



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

KELTON SILVA BEZERA

INSTABILIDADE E RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES E UM  
TEOREMA DE UNICIDADE,  
EM VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

FORTALEZA

2015

KELTON SILVA BEZERA

INSTABILIDADE E RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES E UM TEOREMA DE  
UNICIDADE  
EM VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

B469i Bezerra, Kelton Silva  
Instabilidade e rigidez de hipersuperfícies e um teorema de unicidade em variedades semi-riem-  
nianas / Kelton Silva Bezerra. – 2015.  
58 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.  
Área de Concentração: Geometria Diferencial  
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Cones mínimos. 2. Métricas quase-Einstein. 3. Espaço de Sitter. I. Título.

---

CDD 516.36

KELTON SILVA BEZERRA

INSTABILIDADE E RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES  
E UM TEOREMA DE UNICIDADE EM VARIEDADES  
SEMI-RIEMANNIANAS.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 06/12/2013.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



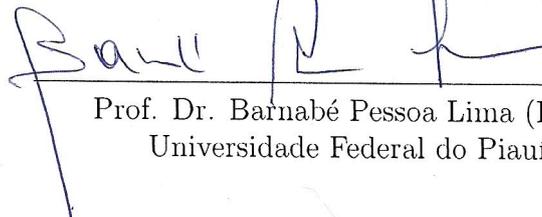
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Examinador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo (Examinador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Gregório Pacelli Feltosa Bessa (Examinador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima (Examinador)  
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Em memória de meu irmão Kelson.

## AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram, direta ou indiretamente, para a conclusão deste trabalho. Desta forma, seguem abaixo meus sinceros agradecimentos.

Primeiramente agradeço à minha família: aos meus pais Joaquim e Clara, à minha irmã Keila e ao meu saudoso irmão Kelson.

Agradeço ao meu orientador Antonio Caminha pelo acompanhamento durante o doutorado e aos professores Ernani Ribeiro e Cícero Aquino por terem participado deste trabalho como co-orientadores.

Durante os cursos de mestrado e doutorado na UFC tive a oportunidade de conviver com muitas pessoas e acabei fazendo várias amizades. Gostaria de destacar os amigos Wilson, Rondinele, Tiarlos, Damião, Disson, Kelson, Rodrigo, Adriano, Eraldo, Leandro, Kristian, Davi, Chaves, João Vitor e Nazareno.

Ao Liduino pelas noites em que suportou nossas discussões jogando uma simples sinuca.

A Andréa Dantas e Jessyca, por toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

A CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Este trabalho aborda três problemas em Geometria Diferencial. Primeiro, obtemos uma extensão, para o caso esférico, de um teorema devido a J. Simons sobre instabilidade de cones mínimos construídos sobre uma certa classe de subvariedades mínimas da esfera Euclidiana. Depois, classificamos as estruturas quasi-Einstein existentes sobre o produto Riemanniano  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Por fim, obtemos um teorema de rigidez para hipersuperfícies tipo-espaço completas do espaço de De Sitter, sob certas condições sobre as curvaturas média e escalar, além de uma condição de integrabilidade.

**Palavras-chave:** Cones Mínimos. Métricas quasi-Einstein. Espaço de De Sitter.

## ABSTRACT

Our aim in this work is threefold. First, we get an extension, to the spherical case, of a theorem due to J. Simons, which concerns instability of minimal cones constructed over a certain class of minimal submanifolds of the Euclidean sphere. Second, we classify the quasi-Einstein structures of the Riemannian product  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Third, we get a rigidity theorem for complete hypersurfaces into the De Sitter space, under certain conditions on the mean and scalar curvatures.

**Keywords:** Minimal Cones. Quasi-Einstein metrics. De Sitter space.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	CONES MÍNIMOS INSTÁVEIS . . . . .	14
2.1	A fórmula de Simons . . . . .	14
2.2	O problema de Sturm-Liouville . . . . .	16
2.3	Folheações geradas por campos conformes fechados . . . . .	18
2.4	Instabilidade de $C_\epsilon M$ . . . . .	25
2.5	Cones mínimos em produtos warped . . . . .	31
3	UM TEOREMA DE RIGIDEZ EM $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . . . . .	36
3.1	O espaço de De Sitter . . . . .	36
3.2	Hipersuperfícies tipo-espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . . . . .	37
3.3	Um teorema de umbilicidade . . . . .	41
4	MÉTRICAS QUASI-EINSTEIN EM $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . . . . .	45
4.1	Generalidades sobre métricas quasi-Einstein . . . . .	45
4.2	Métricas quasi-Einstein em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . . . . .	47
4.3	Prova do Teorema 4.1 . . . . .	51
5	CONCLUSÃO . . . . .	54
	REFERÊNCIAS . . . . .	55

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho divide-se em três partes. No capítulo 2 provamos uma extensão, para o caso esférico, de um resultado de J. Simons sobre instabilidade de uma certa classe de cones no espaço Euclidiano. No capítulo 3 provamos um teorema de unicidade de estruturas quasi-Einstein na variedade  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Já no capítulo 4 provamos um resultado de rigidez para hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de De Sitter.

