

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
TELEINFORMÁTICA

Equalização Adaptativa e Autodidata de Canais Lineares e Não-Lineares Utilizando o Algoritmo do Módulo Constante

Autor:

Carlos Alexandre Rolim Fernandes

Orientador:

Prof. Dr. João Cesar M. Mota

Co-orientador:

Prof. Dr. Gérard Favier

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia de Teleinformática**.

Fortaleza – Ceará
Agosto 2005

Aos meus pais e à Aline.

Agradecimentos

EM primeiro lugar gostaria de agradecer profundamente ao prof. João Cesar M. Mota, meu orientador de mestrado, por ter me encaminhado, desde os tempos do PET, a seguir o caminho dos estudos e da dedicação ao trabalho. Seus ensinamentos muito me encorajaram a seguir o caminho da pesquisa científica.

Gostaria de agradecer igualmente ao prof. Gérard Favier, meu orientador na França, por ter me aceitado como estudante de mestrado e por ter auxiliado na realização deste trabalho em parceria entre o DETI-UFC e o laboratório I3S.

Também gostaria de agradecer aos profs. Rodrigo Cavalcante, Charles Casimiro, Ricardo Araújo e Guilherme Barreto por terem aceitado participar da banca julgadora e do exame de qualificação da minha defesa. Os comentários e sugestões realizados foram de grande validade para o desfecho deste trabalho. Gostaria de expressar também meus agradecimentos ao prof. Renato R. Lopes, que veio de Campinas para participar e enriquecer a banca julgadora do meu mestrado.

Expresso meus sinceros agradecimentos também ao Programa Alban¹ e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que investiram em mim e viabilizaram toda a minha trajetória de estudos durante o mestrado.

Agradeço sinceramente, em nome de todos os amigos do Laboratório I3S, ao André de Almeida e ao Alain Kibangou, por todas as importantes sugestões e por terem feito o dia-a-dia no laboratório mais agradável.

Não poderia deixar de agradecer imensamente meu irmão Carlos Estevão Rolim Fernandes por ter sempre me encorajado e ter sido um exemplo para mim, tornado meu caminho profissional muito mais fácil.

Também devo agradecer profundamente o resto de minha família, que sempre me apoiou incondicionalmente nos momentos mais difíceis. Meus sinceros agradecimentos à Mariana, Juliana, Héliida (e o Vinicius também!), às crianças Ana Beatriz e Carlos Arthur, pelos momentos alegres, e em especial à meus pais, Fernando e Cynthia, que me educaram com todo o carinho e me ensinaram a ser quem eu sou.

Meus mais sinceros agradecimentos à pessoa mais importante de minha vida, minha amada namorada e companheira de todos os momentos: Aline. Tenho certeza que a alegria dos momentos juntos foi maior que a saudade da distância. Seu amor me faz mais forte, sem você nada tem sentido.

Finalmente, gostaria de agradecer a DEUS, por toda a inspiração.

¹Com o apoio do Programa Alban, programa de bolsas de alto nível da União Europeia para América Latina, bolsa n^o E04M046916BR

Resumo

ESTE trabalho trata da proposição de algoritmos para equalização cega de canais lineares e não-lineares inspirados no Algoritmo do Módulo Constante (CMA). O CMA funciona de maneira bastante eficiente com constelações nas quais todos os pontos possuem a mesma amplitude, como em modulações do tipo *Phase Shift Keying* (PSK). Entretanto, quando os pontos da constelação podem assumir diferentes valores de amplitudes, como em modulações do tipo *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM), o CMA e seus derivados muitas vezes não funcionam de forma satisfatória. Desta forma, as técnicas aqui propostas são projetadas para melhorar a performance do CMA em termos de velocidade de convergência e precisão, quando operando em sinais transmitidos com diversos módulos, em particular para a modulação QAM. Assim como o CMA, para possuir um bom apelo prático, essas técnicas devem apresentar bom compromisso entre complexidade, robustez e desempenho. Para tanto, as técnicas propostas utilizam o último símbolo decidido para definir uma estimação de raio de referência para a saída do equalizador. De fato, esses algoritmos podem ser vistos como generalizações do CMA e de alguns derivados do CMA para constelações com múltiplos raios.

A proposição de algoritmos do tipo gradiente estocástico é concluída com o desenvolvimento de técnicas originais, baseadas no CMA, para equalização de canais do tipo Wiener, que consiste em um filtro linear com memória, seguido por um filtro não-linear sem memória. As expressões para a adaptação do equalizador são encontradas com o auxílio de uma notação unificada para três diferentes estruturas: i) um filtro de Hammerstein; ii) um filtro de Volterra diagonal; e iii) um filtro de Volterra completo.

Um estudo teórico acerca do comportamento do principal algoritmo proposto, o *Decision Directed Modulus Algorithm* (DDMA) é realizado. São analisadas a convergência e a estabilidade do algoritmo através de uma análise dos pontos de mínimo de sua função custo. Outro objetivo é encontrar o valor teórico do Erro Médio Quadrático Médio em Excesso - *Excess Mean Square Error* (EMSE) fornecido pelo DDMA considerando-se o caso sem ruído. Ao final, é feito um estudo em que se constata que o algoritmo DDMA possui fortes ligações com a solução de Wiener e com o CMA.

Versões normalizadas, bem como versões do tipo *Recursive Least Squares* (RLS), dos algoritmos do tipo gradiente estocástico estudados são também desenvolvidas. Cada família de algoritmos estudada é composta por quatro algoritmos com algumas propriedades interessantes e vantagens sobre as técnicas clássicas, especialmente quando operando em sinais QAM de ordem elevada. Também são desenvolvidas versões normalizadas e do tipo RLS dos algoritmos do tipo CMA estudados para equalização de canais não-lineares.

O comportamento de todas as famílias de algoritmos desenvolvidos é testado através de simulações computacionais, em que é verificado que as técnicas propostas fornecem ganhos significativos em desempenho, em termos de velocidade de convergência e erro residual, em relação às técnicas clássicas.

Resumo

Palavras-Chave: Equalização Cega, Algoritmo do Módulo Constante, Dirigido pela Decisão, Mínimos Quadrados Recursivos, Algoritmos Normalizados, Filtros Não-Lineares.

Abstract

THIS work studies and proposes algorithms to perform blind equalization of linear and nonlinear channels inspired on the Constant Modulus Algorithm (CMA). The CMA works very well for modulations in which all points of the signal constellation have the same radius, like in Phase Shift Keying (PSK) modulations. However, when the constellation points are characterized by multiple radii, like in Quadrature Amplitude Modulation (QAM) signals, the CMA does not work properly in many situations. Thus, the techniques proposed here are designed to improve the performance of the CMA, in terms of speed of convergence and residual error, when working with signals transmitted with multiple magnitude, in particular with QAM signals. As well as for the CMA, these techniques should have a good compromise among performance, complexity and robustness. To do so, the techniques use the last decided symbol to estimate reference radius to the output of the equalizer. In fact, they can be seen as modifications of the CMA and of some of its derivatives for constellations with multiple radii.

The proposition of stochastic gradient algorithms is concluded with the development of new adaptive blind techniques to equalize channels with a Wiener structure. A Wiener filter consists of a linear block with memory followed by a memoryless nonlinearity, by using the CMA. We develop expressions for the adaptation of the equalizer using a unified notation for three different equalizer filter structures: i) a Hammerstein filter, ii) a diagonal Volterra filter and iii) a Volterra filter.

A theoretical analysis of the main proposed technique, the Decision Directed Modulus Algorithm (DDMA), is also done. We study the convergence and the stability of the DDMA by means of an analysis of the minima of the DDM cost function. We also develop an analytic expression for the *Excess Mean Square Error* (EMSE) provided by the DDMA in the noiseless case. Then, we find some interesting relationships among the DDM, the CM and the Wiener cost functions.

We also develop a class of normalized algorithms and a class of Recursive Least Squares (RLS)-type algorithms for blind equalization inspired on the CMA-based techniques studied. Each family is composed of four algorithms with desirable properties and advantages over the original CM algorithms, specially when working with high-level QAM signals. Normalized and RLS techniques for equalization of Wiener channels are also developed.

The behavior of the proposed classes of algorithms discussed is tested by computational simulations. We verify that the proposed techniques provide significative gains in performance, in terms of speed of convergence and residual error, when compared to the classical algorithms.

Keywords: Blind Equalization, Constant Modulus Algorithm, Directed Decisions, Recursive Least Squares, Normalized Algorithms, Nonlinear Filters.

Sumário

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	12
Lista de Abreviações	13
Lista de Símbolos	15
1 Introdução	17
1.1 Divisão do Trabalho	20
2 Filtragem Adaptativa e Equalização de Canais de Comunicação	23
2.1 Alguns Conceitos Importantes	24
2.1.1 Filtros <i>Moving-Average</i> (MA)	24
2.1.2 Modelos Matemáticos	24
2.1.3 O Problema da Equalização	25
2.1.4 <i>Phase Locked Loop</i> e Controle Automático de Ganho	26
2.2 Filtragem Adaptativa Clássica Supervisionada	26
2.2.1 Filtro de Wiener	27
2.2.2 O Algoritmo <i>Least Mean Square</i> - LMS	28
2.2.3 O Algoritmo LMS Normalizado	30
2.2.4 O Algoritmo RLS	31
2.3 Equalização Cega	34
2.3.1 Técnicas de <i>Bussgang</i>	35
2.3.2 Algoritmo de Shalvi-Weinstein - SWA	37
2.4 Equalização de Canais Não-Lineares	38
2.5 Comentários Finais	43
3 O Módulo Dirigido pela Decisão	44
3.1 O Algoritmo do Módulo Constante - CMA	45
3.2 Algumas Técnicas Baseadas em Funções Custo CM Modificadas	46
3.3 O Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão - DDMA	47
3.4 O Algoritmo do Módulo Constante Modificado - MCMA	49
3.5 Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Modificado - MDDMA	50
3.6 Equalização Cega de Canais Não-lineares	52
3.6.1 LMS Não-Linear	54
3.6.2 CMA Não-Linear	55
3.7 Contribuições do Capítulo	56

Sumário

4	Análise Teórica do DDMA	57
4.1	Análise dos Pontos de Mínimo da Função Custo DDM	58
4.2	Análise da Convergência no Espaço do Equalizador	66
4.2.1	Espaço Global <i>versus</i> Espaço do Equalizador	66
4.3	Análise do Erro Quadrático Médio em Excesso	71
4.4	Análise dos Mínimos da Função Custo DDM num Simples Canal AR	73
4.5	Relações Entre os Mínimos de Wiener e do DDM	76
4.6	Contribuições do Capítulo	78
5	Técnicas Normalizadas e do tipo Mínimos Quadrados Recursivos	80
5.1	Abordagem da Normalização do Fator de Passo	80
5.1.1	Algoritmo do Módulo Constante Normalizado - NCMA	81
5.1.2	Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Normalizado - NDDMA	82
5.1.3	Algoritmo do Módulo Constante Modificado Normalizado - NMCMA	83
5.1.4	Relações Entre a Classe de Algoritmos Normalizados e o Algoritmo NLMSDD	85
5.1.5	Equalização de Canais Não-Lineares Utilizando o NCMA	86
5.2	Algoritmos do Tipo RLS	88
5.2.1	Algoritmo do Módulo Constante Recursivo - RCMA	88
5.2.2	Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Recursivo - RDDMA	91
5.2.3	Algoritmo do Módulo Constante Modificado Recursivo - RMCMA	92
5.2.4	Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Modificado Recursivo - RMDDMA	97
5.2.5	Equalização de Canais Não-Lineares Utilizando RCMA	98
5.3	Contribuições do Capítulo	99
6	Simulações Computacionais	101
6.1	Algoritmos do Tipo LMS	102
6.1.1	Abrindo o Olho de um Sinal na Saída de um Canal de Comunicação	102
6.1.2	Simulações Comparativas	103
6.1.3	Simulações incluindo a abordagem Modificada e o DDA	106
6.2	Pontos de Mínimo das Funções Custo DDM e de Wiener	110
6.3	Algoritmos Normalizados	112
6.4	Algoritmos do Tipo RLS	113
6.4.1	Abrindo o Olho de um Sinal na Saída de um Canal de Comunicação	114
6.4.2	Simulações Comparativas	114
6.4.3	Simulações incluindo a abordagem Modificada e o RLSDD	115
6.5	Comparação Entre as Famílias de Algoritmos	119
6.6	Equalização Cega de Canais Não-Lineares	120
7	Conclusões e Perspectivas	125
	Apêndices	128

Sumário

A	Derivação de Funções Escalares em Relação a um Vetor	129
A.1	Definições Básicas	129
A.1.1	Casos Particulares	130
A.2	Gradiente de Funções Escalares Complexas	131
A.2.1	Casos Particulares	131
A.3	Matriz Hessiana	133
B	Número de Pontos de Equilíbrio da Função Custo J'_{DDM} para um Sinal com FDP super-Gaussiana	134
C	Análise do Sinal Algébrico do Numerador da Equação (4.15)	135
D	Matriz Hessiana da Função Custo J'_{DDM} nos Pontos de Equilíbrio	137
E	Lista de Publicações	142
	Bibliografia	143

Lista de Figuras

2.1	Estrutura simplificada do sistema de comunicação linear utilizado.	25
2.2	Estrutura simplificada do sistema de comunicação não-linear empregado utilizando um equalizador do tipo Hammerstein.	39
2.3	Estrutura simplificada do sistema de comunicação não-linear empregado utilizando um equalizador do tipo Volterra.	39
6.4	A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo DDMA.	104
6.5	A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo MDDMA.	105
6.6	Evolução do EQM para o DDMA, o DAMA e o CMA utilizando a modulação 16QAM.	105
6.7	Evolução do EQM para o <i>dual-mode</i> DDMA, o <i>dual-mode</i> DAMA e o CMA utilizando a modulação 64QAM.	107
6.8	Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 16QAM.	108
6.9	Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 64QAM.	108
6.10	Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 16QAM.	109
6.11	Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 64QAM.	109
6.12	Curvas de Nível com os pontos de mínimo do DDM e de Wiener.	110
6.13	Norma quadrática da diferença entre o ponto de mínimo de Wiener e os pontos de mínimo das funções custo DDM e CM.	111
6.14	Evolução do EQM para o NCMA, o NMCMA, o NDDMA e o NLMSDD utilizando a modulação 16QAM.	113
6.15	Evolução do EQM para o NCMA, o NDDMA e o NLMSDD utilizando a modulação 64QAM.	113
6.16	Evolução do EQM para o NCMA, o NMCMA, o NDDMA e o NLMSDD utilizando a modulação 64QAM.	114
6.17	A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo RDDMA.	115
6.18	A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo MRCMA.	116
6.19	A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo RMDDMA.	117
6.20	Evolução do EQM para o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 16QAM.	117

6.21	Evolução do EQM para o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 64QAM.	118
6.22	Evolução do EQM para o RLSDD, o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 16QAM.	118
6.23	Evolução do EQM para o RLSDD, o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 64QAM.	119
6.24	Evolução do EQM para o RCMA, o MRCMA, o RDDMA e o RMDDMA utilizando a modulação 16QAM.	119
6.25	Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo RLS utilizando a modulação 64QAM.	120
6.26	Comparação entre as famílias de algoritmos do tipo CMA, NCMA e RCMA.	121
6.27	Curvas de BER para os algoritmos CMA e LMS.	122
6.28	Evolução do EQM para os algoritmos CMA e LMS.	122
6.29	Curvas de BER para os algoritmos NCMA e NLMS.	123
6.30	Evolução do EQM para os algoritmos NCMA e NLMS.	123
6.31	Curvas de BER para os algoritmos RCMA e RLS.	124
6.32	Evolução do EQM para os algoritmos RCMA e RLS.	124
7.33	Compromisso realizado entre robustez à ISI e performance para os algoritmos do tipo LMS estudados.	125

Lista de Tabelas

2.1	Valores de \mathbf{q} e $\mathbf{t}(n)$ para as diferentes técnicas	42
3.2	Valores de \mathbf{q} e $\mathbf{t}(n)$ para as diferentes técnicas	54
3.3	Resumo dos algoritmos estudados nesse capítulo	56
5.4	Resumo dos Algoritmos Normalizados estudados nesse capítulo.	88
5.5	Resumo dos Algoritmos do Tipo RLS estudados nesse capítulo	99
6.6	Parâmetros de Simulação utilizado nas figs. 6.4 e 6.5.	103
6.7	Parâmetros de Simulação utilizado nas figs. 6.6 e 6.7.	104
6.8	Parâmetros de Simulação utilizado nas figs. 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11.	107
6.9	Parâmetros de Simulação utilizado na fig. 6.12 e nas Tabelas 6.10 e 6.11.	110
6.10	Mínimos Globais utilizando os parâmetros da Tabela 6.9.	111
6.11	Mínimos Locais utilizando os parâmetros da Tabela 6.9.	111
6.12	Parâmetros de Simulação - Modelos Não-Linear.	120
6.13	Número de Coeficientes do Equalizador	123

Lista de Abreviações

- AR** Auto-Regressivo
- AWGN** *Additive White Gaussian Noise*
- BER** *Bit Error Rate*
- CAG** Controle Automático de Ganho
- CDLM** *Cost-Dependent Local Minima*
- CMA** *Constant Modulus Algorithm*
- DAMA** *Decision Adjusted Modulus Algorithm*
- DDA** *Decision Directed Algorithm*
- DDMA** *Decision Directed Modulus Algorithm*
- EMSE** *Excess Mean Square Error*
- EQM** Erro Quadrático Médio
- FDP** Função Densidade de Probabilidade
- HDTV** *High Definition Television*
- HOS** *Higher Order Statistics*
- ISI** *InterSymbol Interference*
- LDLM** *Length-Dependent Local Minima*
- LMS** *Least Mean Square*
- MA** *Moving Average*
- MCMA** *Modified Constant Modulus Algorithm*
- MDDMA** *Modified Decision Directed Modulus Algorithm*
- NCMA** *Normalized Constant Modulus Algorithm*
- NDDMA** *Normalized Decision Directed Modulus Algorithm*
- NLMS** *Normalized Least Mean Square*
- NLMSDD** *Normalized Least Mean Square Decision Directed*

-
- NMCMA** *Normalized Modified Constant Modulus Algorithm*
- PAM** *Pulse Amplitude Modulation*
- PLL** *Phase Locked Loop*
- PSK** *Phase Shift Keying*
- QAM** *Quadrature Amplitude Modulation*
- RCMA** *Recursive Constant Modulus Algorithm*
- RDDMA** *Recursive Directed Decision Modulus Algorithm*
- RIF** *Resposta ao Impulso Finita*
- RLS** *Recursive Least Squares*
- RLSDD** *Recursive Least Squares Decision Directed*
- RMCMA** *Recursive Modified Constant Modulus Algorithm*
- RMDDMA** *Recursive Modified Decision Directed Modulus Algorithm*
- SA** *Sato's Algorithm*
- SGA** *Stop-and-Go Algorithm*
- SISO** *Single-Input Single-Output*
- SIMO** *Single-Input Multiple-Output*
- SNR** *Signal-to-Noise Ratio*
- SOS** *Second Order Statistics*
- SWA** *Shalvi-Weinstein Algorithm*
- ZF** *Zero Forcing*

Lista de Símbolos

\mathbf{x}	Notação vetorial - letra minúscula em negrito
\mathbf{X}	Notação matricial - letra maiúscula em negrito
x_i	i-ésima componente do vetor \mathbf{x}
$\mathbf{x}(n)$	Vetor \mathbf{x} no instante de tempo discreto n
$E\{\cdot\}$	Esperança matemática
$(\cdot)^T$	Transposta do vetor ou matriz
$(\cdot)^*$	Conjugada do vetor ou matriz
$(\cdot)^H$	Transposta conjugada do vetor ou Matriz - Hermitiana
$J_{(\cdot)}$	Função custo
$\phi_{(\cdot)}$	Função custo do tipo mínimos quadrados
$(\cdot)_R$	Parte real do sinal
$(\cdot)_I$	Parte imaginária do sinal
$*$	Operador Convolução
$\vartheta[\cdot]$	Estimador não-linear sem memória
$sgn[\cdot]$	Função que extrai o valor sinal algébrico de seu argumento
\otimes	Produto de Kronecker
n	Tempo Discreto
j	Constante imaginária ($= \sqrt{-1}$)
$a(n)$	Sinal transmitido
$\mathbf{a}(n)$	Vetor que contém o sinal transmitido
$x(n)$	Sinal recebido
\mathbf{h}	Resposta ao impulso do canal linear
\mathbf{H}	Matriz de convolução do canal
\mathbf{h}_τ	Vetor correspondente à coluna de número $\tau + 1$ de \mathbf{H}
$v(n)$	Ruído branco aditivo Gaussiano (AWGN)
\mathbf{w}	Vetor de coeficientes do equalizador MA
$\nabla_{\mathbf{w}} J$	Gradiente da Função Escalar J em relação ao vetor \mathbf{w}
$y(n)$	Sinal na saída do equalizador
$\hat{a}(n)$	Saída do dispositivo de decisão (símbolo decidido)
\mathbf{f}	Resposta ao impulso global do sistema (canal mais equalizador)
τ	Atraso de comunicação
$d(n)$	Sinal desejado ou de referência
\mathbf{R}_x	Matriz de autocorrelação do sinal recebido

\mathbf{p}_{dx}	Vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado e o vetor de entradas do equalizador
$\nabla^2 J$	Matriz Hessiana da Função Escalar J
\mathbf{w}_{wiener}	Filtro ótimo de Wiener para um filtro MA
\mathbf{e}_τ	Vetor com uma componente não-nula e unitária na posição τ e todas as outras nulas
σ_a^2	Variância do sinal transmitido
σ_v^2	Variância do ruído
m_{4a}	Momento de ordem 4 do sinal transmitido
$K[y(n)]$	Curtose do sinal na saída do equalizador
μ	Fator de passo
λ	Fator de esquecimento
δ	Constante de Inicialização utilizada nos algoritmos de mínimos quadrados recursivos
$\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$	Multiplicadores de Lagrange
$e(n)$	Erro de sinal entre $y(n)$ e $d(n)$
$e_{DD}(n)$	Erro de Decisão Dirigida entre $y(n)$ e $\hat{a}(n)$
\mathbf{I}_N	Matriz identidade de dimensão N
γ	Constante do Algoritmo de Sato
$u(n)$	Sinal da saída da parte linear do equalizador de Wiener
$\mathbf{u}(n)$	Vetor que contém as entradas para o filtro não-linear do canal
N	Comprimento (memória) da resposta ao impulso do canal linear
\mathbf{c}	Vetor que contém os coeficientes da não-linearidade polinomial do canal
L	Comprimento (ordem) da parte não-linear do canal
$z(n)$	Sinal de saída da parte não-linear do equalizador
P	Comprimento (ordem) da parte não-linear do equalizador
\mathbf{g}	Vetor de pesos da parte não-linear do equalizador
$\mathbf{x}_g(n)$	Vetor de entradas da parte não-linear do equalizador
M	Comprimento (memória) da parte linear do equalizador
$\mathbf{z}(n)$	Vetor que contém as entradas da parte linear do equalizador
$\mathbf{p}(n)$	Vetor de entradas do filtro \mathbf{g}
\mathbf{r}	Vetor de pesos do filtro Volterra diagonal
$\tilde{\mathbf{x}}(n)$	Vetor de entradas do filtro \mathbf{r}
\mathbf{b}	Vetor de pesos do filtro Volterra diagonal
$\check{\mathbf{x}}(n)$	Vetor de entradas do filtro \mathbf{b}
\mathbf{q}	Vetor de pesos do equalizador utilizando a notação unificada
$\mathbf{t}(n)$	Vetor de entradas do filtro \mathbf{q}
R_p	Constante de referência do algoritmo de Godard
R	Constante de referência do CMA - algoritmo de Godard para $p = 2$
R_i	Módulos quadráticos dos símbolos da constelação transmitida
R_R	Constante de referência real do MCMA
R_I	Constante de referência imaginária do MCMA

Capítulo 1

Introdução

OS recentes avanços no campo das telecomunicações têm possibilitado a transmissão de informação em ambientes severos e em taxas cada vez maiores. O número de serviços disponíveis para os usuários também cresceu bastante, tornando realidade, a cada dia que passa, a convergência tecnológica dos meios de comunicação e favorecendo a inclusão digital em massa. Num futuro próximo haverá uma grande disponibilidade não só de serviços mais tradicionais como voz e fax, mas também de serviços mais sofisticados como internet, e-mail, imagens, multimídia e dados em tempo real. Estes serviços de telecomunicações estão em uso crescente dentro da sociedade e a tendência é que este crescimento não cesse nas próximas décadas. As tecnologias disponíveis já tornam possível uma integração dos sistemas e redes de comunicações de forma definitiva. A meta para o futuro é viabilizar o acesso à informação a qualquer hora, em qualquer lugar e sob qualquer forma. Para estes fins os sistemas de telecomunicações estão se tornando maiores e mais complexos.

Nesse contexto dos sistemas atuais de comunicação digital, uma das maiores limitações no desempenho dos sistemas é a interferência oriunda do próprio usuário, a chamada *Interferência Entre Símbolos* ou, do inglês, *InterSymbol Interference* (ISI). Alguns dos fenômenos mais comuns que dão origem à ISI são a propagação por multipercursos (e.g. em sistemas móveis) e a limitação em banda (e.g. linhas telefônicas). Classicamente a solução para a eliminação ou redução desse tipo de interferência tem sido a utilização de *equalizadores*. Considerando-se a crescente complexidade dos sistemas de comunicação, o projeto de equalizadores tornou-se uma área de estudos de grande importância, tornando-se tema de numerosos trabalhos dentro da comunidade científica mundial.

Uma das abordagens para o projeto de equalizadores bastantes usadas em Teoria de Equalização tem sido a utilização de uma *seqüência de treinamento*, conhecida pelo transmissor e pelo receptor, durante o chamado período de aquisição. Durante esse período o equalizador tem acesso tanto aos dados transmitidos pré-determinados quanto ao sinal recebido. Desta forma, o equalizador pode estimar a distorção ocorrida durante a transmissão e ajustar seus parâmetros para cancelar essa distorção. A este tipo de procedimento dá-se o nome de *Equalização Supervisionada*. A outra abordagem existente

em Teoria de Equalização é a utilização de *equalizadores cegos*, também chamados de *autodidatas* ou, ainda, *não-supervisionados*. Na equalização cega o receptor não conhece o sinal transmitido, ou seja, o equalizador estima os dados transmitidos com base apenas no sinal recebido e em estatísticas conhecidas do sinal transmitido. O presente trabalho possui como tema principal de estudos a equalização cega, cuja principal característica é exatamente a ausência da referência de treinamento. Diversas aplicações tiram vantagem desta característica para aumentar a eficiência espectral, utilizando o tempo gasto durante o período de aquisição para transmitir informação útil. Em alguns casos a transmissão de uma seqüência de treinamento é indesejável ou até mesmo impraticável, como no caso de redes de computadores multi-ponto ou transmissão rádio digital na faixa de microondas [1].

Entre as técnicas clássicas para a realização de equalização cega estão as chamadas *Técnicas de Bussgang*, que representam um conjunto de algoritmos que utilizam estimadores não-lineares sem memória para a saída do equalizador. Como exemplo de tais técnicas pode-se citar: o Algoritmo de Decisão Direta ou Decisão Dirigida - *Decision Directed Algorithm* (DDA) [2]; o Algoritmo de Sato - *Sato's Algorithm* (SA) [3]; o *Stop-and-Go Algorithm* (SGA) [4]; e o Algoritmo do Módulo Constante - *Constant Modulus Algorithm* (CMA), que é um caso particular do Algoritmo de Godard. Alguns dos algoritmos propostos neste estudo também podem ser classificados como técnicas de Bussgang. Outra técnica clássica para a realização de equalização cega é o algoritmo de Shalvi-Weinstein - *Shalvi-Weinstein Algorithm* (SWA) [5].

Particularmente, o presente trabalho tem como principal motivação o CMA, desenvolvido independentemente por Godard [6] e Treichler & Agee [7]. O CMA é uma das mais estudadas e utilizadas técnicas para a realização de equalização cega. A função custo Módulo Constante (CM), de onde se origina o CMA, penaliza desvios da saída do equalizador em relação a um raio de referência fixo. O CMA possui baixa complexidade computacional, atingindo facilmente as restrições práticas de aplicações em tempo real. Outra característica interessante do CMA é a sua grande robustez ao ruído, à má modelagem da ordem do canal e às fontes correlacionadas [8-13]. Sua característica cega com relação à fase do sinal de saída do equalizador é outra importante propriedade do CMA, tornando-o muito robusto também com relação a recuperações imperfeitas de fase.

O CMA funciona de maneira bastante eficiente com constelações nas quais todos os pontos possuem a mesma amplitude, como em modulações do tipo *Phase Shift Keying* (PSK). Entretanto, quando os pontos da constelação podem assumir diferentes valores de amplitudes, como em modulações do tipo *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM), o CMA muitas vezes não funciona de forma satisfatória. Isto deve-se ao fato do termo de ajuste do algoritmo, em média, não se anular para esse tipo de sinais, mesmo quando o canal está perfeitamente equalizado. Desta forma o CMA consegue atingir apenas um nível moderado de Erro Quadrático Médio (EQM). Ademais, a lenta velocidade de convergência do CMA com sinais que possuem modulações QAM de ordem elevada é

outro fator que limita a utilização sua nesses casos.

Uma das mais importantes contribuições deste trabalho é a proposição de técnicas inspiradas no CMA que melhorem seu desempenho em termos de velocidade de convergência e precisão, para sinais QAM de ordem elevada. Assim como o CMA, para possuir um bom apelo prático, essas técnicas devem apresentar bom compromisso entre complexidade, robustez e performance. Como será visto posteriormente, a primeira técnica proposta nesta dissertação utiliza o símbolo decidido para definir uma estimação de raio de referência para a saída do equalizador. Essa técnica, que pode ser vista como uma generalização do CMA, é a base para o desenvolvimento de grande parte dos algoritmos desenvolvidos neste trabalho. A segunda técnica proposta pode ser vista como uma generalização do Algoritmo do Módulo Constante Modificado - *Modified Constant Modulus Algorithm* (MCMA), proposto em [14] e capaz de realizar equalização cega e recuperação de portadora conjuntamente. Com o intuito de melhorar ainda mais a performance desses algoritmos em relação à velocidade de convergência e o erro residual, também serão propostas técnicas normalizadas e do tipo Mínimos Quadrados Recursivos - *Recursive Least Squares* (RLS) dos algoritmos do tipo gradiente estocástico estudados.

Equalização de Canais Não-Lineares

Outro tema de estudos desta dissertação diz respeito à equalização cega de canais não-lineares. Particularmente, este trabalho trata da equalização de canais de comunicação do tipo *Wiener*, que consiste em um filtro linear com memória de Resposta ao Impulso Finita (RIF), seguido por um filtro não-linear sem memória. Diversos sistemas não-lineares podem ser modelados como uma cascata em série de filtros lineares com memória e filtros não-lineares sem memória. Em especial, os filtros de Wiener possuem diversas aplicações em sistemas de telecomunicações. Eles podem modelar, por exemplo, canais de comunicação satelitários, nos quais *Amplificadores de Alta Potência* são projetados para operar em regiões próximas à saturação para atender aos requisitos de consumo de potência. Como consequência, são introduzidas no sinal distorções não-lineares de banda limitada. Esse tipo de distorção não-linear oriunda de Amplificadores de Alta Potência também é bastante comum em sistemas OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) [15-17].

Outra importante aplicação do modelo de Wiener em sistemas de comunicações pode ser encontrada na modelagem de enlaces do tipo *Radio Over Fiber*. Neste caso o sinal é transmitido via rádio por uma estação móvel e recebido por um Ponto de Acesso de Rádio (*Radio Access Point*), onde é convertido em sinais ópticos e retransmitido via fibra óptica. Quando o comprimento da fibra óptica é pequeno (da ordem de quilômetros) e a frequência de rádio é da ordem de GHz, a dispersão temporal da fibra óptica é desprezível. Neste caso, a distorção não-linear oriunda da conversão elétrica-ótica torna-se preponderante. Deste modo, cada usuário enxerga o sistema como um modelo do tipo Wiener [18]. Em [19] são citadas diferentes referências de aplicações destes tipos de modelos em domínios diversos

fora da área de telecomunicações.

Desta forma, o estudo acerca do CMA feito neste trabalho é estendido a estruturas não-lineares com o intuito de equalizar canais de comunicação do tipo Wiener. Trata-se de uma nova aplicação do CMA que dará uma abrangência maior ao estudo realizado, uma vez que a utilização do CMA para equalização de canais não-lineares é ainda inexplorada na literatura.

Ademais, um ponto que também deve ser destacado é o fato de todas as técnicas estudadas nesta dissertação serem *adaptativas*. As técnicas adaptativas iniciam o processo de equalização a partir de um ponto inicial e procuram a solução desejada incrementalmente. Os algoritmos adaptativos possuem a capacidade de equalizar canais variantes no tempo, como em sistemas de comunicações móveis ou em sistemas HDTV (*High Definition Television*), nos quais ocorrem flutuações rápidas no sinal recebido. Historicamente, o principal inconveniente das técnicas adaptativas de equalização cega tem sido a lenta velocidade de convergência.

1.1 Divisão do Trabalho

O restante da presente dissertação está organizada da seguinte forma:

- O **Capítulo 2** inicialmente apresenta algumas definições importantes para o desenvolvimento do trabalho e, em seguida, introduz a notação matemática utilizada, incluindo uma notação unificada para as estruturas de filtragem não-lineares consideradas, de forma que todas essas estruturas são descritas por um notação unificada e linear com relação aos coeficientes dos filtros. No final do capítulo os principais algoritmos de filtragem adaptativa clássica são então apresentados. Esses algoritmos formam a base para o desenvolvimento dos algoritmos cegos estudados no decorrer desta dissertação.
- No **Capítulo 3** é proposto um algoritmo para equalização cega inspirado no CMA: o Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão - *Decision Directed Modulus Algorithm* (DDMA). Essa técnica é projetada para operar em sinais transmitidos com diversos módulos, em particular para a modulação QAM. Esse algoritmo utiliza o módulo do símbolo decidido no instante atual para estimar um raio de referência para a saída do equalizador. Na verdade ele pode ser visto como uma generalização do CMA para constelações com múltiplos raios. Ainda nesse capítulo é proposto um algoritmo que pode ser visto como uma generalização do MCMA [14] para constelações QAM de ordem elevada. Esse novo algoritmo é capaz de realizar, conjuntamente, equalização cega e recuperação de portadora, além de possuir um desempenho bastante desejável em termos de velocidade de convergência e precisão. A terceira principal contribuição desse capítulo é a proposição de técnicas originais,

baseadas no CMA, para equalização de canais do tipo Wiener. As expressões para a adaptação do equalizador são desenvolvidas com o auxílio de uma notação unificada para três diferentes estruturas de filtragem: i) um filtro de Hammerstein; ii) um filtro de Volterra diagonal; e iii) um filtro de Volterra completo.

- O **Capítulo 4** é dedicado a realizar uma análise teórica sobre o algoritmo DDMA, assumindo, na maioria das seções, que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas. Um dos objetivos é estudar a convergência e a estabilidade do DDMA através de uma análise dos pontos de equilíbrio de sua função custo. Outro objetivo é encontrar o valor teórico do Erro Quadrático Médio em Excesso - *Excess Mean Square Error* (EMSE) fornecido pelo DDMA considerando-se o caso sem ruído. Será feita, então, uma comparação entre os EMSE fornecidos pelo DDMA e pelo CMA, onde se poderá verificar a melhor performance do DDMA em relação ao CMA em constelações que possuem múltiplas amplitudes. No final, será feito um estudo a respeito da função custo DDM através do desenvolvimento de relações com o filtro de Wiener e com o CMA, onde será constatado que o algoritmo DDMA possui fortes ligações com a solução de Wiener e com o CMA.
- No **Capítulo 5** são desenvolvidas versões normalizadas, bem como versões do tipo RLS, dos algoritmos estudados no **Capítulo 3**. É sabido que os algoritmos *Normalized Least Mean Square* (NLMS) e RLS têm desempenhos superiores à do *Least Mean Square* (LMS) em termos de velocidade de convergência e EQM residual. Desta forma, os algoritmos desenvolvidos neste capítulo possuem o intuito de melhorar a performance, ou seja, a precisão e a velocidade, dos algoritmos do tipo CMA estudados. De fato, as técnicas desenvolvidas nesta parte são inspiradas nas versões normalizadas e recursivas do CMA, ou seja, o *Normalized Constant Modulus Algorithm* (NCMA) e o *Recursive Constant Modulus Algorithm* (RCMA). Cada família de algoritmos é composta por quatro algoritmos com algumas propriedades interessantes e vantagens sobre os algoritmos NCMA e RCMA, especialmente em sinais QAM de ordem elevada. Também são desenvolvidas versões dos algoritmos NCMA e RCMA para as técnicas de equalização de canais não-lineares estudadas no **Capítulo 3**.
- No **Capítulo 6** o comportamento das famílias de algoritmos desenvolvidos nos outros capítulos é testado através de simulações computacionais. É verificado que as técnicas propostas fornecem ganhos significativos em performance em termos de velocidade e erro residual, em relação às técnicas clássicas. É também verificado que os algoritmos dirigidos pela decisão propostos são capazes de abrir o olho de um sinal na saída de um canal de comunicação, referindo-se ao diagrama de olho fornecido na saída do equalizador [20]. Além disso, são estabelecidas algumas relações entre o desempenho dos algoritmos propostos e a performance dos algoritmos cegos clássicos DDA, NLMS Dirigido pela Decisão - *Normalized Least Mean Square Decision Directed* (NLMSDD) e RLS Dirigido pela Decisão - *Recursive Least Squares Decision Directed* (RLSDD).

- Finalmente, no **Capítulo 7**, as conclusões a respeito deste trabalho são realizadas e também são vislumbradas algumas perspectivas para futuras continuações desta dissertação.

Capítulo 2

Filtragem Adaptativa e Equalização de Canais de Comunicação

EM um sistema de comunicação a Interferência Entre Símbolos - *InterSymbol Interference* (ISI) é uma importante fonte de degradação do sinal transmitido a ser combatida. Este tipo de interferência tem origem devido à superposição temporal de símbolos transmitidos por um mesmo usuário. O equalizador é o dispositivo projetado para eliminar ou reduzir esse tipo de interferência. Portanto, é função do equalizador estimar, de forma implícita ou explícita, a distorção ocorrida durante a transmissão do sinal e ajustar seus parâmetros de forma a anular essa distorção. A propagação por multipercursos (e.g. sistemas móveis) e a limitação em banda (e.g. linhas telefônicas) são alguns dos fenômenos mais comuns que originam a ISI.

Considerando-se a crescente complexidade dos sistemas de comunicação, o projeto de equalizadores tornou-se uma área de estudos de grande importância e com diversos métodos e abordagens de utilização. Este capítulo trata de estudar os principais conceitos e técnicas associadas ao problema da equalização. Serão revisados os principais algoritmos de equalização supervisionada e não-supervisionada (ou cega) existentes na literatura.

Neste capítulo a Teoria da Equalização clássica de canais de comunicação é estudada, sendo organizada da seguinte forma: na Seção 2.1 são apresentadas algumas definições importantes para o desenvolvimento da dissertação e é introduzida a notação matemática utilizada; na Seção 2.2 são apresentadas as principais técnicas de filtragem adaptativa clássica; na Seção 2.3 são estudados os algoritmos mais clássicos de equalização cega e adaptativa existentes na literatura; na Seção 2.4 é desenvolvida uma notação unificada para as estruturas de filtragem não-lineares consideradas, de forma que todas essas estruturas são descritas por uma notação linear com relação aos coeficientes dos filtros; e na Seção 2.5 são realizados alguns comentários finais a respeito do capítulo.

2.1 Alguns Conceitos Importantes

Esta seção tem como objetivo introduzir alguns conceitos importantes que serão utilizados no decorrer da trabalho. A seguir é introduzido o modelo matemático referente às estruturas lineares presentes neste trabalho. Baseando-se nesse modelo serão feitas algumas hipóteses relativas aos sinais e sistemas utilizados. Entretanto, deve-se ressaltar que tais modelos e hipóteses são largamente conhecidos e utilizados na literatura. Os modelos matemáticos referentes às estruturas de filtragem não-linear serão discutidos na Seção 2.4.

2.1.1 Filtros *Moving-Average* (MA)

Com relação à estrutura utilizada, os equalizadores estudados ao longo esta dissertação podem ser classificados como filtros do tipo Média-Móvel - *Moving Average* (MA). Os filtros do tipo MA são blocos caracterizados por uma função de transferência $W(z)$ que possui a seguinte forma:

$$W(z) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i z^{-i}, \quad (2.1)$$

em que $M > 0$ é a ordem do filtro MA e w_i ($0 \leq i \leq M - 1$) são os coeficientes do filtro. Os filtros do tipo MA também são comumente chamados de *filtros transversais* ou, se M é finito, de filtros de *Resposta ao Impulso Finita* (RIF).

2.1.2 Modelos Matemáticos

O modelo linear de sistema de comunicação *Single-Input Single-Output* (SISO) empregado nesta dissertação está mostrado na fig. 2.1. Durante todo este trabalho serão utilizados somente modelos de sinais e sistemas discretos no tempo, cujo índice será representado pela letra n . Será considerado que: a seqüência transmitida $\{a(n)\}$ é i.i.d. (independentes e identicamente distribuídos), estacionária e pode assumir qualquer símbolo da constelação com igual probabilidade; e a seqüência $\{x(n)\}$, que contém o sinal recebido, pode ser expressa de acordo com a equação seguinte:

$$x(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a(n-i)h_i + v(n), \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{h} = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{N-1}]$ é a Resposta ao Impulso do canal do tipo MA, N é o comprimento (memória) do canal e $v(n)$ é o ruído, considerado branco, aditivo e gaussiano - *Additive White Gaussian Noise* (AWGN). O número de coeficientes do equalizador

transversal é dado por M , $\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{M-1}]$ é o seu vetor de coeficientes e $\hat{a}(n)$ é a saída do dispositivo de decisão (símbolo decidido). O sinal da saída do equalizador $\{y(n)\}$ é dado por

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i x(n-i). \quad (2.3)$$

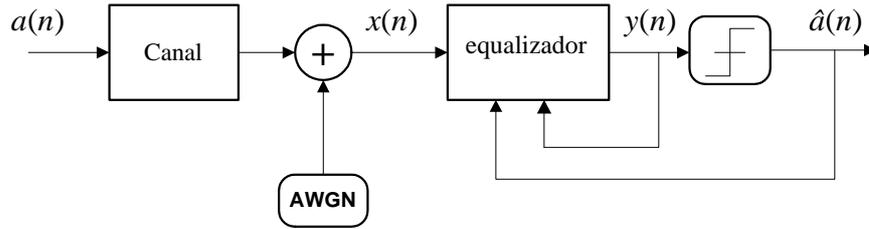


Figura 2.1: Estrutura simplificada do sistema de comunicação linear utilizado.

2.1.3 O Problema da Equalização

A transmissão da informação através de um canal de comunicação é dita *não distorsiva* se o sinal recebido for uma versão atrasada e atenuada do sinal transmitido, ou seja, $x(n) = k a(n - \tau)$, em que k é uma constante de atenuação e τ representa o *atraso de comunicação*. Não se faz necessária, no caso de uma transmissão não distorsiva, a utilização de equalizadores, uma vez que atrasos e ganhos (atenuações) constantes podem ser compensados, respectivamente, por um dispositivo de recuperação de fase da portadora - *Phase Locked Loop* (PLL) e um Controle Automático de Ganho (CAG). As funções desempenhadas pelo PLL e pelo CAG serão melhor detalhadas na seção seguinte. Entretanto, se a condição acima não é satisfeita, diz-se que a transmissão é *distorsiva*. Neste caso, faz-se necessário o uso de estratégias de recepção, dentre as quais se inclui a equalização, visando a recuperação ou restauração das informações transmitidas. O objetivo da equalização é projetar \mathbf{w} de tal forma que $y(n)$ esteja dentro da região de decisão de $a(n - \tau)$, ou seja, que $y(n) \cong a(n - \tau)$. Desta forma tem-se $\hat{a}(n) = a(n - \tau)$ e, conseqüentemente, o símbolo é recuperado de maneira correta.

