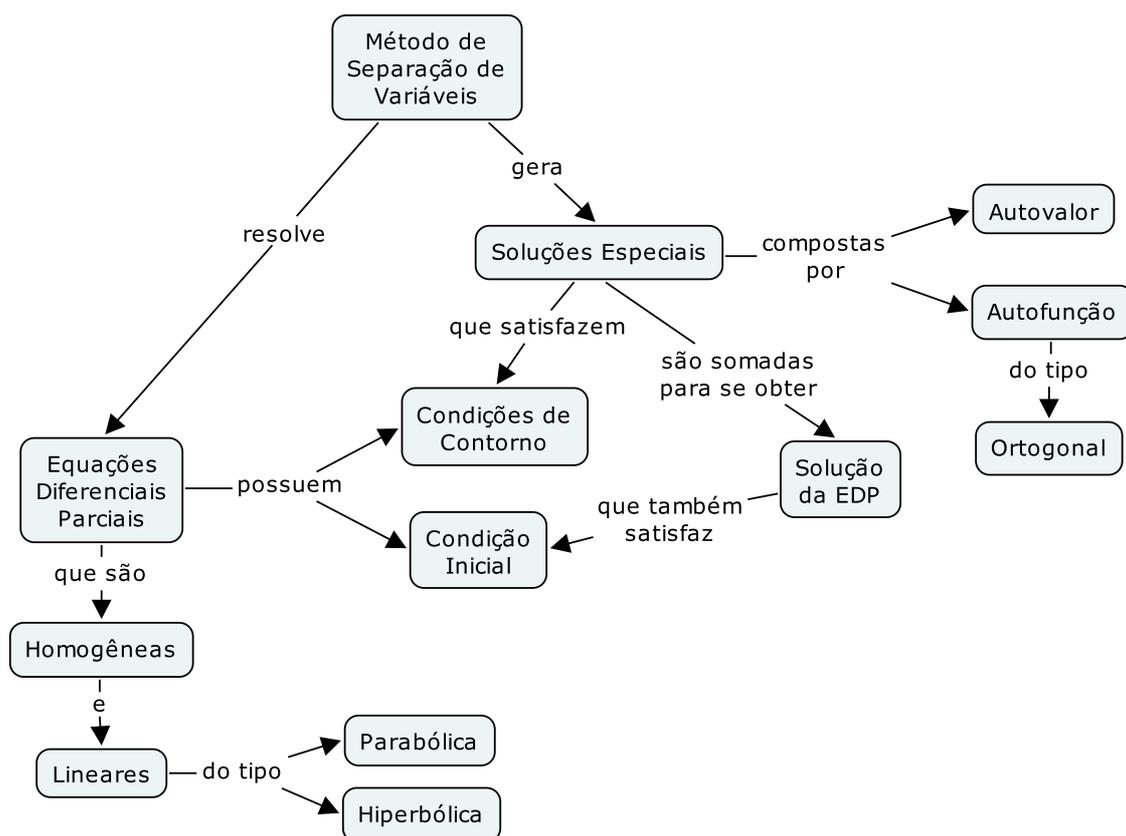


Figura 11: Mapa conceitual referente ao método de separação de variáveis

O método de diferenças finitas, por sua vez, substitui as derivadas da equação diferencial parcial por aproximações em termos de diferenças finitas, que são obtidas a partir da expansão em série de Taylor da função desconhecida. Este método pode ser explícito,

tal como o método de Euler, que utiliza a aproximação da derivada no instante n , ou implícito, como o método de Crank-Nicolson, que utiliza a média das aproximações das derivadas nos instantes n e $n + 1$. A Figura 12 abaixo mostra um mapa conceitual para o método de diferenças finitas.

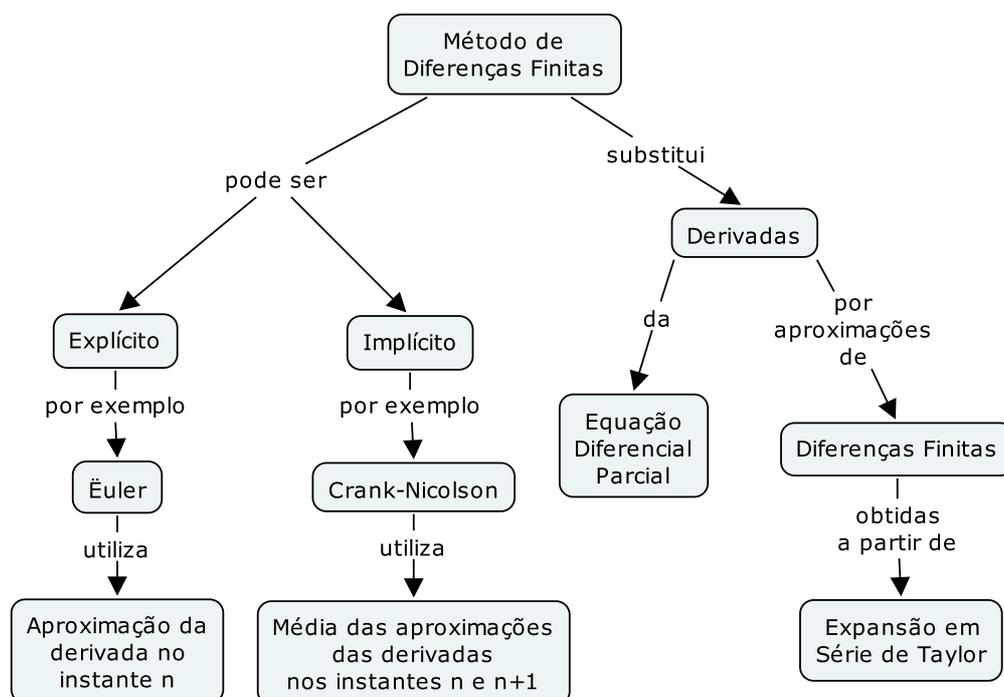


Figura 12: Mapa conceitual referente ao método de diferenças finitas

Ressalta-se, mais uma vez, que o aluno poderá ter acesso a esses mapas conceituais no ambiente desenvolvido, os quais terão a finalidade de organizadores prévios.

5.5 Considerações Finais

A solução analítica obtida pelo método de separação de variáveis, representada pela Equação 5.17, contém mais informação do que uma tabela de números, revelando como os parâmetros físicos e as condições inicial e de contorno afetam a solução. Além disso, ela permite obter o valor numérico da solução em qualquer ponto (x, t) , e não apenas nos pontos de uma malha. Este valor pode ser calculado sem passar por todo o processo de encontrar a solução nos pontos anteriores, como é feito no método de diferenças finitas.

Tal processo, além de encarecer o custo da solução, está sujeito à utilização de formalismos matemáticos e procedimentos numéricos para controle de convergência, fator

que se torna mais crítico na modelagem avançada. Já para se calcular o valor da solução analítica com qualquer grau de precisão, é necessário apenas se adicionar um número suficiente de termos na série infinita.

A vantagem do método numérico, no caso diferenças finitas, é que muitos problemas não têm solução analítica conhecida e praticamente todas as EDPs não-lineares devem ser resolvidas por tal tipo de método. Os modelos lineares representam, na maioria da vezes, aproximações onde desprezam-se determinados componentes não-lineares. Portanto, a resolução de problemas não-lineares muitas vezes envolve o uso dos métodos numéricos.

Para auxiliar na aprendizagem dos métodos apresentados, foram construídos mapas conceituais nos quais identificam-se os conceitos envolvidos nestes métodos. Tais conceitos representam os subsunçores que devem existir na estrutura cognitiva do aluno para que a aprendizagem desses métodos seja significativa, de acordo com a teoria de Ausubel. Estes mapas farão parte do ambiente computacional de aprendizagem, e os conceitos neles apresentados estarão disponíveis para que o aluno possa estudá-los ou revisá-los.

No próximo capítulo, descreve-se o ambiente computacional de aprendizagem desenvolvido, no qual os três métodos aqui descritos foram implementados com os recursos de um SCS.

6 Ambiente Computacional de Aprendizagem

Neste capítulo, apresentam-se as características gerais do ambiente computacional proposto, bem como os aspectos gerais da sua implementação. Além disso, descreve-se a estrutura do ambiente, enfatizando-se seus recursos pedagógicos e computacionais.

Procede-se, também, com a interpretação do fenômeno físico abordado pelo ambiente, o problema da transferência de calor por condução. Finalmente, realiza-se uma análise dos resultados numéricos gerados pelo ambiente, validando assim os algoritmos implementados para os três métodos de resolução em questão.

6.1 Características Gerais

O ambiente computacional proposto foi desenvolvido com o objetivo de ser uma ferramenta construcionista para auxiliar a aprendizagem de métodos analíticos e numéricos aplicados a equações diferenciais parciais do tipo parabólica, que modelam os problemas de difusão.

Realiza manipulação simbólica e processamento numérico, permitindo a execução interativa de algoritmos matemáticos e a visualização de dados através de tabelas, gráficos e animações.

O conteúdo pedagógico do ambiente, apresentado no Capítulo 5, foi baseado em Myers (1971). A apresentação desse conteúdo para o aluno foi fundamentada nos princípios da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, abordada no Capítulo 4.

O ambiente foi concebido para o ensino em nível de graduação e de pós-graduação, podendo ser utilizado na sala de aula pelo professor em um único computador, com o auxílio de um equipamento para projeção. No entanto, nesta situação não seria cumprida a totalidade dos seus objetivos, pois o mesmo também deve ser utilizado pelos alunos de

modo que possam manipular o ambiente e construir de forma autônoma o seu próprio conhecimento. Para se promover uma aprendizagem colaborativa, seria necessária a sua utilização em grupos de dois ou três alunos em um mesmo computador, tendo-se o cuidado de manter a interatividade entre os alunos e o professor. Este deverá então deixar de ser um repassador do conhecimento e se tornar um facilitador do processo de aprendizagem do aluno.

Na seção a seguir, abordam-se os aspectos gerais da implementação do ambiente computacional de aprendizagem proposto.

6.2 Aspectos Gerais da Implementação

Para a implementação do ambiente computacional de aprendizagem, utilizou-se o *Mathematica* (WOLFRAM, 2003), um SCS que integra recursos de computação simbólica, numérica e gráfica dentro de um ambiente de programação totalmente heterogêneo, oferecendo recursos de programação funcional, procedural e até mesmo orientada a objetos (BARANAUSKAS, 1998).

A interação com o usuário é baseada em documentos interativos conhecidos como *notebooks*, que mesclam entradas e saídas do *Mathematica* com textos e gráficos. Os *notebooks* podem ser utilizados tanto para fazer cálculos como para apresentar ou publicar resultados. Mais detalhes sobre o *Mathematica* são apresentados no Apêndice A.

O ambiente computacional de aprendizagem consiste num conjunto de *notebooks* que abordam desde a formulação do problema físico até a aplicação e análise dos métodos selecionados para a resolução do problema.

A Figura 13 a seguir ilustra um exemplo de *notebook* do ambiente. Nele podem-se observar sete estruturas comuns a todos os *notebooks* que apresentam o desenvolvimento de um método a ser estudado. Na área de fundo lilás, indicado por (1), tem-se o título do *notebook*, que refere-se ao assunto que está sendo abordado. Logo abaixo, na área de fundo verde, indicado por (2), encontra-se o subtítulo, que refere-se a um determinado tópico dentro do assunto. No local indicado por (3), observam-se dois *hyperlinks*: **Mapa Conceitual**, que navega para um outro *notebook* contendo o mapa conceitual do assunto sobre o qual se está aprendendo, e **Ajuda**, que acessa um *notebook* de ajuda *on-line* do ambiente. As Figuras 15 e 16, localizadas no final desta seção, ilustram exemplos de *notebooks* acessados por esses *hyperlinks*, respectivamente.



Figura 13: Exemplo de um *notebook* do ambiente

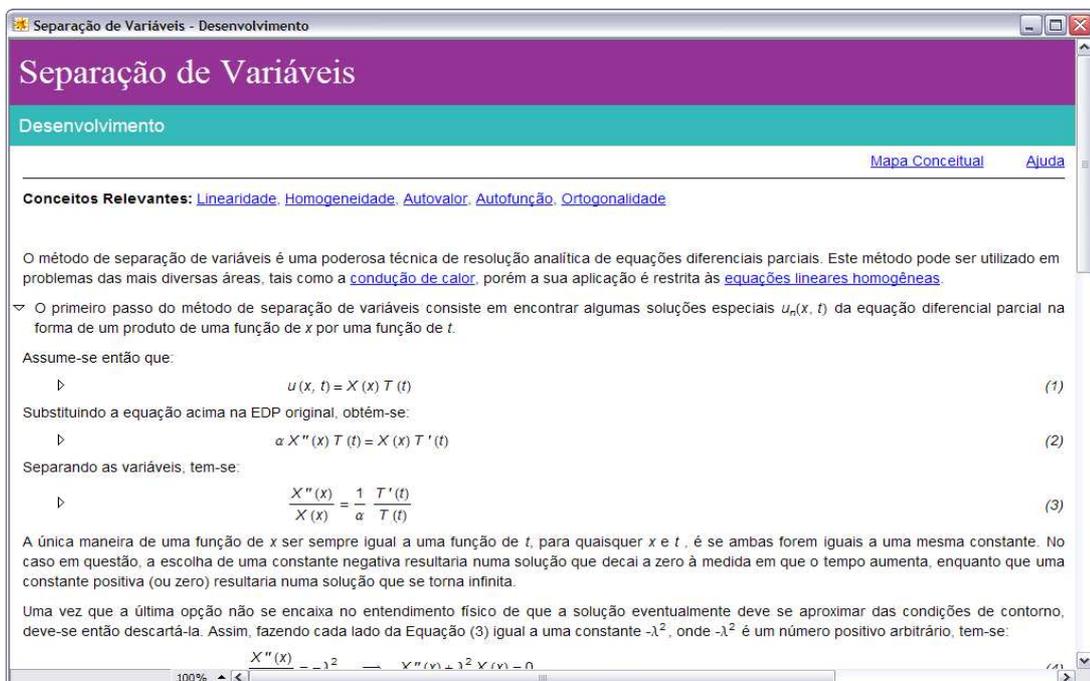


Figura 14: *Notebook* com o texto didático num nível mais baixo de abstração

Ainda na Figura 13, os conceitos relevantes ao assunto apresentado encontram-se indicados por (4). Estes são conceitos subsunçores, que devem ser de conhecimento do aprendiz para que haja uma aprendizagem significativa da matéria. Caso algum conceito não seja de conhecimento do aluno, devem-se utilizar os *hyperlinks* de cada conceito para acessar ou um outro *notebook* ou uma URL¹, ambos tratando do assunto que necessita ser aprendido.