A saída do equalizador também pode ser expressa em termos da Resposta ao Impulso Global $\mathbf{f} = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{M+N-2}]$, como mostra a equação a seguir:

$$y(n) = f_\tau a(n - \tau) + \sum_{i=0, i \neq \tau}^{M+N-2} f_i a(n - i) + \sum_{i=0}^{M-1} w_i v(n - i). \quad (2.4)$$

O vetor \mathbf{f} representa a Resposta ao Impulso da cascata canal mais equalizador, cujas componentes são obtidas a partir de $\mathbf{f} = \mathbf{h} * \mathbf{w}$, em que $*$ representa o operador *convolução*.

O primeiro termo do lado direito da eq. (2.4) representa uma versão atrasada e atenuada do símbolo transmitido no instante “ $n - \tau$ ”, enquanto que o segundo e terceiro termos representam, respectivamente, a ISI e o ruído filtrado. O objetivo do equalizador é cancelar ou atenuar o segundo e o terceiro termos da eq. (2.4), de tal forma que o único termo remanescente seja o correspondente ao símbolo transmitido.

Para o caso de não haver ruído, o objetivo da equalização passa a ser o cancelamento de todas as componentes de \mathbf{f} com exceção feita a uma dessas componentes. Em outras palavras, o equalizador deve projetar \mathbf{w} tal que $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$, em que o coeficiente não-nulo encontra-se na posição $\tau + 1$. Esse vetor $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau$ equivale à solução de Forçamento a Zero - *Zero Forcing* (ZF), que é o vetor de coeficientes ótimo no espaço global para o caso de não haver ruído.

2.1.4 *Phase Locked Loop* e Controle Automático de Ganho

O objetivo de um dispositivo de recuperação de fase da portadora (PLL) é de corrigir erros ou *shifts* constantes de fase na recepção do sinal. Esse tipo de dispositivo é de bastante interesse dentro deste trabalho, uma vez que boa parte dos algoritmos estudados são cegos com relação à fase de $y(n)$, ou seja, para a completa recepção do sinal faz-se necessária a utilização de um PLL. Desta forma, a estrutura mostrada na fig. 2.1 pode também incluir PLL digital após o equalizador e antes do dispositivo de decisão. Entretanto, alguns dos algoritmos desenvolvidos nesta dissertação possuem a capacidade de recuperar a fase da portadora implicitamente. Nestes casos, não é necessária a utilização de um PLL. A expressão de adaptação do PLL utilizada nas simulações computacionais será introduzida no **Capítulo 6**.

No que concerne ao CAG, seu objetivo é corrigir atenuações ou ganhos constantes na amplitude de um sinal. O CAG é normalmente utilizado em conjunto com algoritmos que geram uma saída atenuada, como no caso de algoritmos que utilizam filtros de erro de predição, cujos coeficientes são ajustados a partir de critérios de minimização de potência de erro de predição, o que implica no branqueamento do sinal recebido. No caso dos algoritmos estudados neste trabalho, não se faz necessária a utilização de um dispositivo do tipo CAG.

2.2 Filtragem Adaptativa Clássica Supervisionada

Nesta seção são discutidos os principais algoritmos de filtragem adaptativa clássica supervisionada. Essas técnicas, embora supervisionadas, formam a base para o desenvolvimento dos algoritmos cegos desenvolvidos nesta dissertação. As três famílias de algoritmos estudados nos outros capítulos têm por base exatamente os três algoritmos adaptativos descritos na presente seção.

Os algoritmos de equalização supervisionada utilizam uma seqüência pré-determinada no período de treinamento, a qual é conhecida e sincronizada pelo transmissor e pelo receptor. Durante este período, o equalizador tem acesso aos sinais transmitidos gerados no transmissor e aos sinais recebidos, podendo, assim, estimar a distorção ocorrida durante a transmissão e ajustar seus parâmetros de forma a eliminá-la. Os algoritmos supervisionados clássicos têm como referência a Teoria de Wiener, estudada a seguir, a qual determina o filtro ótimo no sentido da minimização do Erro Quadrático Médio (EQM) para os equalizadores do tipo MA.

2.2.1 Filtro de Wiener

A teoria de filtragem linear ótima em relação ao EQM foi desenvolvida por Wiener [21] em 1942 e é comumente referida por *Teoria de Wiener*. O filtro de Wiener é o filtro linear ótimo no sentido da minimização do EQM e é comumente utilizado como referência, para filtros sub-ótimos, de desempenho ideal. A expressão analítica do Filtro de Wiener pode ser desenvolvida minimizando-se a função custo EQM, também chamada de função custo de Wiener, mostrada a seguir [22]:

$$J_{wiener} = E\{|y(n) - d(n)|^2\}, \quad (2.5)$$

em que $E\{\cdot\}$ representa o operador esperança matemática e $d(n)$ é a *senal de treinamento* ou *senal desejado* ou, ainda, *senal de referência*, conhecido pelo transmissor e pelo receptor. Desta forma, o receptor tem conhecimento do sinal recebido $x(n)$, durante o período de treinamento, e do sinal transmitido $d(n)$. No caso de sistemas de comunicação, o sinal desejado é sempre igual a uma versão atrasada do sinal transmitido, sendo $d(n) = a(n - \tau)$. Utilizando-se o modelo de sinal introduzido pela eq. (2.3), pode-se escrever a função custo de Wiener da seguinte forma [22]:

$$J_{wiener} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w}^* - \mathbf{w}^T \mathbf{p}_{dx}^* - \mathbf{w}^H \mathbf{p}_{dx} + \sigma_a^2,$$

em que $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}$ é a *matriz de autocorrelação* do sinal recebido $x(n)$, $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \cdots \ x(n-M+1)]$ é o vetor de entradas do equalizador, $\mathbf{p}_{dx} = E\{d(n)\mathbf{x}^*(n)\}$ é o vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado e o vetor de entradas do equalizador transversal e σ_a^2 é a variância do sinal transmitido. Para encontrar o ponto de mínimo da função custo de Wiener, faz-se necessário igualar o gradiente da expressão acima ao vetor nulo. Assim, com a ajuda das eqs. (A.1) e (A.2), desenvolvidas no Apêndice A, tem-se [22]

$$\nabla_{\mathbf{w}} J_{wiener} = 2\mathbf{R}_x \mathbf{w}_{wiener} - 2\mathbf{p}_{dx} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}_{wiener} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{p}_{dx}. \quad (2.6)$$

A expressão acima corresponde ao filtro transversal que fornece o EQM mínimo. Entretanto, para sua utilização, faz-se necessário o conhecimento da matriz de autocorrelação \mathbf{R}_x e do vetor de correlação cruzada \mathbf{p}_{dx} . A expressão do filtro de Wiener pode ainda se escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{w}_{wiener} = (\sigma_a^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{h}_\tau^* \sigma_a^2,$$

em que $(\cdot)^*$ representa o operador conjugado, σ_v^2 é a variância do ruído, \mathbf{h}_τ é o vetor correspondente à coluna de número $\tau + 1$ de \mathbf{H} e $\mathbf{H}_{M \times (N+M-1)}$ é a matriz de convolução do canal dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_0 & \cdots & h_{N-2} & h_{N-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} \end{pmatrix}.$$

A expressão acima mostra de forma explícita a relação entre o filtro de Wiener e a resposta ao impulso do canal. Outro inconveniente da implementação do filtro de Wiener é sua alta complexidade computacional, uma vez que se faz necessário, para sua determinação, o cálculo da inversa de uma matriz, no caso \mathbf{R}_x^{-1} .

2.2.2 O Algoritmo *Least Mean Square* - LMS

O *Least Mean Square* (LMS), proposto ainda no ano 1960 [23], é o algoritmo mais utilizado em filtragem adaptativa supervisionada. O LMS é uma tentativa de se implementar o filtro de Wiener de uma maneira prática nos sistemas de comunicações. O LMS é um algoritmo adaptativo, ou seja, ele parte de uma situação inicial $\mathbf{w}(0)$ e “procura” o ponto desejado de maneira adaptativa. Para tanto ele utiliza a chamada *Regra do Gradiente Estocástico*, que também é utilizada por diversos outros algoritmos adaptativos. Na verdade, a regra do gradiente estocástico é uma versão do *Algoritmo do Gradiente Determinístico* que utiliza estimações instantâneas das grandezas determinísticas presentes. Por sua vez, o Algoritmo do Gradiente Determinístico é uma maneira analítica e iterativa de se implementar o filtro de Wiener sem a necessidade de utilizar uma inversão de matriz. Como pode-se observar na equação abaixo, o Algoritmo do Gradiente Determinístico busca o ponto de mínimo da função custo seguindo a direção contrária à apontada pelo gradiente da superfície de custo [22]:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} J_{wiener}(n) = \mathbf{w}(n) - \mu 2(\mathbf{R}_x \mathbf{w}_{wiener} - \mathbf{p}_{dx}).$$

Assim, aplicando-se a regra do gradiente estocástico, ou seja, substituindo-se as esperanças matemáticas pelas estimações instantâneas, encontra-se a seguinte equação de adaptação do LMS

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu [y(n) - d(n)] \mathbf{x}^*(n), \quad (2.7)$$

em que o fator constante 2 é absorvido pelo fator de passo μ . O LMS é um algoritmo extremamente simples do ponto de vista de complexidade computacional e com muitas aplicações em diversas áreas de processamento de sinais. O LMS, assim como todas as técnicas adaptativas, pode ser utilizado para a equalização de canais variantes no tempo, uma vez que o algoritmo tem a capacidade de rastrear o ponto de mínimo desejado mesmo se este varia com o tempo.

Pode ser demonstrado [22] que o vetor de coeficientes do LMS converge para algum ponto em torno do filtro de Wiener desde que o fator de passo respeite o seguinte limite

$$0 < \mu < \frac{1}{M\sigma_x^2},$$

em que σ_x^2 é a variância do sinal recebido. Na verdade, o LMS produz uma estimativa ruidosa do filtro de Wiener, em que o EMSE, definido como o erro quadrático médio adicional ao provido pelo filtro de Wiener, depende do fator de passo. Quanto maior o fator de passo, maior será o EMSE, porém maior também será a velocidade de convergência. Da mesma forma, quanto menor o fator de passo, menor será o EMSE, porém menor também será a velocidade de convergência. Entretanto, se o fator de passo não respeitar a restrição acima, a estabilidade do LMS não é garantida [22].

De fato, durante todo o estudo realizado nesta dissertação, os principais indicadores de desempenho que se procurou observar nos algoritmos foram a velocidade de convergência e o EQM residual. Desta forma, um algoritmo terá um desempenho considerado melhor do que outro se estas duas características forem melhores do que para o outro algoritmo. Outra propriedade importante a se verificar nos algoritmos é robustez à ISI. Assim, é desejável que os algoritmos, dentro do processo de equalização, possuam bons compromissos entre robustez e desempenho.

2.2.3 O Algoritmo LMS Normalizado

Como pode-se observar na eq. (2.7), o termo de ajuste do LMS é proporcional a $\mathbf{x}^*(n)$. Desta forma, o LMS pode gerar uma amplificação do ruído aditivo, visto que se o vetor $\mathbf{x}^*(n)$ possui um valor elevado, o vetor de coeficientes \mathbf{w} sofrerá um grande aumento no valor de suas componentes. Esse tipo de problema, chamado de *Amplificação do Ruído Gradiente*, pode ser resolvido utilizando-se a abordagem da normalização do fator de passo, resultando no algoritmo NLMS, proposto independentemente em [24] e [25]. Entretanto, a nomenclatura *Normalized LMS algorithm* dada a esta técnica parece ter sido introduzida em [26]. O NLMS pode ser visto como um problema de otimização sujeito a restrição [27], no qual função custo a ser minimizada possui a seguinte forma:

$$J = \|\delta\mathbf{w}(n)\|^2 = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2,$$

sujeita a restrição:

$$\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n) = d(n). \quad (2.8)$$

Deste modo, o NLMS pode ser visto como uma manifestação do *Princípio do Mínimo Distúrbio* [28]. Este problema de otimização pode ser resolvido utilizando-se o método do Multiplicador de Lagrange, reescrevendo-se a função custo da seguinte maneira:

$$J = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2 + \bar{\lambda}(\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n) - d(n)).$$

Igualando-se o gradiente da função custo em relação a \mathbf{w} a zero, obtém-se

$$\nabla_{\mathbf{w}}J = 2[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] + \bar{\lambda}\mathbf{x}^*(n) = 0. \quad (2.9)$$

Pré-multiplicando-se a equação acima por $\mathbf{x}^T(n)$, chega-se a

$$2\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1) - 2y(n) = -\bar{\lambda}\|\mathbf{x}(n)\|^2.$$

Pode-se, então, encontrar a expressão do Multiplicador de Lagrange associado a este problema de otimização:

$$\bar{\lambda} = \frac{2}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} e(n), \quad (2.10)$$

em que $e(n) = y(n) - d(n)$. Substituindo-se a eq. (2.10) na eq. (2.9) pode-se encontrar a expressão de adaptação do NLMS:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} e(n) \mathbf{x}^*(n).$$

O NLMS pode ser visto como uma versão do LMS com um fator de passo normalizado igual a: $\tilde{\mu}(n) = \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2}$. Esse fator de passo variável é uma solução para o problema da Amplificação do Ruído Gradiente, visto que se o valor de \mathbf{x}^* é elevado, o fator de passo $\tilde{\mu}(n)$ terá um valor pequeno, fazendo com que o equalizador não tenha grandes mudanças nos seus coeficientes.

Pode ser demonstrado que o NLMS também converge em média para uma estimativa ruidosa do filtro de Wiener, com estabilidade garantida desde que o fator de passo respeite o seguinte limite [22]:

$$0 < \mu < 2.$$

Outro ponto a ser destacado é o fato de o NLMS ser potencialmente capaz de acelerar a convergência do LMS, tanto para fontes correlacionadas como para fontes não correlacionadas [24, 29].

2.2.4 O Algoritmo RLS

O RLS é um algoritmo clássico para a realização de equalização supervisionada que possui um desempenho superior ao do algoritmo LMS, em relação ao EQM residual e à velocidade de convergência [22]. Esta performance superior deve-se ao branqueamento dos dados realizado pelo RLS através da inversa da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Como será visto adiante, essa inversa é implementada através do Lema da Inversão de Matrizes. Contudo, o RLS possui uma complexidade computacional bastante superior a dos algoritmos do tipo LMS. O RLS soluciona de forma recursiva o problema de minimização da versão de mínimos quadrados da função custo de Wiener, como mostrado a seguir:

$$\phi_{RLS}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [y(n,i) - d(i)]^2, \quad (2.11)$$

em que $y(n, i) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(i)$ e $0 < \lambda \leq 1$ é o fator de esquecimento, parâmetro utilizado para ponderar somatórios em funções custo, dando pesos maiores às amostras de tempo mais recentes. Igualando o gradiente da função custo acima com relação a $\mathbf{w}(n)$ ao vetor nulo e utilizando as expressões de gradiente (A.1) e (A.2), desenvolvidas no Apêndice A, obtém-se

$$\nabla_{\mathbf{w}} \phi_{RLS}(n) = 2 \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [y(n, i) - d(i)] \mathbf{x}^*(i) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} d(i) \mathbf{x}^H(i) = \mathbf{w}^T(n) \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^H(i). \quad (2.12)$$

Pode-se definir, para fins de simplificação de notação, $\mathbf{z}_1(n)$ como sendo a transposta do termo do lado esquerdo da eq. (2.12) e $\Phi_1(n)$ como a transposta do termo em somatório no lado direito da mesma equação. Desta forma, pode-se escrever

$$\mathbf{z}_1(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} d(i) \mathbf{x}^*(i), \quad (2.13)$$

$$\Phi_1(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}^*(i) \mathbf{x}^T(i). \quad (2.14)$$

Deste modo, pode-se encontrar uma equação equivalente à equação de Wiener para este problema:

$$\mathbf{z}_1^T(n) = \mathbf{w}^T(n) \Phi_1^T(n) \Rightarrow \mathbf{z}_1(n) = \Phi_1(n) \mathbf{w}(n) \Rightarrow \mathbf{w}(n) = \Phi_1(n)^{-1} \mathbf{z}_1(n). \quad (2.15)$$

A solução para a equação acima será encontrada de forma recursiva. De acordo com as definições contidas nas eqs. (2.13) e (2.14), pode-se escrever as seguintes recursões para $\mathbf{z}_1(n)$ e $\Phi_1(n)$:

$$\mathbf{z}_1(n) = \lambda \mathbf{z}_1(n-1) + d(n) \mathbf{x}^*(n), \quad (2.16)$$

$$\Phi_1(n) = \lambda\Phi_1(n-1) + \mathbf{x}^*(n)\mathbf{x}^T(n).$$

Entretanto, faz-se necessário encontrar uma recursão para $\mathbf{P}_1(n) = \Phi_1(n)^{-1}$, que pode ser deduzida utilizando-se o Lema da Inversão de Matrizes [22]:

$$\mathbf{P}_1(n) = \lambda^{-1} \cdot [\mathbf{P}_1(n-1) - \mathbf{k}_1(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}_1(n-1)], \quad (2.17)$$

tal que

$$\mathbf{k}_1(n) = \frac{\mathbf{P}_1(n-1)\mathbf{x}^*(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}_1(n-1)\mathbf{x}^*(n)}. \quad (2.18)$$

A partir da equação acima, escreve-se:

$$\mathbf{k}_1(n)\lambda = [\mathbf{P}_1(n-1) - \mathbf{k}_1(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}_1(n-1)]\mathbf{x}^*(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{k}_1(n) = \mathbf{P}_1(n)\mathbf{x}^*(n). \quad (2.19)$$

Utilizando a eq. (2.19) e as recursões (2.16) e (2.17), é possível encontrar um algoritmo que soluciona a eq. (2.15) recursivamente. A partir da eq. (2.15), tem-se

$$\mathbf{w}(n) = \lambda\mathbf{P}_1(n)\mathbf{z}_1(n-1) + d(n) \mathbf{P}_1(n)\mathbf{x}^*(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{P}_1(n-1)\mathbf{z}_1(n-1) - \mathbf{k}_1(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}_1(n-1)\mathbf{z}_1(n-1) + d(n) \mathbf{P}_1(n)\mathbf{x}^*(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}_1(n)\{d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n-1)\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}_1(n)\{d(n) - \xi(n)\}, \quad (2.20)$$

sendo $\xi(n) = \mathbf{w}^T(n-1)\mathbf{x}(n)$ é a *estimação da saída a priori*. Finalmente, a partir das eqs. (2.17), (2.18) e (2.20) pode-se resumir as expressões do RLS da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_1(n) = \frac{\mathbf{P}_1(n-1)\mathbf{x}^*(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}_1(n-1)\mathbf{x}^*(n)},$$

$$\mathbf{P}_1(n) = \lambda^{-1} \cdot [\mathbf{P}_1(n-1) - \mathbf{k}_1(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}_1(n-1)],$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}_1(n)\{d(n) - \xi(n)\}.$$

A matriz $\mathbf{P}_1(n)$ é uma estimação da inversa da matriz de autocorrelação temporal $\Phi_1(n)$. Devido à isso, a matriz $\mathbf{P}_1(n)$ deve ser inicializada de forma não-singular. Desta forma, ela é normalmente inicializada como $\mathbf{P}(0) = \delta^{-1}\mathbf{I}_M$, onde δ é uma constante positiva e \mathbf{I}_M é a matriz identidade de dimensão M .

2.3 Equalização Cega

A principal característica dos algoritmos de equalização cega nos receptores adaptativos é não realizar a aquisição através de um período de treinamento. Deste modo, eles devem recuperar o sinal transmitido tendo acesso apenas ao sinal recebido e a estatísticas do sinal transmitido. Para tanto, historicamente as técnicas de equalização cega baseiam-se, grosso modo, em uma das três abordagens seguintes:

- Técnicas que utilizam Estatísticas de Ordem Superior (*Higher Order Statistics - HOS*) implicitamente: essas técnicas, dentro das quais podem ser classificadas todas as técnicas cegas deste trabalho, utilizam informações estatísticas do sinal transmitido e exploram, sem a utilização direta, estatísticas de ordem superior a 2 do sinal recebido, e.g., [2-4, 6];
- Técnicas que utilizam HOS explicitamente: essas técnicas, geralmente do tipo *off-line*, realizam o cálculo de *cumulantes* ou *poliespectros* de ordem superior a 2 para, com base nessas informações, realizar a equalização do canal, e.g., [5, 30-33];
- Técnicas que utilizam Estatísticas de Segunda Ordem (*Second Order Statistics - SOS*): essas técnicas baseiam-se na *cicloestacionariedade* do sinal recebido para equalizar o canal sem a necessidade de utilizar HOS, válidas para sistemas com mais saídas do que entradas, e.g., [34, 35].

Este estudo desenvolve apenas técnicas do primeiro tipo, ou seja, que utilizam HOS implicitamente. A seguir é feito um breve comentário a respeito dos algoritmos mais importantes de equalização cega e adaptativa existentes na literatura.

2.3.1 Técnicas de Bussgang

As Técnicas de Bussgang estão entre os algoritmos clássicos para a realização de equalização cega, sendo incluídas no primeiro grupo de técnicas supracitadas. Essas técnicas, por não terem conhecimento da seqüência desejada, utilizam operadores não-lineares sem memória $\vartheta[\cdot]$ para estimar o símbolo desejado. As Técnicas de Bussgang possuem a mesma estrutura da equação de adaptação do LMS, porém, com a substituição do sinal de desejado $d(n)$ por sua estimação não-linear $\vartheta[y(n)]$. Todos os algoritmos pertencentes a esse grupo de técnicas possuem a mesma forma geral dada por [36]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu (y(n) - \vartheta[y(n)]) \mathbf{x}^*(n) \frac{\partial \vartheta[y(n)]}{\partial \mathbf{w}(n)}.$$

A seguir são comentados brevemente alguns dos principais algoritmos que podem ser classificados como Técnicas de Bussgang. O CMA, por ser o principal tema de estudos desta dissertação, será comentado mais detalhadamente no **Capítulo 3**. Devido à isso, o algoritmo de Godard, que possui como caso particular o CMA, não será incluído nesta lista de principais algoritmos de Bussgang, apesar de poder ser classificado como um dos mais importantes.

Decision Directed Algorithm (DDA)

O DDA é considerado como o primeiro algoritmo de equalização cega, sendo proposto em 1965 por Lucky [2]. O DDA pode ser visto como a Técnica de Bussgang que utiliza o símbolo decidido como estimação de $d(n)$. Desta forma, a estimação não-linear sem memória $\vartheta[y(n)]$ utilizada pelo DDA é dada por

$$\vartheta[y(n)] = \hat{a}(n),$$

o que implica em uma equação de adaptação dos pesos do equalizador dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu (y(n) - \hat{a}(n)) \mathbf{x}^*(n).$$

O gradiente de $\hat{a}(n)$ em relação a $\mathbf{w}(n)$ foi assumido como sendo nulo, dado que a probabilidade de ocorrência de uma transição abrupta no valor de $\hat{a}(n)$ para algum $\mathbf{w}(n)$ é igual a zero. Essa escolha para o estimador feita pelo DDA é talvez a forma mais natural de se estimar $d(n)$, visto que, se o dispositivo de decisão realiza decisões corretas, os algoritmos LMS e DDA tornam-se idênticos. Entretanto, se a presença de ISI é elevada no sistema, o dispositivo de decisão realiza decisões incorretas e, conseqüentemente, o

desempenho do DDA não é satisfatório. Mazo [37] demonstrou, através de um simples exemplo, que o DDA operando sozinho pode convergir para um mínimo indesejável. Deste modo, torna-se de grande importância a utilização do DDA em conjunto com um algoritmo mais robusto, de forma que o DDA entre em operação em uma situação em que exista um nível razoavelmente baixo de ISI. Em outras palavras, pode-se dizer que o DDA geralmente é incapaz de “abrir o olho” de um sinal na saída de um canal de comunicação.

Assim, torna-se necessário que o DDA opere em uma versão de modo dual ou *dual mode*, na qual o ajuste inicial dos coeficientes do equalizador pode ser realizado por um algoritmo mais robusto e, após o cumprimento de um determinado critério de comutação, o algoritmo de adaptação do equalizador é comutado para o DDA.

Algoritmo de Sato (SA)

O primeiro algoritmo cego que demonstrou ser capaz de “abrir o olho” de um sinal na saída de um canal de comunicação foi proposto por Sato em 1975 [3] e ficou conhecido como Algoritmo de Sato (SA). Considerando que os sinais envolvidos são reais, o SA é a Técnica de Bussgang que utiliza como estimador a seguinte expressão:

$$\vartheta[y(n)] = \gamma \operatorname{sgn}[y(n)],$$

em que γ é uma constante dada por $\frac{E\{a^2(n)\}}{E\{|a(n)|\}}$ e $\operatorname{sgn}[\cdot]$ representa a função que extrai o valor do sinal algébrico de seu argumento. A expressão acima implica que a equação de adaptação dos pesos do equalizador do SA é dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu (y(n) - \gamma \operatorname{sgn}[y(n)]) \mathbf{x}^*(n).$$

Apesar de possuir uma robustez maior à ISI que o DDA, foi demonstrado que o SA não possui convergência garantida para um ponto de mínimo que corresponda à um nível aceitável de ISI, mesmo para equalizadores de comprimento infinito [38].

Algoritmo *Stop-and-Go* (SAG)

O SAG foi proposto por Picchi e Prati em 1987 [4] e pode ser visto como uma versão mais robusta do DDA. De fato, o SAG realiza a mesma adaptação que o DDA, porém, essa adaptação só é realizada se o erro de decisão é considerado suficientemente confiável. A equação de adaptação dos pesos do equalizador utilizando o SAG pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu e_{DD-SAG}(n) \mathbf{x}^*(n),$$

$$\text{em que } e_{DD-SAG}(n) = \chi_R(n) e_{DD_R}(n) + j \chi_I(n) e_{DD_I}(n), \quad (2.21)$$

$$\chi_i(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } \text{sgn}[e_i(n)] = \text{sgn}[y_i(n) - \beta \hat{a}_i(n)], \\ 0, & \text{se } c.c. \end{cases}$$

Na equação acima o índice $i = \{R, I\}$, sendo que R e I denotam, respectivamente, as partes real e imaginária de um sinal; $e_{DD}(n) = y(n) - \hat{a}(n)$ é o erro de Decisão Direta ou Decisão Dirigida; e β é um parâmetro que implementa a condição de confiabilidade do erro de Decisão Dirigida. Em geral, o valor de β é uma constante que depende do esquema de modulação utilizado.

Esse teste de confiança realizado pelo SAG aumenta sua estabilidade, fazendo com que ele seja capaz de atingir a convergência mesmo em situações em que exista um nível elevado de ISI.

2.3.2 Algoritmo de Shalvi-Weinstein - SWA

Um dos mais importantes algoritmos de equalização cega que não possui a estrutura das Técnicas de Bussgang foi proposto por Shalvi e Weinstein em 1990 [5]. Esse algoritmo, classificado como uma técnica que utiliza HOS explicitamente, segue a linha de um teorema que fundamenta boa parte da teoria conhecida sobre equalização cega, o *Teorema de Benveniste-Goursat-Rouget* [39]. Este teorema afirma que a equalização de um canal é atingida se o sinal transmitido e o sinal da saída do equalizador possuem a mesma função densidade de probabilidade. Neste mesma linha, em [33] é mostrado que, para a realização da equalização de um canal, é suficiente igualar, para os sinais transmitido e da saída do equalizador, uma estatística de ordem 2 e alguma outra de ordem superior a 2.

Prosseguindo na direção desses dois resultados, Shalvi-Weinstein mostraram que, sujeito a uma restrição de potência, o módulo da curtose do sinal branco transmitido é sempre maior ou igual ao módulo da curtose do sinal da saída do equalizador. Por curtose entende-se a seguinte estatística de um sinal complexo $y(n)$:

$$K[y(n)] = E\{|y(n)|^4\} - 2E\{|y(n)|^2\} - |E\{y^2(n)\}|^2.$$

Desta forma, foi proposto um algoritmo (SWA) cujo critério de otimização é a maximização do módulo da curtose do sinal na saída do equalizador, sujeito a uma restrição de igualdade entre as potências de $y(n)$ e $a(n)$. Em outras palavras, o problema de otimização pode ser posto da seguinte forma:

$$\max |K[y(n)]|, \quad \text{sujeito a: } E\{|y(n)|^2\} = E\{|a(n)|^2\}.$$

O SWA possui propriedades de convergência muito semelhantes às do CMA. De fato, em [40] foi demonstrado que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de mínimo da função custo do SWA e do CMA.

2.4 Equalização de Canais Não-Lineares

Esta dissertação também tem como tema de estudos a equalização de canais não-lineares. Para tanto faz-se necessário introduzir os modelos correspondentes a essas estruturas de filtragem. Em especial, este trabalho visa desenvolver técnicas para a equalização de canais do tipo Wiener utilizando diferentes estruturas para o equalizador.

Uma versão simplificada do sistema de comunicação SISO não-linear empregado é mostrada na fig. 2.2. O canal de comunicação é modelado como um filtro MA linear seguido por um filtro polinomial sem memória, i.e., um modelo de Wiener [18]. A primeira estrutura utilizada para o equalizador será um modelo de Hammerstein, i.e., um filtro polinomial sem memória seguido por um filtro MA linear [18]. Também serão testados, como modelos de estrutura para o equalizador, um filtro Volterra completo e um filtro Volterra diagonal, descritos a seguir, e como mostra a fig. 2.3. Nas figs. 2.2 e 2.3, a seqüência transmitida $\{a(n)\}$ é i.i.d. e pode assumir qualquer símbolo da constelação com igual probabilidade. A seqüência de saída da parte linear do canal $u(n)$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$u(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a(n-i)h_i = \mathbf{h}^T \mathbf{a}(n),$$

em que $\mathbf{h} = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{N-1}]^T$ é a resposta ao impulso da parte linear do canal, N é o comprimento (memória) de \mathbf{h} e $\mathbf{a}(n) = [a(n) \ a(n-1) \ \dots \ a(n-N+1)]^T$ é o vetor que contém o sinal transmitido. É importante ressaltar que, dentro do modelo aqui adotado, $u(n)$ não é um sinal acessível. O sinal recebido $\{x(n)\}$ pode ser expresso de acordo com a equação a seguir

$$x(n) = \sum_{i=0}^{L-1} c_i u^i(n) + v(n) = \mathbf{c}^T \mathbf{u}(n) + v(n), \quad (2.22)$$

na qual $\mathbf{c} = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{L-1}]^T$ é o vetor que contém os coeficientes da não-linearidade polinomial do canal, L é o comprimento (ou ordem) da parte não-linear do canal, $\mathbf{u}(n) = [1 \ u(n) \ u^2(n) \ \dots \ u^{L-1}(n)]^T$ é o vetor que contém as entradas para o filtro não-linear do canal e $v(n)$ é o ruído branco aditivo gaussiano (AWGN).

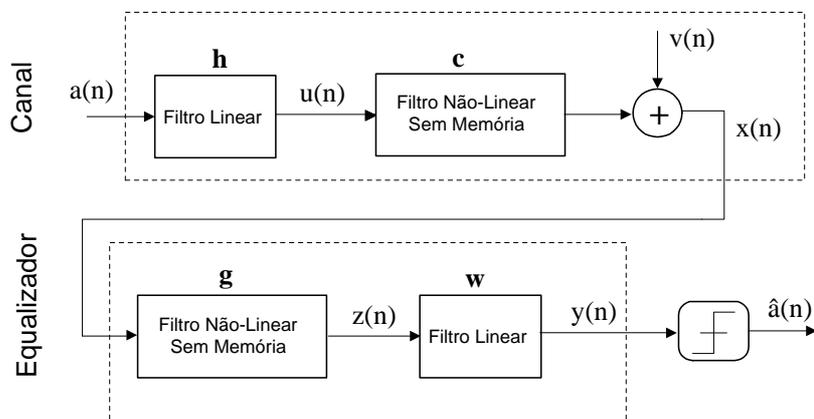


Figura 2.2: Estrutura simplificada do sistema de comunicação não-linear empregado utilizando um equalizador do tipo Hammerstein.

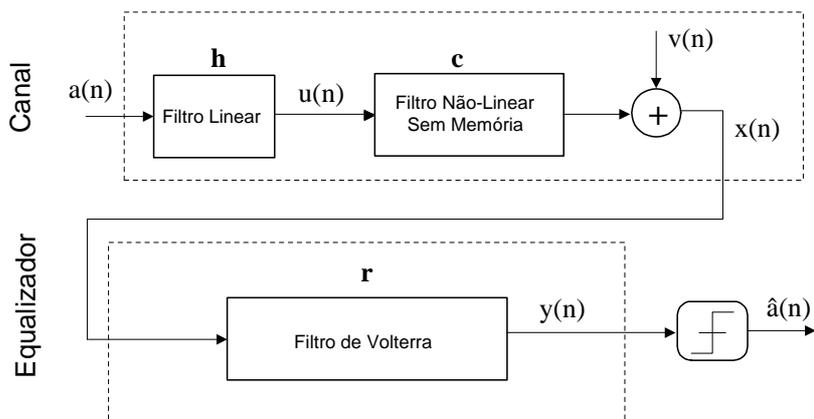


Figura 2.3: Estrutura simplificada do sistema de comunicação não-linear empregado utilizando um equalizador do tipo Volterra.

Na fig. 2.2, o sinal de saída da parte não-linear do equalizador, representado por $z(n)$, é dado por

$$z(n) = \sum_{i=0}^{P-1} g_i x^i(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{x}_g(n) \quad (2.23)$$

e o sinal de saída final do equalizador, representado por $y(n)$, pode ser expresso da seguinte forma:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} z(n-i) w_i = \mathbf{w}^T \mathbf{z}(n), \quad (2.24)$$

em que P é o comprimento (ou ordem) da parte não-linear do equalizador, $\mathbf{g} = [g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{P-1}]^T$ é o vetor que contém os coeficientes da parte não-linear do equalizador, $\mathbf{x}_g(n) = [1 \ x(n) \ x^2(n) \ \dots \ x^{P-1}(n)]^T$ é o vetor que contém as potências do sinal recebido, i.e., as entradas da parte não-linear do equalizador, M é o comprimento (memória) da parte linear do equalizador, $\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{M-1}]^T$ é o vetor de coeficientes da parte linear do equalizador e $\mathbf{z}(n) = [z(n) \ z(n-1) \ \dots \ z(n-M+1)]^T$ é o vetor que contém as entradas da parte linear do equalizador.

Substituindo-se a eq. (2.23) na (2.24), é também possível escrever a saída do equalizador $y(n)$ da seguinte forma:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{P-1} g_j w_i x^j(n-i) \Rightarrow \quad (2.25)$$

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{X}(n) \mathbf{w},$$

em que $\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}_g(n) \ \mathbf{x}_g(n-1) \ \dots \ \mathbf{x}_g(n-M+1)]$. Definindo-se o vetor $\mathbf{p}(n) = \mathbf{X}(n) \mathbf{w}$, é possível ainda reescrever a saída do equalizador como

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{p}(n). \quad (2.26)$$

As eqs. (2.24) e (2.26) serão utilizadas nos desenvolvimentos dos algoritmos para a otimização dos vetores \mathbf{g} e \mathbf{w} de forma separada, considerando-os como independentes. Devido a isso, os algoritmos baseados nesta abordagem serão chamados de técnicas *Separadas*. Nessa abordagem, os vetores \mathbf{g} e \mathbf{w} são adaptados de forma alternada.

Pode-se também desenvolver uma abordagem que adapta esses dois filtros conjuntamente, considerando-os como um só filtro do tipo Volterra Diagonal (fig. 2.3). Os filtros de Volterra Diagonal são caracterizados pela seguinte relação de entrada-saída

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{P-1} r_{(i,j)} x^j(n-i), \quad (2.27)$$

em que $r_{(i,j)}$ ($1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq P$) são os coeficientes do filtro, M é a memória do modelo e P a ordem. Comparando as eqs. (2.25) e (2.27) pode-se definir o vetor \mathbf{r} da seguinte forma:

$$r_{j+iP} = g_j w_i, \quad (2.28)$$

em que $0 \leq j \leq P - 1$ e $0 \leq i \leq M - 1$, ou na forma vetorial equivalente

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{w}, \quad (2.29)$$

em que \otimes representa o *Produto de Kronecker*. Deste modo, pode-se expressar a saída do equalizador utilizando o vetor $\mathbf{r} = [r_0 \ r_1 \ \dots \ r_{PM-1}]^T$:

$$y(n) = \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{x}}(n), \quad (2.30)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{x}}(n) = [\underbrace{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1}_{P \text{ vezes}} \ 1 \ x(n) \ x^2(n) \ \dots \ x^{P-1}(n) \ 1 \ x(n-1) \ x^2(n-1) \ \dots \ x^{P-1}(n-1) \ \dots \ 1 \ x(n-M+1) \ x^2(n-M+1) \ \dots \ x^{P-1}(n-M+1)]^T.$$

O vetor \mathbf{r} contém informações sobre os coeficientes das partes linear e não-linear do equalizador. Assim, utilizando a eq. (2.30) pode-se adaptar o vetor de coeficientes \mathbf{r} no lugar de adaptar dois filtros separadamente. Ademais, observa-se que a eq. (2.30) possui a mesma estrutura das eqs. (2.24) e (2.26), mantendo uma relação linear entre a saída $y(n)$ e o filtro de coeficientes do equalizador.

O filtro de Volterra Diagonal acima descrito pode ser visto como um caso particular do filtro de Volterra completo, que é a última estrutura considerada para o equalizador. Para um filtro de Volterra, pode-se expressar a saída do equalizador como mostra a seguir:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{M-1} \dots \sum_{n_i=0}^{M-1} b_{(i,n_1,\dots,n_i)} \prod_{j=1}^i x(n-n_j), \quad (2.31)$$

em que $b_{(i,n_1,\dots,n_i)}$ são os coeficientes do filtro de Volterra, M é a memória do modelo e P a ordem. É possível também escrever a eq. (2.31) utilizando uma notação vetorial:

$$y(n) = \mathbf{b}^T \check{\mathbf{x}}(n), \quad (2.32)$$

em que \mathbf{b} é o vetor de dimensão $\frac{M^{P+1}-M}{M-1}$ por 1 que contém os coeficientes de Volterra e

$$\check{\mathbf{x}}(n) = [\mathbf{x}^T(n) \ \mathbf{x}_2^T(n) \ \dots \ \mathbf{x}_P^T(n)]^T \quad (2.33)$$

é o vetor que contém todas as entradas para o filtro de Volterra completo, que pode ser obtido a partir do vetor $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$, utilizando a relação $\mathbf{x}_P(n) = \mathbf{x}(n) \otimes \dots \otimes \mathbf{x}(n)$ ($P-1$ vezes o produto de Kronecker). Ressalta-se que a eq. (2.32) possui a mesma estrutura das eqs. (2.24), (2.26) e (2.30), ou seja, observa-se que o filtro Volterra também é uma estrutura de filtragem linear com relação aos coeficientes do equalizador.

Notação Unificada: uma Abordagem Original

Pode-se simplificar a notação introduzida acima definindo-se uma notação unificada que descreve as três abordagens de maneira única. As três diferentes estruturas consideradas para o equalizador, expressadas pelas eqs. (2.24), (2.26), (2.30) e (2.32), podem ser unificadas utilizando-se a relação seguinte:

$$y(n) = \mathbf{q}^T \mathbf{t}(n), \quad (2.34)$$

em que \mathbf{q} é o vetor de pesos do equalizador e $\mathbf{t}(n)$ é o vetor que contém as entradas para o equalizador. A eq. (2.34) pode ser vista como uma representação genérica para $y(n)$, na qual os vetores \mathbf{q} e $\mathbf{t}(n)$ dependem da técnica a ser considerada. A Tabela 2.1 define os vetores \mathbf{q} e $\mathbf{t}(n)$ para as diferentes abordagens consideradas neste trabalho. Essa notação unificada introduzida pela eq. (2.34) servirá como base para o desenvolvimento de diferentes técnicas utilizando-se o mesmo modelo matemático, mesmo considerando-se diferentes estruturas para o equalizador.

Tabela 2.1: Valores de \mathbf{q} e $\mathbf{t}(n)$ para as diferentes técnicas

Técnica	\mathbf{q}	$\mathbf{t}(n)$
Separada - Adaptação de \mathbf{g}	\mathbf{g}	$\mathbf{p}(n)$
Separada - Adaptação de \mathbf{w}	\mathbf{w}	$\mathbf{z}(n)$
Volterra diagonal	\mathbf{r}	$\tilde{\mathbf{x}}(n)$
Volterra	\mathbf{b}	$\check{\mathbf{x}}(n)$

É importante ressaltar que, utilizando-se a notação unificada introduzida, a saída do equalizador $y(n)$ é linear com relação ao vetor que contém os coeficientes dos filtros \mathbf{q} . Isto significa que as técnicas utilizadas em estruturas lineares podem ser aplicadas diretamente nas estruturas aqui consideradas: filtro de Hammerstein, filtro de Volterra diagonal e filtro de Volterra. Além disso, as três abordagens consideradas podem ser consideradas como tendo uma mesma estrutura.

Esta notação unificada é de grande importância para o desenvolvimentos dos

algoritmos de equalização cega desenvolvidos neste trabalho, uma vez que ela facilita bastante o tratamento matemático realizado para o desenvolvimento dos algoritmos. Assim, esta abordagem unificada pode ser considerada como a principal contribuição desta dissertação no que diz respeito ao tratamento não-linear de sinais.

2.5 Comentários Finais

No início deste capítulo foram introduzidos alguns conceitos importantes para o desenvolvimento da dissertação e, a seguir, foi feito um breve resumo das técnicas clássicas de equalização supervisionada e não-supervisionada existentes na literatura. O CMA, que também pode ser classificado como uma técnica clássica de equalização cega, será estudado no capítulo a seguir. Nesse mesmo capítulo serão também propostas técnicas inspiradas no CMA, ou seja, que se baseiam em modificações da função custo CM. As técnicas propostas formam um família de algoritmos com propriedades bastante interessantes, os quais podem ser classificados como técnicas de Bussgang. Assim, os algoritmos propostos a seguir podem ser classificados, de acordo com a divisão introduzida no presente capítulo, como técnicas que utilizam HOS implicitamente.

No que concerne a equalização de canais não-lineares, o principal objetivo do presente capítulo foi introduzir uma notação unificada para as três estruturas consideradas. Essa notação, por ser linear com relação aos coeficientes dos filtros, permite que as técnicas de equalização utilizadas em estruturas lineares sejam aplicadas nas três estruturas não-lineares estudadas. No próximo capítulo será feito o desenvolvimento dos algoritmos para equalização de canais do tipo Wiener de maneira idêntica ao dos algoritmos que utilizam filtros MA lineares, tendo como critério de otimização a função custo CM.

Capítulo 3

O Módulo Dirigido pela Decisão

ESTE capítulo inicialmente apresenta um dos algoritmos clássicos para a realização de equalização cega, o CMA. É então proposta uma família de técnicas para a realização de equalização cega baseada em critérios CM modificados. As funções custo propostas utilizam decisões dirigidas para estimar referências para o sinal de saída do equalizador. Na verdade, a primeira das funções custo propostas pode ser vista como uma generalização da função custo CM para constelações com diferentes amplitudes. A outra função custo pode ser vista como uma generalização, também para constelações com diferentes amplitudes, da função custo Módulo Constante Modificado (*Modified Constant Modulus* - MCM) [14]. Desta forma, os algoritmos propostos utilizam decisões dirigidas e, devido a isso, são prejudicados por decisões incorretas. Assim, são também apresentadas soluções para os casos em que ocorre um número elevado de decisões incorretas. Nessas situações, o ajuste inicial dos coeficientes do equalizador pode ser realizado por um algoritmo mais robusto e, após o cumprimento de um determinado critério de comutação, o algoritmo de adaptação do equalizador realiza uma comutação (ou chaveamento) para um dos algoritmos propostos. Na última parte deste capítulo o CMA será utilizado em estruturas não-lineares para equalizar canais do tipo Wiener. As expressões de adaptação do equalizador serão desenvolvidas para três estruturas diferentes utilizando-se a notação unificada introduzida na Seção 2.4.

O restante do presente capítulo é organizado da seguinte forma. A Seção 3.1 revisa o algoritmo clássico CMA; a Seção 3.2 revisa algumas técnicas baseadas em critérios CM modificados encontradas na literatura; na Seção 3.3 é apresentada a primeira técnica proposta nesta dissertação, o Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão - *Decision Directed Modulus Algorithm* (DDMA), que dará origem aos outros algoritmos desenvolvidos; na Seção 3.4 é explicado resumidamente o Algoritmo do Módulo Constante Modificado - *Modified Constant Modulus Algorithm* (MCMA), uma técnica inspirada em uma decomposição do CMA; a Seção 3.5 apresenta o Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Modificado - *Modified Decision Directed Modulus Algorithm* (MDDMA), uma versão do MCMA dirigida pela decisão; a Seção 3.6 apresenta as técnicas de equalização cega de canais não-lineares baseadas no CMA; e na Seção 3.7 é feito um pequeno resumo das principais contribuições realizadas neste capítulo.

3.1 O Algoritmo do Módulo Constante - CMA

O CMA é uma das técnicas mais estudadas e utilizadas para a realização de equalização cega. O CMA foi desenvolvido independentemente por Godard [6] e Treichler & Agel [7] ainda no anos 80. A função custo CM penaliza desvios do sinal da saída do equalizador em relação a um raio de referência fixo. Na verdade, ela faz parte de uma classe de funções custo mais genéricas, conhecida como Funções Custo de Godard [6]:

$$J_p = E\{|y(n)|^p - R_p\}^2, \quad (3.1)$$

em que R_p é a potência de referência dada por

$$R_p = \frac{E\{|a(n)|^{2p}\}}{E\{|a(n)|^p\}}. \quad (3.2)$$

Este valor de R_p é tal que o mínimo global da função custo CM é encontrado quando o equalizador atinge a solução ZF, ou seja, $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau$ [6]. Nesta dissertação, o estudo dos algoritmos de Godard será restrito ao caso $p = 2$, quando a função custo (3.1) é também chamada de função custo CM. No restante deste trabalho a constante R_p será designada simplesmente de R quando referir-se ao caso $p = 2$. A equação de adaptação dos coeficientes do equalizador utilizando o CMA pode ser obtida calculando-se o gradiente da função custo CM em relação ao vetor de coeficientes do equalizador \mathbf{w} . Com o auxílio das eqs. (A.1) e (A.2), contidas no Apêndice A, pode-se escrever:

$$\nabla_{\mathbf{w}} J_{CM}(n) = 4E\{(|y(i)|^2 - R)y(i)\mathbf{x}^*(i)\},$$

em que $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]$ é o vetor de entradas do equalizador. Da equação acima obtém-se

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} J_{CM}(n) = \mathbf{w}(n) - \mu E\{(|y(i)|^2 - R)y(i)\mathbf{x}^*(i)\}.$$

Substituindo-se a esperança matemática por sua estimação instantânea, chega-se a

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu y(n)(|y(n)|^2 - R)\mathbf{x}^*(n), \quad (3.3)$$

em que μ é fator de passo que controla a convergência algorítmica. O CMA possui uma complexidade computacional bastante reduzida, conseguindo atingir facilmente os requerimentos de complexidade de aplicações em tempo real. Outra característica que se deve ressaltar no CMA, como já comentado anteriormente, é a sua grande robustez ao

ruído, à má modelagem da ordem do canal e às fontes correlacionadas [8-13]. Desta forma o CMA pode ser classificado como um dos algoritmos mais robustos para equalização cega, apesar de, como será visto mais tarde na **Capítulo 4**, não ter convergência garantida para um mínimo global.

Deve-se ressaltar ainda que a função custo CM é independente da fase do sinal de saída do equalizador. Isso gera uma convergência lenta do CMA em relação a algoritmos que possuam alguma informação relativa à fase. Contudo, essa independência em relação à fase aumenta a robustez do CMA a erros de recuperação de portadora do sinal recebido. Nestes casos, faz-se necessário o uso de um dispositivo do tipo PLL após o equalizador.

Como já mencionado anteriormente, a função custo CM funciona de maneira bastante eficiente em constelações cujos pontos possuem todos a mesma amplitude (como no caso de sinais PSK). Entretanto, quando a constelação do sinal transmitido pode assumir diversas amplitudes (como no caso de sinais QAM), o erro da função custo CM não se anula, devido ao fato de o módulo de referência R ser uma esperança matemática diferente de todos os módulos quadráticos dos símbolos transmitidos. Isto torna-se bem claro na função custo CM, expressada pela eq. (3.1). Desta forma, a aplicação do CMA em sinais do tipo QAM gera uma performance subótima, em termos de velocidade de convergência e erro residual, devido ao fato de o algoritmo sempre ter um termo de desajuste, mesmo quando o canal está perfeitamente equalizado. Quanto maior é a ordem da constelação QAM, maior é o desajuste do algoritmo. Ele consegue atingir apenas um nível moderado de EQM [41]. Esta é a razão pela qual a performance do CMA é pior em sinais QAM do que em sinais PSK. Além disso, a lenta velocidade de convergência do CMA quando aplicada em sinais QAM é também um ponto muito importante a ser considerado.

3.2 Algumas Técnicas Baseadas em Funções Custo CM Modificadas

Diversos autores propuseram técnicas baseadas em modificações da função custo CM com o intuito de generalizar o CMA para constelações com múltiplos raios. Uma das primeiras funções custo com esse intuito foi a *Multiple Modulus* (MM), proposta em [42]. A função custo MM pode ser vista como um produto de várias funções custo CM com diferentes raios de referência:

$$J = E\{(|y(n)|^2 - R_1)^2(|y(n)|^2 - R_2)^2 \cdots (|y(n)|^2 - R_{N_p})^2\},$$

em que R_1, R_2, \dots, R_{N_p} são os módulos quadráticos dos símbolos da constelação transmitida. O *Multiple Modulus Algorithm* (MMA) é a técnica gerada pela Regra do Gradiente Estocástico aplicada na função custo acima. Em [42] foi verificado que o MMA possui um desempenho melhor que o CMA em alguns casos. Entretanto, o MMA parece

estar limitado a constelações com poucos raios. Para constelações com 3 ou mais raios (16QAM ou maior), o MMA apresenta uma forte sensibilidade em relação ao espalhamento de autovalores [43] [44], o que o torna uma técnica muito limitada.

Outra técnica encontrada na literatura inspirada no critério CM para sinais com múltiplos raios é o *Decision Adjusted Modulus Algorithm* (DAMA), proposta em [42] para sinais reais e reintroduzido em [45] para sinais complexos, com o nome de *Radius Decision Equalization* (RDE). No restante da presente dissertação essa técnica será chamada de DAMA, cuja função custo é dada por

$$J = E\{\min[|y(n)|^2 - R_i]^2\}, \quad 1 \leq i \leq N_p.$$

A equação de adaptação dos pesos do equalizador do DAMA é obtida calculando-se o gradiente estocástico da função custo acima, resultando em

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu y(n) \{\min[|y(n)|^2 - R_i]\} \mathbf{x}^*(n), \quad 1 \leq i \leq N_p. \quad (3.4)$$

Pela equação acima é fácil observar que o termo de ajuste da equação de adaptação do DAMA torna-se zero nos pontos correspondentes aos símbolos transmitidos, ou seja, se o sinal está perfeitamente equalizado o equalizador interrompe o ajuste dos pesos. Entretanto, em muitos casos, o DAMA não atinge uma convergência satisfatória devido ao grande número de decisões incorretas. Nesses casos, a velocidade de convergência, o EQM residual e a estabilidade do DAMA podem ser bastante beneficiados operando-se no chamado modo dual (*dual-mode*), como foi desenvolvido em [46], em que os autores propuseram o *Assisted Decision Adjusted Modulus Algorithm* (CADAMA). O CADAMA é um tipo de *dual-mode* DAMA (ou DAMA modo dual), em que o CMA realiza os ajustes iniciais do equalizador e, após o cumprimento de um determinado critério de comutação, o algoritmo de adaptação do equalizador passa a ser o DAMA.

3.3 O Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão - DDMA

A seguir será apresentada a primeira técnica nova desta dissertação. Trata-se de um algoritmo inspirado no CMA, porém com significativas vantagens sobre o mesmo. A idéia principal dessa nova técnica reside no fato de sua função custo ser “casada” com a constelação, ou seja, a função custo torna-se nula se num dado instante n o módulo da saída do equalizador é igual ao módulo de um dos símbolos da constelação do sinal transmitido. Para tanto, a função custo em questão utiliza decisões dirigidas, porém, apenas o módulo de tais decisões é levado em conta na expressão da função custo.

Na verdade, esta técnica utiliza o módulo quadrático do símbolo decidido como raio de referência, ou seja, em substituição à constante R . Devido a isso, o nome dado a esta função custo é Módulo Dirigido pela Decisão (*Decision Directed Modulus* - DDM), cuja expressão é dada por

$$J_{DDM} = E\{(|y(n)|^2 - |\hat{a}(n)|^2)^2\}. \quad (3.5)$$

Como pode-se perceber, o erro da função custo DDM é definido como a diferença entre o módulo quadrático da saída do equalizador e do símbolo decidido. Assim, na ausência de ruído, se o sinal está perfeitamente equalizado, o erro da função custo DDM anula-se. É importante observar que a função custo CM pode ser vista como um caso particular da função custo CM para o caso de sinais com múltiplas amplitudes, uma vez que para sinais do tipo PSK todos os símbolos decididos possuem o módulo quadrático igual a R . O DDMA é o algoritmo proveniente da aplicação da Regra do Gradiente Estocástico à função custo DDM. Desta forma, calculando-se o gradiente estocástico de (3.5) utilizando as eqs. (A.1) e (A.2), pode-se obter a seguinte equação de adaptação dos pesos do DDMA:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu y(n)(|y(n)|^2 - |\hat{a}(n)|^2)\mathbf{x}^*(n). \quad (3.6)$$

O gradiente de $\hat{a}(n)$ em relação a $\mathbf{w}(n)$ foi assumido como sendo nulo, dado que a probabilidade de ocorrência de uma transição abrupta no valor de $\hat{a}(n)$ para algum $\mathbf{w}(n)$ é igual a zero. O DDMA pode ser visto como uma versão do CMA com um raio de referência variável. Como veremos, sua grande vantagem é justamente sua performance em sinais do tipo QAM, em termos de EQM residual e velocidade de convergência.

Entretanto, o DDMA utiliza uma informação contida no símbolo decidido no instante atual. Este fato diminui sua robustez e causa uma degradação em sua performance se o número de decisões incorretas torna-se muito elevado. Para resolver este problema e melhorar a estabilidade algorítmica, o DDMA pode ser utilizado numa versão de modo dual (*dual mode*). O ajuste inicial dos coeficientes do equalizador pode ser realizado por um algoritmo mais robusto, e.g. o CMA, e, após o cumprimento de um determinado critério de comutação, o algoritmo de adaptação do equalizador é comutado para o DDMA. No resto desta dissertação esta técnica será chamada de *dual-mode DDMA* ou CMA-DDMA. Na Seção 6.1 serão explicados detalhadamente os critérios de comutação utilizados nas simulações computacionais. Entretanto, vale ressaltar que a comutação entre o CMA e o DDMA pode ser implementado como um simples chaveamento entre os raios de referência: inicialmente o raio de referência vale R e depois ocorre o chaveamento para $|\hat{a}(n)|^2$. Desta forma, a complexidade computacional do algoritmo é pouco alterada.

O *dual mode* DDMA ganha em robustez em relação ao *single mode* DDMA (sem comutação). Quando o canal não está equalizado de forma satisfatória, o critério de comutação deve detectar a elevada presença de ISI e, assim, permitir que o processo de

equalização seja realizado pelo CMA, que é, em geral, satisfatoriamente robusto. Ademais, como será visto na seção de simulações computacionais, o *dual mode* DDMA também possui melhor performance que o DDMA em termos de velocidade de convergência e EQM residual, especialmente em constelações QAM de ordem elevada.

Deve-se ressaltar que o DDMA utiliza apenas a magnitude do símbolo transmitido em sua equação de adaptação. Isto significa que uma decisão realizada de maneira incorreta pode ser vista pelo DDMA como uma decisão “correta”, desde que o símbolo decidido incorreto tenha a mesma amplitude do símbolo desejado. Em outras palavras pode-se dizer que o DDMA é insensível a erros de fase do símbolo decidido. Deste modo o número de “regiões de decisão” utilizadas pelo DDMA é igual ao número de diferentes amplitudes da constelação e, portanto, menor que o número de pontos da constelação. Por exemplo, nas constelações 16QAM e 64QAM existem apenas 3 e 9 diferentes amplitudes, respectivamente. Portanto, para essas constelações, o DDMA utiliza, respectivamente, apenas 3 ou 9 “regiões de decisão”.

Em relação ao DAMA, pode-se ver pelas eqs. (3.4) e (3.6) que o erro do termo de ajuste do DDMA é sempre maior ou igual ao do DAMA. Este fato é uma provável causa da convergência do DDMA ser mais veloz que a do DAMA [47]. Outra diferença fundamental entre esses dois algoritmos é o fato de a decisão realizada pelo DDMA é feita a partir do sinal na saída do equalizador, enquanto que no DAMA a decisão é realizada a partir do módulo quadrático do sinal na saída do equalizador. As simulações computacionais comparando estas técnicas também mostrarão que o DDMA possui uma maior estabilidade que o DAMA.

O DDMA é baseado principalmente na utilização da abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão. Desta forma, além de ser o primeiro algoritmo proposto nesta dissertação, o DDMA também é o algoritmo mais importante de todo este trabalho, uma vez que praticamente todas as outras técnicas aqui propostas utilizam (com exceção de uma), de alguma forma, a abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão. Então, o DDMA pode ser visto como o inspirador de todas as outras técnicas **dirigidas pela decisão** aqui propostas. Assim, o DDMA apresenta-se também como uma importante ferramenta para melhoria do desempenho de algoritmos de equalização cega de uma forma geral. Devido a isso, o **Capítulo 4** é dedicado a realizar um estudo teórico sobre o comportamento do DDMA.

3.4 O Algoritmo do Módulo Constante Modificado - MCMA

Uma técnica muito interessante para a realização de equalização cega foi proposta em [14], em que os autores propuseram um algoritmo inspirado em uma decomposição da função custo CM em suas partes real e imaginária. Enquanto o CMA possui uma

referência para o módulo quadrático de $y(n)$, o MCMA possui referências para o quadrado das partes real e imaginária de $y(n)$. Essas referências, para as componentes em fase e em quadratura da saída do equalizador, tornam o MCMA mais adaptado a constelações QAM do que o CMA. A função custo do MCMA pode ser expressa da seguinte forma [14]:

$$J_{MCMA} = E\{(y_R^2(n) - R_R)^2 + (y_I^2(n) - R_I)^2\}, \quad (3.7)$$

em que os índices R e I indicam, respectivamente, as componentes real e imaginária de um sinal; e as constantes R_R e R_I são expressas por $R_R = \frac{E\{a_R^4(n)\}}{E\{a_R^2(n)\}}$ e $R_I = \frac{E\{a_I^4(n)\}}{E\{a_I^2(n)\}}$. O MCMA pode ser desenvolvido aplicando-se a regra do gradiente estocástico na função custo acima, obtendo-se então [14]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu[y_R(n)(y_R^2(n) - R_R) + jy_I(n)(y_I^2(n) - R_I)]\mathbf{x}^*(n).$$

O MCMA tem a capacidade de realizar equalização cega e recuperação de fase da portadora conjuntamente, ou seja, sem o auxílio de um PLL. O MCMA recupera a fase da portadora implicitamente e ainda possui uma performance melhor que a do CMA em relação à velocidade de convergência e precisão, com praticamente a mesma complexidade computacional. O comportamento do MCMA será testado por meio de simulações computacionais no **Capítulo 6**.

Uma análise de convergência do MCMA foi feita em [48], na qual os autores demonstraram que a equação de adaptação do MCMA incorpora implicitamente um PLL discreto de primeira ordem. Foi também demonstrado em [48], para o caso de um canal sem ruído, que o MCMA tem convergência garantida para o mínimo global equivalente à solução ZF, desde que o equalizador tenha comprimento duplamente infinito ou que seja do tipo fracionário.

3.5 Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Modificado - MDDMA

Os algoritmos DDMA e MCMA têm demonstrado prover significativas melhorias no EQM residual e na velocidade de convergência do CMA quando aplicado em sinais QAM de ordens elevadas [49, 47, 14, 48]. Desta forma, uma vez que o MCMA não utiliza decisões dirigidas, é possível unificar as modificações feitas no CMA pelo DDMA e MCMA para criar um novo algoritmo que possa usufruir das contribuições desses dois algoritmos conjuntamente. A idéia baseia-se em, utilizando o último símbolo decidido, estimar as referências para o quadrado das partes real e imaginária de $y(n)$. A função custo deste

algoritmo pode ser vista como uma versão “modificada” da função custo DDM. Daí a razão da nomenclatura utilizada para esta função custo: Módulo Dirigido pela Decisão Modificado (*Modified Decision Directed Modulus* - MDDM), que pode ser expressa da seguinte maneira:

$$J_{MDDM} = E\{(y_R^2(n) - \hat{a}_R^2(n))^2 + (y_I^2(n) - \hat{a}_I^2(n))^2\}. \quad (3.8)$$

Aplicando-se a regra do gradiente estocástico em (3.8) obtém-se a seguinte equação de adaptação dos pesos do MDDMA:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu e_1(n) \mathbf{x}^*(n), \quad (3.9)$$

$$\text{em que } e_1(n) = [y_R(n)(y_R^2(n) - \hat{a}_R^2(n)) + jy_I(n)(y_I^2(n) - \hat{a}_I^2(n))]. \quad (3.10)$$

Pelo mesmo motivo já mencionado para o DDMA, os gradientes de $\hat{a}_R(n)$ e $\hat{a}_I(n)$ em relação a $\mathbf{w}(n)$ foram assumidos como sendo nulos. O MDDMA pode ser visto como uma versão do MCMA com referências variáveis para o quadrado das partes real e imaginária de $y(n)$. Ele também possui a capacidade de realizar equalização cega e de recuperar a fase da portadora conjuntamente. Além disso, ele incorpora as vantagens que o MCMA e o DDMA possuem sobre o CMA quando aplicados em sinais QAM de ordem elevada. Devido a isso o MDDMA possui um desempenho melhor do que os algoritmos CMA, DDMA e MCMA, em termos de EQM residual e velocidade de convergência [50].

Entretanto, como já ressaltado anteriormente, o MDDMA utiliza decisões dirigidas, ou seja, ele também é prejudicado quando o dispositivo de decisão realiza decisões incorretas. Nestes casos, o MDDMA também pode atuar em um modo dual de maneira a melhorar sua estabilidade. Desta forma, o ajuste inicial dos coeficientes do equalizador pode ser realizado por um algoritmo mais robusto e, após o cumprimento de um determinado critério de comutação, o algoritmo de adaptação do equalizador é comutado para o MDDMA. Na Seção 6.1 será explicado detalhadamente os critérios de comutação utilizados nas simulações computacionais. Contudo, vale ressaltar que a comutação entre o MCMA e o MDDMA pode ser implementada como um simples chaveamento entre as referências real e imaginária, ou seja, entre R_R e $\hat{a}_R^2(n)$ e entre R_I e $\hat{a}_I^2(n)$. Deste modo, a complexidade computacional do algoritmo é pouco alterada.

O *dual mode* MDDMA ganha em robustez em relação ao *single-mode* MDDMA (sem comutação) e, como será visto na seção de simulações computacionais, o *dual mode* MDDMA também possui melhor performance que o *dual mode* DDMA, especialmente em constelações QAM de ordem elevada.

3.6 Equalização Cega de Canais Não-lineares

Até o presente momento este capítulo trata de técnicas inspiradas no CMA para equalização de canais lineares. Nesta seção o estudo acerca do CMA feito neste capítulo tem continuidade com a utilização do CMA para a equalização de canais não-lineares. Em particular, as técnicas propostas nesta seção são projetadas com o intuito de equalizar canais do tipo Wiener. Aplicações desta natureza para o CMA são inéditas na literatura e darão um aspecto mais abrangente ao estudo do CMA feito nesta dissertação.

Como já comentado anteriormente, diversos sistemas não-lineares podem ser modelados como uma cascata em série de blocos lineares com memória e não-linearidades sem memória. Em particular, o modelo de Wiener, que consiste de um filtro linear com memória seguido por um filtro não-linear sem memória, possui diversas aplicações no domínio das telecomunicações [51-53].

Dentro da área de processamento não-linear de sinais existem muitos trabalhos que estudaram e propuseram técnicas para identificação e equalização de canais de comunicação não-lineares. Os primeiros trabalhos nesta área utilizavam, na sua maioria, filtros de Volterra. Alguns desses trabalhos podem ser encontrados em [54-56]. Mais recentemente Hedge et al. [57] estudaram o problema de identificação de uma cascata em série de um filtro linear de RIF seguido por um filtro não-linear sem memória, seguido por um segundo filtro linear de RIF (modelo de Wiener-Hammerstein). Neste trabalho foram utilizadas duas diferentes estruturas para os filtros de identificação: um filtro de Wiener-Hammerstein e um filtro de Volterra seguido por um filtro linear de RIF. Neste trabalho os filtros são adaptados utilizando-se o algoritmo NLMS. Neste área, ressalta-se também a proposição de técnicas para a redução de complexidade de filtros de Volterra [58-61].

Outro interessante trabalho nessa área foi feito em [62], no qual os autores usaram um equalizador com uma estrutura do tipo Volterra para compensar distorções não-lineares em sistemas satelitários. Nesse trabalho foi utilizada uma matriz com fatores de passo no lugar de um fator de passo único. Essa matriz, que é nula fora da diagonal, possui na diagonal diferentes valores do fator de passo para as diferentes potências do sinal recebido. Essa idéia mostrou-se eficaz em melhorar a performance do equalizador LMS Volterra. Outra abordagem que mostrou melhorar a performance de equalizadores não-lineares foi encontrada por Fernando et al. [63, 51, 52]. Nesse trabalho os autores propuseram uma estrutura de filtragem composta de um filtro de Hammerstein seguida por um Equalizador de Decisão Realimentada - *Decision Feedback Equalizer* (DFE). Os resultados de simulação mostraram que a inclusão do DFE aparenta ser uma boa opção para a melhoria da performance de equalizadores de canais não-lineares.

Apesar de existirem diversos trabalhos dentro dessa área de estudos, atualmente grande parte das técnicas adaptativas para a realização de equalização de canais não-lineares encontradas na literatura são supervisionadas. Desta forma, a principal

contribuição desta parte do trabalho é propor técnicas cegas para a realização de equalização adaptativa de canais do tipo Wiener. Para tanto, será feito uso do CMA, um dos algoritmos mais utilizados para a equalização de canais lineares.

O sistema indicado na fig. 2.2 (**Capítulo 2**) mostra um canal do tipo Wiener e um equalizador do tipo Hammerstein. O modelo de Hammerstein, por corresponder à inversa do modelo de Wiener [64], é a escolha mais natural para a estrutura de um equalizador de um canal do tipo Wiener. Já a fig. 2.3 (**Capítulo 2**) mostra o mesmo canal com um equalizador do tipo Volterra, que, durante este trabalho, poderá ser do tipo completo ou diagonal, como já comentado anteriormente. A seguir serão desenvolvidas expressões para a adaptação do equalizador utilizando três diferentes abordagens, cada uma considerando uma estrutura diferente para o equalizador. A primeira abordagem considera os filtros \mathbf{g} e \mathbf{w} do modelo de Hammerstein (fig. 2.2) como sendo independentes para adaptá-los de maneira separada e de forma alternada. Para tanto, esta abordagem, que será chamada de Abordagem Separada, utiliza as eqs. (2.24) e (2.26), reproduzidas a seguir

$$y(n) = \mathbf{w}^T \mathbf{z}(n),$$

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{p}(n).$$

A segunda abordagem adapta os dois filtros conjuntamente, considerando o equalizador como um filtro Volterra Diagonal (fig. 2.3). Esta abordagem, que será chamada de abordagem Volterra Diagonal, utiliza a eq. (2.30), também reproduzida a seguir

$$y(n) = \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{x}}(n),$$

para adaptar o filtro \mathbf{r} . Já a última abordagem utiliza a eq. (2.32), mostrada a seguir

$$y(n) = \mathbf{b}^T \check{\mathbf{x}}(n),$$

para adaptar o filtro \mathbf{b} correspondente a um filtro de Volterra. Estas três abordagens serão desenvolvidas de maneira conjunta através da utilização da notação unificada introduzida por

$$y(n) = \mathbf{q}^T \mathbf{t}(n) \tag{3.11}$$

e pela Tabela 3.2. Com intuito de melhorar o desempenho desses equalizadores CMA não-lineares, no Capítulo 5 serão desenvolvidas versões normalizadas e do tipo RLS das técnicas descritas a seguir.

Tabela 3.2: Valores de \mathbf{q} e $\mathbf{t}(n)$ para as diferentes técnicas

Técnica	\mathbf{q}	$\mathbf{t}(n)$
Separada - Adaptação de \mathbf{g}	\mathbf{g}	$\mathbf{p}(n)$
Separada - Adaptação de \mathbf{w}	\mathbf{w}	$\mathbf{z}(n)$
Volterra diagonal	\mathbf{r}	$\tilde{\mathbf{x}}(n)$
Volterra	\mathbf{b}	$\check{\mathbf{x}}(n)$

Antes de começar o desenvolvimento dos algoritmos utilizando o CMA, a seção seguinte trata da aplicação do algoritmo LMS nas estruturas de filtragem das figs. 2.2 e 2.3, utilizando as três abordagens consideradas através da notação unificada introduzida. Uma vez que essa notação é linear com relação aos coeficientes dos filtros, os algoritmos aplicados em estruturas não-lineares podem ser desenvolvidos exatamente da mesma forma que para o caso linear. Este desenvolvimento servirá como base para o desenvolvimento do CMA e como referência para a performance do CMA nas simulações computacionais.

3.6.1 LMS Não-Linear

Para desenvolver as expressões do algoritmo LMS para as diferentes abordagens utilizando a notação unificada desenvolvida no **Capítulo 2**, faz-se necessário calcular o gradiente da função custo do EQM em relação a \mathbf{q} (eq. (2.34)). Desta forma, pode-se escrever para a função custo EQM:

$$J_{EQM} = E\{|e(n)|^2\} = E\{|d(n) - y(n)|^2\}.$$

Aplicando-se a regra do gradiente estocástico de J_{EQM} com relação a \mathbf{q} , pode-se encontrar a expressão de adaptação do LMS utilizando-se a notação unificada:

$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{q}(n) + \mu e(n) \mathbf{t}^*(n), \quad (3.12)$$

em que \mathbf{q} e \mathbf{t} estão indicados na Tabela 2.1. O fator de passo μ não é necessariamente o mesmo para as três abordagens. A técnica LMS Separada adapta os filtros \mathbf{g} e \mathbf{w} de maneira alternada e é, entre as três técnicas, a que possui a menor complexidade computacional, com uma ordem de complexidade igual a $O(M+P)$. As ordens de complexidade das técnicas LMS-Volterra Diagonal e LMS-Volterra são $O(M.P)$ e $O(\frac{M^{P+1}-M}{M-1})$, respectivamente.

3.6.2 CMA Não-Linear

A aplicação do CMA nas três estruturas não-lineares consideradas faz-se de maneira idêntica ao caso linear, uma vez que a notação unificada introduzida pela eq. (2.34) e pela Tabela 2.1 é linear com relação aos coeficientes do filtro. Desta forma, deve-se calcular o gradiente da função custo CM:

$$J_{CM} = E\{|y(n)|^2 - R\}^2, \quad (3.13)$$

em relação a \mathbf{q} (eq. (2.34)), sendo que R é a mesma constante da eq. (3.2). Assim, pode-se encontrar as expressões para o CMA utilizando a notação unificada:

$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{q}(n) - \mu y(n)(|y(n)|^2 - R)\mathbf{t}^*(n), \quad (3.14)$$

em que os valores de \mathbf{q} e \mathbf{t} na Tabela 2.1 definem as diferentes técnicas. Neste caso, novamente o fator de passo μ não é necessariamente o mesmo para as três abordagens e, novamente, a técnica LMS Separada adapta os filtros \mathbf{g} e \mathbf{w} de maneira alternada. A ordem de complexidade dessas técnicas são as mesmas do LMS.

Apesar de as técnicas Volterra possuírem apenas uma equação de adaptação e a técnica Separada possuir duas, para ambos os algoritmos CMA e LMS, a complexidade da técnica Separada é a menor. Além disso, o maior número de parâmetros das abordagens Volterra torna as suas convergências mais lentas.

É importante ressaltar que as técnicas cegas para a realização de equalização adaptativa de canais não-lineares encontradas na literatura são escassas. Nesta dissertação não são desenvolvidos as versões dos algoritmos baseados no CMA dirigidos pela decisão. Desta forma, as técnicas de equalização de canais do tipo Wiener acima desenvolvidas encerram a família de algoritmos do tipo gradiente estocástico proposta. A Tabela 3.3, a seguir, sintetiza os algoritmos percorridos neste capítulo. Ao lado do nome de cada técnica não originária desta dissertação estão indicadas as referências dos trabalhos onde elas foram propostas.

Tabela 3.3: Resumo dos algoritmos estudados nesse capítulo

Algoritmos	Equação de Adaptação
CMA [6, 7]	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu y(n)(y(n) ^2 - R)\mathbf{x}^*(n)$
DDMA	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu y(n)(y(n) ^2 - \hat{a}(n) ^2)\mathbf{x}^*(n)$
MCMA [14]	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu[y_R(n)(y_R^2(n) - R_R) + jy_I(n)(y_I^2(n) - R_I)]\mathbf{x}^*(n)$
MDDMA	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu[y_R(n)(y_R^2(n) - \hat{a}_R^2(n)) + jy_I(n)(y_I^2(n) - \hat{a}_I^2(n))]\mathbf{x}^*(n)$
CMA Não-Linear	$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{q}(n) - \mu y(n)(y(n) ^2 - R)\mathbf{t}^*(n)$

3.7 Contribuições do Capítulo

A fim de visualizar o panorama de contribuições do capítulo, resumem-se abaixo as principais técnicas originais propostas:

- Um algoritmo inspirado no CMA para constelações QAM de ordem elevada: o *Decision Directed Modulus Algorithm* (DDMA);
- Um algoritmo inspirado no MCMA para constelações QAM de ordem elevada: o *Modified Decision Directed Modulus Algorithm* (MDDMA);
- Três técnicas cegas para a realização de equalização adaptativa de canais do tipo Wiener utilizando uma notação unificada.

No capítulo seguinte será feita uma análise teórica da convergência e estabilidade do DDMA e no **Capítulo 6** os resultados de simulação computacional obtidos mostrarão os diferentes desempenhos dos algoritmos desenvolvidos neste capítulo.

Capítulo 4

Análise Teórica do DDMA

O DDMA, apresentado no capítulo anterior para canais lineares, baseia-se na utilização da abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão. Assim, como já ressaltado anteriormente, além de ser o primeiro algoritmo proposto nesta dissertação, o DDMA também é o mais importante de todo este estudo, uma vez que praticamente todas as outras técnicas desenvolvidas (com exceção de uma) utilizam, de alguma forma, a abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão. Devido a isso, o presente capítulo é dedicado a realizar um estudo teórico a respeito do DDMA e de sua função custo. Um dos objetivos deste estudo é analisar a convergência e a estabilidade do DDMA, o que será feito através de uma busca pelos pontos de mínimo de sua função custo. Outro objetivo é encontrar o valor teórico do Erro Quadrático Médio em Excesso - *Excess Mean Square Error* (EMSE) fornecido pelo DDMA, considerando-se o caso de não haver ruído. Assim, será possível fazer uma comparação entre o EMSE fornecido pelo DDMA e pelo CMA, onde se poderá constatar a melhor performance do DDMA em relação ao CMA em constelações que possuem múltiplas amplitudes. Também será feito um estudo a respeito da função custo DDM através do desenvolvimento de relações com a função custo de Wiener, que possui uma base teórica bem consolidada. Será constatado que a função custo DDM e o DDMA possuem propriedades interessantes e diversas vantagens sobre o CMA.

Em determinadas situações nos desenvolvimentos realizados a seguir será feita a hipótese que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas, ou seja, que $\hat{a}(n) = a(n - \tau)$. Ressalta-se, entretanto, que em todas essas situações esta restrição pode ser substituída por uma restrição mais fraca, dada por $|\hat{a}(n)| = |a(n - \tau)|$. Em outras palavras, para o correto desenvolvimento das expressões que seguem, é necessário apenas assumir que o símbolo decidido possui a mesma amplitude do símbolo transmitido com atraso τ . Isto deve-se ao fato de o DDMA utilizar apenas o módulo de $\hat{a}(n)$ em sua equação de adaptação, o que significa dizer que o DDMA é cego com relação a erros de fase do símbolo decidido. Contudo, por motivos de facilitação de compreensão, os desenvolvimentos a seguir consideram $\hat{a}(n)$ como sendo igual a $a(n - \tau)$, ou seja, iguais em amplitude e fase.

O resto do capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 4.1 é feita uma análise estática dos pontos de mínimo da função custo DDM no espaço da resposta ao impulso global (canal mais equalizador); na Seção 4.2 é feito um estudo relacionando os pontos

de mínimo de uma função custo qualquer no espaço global e no espaço do equalizador; na Seção 4.3 é encontrado o valor teórico do EMSE fornecido pelo DDMA; na Seção 4.4 as funções custo de Wiener e DDM são analisadas utilizando-se um simples canal Auto-Regressivo (AR); na Seção 4.5 são estabelecidas algumas relações entre os pontos de mínimo das funções custo de Wiener e DDM; e na Seção 4.6 é feito um pequeno resumo das principais contribuições apresentadas neste capítulo.

4.1 Análise dos Pontos de Mínimo da Função Custo DDM

Esta seção analisa o DDMA através de um estudo sobre os pontos de equilíbrio da função custo DDM considerando-se o caso sem ruído. Entretanto, para facilitação da análise, este estudo será realizado baseando-se a função custo resultante da substituição, no funcional DDM, do símbolo decidido $\hat{a}(n)$ pelo sinal de referência $d(n) = a(n - \tau)$, em que τ é um atraso. Desta forma, esta nova função custo, que será designada por J'_{DDM} servirá como referência para a função custo J_{DDM} , uma vez que estes dois critérios se equivalem se as decisões são realizadas de forma correta. Neste caso se obtém $\hat{a}(n) = d(n) = a(n - \tau)$. Esta análise estática é feita no espaço da resposta ao impulso global (canal mais equalizador). Será feita também uma análise da *Hessiana* da função custo J'_{DDM} nos pontos de equilíbrio encontrados, afim de classificar esses pontos com relação à suas estabilidades.

Nos desenvolvimentos realizados nesta seção serão consideradas apenas as modulações que não possuem um módulo constante, ou seja, modulações que não sejam do tipo PSK, já que, para este tipo de modulação, a análise do DDMA torna-se idêntica à do CMA. Foi demonstrado em [65] que os únicos pontos de equilíbrio da função custo CM no espaço da resposta ao impulso global (canal mais equalizador) são o vetor nulo e o vetor correspondente à solução *Zero Forcing* (ZF). Desta forma, este resultado também pode ser estendido para DDMA em constelações que tenham apenas uma amplitude.

A função custo J'_{DDM} é definida então da seguinte forma:

$$J'_{DDM} = E\{(|y(n)|^2 - |a(n - \tau)|^2)^2\}, \quad \tau \in [0, N + M - 2]. \quad (4.1)$$

Pode-se também reescrever a equação acima como

$$J'_{DDM} = E\{|y(n)|^4\} - 2E\{|y(n)|^2|a(n - \tau)|^2\} + E\{|a(n - \tau)|^4\}. \quad (4.2)$$

Considerando-se o caso sem ruído e uma constelação simétrica (QAM de ordem par)

tem-se que $E\{a^2(n)\} = 0$. Assim, pode-se escrever para a primeira parcela do lado direito da expressão acima [5]:

$$E\{|y(n)|^4\} = E\{|a(n)|^4\} \sum_{i=0}^{N+M-2} |f_i|^4 + 2E^2\{|a(n)|^2\} \sum_{i=0}^{N+M-2} \sum_{j=0, j \neq i}^{N+M-2} |f_i|^2 |f_j|^2, \quad (4.3)$$

em que f_i , $i \in [0, N + M - 2]$, representam as componentes da resposta ao impulso global do sistema. Pode-se simplificar a expressão acima definindo-se $\sigma_a^2 = E\{|a(n)|^2\}$ e $m_{4a} = E\{|a(n)|^4\}$:

$$E\{|y(n)|^4\} = (m_{4a} - 2\sigma_a^4) \sum_{i=0}^{N+M-2} |f_i|^4 + 2\sigma_a^4 \left(\sum_{i=0}^{N+M-2} |f_i|^2 \right)^2. \quad (4.4)$$

Prosseguindo, pode-se escrever para o segundo termo do lado direito da eq. (4.2):

$$\begin{aligned} E\{|y(n)|^2 |a(n-\tau)|^2\} &= E\left\{ \sum_{i=0}^{N+M-2} |f_i|^2 |a(n-i)|^2 |a(n-\tau)|^2 \right\} = \\ &= m_{4a} |f_\tau|^2 + \sigma_a^4 \sum_{i=0, i \neq \tau}^{N+M-2} |f_i|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim, a função custo J'_{DDM} passa a ser escrita da seguinte forma para o caso sem ruído:

$$\begin{aligned} J'_{DDM} &= (m_{4a} - 2\sigma_a^4) \sum_{i=0}^{N+M-2} |f_i|^4 + 2\sigma_a^4 \left(\sum_{i=0}^{N+M-2} |f_i|^2 \right)^2 \\ &\quad - 2m_{4a} |f_\tau|^2 - 2\sigma_a^4 \sum_{i=0, i \neq \tau}^{N+M-2} |f_i|^2 + m_{4a}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que considera-se que $E\{|a(n-\tau)|^4\} = m_{4a}$. Para achar os pontos de mínimo da função J'_{DDM} , faz-se necessário igualar o gradiente de J'_{DDM} em relação a f_k ($0 \leq k \leq N + M - 2$) a zero. Para tanto, serão considerados dois casos.

- Para $k \neq \tau$:

$$\nabla_{\mathbf{f},k} J'_{DDM} = 4(m_{4a} - 2\sigma_a^4)f_k|f_k|^2 + 8\sigma_a^4 f_k \sum_i |f_i|^2 - 4\sigma_a^4 f_k = 0, \quad (4.7)$$

em que $\nabla_{\mathbf{f},k} J'_{DDM}$ representa a k -ésima componente do vetor gradiente $\nabla_{\mathbf{f}} J'_{DDM}$. Assim, tem-se

$$f_k \left(m_{4a}|f_k|^2 + 2\sigma_a^4 \sum_{i \neq k} |f_i|^2 - \sigma_a^4 \right) = 0 \quad (4.8)$$

- Para $k = \tau$:

$$\nabla_{\mathbf{f},\tau} J'_{DDM} = 4(m_{4a} - 2\sigma_a^4)f_\tau|f_\tau|^2 + 8\sigma_a^4 f_\tau \sum_i |f_i|^2 - 4m_{4a}f_\tau = 0 \Rightarrow$$

$$f_\tau \left(m_{4a}|f_\tau|^2 + 2\sigma_a^4 \sum_{i \neq \tau} |f_i|^2 - m_{4a} \right) = 0 \quad (4.9)$$

É fácil observar que o ponto $\mathbf{f} = \mathbf{0} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$ é solução das eqs. (4.8) e (4.9), constituindo-se, assim, num ponto de equilíbrio da função custo J'_{DDM} .

Considerando $f_l \neq 0$ e $f_k \neq 0$ ($l \neq \tau$, $k \neq \tau$ e $l \neq k$) quaisquer, pode-se obter a partir de (4.8):

$$m_{4a}|f_l|^2 + 2\sigma_a^4 \sum_{i \neq l} |f_i|^2 = \sigma_a^4 \quad e \quad m_{4a}|f_k|^2 + 2\sigma_a^4 \sum_{i \neq k} |f_i|^2 = \sigma_a^4 \quad (4.10)$$

Calculando a diferença entre as duas equações de (4.10), obtém-se

$$m_{4a}|f_l|^2 - m_{4a}|f_k|^2 + 2\sigma_a^4|f_k|^2 - 2\sigma_a^4|f_l|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$[m_{4a} - 2\sigma_a^4]|f_l|^2 = [m_{4a} - 2\sigma_a^4]|f_k|^2 \Rightarrow |f_l| = |f_k|, \quad (4.11)$$

o que significa que, para os vetores soluções $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ das eqs. (4.8) e (4.9), todos os $f_i \neq 0$ ($i \neq \tau$) possuem a mesma magnitude. Assim, o número de elementos f_k não-nulos, tais que $k \neq \tau$, será chamado de N_M e suas respectivas magnitudes de σ_M . Desta forma, a partir de (4.8), para um k qualquer diferente de τ e tal que $f_k \neq 0$, pode-se escrever

$$m_{4a}\sigma_M^2 + 2\sigma_a^4[(N_M - 1)\sigma_M^2 + \sigma_\tau^2] = \sigma_a^4, \quad (4.12)$$

em que σ_τ é a magnitude de $f(\tau)$. Deste mesmo modo, escreve-se, a partir da eq. (4.9), para $f_\tau \neq 0$:

$$m_{4a}\sigma_\tau^2 + 2\sigma_a^4 N_M \sigma_M^2 = m_{4a}. \quad (4.13)$$

As soluções das eqs. (4.12) e (4.13) representam os pontos de equilíbrio da função custo J'_{DDM} . Assim, deseja-se encontrar todos os valores possíveis para σ_τ^2 , σ_M^2 e N_M que solucionem as referidas equações simultaneamente. Para tanto, a eq. (4.12) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma_M^2 = \frac{\sigma_a^4(1 - 2\sigma_\tau^2)}{m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)}. \quad (4.14)$$

Substituindo-se a eq. (4.14) na eq. (4.13), obtém-se

$$m_{4a}\sigma_\tau^2 + \frac{2\sigma_a^4 N_M \sigma_a^4 (1 - 2\sigma_\tau^2)}{m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)} = m_{4a} \Rightarrow$$

$$m_{4a}\sigma_\tau^2[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)] + 2\sigma_a^8 N_M - 4\sigma_\tau^2 \sigma_a^8 N_M = m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)] \Rightarrow$$

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]}{4\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]}. \quad (4.15)$$

Substituindo o valor de σ_τ^2 na eq. (4.14) encontra-se as possíveis soluções para σ_M^2 :

$$\begin{aligned}\sigma_M^2 &= \frac{\sigma_a^4}{m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)} \left(1 - \frac{4\sigma_a^8 N_M - 2m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]}{4\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]} \right) \Rightarrow \\ \sigma_M^2 &= \frac{\sigma_a^4}{m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)} \left(\frac{m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]}{4\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]} \right) \Rightarrow \\ \sigma_M^2 &= \frac{m_{4a}\sigma_a^4}{4\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

As equações (4.15) e (4.16) correspondem a todas as soluções das eqs. (4.12) e (4.13), representando, portanto, todos os pontos de equilíbrio da função custo J'_{DDM} . Observa-se que cada valor de N_M inteiro dentro do intervalo de 0 até $N + M - 3$ corresponde a um valor de σ_τ^2 e de σ_M^2 . Assim, a princípio, existem $N + M - 2$ conjuntos de pontos de equilíbrio da função custo J'_{DDM} (excluindo-se o caso $\mathbf{f} = \mathbf{0}$), em que cada conjunto equivale a um valor de N_M . Deste modo, é de interesse diminuir o intervalo de possíveis valores para N_M , de forma a diminuir o número de conjuntos de soluções procuradas.