O texto didático, indicado por (5), inicialmente está num nível mais alto de abstração, servindo como um material introdutório a ser apresentado antes do assunto a ser aprendido, caracterizando-se como um organizador prévio. Clicando-se nos ícones indicados por (6), pode-se expandir o texto, de forma que este passe a se encontrar num nível mais baixo de abstração, conforme mostra-se na Figura 14. Ao longo de todo o texto, estes ícones são disponibilizados para que se possa detalhá-lo cada vez mais, até se atingir o nível mais baixo de detalhamento.

Finalmente, na área localizada abaixo do texto, indicada por (7), encontram-se sugestões de navegação para o aluno, de forma que este tenha autonomia para escolher o próximo *notebook* a ser acessado através de um dos *hyperlinks* disponíveis.

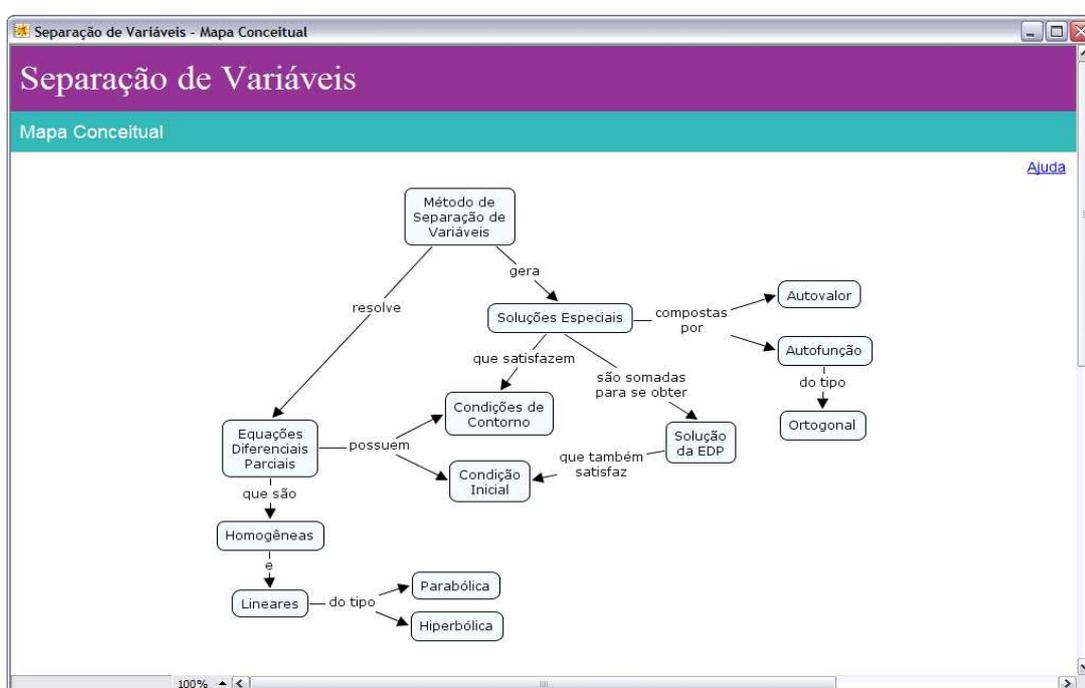
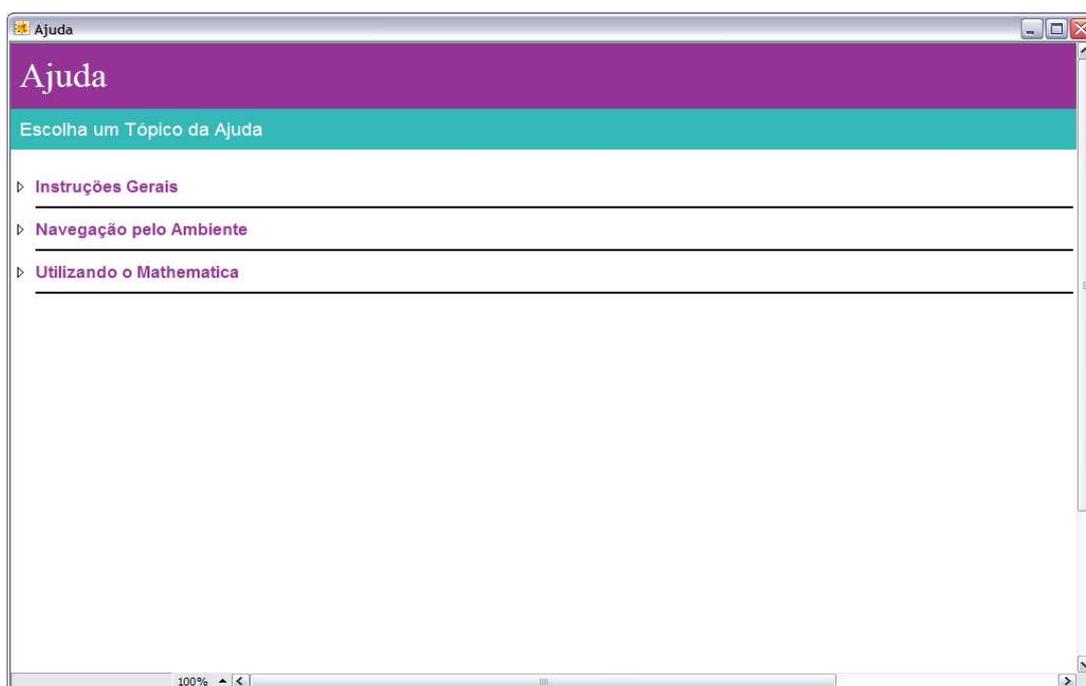


Figura 15: *Notebook* apresentando mapa conceitual

¹Sigla para Uniform Resource Locator, que designa um endereço da *Web*.

Figura 16: *Notebook* de ajuda *on-line* do ambiente

6.3 Descrição do Ambiente

Quando um estudante resolve um problema verdadeiro, necessariamente ele se envolve numa reflexão analítica mais intensa (LABURU, 2003). Assim, o contato inicial do aluno com o ambiente se dará através do *notebook* ilustrado na Figura 17, onde disponibilizam-se as formulações física e matemática de um problema real a ser resolvido, no caso o problema da condução de calor. Desta forma, procura-se fazer com que o aluno conceba uma primeira idéia da aplicação prática dos métodos a serem aprendidos. Também busca-se com isto motivar o aluno para ele fique predisposto a aprender, facilitando assim a aprendizagem significativa.

A partir do *notebook* da Figura 17, pode-se navegar, através de seus *hyperlinks*, para outros *notebooks* que apresentam os métodos de resolução da equação diferencial parcial subjacente ao problema proposto. Dentre eles, cita-se aquele já apresentado na Figura 13, que aborda o desenvolvimento do método de separação de variáveis. Conforme explicado na seção anterior, e ilustrado pelas Figuras 13 e 14, o texto contendo a descrição do método, que antes estava em um nível mais alto de abstração, pode ser expandido, formando um novo texto com um nível mais baixo de abstração.

Voltando à Figura 14, observa-se que também há, ao lado esquerdo das fórmulas, ícones que expandem o corpo do texto. Isto significa que as fórmulas também podem ser

Difusão - Condução de Calor

Difusão

Condução de Calor

[Mapa Conceitual](#) [Ajuda](#)

Conceitos Relevantes: [Difusão](#), [Equações Diferenciais](#)

Considere-se o problema de condução de calor numa barra retilínea, de seção transversal uniforme e de material homogêneo. Denomina-se por x o eixo da barra, sendo $x=0$ e $x=L$ suas extremidades, conforme ilustrado na figura abaixo. Suponha-se que as superfícies laterais da barra estejam perfeitamente isoladas termicamente, de modo que não haja passagem de calor através delas. Considere-se também que as dimensões da seção transversal sejam tão pequenas que a temperatura pode ser considerada uniforme em qualquer ponto desta seção.

Uma vez que a condução de calor trata-se um problema de [difusão](#), a variação de temperatura ao longo da barra é modelada pela seguinte equação diferencial parcial, conhecida como **equação da condução do calor**:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

onde a constante α é denominada como **difusividade térmica** e depende somente do material de que é constituída a barra. Esta constante é definida por $\alpha = \frac{k}{\rho c}$, onde k é a condutividade térmica, ρ a densidade e c o calor específico do material. As unidades de α são comprimento²/tempo.

Figura 17: *Notebook* descrevendo o problema da condução de calor

Separação de Variáveis - Desenvolvimento

O método de separação de variáveis é uma poderosa técnica de resolução analítica de equações diferenciais parciais. Este método pode ser utilizado em problemas das mais diversas áreas, tais como a [condução de calor](#), porém a sua aplicação é restrita às [equações lineares homogêneas](#).

▾ O primeiro passo do método de separação de variáveis consiste em encontrar algumas soluções especiais $u_n(x, t)$ da equação diferencial parcial na forma de um produto de uma função de x por uma função de t .

Assume-se então que:

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (1)$$

`u[x_, t_] := X[x] T[t]`

Substituindo a equação acima na EDP original, obtém-se:

$$\alpha X''(x) T(t) = X(x) T'(t) \quad (2)$$

`eq = \alpha \partial_{xx} u[x, t] == \partial_t u[x, t]`

`\alpha T[t] X''[x] == X[x] T'[t]`

Separando as variáveis, tem-se:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (3)$$

`eq = eq[[1]] \frac{1}{\alpha X[x] T[t]} == eq[[2]] \frac{1}{\alpha X[x] T[t]}`

`\frac{X''[x]}{X[x]} == \frac{T'[t]}{\alpha T[t]}`

A única maneira de uma função de x ser sempre igual a uma função de t , para quaisquer x e t , é se ambas forem iguais a uma mesma constante. No caso em questão, a escolha de uma constante negativa resultaria numa solução que decai a zero à medida em que o tempo aumenta, enquanto que uma

Figura 18: *Notebook* ilustrando o desenvolvimento do método de separação de variáveis

expandidas, fazendo com que o *notebook* assuma a aparência ilustrada pela Figura 18. Esta ação faz com que sejam disponibilizadas caixas de entrada, de cor alaranjada, contendo uma representação da fórmula segundo um comando na linguagem de programação do *Mathematica*. O aluno pode submeter este comando para processamento clicando na caixa de entrada e teclando $\langle Shift \rangle + \langle Enter \rangle$. A caixa de saída, de cor branca e com bordas alaranjadas, exibe o resultado do processamento do comando submetido. Desta forma, o aluno poderá desenvolver todo o método de separação de variáveis utilizando os recursos de manipulação simbólica do sistema. Vale ressaltar que, caso queira-se utilizar outro SCS que não o *Mathematica*, a fórmula deverá ser representada segundo a linguagem do SCS escolhido.

Através de *hyperlink*, pode-se navegar do *notebook* da Figura 18 para o *notebook* da Figura 19, em que se aplica o método de separação de variáveis ao problema proposto, e que divide-se em três hierarquias conceituais: **Definição da Solução**, **Parâmetros Físicos** e **Interpretação da Solução**. Estas podem ser expandidas clicando-se nos ícones laterais. A terceira hierarquia, por sua vez, subdivide-se em outras três.

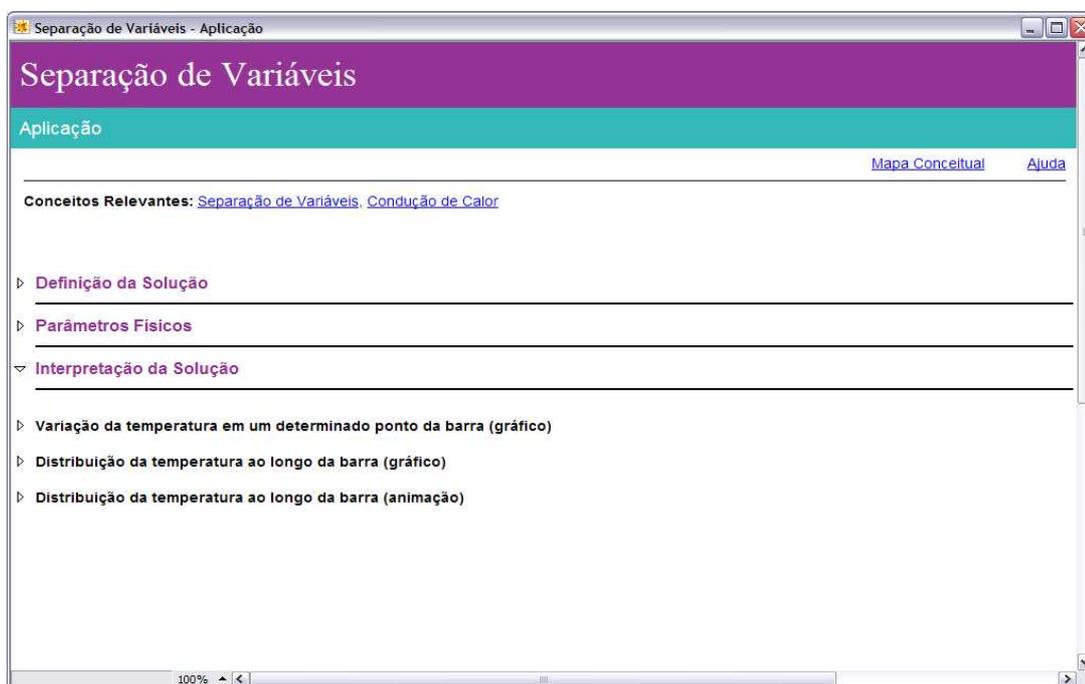


Figura 19: *Notebook* de aplicação do método de separação de variáveis

A Figura 20 a seguir mostra a primeira hierarquia conceitual, agora expandida, do *notebook* de aplicação do método de separação de variáveis. Aqui define-se, analiticamente, por meio de comando na linguagem de programação do *Mathematica*, a solução obtida através daquele método. Do mesmo modo, definem-se também as condições de contorno e a condição inicial da equação, que podem ser alteradas pelo aluno para se obter