Prosseguindo nesta direção, distinguem-se dois diferentes casos com relação à função densidade de probabilidade (FDP) do sinal transmitido:

- Sinal transmitido com FDP **super-gaussiana** ou **leptocúrtica**:

Neste caso tem-se uma curtose positiva do sinal transmitido: $m_{4a} - 2\sigma_a^4 > 0$. No **Apêndice B** é demonstrado que se $N_M \geq 1$, então não existem soluções para eqs. (4.12) e (4.13). Em outras palavras, todas as componentes da resposta ao impulso global f_k , $k \neq \tau$, são nulas ($N_M = 0$) e $|f_\tau| = \sigma_\tau$.

- Sinal transmitido com FDP **sub-gaussiana** ou **platicúrtica** :

Este caso abrange grande parte dos sistemas de comunicações, uma vez que sinais com FDP uniforme estão contidos neste grupo. Para este tipo de sinal tem-se uma curtose negativa: $m_{4a} - 2\sigma_a^4 < 0$. Após alguns cálculos algébricos, pode-se demonstrar que o denominador da eq. (4.15) é igual a $(m_{4a} + 2\sigma_a^4 N_M)(2\sigma_a^4 - m_{4a})$. Utilizando a hipótese relativa à curtose do sinal transmitido, conclui-se que esse denominador é positivo. Além disso, no **Apêndice C** é demonstrado, considerando-se a hipótese que $N_M \geq 2$, que o numerador da eq. (4.15) é negativo. Assim, o valor de σ_τ^2 torna-se negativo, uma vez que o denominador é positivo. Contudo, dado que σ_τ^2 foi definido anteriormente como $|f_\tau|^2$, a hipótese que $N_M \geq 2$

torna-se falsa, o que demonstra por absurdo ($\sigma_\tau^2 < 0$) que $N_M = 0$ ou $N_M = 1$ são os únicos valores possíveis para N_M .

Visto que $N_M = 0$ e $N_M = 1$, podem-se encontrar as possíveis soluções para σ_τ^2 a partir da eq. (4.15).

- Para $N_M = 0$:

$$\sigma_\tau^2 = 1. \quad (4.17)$$

Neste caso, por definição, tem-se que $\sigma_M^2 = 0$, ou seja, a solução é dada por $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0].e^{j\varphi}$, em que φ é uma fase qualquer. Esta solução corresponde ao caso de equalização perfeita. Sem perda de generalidade, não se considera, na análise que segue, possíveis deslocamentos de fase nesta solução, uma vez que este tipo de erro de fase pode ser cancelado com o uso de um PLL.

- Para $N_M = 1$:

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2\sigma_a^8 - m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} > 0. \quad (4.18)$$

Substituindo o valor de σ_τ^2 para $N_M = 1$ na eq. (4.13) encontra-se outra possível solução para σ_M^2 :

$$m_{4a} \frac{2\sigma_a^8 - m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} + 2\sigma_a^4 \sigma_M^2 = m_{4a} \Rightarrow 2\sigma_a^4 \sigma_M^2 = m_{4a} \frac{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - m_{4a} \frac{2\sigma_a^8 - m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_M^2 = \frac{\sigma_a^4 m_{4a}}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} > 0. \quad (4.19)$$

Por outro lado

$$m_{4a} > \sigma_a^4 \Rightarrow m_{4a}^2 > \sigma_a^8 \Rightarrow \sigma_a^4 m_{4a}^2 > \sigma_a^8 \Rightarrow \sigma_a^4 m_{4a} + m_{4a}^2 > 2\sigma_a^8 \Rightarrow \sigma_M > \sigma_\tau. \quad (4.20)$$

Este caso representa um conjunto de pontos de equilíbrio da função custo J'_{DDM} , dadas por qualquer vetor cuja componente $f_\tau = \sigma_\tau e^{j\varphi}$ e que tenha apenas uma outra componente não-nula $f_k = \sigma_M$, tal que $k \neq \tau$, $0 \leq k \leq N + M - 2$. Pelo mesmo motivo mencionado anteriormente, não se considera deslocamentos na fase de f_k . Contudo este tipo de deslocamento pode ocorrer para f_τ , uma vez que o PLL corrige apenas deslocamentos constantes de fase e $\sigma_M > \sigma_\tau$. No restante do

desenvolvimento este conjunto de soluções será denotado por \mathbf{f}_1 . Deve-se ressaltar que as soluções correspondentes a este caso aplicam-se exclusivamente aos sinais com FDP sub-gaussiana.

O desenvolvimento acima demonstra que a função custo J'_{DDM} possui como pontos de equilíbrio no espaço da resposta ao impulso global: o vetor nulo $\mathbf{f} = \mathbf{0}$; o vetor equivalente à solução ZF correspondente ao atraso τ : $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau$; e o conjunto de vetores denotado por \mathbf{f}_1 . Para verificar a estabilidade destes pontos de equilíbrio, faz-se necessário a análise da matriz Hessiana da função custo J'_{DDM} nesses pontos. No **Apêndice D** são desenvolvidas as expressões para a matriz Hessiana de J_{DDM} nos pontos de equilíbrio encontrados:

- Vetor nulo $\mathbf{f} = \mathbf{0}$

$$\nabla^2 J'_{DDM}(\mathbf{f} = \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\sigma_a^4 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sigma_a^4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{4a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -\sigma_a^4 \end{pmatrix},$$

em que o valor $-m_{4a}$ encontra-se da posição (τ, τ) . Pela estrutura da matriz Hessiana acima conclui-se facilmente que todos os seus autovalores são negativos e, portanto, o vetor nulo $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ corresponde a um ponto de máximo local da função custo J'_{DDM} .

- Vetor correspondente à solução ZF $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau$

$$\nabla^2 J'_{DDM}(\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau) = \begin{pmatrix} 3\sigma_a^4 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3\sigma_a^4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3m_{4a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 3\sigma_a^4 \end{pmatrix},$$

em que o valor $3m_{4a}$ encontra-se da posição (τ, τ) . Pela estrutura da matriz Hessiana acima conclui-se facilmente que todos os seus autovalores são positivos e, portanto, o vetor equivalente à solução ZF $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau$ corresponde ao ponto de mínimo global da função custo J'_{DDM} .

- Vetor $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$

$$\nabla^2 J'_{DDM}(\mathbf{f} = \mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_k & \cdots & \kappa_{\tau k}^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_{\tau k} & \cdots & \kappa_{\tau} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \kappa_1 \end{pmatrix},$$

em que κ_{τ} encontra-se na posição (τ, τ) , $\kappa_{\tau k}$ na posição (τ, k) , $\kappa_{\tau k}^*$ na posição (k, τ) , κ_k na posição (k, k) , κ_1 no restante da diagonal e k é um inteiro qualquer entre 0 e $N + M - 2$ tal que $k \neq \tau$ e $|f_k| = \sigma_M$. Os valores de κ_k , κ_1 , $\kappa_{\tau k}$ e κ_{τ} são dados, respectivamente, pelas eqs. (D.1), (D.2), (D.3) e (D.5), contidas no **Apêndice D**, no qual se observa que os valores de κ_k , κ_1 e κ_{τ} são positivos para o caso de um sinal com modulação QAM de ordem par com FDP uniforme. Pela estrutura da matriz Hessiana acima não se pode afirmar quais são os valores dos sinais algébricos de seus autovalores. Uma matriz com a estrutura acima possui sempre $N + M - 3$ autovalores positivos e iguais a κ_1 e pode possuir autovalores negativos, dependendo dos valores de κ_1 , $\kappa_{\tau k}$, κ_{τ} e κ_k . Entretanto, calculou-se esses valores para as modulações 16QAM, 64QAM, 256QAM e 1024QAM e foi constatado que todos os autovalores da matriz Hessiana acima são reais e positivos. Logo, isto significa dizer que as soluções $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$ correspondem a pontos de mínimo local estáveis de J'_{DDM} . Conclui-se então que o algoritmo resultante da substituição de $\hat{a}(n)$ por $a(n - \tau)$ no DDMA é potencialmente capaz de convergir para um ponto de mínimo local. Uma observação interessante a se fazer é que, mesmo operando num modo de treinamento, este algoritmo pode realizar decisões erradas, desde que as condições abaixo sejam satisfeitas:

$$|Re[y(n) - a(n - \tau)]| > 1 \quad \text{ou} \quad |Im[y(n) - a(n - \tau)]| > 1, \quad (4.21)$$

em que $Re[\cdot]$ e $Im[\cdot]$ denotam, respectivamente as partes real e imaginária do sinal. Em outras palavras se

$$|Re[f_{\tau} e^{j\varphi} a(n - \tau) + f_M a(n - \bar{\tau}) - a(n - \tau)]| > 1 \quad \text{ou} \quad (4.22)$$

$$|Im[f_{\tau} e^{j\varphi} a(n - \tau) + f_M a(n - \bar{\tau}) - a(n - \tau)]| > 1, \quad (4.23)$$

em que $\bar{\tau}$ é o atraso correspondente a $f_M = \sigma_M$, são satisfeitas, então a decisão será realizada de forma incorreta. Já para a função custo DDM original, ou seja, utilizando a decisão dirigida, seus pontos de equilíbrio são os mesmos de J'_{DDM} se as decisões são realizadas de forma correta, ou seja, se (4.23) e (4.22) não são satisfeitas. Já para o caso em que eq. (4.23) ou (4.22) são satisfeitas, não existe uma equivalência entre J_{DDM} e J'_{DDM} e, portanto, a análise sobre a função custo J'_{DDM} deve ser realizada a partir de outra abordagem. Um estudo mais aprofundado acerca da situação em que há decisões incorretas será realizado em trabalhos futuros. Entretanto, deve-se salientar que foram realizadas simulações do DDMA no espaço da resposta ao impulso

global, utilizando como inicialização para o vetor \mathbf{f} o ponto correspondente ao possível ponto de mínimo local $\mathbf{f}_1 = \sigma_\tau e^{j\varphi} \delta(n - \tau) + \sigma_M \delta(n - \bar{\tau})$, em que $\delta(n)$ é a função delta de Dirac e $\bar{\tau}$ é um atraso qualquer diferente de τ . Para tanto, a equação de adaptação do DDMA foi pré-multiplicada pela transposta da Matriz de Convolução do Canal \mathbf{H} , chegando-se a

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) - \mu \mathbf{H}^T \mathbf{H} y(n) e_{DDM}(n) \mathbf{a}(n). \quad (4.24)$$

Realizando o processo de equalização utilizando a eq. (4.24) operando num ambiente sem ruído com um canal de comunicação cuja resposta ao impulso é dada por $h = [0, 4365 \ 1 \ 0, 4365]^T$, chegou-se à conclusão que o vetor da resposta ao impulso global \mathbf{f} sempre converge para o mínimo global $\mathbf{e}_{\bar{\tau}}$. Já em ambientes ruidosos, os vetor \mathbf{f} converge para as proximidades de $\mathbf{e}_{\bar{\tau}}$. Em outras palavras, estas simulações sugerem que o possível ponto de mínimo local \mathbf{f}_1 não é um ponto de equilíbrio do DDMA original, ou seja, do DDMA que utiliza decisões dirigidas.

Deve-se observar ainda que o DDMA na versão *dual-mode* foi projetado com a intuito de eliminar ou reduzir o número de decisões incorretas. Neste caso, equivalência entre J_{DDM} e J'_{DDM} torna-se válida. Vale a pena mencionar ainda que num contexto de equalização semi-cega, pode ser empregado, durante a fase de aquisição, uma seqüência de treinamento no receptor considerando $d(n) = a(n - \tau)$, durante um intervalo de tempo em que τ esteja incluído. Em seguida a aplicação de um critério de chaveamento, o DDMA atuaria na fase de rastreo e no complemento da fase de aquisição. Este assunto também será investigado em trabalhos futuros.

Ainda neste contexto ressalta-se que a utilização de estratégias especiais para evitar convergência para mínimos locais tem se mostrado eficaz no combate à má convergência de algoritmos cegos. Entretanto, mesmo sem fazer uso deste tipo de estratégias, ou seja, mesmo se os equalizadores são inicializados da maneira usual, i.e., com o coeficiente central igual a 1 e os restantes iguais a zero, nas simulações realizadas no **Capítulo 6** tem se verificado que o DDMA parece sempre convergir para o mínimo global [47, 49, 50].

4.2 Análise da Convergência no Espaço do Equalizador

A análise dos pontos de mínimo da função custo DDM realizada na seção anterior é feita no espaço global do sistema (canal mais equalizador). Entretanto, numa implementação prática, não se tem acesso a esse espaço global e, sim, ao espaço finito do equalizador \mathbf{w} . Esta seção trata de analisar a equivalência entre o resultado encontrado na seção anterior no espaço global e uma análise considerando-se um equalizador finitamente parametrizado. A análise feita nesta seção é principalmente baseada nos trabalhos [40, 66, 67].

4.2.1 Espaço Global *versus* Espaço do Equalizador

A exemplo do estudo feito na Seção 4.1, será considerado aqui somente o caso sem ruído, caso este extremamente comum neste tipo de análise. O estudo feito na Seção 4.1 é baseado

no espaço global (ou combinado) do sistema. Para tanto, buscou-se soluções que satisfizessem a seguinte equação:

$$\nabla_{\mathbf{f}} J_{DDM} = \mathbf{0} \Rightarrow E\{\bar{\mathbf{a}}^*(n) [|y(n)|^2 - |\hat{a}(n)|^2]\} = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

em que $\bar{\mathbf{a}}(n) = [a(n) \ a(n-1) \ \dots \ a(n-N-M+2)]^T$. Entretanto, uma análise de convergência baseada no vetor de coeficientes do espaço global \mathbf{f} não possui uma natureza prática, uma vez que o processo de equalização é realizado sobre o filtro FIR \mathbf{w} . Uma análise realística dos pontos de mínimo da função custo DDM deveria ser realizada buscando-se soluções para a seguinte equação:

$$\nabla_{\mathbf{w}} J_{DDM} = \mathbf{0} \Rightarrow E\{\mathbf{x}^*(n) [|y(n)|^2 - |\hat{a}(n)|^2]\} = \mathbf{0}, \quad (4.26)$$

em que $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$. Desta forma, o questionamento que deve ser respondido é:

Em que condições as soluções da eq. (4.25) equivalem às soluções da eq. (4.26)?

Deve-se ressaltar que os pontos de equilíbrio do DDMA correspondem às soluções da eq. (4.26), ou seja, a eq. (4.26) determina uma situação realística, enquanto que a eq. (4.25) corresponde a uma situação sobretudo teórica. A resposta para essa pergunta foi encontrada em [67], a partir da seguinte relação existente entre $\bar{\mathbf{a}}(n)$ e $\mathbf{x}(n)$:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{a}}(n), \quad (4.27)$$

em que \mathbf{H} é a matriz de convolução do canal. Assim, pode-se relacionar as grandezas envolvidas nas eqs. (4.25) e (4.26) da seguinte forma:

$$E\{\mathbf{x}(n) [|y(n)|^2 - |\hat{a}(n)|^2]\} = \mathbf{H} \cdot E\{\bar{\mathbf{a}}(n) [|y(n)|^2 - |\hat{a}(n)|^2]\}. \quad (4.28)$$

De onde se conclui que (4.25) \Rightarrow (4.26). Contudo, uma vez que a matriz \mathbf{H} tenha espaço nulo $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ não-trivial, a inversa não é obrigatoriamente verdadeira. Em outras palavras, pode existir um ponto que seja solução de (4.26) e, portanto, um ponto de equilíbrio do DDMA, mas que não seja solução de (4.25). Desta forma, fica claro que uma análise dos pontos de mínimo no espaço global pode não representar todos os pontos de equilíbrio do respectivo algoritmo. As condições em que (4.26) \Rightarrow (4.25) podem, então, ser encontradas através de uma análise de $\mathcal{N}(\mathbf{H})$. Se $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ tem dimensão nula, então existe uma relação biunívoca entre as soluções de (4.26) e (4.25). Caso contrário, a validade dessa relação biunívoca depende da dinâmica do canal e do algoritmo em questão.

Uma vez que \mathbf{H} possui dimensões $M \times (N + M - 1)$, seu espaço nulo será trivial se $N = 1$

ou se $M = +\infty$. Caso contrário, $\mathbf{N}(\mathbf{H})$ é não-trivial. O caso $N = 1$ corresponde a um canal não-distorsivo, onde não se faz necessária a utilização de um equalizador. Já o caso em que $M = +\infty$, trata-se de um equalizador de comprimento infinito. Foi demonstrado em [67] que mesmo um equalizador infinitamente parametrizado no sentido positivo, i.e., com infinitos coeficientes w_i , $i \geq 0$, o espaço nulo de \mathbf{H} pode ser não-trivial. Entretanto, foi também demonstrado que para um equalizador duplamente infinito, i.e., com infinitos coeficientes w_i , $\forall i$ inteiro, o espaço nulo de \mathbf{H} é necessariamente trivial. Em outras palavras, o equalizador DDMA tem convergência garantida para um dos pontos de equilíbrio encontrados na Seção 4.1, para qualquer canal distorsivo, se e somente se ele tem comprimento duplamente infinito. Esse caso representa uma situação impossível de ser implementada na prática, uma vez que, além de ter infinitos coeficientes, o equalizador é necessariamente anticausal. Foi também demonstrado no mesmo trabalho [67] que um equalizador de comprimento muito longo não é suficiente para garantir a convergência para um dos pontos de equilíbrio encontrados.

Origem dos pontos de mínimo em equalizadores cegos

Em [66] foi demonstrado que os pontos de mínimo de algoritmos cegos são gerados por dois diferentes mecanismos. O primeiro deles é a parametrização finita dos equalizadores. Os autores demonstraram que todos os algoritmos cegos que não utilizam restrições sobre seus coeficientes e que satisfazem as seguintes condições:

- $\pm \mathbf{e}_\tau$, tal que $0 \leq \tau \leq N + M - 2$, são os únicos mínimos globais da função custo $J(\mathbf{f})$;
- A função custo $J(\mathbf{f})$ é contínua em $l_1(R)$;

possuem mínimos locais quando finitamente parametrizados. Nas restrições acima, $l_1(R)$ representa o conjunto de seqüências infinitas reais de norma l_1 finita. Os mínimos oriundos desse mecanismo são chamados de Mínimos Locais Dependentes do Tamanho - *Length-Dependent Local Minima* (LDLM). As restrições acima são respeitadas por praticamente todos os algoritmos de equalização cega que não utilizam restrições aos seus coeficientes. Assim, os LDLM estão presentes na grande maioria dos algoritmos de equalização cega. O outro grupo de mínimos locais tem origem devido ao formato das funções custo. Esses pontos de mínimo, chamados Mínimos Locais Dependentes do Custo - *Cost-Dependent Local Minima* (CDLM), estão presentes somente em determinados tipos de funções custo. Entretanto, para esse tipo de função custo, os CDLM existem mesmo se o equalizador é duplamente infinito.

Baseando-se nos resultados encontrados na Seção 4.1, pode-se concluir que o DDMA possui apenas os mínimos do tipo LDLM para sinais transmitidos com FDP super-gaussiana. Já para o caso de sinais com FDP sub-gaussiana, o DDMA possui os dois tipos de mínimo. Ressalta-se, entretanto, que esses resultados são válidos somente sob a hipótese que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas.

Caso Multicanal

A análise realizada nesta seção mostrou que para um equalizador com um número finito de coeficientes, o espaço nulo da matriz \mathbf{H}^* não é obrigatoriamente trivial. Esses resultados são válidos para o caso de um sistema SISO, ou seja, um sistema monousuário monocanal, que é exatamente o caso do sistema considerado neste trabalho (ver fig. 2.1). Entretanto, assim como realizado para o CMA-FSE (*CMA-Fractionally Spaced Equalizer*) em [40], o DDMA pode ter garantia de convergência para um dos pontos de mínimo do espaço global, desde que opere em um sistema monousuário multicanal. Um sistema monousuário multicanal ou *Single-Input Multiple-Output* (SIMO) é um sistema que possui uma entrada, ou seja, um sinal transmitido, e diversas saídas, ou seja, diversos sinais recebidos. Os múltiplos subcanais podem ser oriundos de diferentes formas, desde que seja inserida no sistema algum tipo de redundância ou diversidade. Os principais tipos de diversidades existentes nos sistemas de comunicação são: arranjos de antenas, superamostragem e redundância introduzida por um pré-codificador. Assim, será considerado um sistema de comunicação sem ruído que possui N_C subcanais, cujas respostas ao impulso são dadas por $\{\mathbf{h}^{(j)}\}$, $1 \leq j \leq N_C$. Será considerado ainda que esses N_C subcanais satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} h_0^{(j)} &\neq 0, \quad \text{para algum } 1 \leq j \leq N_C; \\ h_{N-1}^{(j)} &\neq 0, \quad \text{para algum } 1 \leq j \leq N_C; \\ \{H_z^{(j)}\} &\text{ nao possuem zeros em comum.} \end{aligned}$$

Na verdade, as condições supracitadas equivalem às chamadas *Condições de Identifiabilidade* baseadas em cicloestacionariedade de segunda ordem, como mostrado em [68]. Desta forma, os N_C sinais recebidos são dados por

$$x^{(j)}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a(n-i)h_i^{(j)} + v^{(j)}(n), \quad \text{para } 1 \leq j \leq N_C. \quad (4.29)$$

A cada subcanal é associado um equalizador $\mathbf{w}^{(j)}$ ($1 \leq j \leq N_C$) e a saída do sistema multicanal $y(n)$ é o somatório das N_C saídas dos filtros, como mostrado a seguir:

$$y(n) = \sum_{j=1}^{N_C} \sum_{i=0}^{M-1} w_i^{(j)} x^{(j)}(n-i). \quad (4.30)$$

O vetor de coeficientes do equalizador multicanal pode ser expresso em função dos vetores de coeficientes dos filtros individuais $\mathbf{w}^{(j)}$ da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{w}} = \left[\mathbf{w}^{(1)T} \quad \mathbf{w}^{(2)T} \quad \dots \quad \mathbf{w}^{(N_C)T} \right]^T.$$

Deste modo é possível encontrar uma expressão que relacione o vetor de coeficientes $\bar{\mathbf{w}}$ e a resposta ao impulso global do sistema multicanal \mathbf{f} [40]:

$$\bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{f},$$

em que $\bar{\mathbf{H}}_{(M.N_C) \times (N+M-1)}$ é a matriz de convolução do canal SIMO dada por

$$\bar{\mathbf{H}} = [\mathbf{H}_1^T \ \mathbf{H}_2^T \ \dots \ \mathbf{H}_{N_C}^T]^T, \quad (4.31)$$

sendo que \mathbf{H}_j é matriz de convolução associada ao subcanal j ($1 \leq j \leq N_C$). Em [40] foi demonstrado para o caso sem ruído que, se o vetor \mathbf{f} pode assumir qualquer valor dentro do conjunto \mathcal{C}^{N+M-1} , então o conjunto de pontos $\mathbf{e}_\tau, \forall \tau$ tal que $0 \leq \tau \leq N+M-1$, são os únicos pontos de mínimo da função custo CM, uma vez respeitadas as Condições de Identifiabilidade.

Deste modo, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de mínimo em uma análise no espaço da resposta ao impulso global e no espaço da resposta ao impulso finita do equalizador se a matriz $\bar{\mathbf{H}}$ possui posto pleno e as Condições de Identifiabilidade são respeitadas. A condição para que $\bar{\mathbf{H}}$ possua rank pleno é dada por

$$NN_C \geq (N+M-1) \Rightarrow N(N_C-1) + 1 \geq M. \quad (4.32)$$

Assim, pode-se resumir os resultados de convergência encontrados para o caso multicanal da seguinte forma:

Assumindo a hipótese que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas, o DDMA multicanal converge sempre para um dos mínimo encontrados na Seção 4.1, para o caso sem ruído, se o comprimento do equalizador é tal que $M \leq N(N_C-1) + 1$, uma vez respeitadas as Condições de Identifiabilidade.

Comentários Finais a Respeito de Convergência

A análise de convergência feita nesta seção baseia-se principalmente nos trabalhos sobre a convergência do CMA encontrados em [40, 66, 67]. A teoria desenvolvida nesses trabalhos é baseada no fato de que a função custo CM tem como ponto de mínimo no espaço global apenas o ponto corresponde à solução ZF [65]. Uma vez que uma propriedade semelhante foi verificada para a função custo DDM na Seção 4.1, a teoria desenvolvida nos referidos trabalhos pode ser aplicada ao DDMA. Outros trabalhos interessantes sobre a convergência e estabilidade do CMA, que podem ser úteis para se estudar o comportamento do DDMA, podem ser encontradas em [9, 69-75]

Apesar da convergência global do CMA ser garantida apenas para o caso multicanal (CMA-FSE), tem se verificado na prática, para a grande maioria dos casos, que a convergência do CMA SISO ocorre de maneira satisfatória [36]. Um comportamento semelhante é encontrado para o DDMA SISO, em que os casos de convergência para pontos de mínimo local indesejados

parecem ter natureza mais didática do que prática [47, 49, 50]. É interessante ressaltar também que a utilização de estratégias especiais para evitar convergência para mínimos locais tem se mostrado eficaz no combate à má convergência de algoritmos cegos. Nesse contexto, uma das estratégias mais conhecidas e eficazes é a técnica do *tap-centering* [65].

4.3 Análise do Erro Quadrático Médio em Excesso

O estudo do DDMA realizado neste capítulo tem prosseguimento nesta seção com a análise do EMSE fornecido pelo DDMA. Será seguido o mesmo procedimento realizado para o CMA em [41], em que foi considerado somente o caso de sinais reais sem ruído. Escrevendo a equação de adaptação do DDMA, tem-se

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu y(n) e_{DDM}(n) \mathbf{x}(n),$$

em que $e_{DDM}(n) = y^2(n) - \hat{a}^2(n)$. Pré-multiplicando a equação acima pela transposta da Matriz de Convolução do Canal \mathbf{H} chega-se a

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) - \mu \mathbf{H}^T \mathbf{H} y(n) e_{DDM}(n) \mathbf{a}(n). \quad (4.33)$$

O EMSE pode ser definido da seguinte forma:

$$EMSE = E\{[y(n) - a(n - \tau)]^2\} = E\{[(\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau)^T \mathbf{a}(n)]^2\} \Rightarrow$$

$$EMSE = Tr(E\{[\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau][\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau]^T \mathbf{a}(n) \mathbf{a}^T(n)\}), \quad (4.34)$$

em que $Tr(\cdot)$ representa o traço da matriz em seu argumento. A expressão (4.34) para o EMSE pode ser aproximada utilizando-se a usual hipótese de independência entre a resposta ao impulso global e o sinal de entrada no Regime de Estado Permanente:

$$EMSE \cong \sigma_a^2 Tr(E\{[\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau][\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau]^T\}).$$

Uma aproximação para $Tr(E\{[\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau][\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau]^T\})$ pode ser obtida através da *Teoria da Média* [76], considerando-se o caso de algoritmos tais como o mostrado na (4.33). Para tanto, será utilizado o resultado a seguir:

Lemma 1: Considere um algoritmo estocástico do tipo

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) + \mu F[\mathbf{f}(n), \mathbf{a}(n)],$$

em que F é uma função de suavização (*smooth*) e $[\mathbf{f}(n)]$ converge em média para o *Ponto de Atração* \mathbf{f}_* . Para um valor suficientemente pequeno de μ , a matriz de covariância $E\{[\mathbf{f}(n) -$

$\mathbf{e}_\tau][\mathbf{f}(n) - \mathbf{e}_\tau]^T\}$ pode ser aproximada por $\mu \mathbf{P}_*$, onde é a única solução positiva da *Equação de Lyapunov*:

$$\Omega(\mathbf{f}_*) \mathbf{P}_* + \mathbf{P}_* \Omega^T(\mathbf{f}_*) + \Psi(\mathbf{f}_*) = \mathbf{0},$$

tal que $\Omega(\mathbf{f}_*)$ é a matriz Hessiana correspondente a (4.33) no ponto $\mathbf{f} = \mathbf{f}_*$, e

$$\Psi(\mathbf{f}_*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{F[\mathbf{f}_*, \mathbf{a}(n)] (F[\mathbf{f}_*, \mathbf{a}(0)])^T\}.$$

A prova formal para este lema pode ser encontrada em [76] (Teo. 1, pp.107) e requer que \mathbf{f}_* seja um *Ponto de Atração* global.

Para o caso da DDMA, cujo *Ponto de Atração* é a solução ZF, ou seja, $\mathbf{f}_* = \mathbf{e}_\tau$ (Seção 4.1), obtém-se

$$\Psi(\mathbf{f}_*) = \Psi(\mathbf{e}_\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{F[\mathbf{e}_\tau, \mathbf{a}(n)] (F[\mathbf{e}_\tau, \mathbf{a}(0)])^T\}.$$

Neste caso a função de suavização F é dada pela eq. (4.33): $F = \mu \mathbf{H}^T \mathbf{H} y(n) e_{DDM}(n) \mathbf{a}(n)$. Utilizando o fato de que neste ponto de atração $y(n) = \mathbf{e}_\tau^t \mathbf{a}(n) = a(n - \tau)$, obtém-se $\hat{a}(n) = a(n - \tau)$. Assim pode-se escrever:

$$F[\mathbf{e}_\tau, \mathbf{a}(n)] = \mathbf{H}^T \mathbf{H} y(n) e_{DDM}(n) \mathbf{a}(n) \Big|_{[\mathbf{e}_\tau, \mathbf{a}(n)]} \Rightarrow$$

$$F[\mathbf{e}_\tau, \mathbf{a}(n)] = \mathbf{H}^T \mathbf{H} a(n - \tau) (a^2(n - \tau) - a^2(n - \tau)) \mathbf{a}(n) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Psi(\mathbf{e}_\tau) = \mathbf{0}.$$

Assim, obtém-se

$$\Omega(\mathbf{e}_\tau) \mathbf{P}_* + \mathbf{P}_* \Omega^T(\mathbf{e}_\tau) = \mathbf{0}.$$

Visto que a matriz $\Omega(\mathbf{e}_\tau)$, calculada na Seção 4.1, é diagonal não-nula, tem-se que $Tr[\mathbf{P}_*] = \mathbf{0}$. Deste modo, o EMSE para o DDMA é nulo para o caso sem ruído.

Procedendo da mesma forma, em [41], foi encontrado o EMSE fornecido pelo CMA para o caso sem ruído:

$$EMSE \cong \mu(N + M - 1) \frac{\frac{E\{a^6(n)\}}{E^3\{a^2(n)\}} - \rho^2}{2(3 - \rho)} E^2\{a^2(n)\} E\{\mathbf{a}^T(n)\mathbf{a}(n)\}, \quad (4.35)$$

tal que $\rho = \frac{E\{a^4(n)\}}{E^2\{a^2(n)\}}$. Observa-se que o EMSE fornecido pelo CMA é não nulo para constelações PAM de vários níveis. Em [41] foi verificado também que o EMSE do CMA aumenta significativamente com a ordem da modulação PAM. Desta forma, fica evidente o ganho fornecido pelo DDMA em relação ao CMA em constelações que não têm o módulo constante, sendo esse ganho tão grande quanto maior for a ordem da constelação.

4.4 Análise dos Mínimos da Função Custo DDM num Simples Canal AR

Esta seção visa analisar os pontos de mínimo da função custo DDM através de um estudo comparativo entre a localização geométrica dos pontos de mínimo das funções custo DDM, CM e de Wiener utilizando-se um simples canal AR (exemplo de Ding [77]). Para tanto, os pontos de mínimo de Wiener considerados utilizam diferentes atrasos para o sinal de referência. Tal análise se baseia, principalmente, nos trabalhos [77] e [78], onde foram encontradas relações interessantes entre as funções custo de Wiener e CM.

Mínimos do critério DDM para um canal AR de ordem 1

O procedimento desenvolvido na seqüência para o DDM é baseado no trabalho [77], no qual é considerado um ambiente sem ruído utilizando um canal AR de ordem 1 da seguinte forma:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \theta z^{-(N-1)}}, \quad |\theta| < 1, \quad (4.36)$$

que também pode ser visto como um filtro do tipo MA de ordem infinita:

$$H(z) = 1 - \theta z^{-1} + \theta^{-2} z^{-2} - \theta^{-3} z^{-3} + \dots$$

Restringindo a análise a sinais reais, os autores buscaram soluções para a minimização da função custo CM que possuíssem a seguinte forma:

$$\mathbf{w}_{Ding} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ w_N], \quad (4.37)$$

que representa apenas um ganho e um atraso, não obtendo, assim, a equalização do sinal. Deste modo, as soluções da forma expressa pela eq. (4.37) representam mínimos locais da função custo CM. Objetivando encontrar soluções para a minimização da função custo DDM da forma (4.37),

pode-se substituir o vetor \mathbf{w}_{Ding} na expressão do gradiente da função custo DDM. Assim,

$$\nabla_{\mathbf{w}} J_{DDM} \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{Ding}} = E\{x(n-N+1)w_N(|w_N x(n-N+1)|^2 - |\hat{a}(n)|^2)\mathbf{x}(n)\} = \mathbf{0}. \quad (4.38)$$

A eq. (4.38) é na verdade um conjunto de N equações, uma vez que o vetor $\mathbf{x}(n)$ possui dimensão igual a N . Considerando-se o canal do tipo AR examinado, tem-se a seguinte relação entre a entrada e a saída do canal: $x(n) = -\theta x(n-N+1) + a(n)$. Dada essa relação e relembrando a característica i.i.d. do sinal transmitido, verifica-se que o vetor de autocorrelação do sinal recebido $\rho_{xx}(i) = E\{x(n)x(n-i)\}$ é igual a zero dentro do intervalo $1 \leq i \leq N-2$. Desta forma, as $N-2$ equações intermediárias da eq. (4.38) são satisfeitas para todo w_N . Apenas a primeira e a última equações não são diretamente satisfeitas. Assim, pode-se escrever para a última equação de (4.38):

$$E\{x^2(n-N+1)w_N|w_N x(n-N+1)|^2\} = E\{x^2(n-N+1)w_N|\hat{a}(n)|^2\} \Rightarrow$$

$$|w_N|^2 E\{|x(n-N+1)|^4\} = E\{|x(n-N+1)|^2|\hat{a}(n)|^2\}.$$

Fazendo-se uso da independência estatística entre $a(n)$ e $x(n-N+1)$ e, ainda, considerando-se que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas, tem-se

$$|w_N|^2 E\{|x(n-N+1)|^4\} = E\{|x(n-N+1)|^2\}E\{|\hat{a}(n)|^2\} = \sigma_a^2 E\{|x(n)|^2\}.$$

Assim, finalmente obtém-se

$$w_N = \pm \sqrt{\sigma_a^2 \frac{E\{|x(n)|^2\}}{E\{|x(n)|^4\}}}. \quad (4.39)$$

A eq. (4.39) mostra que o critério DDM possui mínimos do tipo (4.37), de onde se verifica que a função custo DDM pode, de fato, ter mínimos locais para o caso de um equalizador de comprimento finito. O estudo feito em [77] encontrou um resultado similar para a função custo CM. Na verdade, foi demonstrado que o critério CM também possui mínimos locais da forma (4.37), porém, neste caso, a expressão de w_N é dada por

$$w_N = \pm \sqrt{R \frac{E\{|x(n)|^2\}}{E\{|x(n)|^4\}}}. \quad (4.40)$$

Os resultados obtidos em [77] são ampliados em [78], onde o autor mostra, num procedimento análogo, que existem outros vetores soluções que correspondem a mínimos do CM para sinais reais utilizando o canal (4.36). Esta extensão de resultado também pode ser aplicada ao critério DDM. Para tanto, faz-se necessário buscar soluções para a minimização da função custo DDM da seguinte forma:

$$\mathbf{w}_1 = [0 \ w_1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

que também representam apenas um ganho e um atraso, i.e., um mínimo local. Neste caso, a eq. (4.38) torna-se:

$$E\{x(n-1)w_1(|w_1x(n-1)|^2 - |\hat{a}(n)|^2)\mathbf{x}(n)\} = 0,$$

que também constitui um conjunto de N equações cuja maioria é diretamente satisfeita para qualquer w_1 . Neste caso, apenas a segunda equação não é diretamente satisfeita. Desenvolvendo-se o mesmo procedimento acima descrito, pode-se demonstrar facilmente que $w_1 = w_N$ (eq. (4.39)). Na verdade, pode-se demonstrar facilmente que todas as soluções da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= [0 \ w_1 \ 0 \ \dots \ 0], \\ \mathbf{w}_2 &= [0 \ 0 \ w_2 \ \dots \ 0], \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{Ding} &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ w_N], \end{aligned} \quad (4.41)$$

são soluções de minimização do critério DDM, onde todos os w_i ($i=1, 2, \dots, N$) são expressos por (4.39). Os vetores da forma (4.41) também são soluções do critério CM, entretanto, neste caso, os w_i ($i=1, 2, \dots, N$) são dados por (4.40).

Mínimos de Wiener para o um canal AR de ordem 1

O trabalho [78] ainda encontrou os mínimos do receptor de Wiener para diferentes atrasos utilizando o mesmo canal (4.36). Os resultados mostraram que os mínimos de Wiener associados a diferentes atrasos são colineares com os mínimos do CM dados por (4.40). Tais mínimos do receptor de Wiener são da forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{Wiener,0} &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ \theta] \\
\mathbf{w}_{Wiener,1} &= [0 \ (1-\theta)^2 \ 0 \ \dots \ 0] \\
\mathbf{w}_{Wiener,2} &= [0 \ 0 \ (1-\theta)^2 \ \dots \ 0] \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_{Wiener,N} &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ (1-\theta)^2].
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Isto mostra que, assim como para o DDM e o CM, o critério de Wiener também possui mínimos indesejáveis para o canal (4.36). Ademais, comparando-se a eq. (4.42) com a eq. (4.41), pode-se concluir facilmente que os mínimos do DDM, do CM e de Wiener são colineares para este caso.

Isto é um fato a ser ressaltado, uma vez que mostra que o importante resultado obtido para o CM pode ser ampliado para a nova função custo DDM. A colinearidade entre os mínimos do CM e do critério de Wiener já havia sido observada anteriormente em [69, 70]. A proximidade dos pontos de mínimo do DDM e do critério de Wiener será melhor explorada na seção seguinte, onde será estabelecida uma estreita relação entre os mínimos de Wiener e do DDM.

4.5 Relações Entre os Mínimos de Wiener e do DDM

Ainda prosseguindo no sentido de encontrar relações entre os critérios CM e o de Wiener, em [78] o autor desenvolve uma expressão aproximada para a função custo CM em termos do critério de Wiener. Desta forma, foi possível estabelecer uma relação direta entre os mínimos destas duas funções custo. Porém, neste desenvolvimento, é considerada a utilização de uma modulação do tipo BPSK (PSK binário). Nesta seção será feita uma generalização deste resultado para o critério DDM considerando um sinal com modulação real de qualquer ordem. Esta generalização é possível apenas para a função custo DDM, não sendo aplicável para o CM. Assim sendo, os resultados obtidos para o CM em [77] e [78] serão estendidos para o DDM em condições mais genéricas.

Deste modo, a análise feita nesta seção mostra relações estreitas, ainda mais estreitas que as relações entre os critérios de Wiener e CM, entre o novo critério cego DDM e o critério de Wiener.

Para sinais reais, é possível escrever a função custo DDM da seguinte forma:

$$J_{DDM} = E\{[y(n) - \hat{a}(n)]^2[y(n) + \hat{a}(n)]^2\}. \tag{4.43}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$J_{DDM}^2 = E\{ab\}^2 \leq E\{a^2\}E\{b^2\},$$

em (4.43), obtém-se

$$J_{DDM}^2 \leq J_F(\mathbf{w})J_F(-\mathbf{w}), \quad (4.44)$$

em que $J_F(\mathbf{w}) = E\{|y(n) - d(n)|^4\}$ é a função custo *Mean Forth Error*. Para o desenvolvimento da expressão (4.44) foi considerado que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas, i. e., $\hat{a}(n) = d(n)$. A igualdade é estabelecida na desigualdade acima para $\mathbf{w} = 0$. Adicionalmente, se o canal é perfeitamente equalizável, a igualdade também é estabelecida para $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{wiener}$ com o valor de τ correspondente ao EQM ótimo. Assim, como foi feito em [78], é possível aproximar a desigualdade (4.44) como uma equação válida nas vizinhanças dos pontos de mínimo, sobretudo se estes fornecem EQM próximos de zero. Para tanto, será feita uma suposição que a variância do erro quadrático médio é aproximadamente nula, pois se está nas imediações dos pontos de mínimo. Se isso ocorre, é válido escrever: $E\{e^2(n)\}^2 = E\{e^4(n)\}$. Desta forma pode-se expressar (4.44) como uma igualdade nas vizinhanças dos pontos de mínimo:

$$J_{DDM}(\mathbf{w}) \cong J_{MSE}(\mathbf{w})J_{MSE}(-\mathbf{w}). \quad (4.45)$$

A equação acima mostra uma relação direta entre a nova função custo cega DDM e a função custo de Wiener, que é um critério bastante conhecido e explorado na literatura. Esta mesma expressão é obtida em [78] para o CM utilizando uma modulação BPSK. É importante observar que a hipótese feita relativa às decisões corretas é garantida pela hipótese de variância do erro aproximadamente nula. Além disso, esta equação, válida nas vizinhanças dos pontos de mínimo, permite o desenvolvimento de uma expressão relacionando os pontos de mínimo destes dois critérios. Igualando o gradiente de (4.45) a zero, obtém-se

$$\nabla_{\mathbf{w}} J_{DDM} \cong \nabla_{\mathbf{w}} \{(\mathbf{w}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{p}_{dx} + \sigma_d^2)(\mathbf{w}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w} + 2\mathbf{w}^T \mathbf{p}_{dx} + \sigma_d^2)\} \Rightarrow$$

$$4\mathbf{R}_x \mathbf{w}(\mathbf{w}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w}) + 4\mathbf{R}_x \mathbf{w} \sigma_d^2 - 8\mathbf{p}_{dx}(\mathbf{w}^T \mathbf{p}_{dx}) \cong 0, \quad (4.46)$$

em que $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}$ é a matriz de autocorrelação de sinal recebido $x(n)$, σ_d^2 é a variância de seqüência desejada $d(n)$ e $\mathbf{p}_{dx} = E\{d(n)\mathbf{x}^*(n)\}$ é o vetor de correlação cruzada entre $\mathbf{x}(n)$ e $d(n)$. Pré-multiplicando a eq. (4.46) por \mathbf{R}_x^{-1} e utilizando a expressão do mínimo de Wiener (eq. (2.6)) $\mathbf{w}_{wiener} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{p}_{dx}$, obtém-se

$$\mathbf{w}_{DDM}(\mathbf{w}_{DDM}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{DDM}) + \mathbf{w}_{DDM} \sigma_d^2 \cong 2\mathbf{w}_{wiener}(\mathbf{w}_{DDM}^T \mathbf{p}_{dx}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}_{wiener} \cong \mathbf{w}_{DDM} \frac{\mathbf{w}_{DDM}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{DDM} + \sigma_d^2}{2\mathbf{w}_{DDM}^T \mathbf{p}_{dx}}. \quad (4.47)$$

Esta equação mostra explicitamente a colinearidade entre o mínimo de Wiener e do DDM para sinais reais. O termo quociente no lado direito da eq. (4.47) indica a distância entre \mathbf{w}_{wiener} e \mathbf{w}_{DDM} . Contudo, se o mínimo do DDM possui uma boa capacidade de equalização, esse termo quociente em (4.47) deve ser próximo da unidade, uma vez que, neste caso, pode-se escrever:

$$E\{e^2(n)\} = E\{[\mathbf{w}_{DDM}^T \mathbf{x}(n) - d(n)]^2\} = \mathbf{w}_{DDM}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w}_{DDM} - 2\mathbf{w}_{DDM}^T \mathbf{p}_{dx} + \sigma_d^2 \approx 0.$$

Implicando que o termo quociente na eq. (4.47) é próximo da unidade. Assim, para sinais reais e pequenos valores de variância do EQM, tem-se

$$\mathbf{w}_{DDM} \approx \mathbf{w}_{wiener}.$$

A equação acima mostra que o mínimo de Wiener é aproximadamente uma solução da minimização do critério DDM para sinais reais, o que demonstra uma estreita relação entre estes dois critérios. Isto implica que, se atingida a convergência global, o EQM fornecido pelo DDMA deve ser muito próximo do EQM de Wiener. A proximidade entre esses pontos de mínimo será verificada na Seção 6.2 através de simulações computacionais para o caso de sinais reais.