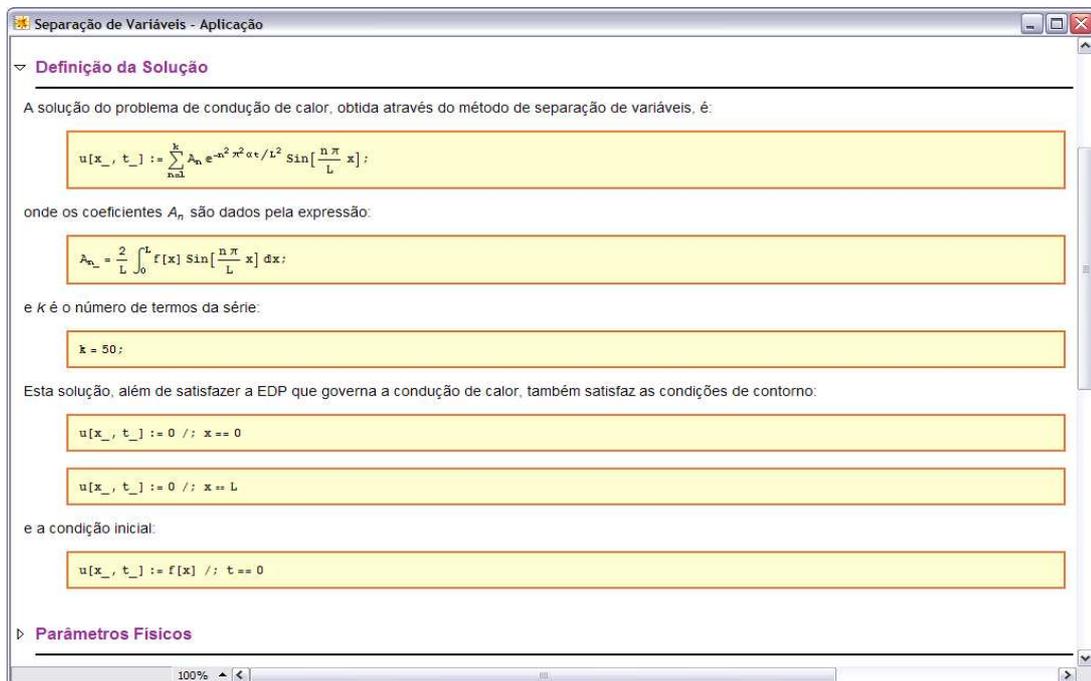


Figura 20: Definição da solução analítica obtida pelo método de separação de variáveis



Figura 21: Parâmetros físicos utilizados na aplicação do método de separação de variáveis

outras configurações do problema. O número de termos da série (k) também é definido e pode ser alterado, influenciando assim na precisão do resultado numérico obtido a partir da solução analítica.

Na Figura 21, mostra-se a segunda hierarquia conceitual do *notebook* de aplicação do método de separação de variáveis, onde são definidos os seguintes parâmetros físicos do problema da condução de calor: coeficiente de difusividade térmica do material, comprimento da barra e função de distribuição da temperatura inicial da barra. Assim como as condições de contorno e inicial, estes parâmetros também podem ser alterados pelo aluno. A distribuição de temperatura, por sua vez, consiste numa função de x que determina a temperatura num determinado ponto da barra, podendo ser livremente definida pelo aluno.

Para se proceder à interpretação do fenômeno físico, a terceira hierarquia conceitual do *notebook* de aplicação do método de separação de variáveis, ilustrada na Figura 22 a seguir, permite que o aluno visualize, através de um gráfico, a variação da temperatura, ao longo do tempo, em um determinado ponto da barra. Antes de se gerar este gráfico, duas informações devem ser fornecidas: o ponto da barra que se deseja analisar e o tempo final de observação. Mais uma vez, estes parâmetros também podem ser livremente alterados pelo aluno, podendo-se analisar a temperatura em diversos pontos da barra durante qualquer período de tempo.

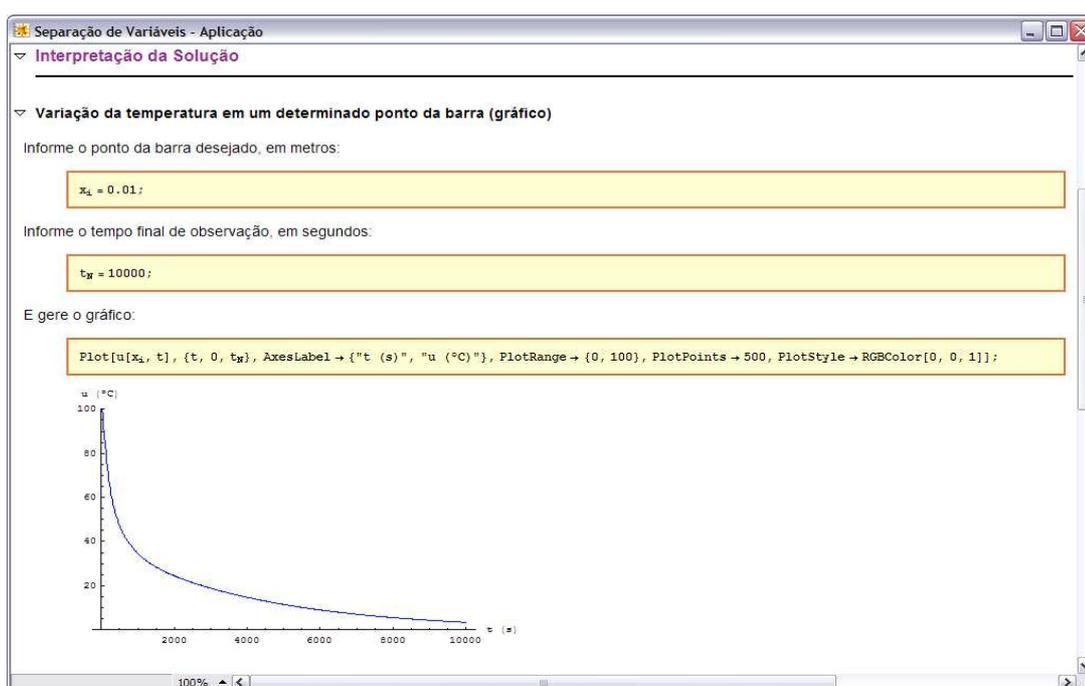


Figura 22: Interpretação da solução: geração de gráfico da variação da temperatura em um determinado ponto da barra

Ainda na terceira hierarquia conceitual desse *notebook*, conforme ilustra a Figura 23 abaixo, pode-se também analisar, através de um gráfico, os perfis de temperatura, isto é, a distribuição da temperatura ao longo da barra em um determinado instante no tempo. Para a geração deste gráfico, o aluno deverá informar o instante no qual se deseja observar a distribuição da temperatura.

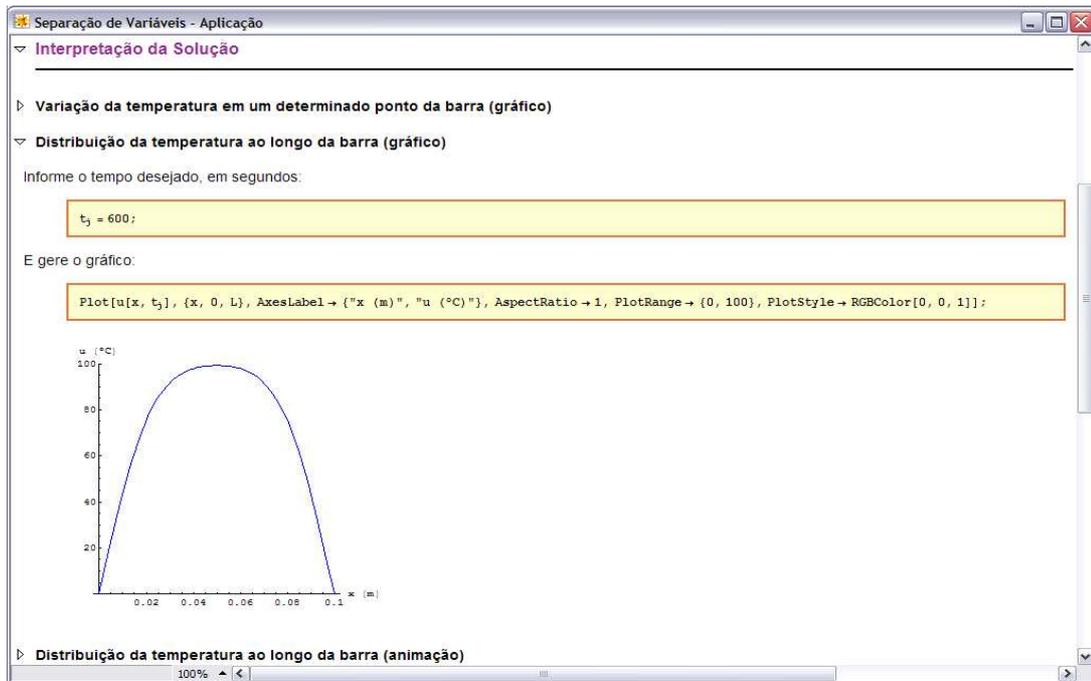


Figura 23: Interpretação da solução: geração de gráfico da distribuição da temperatura ao longo da barra

Os perfis de temperatura também podem ser analisados a partir de uma animação, a qual consiste na exibição sequencial de gráficos iguais aos da Figura 23. Este tipo de recurso permite que o aluno visualize a dinâmica do processo de resfriamento da barra, desde o instante inicial ($t = 0$) até um instante qualquer informado pelo aluno.

Com relação ao desenvolvimento dos métodos de diferenças finitas, procede-se da mesma forma que no método de separação de variáveis, ou seja, há *notebooks* com textos didáticos sobre os métodos de Ëuler e de Crank-Nicolson que podem ser expandidos gradativamente até se atingir o nível mais baixo de abstração. A partir desses *notebooks*, tem-se acesso aos *notebooks* de aplicação dos métodos citados, que serão agora apresentados.

A Figura 24 a seguir ilustra o *notebook* de aplicação do método de Ëuler, que divide-se em duas hierarquias conceituais: **Algoritmo** e **Análise da Solução**. A primeira hierarquia subdivide-se em outras três, que correspondem a partes bem definidas do algoritmo. A segunda hierarquia, por sua vez, subdivide-se em duas, nas quais compara-se o método de Ëuler com o de separação de variáveis.

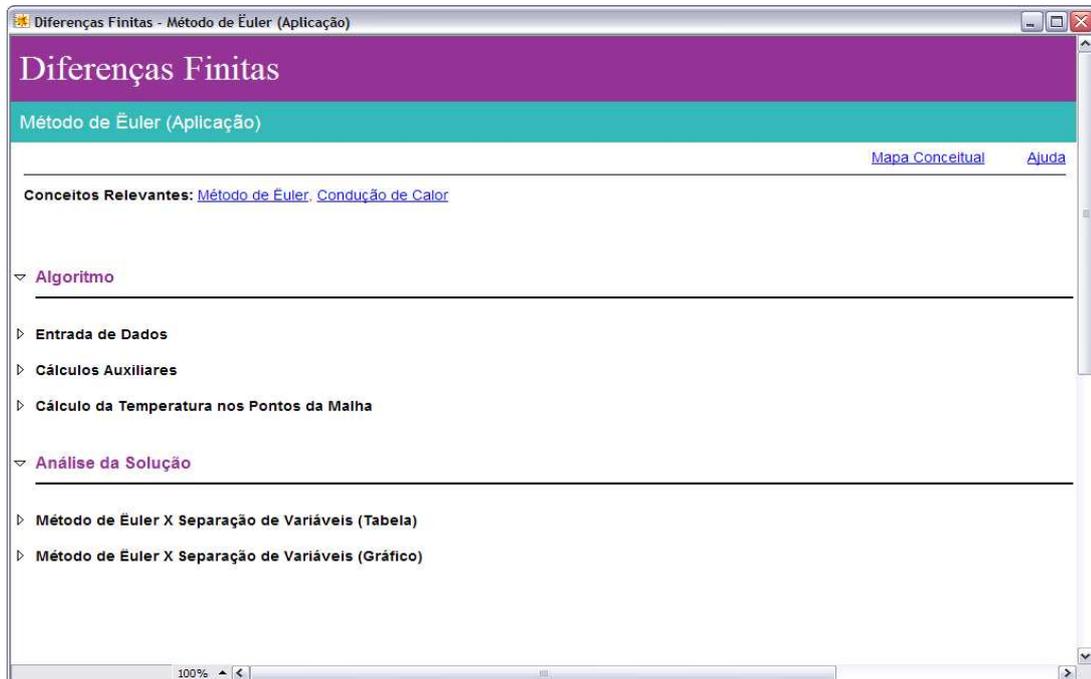
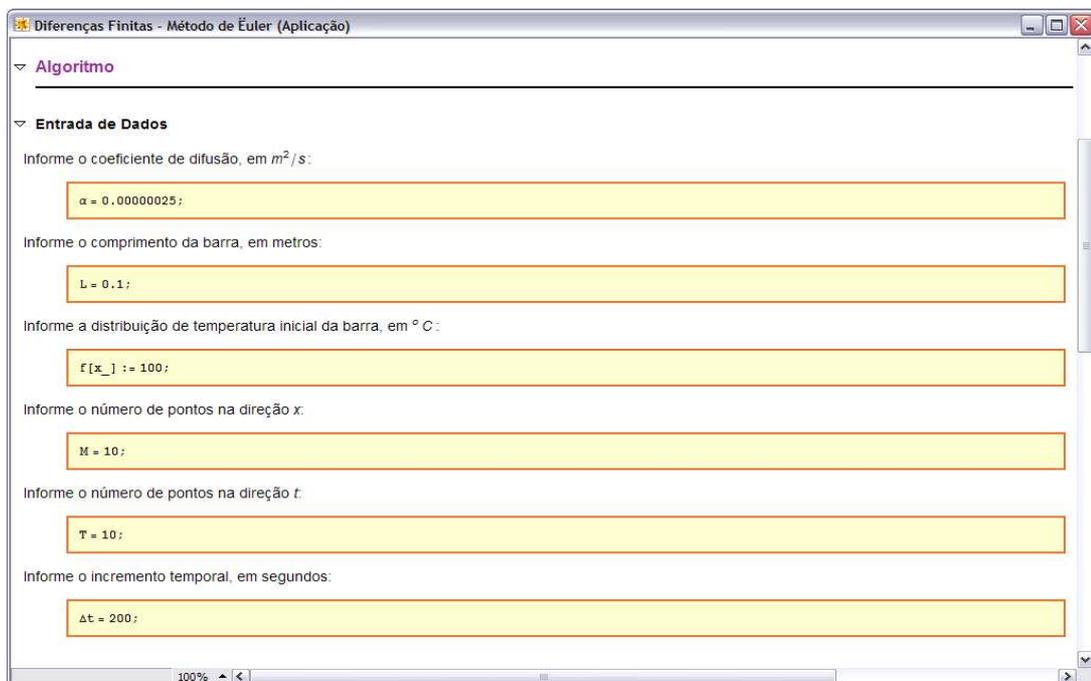
Figura 24: *Notebook* de aplicação do método de Euler

Figura 25: Entrada de dados para o algoritmo do método de Euler

Na Figura 25, mostra-se a primeira hierarquia conceitual do algoritmo, a qual corresponde à entrada de dados. Aqui o aluno deve fornecer o coeficiente de difusividade térmica do material, o comprimento da barra, a função de distribuição da temperatura inicial, o número de pontos na direção x da barra, o número de pontos na direção t e o incremento temporal Δt .