4.6 Contribuições do Capítulo

A fim de visualizar o panorama de contribuições do capítulo, resume-se abaixo os principais resultados originais desenvolvidos:

- Demonstração, para o caso sem ruído e assumindo a hipótese que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas, que os únicos possíveis pontos de mínimo estáveis da função custo DDM no espaço global são: o correspondente à solução ZF; e um conjunto de pontos representados pelas eqs. (4.18) e (4.19), com dois coeficientes não-nulos;
- Estabelecimento das condições nas quais o DDMA converge sempre para um dos mínimos acima descritos, inclusive para o caso SIMO;
- Desenvolvimento de um valor teórico para o EMSE fornecido pelo DDMA, do qual se pode constatar a melhor performance do DDMA sobre o CMA em constelações não CM;
- Demonstração, para o caso de um canal AR simples (exemplo de Ding), que os mínimos do DDM são colineares com os mínimos do CM e de Wiener, considerando-se diferentes atrasos;
- Desenvolvimento de uma expressão aproximada para a função custo DDM, válida nas vizinhanças dos pontos de mínimo, em termos da função custo de Wiener.

- Demonstração que o mínimo de Wiener é aproximadamente uma solução do critério DDM para sinais reais.

Concluída a análise teórica do DDMA, no capítulo a seguir serão propostas versões normalizadas e do tipo RLS dos algoritmos estudados no **Capítulo 3**. Trata-se na realidade de duas famílias de algoritmos, sendo algumas técnicas já existentes na literatura e outras originais deste trabalho.

Capítulo 5

Técnicas Normalizadas e do tipo Mínimos Quadrados Recursivos

NESTE capítulo são desenvolvidas duas classes de algoritmos para a realização de equalização cega inspiradas no CMA e no DDA. A primeira delas é constituída por versões normalizadas dos algoritmos desenvolvidos no **Capítulo 3**. A outra é composta por versões do tipo RLS dos mesmos algoritmos. Na realidade, tratam-se de duas famílias de algoritmos baseadas no CMA Normalizado (*Normalized CMA* - NCMA) e no CMA Recursivo (*Recursive CMA* - RCMA). É notoriamente sabido que os algoritmos NLMS e RLS possuem convergência mais rápida que a de algoritmos do tipo LMS no contexto de equalização supervisionada. Além disso, em geral pode-se dizer que a lenta velocidade de convergência é o principal inconveniente dos algoritmos do tipo Bussgang. Desta forma, o objetivo principal deste capítulo é desenvolver técnicas normalizadas e do tipo RLS equivalentes às desenvolvidas no **Capítulo 3** com o intuito de melhorar não só o desempenho do CMA, em termos de velocidade de convergência e EQM residual, mas também dos algoritmos NCMA e RCMA. Assim como no **Capítulo 3**, as técnicas aqui desenvolvidas são projetadas para prover ganhos adicionais em relação às técnicas clássicas quando aplicadas a sinais QAM de ordem elevada. Como será visto adiante, cada família é composta por quatro algoritmos com propriedades bastante interessantes, alguns deles já existentes na literatura e outros sendo propostos pela primeira vez no presente trabalho.

O resto do capítulo é organizado da seguinte forma. Na Seção 5.1 é desenvolvida a classe de algoritmos do tipo NCMA, incluindo as técnicas para a equalização de canais do tipo Wiener e uma relação interessante entre o algoritmo NLMSDD e os algoritmos do tipo NCMA estudados; na Seção 5.2 são desenvolvidos os algoritmos equivalentes do tipo RCMA; e na Seção 5.3 é feito um pequeno resumo das principais contribuições apresentadas neste capítulo.

5.1 Abordagem da Normalização do Fator de Passo

Em filtragem adaptativa supervisionada, o emprego da normalização do fator de passo é, em muitos casos, uma boa opção para o aumento da velocidade de convergência de algoritmos do tipo gradiente estocástico. Nesta seção serão estudados algoritmos para equalização cega que podem ser vistos como versões normalizadas dos algoritmos descritos no Capítulo 3. A abordagem utilizada para o desenvolvimento dos algoritmos é a mesma do NCMA, proposto

por alguns autores, e.g [79]. O NCMA é baseado em uma escolha específica do fator de passo e não funciona de maneira adequada em sinais QAM de ordem elevada. No final desta seção serão também desenvolvidas as versões do NCMA para técnicas de equalização cega de canais do tipo Wiener explanadas na Seção 3.6.

5.1.1 Algoritmo do Módulo Constante Normalizado - NCMA

O NCMA é um algoritmo cego inspirado no CMA que não possui desempenhos tão bons quanto o mesmo quando aplicados a sinais do tipo QAM de ordem elevada. O NCMA é baseado em uma escolha específica do fator de passo. A cada iteração é escolhido um valor para o fator de passo tal que o filtro de coeficientes do equalizador adaptado aplicado ao vetor de entradas do instante corrente tenha um módulo desejado. Trata-se de um problema de minimização da seguinte função custo:

$$J = \|\delta \mathbf{w}(n)\|^2 = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2, \quad (5.1)$$

satisfazendo a restrição:

$$|\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)|^2 = R, \quad (5.2)$$

em que R é a mesma constante da eq. (3.2). Este problema de otimização pode ser resolvido utilizando-se o método do Multiplicador de Lagrange, reescrevendo-se a função custo da seguinte maneira:

$$J = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2 + \lambda(|\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)|^2 - R). \quad (5.3)$$

Na verdade, para o desenvolvimento do NCMA, é utilizada uma restrição mais forte que (5.2), apesar dessa restrição continuar sendo utilizada na expressão da função custo, como mostra a eq. (5.3). Assim, durante o desenvolvimento do algoritmo é considerado que $\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n) = \sqrt{R}e^{j\angle y(n)}$, onde $\angle y(n)$ representa a fase de $y(n)$. Isto significa que o vetor de coeficientes do equalizador no instante “ $n+1$ ” aplicado ao vetor de entradas do instante “ n ” deve ter um módulo quadrático igual a R e uma fase igual à de $y(n)$, ou seja $\angle[\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)] = \angle[\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)]$. Igualando-se o gradiente da função custo em relação a \mathbf{w} ao vetor nulo $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$ de dimensão $M \times 1$, obtém-se

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = 2[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] + 2\lambda\sqrt{R}e^{j\angle y(n)}\mathbf{x}^*(n) = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Pré-multiplicando-se a equação acima por $\mathbf{x}^T(n)$, chega-se a

$$\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1) - y(n) = -\lambda\sqrt{R}e^{j\angle y(n)}\|\mathbf{x}(n)\|^2.$$

Pode-se então, encontrar a expressão do Multiplicador de Lagrange associado a este problema de otimização:

$$\lambda = \frac{y(n) - \sqrt{R}e^{j\angle y(n)}}{\sqrt{R}e^{j\angle y(n)}\|\mathbf{x}(n)\|^2} = \frac{-1}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} \left[1 - \frac{|y(n)|}{\sqrt{R}}\right]. \quad (5.5)$$

Substituindo-se a eq. (5.5) na eq. (5.4) pode-se encontrar a expressão de adaptação do NCMA:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} y(n) \left(\frac{\sqrt{R}}{|y(n)|} - 1 \right) \mathbf{x}^*(n). \quad (5.6)$$

Foi introduzido um fator de passo μ na equação acima (5.6) para fornecer mais um grau de liberdade ao controle da velocidade de adaptação do vetor de pesos do equalizador. Vale ressaltar que o NCMA não é apenas uma consequência da normalização do fator de passo do respectivo algoritmo do tipo gradiente estocástico, ou seja, o CMA. Diferentemente do NLMS, em que a única diferença existente entre ele e o LMS reside no termo normalizador de μ , o NCMA possui uma expressão de adaptação totalmente diferente do CMA, como pode-se ver pela expressão acima. Desta forma, não se deve esperar que as conclusões tiradas para os algoritmos do tipo CMA sejam idênticas às dos algoritmos do tipo NCMA. Até mesmo no que se refere ao NCMA, este não possui um desempenho tão bom quanto o CMA em sinais QAM de ordem elevada.

5.1.2 Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Normalizado - NDDMA

Na Seção 3.3 foi desenvolvido o DDMA, um algoritmo resultante da substituição do módulo de referência constante R pela referência variável $|\hat{a}(n)|^2$ no CMA. Baseando-se nessa idéia trabalhada no **Capítulo 3**, é possível mudar a restrição do NCMA substituindo-se a constante R por $|\hat{a}(n)|^2$ e desenvolver um novo algoritmo com melhores performances que o NCMA em sinais do tipo QAM de ordem elevada. Esta nova técnica pode ser vista como uma generalização do NCMA para constelações com múltiplos raios. Desta forma, esse novo algoritmo é desenvolvido minimizando-se a mesma função custo (5.1) e utilizando a seguinte restrição:

$$|\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)|^2 = |\hat{a}(n)|^2.$$

Conforme já explicado na Seção 3.3, pode-se considerar que a derivada de $\hat{a}(n)$ em relação a $\mathbf{w}(n)$ é nula. Assim, a solução para este problema de otimização pode ser encontrada de

maneira idêntica ao desenvolvimento do NCMA feito na seção anterior. Esta solução corresponde ao Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Normalizado - *Normalized Decision Directed Modulus Algorithm* (NDDMA), dado por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} y(n) \left(\frac{|\hat{a}(n)|}{|y(n)|} - 1 \right) \mathbf{x}^*(n).$$

A restrição imposta pelo NDDMA ao vetor de pesos do equalizador pode assumir qualquer valor entre as normas quadráticas dos símbolos da constelação transmitida, permitindo assim uma maior flexibilidade ao algoritmo. Desta forma, o NDDMA melhora significativamente a performance do NCMA quando utilizados em sinais do tipo QAM de ordem elevada.

O NDDMA também é dirigido pela decisão, ou seja, ele também tem seu desempenho prejudicado se existe um número muito grande de decisões incorretas. Para resolver esse problema, o NDDMA também pode ser utilizado de forma dual (*dual-mode*). Entretanto, neste caso, o algoritmo escolhido para realizar o ajuste inicial do equalizador é o NCMA, uma vez que a comutação entre esses dois algoritmos pode ser vista como um simples chaveamento da constante \sqrt{R} para $|\hat{a}(n)|$, não causando aumentos significativos na complexidade algorítmica.

5.1.3 Algoritmo do Módulo Constante Modificado Normalizado - NMCMA

A abordagem “modificada” adotada pelo MCMA no **Capítulo 3** tem mostrado melhorar significativamente a performance do CMA [14, 48], principalmente devido ao fato de as referências real e imaginária do MCMA serem melhores adaptadas a constelações quadradas (como no caso QAM) do que a referência de módulo do CMA. Um passo adiante no sentido de melhorar a performance da classe de algoritmos normalizados é empregar no NCMA a abordagem “modificada” utilizada pelo MCMA. A técnica resultante desta idéia, que será chamada nesta dissertação de Algoritmo do Módulo Constante Modificado Normalizado - *Normalized Modified Constant Modulus Algorithm* (NMCMA), foi proposta em [80]. Esta nomenclatura deve-se ao fato de este algoritmo poder ser visto como uma versão normalizada do MCMA. O NMCMA possui a mesma função custo do NCMA (5.1), entretanto, a otimização é feita sob duas restrições, impostas às partes real e imaginária do sinal:

$$Re\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = R_R. \quad (5.7)$$

$$Im\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = R_I. \quad (5.8)$$

O desenvolvimento do NMCMA é inspirado no desenvolvimento do NCMA feito na Seção 5.1.1. Entretanto, neste caso, a função custo passa a ter dois Multiplicadores de Lagrange:

$$J = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2 + \lambda_1(\operatorname{Re}\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 - R_R) + \lambda_2(\operatorname{Im}\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 - R_I).$$

Assim como foi feito na Seção 5.1.1, serão utilizadas restrições mais fortes que (5.7) e (5.8), apesar dessas restrições continuarem sendo utilizadas na expressão da função custo. Durante o desenvolvimento do algoritmo é considerado que: $\operatorname{Re}\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\} = \sqrt{R_R}\operatorname{sign}[y_R(n)]$ e $\operatorname{Im}\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\} = \sqrt{R_I}\operatorname{sign}[y_I(n)]$, onde $\operatorname{sign}[y_R(n)]$ e $\operatorname{sign}[y_I(n)]$ denotam, respectivamente, os sinais algébricos de $y_R(n)$ e $y_I(n)$. Isto significa que o vetor de coeficientes do equalizador no instante “ $n+1$ ” aplicado ao vetor de entradas do instante “ n ” deve ter partes real e imaginária com o mesmo sinal algébrico das partes real e imaginária $y(n)$ respectivamente. Ou seja, $\operatorname{csign}\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\} = \operatorname{csign}[y(n)]$, onde $\operatorname{csign}[y(n)] = \operatorname{sign}[y_R(n)] + j\operatorname{sign}[y_I(n)]$. Igualando-se o gradiente da função custo em relação a \mathbf{w} ao vetor nulo, obtém-se

$$\nabla_{\mathbf{w}}J = 2[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] + 2\lambda_1\sqrt{R_R}\operatorname{sign}[y_R(n)]\mathbf{x}^*(n) + 2j\lambda_2\sqrt{R_I}\operatorname{sign}[y_I(n)]\mathbf{x}^*(n) = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Pré-multiplicando a equação acima por $\mathbf{x}^T(n)$, chega-se a

$$\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1) - y(n) = -\lambda_1\sqrt{R_R}\operatorname{sign}[y_R(n)]\|\mathbf{x}(n)\|^2 - j\lambda_2\sqrt{R_I}\operatorname{sign}[y_I(n)]\|\mathbf{x}(n)\|^2,$$

que pode ser dividida em duas equações

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1)\} - y_R(n) = -\lambda_1\sqrt{R_R}\operatorname{sign}[y_R(n)]\|\mathbf{x}(n)\|^2,$$

$$\operatorname{Im}\{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1)\} - y_I(n) = -\lambda_2\sqrt{R_I}\operatorname{sign}[y_I(n)]\|\mathbf{x}(n)\|^2.$$

Assim, pode-se encontrar as expressões para os Multiplicadores de Lagrange associados a este problema:

$$\lambda_1 = \frac{y_R(n) - \sqrt{R_R}\operatorname{sign}[y_R(n)]}{\sqrt{R_R}\operatorname{sign}[y_R(n)]\|\mathbf{x}(n)\|^2} = \frac{-1}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} \left[1 - \frac{|y_R(n)|}{\sqrt{R_R}}\right], \quad (5.10)$$

$$\lambda_2 = \frac{y_I(n) - \sqrt{R_I}\operatorname{sign}[y_I(n)]}{\sqrt{R_I}\operatorname{sign}[y_I(n)]\|\mathbf{x}(n)\|^2} = \frac{-1}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} \left[1 - \frac{|y_I(n)|}{\sqrt{R_I}}\right]. \quad (5.11)$$

Finalmente, substituindo-se as eqs. (5.10) e (5.11) na eq. (5.9) chega-se à expressão de

adaptação do vetor de pesos do equalizador utilizando o NMCMA:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} [y_R(n) \left(\frac{\sqrt{R_R}}{|y_R(n)|} - 1 \right) + jy_I(n) \left(\frac{\sqrt{R_I}}{|y_I(n)|} - 1 \right)] \mathbf{x}^*(n). \quad (5.12)$$

Tal como em (5.6), foi introduzido um fator de passo μ na equação acima (5.12) para fornecer mais um grau de liberdade ao controle da velocidade de adaptação do vetor de pesos do equalizador. Também é importante destacar que o NMCMA e o NCMA possuem complexidade algorítmica semelhantes. O NMCMA também possui a capacidade de recuperar a fase da portadora de maneira cega. Ademais, o NMCMA não é dirigido pela decisão, o que significa que ele não é prejudicado por uma decisão incorreta.

5.1.4 Relações Entre a Classe de Algoritmos Normalizados e o Algoritmo NLMSDD

Baseando-se na família de algoritmos desenvolvidos no **Capítulo 3** e seguindo a linha de raciocínio desenvolvida até o presente momento neste capítulo, é possível imaginar em unificar as modificações feitas no NCMA pelo NDDMA e pelo NMCMA para desenvolver um novo algoritmo que incorpore essas modificações de maneira conjunta, assim como foi feito para o MDDMA. Para tanto, seria necessário minimizar a função custo (5.1) sob as seguintes restrições:

$$Re\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = \hat{a}_R^2(n), \quad (5.13)$$

$$Im\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = \hat{a}_I^2(n). \quad (5.14)$$

Procedendo de maneira análoga ao desenvolvimento do NCMA e do NMCMA, seriam utilizadas restrições mais fortes que (5.13) e (5.14), apesar dessas restrições continuarem sendo utilizadas na expressão da função custo. Para tanto, as restrições para este problema devem ser escritas da seguinte forma:

$$Re\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\} = |\hat{a}_R(n)| \text{sign}[y_R(n)], \quad (5.15)$$

$$Im\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\} = |\hat{a}_I(n)| \text{sign}[y_I(n)]. \quad (5.16)$$

Uma vez que $\text{sign}[y_R(n)] = \text{sign}[\hat{a}_R(n)]$ e $\text{sign}[y_I(n)] = \text{sign}[\hat{a}_I(n)]$, pode-se reescrever as

eqs. (5.15) e (5.16) em uma única equação:

$$\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n) = \hat{a}(n),$$

que é exatamente a mesma restrição utilizada no desenvolvimento do algoritmo NLMSDD (ver [22]). Desta forma, pode-se demonstrar que o algoritmo resultante desta otimização é equivalente ao algoritmo NLMSDD. Em outras palavras, a equação de adaptação seguinte:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} \left[y_R(n) \left(1 - \frac{|\hat{a}_R(n)|}{|y_R(n)|}\right) + jy_I(n) \left(1 - \frac{|\hat{a}_I(n)|}{|y_I(n)|}\right) \right] \mathbf{x}^*(n),$$

equivale a

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} [y(n) - \hat{a}(n)] \mathbf{x}^*(n).$$

Pode-se então concluir que o NMCMA pode ser visto como uma versão não dirigida pela decisão do NLMSDD. Isto significa que o NMCMA é mais robusto à ISI que o NLMSDD, porém com pior performance que o NLMSDD em situações com baixo nível de ISI. Essa estreita relação entre o NMCMA e o NLMSDD pode ser explorada utilizando-se as técnicas *dual-mode*, de acordo com o que foi comentado anteriormente e com o que será explicado na Seção 6.1. Neste caso, a comutação entre o NMCMA e o NLMSDD pode ser vista como um simples chaveamento das constantes $\sqrt{R_R}$ e $\sqrt{R_I}$ para $|\hat{a}_R(n)|$ e $|\hat{a}_I(n)|$, respectivamente.

5.1.5 Equalização de Canais Não-Lineares Utilizando o NCMA

Na Teoria da Equalização de canais lineares, o emprego da normalização do fator de passo é freqüentemente uma boa opção para o aumento da velocidade de convergência de algoritmos do tipo LMS. Nesta seção serão desenvolvidas versões normalizadas das técnicas propostas na Seção 3.6 com o intuito de verificar se esta abordagem normalizada possui convergência acelerada com relação ao CMA no caso de canais não-lineares. Para tanto, será utilizado o NCMA. Neste caso, o objetivo é definir um problema de otimização unificado para as três diferentes estruturas consideradas: a Separada, a Volterra diagonal e a Volterra. Na seqüência, serão escritas a função custo e a restrição para este problema de maneira unificada, utilizando a notação mostrada na Tabela 2.1 (Seção 2.4), através da qual a saída $y(n)$ é sempre escrita de forma linear com relação aos parâmetros dos filtros. Assim, o desenvolvimento das três técnicas se dará de maneira idêntica.

Utilizando-se a notação unificada, pode-se expressar a função custo para este caso da seguinte maneira:

$$J_{NCM} = \|\delta \mathbf{q}(n)\|^2 = \|\mathbf{q}(n+1) - \mathbf{q}(n)\|^2.$$

A restrição do problema de minimização desta função custo é dada pela expressão:

$$|\mathbf{q}^T(n+1)\mathbf{t}(n)|^2 = R.$$

A solução deste problema de otimização é realizada de maneira idêntica ao desenvolvimento do NCMA feito na Seção 5.1.1, uma vez que o modelo unificado introduzido utilizado é linear com relação aos parâmetros dos filtros. A expressão de adaptação do NCMA, neste caso, pode ser expressa por

$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{q}(n) + \frac{\mu}{\|\mathbf{t}(n)\|^2} y(n) \left(\frac{\sqrt{R}}{|y(n)|} - 1 \right) \mathbf{t}^*(n),$$

em que os valores de \mathbf{q} e \mathbf{t} , mostrados na Tabela. 2.1, definem as diferentes técnicas. Neste caso, as adaptações de \mathbf{g} e \mathbf{w} na abordagem Separada também são realizadas de maneira alternada. Assim como para o LMS e para o CMA, o fator de passo μ não é necessariamente o mesmo para as três abordagens. A ordem de complexidade destas técnicas NCMA são as mesmas que as do LMS e do CMA, ou seja, da ordem $O(M+P)$ para o NCMA-Separado, $O(M.P)$ para o NCMA-Volterra diagonal e $O(\frac{M^{P+1}-M}{M-1})$ para o NCMA-Volterra.

Como exposto anteriormente, o NCMA é baseado em uma escolha específica do fator de passo. No caso da abordagem Separada, na adaptação do filtro não-linear, a cada iteração é escolhido um valor para o fator de passo tal que o filtro não-linear adaptado $\mathbf{g}(n+1)$ aplicado ao vetor de entradas do instante corrente e ao filtro linear não-adaptado $\mathbf{w}(n)$ tenha um módulo igual ao desejado. Na adaptação do filtro linear, tem-se a situação oposta. O fator de passo é tal que o filtro linear adaptado $\mathbf{w}(n+1)$ aplicado ao vetor de entradas do instante corrente e ao filtro não-linear não-adaptado $\mathbf{g}(n)$ tenha um módulo igual ao desejado. No caso das abordagens que utilizam os filtros de Volterra, a escolha do fator de passo é semelhante ao caso linear, uma vez que existe apenas um filtro a ser adaptado.

As técnicas de equalização de canais do tipo Wiener acima desenvolvidas encerram a família de algoritmos do tipo normalizado. A Tabela 5.4, a seguir, sintetiza os algoritmos do tipo NCMA percorridos neste capítulo. Ao lado do nome de cada técnica não originária desta dissertação estão indicadas as referências dos trabalhos onde foram propostos.

Tabela 5.4: Resumo dos Algoritmos Normalizados estudados nesse capítulo.

Algoritmos	Equação de Adaptação
NCMA [79]	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{\ \mathbf{x}(n)\ ^2} y(n) \left(\frac{\sqrt{R}}{ y(n) } - 1 \right) \mathbf{x}^*(n)$
NDDMA	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{\ \mathbf{x}(n)\ ^2} y(n) \left(\frac{ \hat{a}(n) }{ y(n) } - 1 \right) \mathbf{x}^*(n)$
NMCMA [80]	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{\ \mathbf{x}(n)\ ^2} [y_R(n) \left(1 - \frac{\sqrt{R_R}}{ y_R(n) } \right) + jy_I(n) \left(1 - \frac{\sqrt{R_I}}{ y_I(n) } \right)] \mathbf{x}^*(n)$
NLMSDD [24, 25]	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{\ \mathbf{x}(n)\ ^2} [y(n) - \hat{a}_R(n)] \mathbf{x}^*(n)$
NCMA Não-Linear	$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{q}(n) + \frac{\mu}{\ \mathbf{t}(n)\ ^2} y(n) \left(\frac{\sqrt{R}}{ y(n) } - 1 \right) \mathbf{t}^*(n)$

5.2 Algoritmos do Tipo RLS

Esta seção é dedicada ao desenvolvimento de uma família de técnicas para a realização de equalização cega baseadas em versões do tipo RLS dos algoritmos DDMA, MCMA e MDDMA, introduzidos no Capítulo 3. Os algoritmos desenvolvidos nesta seção possuem melhores performances que os algoritmos do tipo CMA, porém ao custo de uma complexidade computacional elevada. Assim como os algoritmos desenvolvidos na Seção 5.1 se baseiam no NCMA, todos os algoritmos desta seção são baseados na versão tipo RLS do CMA, ou seja, no RCMA.

5.2.1 Algoritmo do Módulo Constante Recursivo - RCMA

O RCMA, proposto em [81, 82], é um algoritmo para a realização de equalização cega do tipo RLS que possui uma rápida convergência e uma complexidade computacional elevada. O RCMA é baseado na minimização da versão de mínimos quadrados recursivos da função custo CM, que será chamada de função de custo Módulo Constante Recursivo (*Recursive Constant Modulus cost function* - RCM):

$$\phi_{RCM}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} (|y(n, i)|^2 - R)^2,$$

em que $y(n, i) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(i)$, R é a mesma constante da eq. (3.2) e $\lambda \leq 1$ é o fator de esquecimento. A solução para este problema de otimização pode ser desenvolvida de duas maneiras, como feito em [81] ou como em [82], sendo que ambos os desenvolvimentos utilizam uma aproximação algorítmica. Nesta seção, o RCMA é desenvolvido da mesma maneira que em [81]. Igualando o gradiente da função custo acima com relação a $\mathbf{w}(n)$ ao vetor nulo e utilizando as expressões de gradiente (A.1) e (A.2), desenvolvidas no Apêndice A, obtém-se

$$\nabla_{\mathbf{w}} \phi_{RCM}(n) = 4 \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} (|y(n, i)|^2 - R) y(n, i) \mathbf{x}^*(i) = \mathbf{0}.$$

Definindo $\mathbf{s}(n, i) = y^*(n, i)\mathbf{x}(i)$ e tomando a transposta da equação acima, tem-se

$$R \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{s}^H(n, i) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} |y(n, i)|^2 \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^H(i) \Rightarrow$$

$$R \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{s}^H(n, i) = \mathbf{w}^T(n) \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{s}(n, i) \mathbf{s}^H(n, i).$$

Pode-se definir, para fins de simplificação de notação, o vetor $\mathbf{z}(n)$ como sendo a transposta do termo do lado esquerdo da equação acima e a matriz $\Phi(n)$ como sendo a transposta do termo em somatório no lado direito da equação, ou seja

$$\mathbf{z}(n) = R \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{s}^*(n, i), \quad (5.17)$$

$$\Phi(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{s}^*(n, i) \mathbf{s}^T(n, i). \quad (5.18)$$

O vetor $\mathbf{z}(n)$ desempenha neste problema de otimização de Mínimos Quadrados Recursivos a mesma função que o vetor de correlação cruzada, entre a seqüência desejada e o vetor de entradas do equalizador transversal, desempenha na Teoria de Wiener. A matriz $\Phi(n)$ também possui uma equivalência na Teoria de Wiener, exercendo a mesma função que a matriz de autocorrelação do vetor de entradas do equalizador transversal. Desta forma, pode-se encontrar uma equação equivalente à equação de Wiener para este problema, cuja solução é o nosso principal objetivo:

$$\mathbf{z}^T(n) = \mathbf{w}^T(n) \Phi^T(n) \Rightarrow \mathbf{z}(n) = \Phi(n) \mathbf{w}(n) \Rightarrow \mathbf{w}(n) = \Phi(n)^{-1} \mathbf{z}(n). \quad (5.19)$$

A solução para a equação acima será encontrada de forma recursiva. Para tanto, faz-se necessário encontrar recursões para $z(n)$ e $\Phi(n)$. Estas recursões não podem ser encontradas de maneira exata, uma vez que, de acordo com as definições contidas nas eqs. (5.17) e (5.18), $z(n)$ e $\Phi(n)$ dependem de $\mathbf{w}(n)$, enquanto que $z(n-1)$ e $\Phi(n-1)$ dependem de $\mathbf{w}(n-1)$. Entretanto, pode-se encontrar tais recursões de forma aproximada, considerando-se que $\mathbf{w}(n) \cong \mathbf{w}(n-1)$. Esta aproximação é especialmente válida no Estado de Regime Permanente e em situações nas quais o vetor de pesos do equalizador $\mathbf{w}(n)$ varia lentamente. Desta forma, pode-se escrever as seguintes recursões para $z(n)$ e $\Phi(n)$, levando-se em consideração esta aproximação, mantendo-se, no entanto, a mesma notação para designar $z(n)$ e $\Phi(n)$:

$$\mathbf{z}(n) = \lambda \mathbf{z}(n-1) + R \mathbf{s}^*(n), \quad (5.20)$$

$$\Phi(n) = \lambda \Phi(n-1) + \mathbf{s}^*(n) \mathbf{s}^T(n), \quad (5.21)$$

em que $\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}(n, n)$. Entretanto, faz-se necessário encontrar uma recursão para $\mathbf{P}(n) = \Phi(n)^{-1}$, que pode ser encontrada a partir de (5.21) utilizando-se o Lema da Inversão de Matriz:

$$\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1} \cdot [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n) \mathbf{s}^T(n) \mathbf{P}(n-1)], \quad (5.22)$$

tal que

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}^*(n)}{\lambda + \mathbf{s}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}^*(n)}. \quad (5.23)$$

A partir da equação acima, pode-se ainda escrever

$$\mathbf{k}(n) \lambda + \mathbf{k}(n) \mathbf{s}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}^*(n) = \mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}^*(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{k}(n) \lambda = [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n) \mathbf{s}^T(n) \mathbf{P}(n-1)] \mathbf{s}^*(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{k}(n) = \mathbf{P}(n) \mathbf{s}^*(n). \quad (5.24)$$

Utilizando a eq. (5.24) e as recursões (5.20) e (5.22), pode-se encontrar um algoritmo que soluciona a eq. (5.19) recursivamente. A partir da eq. (5.19), tem-se

$$\mathbf{w}(n) = \lambda \mathbf{P}(n) \mathbf{z}(n-1) + R \mathbf{P}(n) \mathbf{s}^*(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{P}(n-1) \mathbf{z}(n-1) - \mathbf{k}(n) \mathbf{s}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{z}(n-1) + R \mathbf{k}(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n) \{-\mathbf{s}^T(n) \mathbf{w}(n-1) + R\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)\{R - y^*(n)\xi(n)\}, \quad (5.25)$$

sendo que $y(n) = y(n, n)$ e $\xi(n) = \mathbf{w}^T(n-1)\mathbf{x}(n)$ é a *estimação da saída a priori*. A expressão acima (5.25) corresponde a uma solução exata para a eq. (5.19). Porém, como pode-se observar, essa expressão utiliza a informação referente à saída do equalizador $y(n)$ e, neste caso, não se tem acesso a saída do equalizador no instante “ n ”, uma vez que $y(n)$ depende do vetor de pesos do equalizador no instante “ n ” ($\mathbf{w}(n)$), que ainda não foi calculado. Entretanto, pode-se aproximar a solução dada pela eq. (5.25) substituindo-se a saída do equalizador $y(n)$ na eq. (5.25) por sua estimação $\xi(n)$. É importante observar que esta aproximação é equivalente àquele feita para o desenvolvimento das eqs. (5.21) e (5.20). Desta forma, é possível reescrever a eq. (5.25) levando-se em consideração esta aproximação, mantendo-se, no entanto, a mesma notação para designar o vetor de coeficientes $\mathbf{w}(n)$:

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)\{R - |\xi(n)|^2\}.$$

Finalmente, pode-se resumir as expressões do RCMA nas equações seguintes, onde o vetor $\mathbf{s}(n) = y^*(n)\mathbf{x}(n)$ também foi substituído por sua estimação $\hat{\mathbf{s}}(n) = \xi^*(n)\mathbf{x}(n)$:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \xi^*(n)\mathbf{x}(n) \quad \text{tal que} \quad \xi(n) = \mathbf{w}^T(n-1)\mathbf{x}^*(n),$$

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)}{\lambda + \hat{\mathbf{s}}^\top(n)\mathbf{P}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)},$$

$$\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1} \cdot \left[\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\hat{\mathbf{s}}^\top(n)\mathbf{P}(n-1) \right] \quad (5.26)$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n) \cdot (R - |\xi(n)|^2).$$

A matriz $\mathbf{P}(n)$ é inicializada da mesma forma que no RLS, i. e., $\mathbf{P}(0) = \delta^{-1}\mathbf{I}_M$, em que δ é uma constante positiva e \mathbf{I}_M é a matriz identidade de dimensão M .

5.2.2 Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Recursivo - RDDMA

Na Seção 3.3 foi estudada a técnica proveniente da substituição da constante de referência R pela referência variável $|\hat{a}(n)|^2$ no CMA. Da mesma forma como foi feito para os algoritmos normalizados, nesta seção será aplicada no RCMA a mesma idéia do Módulo Dirigido pela Decisão utilizada pelo DDMA, descrito no Capítulo 3. Este novo algoritmo pode ser visto como uma generalização do RCMA para constelações com múltiplos raios. Além disso, ele também

pode ser visto como uma versão do tipo RLS do DDMA. Devido a isso esta técnica será chamada de Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Recursivo - *Recursive Directed Decision Modulus Algorithm* (RDDMA). O RDDMA melhora a performance do DDMA em detrimento de um aumento na complexidade computacional. A função custo do RDDMA escreve-se da seguinte forma:

$$\phi_{RDDM}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [|y(n, i)|^2 - |\hat{a}(i)|^2]^2, \quad (5.27)$$

sendo que $y(n, i) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(i)$ e $\lambda \leq 1$ é o fator de esquecimento. A solução para este problema de otimização pode ser feito de maneira idêntica ao desenvolvimento do RCMA mostrado na seção anterior ou como em [82]. Considerando, como já justificado anteriormente, que a derivada de $\hat{a}(n)$ em relação a $\mathbf{w}(n)$ é nula, os desenvolvimentos do RCMA e do RDDMA tornam-se idênticos. Desta forma, pode-se encontrar as equações de adaptação do RDDMA:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(n) &= \frac{\mathbf{P}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)}{\lambda + \hat{\mathbf{s}}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)}, \text{ onde } \hat{\mathbf{s}}(n) = \xi^*(n)\mathbf{x}(n) \\ \mathbf{P}(n) &= \lambda^{-1} \cdot [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\hat{\mathbf{s}}^T(n)\mathbf{P}(n-1)] \\ \mathbf{w}(n) &= \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n) \cdot (|\hat{a}_\xi(n)|^2 - |\xi(n)|^2). \end{aligned}$$

A inicialização da matriz $\mathbf{P}(n)$ é feita da mesma forma que no RCMA. Para sinais do tipo PSK, o RCMA e o RDDMA são algoritmos idênticos. A grande vantagem do RDDMA é seu desempenho em sinais do tipo QAM de ordem elevada, quando sua performance é significativamente melhorada em relação à do RCMA.

Assim como para o DDMA, por ser dirigido pela decisão, a performance do RDDMA é prejudicada se existe um número muito grande de decisões incorretas. Assim, a abordagem de modo dual pode ser aplicada também ao RDDMA. Neste caso o processo de equalização inicia-se com o RCMA e, após a realização de algum critério de comutação, o algoritmo de equalização é comutado para o RDDMA. Esta comutação também pode ser vista como um simples chaveamento do raio de referência, não causando aumentos consideráveis na complexidade computacional, de acordo com o que será explicado na Seção 6.1. O RDDMA *dual-mode* possui melhor performance e robustez quando comparado ao RDDMA *single-mode* (sem comutação).

5.2.3 Algoritmo do Módulo Constante Modificado Recursivo - RMCMA

Nesta seção é realizada uma das mais importantes contribuições deste trabalho. Na realidade, dentre as técnicas originais propostas nesta dissertação, está a única técnica não dirigida pela decisão para equalização de canais lineares. A abordagem “modificada” adotada pelo MCMA e pelo NMCMA pode ser utilizada para desenvolver um novo algoritmo baseado no RCMA, também capaz de realizar recuperação de portadora e equalização cega conjuntamente. Portanto, esta técnica será chamada de Algoritmo do Módulo Constante Modificado Recursivo

- *Recursive Modified Constant Modulus Algorithm* (RMCMA). O RMCMA mostrou-se como o algoritmo com melhor performance entre todas as técnicas cegas e não dirigidas pela decisão descritas neste trabalho. Sua função custo pode ser vista como uma divisão da função custo RCM (eq. (5.27)) nas partes real e imaginária ou, ainda, como uma versão do tipo RLS da função custo MCM (eq. (3.7)), conforme é mostrado a seguir:

$$\phi_{MRCM}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [(y_R^2(n, i) - R_R)^2 + (y_I^2(n, i) - R_I)^2],$$

em que as constantes R_R e R_I são as mesmas do MCMA (eq. (3.7)). O desenvolvimento do RMCMA é inspirado no desenvolvimento do RCMA, entretanto, significativamente mais complexo. Igualando o gradiente da função custo acima com relação a $\mathbf{w}(n)$ ao vetor nulo, obtém-se

$$\nabla_{\mathbf{w}(n)} \phi(n) = 4 \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [(y_R^2(n, i) - R_R) y_R(n, i) \nabla_{\mathbf{w}(n)} y_R(n, i) + (y_I^2(n, i) - R_I) y_I(n, i) \nabla_{\mathbf{w}(n)} y_I(n, i)] = \mathbf{0}.$$

Para o cálculo do gradiente de $y_R(n, i)$ e $y_I(n, i)$ em relação a $\mathbf{w}(n)$ serão utilizadas as expressões matemáticas contidas nas eqs. (A.3) e (A.4) do Apêndice 1. Desta forma, tem-se

$$\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [R_R y_R(n, i) + j R_I y_I(n, i)] \mathbf{x}^*(i) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [y_R^3(n, i) + j y_I^3(n, i)] \mathbf{x}^*(i). \quad (5.28)$$

Para o prosseguimento deste desenvolvimento, faz-se necessário utilizar a seguinte fatoração na eq. (5.28):

$$y|y|^2 = [y_R + jy_I][y_R^2 + y_I^2] = y_R^3 + y_R y_I^2 + jy_I y_R^2 + jy_I^3 \Rightarrow$$

$$y_R^3 + jy_I^3 = y|y|^2 - jy_R y_I y^*. \quad (5.29)$$

Assim, substituindo a eq. (5.29) na eq. (5.28) e tomando a transposta, chega-se a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [R_{RR}y_R(n, i) + jR_{IR}y_I(n, i) + jy_R(n, i)y_I(n, i)y^*(n, i)] \mathbf{x}^H(i) &= \\
&= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \{y(n, i)|y(n, i)|^2\} \mathbf{x}^H(i) \Rightarrow \\
\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [R_{RR}y_R(n, i) + jR_{IR}y_I(n, i) + jy_R(n, i)y_I(n, i)y^*(n, i)] \mathbf{x}^H(i) &= \\
&= \mathbf{w}^T(n) \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \{|y(n, i)|^2\} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^H(i).
\end{aligned}$$

Pode-se definir, para fins de simplificação de notação, o vetor $\check{\mathbf{z}}(n)$ como sendo a transposta do termo do lado esquerdo da equação acima e a matriz $\check{\Phi}(n)$ como sendo a transposta do termo em somatório no lado direito da mesma equação, ou seja

$$\check{\mathbf{z}}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [R_{RR}y_R(n, i) + jR_{IR}y_I(n, i) + jy_R(n, i)y_I(n, i)y^*(n, i)] \mathbf{x}^*(i), \quad (5.30)$$

$$\check{\Phi}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{s}^*(n, i) \mathbf{s}^T(n, i), \quad (5.31)$$

em que $\mathbf{s}(n, i) = y^*(n, i)\mathbf{x}(i)$. Assim como para o RCMA na Seção 5.2.1, neste problema o vetor $\check{\mathbf{z}}(n)$ desempenha a mesma função que o vetor de correlação cruzada, entre a seqüência desejada e o vetor de entradas do equalizador transversal, desempenha na Teoria de Wiener. A matriz $\check{\Phi}(n)$ também possui a mesma equivalência na Teoria de Wiener, exercendo a função que a matriz de autocorrelação do vetor de entradas do equalizador transversal. Desta forma, pode-se encontrar uma equação equivalente à equação de Wiener:

$$\check{\mathbf{z}}^T(n) = \mathbf{w}^T(n) \check{\Phi}^T(n) \Rightarrow \check{\mathbf{z}}(n) = \check{\Phi}(n) \mathbf{w}(n) \Rightarrow \mathbf{w}(n) = \check{\Phi}(n)^{-1} \check{\mathbf{z}}(n). \quad (5.32)$$

A solução para a equação acima será encontrada de forma recursiva. Para tanto, faz-se necessário encontrar recursões para $\check{\mathbf{z}}(n)$ e $\check{\Phi}(n)$. Estas recursões não podem ser encontradas de maneira exata, uma vez que, de acordo com as definições contidas nas eqs. (5.30) e (5.31), $\check{\mathbf{z}}(n)$ e $\check{\Phi}(n)$ dependem de $\mathbf{w}(n)$, enquanto que $\check{\mathbf{z}}(n)$ e $\check{\Phi}(n)$ dependem de $\mathbf{w}(n-1)$. Entretanto, assim como foi feito para o RCMA, pode-se encontrar tais recursões de forma aproximada, considerando-se que $\mathbf{w}(n) \cong \mathbf{w}(n-1)$. Esta aproximação é especialmente válida no Estado de Regime Permanente e em situações nas quais o vetor de pesos do equalizador $\mathbf{w}(n)$ varia lentamente. Desta forma, pode-se escrever as seguintes recursões para $\check{\mathbf{z}}(n)$ e $\check{\Phi}(n)$, levando-se em consideração esta aproximação, mantendo-se, no entanto, a mesma notação para designar

$\check{\mathbf{z}}(n)$ e $\check{\Phi}(n)$:

$$\check{\mathbf{z}}(n) = \lambda \check{\mathbf{z}}(n-1) + [R_R y_R(n) + j R_I y_I(n) + j y_R(n) y_I(n) y^*(n)] \mathbf{x}^*(n), \quad (5.33)$$

$$\check{\Phi}(n) = \lambda \check{\Phi}(n-1) + \mathbf{s}^*(n) \mathbf{s}^T(n), \quad (5.34)$$

em que $y(n) = y(n, n)$ e $\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}(n, n)$. Entretanto, faz-se necessário encontrar uma recursão para $\check{\mathbf{P}}(n) = \check{\Phi}(n)^{-1}$, que pode ser desenvolvida a partir da equação (5.34) utilizando-se o Lema da Inversão de Matrizes:

$$\check{\mathbf{P}}(n) = \lambda^{-1} \cdot [\check{\mathbf{P}}(n-1) - \check{\mathbf{k}}(n) \mathbf{s}^T(n) \check{\mathbf{P}}(n-1)], \quad (5.35)$$

tal que

$$\check{\mathbf{k}}(n) = \frac{\check{\mathbf{P}}(n-1) \mathbf{s}^*(n)}{\lambda + \mathbf{s}^T(n) \check{\mathbf{P}}(n-1) \mathbf{s}^*(n)}. \quad (5.36)$$

A partir da equação (5.36), tem-se

$$\check{\mathbf{k}}(n) \lambda = [\check{\mathbf{P}}(n-1) - \check{\mathbf{k}}(n) \mathbf{s}^T(n) \check{\mathbf{P}}(n-1)] \mathbf{s}^*(n) \Rightarrow$$

$$\check{\mathbf{k}}(n) = \check{\mathbf{P}}(n) \mathbf{s}^*(n).$$

Utilizando as recursões contidas nas eqs. (5.33) e (5.35) é possível encontrar o algoritmo que soluciona a eq. (5.32) recursivamente. A partir de (5.32), tem-se

$$\mathbf{w}(n) = \lambda \check{\mathbf{P}}(n) \check{\mathbf{z}}(n-1) + [R_R y_R(n) + j R_I y_I(n) + j y_R(n) y_I(n) y^*(n)] \check{\mathbf{P}}(n) \mathbf{x}^*(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \check{\mathbf{P}}(n-1) \check{\mathbf{z}}(n-1) - \check{\mathbf{k}}(n) \mathbf{s}^T(n) \check{\mathbf{P}}(n-1) \check{\mathbf{z}}(n-1) +$$

$$[R_R y_R(n) + j R_I y_I(n) + j y_R(n) y_I(n) y^*(n)] \check{\mathbf{k}}(n) / y(n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \check{\mathbf{k}}(n)\{-\mathbf{s}^T(n)\mathbf{w}(n-1) + [R_R y_R(n) + jR_I y_I(n) + jy_R(n)y_I(n)y^*(n)]/y(n)\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \frac{\check{\mathbf{k}}(n)}{y(n)} \{R_R y_R(n) + jR_I y_I(n) + jy_R(n)y_I(n)y^*(n) - \xi(n)|y(n)|^2\}, \quad (5.37)$$

sendo $\xi(n) = \mathbf{w}^T(n-1)\mathbf{x}(n)$ a *estimação da saída a priori*. A expressão (5.37) corresponde a uma solução exata para a eq. (5.19). Porém, assim como no caso do RCMA, essa expressão utiliza a informação referente à saída do equalizador $y(n)$ e, neste caso, também não se pode utilizar a saída do equalizador no instante “ n ” para o cálculo de $\mathbf{w}(n)$. Entretanto, é possível aproximar a solução dada pela eq. (5.37) substituindo-se a saída do equalizador $y(n)$ na eq.(5.37) por sua estimação $\xi(n) = \xi_R(n) + j\xi_I(n)$, tal como se fez para o RCMA. Assim, pode-se reescrever a eq. (5.37) levando em consideração esta aproximação, mantendo-se, no entanto, a mesma notação para designar o vetor de coeficientes $\mathbf{w}(n)$:

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \check{\mathbf{k}}(n) \frac{1}{\xi(n)} \{R_R \xi_R(n) + jR_I \xi_I(n) + j\xi_R(n)\xi_I(n)\xi^*(n) - \xi(n)|\xi(n)|^2\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \check{\mathbf{k}}(n) \frac{1}{\xi(n)} \{R_R \xi_R(n) + jR_I \xi_I(n) - \xi_R^3(n) - j\xi_I^3(n)\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \check{\mathbf{k}}(n) \frac{1}{\xi(n)} \{\xi_R(n)[R_R - \xi_R^2(n)] + j\xi_I(n)[R_I - \xi_I^2(n)]\}.$$

Após algumas manipulações algébricas, pode-se resumir o MRCMA de acordo com as seguintes equações, nas quais o vetor $\mathbf{s}(n)$ também foi substituído por sua estimação $\hat{\mathbf{s}}(n)$:

$$\hat{\mathbf{k}}(n) = \frac{\check{\mathbf{P}}(n-1)\mathbf{x}^*(n)}{\lambda + \hat{\mathbf{s}}^T(n)\check{\mathbf{P}}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)}, \text{ tal que } \hat{\mathbf{s}}(n) = \xi^*(n)\mathbf{x}(n),$$

$$\check{\mathbf{P}}(n) = \lambda^{-1} \cdot [\check{\mathbf{P}}(n-1) - \hat{\mathbf{k}}(n)\xi(n)\hat{\mathbf{s}}^T(n)\check{\mathbf{P}}(n-1)],$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \hat{\mathbf{k}}(n) \{\xi_R(n)[R_R - \xi_R^2(n)] + j\xi_I(n)[R_I - \xi_I^2(n)]\}.$$

O vetor $\frac{\check{\mathbf{k}}(n)}{\xi(n)}$ foi substituído por $\hat{\mathbf{k}}(n)$ e a matriz $\check{\mathbf{P}}(n)$ é inicializada da mesma forma que no RLS, i.e., $\check{\mathbf{P}}(0) = \delta^{-1}\mathbf{I}_M$, onde δ é uma constante positiva e \mathbf{I}_M é a matriz identidade de dimensão M .

O RMCMA é uma técnica com ótima performance para a realização de equalização cega, sendo capaz de melhorar bastante a performance do CMA clássico. O RMCMA também é capaz de realizar a recuperação de portadora e não é dirigido à decisão, ou seja, não é prejudicado por uma decisão incorreta. Além disso, os termos real e imaginário da equação de adaptação do RMCMA o tornam mais ajustado às constelações quadradas (como QAM) do que o RCMA. Isto significa que o RMCMA melhora a performance do RCMA sem utilizar um PLL e com complexidade computacional e robustez semelhantes.

5.2.4 Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Modificado Recursivo - RMDDMA

Visando melhorar ainda mais a performance da família de algoritmos do tipo RCMA, é possível unificar as modificações introduzidas no RCMA pelo RDDMA e pelo RMCMA para desenvolver um nova técnica que incorpora as vantagens desses algoritmos conjuntamente. Em outras palavras, o RMCMA também pode existir numa versão dirigida pela decisão, assim como foi feito com o MDDMA na Seção 3.4. Devido a isso, esse novo algoritmo será chamado de Algoritmo do Módulo Dirigido pela Decisão Modificado Recursivo - *Recursive Modified Decision Directed Modulus Algorithm* (RMDDMA). Trata-se, na verdade e de forma prática, do algoritmo proveniente da substituição das constantes de referência R_R e R_I na função custo do RMCMA pelas referências variáveis $\hat{a}_R^2(n)$ e $\hat{a}_I^2(n)$, respectivamente. A função custo do RMDDMA pode então ser escrita da seguinte forma:

$$\phi_{MRDDM}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \{ [y_R^2(n, i) - \hat{a}_R^2(i)]^2 + [y_I^2(n, i) - \hat{a}_I^2(i)]^2 \}. \quad (5.38)$$

em que $y(n, i) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(i)$ e $\lambda \leq 1$ é o fator de esquecimento. A minimização dessa função custo pode ser feita de maneira idêntica ao desenvolvimento do RMCMA (Seção 5.2.3). Na verdade, o RMDDMA pode ser visto como uma generalização do MRCMA para constelações com múltiplas amplitudes de símbolos:

$$\check{\mathbf{k}}(n) = \frac{\check{\mathbf{P}}(n-1)\mathbf{x}^*(n)}{\lambda + \hat{\mathbf{s}}^T(n)\check{\mathbf{P}}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)}, \text{ tal que } \hat{\mathbf{s}}(n) = \xi^*(n)\mathbf{x}(n),$$

$$\check{\mathbf{P}}(n) = \lambda^{-1} \cdot \left[\check{\mathbf{P}}(n-1) - \check{\mathbf{k}}(n)\xi(n)\hat{\mathbf{s}}^T(n)\check{\mathbf{P}}(n-1) \right],$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \check{\mathbf{k}}(n) \{ \xi_R(n)[\hat{a}_R^2(n) - \xi_R^2(n)] + j\xi_I(n)[\hat{a}_I^2(n) - \xi_I^2(n)] \}.$$

Pelo mesmo motivo já mencionado anteriormente, os gradientes de $\hat{a}_R(n)$ e $\hat{a}_I(n)$ em relação a $\mathbf{w}(n)$ foram assumidos como sendo nulos. A inicialização da matriz $\check{\mathbf{P}}(n)$ é feita da mesma maneira que para o RCMA. É importante observar que a equação de adaptação do RMDDMA é “casada” com constelações de múltiplas amplitudes de ordem qualquer quando

o canal está perfeitamente equalizado, pois o termo de ajuste na equação de adaptação do RMDDMA torna-se nulo, enquanto que para o MRCMA há sempre um erro. Devido a isto, a performance do RMDDMA é ainda melhor que a performance do MRCMA quando não há um número elevado de decisões incorretas. Desta forma, o RMDDMA é o algoritmo com melhor performance entre todas as técnicas estudadas nesta dissertação, considerando-se que não há um número muito elevado de decisões incorretas. Ademais, o RMDDMA também é capaz de conjuntamente recuperar a fase da portadora e equalizar de maneira cega o sinal transmitido.

Não obstante, o RMDDMA também é dirigido pela decisão e, portanto, prejudicado por decisões incorretas. Deste modo, ele também pode ser utilizado na forma *dual-mode*. Porém, neste caso, o algoritmo que realiza as iterações iniciais é o MRCMA. Uma vez que esses dois algoritmos são bastante semelhantes, a comutação entre eles pode ser vista como um simples chaveamento entre as referências R_R e R_I para $\hat{a}_R^2(n)$ e $\hat{a}_I^2(n)$, respectivamente, não causando aumentos consideráveis na complexidade computacional. O *dual-mode* RMDDMA é, dentre os algoritmos apresentados neste trabalho, a técnica que possui o melhor compromisso entre velocidade de convergência, EQM residual e robustez, conforme será verificado no **Capítulo 6**.

5.2.5 Equalização de Canais Não-Lineares Utilizando RCMA

Finalizando o estudo sobre técnicas do tipo RLS, nesta seção são propostas versões do tipo RCMA das técnicas desenvolvidas anteriormente para a equalização de canais do tipo Wiener. O principal intuito é desenvolver técnicas com convergência rápida para a realização de equalização adaptativa e cega de canais não-lineares. Neste caso, utilizando a notação unificada introduzida na Seção 2.4, a função custo do RCMA assume a seguinte forma:

$$\phi_{RCM}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} (|y(n, i)|^2 - R)^2, \quad (5.39)$$

em que o valor de $y(n, i)$ é dado por $y(n, i) = \mathbf{q}^T(n)\mathbf{t}(i)$ e $\lambda \leq 1$ é o fator de esquecimento. Isso significa que o filtro a ser atualizado \mathbf{q} é sempre indexado por “ n ” na eq. (5.39) e o vetor de entradas \mathbf{t} é sempre indexado por “ i ”. A definição das diferentes formas de $y(n, i)$ na eq. (5.39) é baseada na definição de $y(n, i)$ na função custo do algoritmo RLS (eq. (2.11)). Cada valor de \mathbf{q} e \mathbf{t} define uma expressão diferente para $y(n, i)$, que, por sua vez, define uma função custo diferente.

A solução para este problema de otimização é desenvolvida de maneira idêntica ao caso do RCMA para canais lineares, uma vez que o modelo unificado introduzido na Seção 2.4 é linear com relação aos parâmetros dos filtros. Assim o RCMA, neste caso, pode ser representado da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \xi^*(n)\mathbf{t}(n), \quad \text{onde} \quad \xi(n) = \mathbf{q}^T(n-1)\mathbf{t}(n),$$

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)}{\lambda + \hat{\mathbf{s}}^\top(n)\mathbf{P}(n-1)\hat{\mathbf{s}}^*(n)},$$

$$\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1} \cdot \left[\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\hat{\mathbf{s}}^\top(n)\mathbf{P}(n-1) \right],$$

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1) + \mathbf{k}(n) \cdot (R - |\xi(n)|^2),$$

em que $\mathbf{P}(n)$ é inicializado como $\mathbf{P}(0) = \delta^{-1}\mathbf{I}_{N_q}$, δ é uma constante positiva, N_q é o tamanho de \mathbf{q} e \mathbf{I}_{N_q} é matriz identidade de dimensão N_q . Cada par \mathbf{q} - \mathbf{t} define a técnica a ser utilizada de acordo com a Tabela 2.1.

Assim como no caso de canais lineares, o RCMA aplicado a estruturas não lineares pode melhorar significativamente a velocidade de convergência e o EQM residual do CMA e do NCMA, que, em alguns casos, pode não ter valores aceitáveis.

As técnicas de equalização de canais do tipo Wiener acima desenvolvidas encerram a família de algoritmos do tipo RLS. A Tabela 5.5, a seguir, sintetiza os algoritmos dessa família percorridos neste capítulo. A única técnica desta família não originária desta dissertação é o RCMA.

Tabela 5.5: Resumo dos Algoritmos do Tipo RLS estudados nesse capítulo

Algoritmos	Equação de Adaptação
RCMA [81, 82]	$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)(\xi(n) ^2 - R)$
RDDMA	$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)(\xi(n) ^2 - \hat{a}(n) ^2)$
RMCMA	$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \hat{\mathbf{k}}(n) [\xi_R(n)(\xi_R^2(n) - R_R) + j\xi_I(n)(\xi_I^2(n) - R_I)]$
RMDDMA	$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \hat{\mathbf{k}}(n) [\xi_R(n)(\xi_R^2(n) - \hat{a}_R^2(n)) + j\xi_I(n)(\xi_I^2(n) - \hat{a}_I^2(n))]$
RCMA Não-Linear	$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1) + \mathbf{k}(n) \cdot (R - \xi(n) ^2)$

5.3 Contribuições do Capítulo

A fim de visualizar o panorama de contribuições do capítulo, resumem-se abaixo as principais técnicas propostas e resultados originais:

- Proposição de versões dirigidas pela decisão dos algoritmos RCMA e NCMA para constelações com múltiplos raios: algoritmos RDDMA e NDDMA;
- Proposição de uma versão “modificada” do RCMA: o MRCMA;
- Estabelecimento de uma relação entre a classe de algoritmos do tipo NCMA e o algoritmo NLMSDD;
- Proposição de uma versão “modificada” e dirigida pela decisão do RCMA: o RMDDMA;
- Proposição de técnicas para equalização adaptativa cega de canais do tipo Wiener baseados no NCMA e no RCMA utilizando uma notação unificada.

No próximo capítulo os resultados de simulação computacional obtidos mostrarão os diferentes desempenhos dos algoritmos desenvolvidos neste capítulo.

Capítulo 6

Simulações Computacionais

N^O presente capítulo o comportamento das famílias de algoritmos propostas nesta dissertação é analisado através de simulações computacionais. Será verificado se as técnicas propostas realmente fornecem ganhos significativos em performance em relação às técnicas clássicas. Os critérios de desempenho utilizados durante as simulações computacionais para se comparar as performances dos algoritmos são a velocidade de convergência e o EQM residual, que podem ser visualizados nos gráficos de evolução de EQM. Em alguns casos também é utilizada a ISI como figura de mérito para se testar o desempenho dos algoritmos. Já para as simulações de equalização de canais não-lineares, também são analisados os gráficos de Taxa de Erro de Bit - *Bit Error Rate* (BER).

Nos gráficos de EQM deste capítulo as curvas foram obtidas através da média de simulações de Monte Carlo medidas sob um número de realizações independentes de dados. Nesses mesmos gráficos, a linha horizontal mostra o EQM ótimo de Wiener. Nas simulações computacionais os equalizadores são inicializados com o coeficiente central igual a 1 e os restantes iguais a zero. Em alguns casos é necessário utilizar algoritmos do tipo *dual-mode* e, em outros, a utilização desta abordagem não acrescentou ganhos na performance dos algoritmos.

É importante destacar ainda que nesta dissertação será observado o comportamento dos diversos algoritmos frente às distorções provocadas por um canal de comunicação, sem uma forte influência do ruído.

Um dispositivo de recuperação de fase da portadora do sinal recebido (PLL) é utilizado na saída do equalizador, com exceção feita aos algoritmos do tipo “modificado”, que realizam a recuperação de portadora implicitamente. A expressão de adaptação do PLL utilizada nas simulações computacionais pode ser escrita da seguinte forma [1]:

$$\hat{\varphi}(n+1) = \hat{\varphi}(n) - \mu_{PLL} \operatorname{Im}[e_{DD}^*(n)y(n)],$$

em que μ_{PLL} é o fator de passo do PLL e $\hat{\varphi}(n)$ é a fase aplicada à saída do equalizador no instante “ n ”.

O restante deste capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 6.1 são apresentados os resultados relativos aos algoritmos do tipo LMS; na Seção 6.2 são ilustrados os resultados concernentes às relações entre os pontos de mínimo das funções custo de Wiener e DDM; na Seção

6.3 são mostrados os resultados relativos aos algoritmos normalizados; na Seção 6.4 são mostrados os resultados concernentes aos algoritmos do tipo RLS; a Seção 6.5 apresenta os resultados que comparam as três famílias de algoritmos; e na Seção 6.6 são ilustrados os resultados concernentes às técnicas de equalização de canais do tipo Wiener.

6.1 Algoritmos do Tipo LMS

Nesta seção são apresentados os resultados de simulações computacionais concernentes à família de algoritmos para equalização de canais lineares propostos no **Capítulo 3**, ou seja, os algoritmos do tipo gradiente estocástico. Inicialmente é verificado se as técnicas dirigidas pela decisão propostas são capazes de abrir o olho de um sinal na saída de um canal de comunicação. Após esses resultados, a performance do DDMA será comparada com a do CMA e a do DAMA, descritos na Seção 3.2. No final, todos os algoritmos do tipo CMA são testados e comparados com o DDA.

Nos algoritmos testados nesta seção observa-se o tradicional compromisso entre a velocidade de convergência e o EQM residual, onde o fator de passo é o parâmetro que controla este compromisso. Um aumento no fator de passo aumenta a velocidade de convergência e o EQM residual. Por outro lado, uma diminuição no fator de passo gera uma diminuição da velocidade de convergência e do EQM residual. Devido a isso, em alguns casos, objetivando demonstrar a melhor performance de um algoritmo em relação a outro, o fator de passo é ajustado de tal forma que os algoritmos forneçam aproximadamente o mesmo EQM residual e diferentes velocidades de convergência. Em outros casos, o fator de passo é ajustado de forma que ambos os algoritmos forneçam aproximadamente a mesma velocidade de convergência e diferentes EQM residual. Desta forma, o ganho em performance de um algoritmo em relação a outro é mostrado de forma explícita. Já em alguns outros casos, o fator de passo é simplesmente ajustado de forma que forneça um bom compromisso entre a velocidade de convergência e o EQM residual.

6.1.1 Abrindo o Olho de um Sinal na Saída de um Canal de Comunicação

Nesta seção é verificada a capacidade dos algoritmos dirigidos pela decisão propostos, DDMA e MDDMA, de abrir o olho de um sinal na saída de um canal de comunicação. Para tanto será utilizado o esquema de simulação mostrado na Tabela 6.6, onde o modelo de canal de RIF é o mesmo de [83].

Para avaliar a habilidade de um equalizador em um ponto de mínimo para abrir o olho de um sinal na saída de um canal de comunicação, pode-se definir um parâmetro que mede a “quantidade” de ISI no receptor no pior caso:

$$ISI_p = \frac{\sum_{i=0}^{N+M-2} |f_i| - \max(|f_i|)}{\max(|f_i|)} \cdot \frac{|a|_{\max}}{|a|_{\min}}, \quad (6.1)$$

em que $|a|_{\max}$ e $|a|_{\min}$ representam, respectivamente, os valores máximo e mínimo do módulo

Tabela 6.6: Parâmetros de Simulação utilizado nas figs. 6.4 e 6.5.

Resposta ao Impulso do Canal	$h(n) = (-1,0397 + 0,3055j)\delta(n) \\ + (0,7846 + 0,6749j)\delta(n-1) + (-0,3433 - 2,1848j)\delta(n-2) \\ + (2,3927 - 0,0552j)\delta(n-3)$
SNR	30 dB
M	21
Modulação	16QAM

dos símbolos da constelação do sinal transmitido. Esta definição para ISI corresponde ao pior caso do sistema, ou seja, o caso em que todas as componentes interferentes possuem a máxima amplitude possível e a componente correspondente ao símbolo transmitido possui a mínima amplitude possível. O parâmetro ISI_p na eq. (6.1) é tão maior quanto maior for a presença de ISI no sistema. Quando $0 \leq ISI_p < 1$, diz-se que o sinal está com o *olho aberto* e quando $ISI_p \geq 1$, diz-se que o sinal está com o *olho fechado* na situação de pior caso. Vale ressaltar que uma situação de olho fechado no pior caso pode corresponder a uma situação de olho aberto em um caso mais favorável.

Na figs. 6.4 e 6.5 é possível constatar a capacidade do DDMA e do MDDMA, respectivamente, em abrir o olho do sinal, inicialmente fechado, mesmo para uma modulação que contém símbolos com diferentes raios. Em particular, as figs. 6.4(d) e 6.5(d) mostram a evolução da medida de ISI de pior caso (ISI_p), em que é possível observar a reduzida quantidade de ISI após a convergência. Nesses gráficos a linha horizontal mostra o valor de $ISI_p = 1$. Isto significa que estes algoritmos, mesmo sendo dirigidos pela decisão, são capazes de abrir o olho de um sinal na saída de um canal de comunicação de maneira cega.

6.1.2 Simulações Comparativas

O segundo cenário de simulação computacional, sintetizado na Tabela 6.7, foi utilizado na figs. 6.6 e 6.7 com o intuito de comparar a performance do DDMA com a do CMA e do DAMA (Seção 3.2). A resposta ao impulso do canal mostrada na Tabela 6.7 consiste em um modelo de linha telefônica [84].

A fig. 6.6 mostra a evolução do EQM dos algoritmos DDMA, DAMA e CMA operando com a modulação 16QAM. Para nenhum valor do fator de passo foi observada convergência do DAMA. Além disso, pode-se observar que a técnica proposta DDMA possui uma velocidade de convergência maior e um EQM residual ligeiramente inferior que o do CMA. Por outro lado, utilizando a modulação 64QAM com o mesmo cenário mostrado na Tabela 6.7, os algoritmos DDMA e DAMA não realizam o processo de equalização de maneira satisfatória. Neste caso, a solução adotada foi utilizar a abordagem *dual-mode*. Para implementar a comutação entre os dois algoritmos, a função custo das técnicas *dual-mode* utilizada nas simulações computacionais é expressa da seguinte forma:

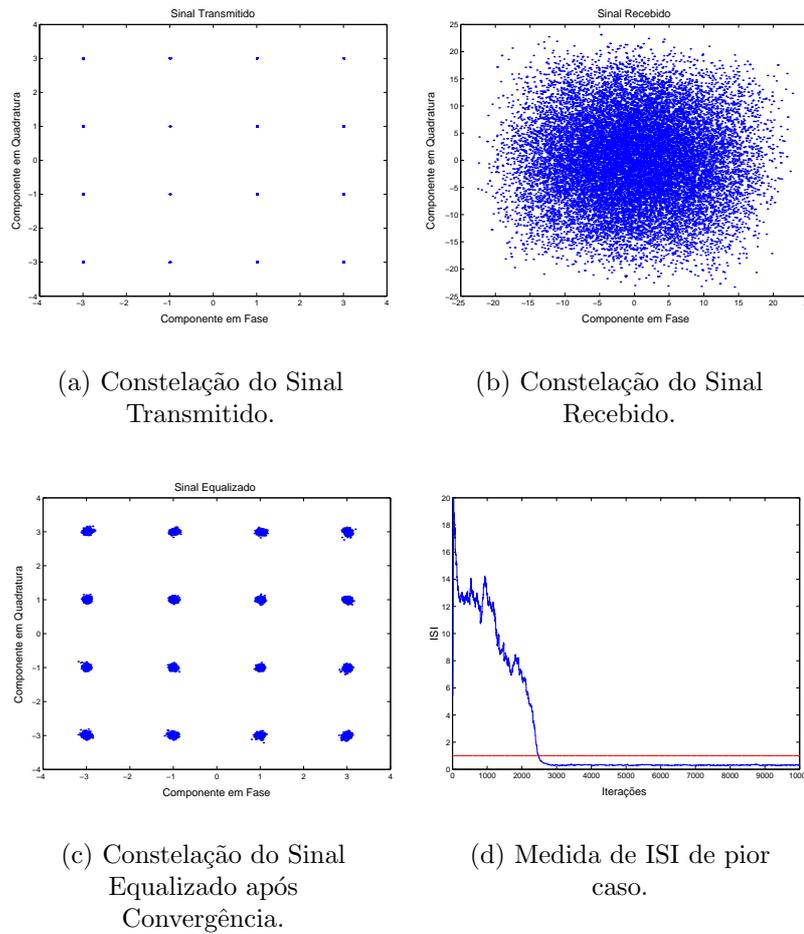


Figura 6.4: A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo DDMA.

Tabela 6.7: Parâmetros de Simulação utilizado nas figs. 6.6 e 6.7.

Resposta ao Impulso do Canal	$h(n) = 0,04\delta(n) - 0,05\delta(n - 1) + 0,07\delta(n - 2) - 0,21\delta(n - 3) - 0,50\delta(n - 4) + 0,72\delta(n - 5) + 0,36\delta(n - 6) + 0,21\delta(n - 8) + 0,03\delta(n - 9) + 0,07\delta(n - 10)$
SNR	40 dB
M	16
Modulação	16 QAM e 64 QAM
Realizações de Monte Carlo	50

$$J = \alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2, \quad (6.2)$$

em que J_1 é uma função custo robusta, i.e. não dirigida à decisão, J_2 é uma função custo baseada no critério DDM e α é o *Fator de Comutação* que controla a transição entre os dois algoritmos. O parâmetro α deve ser igual ou próximo a 1 quando o nível de ISI é elevado. Assim sendo, o algoritmo robusto realiza o processo de equalização. Quando o nível de ISI é pequeno, α deve

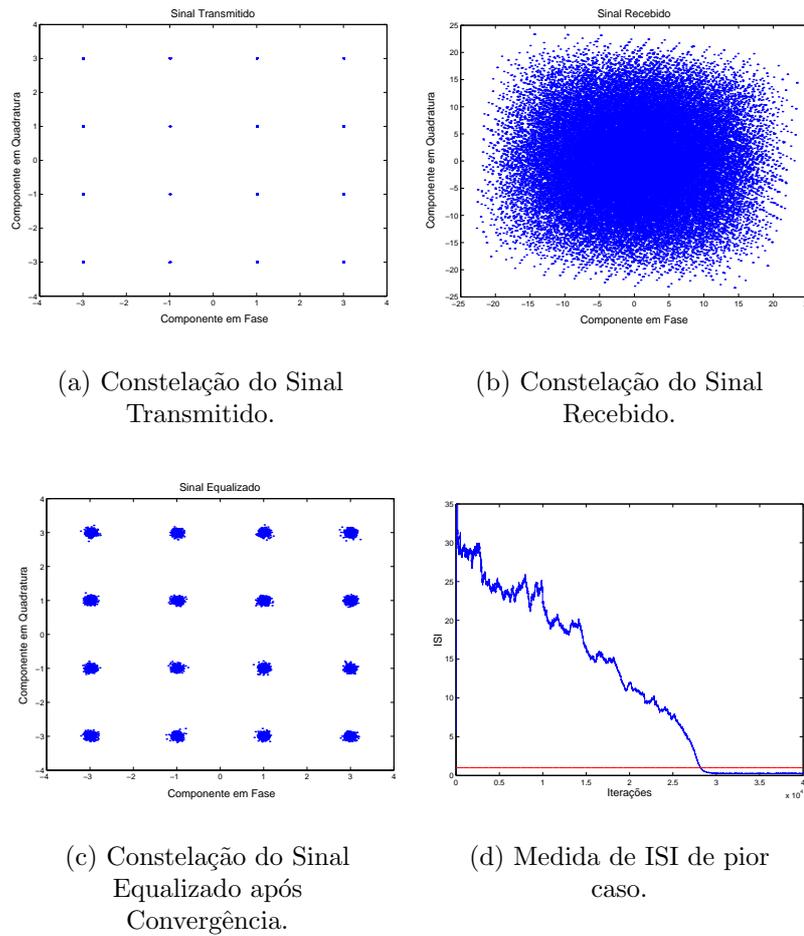


Figura 6.5: A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo MDDMA.

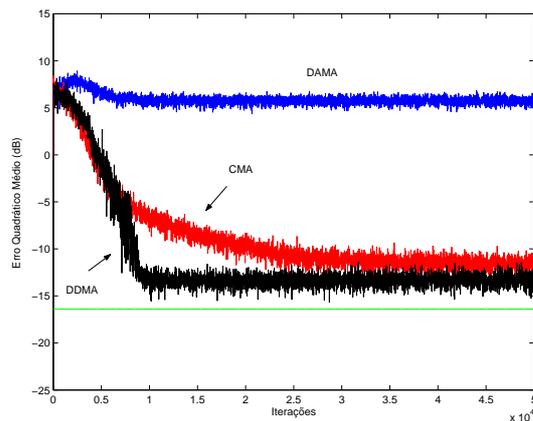


Figura 6.6: Evolução do EQM para o DDMA, o DAMA e o CMA utilizando a modulação 16QAM.

ser igual ou próximo a zero e o algoritmo dirigido pela decisão torna-se preponderante. A eq. (6.2) também pode ser vista como uma simples comutação apenas entre os raios de referências. Isto é, se é desejado realizar um chaveamento entre o CMA e o DDMA, pode-se simplesmente

considerar

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu y(n)(|y(n)|^2 - R_{Ref})\mathbf{x}^*(n),$$

em que

$$R_{ref} = \alpha R + (1 - \alpha)|\hat{a}(n)|^2.$$

A equação acima mostra que no lugar de realizar uma comutação entre os dois algoritmos, é possível realizar a comutação apenas entre os raios de referência R e $|\hat{a}(n)|^2$, praticamente não aumentando a complexidade computacional (não levando em conta o cálculo de α). No caso dos algoritmos do tipo “modificado”, essa comutação pode ser vista como uma comutação apenas entre as constantes de referência reais e imaginárias: de R_R para $\hat{a}_R(n)$ e de R_I para $\hat{a}_I(n)$.

Na fig. 6.7 foi utilizada uma transição brusca entre os dois algoritmos. Para tanto foi utilizada a seguinte expressão para α :

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{se } |\varepsilon(n)| \geq \gamma \\ 0, & \text{se } |\varepsilon(n)| < \gamma \end{cases} \quad (6.3)$$

em que γ é um limiar de comutação e $\varepsilon(n)$ é o Erro de Decisão-Dirigida médio $e_{DD} = y(n) - d(n)$ calculado sobre uma janela deslizante de tempo de 50 amostras consecutivas, i.e., $\varepsilon(n) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} e_{DD}(n-i)$. Na fig. 6.7 o valor do limiar γ foi especificado como sendo igual a $-2dB$, permitindo assim, que o algoritmo dirigido à decisão opere em um ambiente com um nível pequeno de ISI. A expressão do fator de comutação na eq. (6.3) permite uma transição automática entre os algoritmos, o que é particularmente importante em canais de comunicação variantes no tempo. É também importante ser destacado que a eq. (6.3) não é a única expressão possível para o fator de chaveamento. Na seção seguinte será introduzida uma outra expressão para α .

A fig. 6.7 ilustra a evolução do EQM do CMA, do *dual-mode* DAMA e do *dual-mode* DDMA utilizando o cenário de simulação sintetizado na Tabela 6.7 para a modulação 64QAM. Pode-se observar o ganho na velocidade de convergência e em EQM residual oferecida pela comutação realizada para o DDMA, fornecendo um EQM próximo do erro de Wiener.

6.1.3 Simulações incluindo a abordagem Modificada e o DDA

Os próximos resultados comparam as técnicas propostas DDMA e MDDMA com os algoritmos clássicos CMA e DDA utilizando as abordagens *single-mode* e *dual-mode*. O principal intuito é de observar a performance e a robustez à ISI do DDMA e do MDDMA em sinais QAM. O cenário de simulação utilizado nesta seção é sintetizado na Tabela 6.8, onde a resposta ao impulso do canal é a mesma de [22]. Para se obter uma melhor visualização dos gráficos, todos as curvas de EQM foram passadas através de um filtro discreto passa-baixa do tipo Butterworth

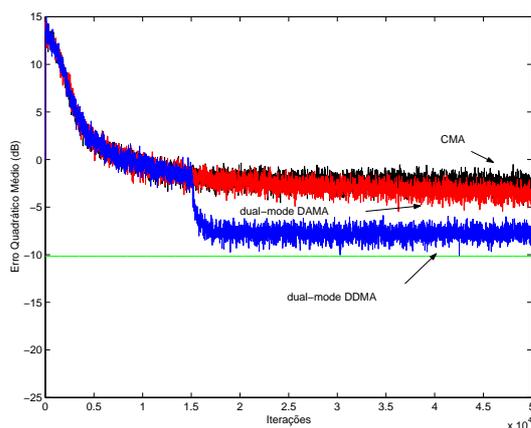


Figura 6.7: Evolução do EQM para o *dual-mode* DDMA, o *dual-mode* DAMA e o CMA utilizando a modulação 64QAM.

de ordem 2 e frequência de corte igual a 10^{-2} .

Tabela 6.8: Parâmetros de Simulação utilizado nas figs. 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11.

Resposta ao Impulso do Canal	$h(n) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\frac{2\pi}{\alpha}(n-2))]$, $n = 1, 2, 3$
α	3,1
SNR	30 dB
M	9
Modulação	16 QAM e 64 QAM
Realizações de Monte Carlo	50

Nas curvas de EQM dos algoritmos do tipo *dual-mode* simulados nesta seção, a expressão para o fator de comutação utilizada é dinâmica e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\alpha(n) = (\tanh |e_{DD}(n)|)^2, \quad (6.4)$$

em que $e_{DD}(n) = y(n) - \hat{a}(n)$ é o Erro de Decisão-Dirigida. A expressão acima, que foi retirada de [36], controla uma transição suave entre os dois algoritmos. Quando o erro é grande, tem-se $\alpha(n) \cong 1$ e o algoritmo robusto é preponderante. Quando o erro é pequeno, tem-se $\alpha(n) \cong 0$ e o algoritmo baseado no critério DDM torna-se preponderante.

A fig. 6.8 ilustra a evolução do EQM do DDA, do DDMA e do CMA com um sinal do tipo 16QAM. É possível observar que o DDMA e o DDA possuem performances similares, com um EQM residual aproximadamente 7dB menor que o do CMA. Neste caso, não foi necessário utilizar as técnicas *dual-mode*. Entretanto, utilizando um sinal do tipo 64QAM, as técnicas *dual-mode* fornecem importantes ganhos nas performances dos algoritmos dirigidos pela decisão. Como se pode observar na fig. 6.9, que utiliza um sinal 64QAM, a evolução do EQM do *single-mode* DDMA é prejudicada pelas decisões incorretas. Entretanto, o *single-mode* DDMA consegue atingir a convergência, enquanto que o DDA não. Ainda nessa figura, é fácil observar que os algoritmos do tipo *dual-mode* têm performances muito melhores que os algoritmos do tipo

single-mode. Além disso, é importante destacar que o DDMA e o DDA também têm uma performance semelhante quando utilizam a abordagem *dual-mode*.

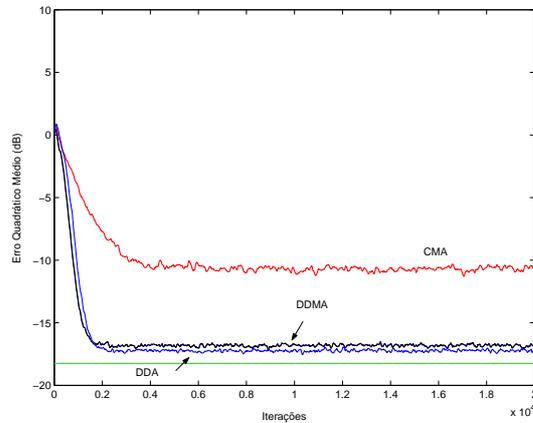


Figura 6.8: Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 16QAM.

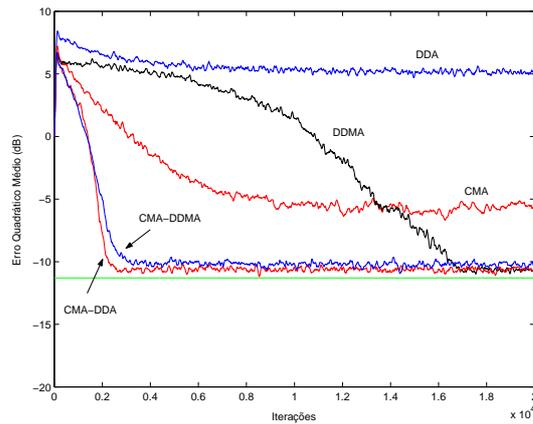


Figura 6.9: Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 64QAM.

A performance do MCMA, descrito na Seção 3.4, tem sido testada por alguns autores, e.g. [48], e tem sido constatada sua capacidade de realizar equalização cega e recuperação de portadora conjuntamente, além de possuir uma melhor performance que o CMA com praticamente a mesma complexidade computacional. A seguir será testada a performance da versão modificada do DDMA, introduzida anteriormente como MDDMA. Os resultados estão mostrados nas figuras 6.10 e 6.11, que utilizam o cenário de simulação mostrado na Tabela 6.8 com sinais 16QAM e 64QAM, respectivamente. Na fig. 6.10 é fácil observar que a abordagem modificada fornece melhorias na performance do CMA e do DDMA. O MDDMA converge após 1800 iterações e o DDMA após 4500 iterações, aproximadamente. Neste caso novamente não foi necessário utilizar os algoritmos do tipo *dual-mode*.

Por outro lado, utilizando um sinal 64QAM (fig. 6.11), no que concerne aos algoritmos *single-mode*, deve ser destacado que o MCMA possui a melhor performance entre todas as

técnicas. Isto é esperado uma vez que os algoritmos dirigidos pela decisão são prejudicados em ambientes com altos níveis de ISI, o que acontece no caso de uma modulação alta. Ademais, pode-se destacar que o *single-mode* DDMA tem uma velocidade de convergência maior que o *single-mode* MDDMA. Entretanto, utilizando a versão *dual-mode*, o MDDMA tem uma melhora muito grande em sua performance, superando inclusive a performance do *dual-mode* DDMA. O MCMA-MDDMA converge após 1500 iterações e o CMA-DDMA após 3000 iterações, com o mesmo EQM residual. Pode-se observar também que o MCMA-MDDMA converge mais rápido que o CMA-DDA, que atingiu sua convergência após 2800 iterações aproximadamente.

Deve ser ainda destacado, como foi mencionado na Seção 4.5, que todos os algoritmos que utilizam a abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão conseguiram atingir um EQM residual próximo ao EQM ótimo de Wiener.

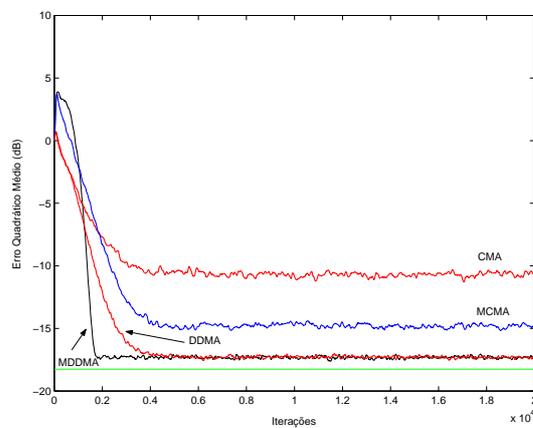


Figura 6.10: Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 16QAM.

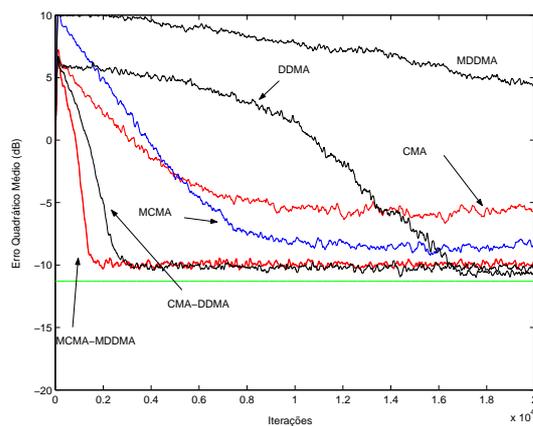


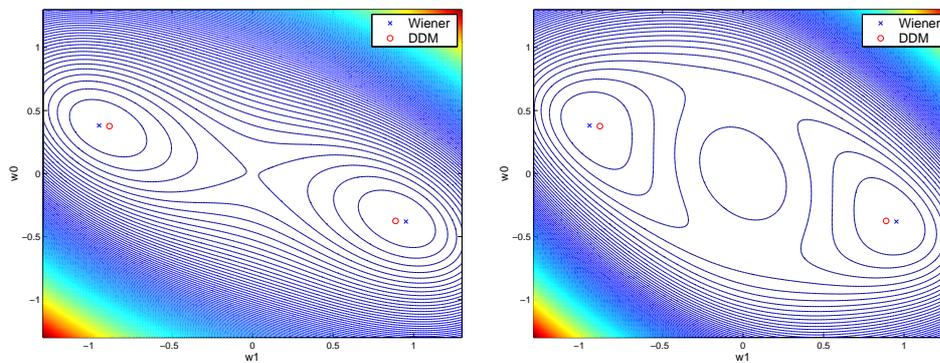
Figura 6.11: Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo LMS utilizando a modulação 64QAM.

6.2 Pontos de Mínimo das Funções Custo DDM e de Wiener

Esta seção é dedicada a mostrar os resultados de simulação referentes às relações de proximidade entre os pontos de mínimo das funções custo DDM e de Wiener estudadas na Seção 4.5. Utilizando o cenário de simulação mostrado na Tabela 6.9, que usa uma modulação real do tipo *Pulse Amplitude Modulation* (PAM), a fig. 6.12(a) mostra as curvas de nível da função custo DDM e a fig. (6.12(b)) as curvas de nível da aproximação da função custo DDM obtida através da eq. (4.45). Nessas figuras também estão indicados os pontos de mínimo global das funções custo DDM e de Wiener, onde é possível verificar a proximidade existente entre eles. Na fig. 6.12, um dos pontos de Wiener mostrados corresponde ao oposto da verdadeira solução de Wiener, ou seja, os dois pontos mostrados correspondem a $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_{wiener}$ e $\mathbf{w}_2 = -\mathbf{w}_{wiener}$. É possível também observar a semelhança entre os formatos da função custo DDM e de sua aproximação nas proximidades dos pontos de mínimos.

Tabela 6.9: Parâmetros de Simulação utilizado na fig. 6.12 e nas Tabelas 6.10 e 6.11.

Resposta ao Impulso do Canal	$h(n) = 0,5\delta(n) + \delta(n - 1)$
SNR	40 dB
M	2 (reais)
Modulação	16PAM



(a) Função Custo DDM

(b) Função Custo DDM aproximada

Figura 6.12: Curvas de Nível com os pontos de mínimo do DDM e de Wiener.

Prosseguindo no sentido de verificar a proximidade entre os pontos de mínimo dos critérios DDM e de Wiener, as Tabelas 6.10 e 6.11 mostram, respectivamente, os mínimos globais e locais das funções custo DDM, DDM aproximada (4.45) e de Wiener. Os pontos de mínimo da função custo DDM aproximada foram calculados utilizando-se a expressão (4.47). Nestas simulações também foram utilizados os parâmetros mostrados na Tabela 6.9. Com relação à função custo de Wiener, o mínimo global foi considerado como sendo aquele correspondente ao atraso igual a 2 para a seqüência desejada e o mínimo local como sendo aquele correspondente ao atraso igual a 1. Pode-se observar nas referidas tabelas que os pontos de mínimo de Wiener e do DDM

são bastante próximos. Além disso, também verifica-se que expressão (4.47) consegue realizar uma boa aproximação para os pontos de mínimo da função custo DDM, especialmente para os mínimos globais. Esse fato também era esperado, uma vez que a aproximação do DDM é válida para pequenos níveis de variância do erro médio, o que é verificado mais fortemente nas vizinhanças dos pontos de mínimo global dos critérios de Wiener e DDM. Esta boa aproximação indica que o termo quociente no lado direito da eq. (4.47) é próximo da unidade.

Tabela 6.10: Mínimos Globais utilizando os parâmetros da Tabela 6.9.

Mínimo Global	Wiener	DDM	DDM aprox.
w(0)	-0,3809	-0,3716	-0,3809
w(1)	0,9523	0,9569	0,9809

Tabela 6.11: Mínimos Locais utilizando os parâmetros da Tabela 6.9.