Na Figura 26 a seguir, mostra-se a segunda hierarquia conceitual do algoritmo, na qual realizam-se cálculos auxiliares que deverão ser executados pelo aluno após a entrada de dados. A partir do comprimento (L) e do número de pontos na direção x da barra (M), calcula-se o incremento Δx . Este é então utilizado, juntamente com o incremento temporal (Δt) e com o coeficiente de difusividade térmica (α), para se calcular a relação $p = \alpha \Delta t / (\Delta x)^2$, definida na Subseção 5.3.3.



Figura 26: Cálculos auxiliares do algoritmo do método de Euler

Na Figura 27, mostra-se a terceira hierarquia conceitual do algoritmo, na qual realiza-se o cálculo da temperatura nos pontos da malha. Esta será representada por uma matriz de dimensão $(T + 1) \times (M + 1)$, cujas linhas representam a temperatura da barra num determinado instante, e as colunas contêm as temperaturas de um determinado ponto da barra ao longo do tempo.

Inicialmente, o aluno deverá executar um comando para a inicialização da matriz. Em seguida, deve-se executar um outro comando para se preencher a matriz com as condições do contorno do problema. Após a execução desse comando, a matriz é imediatamente

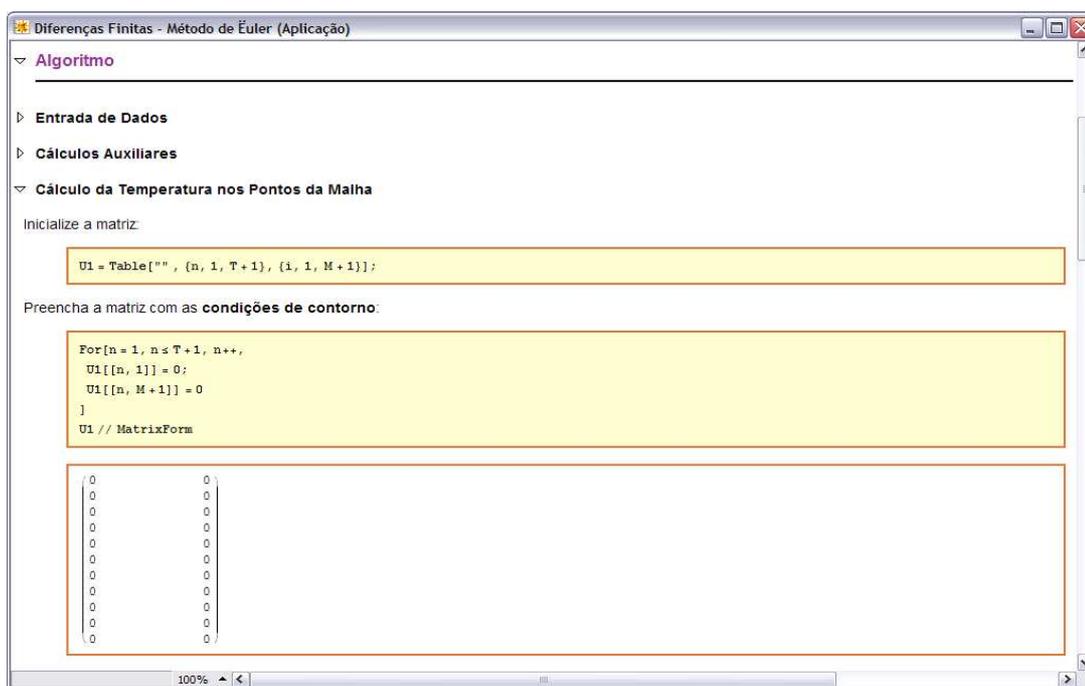


Figura 27: Inicialização e preenchimento da matriz com as condições de contorno

exibida, mostrando os valores da condição de contorno. Isto pode ser visualizado através da Figura 27.

Depois do preenchimento da matriz com as condições de contorno, o aluno deverá executar um outro comando para preenchê-la com a condição inicial do problema, conforme mostra a Figura 28. Observa-se que, após a execução do comando, a matriz é novamente exibida, mostrando agora as condições de contorno juntamente com a condição inicial.

Finalmente, as temperaturas dos pontos interiores da malha deverão ser calculados, ou seja, a matriz será agora totalmente preenchida. Para isso, o aluno deverá primeiro inicializar um contador (n) que representará o tempo nodal. Em seguida, o cálculo das temperaturas deverá ser realizado linha-a-linha, executando-se repetidas vezes o comando mostrado na Figura 29. Pode-se observar neste comando a presença da Equação 5.25, do método de Euler, apresentada no Capítulo 5.

A cada execução desse comando, a matriz é atualizada e exibida com os novos valores, permitindo que o aluno visualize o resultado de cada passo do método. O comando deverá ser executado pelo aluno até que toda a matriz seja preenchida. Para acompanhamento do aluno, o valor do contador é fornecido acima da matriz, de forma que o aluno poderá saber em qual tempo nodal a execução do método se encontra.

Esta forma de se conduzir o cálculo da matriz proporciona ao aluno maior controle sobre a execução do algoritmo, o que não seria possível utilizando-se linguagens como C e

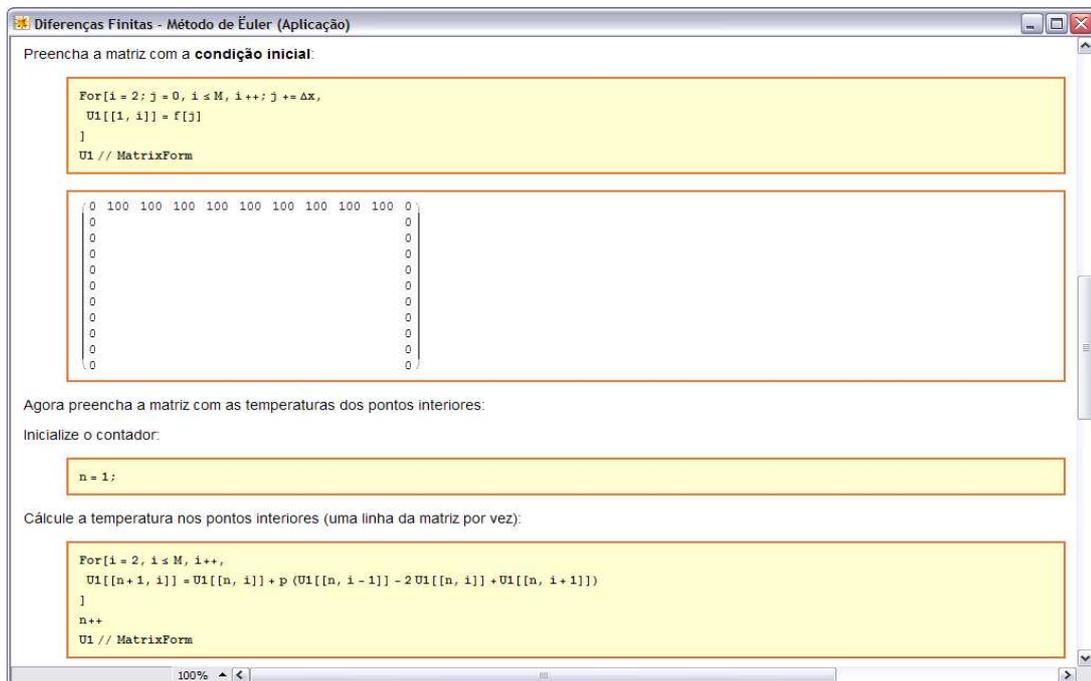


Figura 28: Preenchimento da matriz com a condição inicial

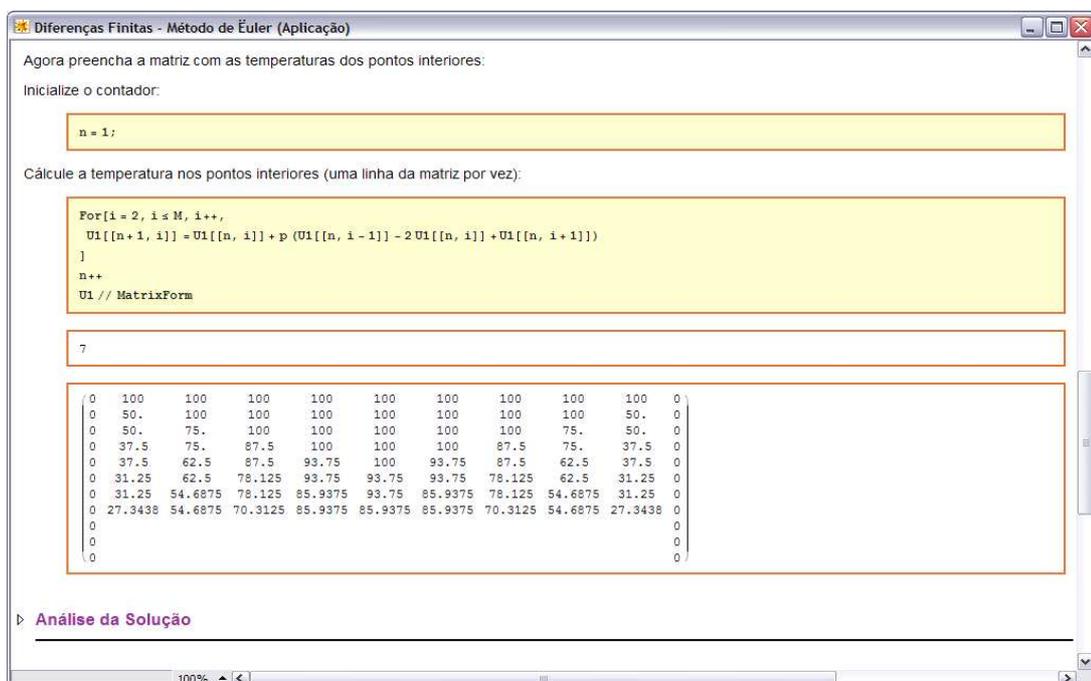


Figura 29: Preenchimento da matriz com as temperaturas dos pontos interiores

FORTTRAN. Além disso, esta metodologia conduz passo-a-passo a construção do raciocínio abstrato físico-matemático do aluno.

Para analisar a solução encontrada pelo método de \ddot{E} uler, o ambiente utiliza a solução obtida pelo método de separação de variáveis como *benchmark*, isto é, como valor de referência. Assim, conforme ilustrado pela Figura 30 abaixo, disponibiliza-se a geração de uma tabela na qual constam a posição nodal, o ponto x em metros, o valor das soluções obtidas pelos dois métodos, e o erro relativo percentual (ERP). Para geração desta tabela, o aluno deverá informar o tempo nodal em que se deseja analisar.

Análise da Solução

Método de Euler X Separação de Variáveis (Tabela)

Abaixo encontra-se uma tabela em que se analisa o Método de Euler a partir do Método de Separação de Variáveis.

Antes de gerar a tabela, informe o tempo nodal que se deseja analisar:

`j = 5:`

Gere a tabela:

```
TableForm[Table[{i, i Δx, u[i Δx, j Δt], U1[[j + 1, i + 1]], Abs[ $\frac{U1[[j + 1, i + 1]] - u[i Δx, j Δt]}{u[i Δx, j Δt]}$  100]}, {i, 1, M - 1}],
TableHeadings -> {None, {"i", "x", "Sep.Var.", "Euler", "Erro Relativo (%)"},
TableAlignments -> Center]
```

i	x	Sep. Var.	\ddot{E} uler	Erro Relativo (%)
1	0.01	34.5223	31.25	9.47881
2	0.02	62.856	62.5	0.566388
3	0.03	81.8542	78.125	4.55595
4	0.04	91.9071	93.75	2.00514
5	0.05	94.9305	93.75	1.24358
6	0.06	91.9071	93.75	2.00514
7	0.07	81.8542	78.125	4.55595
8	0.08	62.856	62.5	0.566388
9	0.09	34.5223	31.25	9.47881

Método de Euler X Separação de Variáveis (Gráfico)

Figura 30: Geração de tabela comparativa dos métodos de \ddot{E} uler e separação de variáveis

Ainda para análise da solução obtida pelo método de \ddot{E} uler, pode-se também gerar um gráfico comparativo. Para isso, conforme pode-se observar na Figura 31, inicialmente o aluno deverá fornecer o ponto nodal que se deseja analisar. Em seguida, devem-se calcular o ponto da barra, em metros, e o tempo final, em segundos. Após estes cálculos, deve-se gerar um vetor auxiliar para armazenar as temperaturas, utilizando o tempo em segundos como índice. A geração deste vetor é necessária para que se possa comparar as temperaturas no mesmo tempo nos dois métodos, uma vez que no método de \ddot{E} uler o índice temporal não é dado em segundos.

Finalmente, conforme mostra-se na Figura 32, os gráficos dos dois métodos devem ser gerados separadamente para depois serem sobrepostos. O gráfico contendo os dois métodos permite se fazer uma análise do método de \ddot{E} uler em relação à solução exata,

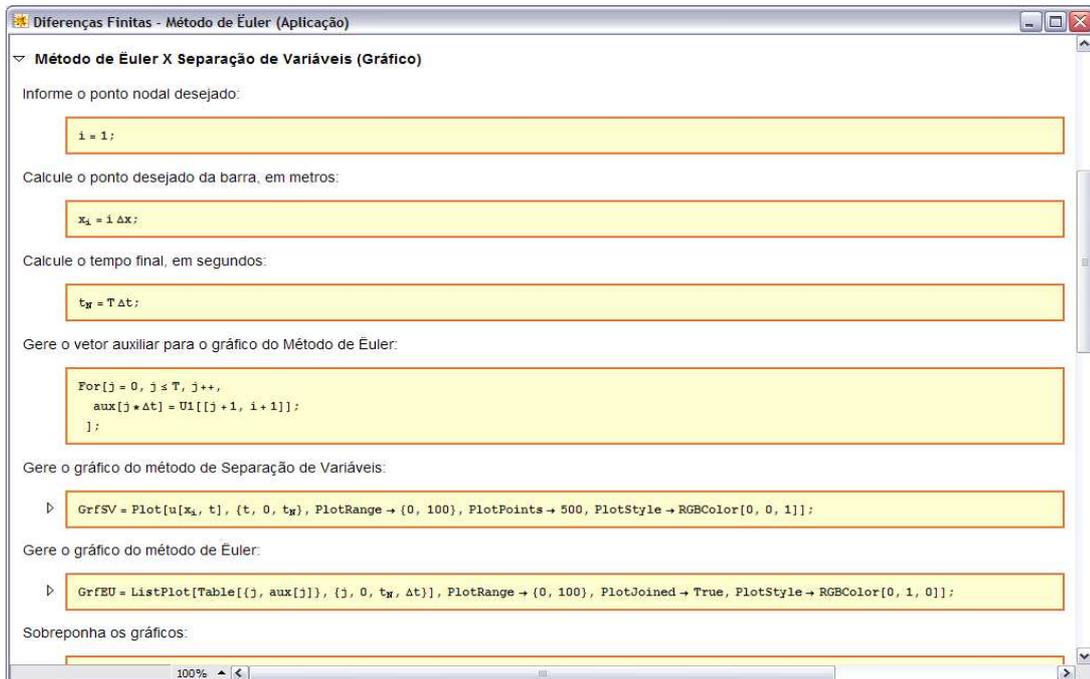


Figura 31: Parâmetros para geração do gráfico comparativo dos métodos de Euler e separação de variáveis

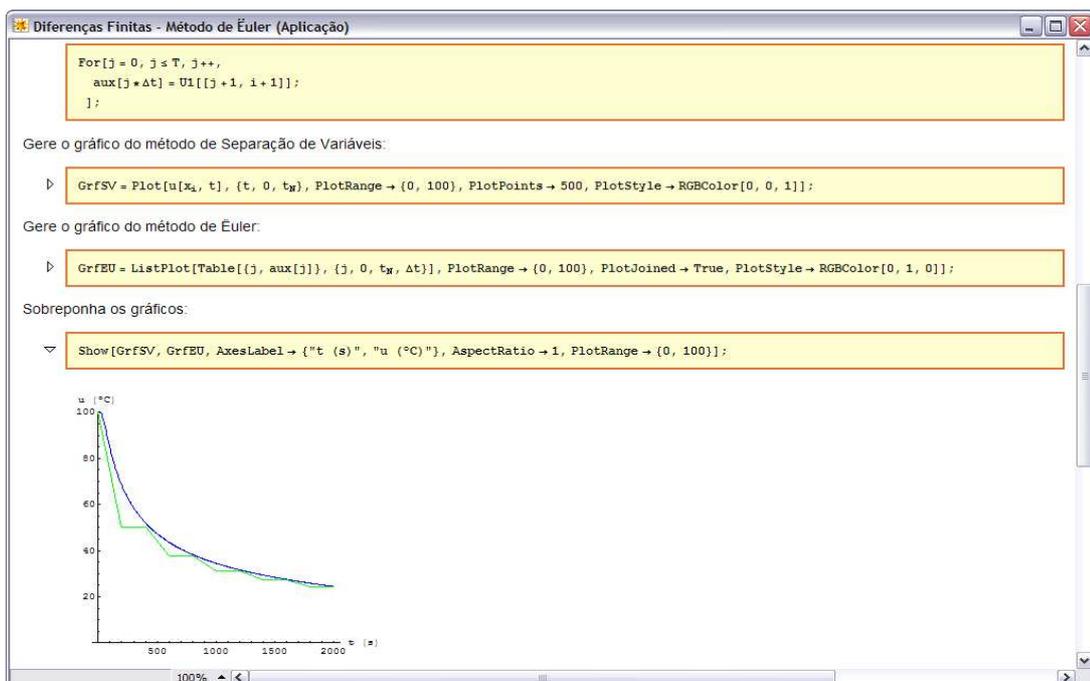


Figura 32: Geração do gráfico comparativo dos métodos de Euler e separação de variáveis

obtida pelo método de separação de variáveis. Variando-se os incrementos Δx e Δt , o aluno poderá gerar e comparar diversas soluções do método de Euler, e assim observar o comportamento da convergência e da estabilidade do método.

Com relação ao método de Crank-Nicolson, o ambiente computacional de aprendizagem possui *notebooks* semelhantes aos do método de Euler, mudando-se apenas a fórmula utilizada no comando que calcula as temperaturas.

Nas seções a seguir, procede-se com a interpretação do fenômeno físico, neste caso o resfriamento de uma barra de *epoxy*, e com a análise dos resultados numéricos gerados pelo ambiente computacional de aprendizagem.

6.4 Interpretação do Fenômeno Físico

Como exemplo de aplicação física, o ambiente computacional de aprendizagem aborda o problema da condução de calor unidimensional, o qual é tratado sob o ponto de vista do resfriamento de materiais utilizados na refrigeração de circuitos eletrônicos, tais como o *epoxy*. Assim, assume-se o coeficiente de difusividade térmica deste material como sendo inicialmente $0,25 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (CUNHA, 2002; LEWIS; FERGUSON, 1990), o comprimento característico da barra $L = 0,1 \text{ m}$ e a distribuição inicial de temperatura $f(x) = 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

Para se proceder com a interpretação física do fenômeno da transferência de calor, o ambiente de aprendizagem disponibiliza recursos para a geração de gráfico e animação da evolução do perfil de temperatura no processo de resfriamento na barra de *epoxy*. Este efeito físico é exibido na Figura 33, onde observa-se que, nos contornos do perfil da barra, a temperatura é $0 \text{ }^\circ\text{C}$, o que atende às condições de contorno previamente definidas, representadas pelas Equações 5.2 e 5.3. Observa-se também que o resfriamento se dá dos extremos para o centro da barra.

O aprendiz poderá adotar outras propriedades termofísicas, devendo alterar os dados de entrada e gerar um novo conjunto de gráficos. Isto permite ao aluno analisar quantitativamente a velocidade de resfriamento de diferentes materiais e comparar os respectivos perfis de distribuição de temperatura, associados aos diferentes materiais adotados. Dessa forma, o aprendiz poderá adquirir uma concepção mais genérica do efeito da inércia térmica.

Utiliza-se a mesma abordagem na análise do resfriamento de um determinado ponto do domínio, gerando-se gráficos da temperatura em função do tempo, como na Figura 34.

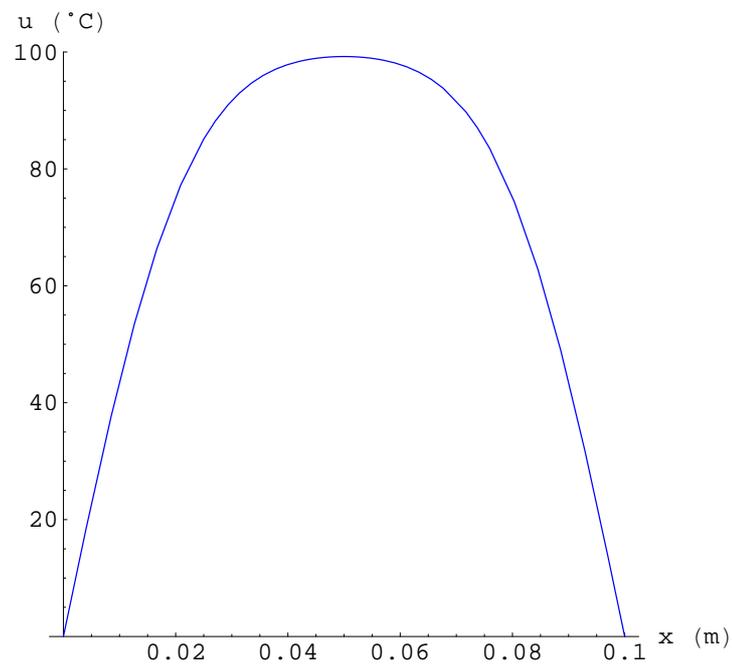


Figura 33: Perfil de temperatura no resfriamento de uma barra de *epoxy*, de comprimento $L = 0,1m$, para o instante $t = 600s$

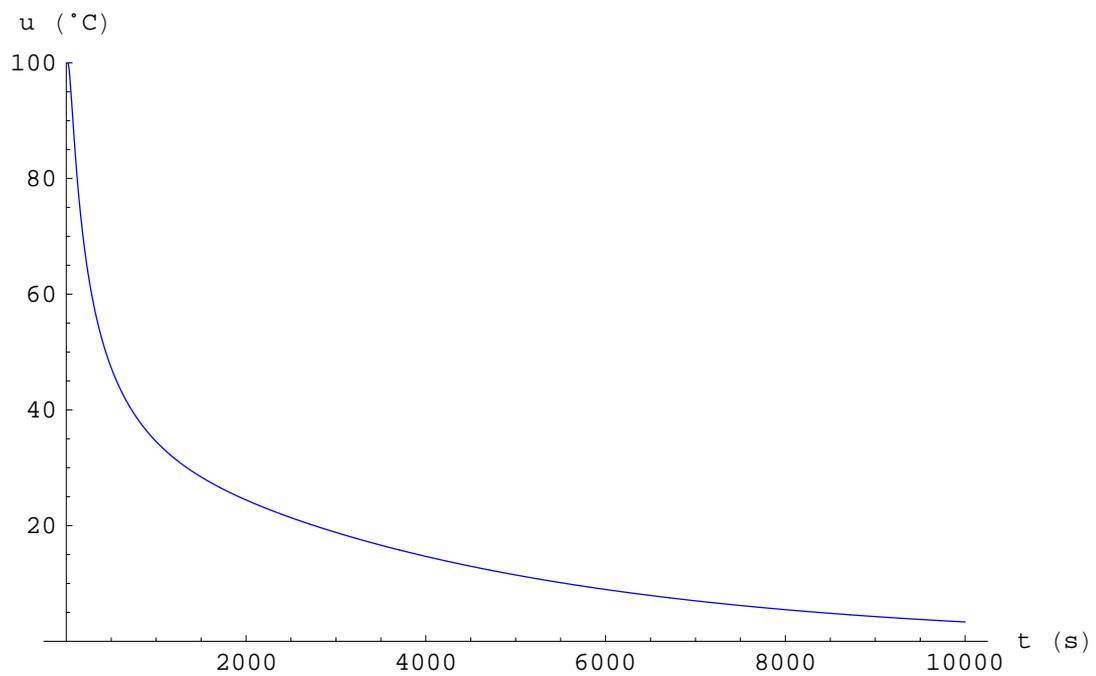


Figura 34: Curva de resfriamento da barra de *epoxy* para a posição $x = 0,01m$

6.5 Análise dos Resultados Numéricos

Para uma análise unificada do comportamento das taxas de convergência das soluções obtidas pelos três métodos, o ambiente oferece meios para o aluno gerar tabelas onde apresentam-se os valores das temperaturas e o erro relativo. Através dessas tabelas, o aprendiz pode comparar os algoritmos significativos coincidentes nos valores numéricos das soluções, observando sempre o erro relativo percentual (ERP). A Tabela 2 abaixo é um exemplo, onde expressa-se o valor da temperatura, em °C, calculado através dos três métodos apresentados, com 5 dígitos convergidos.

Tabela 2: Exemplo de tabela gerada pelo ambiente, na qual confrontam-se os três métodos de resolução

i	x	Sep. Var.	Ëuler	Crank-Nic.	ERP 1 (%)	ERP 2 (%)
1	0.01	16.1970	16.0010	16.1872	1.21021	0.0604302
2	0.02	30.8001	30.4300	30.7765	1.20167	0.0768405
3	0.03	42.3784	41.8737	42.3373	1.19110	0.0971360
4	0.04	49.8052	49.2162	49.7486	1.18254	0.1135650
5	0.05	52.3628	51.7453	52.3001	1.17927	0.1198420
6	0.06	49.8052	49.2162	49.7486	1.18254	0.1135650
7	0.07	42.3784	41.8737	42.3373	1.19110	0.0971360
8	0.08	30.8001	30.4300	30.7765	1.20167	0.0768405
9	0.09	16.1970	16.0010	16.1872	1.21021	0.0604302

Nos algoritmos de diferenças finitas implementados, sugere-se ao aprendiz, numa fase inicial de contato com o método de resolução, adotar os seguintes valores de entrada de dados: incremento temporal $\Delta t = 20$ segundos, tempo total de observação $t_N = 10.000$ segundos e o número de nós que fracionam o domínio $M = 10$ nós.