Mínimo Local	Wiener	DDM	DDM aprox.
w(0)	0,7618	0,7765	0,8764
w(1)	0,0953	0,0023	0,0026

Finalizando esta seção, a fig. (6.13) mostra o valor da norma quadrática da diferença (Distância Euclideana) entre o ponto de mínimo de Wiener e os pontos de mínimo das função custo DDM e CM. O cenário de simulação utilizado está indicado na Tabela 6.7, com um equalizador com 22 coeficientes e uma modulação que varia de 2QAM a 64 QAM. A SNR é fixada em 40dB. Pode-se observar que quando a ordem da constelação aumenta, o mínimo de Wiener torna-se mais próximo do mínimo DDM do que do mínimo de CM, com uma diferença de aproximadamente 20dB. Este resultado explica o porquê da melhor performance do receptor DDM em relação ao receptor CM em sinais QAM de ordem elevada.

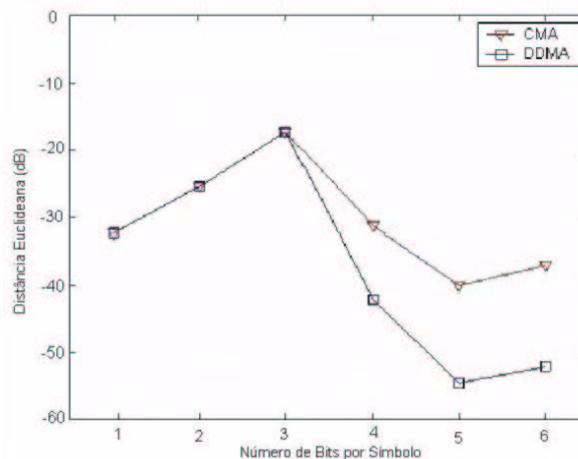


Figura 6.13: Norma quadrática da diferença entre o ponto de mínimo de Wiener e os pontos de mínimo das funções custo DDM e CM.

6.3 Algoritmos Normalizados

Os próximos resultados são relacionados à família de algoritmos normalizados. Um dos principais objetivos é encontrar, entre os algoritmos dessa família, relações semelhantes às encontradas para os algoritmos do tipo LMS na Seção 6.1. Entretanto vale ressaltar que o NCMA, e todos os seus derivados, não são apenas conseqüências das normalizações do fator de passo dos respectivos algoritmos do tipo gradiente estocástico. Diferentemente do NLMS, em que a única diferença entre ele e o LMS reside no termo normalizador de μ , o NCMA possui uma expressão de adaptação totalmente diferente do CMA. Desta forma, não se deve esperar que as conclusões tiradas para os algoritmos do tipo CMA sejam idênticas as dos algoritmos do tipo NCMA. Até mesmo no que se refere ao próprio NCMA, este não possui uma performance tão boa quanto o CMA em sinais QAM de ordem elevada.

Os parâmetros de simulação utilizados nesta seção são os mesmos da Tabela 6.8. Para se obter uma melhor visualização dos gráficos, todos as curvas de EQM foram passadas através de um filtro discreto passa-baixa do tipo Butterworth de ordem 2 e frequência de corte igual a 10^{-2} .

Os primeiros resultados de simulação desta seção testam a evolução do EQM do NCMA, do NDDMA, do NMCMA e do NLMSDD em sinais do tipo 16QAM (fig. 6.14). Pode-se observar que o NDDMA tem uma performance muito melhor que o NCMA. Pode-se ver também que NMCMA não fornece ganhos em performance em relação ao NCMA convencional, enquanto que o NLMSDD oferece a melhor performance para este caso. Neste caso, não se faz necessário a utilização dos algoritmos *dual-mode*.

Entretanto, para uma sinal 64QAM (fig. 6.15), pode-se observar que o NCMA, o NDDMA e o NLMSDD não atingiram um nível aceitável de EQM mesmo após 40000 iterações. Neste caso, também foram simuladas a evolução do EQM das técnicas *dual-mode* NCMA-NDDMA e NCMA-NLMSDD. Pode-se constatar que os algoritmos *dual-mode* tem performances bem superiores quando comparadas aos algoritmos *single-mode*. Observa-se também que o NCMA-NDDMA tem uma performance melhor que o NCMA-NLMSDD. O NCMA-NDDMA converge após 24000 iterações e o NCMA-NLMSDD após 30000 iterações, aproximadamente. Ademais, no que concerne os algoritmos “modificados”, na fig. 6.16 pode-se ver que o NMCMA não é tão penalizado quanto o NCMA, o NDDMA e o NLMSDD em uma modulação pouco robusta. Este fato era esperado, uma vez que o NMCMA não é dirigido à decisão. Além disso, o algoritmo de modo dual NMCMA-NLMSDD tem uma ótima performance quando comparado com o resto da família. Deve-se destacar também que o NLMSDD tem uma performance melhor quando operando conjuntamente com NMCMA do que com o NCMA.

Baseando-se nesses resultados pode-se concluir que o algoritmo proposto NDDMA oferece grandes ganhos em performance quando comparado ao NCMA. Além disso, foi também observado que o resto da família de algoritmos normalizados possuem performances superiores às do NCMA com complexidades computacionais semelhantes. Deve ser ainda destacado que os algoritmos *dual-mode* normalizados conseguiram atingir um EQM residual próximo ao EQM ótimo de Wiener.

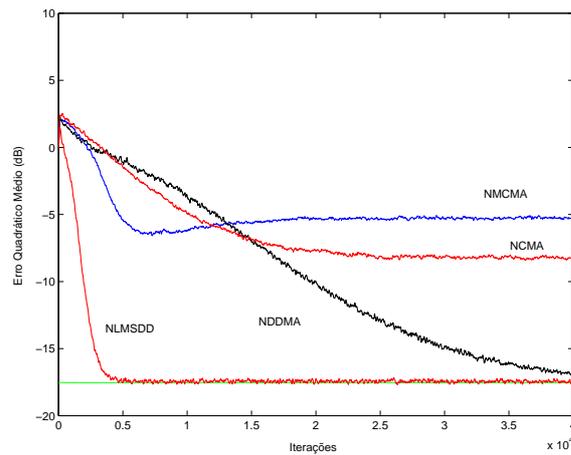


Figura 6.14: Evolução do EQM para o NCMA, o NMCMA, o NDDMA e o NLMSDD utilizando a modulação 16QAM.

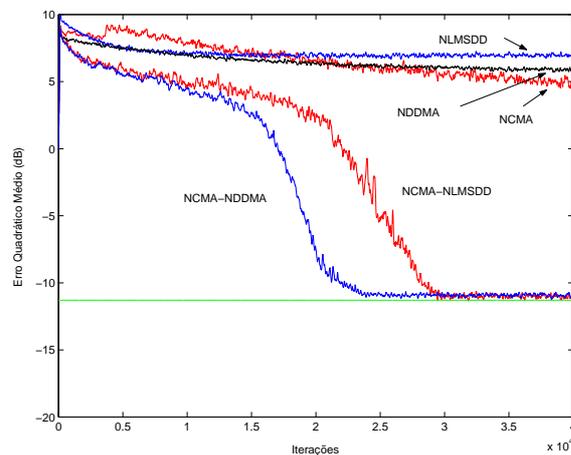


Figura 6.15: Evolução do EQM para o NCMA, o NDDMA e o NLMSDD utilizando a modulação 64QAM.

6.4 Algoritmos do Tipo RLS

Esta seção é dedicada a expor os resultados de simulação da família de algoritmos do tipo RLS. As técnicas estudadas nesta seção são as que possuem melhores performances, contudo, são também as que possuem maiores complexidades computacionais. Será verificado se as técnicas propostas fornecem ganhos em performance quando comparadas aos algoritmos clássicos. Um dos objetivos é encontrar, entre os algoritmos desta família, relações semelhantes às encontradas para os algoritmos do tipo LMS na Seção 6.1 e do tipo NLMS na Seção 6.3.

Em alguns casos, objetivando demonstrar a melhor performance de um algoritmo em relação a outro, o fator de esquecimento λ e o parâmetro δ , utilizado na inicialização da matriz $\mathbf{P}(n)$, são ajustados de tal forma que ambos os algoritmos forneçam aproximadamente o mesmo EQM residual e diferentes velocidades de convergência. Da mesma forma, em outro casos, λ e δ são ajustados de forma que os algoritmos forneçam aproximadamente a mesma velocidade de

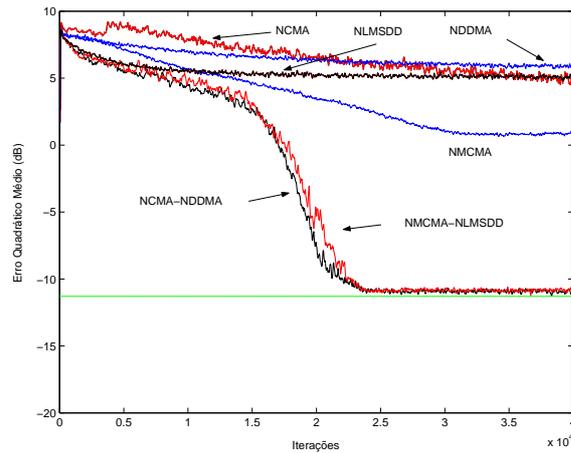


Figura 6.16: Evolução do EQM para o NCMA, o NMCMA, o NDDMA e o NLMSDD utilizando a modulação 64QAM.

convergência e diferentes EQM residual. Deste modo, o ganho em performance de um algoritmo em relação a outro é mostrado de forma explícita. Já em alguns outros casos, esses parâmetros são simplesmente ajustados de forma que forneçam um bom compromisso entre a velocidade de convergência e o EQM residual.

6.4.1 Abrindo o Olho de um Sinal na Saída de um Canal de Comunicação

Primeiramente será verificada a capacidade dos algoritmos propostos RDDMA, RMCMA e RMDDMA em abrir o olho de um sinal na saída de um canal de comunicação. Para tanto será utilizado o esquema de simulação mostrado na Tabela 6.6. Na figs. 6.17, 6.18 e 6.19 é possível constatar a capacidade do RDDMA, do MRCMA e do RMDDMA, respectivamente, em abrir o olho do sinal, inicialmente fechado, mesmo para uma modulação que contém símbolos com diferentes raios. Em particular, as figs. 6.17(d), 6.18(d) e 6.19(d) mostram a evolução da medida de ISI de pior caso ISI_p , onde é possível observar a reduzida quantidade de ISI após a convergência. Nesses gráficos a linha horizontal mostra o valor de $ISI_p = 1$.

6.4.2 Simulações Comparativas

Os resultados de simulação desta seção têm como objetivo comparar diretamente os algoritmos RCMA e RDDMA, ou seja, o intuito desta seção é mostrar explicitamente os ganhos em performance fornecidos ao RCMA pela abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão. As simulações computacionais foram feitas utilizando-se o cenário mostrado na Tabela 6.7. A fig. 6.20, que utiliza um sinal do tipo 16QAM, mostra que o RDDMA possui um ganho em EQM residual sobre o RCMA de aproximadamente 3dB. Já na fig. 6.21, que utiliza uma modulação do tipo 64QAM, observa-se que o *dual-mode* RDDMA possui a mesma velocidade de convergência do CMA e o mesmo EQM residual do DDMA, que, por sua vez, é bem próximo do erro ótimo

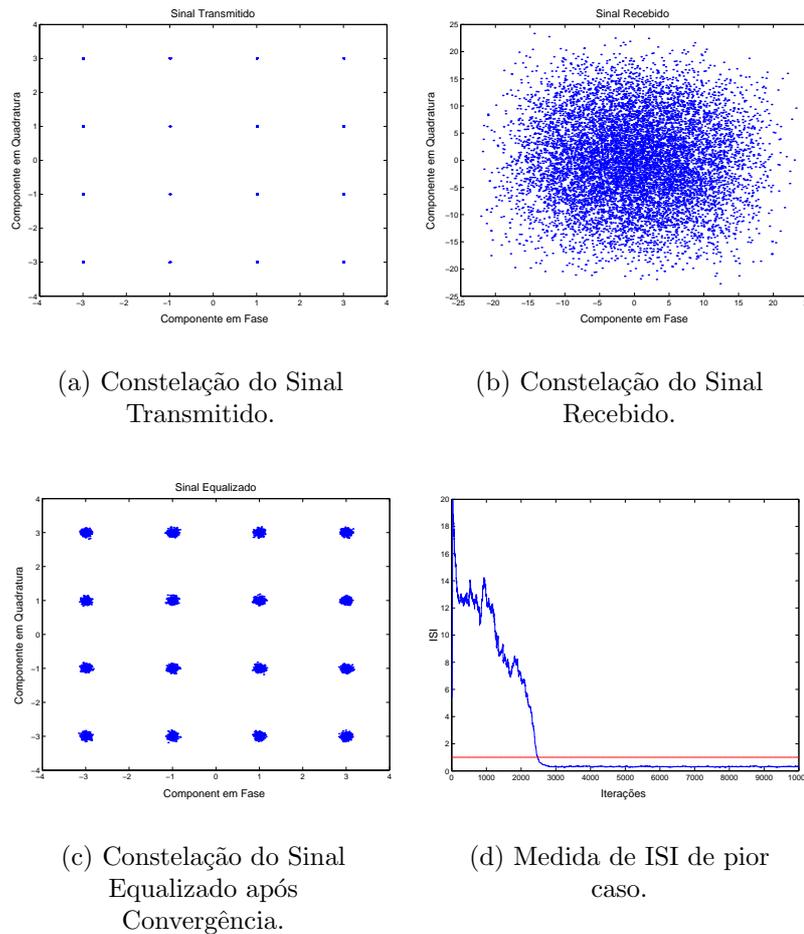


Figura 6.17: A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo RDDMA.

de Wiener. No *dual-mode* RDDMA, a comutação foi feita de forma brusca, utilizando-se as eqs. (6.2) e (6.3). Nessa figura pode-se observar claramente o efeito da comutação algorítmica. Inicialmente o algoritmo aproxima o comportamento do RCMA e, quando a convergência é atingida, o EQM residual do algoritmo *dual-mode* é o mesmo do RDDMA.

6.4.3 Simulações incluindo a abordagem Modificada e o RLSDD

Os resultados de simulação seguintes referem-se a toda família de algoritmos do tipo RCMA propostos na Seção 5.2. Será feita também uma comparação com o algoritmo RLSDD. O principal intuito é observar as mudanças na performance e na robustez à ISI quando se utiliza no RCMA a abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão e a abordagem Modificada. Os parâmetros de simulação utilizados nesta seção estão mostrados na Tabela 6.8. Para se obter uma melhor visualização dos gráficos, todas as curvas de EQM foram passadas através de um filtro discreto passa-baixa do tipo Butterworth de ordem 2 e frequência de corte igual a 10^{-2} . As comutações algorítmicas realizadas nesta seção foram feitas utilizando-se as eqs. (6.2) e (6.4) (transição suave).

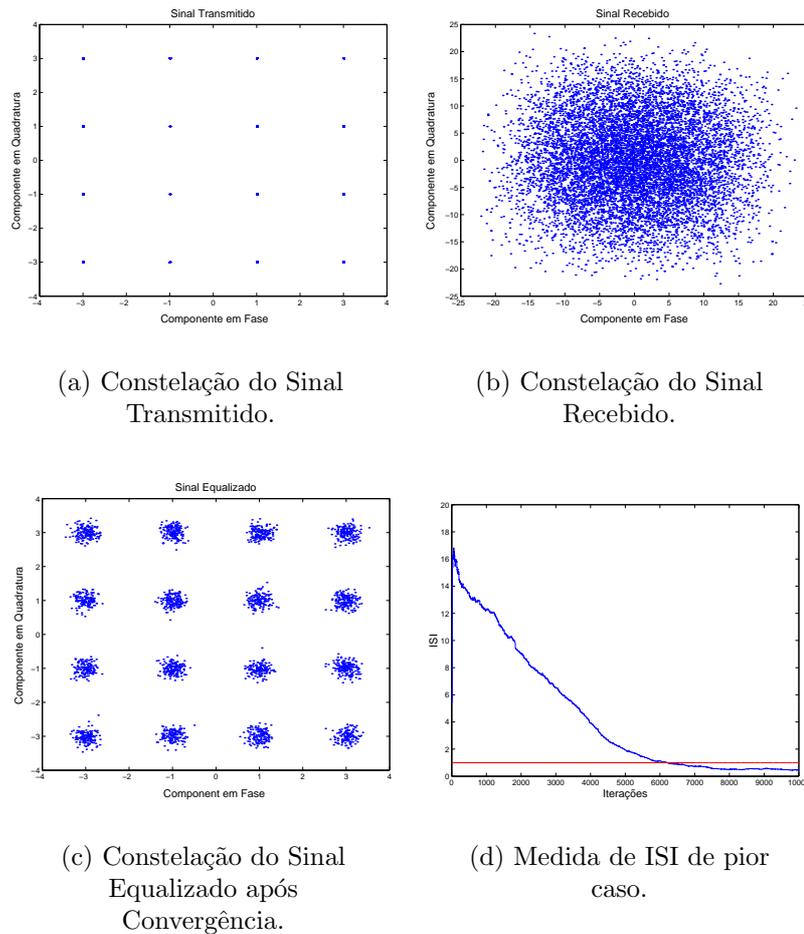


Figura 6.18: A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo MRCMA.

A fig. 6.22 mostra a evolução do EQM do RCMA, do RDDMA e do RLSDD para um sinal 16QAM. É fácil verificar a melhor performance do RDDMA em relação aos outros algoritmos. Neste caso, não se fez necessária a utilização dos algoritmos *dual-mode*. Entretanto, para um sinal 64QAM (fig. 6.23), observa-se que a performance do RDDMA é prejudicada pelas decisões incorretas. Apesar disso o RDDMA atingiu a convergência para um valor de EQM aceitável e o RLSDD não. Neste caso, também foi simulado o algoritmo *dual-mode* RCMA-RDDMA, que claramente possui uma performance bem superior às dos outros. Nessa figura também pode-se observar claramente o efeito da comutação algorítmica. Inicialmente o algoritmo aproxima (com performance melhor) o comportamento do RCMA e quando a convergência é atingida, o EQM residual do algoritmo *dual-mode* é o mesmo do RDDMA.

Resultados similares foram encontrados para os algoritmos “modificados”. Na fig. 6.24, que utiliza um sinal 16QAM, pode-se ver o ganho em performance fornecido pelo RMCMA em relação ao RCMA e a maior velocidade de convergência do RMDDMA (converge após 350 iterações) em relação ao RDDMA (converge após 550 iterações). Novamente não se fez necessária a utilização dos algoritmos *dual-mode*.

Por outro lado, utilizando um sinal 64QAM (fig. 6.25), observa-se que, entre os algoritmos

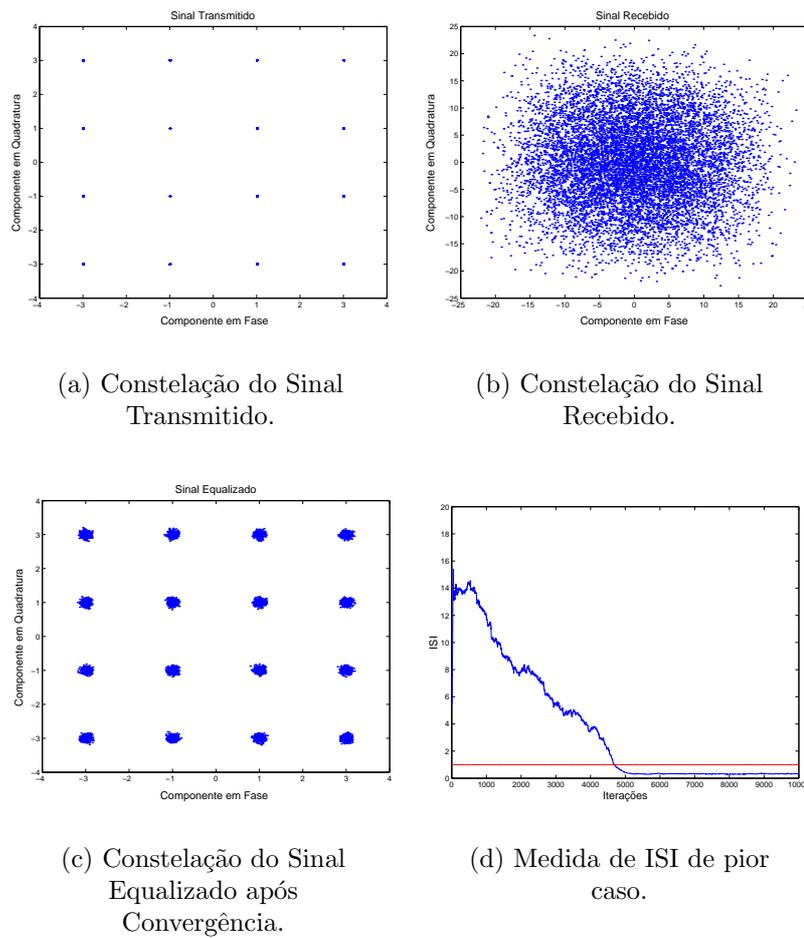


Figura 6.19: A abertura do olho de um sinal na saída de um canal de comunicação realizada pelo RMLDMM.

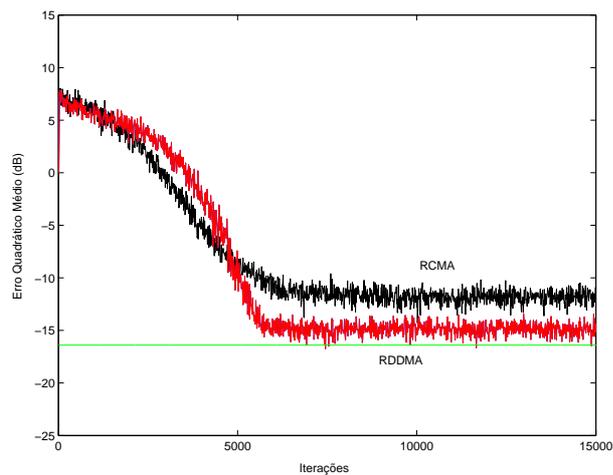


Figura 6.20: Evolução do EQM para o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 16QAM.

single-mode, o RMCMA é o que possui a melhor performance. Novamente as performances

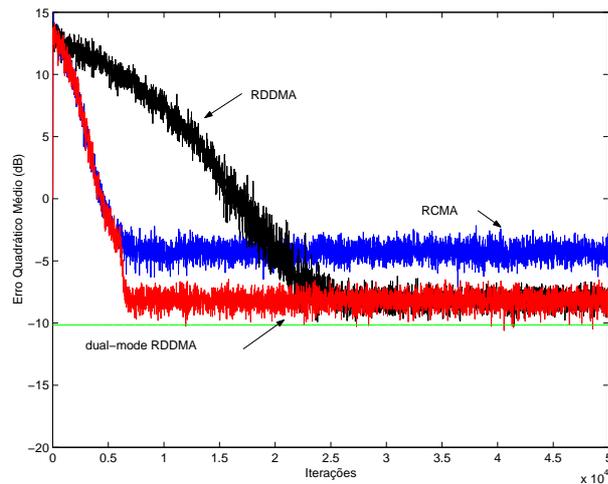


Figura 6.21: Evolução do EQM para o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 64QAM.

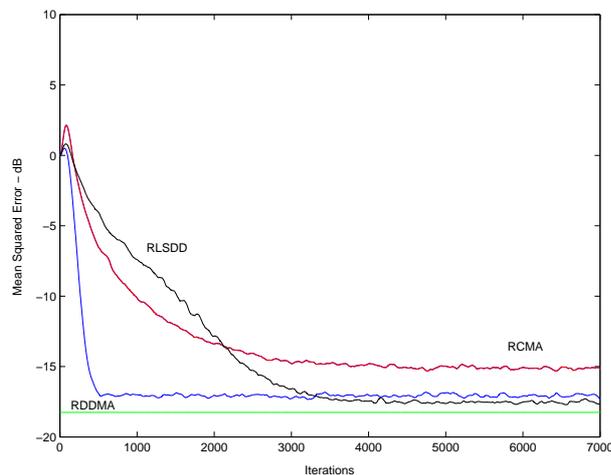


Figura 6.22: Evolução do EQM para o RLSDD, o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 16QAM.

dos algoritmos dirigidos pela decisão mostram-se prejudicadas com modulações de ordens elevadas. Entretanto pode-se ver que os algoritmos RDDMA e RMDDMA conseguem atingir a convergência, após 4800 e 6100 iterações, respectivamente, enquanto que o RLSDD não. Ademais, operando no modo dual, o RDDMA e o RMDDMA possuem grandes ganhos em suas performances. O RMCMA-RMDDMA converge após 700 iterações e o RCMA-RDDMA após 1500 iterações aproximadamente, com o mesmo EQM residual.

Baseando-se nesses resultados conclui-se que a família de algoritmos do tipo RCMA proposta oferece ganhos significativos em performance quando comparada com o RCMA original com complexidades computacionais semelhantes. Novamente deve ser destacado que os algoritmos *dual-mode* do tipo RDDM conseguiram atingir um EQM residual próximo ao EQM ótimo de Wiener.

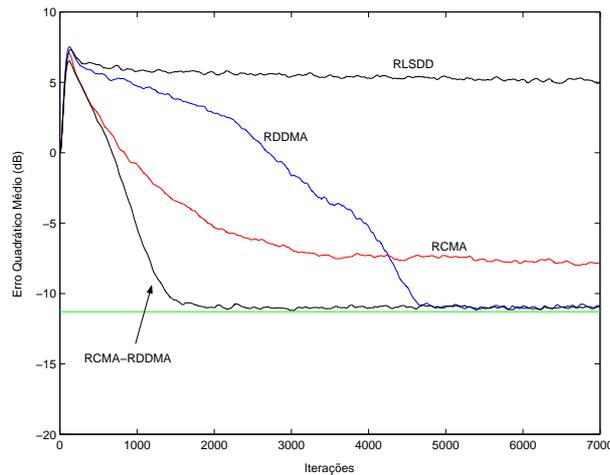


Figura 6.23: Evolução do EQM para o RLSDD, o RCMA e o RDDMA utilizando a modulação 64QAM.

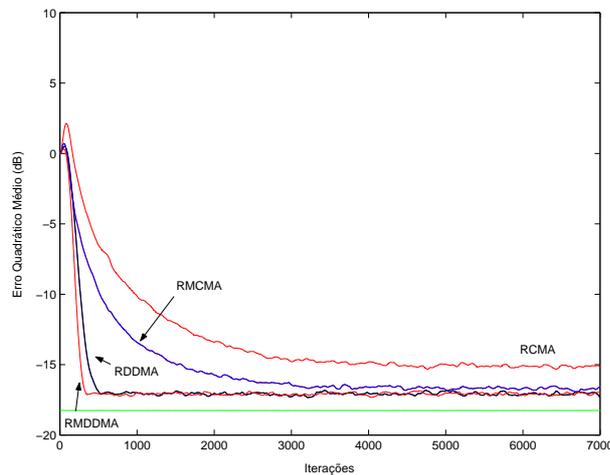


Figura 6.24: Evolução do EQM para o RCMA, o MRCMA, o RDDMA e o RMDDMA utilizando a modulação 16QAM.

6.5 Comparação Entre as Famílias de Algoritmos

Para finalizar os resultados de simulação envolvendo canais lineares, a fig. 6.26 mostra a evolução do EQM de todas as técnicas das três famílias de algoritmos. Para estas simulações foram utilizados os parâmetros contidos na Tabela 6.8. É fácil observar que os algoritmos do tipo RCMA possuem, em todos os casos, as melhores performances e os algoritmos do tipo NCMA, as piores.

Pode-se observar, através da fig. 6.26 e dos resultados mostrados nas Seções 6.1, 6.3 e 6.4, que, para as famílias de algoritmos do tipo CMA e RCMA, as relações entre as performances das técnicas se mantêm inalteradas, enquanto que para o NCMA isto não ocorre. Isto deve-se ao fato de que, nos erros das equações de adaptação dos algoritmos do tipo CMA e RCMA, a saída do equalizador é sempre da forma quadrática, enquanto que para os algoritmos do NCMA

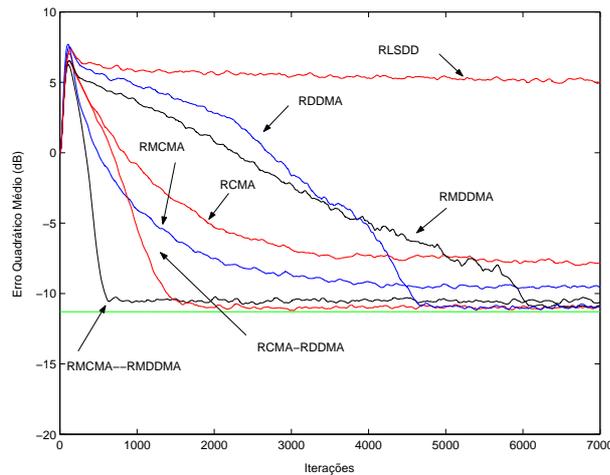


Figura 6.25: Evolução do EQM para diversos algoritmos do tipo RLS utilizando a modulação 64QAM.

a saída do equalizador é sempre da forma linear. Em outras palavras, pode-se dizer que os algoritmos do tipo CMA e RCMA mantêm uma relação de equivalência e de semelhança que não se estende aos algoritmos do tipo NCMA. Encontra-se nesse fato uma provável explicação para a pior performance dos algoritmos do tipo NCMA em sinais QAM de ordem elevada.

6.6 Equalização Cega de Canais Não-Lineares

Esta seção é dedicada a mostrar os resultados de simulação computacional das técnicas desenvolvidas para a realização de equalização de canais de comunicação não-lineares. Será verificado se as técnicas propostas realizam satisfatoriamente a equalização cega do canal do tipo Wiener testado. Os parâmetros de simulação utilizados estão mostrados na Tabela 6.12. A resposta ao impulso do canal linear, representada na forma do vetor \mathbf{h} , e o vetor com os coeficientes do polinômio do canal não-linear \mathbf{c} são os mesmos de [18].

Tabela 6.12: Parâmetros de Simulação - Modelos Não-Linear.

Canal Linear	$\mathbf{h} = [1 \ 0,5 \ -0,2]^T$
Canal Não-Linear	$\mathbf{c} = [0 \ 1 \ 0,3 \ 0,1]^T$
SNR	30 dB
M	4
P	6
Modulação	BPSK
Realizações de Monte Carlo	100

No caso da equalização de canais não-lineares, nem sempre existe uma relação direta entre

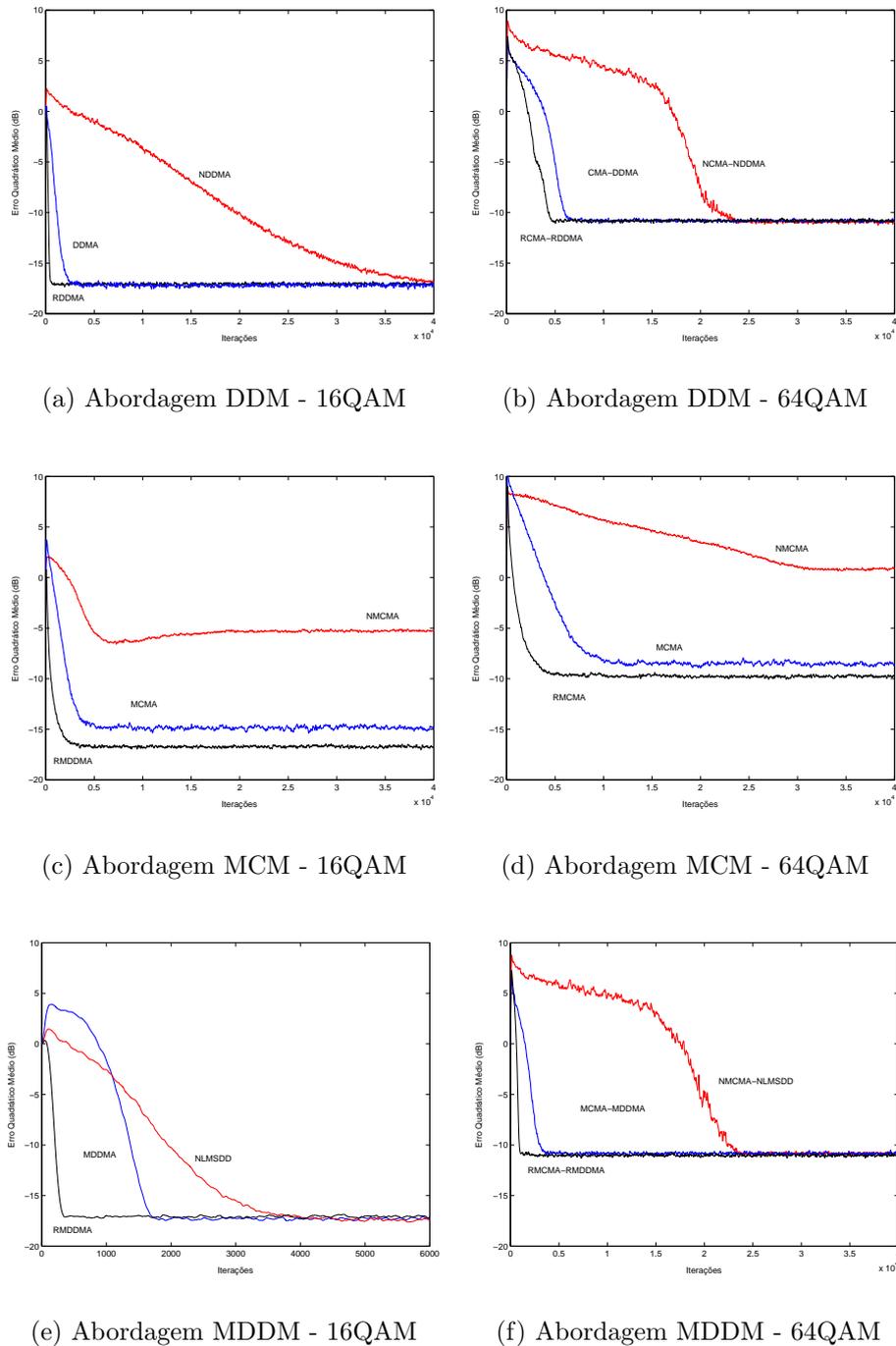


Figura 6.26: Comparação entre as famílias de algoritmos do tipo CMA, NCMA e RCMA.

o EQM e a Taxa de Erro de Bit - *Bit Error Rate* (BER). Devido à isso, neste caso também é utilizado como figura de mérito a BER para os algoritmos estudados. A fig. 6.27 mostra a BER para os algoritmos CMA e LMS (LMS em modo de treinamento) utilizando as três estruturas consideradas: Hammerstein (abordagem Separada), Volterra diagonal e Volterra. Para ambos os algoritmos a abordagem Separada oferece os melhores resultados e a Volterra diagonal os piores. Uma explicação para a pior performance da abordagem Volterra diagonal pode ser encontrada na expressão (2.30), na qual o vetor de coeficientes \mathbf{r} é definido como o produto de Kronecker

$\mathbf{g} \otimes \mathbf{w}$. Porém, nas simulações computacionais não foi inserida nenhuma restrição a \mathbf{r} para que este possua as propriedades do produto de Kronecker. Ou seja, neste caso não se verifica que $r(j + iP) = g(j)w(i)$ ($0 \leq j \leq P - 1$ e $0 \leq i \leq M - 1$), prejudicando, assim, a performance da abordagem Volterra diagonal para os algoritmos LMS e CMA.

Para se fazer uma análise acerca da convergência desses algoritmos, a fig. 6.28 mostra a evolução do EQM dos algoritmos CMA e LMS utilizando as abordagens Separada e Volterra. A primeira observação que se deve fazer é a convergência de ambas as abordagens CMA. Além disso, como pode-se ver na Tabela 6.13, que mostra o número de coeficientes do equalizador para todas as abordagens, a abordagem Volterra possui um número muito maior de coeficientes que a abordagem Separada. O maior número de parâmetros da abordagem Volterra torna sua convergência lenta, como pode-se ver na fig. 6.28. Com relação ao CMA, o LMS fornece um EQM residual aproximadamente 5dB menor para a abordagem Separada e 3dB menos para a abordagem Volterra.

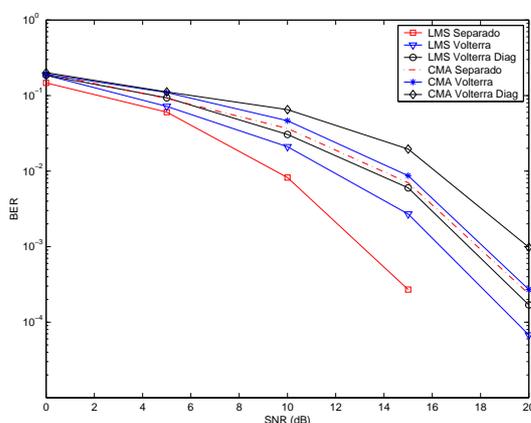


Figura 6.27: Curvas de BER para os algoritmos CMA e LMS.

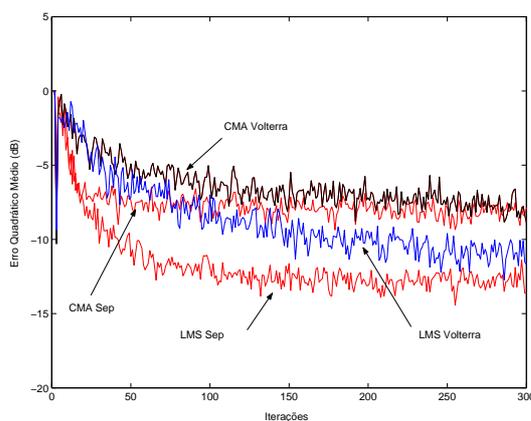


Figura 6.28: Evolução do EQM para os algoritmos CMA e LMS.

Os próximos resultados são relacionados aos algoritmos normalizados. A fig. 6.29 mostra as curvas de BER para o NCMA e o NLMS (NLMS em modo de treinamento). A abordagem separada mostrou-se a melhor para ambos os algoritmos, a Volterra Diagonal a pior para o

Tabela 6.13: Número de Coeficientes do Equalizador

Abordagem	N_q
Separada	10
Volterra Diagonal	24
Volterra	258

NCMA e a Volterra a pior para o NLMS. Neste caso, as performances de BER são mais próximas do que no caso dos algoritmos do tipo LMS. Além disso, pode-se observar através das curvas de EQM na fig. 6.30 que as técnicas normalizadas testadas possuem performances semelhantes, com exceção à técnica NLMS-Separada, que fornece um ganho de 4dB em relação às demais.

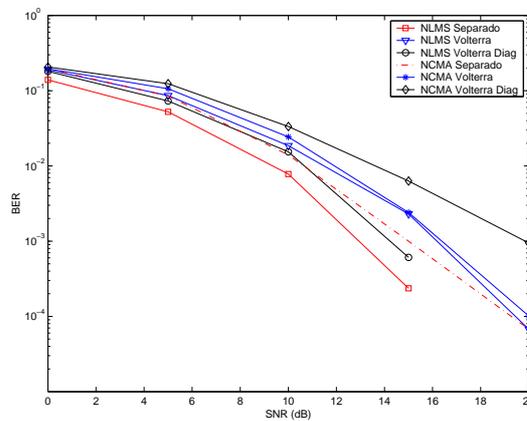


Figura 6.29: Curvas de BER para os algoritmos NCMA e NLMS.

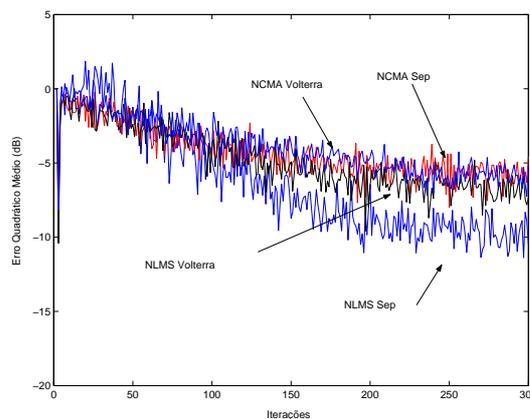


Figura 6.30: Evolução do EQM para os algoritmos NCMA e NLMS.

Resultados similares foram obtidos para os algoritmos do tipo RLS. Na fig. 6.31, que mostra as curvas de BER para o RLS e o RCMA (RLS em modo de treinamento), a abordagem Separada mostrou-se novamente a melhor para ambos os algoritmos. E, finalmente, na fig.

6.32 pode-se verificar também a melhor convergência da abordagem Separada em relação a abordagem Volterra Diagonal para o algoritmo RLS. O RCMA e o RLS têm um EQM residual aproximadamente igual na abordagem Volterra Diagonal e, na abordagem Separada, o RLS fornece um ganho de aproximadamente 5dB menor.

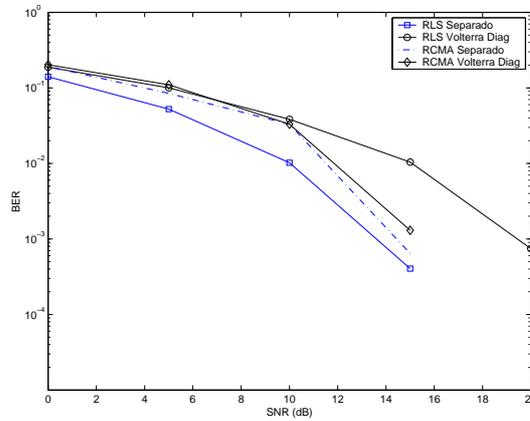


Figura 6.31: Curvas de BER para os algoritmos RCMA e RLS.

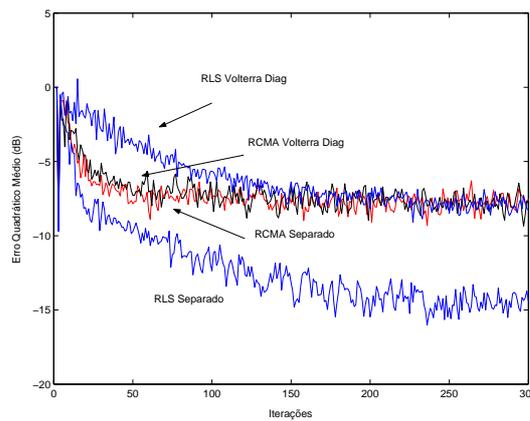


Figura 6.32: Evolução do EQM para os algoritmos RCMA e RLS.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

NA primeira parte do presente trabalho foram apresentados dois novos algoritmos, o DDMA e o MDDMA, caracterizados por propriedades bastante desejáveis para a realização de equalização cega. Essas técnicas são inspiradas no CMA e projetadas para operar com sinais transmitidos com múltiplas amplitudes, em particular, para sinais do tipo QAM. Na realidade esses algoritmos são baseados na abordagem do Módulo Dirigido pela Decisão, que também inspirou a maioria das outras técnicas desta dissertação. De fato, além de possuírem diversas vantagens sobre o CMA, essas técnicas podem ser vistas como generalizações do CMA para constelações com múltiplas amplitudes. Por serem cegos e dirigidos pela decisão, o DDMA e o MDDMA foram comparados, através de simulações computacionais, com o CMA e o DDA. Os resultados mostraram uma propriedade bastante interessante dos algoritmos propostos: eles possuem um bom compromisso entre robustez à ISI e performance em termos de velocidade de convergência e EQM residual, como indicado na fig. 7.33. Com relação a este compromisso, o DDMA situa-se numa posição intermediária entre o CMA e o DDA, sendo mais robusto à ISI do que o DDA e menos do que o CMA. Além disso, o DDMA apresenta uma velocidade de convergência e um erro residual melhores que os do CMA e similares aos do DDA. No que concerne ao MDDMA, possuidor de uma performance melhor que a dos demais, observou-se que ele apresenta uma robustez à ISI inferior à do DDMA, contudo, superior à do DDA.