Assim, na primeira coluna da tabela, i representa os nós de 1 a 9, enquanto x , na segunda coluna, expressa a coordenada espacial correspondente, medida em metros. As três colunas seguintes apresentam os valores da temperatura calculados pelos métodos de separação de variáveis, Ëuler e Crank-Nicolson, respectivamente. Finalmente, as duas últimas colunas contemplam o erro relativo percentual para as soluções obtidas pelos métodos de diferenças finitas, adotando-se a solução analítica do método de separação de variáveis como *benchmark*. Observa-se, no exemplo em análise, que o método de Crank-Nicolson apresentou melhor convergência que o método de Ëuler, como era esperado.

O aprendiz também pode analisar a solução analítica, variando-se o número de termos da série infinita (k). Isto possibilita se obterem precisões variadas para a solução, o que pode ser observado através das Tabelas 3 e 4 a seguir, as quais podem ser geradas pelo

aluno no ambiente computacional de aprendizagem.

Tabela 3: Tabela para análise da convergência da solução analítica, variando-se o número de termos da série, para $t = 50$ segundos

$x \setminus k$	5	10	15	20	25	30	35
0.01	88.2967	97.9457	95.6280	95.4325	95.4495	95.4500	95.4500
0.02	110.0440	97.5314	100.2180	99.9711	99.9943	99.9936	99.9937
0.03	94.7746	102.0590	100.1070	99.9782	99.9997	100.0000	100.0000
0.04	97.2828	98.1707	99.9292	99.9795	99.9998	100.0000	100.0000
0.05	106.4880	101.7590	99.8461	99.9800	100.0000	100.0000	100.0000
0.06	97.2828	98.1707	99.9292	99.9795	99.9998	100.0000	100.0000
0.07	94.7746	102.0590	100.1070	99.9782	99.9997	100.0000	100.0000
0.08	110.0440	97.5314	100.2180	99.9711	99.9943	99.9936	99.9937
0.09	88.2967	97.9457	95.6280	95.4325	95.4495	95.4500	95.4500

No caso da Tabela 3, nota-se que o valor da temperatura nos pontos da barra, no instante $t = 50$ segundos, converge com 4 algarismos significativos para $k = 25$. Também observa-se, neste caso, que a temperatura da barra está muito próxima da condição inicial, o que caracteriza um tempo curto para o processo de resfriamento.

Já na Tabela 4, sendo o tempo escolhido de 10.000 segundos, o valores da temperatura são de ordem de magnitude maior que o do tempo adotado na Tabela 3. Isto faz com que, ao se calcular termos subsequentes da série de autofunções, a contribuição numérica do termo exponencial n cause maior influência no cálculo da temperatura. Neste caso, consegue-se 6 dígitos significativos com apenas 3 termos na série.

Tabela 4: Tabela para análise da convergência da solução analítica, variando-se o número de termos da série, para $t = 10.000$ segundos

$x \setminus k$	3	6	9	12	15	18	21
0.01	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667
0.02	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673
0.03	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553
0.04	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920
0.05	10.79770	10.79770	10.79770	10.79770	10.79770	10.79770	10.79770
0.06	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920	10.26920
0.07	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553	8.73553
0.08	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673	6.34673
0.09	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667	3.33667

Para se promover o aprendizado autônomo, no caso dos métodos de diferenças finitas, o ambiente permite ao aprendiz variar o número de nós no domínio e o valor da marcha de incremento temporal, possibilitando se observar a estabilidade e taxa de convergência

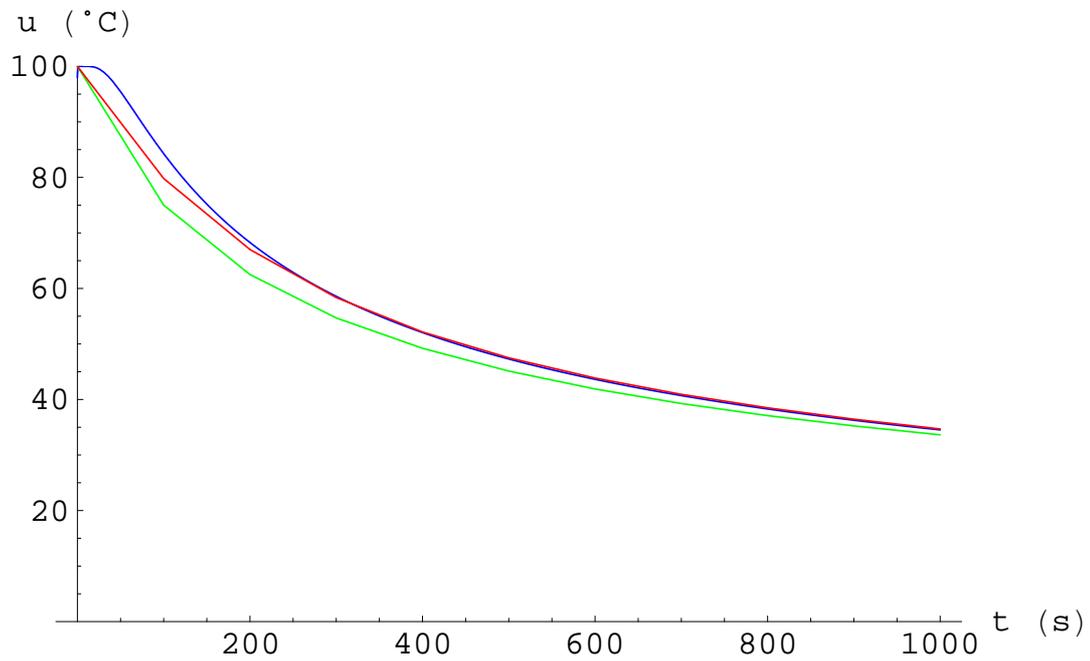


Figura 35: Gráfico comparativo dos métodos de Euler (em verde) e Crank-Nicolson (em vermelho) com o método de separação de variáveis (em azul), apresentando-se o efeito do resfriamento em $x = 0,01$ metros, para uma malha com 10 nós e $p = 0,25$

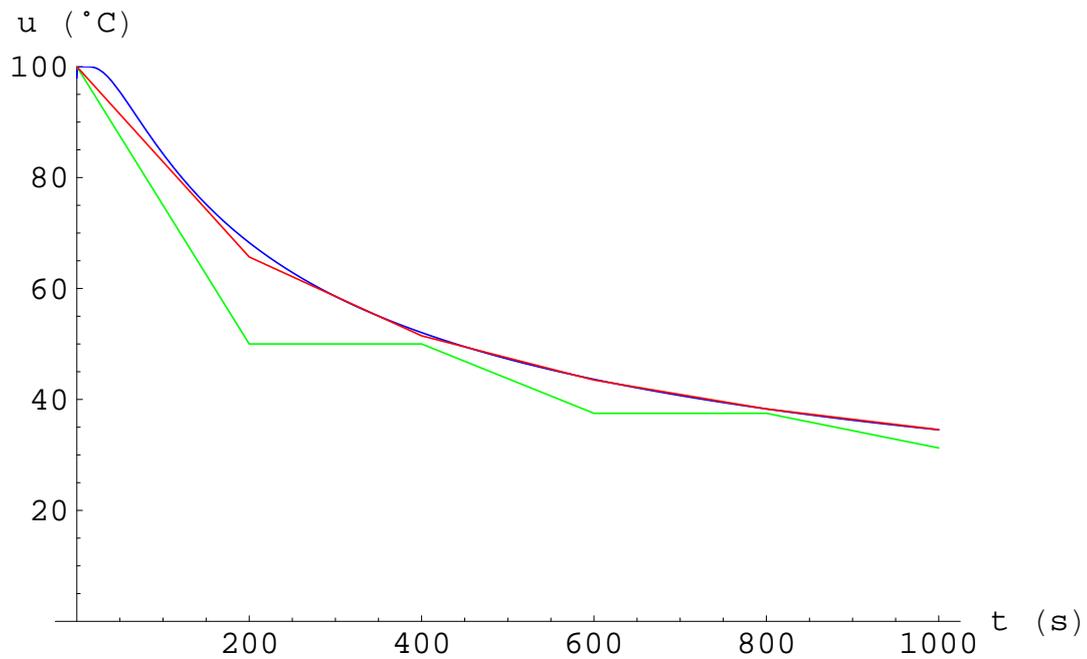


Figura 36: Gráfico comparativo dos métodos de Euler (em verde) e Crank-Nicolson (em vermelho) com o método de separação de variáveis (em azul), apresentando-se o efeito do resfriamento em $x = 0,01$ metros, para uma malha com 10 nós e $p = 0,50$

numéricas dos métodos numéricos adotados. A Figura 35, gerada pelo ambiente computacional, ilustra uma comparação dos métodos no ponto $x = 0,01$ metros, para uma malha com 10 nós e $p = 0,25$.

Analogamente, a Figura 36 faz a mesma comparação, desta vez com $p = 0,50$. Assim, o aprendiz poderá comprovar visualmente, através da variação do incremento temporal, fator influente no valor numérico do parâmetro p , que o método de Crank-Nicolson é mais estável em relação ao método de Euler, o que era esperado.

Na prática, a informação expressa na forma estática não permitiria ao aprendiz ter contato com outras realidades físicas ou análise numérica, agora construídas via a variação paramétrica nos dados de entrada do ambiente de aprendizagem. Esta metodologia ressalta, assim, a valorização do aprendizado autônomo.

6.6 Considerações Finais

O ambiente computacional de aprendizagem desenvolvido oferece recursos para que o aluno construa o ciclo de aprendizado, segundo um procedimento sistemático e interativo, abordando-se fenomenologia física, conceitos, formulação e solução matemáticas de equações diferenciais parciais do tipo parabólica. As tabelas disponibilizadas permitem o estudo da convergência numérica dos resultados obtidos no cálculo da temperatura, favorecendo a análise crítica da precisão dos resultados. Os gráficos que exibem as distribuições dos perfis de temperatura possibilitam a análise física do fenômeno do resfriamento.

Numa fase posterior, o aprendiz pode estabelecer variações paramétricas nos dados de entrada para analisar novas situações físicas e matemáticas relacionadas ao aprendizado em construção. Assim, tem-se acesso a diferentes representações do mesmo problema, possibilitando a análise crítica do comportamento da estabilidade e convergência dos métodos.

Por se tratar de um ambiente de aprendizagem construcionista, enfatizou-se a autonomia do aprendiz no processo de construção do conhecimento. Para isto, utilizou-se a teoria da aprendizagem significativa de duas maneiras: através da apresentação de mapas conceituais sobre o assunto abordado, e da diferenciação progressiva do texto didático e dos algoritmos matemáticos.

O papel do professor, por sua vez, passa a ser também o de orientador, facilitador e/ou mediador. Caso seja de seu interesse, os algoritmos podem ser matematicamente

adaptados para resolver outros problemas ou outras variantes do método de diferenças finitas, expandindo assim a abrangência temática da disciplina cálculo numérico e visando aplicações em cursos específicos da graduação ou pós-graduação.

A escolha do *Mathematica* para a implementação do ambiente computacional de aprendizagem foi motivada por uma análise feita por Steinhilber (2004), o qual fez um comparativo entre vários SCS disponíveis, apontando algumas vantagens daquele sobre os demais. Embora o *Mathematica* seja um *software* comercial, ressalta-se que, assim como ocorre com outros tipos de *software*, a tendência no futuro é que os SCS livres (DOMINGUES; JUNIOR, 2003) incorporem todas as funcionalidades disponíveis nos SCS comerciais, podendo serem perfeitamente utilizados no desenvolvimento de um ambiente como este.

O ambiente desenvolvido também pode ser utilizado no ensino a distância, havendo duas maneiras de fazê-lo. Na primeira, os *notebooks* são disponibilizados numa plataforma para gerenciamento de conteúdos de EAD, tal como o Teleduc, desenvolvido pelo Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED), da Unicamp. Para isso, é necessário que o aluno instale em seu computador o *MathReader*, um produto gratuito para execução de *notebooks*. Embora simule o *Mathematica*, a desvantagem dessa modalidade é que o *MathReader* não é capaz de realizar cálculos, permitindo apenas a visualização dos gráficos, animações e resultados numéricos previamente processados nos *notebooks*.

Uma outra forma de se utilizar o ambiente desenvolvido no ensino a distância é convertendo, através do *Mathematica*, os *notebooks* em páginas HTML. Deve-se então incluir nestas páginas alguns comandos escritos em *Mathematica Server Pages* (MSP), linguagem baseada na tecnologia Java que permite a comunicação de um cliente com um servidor. Em seguida, disponibilizam-se as páginas em um servidor *web*, o qual deverá ter instalado o *webMathematica*, produto que permitirá a comunicação daquelas páginas com o *Mathematica* através da Internet. Mais detalhes sobre *MathReader* e *webMathematica* podem ser encontrados no Apêndice A.

No próximo capítulo, apresentam-se as conclusões, contribuições e direcionamentos para trabalhos futuros.

7 Conclusões

Nos últimos anos, o ensino de métodos da matemática computacional tem sido alvo de diversos trabalhos de pesquisa. O contexto educacional caracterizado no Capítulo 1 sugere a necessidade de ferramentas capazes de auxiliarem o processo de ensino-aprendizagem de tais métodos, tanto do ponto de vista do professor quanto do aluno, bem como se adequarem às novas tecnologias de informação e comunicação.

De acordo com a revisão de literatura realizada, alguns trabalhos utilizaram os recursos de manipulação simbólica e de visualização gráfica dos SCS como ferramenta de apoio ao ensino de Matemática no nível superior (SILVEIRA, 1998; ABUDIAB, 2001; LIMA; LIMA, 2002). Outros desenvolveram tutoriais eletrônicos em SCS para enfatizar o relacionamento entre a teoria e os algoritmos matemáticos (SIT, 1997; PINTO, 2002; ROCHA et al., 2004).

Alguns trabalhos focaram o ensino da Matemática em nível superior como um todo (SILVEIRA, 1998; LIMA; LIMA, 2002), enquanto outros concentraram-se apenas nos aspectos do ensino de equações diferenciais ordinárias (SIT, 1997; ABUDIAB, 2001) ou parciais (PINTO, 2002; ROCHA et al., 2004).

Em nenhum destes trabalhos houve ênfase no ensino dos métodos puramente numéricos para equações diferenciais parciais, assunto que tradicionalmente coloca barreiras na aprendizagem. Ressalta-se também que a maioria deles utilizaram visões pedagógicas próprias, sem a fundamentação de uma teoria de aprendizagem.