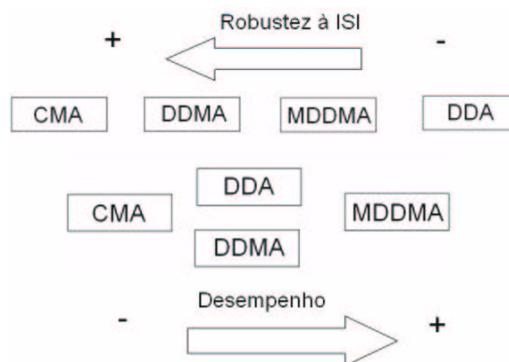


Figura 7.33: Compromisso realizado entre robustez à ISI e performance para os algoritmos do tipo LMS estudados.

O DDMA, além de ser o primeiro algoritmo proposto, é também o mais importante de todo este estudo, uma vez que praticamente todas as outras técnicas desenvolvidas utilizam, de alguma

forma, a idéia original do DDMA, ou seja, a abordagem do Modulo Dirigido pela Decisão. Deste modo, no **Capítulo 4** foi realizado um estudo teórico sobre o DDMA. Foi demonstrado, para o caso sem ruído e assumindo a hipótese que o dispositivo de decisão realiza decisões corretas, que os únicos pontos de mínimo estáveis da função custo DDM no espaço global são: o correspondente à solução ZF; e um conjunto de pontos que possuem apenas dois coeficientes não-nulos. Depois foram estabelecidas as condições nas quais o DDMA tem convergência garantida para um desses pontos de mínimo no espaço do equalizador, inclusive para o caso SIMO. Pôde-se também constatar a melhor performance do DDMA sobre o CMA em constelações que possuem múltiplas amplitudes, através da análise dos EMSE teóricos fornecidos pelo DDMA e pelo CMA. No final desse capítulo foi verificado que o DDMA possui fortes ligações com o CMA e com a solução de Wiener que, para o caso de sinais reais, foi demonstrada ser aproximadamente uma solução do critério DDM.

Ademais, neste trabalho foram propostas, pela primeira vez na literatura, técnicas adaptativas para a realização de equalização cega de canais do tipo Wiener. As técnicas propostas baseiam-se no CMA e mostraram-se hábeis em recuperar os símbolos transmitidos através do canal não-linear testado. Outra importante contribuição diz respeito à comparação de três diferentes estruturas para o equalizador: um filtro Hammerstein, um filtro Volterra diagonal e um filtro Volterra completo. Essa comparação foi possível devido à notação unificada desenvolvida de forma original, que permitiu que esses três casos possuíssem uma mesma abordagem matemática onde a saída é linear em relação aos coeficientes dos filtros. Os melhores resultados de simulação foram provenientes da abordagem Separada, que considera o equalizador como um filtro do tipo Hammerstein.

No **Capítulo 5** foram apresentadas duas novas famílias de algoritmos inspirados nos algoritmos estudados no **Capítulo 3**, onde uma delas baseia-se no NCMA e, a outra, no RCMA. A idéia do Módulo Dirigido à Decisão também mostrou prover ganhos nas performances dos algoritmos RCMA e NCMA. Os algoritmos propostos melhoraram bastante a velocidade de convergência das técnicas clássicas, que é um dos principais inconvenientes dos algoritmos do tipo Busgang, sobretudo para sinais QAM de ordem elevada. Estes ganhos em performance são ainda mais significativos se for levado em conta a complexidade computacional dos algoritmos, semelhante às das técnicas clássicas.

Particularmente, os algoritmos do tipo RCMA fornecem performances bastante superiores às dos algoritmos do tipo CMA. Entretanto, com relação aos algoritmos do tipo NCMA, apesar de terem melhorado a performance do NCMA original, eles oferecem performances inferiores às dos algoritmos do tipo CMA quando aplicados em sinais QAM de ordem elevada. Isto é perfeitamente normal, uma vez que, para esses tipos de sinais, o próprio NCMA tem desempenho pior que o CMA. Os resultados das técnicas normalizadas foram ligeiramente diferente dos resultados das outras famílias, uma vez que, como mencionado no **Capítulo 5**, os erros das equações de adaptação do NCMA e de seus derivados possuem estruturas diferentes dos erros das equações de adaptação dos algoritmos do tipo CMA e RCMA. Além disso, o bom compromisso entre performance e robustez à ISI também pode ser estendido para as famílias de algoritmos do tipo NLMS e RLS. Deve-se destacar ainda que o EQM residual de vários dos algoritmos propostos aproxima-se bastante do EQM de Wiener.

Ainda no **Capítulo 5**, os algoritmos NCMA e RCMA foram aplicados nas três estruturas

não-lineares utilizadas no **Capítulo 3**, com o intuito de equalizar canais do tipo Wiener. Estas técnicas também se mostraram hábeis em equalizar este tipo de canal. Novamente, os melhores resultados de simulações foram fornecidos pela abordagem Separada.

Levando-se em conta as técnicas de equalização de canais lineares e não-lineares, foram estudadas um total de 21 técnicas, dentre as quais 15 foram propostas originalmente na presente dissertação.

Pode-se vislumbrar diversas perspectivas para o presente trabalho. No que concerne às técnicas de equalização de canais lineares, uma análise teórica do estado transitório do DDMA é um dos passos seguintes considerados para a continuação deste estudo. A extensão dos resultados obtidos no **Capítulo 4** para o caso do algoritmo MDDMA também é um tema de pesquisa que se mostra ser de bastante pertinência.

Uma importante abordagem que pode melhorar ainda mais a performance dos algoritmos estudados é a utilização de estruturas de filtros do tipo Auto-Regressivo de Média-Móvel (*Auto-Regressive Moving-Average - ARMA*) [1], que favorecerá o combate a canais lineares com redução dos parâmetros dos filtros. Outra interessante perspectiva refere-se às aplicações das técnicas propostas em outros ambientes de simulação, como, por exemplo, em canais variantes no tempo (e.g. sistemas HDTV). Outros contextos nos quais as técnicas propostas poderiam ser adaptadas são os sistemas de comunicações multiusuários que utilizam arranjo de antenas ou Múltiplo Acesso por Divisão no Código (*Code Division Multiple Access - CDMA*).

Com relação às técnicas de equalização de canais não-lineares, também pode-se considerar diversas perspectivas. Inicialmente pode-se dizer que estudos teóricos sobre equalizadores adaptativos não-lineares não são presentes na literatura de forma abundante. Devido a isso, um estudo sobre a convergência do CMA em estruturas não-lineares seria de grande importância e válido no desenvolvimento de novas técnicas para este tipo de problema. Além disso, todas as técnicas estudadas nesta dissertação podem ser aplicadas em estruturas de filtragem não-lineares, uma vez que os filtros sejam lineares com relação aos seus coeficientes.

Outras perspectivas dentro da área de processamento de sinais não-lineares envolvem o estudo da aplicação de filtros de Volterra em sistemas de telecomunicações utilizando-se ou alguma forma de diversidade, como múltiplos sensores, redundância introduzida por um pré-codificador, superamostragem etc, e a decomposição tensorial *Parallel Factor Analysis* (PARAFAC).

Apêndices

Apêndice A

Derivação de Funções Escalares em Relação a um Vetor

NESTE apêndice são desenvolvidas as expressões matemáticas relacionadas a derivação de funções escalares em relação a vetores utilizadas nesta dissertação. Em geral, a otimização de funções custo são feitas calculando-se o operador gradiente em relação ao vetor de pesos do equalizador. Ademais, a estabilidade de um ponto de equilíbrio de uma função custo pode ser encontrada a partir da definição de matriz Hessiana. Desta forma, as expressões de derivação encontradas neste apêndice são de extrema utilidade na análise e no desenvolvimento dos algoritmos estudados nesta dissertação.

A.1 Definições Básicas

Na seqüência será considerado que \mathbf{z} e \mathbf{x} são vetores complexos de dimensão $N_L \times 1$, e que $y = \mathbf{z}^T \mathbf{x}$ é uma função escalar complexa. Para fins de otimização, a definição de derivada de uma função escalar complexa y em relação a um escalar complexo z_k é dada por

$$\frac{\partial y}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_{R,k}} - j \frac{\partial y}{\partial z_{I,k}} \right),$$

em que $z_{R,k}$ e $z_{I,k}$, $1 \leq k \leq N_L$, são os k -ésimos termos da partes real e imaginária de \mathbf{z} , respectivamente. A partir dessa definição pode-se também definir

$$\frac{\partial y}{\partial z_k^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_{R,k}} + j \frac{\partial y}{\partial z_{I,k}} \right).$$

Desta forma, as derivadas assim definidas satisfazem os dois requerimentos básicos, mostrados a seguir:

$$\frac{\partial z_k}{\partial z_k} = 1 \quad e \quad \frac{\partial z_k}{\partial z_k^*} = \frac{\partial z_k^*}{\partial z_k} = 0.$$

A.1.1 Casos Particulares

Os exemplos mostrados a seguir são utilizados para o desenvolvimento expressões analíticas utilizadas neste trabalho.

- $\frac{\partial |z_k|^2}{\partial z_k^*}$

$$\frac{\partial |z_k|^2}{\partial z_k^*} = \frac{\partial}{\partial z_k^*} (z_{R,k}^2 + z_{I,k}^2) = z_k.$$

- $\frac{\partial |z_k|^2}{\partial z_k}$

$$\frac{\partial |z_k|^2}{\partial z_k} = \frac{\partial}{\partial z_k} (z_{R,k}^2 + z_{I,k}^2) = z_k^*.$$

- $\frac{\partial |z_k|^4}{\partial z_k^*}$

$$\frac{\partial |z_k|^4}{\partial z_k^*} = \frac{\partial}{\partial z_k^*} (z_{R,k}^2 + z_{I,k}^2)^2 = \frac{\partial}{\partial z_k^*} (z_{R,k}^4 + 2z_{R,k}^2 z_{I,k}^2 + z_{I,k}^4) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial |z_k|^4}{\partial z_k^*} = 2z_{R,k}^3 + 2z_{R,k} z_{I,k}^2 + 2j z_{I,k}^3 + 2j z_{R,k}^2 z_{I,k} = 2z_k |z_k|^2.$$

- $\frac{\partial^2 |z_k|^4}{\partial z_k^* \partial z_k}$

$$\frac{\partial^2 |z_k|^4}{\partial z_k^* \partial z_k} = \frac{\partial 2z_k |z_k|^2}{\partial z_k} = \frac{\partial}{\partial z_k} (2z_{R,k}^3 + 2z_{R,k} z_{I,k}^2 + 2j z_{I,k}^3 + 2j z_{R,k}^2 z_{I,k}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 |z_k|^4}{\partial z_k^* \partial z_k} = 4z_{R,k}^2 + 4z_{I,k}^2 = 4|z_k|^2.$$

A.2 Gradiente de Funções Escalares Complexas

A partir da definição de derivada pode-se estabelecer seguinte definição de gradiente de uma função escalar y em relação a um vetor complexo \mathbf{z} é dada por

$$\nabla_{\mathbf{z}} y = 2 \frac{\partial y}{\partial \mathbf{z}^*} = \frac{\partial y}{\partial \mathbf{z}_R} + j \frac{\partial y}{\partial \mathbf{z}_I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial z_{R,1}} \\ \frac{\partial y}{\partial z_{R,2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial z_{R,N_L}} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial z_{I,1}} \\ \frac{\partial y}{\partial z_{I,2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial z_{I,N_L}} \end{pmatrix}.$$

Esta definição é utilizada em diversas seções desta dissertação para se encontrar as expressões de gradientes de funções custo em relação a vetores. A seção a seguir estuda alguns casos que são especialmente utilizados no decorrer deste trabalho.

A.2.1 Casos Particulares

É de particular interesse para este trabalho encontrar as expressões dos gradientes de y , y^* , y_R e y_I em relação a \mathbf{z} , onde os índices R e I denotam as partes real e imaginária, respectivamente.

- $\nabla_{\mathbf{z}} y$

É possível expressar $y = \mathbf{z}^T \mathbf{x}$ utilizando uma notação escalar:

$$y = \mathbf{z}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N z_i x_i = \sum_{i=1}^N z_{R,i} x_{R,i} - z_{I,i} x_{I,i} + j[z_{R,i} x_{I,i} + z_{I,i} x_{R,i}].$$

Deste modo obtém-se

$$\frac{\partial y}{\partial z_{R,k}} = x_{R,k} + j x_{I,k} = x_k \quad e \quad \frac{\partial y}{\partial z_{I,k}} = -x_{I,k} + j x_{R,k} = j x_k \Rightarrow$$

$$\nabla_{\mathbf{z}} y = \mathbf{x} + j(j\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x} = 0. \quad (\text{A.1})$$

- $\nabla_{\mathbf{z}} y^*$

De maneira similar, também é possível expressar y^* utilizando uma notação escalar:

$$y^* = \mathbf{z}^H \mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^N z_i^* x_i^* = \sum_{i=1}^N z_{R,i} x_{R,i} - z_{I,i} x_{I,i} - j[z_{R,i} x_{I,i} + z_{I,i} x_{R,i}],$$

da qual se obtém

$$\frac{\partial y^*}{\partial z_{R,k}} = x_{R,k} - j x_{I,k} = x_k^* \quad e \quad \frac{\partial y^*}{\partial z_{I,k}} = -x_{I,k} - j x_{R,k} = -j x_k^* \Rightarrow$$

$$\nabla_{\mathbf{z}} y^* = \mathbf{x}^* + j(-j\mathbf{x}^*) = 2\mathbf{x}^*. \quad (\text{A.2})$$

- $\nabla_{\mathbf{z}} y_R$

Pode-se encontrar também, de maneira análoga, o gradiente de y_R em relação a \mathbf{z} :

$$y_R = \sum_{i=1}^N z_{R,i} x_{R,i} - z_{I,i} x_{I,i} \quad e \quad y_I = \sum_{i=1}^N z_{R,i} x_{I,i} + z_{I,i} x_{R,i},$$

que implicam em

$$\frac{\partial y_R}{\partial z_{R,k}} = x_{R,k} \quad e \quad \frac{\partial y_R}{\partial z_{I,k}} = -x_{R,k} \Rightarrow$$

$$\nabla_{\mathbf{z}} y_R = \mathbf{x}_R + j(-\mathbf{x}_I) = \mathbf{x}^*. \quad (\text{A.3})$$

- $\nabla_{\mathbf{z}} y_I$

Finalmente, fazendo-se os mesmos cálculos para o gradiente de y_I em relação a \mathbf{z} , tem-se

$$\frac{\partial y_I}{\partial z_{R,i}} = x_{I,i} \quad e \quad \frac{\partial y_I}{\partial z_{I,i}} = x_{R,i} \Rightarrow$$

$$\nabla_{\mathbf{z}} y_I = \mathbf{x}_I + j(\mathbf{x}_R) = j\mathbf{x}^*. \quad (\text{A.4})$$

A.3 Matriz Hessiana

A definição de matriz Hessiana de uma função escalar y em relação a um vetor complexo \mathbf{z} é dada por

$$\nabla_{\mathbf{z}}^2 y = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial z_1 \partial z_1^*} & \frac{\partial^2 y}{\partial z_1 \partial z_2^*} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial z_1 \partial z_{N_L}^*} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial z_2 \partial z_1^*} & \frac{\partial^2 y}{\partial z_2 \partial z_2^*} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial z_2 \partial z_{N_L}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial z_{N_L} \partial z_1^*} & \frac{\partial^2 y}{\partial z_{N_L} \partial z_2^*} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial z_{N_L} \partial z_{N_L}^*} \end{pmatrix}.$$

A matriz Hessiana é utilizada neste trabalho para se testar a estabilidade de pontos de equilíbrio de funções custo. Se todos os autovalores da matriz Hessiana em um determinado ponto de equilíbrio são reais e negativos, então trata-se de um ponto de máximo local. Se os autovalores são reais e positivos, então trata-se de um ponto de mínimo local e se existem autovalores positivos e negativos, então trata-se de um ponto de sela.

Apêndice B

Número de Pontos de Equilíbrio da Função Custo J'_{DDM} para um Sinal com FDP super-Gaussiana

ESTE apêndice mostra, para um sinal transmitido com fdp super-gaussiana, que o valor de N_M é sempre igual a zero, onde N_M é o número de elementos não-nulos da resposta ao impulso global f_k tal que $k \neq \tau$.

A partir da expressão de σ_M^2 na eq. (4.14), pode-se concluir que, para $N_M \geq 1$, o valor de σ_τ deve ser tal que $1 - 2\sigma_\tau^2 \geq 0$, uma vez que $\sigma_\tau = |f_\tau| > 0$. Assim, a eq. (4.15) deve respeitar a seguinte condição:

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]}{4\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)]} \leq \frac{1}{2}.$$

Após alguns cálculos algébricos, pode-se demonstrar que o denominador da equação acima é igual a $(m_{4a} + 2\sigma_a^4 N_M)(2\sigma_a^4 - m_{4a})$. Uma vez que a curtose é positiva ($k_{4a} - 2\sigma_a^4 > 0$), pode-se concluir que esse denominador é negativo. Assim, tem-se

$$4\sigma_a^8 N_M - 2m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)] \geq 4\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)] \Rightarrow$$

$$2m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)] \leq m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)],$$

que não é válida para $N_M \geq 1$. Assim, pode-se concluir que $N_M = 0$.

Apêndice C

Análise do Sinal Algébrico do Numerador da Equação (4.15)

ESTE apêndice visa demonstrar, no caso de um sinal transmitido com fdp sub-gaussiana, que o sinal algébrico do numerador da eq. (4.15) é sempre negativo para $N_M \geq 2$, onde N_M é o número de elementos não-nulos da resposta ao impulso global f_k tal que $k \neq \tau$.

Para tanto, pode-se escrever o numerador de (4.15), que foi denotado por U , da seguinte maneira:

$$U = 2\sigma_a^8 N_M - m_{4a}[m_{4a} + 2\sigma_a^4(N_M - 1)] = 2\sigma_a^8 N_M - m_{4a}^2 - 2m_{4a}\sigma_a^4 N_M + 2m_{4a}\sigma_a^4 \Rightarrow$$

$$U = 2m_{4a}\sigma_a^4 - m_{4a}^2 - 2\sigma_a^4 N_M[m_{4a} - \sigma_a^4].$$

Observa-se, uma vez que $m_{4a} - \sigma_a^4 \geq 0$, que quanto menor o valor de N_M , maior será o valor da expressão U . Assim, o maior valor para U é encontrado, dentro da hipótese feita que $N_M \geq 2$, quando $N_M = 2$. Logo,

$$U \leq 2m_{4a}\sigma_a^4 - m_{4a}^2 - 4\sigma_a^4[m_{4a} - \sigma_a^4] = -m_{4a}^2 - 2m_{4a}\sigma_a^4 + 4\sigma_a^8.$$

Partindo da seguinte suposição:

$$m_{4a} > (\sqrt{5} - 1)\sigma_a^4, \tag{C.1}$$

chega-se a

$$m_{4a} + \sigma_a^4 > \sqrt{5}\sigma_a^4 \Rightarrow (m_{4a} + \sigma_a^4)^2 > 5\sigma_a^8 \Rightarrow m_{4a}^2 - m_{4a}\sigma_a^4 + \sigma_a^8 > 0 \Rightarrow$$

$$U = -m_{4a}^2 + m_{4a}\sigma_a^4 - \sigma_a^8 < 0.$$

O que demonstra, para um sinal transmitido com fdp sub-gaussiana tal que (C.1) é satisfeita, que o sinal algébrico do numerador da eq. (4.15) é sempre negativo para $N_M \geq 2$. Vale ressaltar que a restrição (C.1) é sempre satisfeita para as contelações consideradas no **Capítulo 4**, ou seja, contelações QAM quadrada de módulo não constante.

Apêndice D

Matriz Hessiana da Função Custo J'_{DDM} nos Pontos de Equilíbrio

NESTE apêndice são desenvolvidas as expressões para a matriz Hessiana de J'_{DDM} nos pontos de equilíbrio encontrados no **Capítulo 4**, ou seja, para o vetor nulo $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, o vetor equivalente à solução *Zero-Forcing* (ZF) correspondente ao atraso τ ($\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau$) e o conjunto de vetores denotado por \mathbf{f}_1 .

As expressões de segunda derivada serão calculadas a partir das expressões de primeira derivada contidas em eqs. (4.8) e (4.9). Para tanto serão considerados alguns casos:

- $\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*}$, para $k \neq \tau$

$$\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} = 4(m_{4a} - 2\sigma_a^4)|f_k|^2 + 4\sigma_a^4 \left[\sum_{i \neq k} |f_i|^2 + 2|f_k|^2 \right] - \sigma_a^4 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} = 4m_{4a}|f_k|^2 + 4\sigma_a^4 \sum_{i \neq k} |f_i|^2 - \sigma_a^4 \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{0}} = -\sigma_a^4 < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{e}_\tau} = 3\sigma_a^4 > 0.$$

Se k é tal que $|f_k| = \sigma_M$:

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} = 4m_{4a}\sigma_M^2 + 4\sigma_a^4\sigma_\tau^2 - \sigma_a^4,$$

Substituindo os valores de σ_M^2 e σ_τ^2 contidos na eqs. (4.18) e (4.19) obtém-se

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= 4m_{4a} \frac{\sigma_a^4 m_{4a}}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} + 4\sigma_a^4 \frac{2\sigma_a^8 - m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - \sigma_a^4 \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= \frac{4\sigma_a^4 m_{4a}^2 + 8\sigma_a^{12} - 4\sigma_a^4 m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - \sigma_a^4 \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= \frac{8\sigma_a^{12}}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - \sigma_a^4 \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= \sigma_a^4 \frac{8\sigma_a^8 - 4\sigma_a^8 + m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= \sigma_a^4 \frac{4\sigma_a^8 + m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} > 0, \end{aligned} \quad (D.1)$$

uma vez que $m_{4a} < 2\sigma_a^4$ (hipótese de sinal sub-gaussiano). É necessário analisar ainda o caso em que $|f_k| = 0$, onde escreve-se

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} = 4\sigma_a^4 [\sigma_\tau^2 + \sigma_M^2] - \sigma_a^4.$$

Substituindo os valores de σ_M^2 e σ_τ^2 obtém-se

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= 4\sigma_a^4 \frac{2\sigma_a^8 - m_{4a}^2 + \sigma_a^4 m_{4a}}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - \sigma_a^4 \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= \sigma_a^4 \frac{8\sigma_a^8 - 4m_{4a}^2 + 4\sigma_a^4 m_{4a} + m_{4a}^2 - 4\sigma_a^8}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= \sigma_a^4 \frac{8\sigma_a^8 - 4m_{4a}^2 + 4\sigma_a^4 m_{4a} + m_{4a}^2 - 4\sigma_a^8}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k \partial f_k^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} &= \sigma_a^4 \frac{4\sigma_a^8 - 3m_{4a}^2 + 4\sigma_a^4 m_{4a}}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} > 0, \end{aligned} \quad (D.2)$$

uma vez que $m_{4a} < 2\sigma_a^4$ (hipótese de sinal sub-gaussiano).

- $\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k^* \partial f_l}$, para $k \neq \tau$ e l qualquer

$$\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k^* \partial f_l} = 4\sigma_a^4 f_k f_l^* \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k^* \partial f_l} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{0}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k^* \partial f_l} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{e}_\tau} = 0.$$

Se $l = \tau$ e k é tal que $|f_k| = \sigma_M$, tem-se

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k^* \partial f_l} \right|_{\mathbf{f}_1=\mathbf{e}_\tau} = 4\sigma_a^4 \sigma_M \sigma_\tau e^{-j\varphi}, \quad (\text{D.3})$$

em que φ é uma fase qualquer de f_τ .

Caso contrário, tem-se

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_k^* \partial f_l} \right|_{\mathbf{f}_1=\mathbf{e}_\tau} = 0. \quad (\text{D.4})$$

- $\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*}$

$$\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} = 4(m_{4a} - 2\sigma_a^4)|f_\tau|^2 + 4\sigma_a^4 \sum_{i \neq \tau} |f_i|^2 + 2|f_\tau|^2 - m_{4a} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} = 4m_{4a}|f_\tau|^2 + 4\sigma_a^4 \sum_{i \neq \tau} |f_i|^2 - m_{4a} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{0}} = -m_{4a} < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{e}_\tau} = 3m_{4a} > 0.$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}_1} = 4m_{4a}\sigma_\tau^2 + 4\sigma_a^4\sigma_M^2 - m_{4a} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} = 4m_{4a} \frac{2\sigma_a^8 - m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} + 4\sigma_a^4 \frac{\sigma_a^4 m_{4a}}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - m_{4a} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} = \frac{8\sigma_a^8 m_{4a} - 4m_{4a}^3 + 4\sigma_a^8 m_{4a}}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - m_{4a} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} = \frac{12\sigma_a^8 m_{4a} - 4m_{4a}^3}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} - m_{4a} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} = m_{4a} \frac{12\sigma_a^8 - 4m_{4a}^2 - 4\sigma_a^8 + m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 J'_{DDM}}{\partial f_\tau \partial f_\tau^*} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{f}_1} = m_{4a} \frac{8\sigma_a^8 - 3m_{4a}^2}{4\sigma_a^8 - m_{4a}^2} > 0, \quad (\text{D.5})$$

uma vez que, para sinais com modulação QAM de ordem par com fdp uniforme, tem-se $8\sigma_a^8 > 3m_{4a}^2$.

Desta forma, as matrizes Hessiana da função custo DDM nos pontos $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau$ e $\mathbf{f} = \mathbf{e}_1$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla^2 J'_{DDM}(\mathbf{f} = \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\sigma_a^4 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sigma_a^4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{4a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -\sigma_a^4 \end{pmatrix},$$

em que o valor $-m_{4a}$ encontra-se da posição (τ, τ) . Tem-se ainda

$$\nabla^2 J'_{DDM}(\mathbf{f} = \mathbf{e}_\tau) = \begin{pmatrix} 3\sigma_a^4 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3\sigma_a^4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3m_{4a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 3\sigma_a^4 \end{pmatrix},$$

em que o valor $3m_{4a}$ encontra-se da posição (τ, τ) e, ainda

$$\nabla^2 J'_{DDM}(\mathbf{f} = \mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_k & \cdots & \kappa_{\tau k}^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_{\tau k} & \cdots & \kappa_\tau & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \kappa_1 \end{pmatrix},$$

em que κ_τ encontra-se na posição (τ, τ) , $\kappa_{\tau k}$ na posição (τ, k) , $\kappa_{\tau k}^*$ na posição (k, τ) , κ_k na posição (k, k) , κ_1 no restante da diagonal e k é um inteiro qualquer entre 0 e $N + M - 2$ tal que $k \neq \tau$ e $|f_k| = \sigma_M$. Os valores de κ_k , κ_1 , $\kappa_{\tau k}$ e κ_τ são dados pelas eqs. (D.1), (D.2), (D.3) e (D.5), respectivamente. Observa-se que os valores de κ_k , κ_1 e κ_τ são positivos para o caso de um sinal com modulação QAM de ordem par com fdp uniforme.

Apêndice E

Lista de Publicações

A SEGUIR são mostradas as publicações referentes aos assuntos estudados nesta dissertação.

Publicações em Revistas

C. A. R. Fernandes e J. C. M. Mota, “New Blind Algorithms Based on Modified Constant Modulus Criteria for QAM Constellations”, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3124, pp. 498 - 503, Ago 2004.

Publicações em Congressos

C. A. R. Fernandes e J. C. M. Mota, “Novos Algoritmos Baseados em Estatísticas de Ordem Superior de Decisões Dirigidas para Equalização Autodidata”, *21º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT*, (em Português), Belém, BRA, Set 2004.

C. A. R. Fernandes, J. C. M. Mota e G. Favier, “Decision Directed Algorithms for Blind Equalization Based on Constant Modulus Criteria”, *GRETSI*, (Aceito para Publicação), Louvain-la-Neuve, BEL, Set 2005 .

C. A. R. Fernandes, G. Favier e J. C. M. Mota, “Hammerstein and Volterra Adaptive Blind Equalization for Wiener Channels”, *22º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT*, (Aceito para Publicação), Campinas, BRA, Set 2005.

Bibliografia

- [1] CAVALCANTI, F. R. P. *Equalização adaptativa e autodata em sistemas de comunicações digitais com Ênfase em técnicas preditivas*, Jul 1996. Diss. mestrado, Brazil, Universidade Federal do Ceará.
- [2] LUCKY, R. Automatic equalization for digital communication. *Bell Systems Technical Journal*, v. 44, n. 4, p. 547–588, April 1965.
- [3] SATO, Y. A method for self-recovering equalization. *IEEE Transactions on Communications*, v. 23, n. 6, p. 679–682, June 1975.
- [4] PICCHI, G., PRATI, G. Blind equalization and carrier recovery using a stop-and-go decision directed algorithm. *IEEE Transactions on Communications*, v. 35, n. 9, p. 877–887, 1987.
- [5] SHALVI, O., WEINSTEIN, E. New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems (channels). *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 36, n. 2, p. 312–321, 1990.
- [6] GODARD, D. N. Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication system. *IEEE Transaction on Communications*, v. 28, p. 1867–1875, 1980.
- [7] TREICHLER, J., AGEE, B. A new approach to multipath correction of constant modulus signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 31, n. 4, p. 459–472, 1983.
- [8] HAYKIN, S., (EDITOR). *Unsupervised adaptive filtering*. John Wiley, 2000. v. 2.
- [9] FIJALKOW, I., TOUZNI, A., TREICHLER, J. R. Fractionally spaced equalization using CMA: Robustness to channel noise and lack of disparity. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 45, n. 1, p. 56–66, Jan 1997.
- [10] LEBLANC, J. P., FIJALKOW, I., C. R. JOHNSON, J. CMA fractionally spaced equalizers: Stationary points and stability under iid and temporally correlated sources. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 12, n. 2.
- [11] ZENG, H. H., TONG, L., C. R. JOHNSON, J. Behavior of fractionally-spaced Constant Modulus Algorithm: Mean square error, robustness and local minima. In: Proc. ASILOMAR Conference on Signals, Systems and Computers.
- [12] ENDERS, T. J., ANDERSON, B. D. O., C. R. JOHNSON, J., GREEN, M. On the robustness of fractionally-spaced Constant Modulus criterion to channel order undermodeling: Part I. In: Proc. IEEE Signal Processing Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, 1997, Paris, France. p. 37–40.
- [13] ENDERS, T. J., ANDERSON, B. D. O., C. R. JOHNSON, J., GREEN, M. On the robustness of fractionally-spaced Constant Modulus criterion to channel order

- undermodeling: Part II. In: IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP), 1997, Munich, Germany. p. 3605–3608.
- [14] OH, K. N., CHIN, Y. O. Modified Constant Modulus Algorithm: Blind equalization and carrier phase recovery algorithm. In: Proc. of the 1995 International Conference Communications, 1995. v. 1. p. 498–502.
- [15] DING, Y., SANO, A. Time-domain adaptive predistortion for nonlinear amplifiers. In: IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2004, Montreal, Canada. p. 865–868.
- [16] DING, Y., SUN, L., SANO, A. Adaptive nonlinearity predistortion schemes with application to OFDM system. In: IEEE Conference on Control Applications, 2003, Istanbul, Turquia. p. 1130–1135.
- [17] SANO, A., SUN, L. Identification of Hammerstein-Wiener system with application to compensation for nonlinear distortion. In: Proc. of the 41st SICE, 2002. v. 3. p. 1521–1526.
- [18] KIBANGOU, A. Y. *Modèles de Volterra a complexité reduite: Estimation paramétrique et application a l'egalisation des canaux de communication*, 2005. Tese de doutorado, France, Université de Nice Sophia Antipolis - UFR Sciences.
- [19] GREBLICKI, W. Nonparametric identification of wiener systems by orthogonal series. *IEEE Transactions on Autom. Control*, v. 39, n. 10, p. 2077–2086, 1994.
- [20] LEE, E. A., MESSERSCHMITT, D. G. *Digital communications*. 2nd. ed. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [21] WIENER, N. *The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications*. New York: Wiley, 1949. (Originally issued in Feb. 1942, as classified Nat. Defense Res. Council Rep).
- [22] HAYKIN, S. *Adaptive filter theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1991.
- [23] WIDROW, B., HOFF, M. E. Adaptive switching circuits. In: IRE WESCON Conf. Rec., 1960. p. 96–104, Part 4.
- [24] NAGUMO, J. I., NODA, A. A learning method for system identification. *IEEE Transactions on Autom. Control*, v. AC-12, p. 282–287, 1967.
- [25] ALBERT, A. E., JR., L. S. G. *Stochastic approximation and nonlinear regression*. Cambridge, Mass: MIT Pres, 1967.
- [26] BITMEAD, R. R., ANDERSON, B. D. O. Performance of adaptive estimation algorithms in dependent random environments. *IEEE Transactions on Autom. Control*, v. AC-25, p. 788–794, 1980.
- [27] GOODWIN, C. C., SIN, K. S. *Adaptive filtering, prediction, and control*. Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [28] WIDROW, B., LEHR, M. 30 years of adaptive neural networks: Perceptron, madaline, and backpropagation. *Proc. IEEE, Special Issue on Neural Networks I*, v. 78, Set 1990.
- [29] DOUGLAS, S. C., MENG, T. H.-Y. Normalized data nonlinearities for LMS adaptation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 42, p. 1352–1365, 1994.

- [30] GIANNAKIS, G. B. *Signal processing using higher-order statistics*, 1987. Tese de doutorado, Los Angeles, CA, Dep. Elec. Eng., Univ. Southern California.
- [31] GIANNAKIS, G. B. Cumulants: A powerful tool in signal processing. In: Proc. IEEE. c1987. v. 75. p. 1333–1334.
- [32] GIANNAKIS, G. B., MENDEL, J. M. Identification of non-minimum phase systems using higher-order statistics. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 37, p. 360–377, 1989.
- [33] LII, K.-S., ROSENBLATT, M. Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-gaussian linear processes. *The Annals of Statistics*, v. 10, p. 1195–1208, 1982.
- [34] GARDNER, W. A., (EDITOR). *Cyclostationarity in communications and signal processing*. Inst Elect & Electronic Engineers, 1994.
- [35] GARDNER, W. A. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 8, n. 10, p. 14–36, 1991.
- [36] DA ROCHA, C. A. F. *Técnicas preditivas para equalização autodidata*, Fev 1996. Tese de doutorado, Brazil, FEE/UNICAMP.
- [37] MAZO, J. E. Analysis of decision-directed equalizer convergence. *Bell Systems Technical Journal*, v. 59, n. 10, p. 1857–1876, Dec 1980.
- [38] DING, Z., KENNEDY, R. A., ANDERSON, B. D. O. Local convergence of sato blind equalizer and generalizations under practical constraints. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 39, n. 1, p. 129–144, 1993.
- [39] BENVENISTE, A., GOURSAT, M., RUGET, G. Robust identification of a non-minimum phase system: Blind adjustment of a linear equalizer in data communications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-25, n. 3, p. 385–399, 1980.
- [40] LI, Y., DING, Z. Global convergence of fractionally spaced godard (CMA) adaptive equalizers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 44, p. 818–826, 1996.
- [41] FIJALKOW, I., MANLOVE, C. E., JOHNSON, J. Adaptive fractionally spaced blind CMA equalization: Excess MSE. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 46, n. 1, p. 227–231, Jan 1998.
- [42] SETHARES, W. A., REY, G. A., JR., C. R. J. Approaches to blind equalization of signal with multiple modulus. In: IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP), 1989. p. 972–975.
- [43] AXFORD, R. A. *Refined techniques for blind equalization of Phase Shift Keying (PSK) and Quadrature Amplitude Modulation (QAM) digital communication signals*, 1995. Tese de doutorado, San Diego, University of California.
- [44] AXFORD, R. A., MILSTEIN, L. B., ZEIDLER, J. R. The transversal and lattice multiple modulus algorithms for blind equalization of QAM signals. *IEEE Military Communications Conference (MILCOM)*, San Diego, California, Nov 1995.
- [45] READY, M. J., GOOCH, R. P. Blind equalization based on radius directed adaptation. In: IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP), 1990. p. 1699–1702.

- [46] AXFORD, R. A., ET AL. A dual-mode algorithm for blind equalization of QAM signals: CADAMA. In: Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers, 1996. v. 1. p. 172–176.
- [47] FERNANDES, C. A. R., MOTA, J. C. M. New blind algorithms based on modified constant modulus criteria for QAM constellations. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 3124, p. 498–503, aug 2004.
- [48] TSAI, K. D., YUAN, J. T. A Modified Constant Modulus Algorithm (CMA) for joint blind equalization and carrier recovery in two-dimensional digital communications systems. In: Proc. of the 1995 International Conference Communications, 2003. v. 1. p. 498–502.
- [49] FERNANDES, C. A. R., MOTA, J. C. M. Novos algoritmos baseados em estatísticas de ordem superior de decisões dirigidas para equalização autodidata. In: Proc. of the 21º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT), 2004, Bélem, BRA.
- [50] FERNANDES, C. A. R., MOTA, J. C. M., FAVIER, G. Decision directed algorithms for blind equalization based on Constant Modulus criteria. In: GRETSI, 2005, Louvain-la-Neuve, BEL. Aceito para Publicação.
- [51] FERNANDO, X. N., SESAY, A. B. A Hammerstein type Decision Feedback Equalizer for the fiber Wireless uplink. In: Proc. of the 12th International Conference on Wireless Communications, 2001, Calgary, Can. p. 318–325.
- [52] FERNANDO, X. N., SESAY, A. B. Nonlinear channel estimation using correlation properties of PN sequences. In: Proc. of the Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 2001, Toronto, Can.
- [53] BERSHAD, N., CELKA, P., LAUGHLIN, S. M. Analysis of stochastic gradient identification of Wiener-Hammerstein systems for nonlinearities with hermite polynomial expansions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 49, n. 5, p. 1060–1072, 2001.
- [54] FALCONER, D. D. Adaptive equalization of channel nonlinearities in QAM data transmission. *Bell Systems Technical Journal*, v. 57, n. 7, p. 2589–2611, Sep 1978.
- [55] BENEDETTO, S., BIGLIERI, E. Nonlinear equalization of digital satellite channels. *IEEE J. Selected Areas Communications*, v. 1, n. 1, p. 57–62, 1983.
- [56] KARAM, G., SARI, H. Analysis of predistortion, equalization, and ISI cancellation techniques in digital radio systems with nonlinear transmit amplifiers. *IEEE Transactions on Communications*, v. 37, p. 1245–1253, Dec 1989.
- [57] HEDGE, V., RADHAKRISHNAN, C., KRUSIENSKI, D., JENKINS, W. K. Series-cascade nonlinear adaptive filters. In: Proc. of the 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2002. v. 3. p. 219–222.
- [58] FAVIER, G., KIBANGOU, A., KHOUAJA, A. Nonlinear system modelling by means of Volterra models: approaches for the parametric complexity reduction. In: Invited paper in Symposium Techniques Avancées et Stratégies Innovantes en Modélisation et Commande Robuste des processus industriels, 2004, Martigues, França. the Instrumentation Systems and Automation Society (ISA).
- [59] HACIOGLU, R., WILLIAMSON, G. Identification of Wiener systems using reduced complexity Volterra models. In: 13th IFAC SYSID, 2003, Rotterdam, The Netherlands. p. 365–370.

- [60] KIBANGOU, A. Y., FAVIER, G., HASSANI, M. M. A growing approach for selecting generalized orthogonal basis functions in the context of system modelling. In: Proc. of IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP03), 2003.
- [61] A. KHOUAJA, A. K., FAVIER, G. Third-order Volterra kernels complexity reduction using PARAFAC. In: IEEE-ISCCSP04, 2004, Hammamet, Tunisia.
- [62] GUTIERREZ, A., RYAN, W. E. Performance of adaptive Volterra equalizers on nonlinear satellite channels. In: Proc. of the IEEE International Conference on Communications, 1995, Seattle, USA. v. 1. p. 488–492.
- [63] FERNANDO, X. N., SESAY, A. B. A Hammerstein type equalizer for the Wiener type fiber-wireless channel. In: Proc. of the IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and signal Processing, 2001. v. 2. p. 546–549.
- [64] BILLINGS, S. A., FAKHOURI, S. Y. Identification of systems containing linear dynamic and static nonlinear elements. *Automatica*, v. 18, n. 1, p. 15–26, 1982.
- [65] FOSCHINI, J. G. Equalizing without altering or detecting data. *AT & T Technical Journal*, v. 64, p. 1885–1911, 1985.
- [66] LI, Y., LIU, K. J. R., DING, Z. Length-and cost-dependent local minima of unconstrained blind channel equalizers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 44, n. 11, p. 2726–2735, 1996.
- [67] DING, Z., C. R. JOHNSON, J., KENNEDY, R. A. On the (non)existence of local equilibria of Godard blind equalizers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 40, n. 10, p. 2425–2433, 1992.
- [68] TONG, L., XU, G., KAILATH, T. *Blind channel identification and equalization using spectral correlation measurements, part ii*. Piscataway, NJ: IEEE: W.A. Gardner, Ed., 1994. em Cyclostationarity in Communications and Signal Processing.
- [69] ZENG, H. H., TONG, L., C. R. JOHNSON, J. Relationships between the constant modulus and wiener receivers. *IEEE Transaction on Information Theory*, v. 44, n. 4, p. 1523–1538, 1998.
- [70] ZENG, H. H., TONG, L., C. R. JOHNSON, J. An analysis of constant modulus receivers. *IEEE Transaction on Signal Processing*, v. 47, n. 11, p. 2990–2999, 1999.
- [71] SCHNITER, P., C. R. JOHNSON, J. Sufficient conditions for the local convergence of constant modulus algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 10, p. 2785–2796, Oct 2000.
- [72] FIJALKOW, I., DE VICTORIA, F. L., C. R. JOHNSON, J. Adaptive fractionally spaced blind equalization. In: Signal Processing Workshop, 1994, Yosemite National Park, CA. p. 257–260.
- [73] TOUZNI, A., FIJALKOW, I., TREICHLER, J. R. Fractionally-spaced CMA under channel noise. In: ICAASP, 1996, Cergy-Pontoise, FRA.
- [74] LARIMORE, M. G., TREICHLER, J. R. Convergence behavior of the Constant Modulus Algorithm. In: IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP), 1983, Boston, MA.

- [75] BROOKS, D., LAMBOTHARAN, S., CHAMBERS, J. Optimum delay and mean square error using CMA. In: IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP), 1998, Seattle, USA.
- [76] BENVENISTE, A., METIVIER, M., PRIOURET, P. *Adaptive algorithms and stochastic approximations*. New York: Springer Verlag, 1990.
- [77] DING, Z., KENNEDY, R. A., ANDERSON, B. D. O., JR., C. R. J. Ill-convergence of Godard blind equalizers in data communications systems. *IEEE Transactions on Communications*, v. 39, p. 1313–1327, 1991.
- [78] SUYAMA, R. *Sobre o critério do Módulo Constante para equalização não-supervisionada e suas relações com a teoria de Wiener*, Ago 2003. Diss. mestrado, Brazil, Universidade de Campinas.
- [79] HILAL, K., DUHAMEL, P. A convergence study of the constant modulus algorithm leading to normalized-CMA and a block-normalized-CMA. In: EUSIPCO, 1992. c1992. p. 135–138.
- [80] LIN, J. C., LEE, L. S. A modified blind equalization technique based on a Constant Modulus Algorithm. In: IEEE International Conference on Communications, 1998, Atlanta, GA, USA. v. 1. p. 344–348.
- [81] PICKHOLTZ, R., ELBARBARY, K. The recursive constant modulus algorithm: A new approach for real time array processing. In: Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers, 1993. Number 27th. p. 627–632.
- [82] HILAL, K. *Algorithmes accélérés d’egalisation adaptative autodidacte*, 1993. Tese de doutorado, France, ENST Paris.
- [83] PAPADIAS, C. *Methods for blind equalization and identification of linear channels*, Mar 1995. Tese de doutorado, France, ENST Paris.
- [84] PROAKIS, J. G. *Digital communications*. McGraw-Hill Int. Ed., 1989.