Assim, desenvolveu-se um ambiente computacional construcionista para a aprendizagem de métodos analítico e numérico para resolução de equações diferenciais parciais do tipo parabólica. Utilizou-se Myers (1971) como base do conteúdo pedagógico e a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1968) para organizar a apresentação deste conteúdo.

O ambiente foi implementado no *Mathematica* e, portanto, conta com recursos de manipulação simbólica e de visualização gráfica. Isto torna possível ao aluno desenvolver e

utilizar a solução analítica, obtida pelo método de separação de variáveis, para interpretar e analisar, através de gráficos e animações, o fenômeno físico em questão.

Além disso, o ambiente também proporciona ao aluno meios de calcular a solução numérica interativamente, através dos métodos de diferenças finitas de Euler e Crank-Nicolson, visualizando passo-a-passo os valores da função na malha e comparando tais valores com os resultados numéricos calculados a partir da solução analítica.

Com relação à análise do comportamento da precisão, estabilidade e convergência dos métodos, o ambiente fornece ao aluno vários caminhos para a construção da aprendizagem que permitem analisar estes efeitos através da visualização de gráficos e tabelas com resultados numéricos. Assim, o ambiente de aprendizagem mostra-se como uma ferramenta onde o aluno terá acesso rápido e dinâmico para proceder a uma análise numérica personalizada do comportamento dos métodos, podendo trabalhar seu próprio aprendizado.

Do ponto de vista fenomenológico, o ambiente permite visualizar, no caso do problema da condução de calor, o processo de resfriamento de uma barra, analisando-se a evolução de perfis de temperatura.

Esse conjunto de características do ambiente computacional desenvolvido consiste numa das principais contribuições deste trabalho. Além disso, os seguintes artigos foram publicados a partir dos resultados desta dissertação:

- *Ausubel's Theory in the Computer Aided Learning of Numerical Calculus*
22nd ICDE World Conference on Distance Education, Rio de Janeiro, Setembro 2006.
- *Condução de Calor e Métodos Numéricos Trabalhados via Programação Simbólica e Teoria de Ausubel*
XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física, Rio de Janeiro, Janeiro 2005.
- *Numerical Methods in Heat Transfer Using Symbolic Computation and Ausubel's Meaningful Learning*
XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2004), Recife, Novembro 2004.
- *Programação Simbólica e Teoria de Ausubel no Aprendizado de Métodos Numéricos*
World Congress on Engineering and Technology Education (WCETE 2004), Santos, Março 2004.

Deve-se enfatizar que esse ambiente consiste em um protótipo que deva ser testado em sala-de-aula, avaliado e adaptado a metodologias de ensino. Assim, sugere-se a aplicação do ambiente computacional de aprendizagem num semestre letivo, em disciplinas de cálculo numérico, transferência de calor e equivalentes, para se avaliar o processo de aprendizagem dos alunos e promover possíveis alterações no mesmo.

Como prosseguimento do trabalho, pretende-se desenvolver um *framework* para se executar os *notebooks* em dispositivos móveis, de forma que os alunos possam acessar o ambiente computacional de aprendizagem dentro da sala-de-aula, por exemplo, utilizando seus próprios telefones celulares. O *framework* deverá permitir que o *notebook* acesse, através de GPRS (*General Packet Radio Service*) ou WAP (*Wireless Application Protocol*), um servidor conectado à Internet que possua o *webMathematica* instalado.

Os métodos abordados pelo ambiente computacional de aprendizagem também podem ser utilizados para se resolver equações hiperbólicas. Assim, ainda como trabalho futuro, o conteúdo didático do ambiente será expandido, abordando-se problemas de outras áreas das ciências e engenharias, tais como eletromagnetismo (BARKESHLI; VOLAKIS, 2004a, 2004b; ANISEROWICZ, 2004). Sugere-se também aplicar a presente metodologia em disciplinas do ensino básico.

Finalmente, um outro desafio a ser enfrentado é definir estratégias para se tentar quebrar os paradigmas do ensino tradicional em sala-de-aula, introduzindo junto aos professores o uso de recursos como os apresentados neste ambiente computacional.

Referências

- ABUDIAB, M. The impact of technology on teaching an ordinary differential equations course. *The Journal of Computing in Small Colleges*, v. 16, p. 7–18, Março 2001.
- ALPERT, D. The PLATO IV system in use: a progress report. In: _____. *Computers in education*. Amsterdam: [s.n.], 1975.
- ANDRADE, C. R.; ZAPAROLI, E. L. Condução de calor bidimensional com condutividade térmica dependente da temperatura. In: *Anais do VIII Encontro de Iniciação Científica e Pós-Graduação do ITA*. São José dos Campos: [s.n.], 2002. p. 61–66.
- ANDRADE, F. E. de. *Solução de equações diferenciais acopladas pela técnica de transformada integral e computação simbólica*. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Dezembro 1996.
- ANISEROWICZ, K. Comparison of different numerical methods for solving boundary-value problems in electromagnetics. *IEEE Transactions on Education*, v. 47, n. 2, p. 241–246, Maio 2004.
- ARAÚJO, R. C. *Arquitetura distribuída para desenvolvimento de aplicações de educação a distância*. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Junho 2000.
- ARNOLD, F. J.; PELA, C. A. Simulação computacional de campos ultra-sônicos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 3, p. 223–231, Setembro 2004.
- ARPACI, V. S. *Conduction heat transfer*. USA: Addison-Wesley Publishing Corporation, 1966.
- AUSSERHOFER, A. Web-based teaching and learning: a panacea? *IEEE Communications Magazine*, v. 37, n. 3, p. 92–96, Março 1999.
- AUSUBEL, D. P. *Educational psychology: a cognitive view*. 1. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- BARANAUSKAS, M. C. C. Procedimento, função, objeto ou lógica? Linguagens de programação vistas pelos seus paradigmas. In: _____. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. 2. ed. Campinas: NIED, 1998. cap. 3, p. 55–76.
- BARKEHLI, K.; VOLAKIS, J. L. Electromagnetic scattering from thin strips. i. analytical solutions for wide and narrow strips. *IEEE Transactions on Education*, v. 47, n. 1, p. 100–106, Fevereiro 2004.

- BARKESHLI, K.; VOLAKIS, J. L. Electromagnetic scattering from thin strips. ii. numerical solution for strips of arbitrary size. *IEEE Transactions on Education*, v. 47, n. 1, p. 107–113, Fevereiro 2004.
- BERRY, F. C.; DIPIAZZA, P. S.; SAUER, S. L. The future of electrical and computer engineering education. *IEEE Transactions on Education*, v. 46, n. 4, p. 467–476, Novembro 2003.
- BLUM, M. A. F. *Construção de ambiente de aprendizagem para a disciplina refrigeração utilizando programação simbólica*. Dissertação (Mestrado Integrado Profissional em Computação) — Universidade Estadual do Ceará e Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará, Fortaleza, Março 2003.
- BOLTAKS, B. I. *Diffusion in semiconductors*. London: Infosearch, 1963.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary differential equations and boundary value problems*. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- CAMPOS, G. H. B.; CAMPOS, F. C. A. Qualidade do software educacional. In: _____. *Qualidade de software: teoria e prática*. 1. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2001. cap. 6, p. 124–130.
- CARMO FILHO, G. P. do et al. Numerical methods in heat transfer using symbolic computation and Ausubel's meaningful learning. In: *Proceedings of XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*. Recife: [s.n.], 2004.
- CARMO FILHO, G. P. do et al. Ausubel's theory in the computer aided learning of numerical calculus. In: *Proceedings of 22nd ICDE World Conference on Distance Education*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2006.
- CARMO FILHO, G. P. do; RIBEIRO, J. W.; GONCALVES, D. de H. Programação simbólica e teoria de Ausubel no aprendizado de métodos numéricos. In: *Proceedings of World Congress on Engineering and Technology Education (WCETE 2004)*. Santos: [s.n.], 2004. p. 1590–1594.
- CARNAHAN, B.; LUTHER, H. A.; WILKES, J. O. *Applied numerical methods*. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- CARVALHO, A. C. B. D. de; TORRES, J. B. O uso da teoria da aprendizagem significativa no ensino de engenharia. In: *Proceedings of World Congress on Engineering and Technology Education (WCETE 2004)*. Santos: [s.n.], 2004. p. 1068–1070.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1988.
- CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. *Cálculo numérico computacional: teoria e prática*. 3. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2000.
- CRANK, J. *The mathematics of diffusion*. 2. ed. London: Oxford University Press, 1975.

- CUNHA, F. G. M. *Abordagem analítico-numérica da transferência de calor e massa com efeito da pressão*. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Abril 2002.
- DEUS, J. D. de et al. *Introdução à física*. 2. ed. Lisboa: McGraw-Hill, 2000.
- DOMINGUES, M. O.; JUNIOR, O. M. Introdução a programas físico-matemáticos livres. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, n. 2, p. 148–156, Junho 2003.
- DOMNISORU, C. Using MATHCAD in teaching power engineering. *IEEE Transactions on Education*, v. 48, n. 1, p. 157–161, Fevereiro 2005.
- EVANS, G. A.; BLACKLEDGE, J. M.; YARDLEY, P. D. *Analytic methods for partial differential equations*. London: Springer-Verlag, 2000. (Springer undergraduate mathematics series).
- FARLOW, S. J. *Partial differential equations for scientists and engineers*. New York: John Wiley & Sons, 1982.
- FERRAZ, C. A. G. et al. Co-autoria distribuída de cursos na internet. In: *Anais do X Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Curitiba: [s.n.], 1999. p. 256–263.
- FIOLHAIS, C.; TRINDADE, J. Física no computador: o computador como uma ferramenta no ensino e na aprendizagem das ciências físicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, n. 3, p. 259–272, Setembro 2003.
- HARRIS, D. A. Online distance education in the United States. *IEEE Communications Magazine*, v. 37, n. 3, p. 87–91, Março 1999.
- HUANG, H.-C.; USMANI, A. S. *Finite element analysis for heat transfer: theory and software*. London: Springer-Verlag, 1994.
- IEEE Learning Technology Standards Committee (LTSC) / P1484.3 Glossary Working Group. *Draft Standard for Information Technology – Learning Technology – Glossary*. [S.l.], 2001. Disponível em: <<http://ltsc.ieee.org/doc/wg3/Glossary-20010309.doc>>.
- JACOBS, M. H. *Diffusion processes*. New York: Springer-Verlag, 1967.
- KAHRIMANIAN, H. G. *Analytic differentiation by a digital computer*. Dissertação (M.A.) — Temple University, Philadelphia, Maio 1953.
- KNEZEK, G. A.; RACHLIN, S. L.; SCANNELL, P. A taxonomy for educational computing. *Educational Technology*, v. 28, n. 4, p. 15–19, Março 1988.
- KUNZ, K. S.; LUEBBERS, R. J. *The finite difference time domain method for electromagnetics*. Boca Raton: CRC Press, 1993.
- LABURU, C. E. Problemas abertos e seus problemas no laboratório de física: uma alternativa dialética que passa pelo discursivo multivocal e univocal. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 8, n. 3, Dezembro 2003.
- LEWIS, R. W.; FERGUSON, W. J. The effect of temperature and total gas pressure on the moisture content in a capillary porous body. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 29, p. 357–369, 1990.

- LIMA, L. A.; LIMA, A. G. B. O uso do software Mathematica nos cursos de graduação em engenharia mecânica. In: *7th International Conference on Engineering and Technology Education*. Santos: [s.n.], 2002.
- MAGALHAES, D. R.; CARPINTEIRO, O. A. S. Um modelo computacional de avaliação de alunos. In: *Proceedings of World Congress on Engineering and Technology Education (WCETE 2004)*. Santos: [s.n.], 2004. p. 658–661.
- MARCO, F. F. *Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Fevereiro 2004.
- MCDERMOTT, L. C. What we teach and what is learned - closing the gap. *American Journal of Physics*, v. 59, n. 4, p. 301–315, Abril 1991.
- MIKHAILOV, M. D.; OZISIK, M. N. *Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion*. New York: Wiley-Interscience & Sons, 1984.
- MISKULIN, R. G. S. *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino-aprendizagem da geometria*. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.
- MOLER, C. B. *Numerical computing with Matlab*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- MOREIRA, M. A. *Teorias de aprendizagem*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999.
- MOREIRA, M. A.; BUCHWEITZ, B. *Novas estratégias de ensino e aprendizagem: os mapas conceituais e o Vê epistemológico*. Lisboa: Plátano, 1993.
- MYERS, G. E. *Analytical methods in conduction heat transfer*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1971.
- NOLAN, J. F. *Analytic differentiation on a digital computer*. Dissertação (M.A.) — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Maio 1953.
- OEIRAS, J. Y. Y. *ACEL - Ambiente computacional auxiliar ao ensino/aprendizagem a distância de línguas*. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Julho 1998.
- OPENCOURSEWARE. *Numerical Methods for Partial Differential Equations (SMA 5212)*. Massachusetts Institute of Technology, Spring 2003. Disponível em: <<http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Aeronautics-and-Astronautics/16-920JNumerical-Methods-for-Partial-Differential-EquationsSpring2003/CourseHome>>.
- OZISIK, M. N. *Heat conduction*. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- OZISIK, M. N. *Heat transfer: a basic approach*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- PAPERT, S. *Constructionism: a new opportunity for elementary science education*. Cambridge: [s.n.], 1986. A proposal to the National Science Foundation, Massachusetts Institute of Technology, Media Laboratory, Epistemology and Learning Group.

- PATANKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- PIAGET, J. *Psicologia da inteligência*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1977.
- PINTO, M. P. *Uma abordagem de aprendizado assistido por computador utilizando programação híbrida simbólico-numérica*. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Junho 2002.
- RIBEIRO, J. W.; COTTA, R. M. On the solution of non-linear drying problems in capillary porous media through integral transformation of Luikov equations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 38, p. 1001–1020, 1995.
- RIBEIRO, J. W.; DUARTE, J. ao B. F.; ANDRADE, F. E. Computação híbrida aplicada a modelagem avançada e educação. In: *II Escola de Informática da SBC - Edição Nordeste (EINE 99)*. Fortaleza: [s.n.], 1999. p. 72–90.
- ROCHA, A. A. et al. Análise da condução de calor transiente em um cilindro imerso em fluido por um ambiente computacional interativo usando o maple. In: *Proceedings of World Congress on Engineering and Technology Education (WCETE 2004)*. Santos: [s.n.], 2004. p. 1455–1459.
- SANTOS, N. Estado da arte em espaços virtuais de ensino e aprendizagem. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, n. 4, p. 75–94, Abril 1999.
- SCHLEMMER, E. Metodologias para educação a distância no contexto da formação de comunidades virtuais de aprendizagem. In: _____. *Ambientes virtuais de aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2005. cap. 2, p. 29–49.
- SHAMPINE, L. F.; GLADWELL, I. Teaching numerical methods in ODE courses. In: _____. *Revolutions in differential equations: exploring odes with modern technology*. [S.l.]: The Mathematical Association of America, 1999. (MAA Notes, 50), p. 67–78.
- SILVEIRA, F. A. R. *Utilização do Mathematica como ferramenta de apoio ao ensino de matemática*. Dissertação (Mestrado em Informática) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Julho 1998.
- SIQUEIRA, V. L. A. *Representações em educação online: um estudo das 'falas' na perspectiva dos sujeitos aprendizes*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade de Brasília, Brasília, 2003.
- SIT, W. Y. Mathematica notebooks for a conventional differential equations course. *Journal of Symbolic Computation*, v. 23, n. 5/6, p. 589–623, Maio/Junho 1997.
- SKINNER, B. F. *Tecnologia do ensino*. São Paulo: Herder, 1972.
- SOUSA, F. E. E. de. *Formação contínua e mediação pedagógica no ensino de matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Agosto 2005.
- STAFFORD, T. F. Understanding motivations for internet use in distance education. *IEEE Transactions on Education*, v. 48, n. 2, p. 301–306, Maio 2005.

STEINHAUS, S. *Comparison of mathematical programs for data analysis*. Munique, Setembro 2004. Disponível em: <<http://www.scientificweb.de/ncrunch>>.

SUPPES, P. Computer-assisted instruction at Stanford. In: *Man and computer: Proceedings of international conference, Bordeaux 1970*. Basel: Karger, 1972. p. 298–330.

SUPPES, P.; SMITH, R.; BEAR, M. *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1975*. California, 1975.

TAYLOR, R. P. (Ed.). *The computer in the school: tutor, tool, tutee*. New York: Teachers College Press, 1980.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. In: _____. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. 2. ed. Campinas: NIED, 1998. cap. 1, p. 1–27.

VALENTE, J. A. Por quê o computador na educação? In: _____. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. 2. ed. Campinas: NIED, 1998. cap. 2, p. 29–53.

WOLFRAM, S. *The Mathematica book*. 5. ed. Champaign: Wolfram Media, 2003.

APÊNDICE A – Breve Descrição do Mathematica

O *Mathematica* é um sistema modular composto de duas partes: o *kernel*, que realiza todo o processamento matemático, e o *front end*, responsável pela interação com o usuário.

O seu tipo mais comum de *front end* é baseado em documentos interativos conhecidos como *notebooks*, que mesclam entradas e saídas do *Mathematica* com textos, gráficos, palheta de cores e outros materiais. Esse tipo de *front end* engloba vários menus e ferramentas gráficas para a criação e execução de *notebooks*, bem como para o envio e recebimento de dados do *kernel* (WOLFRAM, 2003).

Os *notebooks*, por sua vez, podem ser utilizados tanto para fazer cálculos como para apresentar ou publicar resultados, possuindo qualidade de imprensa e possibilidade de exportação para diversos formatos, tais como TeX e HTML. Os gráficos, em particular, são exportáveis para pelo menos oito formatos (LIMA; LIMA, 2002; WOLFRAM, 2003).

Em alguns casos, a sofisticação dos *notebooks* talvez não seja necessária e, em vez disso, pode-se querer interagir diretamente com o *kernel*. Neste caso, é possível se utilizar um *front end* baseado em texto, no qual os comandos digitados vão diretamente para o *kernel*.

Um aspecto importante do *Mathematica* é a sua capacidade de interagir também com outros programas. Isto é possível através do *MathLink*, um protocolo padronizado para comunicação bidirecional entre programas externos e o *kernel* do *Mathematica* (WOLFRAM, 2003).

Dentre os vários programas compatíveis com o *MathLink*, alguns podem ser configurados para funcionar perfeitamente como um *front end* do *Mathematica*. Muitas vezes, tais *front ends* fornecem suas próprias interfaces com o usuário, tratando o *kernel* do *Mathematica* meramente como um motor computacional embutido (WOLFRAM, 2003). Além disso, pode-se utilizar o *Mathematica* também para controlar equipamentos e processos

industriais e de automação (LIMA; LIMA, 2002).

Uma consequência da estrutura modular do *Mathematica* é que seus componentes podem ser executados em diferentes computadores. Assim, por exemplo, pode-se executar o *front end* em um computador enquanto o *kernel* é executado em um outro computador separado. A comunicação entre o *kernel* e o *front end* é tratada pelo *MathLink*, usando qualquer mecanismo de rede disponível. A estrutura do sistema *Mathematica* está representada pela Figura 37.

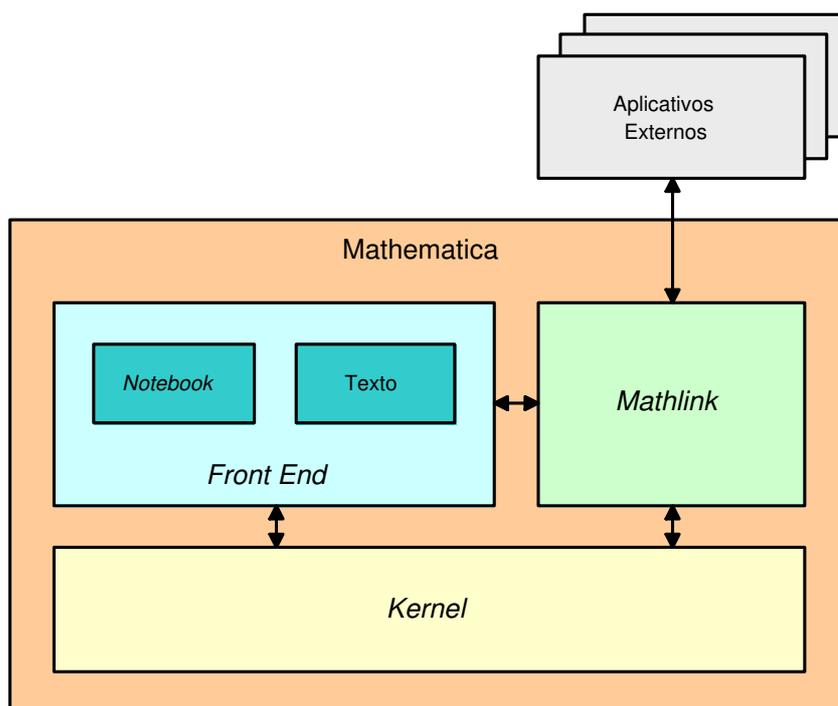


Figura 37: Estrutura do sistema *Mathematica*

Uma das características mais importantes do *Mathematica* é a possibilidade de se trabalhar e criar materiais sem se preocupar com as diferenças específicas entre os vários tipos de sistemas de computação.

O *Mathematica* possui versões para diferentes plataformas de *hardware* e sistemas operacionais, dentre eles: IBM-PC, Macintosh, Sparc, Risc, MS-Windows, Linux e Unix (ANDRADE, 1996). A fim de se adaptar a determinados sistemas de computação, a interface com o usuário do *Mathematica* torna-se, no mínimo, levemente diferente.

Finalmente, o *Mathematica* conta particularmente com um grande número de funções matemáticas já implementadas, que envolvem recursos de processamento simbólico, numérico e gráfico, referentes a cálculo diferencial e integral, cálculo vetorial, estatística, álgebra linear, equações diferenciais e vários outros tópicos matemáticos de interesse científico nos

níveis de graduação e pós-graduação. Estas funções matemáticas já encontram-se embutidas no *Kernel*, mas novas funções podem ser definidas a partir das já disponíveis. Além disso, o *Mathematica* contém uma ampla biblioteca de códigos computacionais auxiliares, denominados *Packages*, os quais auxiliam na solução de problemas específicos. Para casos excepcionais, outros *Packages* podem ser adquiridos ou mesmo desenvolvidos pelo próprio usuário e incorporados ao *Mathematica* (LIMA; LIMA, 2002; PINTO, 2002).

Pode-se também integrar o *Mathematica* a um *website*, permitindo se utilizar os recursos desse *software* através da Internet. Para isso, necessita-se do *webMathematica*, um produto baseado em duas tecnologias do padrão Java: Java Servlets e JavaServer Pages (JSP). *Servlets* são programas especiais escritos em Java que rodam em um servidor *web* habilitado para Java, o qual normalmente denomina-se ***servlet container***. Há diversos tipos desses *containers* que rodam em vários sistemas operacionais e arquiteturas diferentes. Os *containers* também podem ser integrados a outros servidores *web*, tais como o Apache Web Server.

O *webMathematica* permite que um *site* forneça páginas HTML incrementadas com comandos do *Mathematica*. Quando se requisita uma destas páginas, os comandos do *Mathematica* são avaliados e o resultado computado é colocado na página. Isto é feito através do mecanismo de formatação do padrão Java, o JavaServer Pages, usando-se *tags* especiais.

A tecnologia do *webMathematica* usa o padrão solicitação/resposta adotado pelos servidores *web*. A entrada pode vir de formulários HTML, *applets*, JavaScript e aplicações para *web*. Também é possível se enviar arquivos de dados para um servidor *webMathematica* processar. A saída pode ser de diversos formatos diferentes, tais como HTML, imagens, *notebooks* do *Mathematica*, MathML, SVG, XML, PostScript e PDF.

O *webMathematica* fornece uma ampla biblioteca de comandos para lidar com as diversas maneiras possíveis de se trabalhar com os cálculos do *Mathematica*. Uma parte importante do *webMathematica* é o gerenciador de *kernels*, o qual invoca o *Mathematica* de uma maneira robusta, eficiente e segura. O gerenciador mantém um *pool* com um ou mais *kernels* do *Mathematica* e, assim, pode processar mais de uma requisição de cada vez.

Na Figura 38 a seguir, mostra-se uma visão geral do funcionamento de um *site* do *webMathematica*. Inicialmente, o *browser* envia uma solicitação para o servidor *webMathematica* (1). Este obtém um *kernel* a partir do *pool* (2). O *kernel* é inicializado com os parâmetros de entrada, executa os cálculos e retorna o resultado para o servidor (3).

Em seguida, o servidor *webMathematica* devolve o *kernel* para o *pool* (4). Finalmente, o servidor *webMathematica* devolve o resultado para *browser* (5).

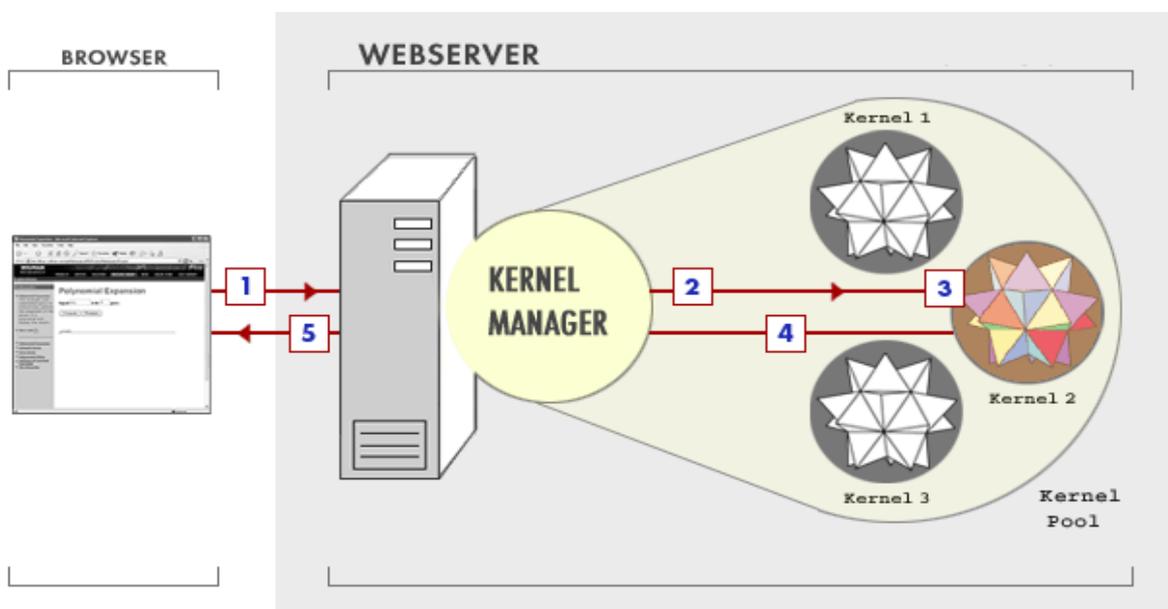


Figura 38: Visão geral do funcionamento do *webMathematica*

O *webMathematica*, no entanto, não está limitado à construção de *sites* que são acessados a partir de um computador pessoal ou de uma estação de trabalho. Devido ao seu projeto aberto, o *webMathematica* também pode ser usado para projetar e servir páginas *web* que usam uma variedade de linguagens XML, bem como ser acessado a partir de outros dispositivos, como mostra a Figura 39 abaixo.



Figura 39: *webMathematica* acessado a partir de um telefone celular

Como exemplo, o *webMathematica* suporta o WML (*Wireless Markup Language*), o formato XML projetado para dispositivos que implementam a especificação WAP (*Wireless Application Protocol*), tais como telefones celulares e *paggers*. As páginas WML são armazenadas em um servidor *web* e acessadas por um *gateway* WAP, o qual situa-se entre os dispositivos móveis e a *World Wide Web*. O *gateway* transfere as páginas de um para

o outro, semelhantemente a um *proxy*, traduzindo-as para um formato adequado aos dispositivos móveis. Este processo é escondido do telefone, de forma que ele pode acessar a página da mesma maneira que um *browser* acessa HTML, usando uma URL.