Em 1968 J. Simons generalizou um resultado devido a Almgren (veja 1968 e 1966), mostrando que o cone sobre qualquer subvariedade mínima, fechada, não totalmente geodésica e de codimensão 1 em  $\mathbb{S}^n$  é instável em relação a variações que fixam seu bordo para  $n \leq 6$ . A limitação sobre a dimensão parece ser ótima pois é possível construir (veja o Teorema 6.1.2 de 1968) em  $\mathbb{S}^7$  um cone sobre um produto de esferas que é localmente estável. Como consequência, J. Simons demonstra uma extensão, em dimensão no máximo 7, da regularidade de soluções em codimensão 1 do problema de Plateu, e uma extensão, em dimensão no máximo 8, da conjectura de Bernstein.

Se  $M^n$  é uma subvariedade imersa em  $\mathbb{S}^{n+k}$ , então o cone Euclidiano  $CM$  sobre  $M$  é a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : M^n \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1} \\ (p, t) &\mapsto tp. \end{aligned} \tag{1}$$

O cone  $\epsilon$ -truncado sobre  $M$ ,  $C_\epsilon M$ , é a mesma aplicação, restrita a  $M \times [\epsilon, 1]$ . Geometricamente, faz-se cada ponto  $p$  de  $M$  percorrer uma porção do segmento de reta que vai da origem de  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  até  $p$ . Segue da Proposição 6.1.1 de (1968) que, se  $M$  é uma subvariedade mínima e fechada de  $\mathbb{S}^{n+k}$ , então  $CM - \{0\}$  é uma subvariedade mínima imersa em  $\mathbb{R}^{n+k+1}$ . Além disso,  $C_\epsilon M$  é uma subvariedade mínima e compacta de  $\mathbb{R}^{n+k+1}$ , com  $\partial(C_\epsilon M) = M \cup M_\epsilon$ , onde  $M_\epsilon$  denota o conjunto dos pontos  $\epsilon p$ , para  $p \in M$ .

A. Caminha estendeu esta noção (veja 2011) da seguinte forma: considere uma variedade Riemanniana  $\overline{M}_c^{n+k+1}$ , com curvatura seccional constante  $c \in \mathbb{R}$ ; suponha que  $\overline{M}$  admite um campo conforme fechado  $\xi \in \Gamma(T\overline{M})$ , com fator conforme  $\psi_\xi$ ; se  $\xi \neq 0$ , sabe-se que a distribuição  $D = [\xi]^\perp$  é integrável, com folhas totalmente umbílicas em  $\overline{M}$ ; sejam  $\Xi^{n+k}$  uma folha de  $D$  e  $\varphi : M^n \rightarrow \Xi^{n+k}$  uma imersão isométrica, onde  $M$  é fechada; se  $\Psi$  denota o fluxo de  $\frac{\xi}{|\xi|}$ , a compacidade de  $M$  garante a existência de um  $\epsilon > 0$  tal que  $\Psi$  está definido em  $[-\epsilon, 0] \times \varphi(M)$ , e a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : M^n \times [-\epsilon, 0] &\rightarrow \overline{M}^{n+k+1} \\ (p, t) &\mapsto \Psi(t, \varphi(p)) \end{aligned} \tag{2}$$

é também uma imersão. Munindo  $M^n \times [-\epsilon, 0]$  com a métrica induzida por  $\Phi$ , tornamos  $\Phi$  em uma imersão isométrica tal que  $\Phi|_{M^n \times \{0\}} = \varphi$ ; a variedade Riemanniana  $M^n \times [-\epsilon, 0]$ , munida com a métrica induzida por  $\Phi$ , será chamada o *cone  $\epsilon$ -truncado sobre  $M$  na direção*

de  $\xi$ , e denotada por  $C_\epsilon M$ .

No caso em que  $\overline{M}_c^{n+k+1}$  é um produto warped  $I \times_f F^{n+k}$ , temos um campo conforme fechado natural sobre  $\overline{M}$ , dado por  $\xi = (f \circ \pi_I) \partial_t$ , com fator conforme  $\psi_\xi = f' \circ \pi_I$  (cf. 1983, Proposição 7.35). Supondo  $f(0) = 1$ , temos que  $\Xi = \{0\} \times F$ , munido com a métrica induzida por  $\overline{M}$ , é uma folha da distribuição normal a  $\xi$  que é isométrica a  $F$ . Assim, podemos identificar uma imersão  $\varphi : M^n \rightarrow F^{n+k}$  com a imersão  $\tilde{\varphi}(p) = (0, \varphi(p))$ , de  $M^n$  para  $\Xi = \{0\} \times F$ . Uma vez que o fluxo de  $\xi/|\xi|$  é dado por  $\Psi(t, (x, p)) = (t+x, p)$ , temos  $\Phi(p, t) = \Psi(t, \tilde{\varphi}(p)) = (t, \varphi(p))$ , isto é, o cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon M$  é dado pela imersão

$$\begin{aligned} \Phi : M^n \times [-\epsilon, 0] &\rightarrow I \times_f F^{n+k} \\ (p, t) &\mapsto (t, \varphi(p)). \end{aligned} \quad (3)$$

Quando  $\overline{M} = (-1, \infty) \times_{t+1} \mathbb{S}^{n+1}$  a aplicação  $(t, p) \mapsto (t+1)p$  define uma isometria entre  $\overline{M}$  e  $\approx \mathbb{R}^{n+2} - \{0\}$  e, daí, o cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon M$  sobre uma subvariedade  $M^n$  fechada e imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : M^n \times [-\epsilon, 0] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+2} \\ (p, t) &\mapsto (t+1)p. \end{aligned} \quad (4)$$

No Teorema 6.1.1 de (1968) é demonstrado que, se  $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$  é mínima, fechada e não totalmente geodésica, então, para  $\epsilon > 0$  conveniente, o cone  $C_\epsilon M$  dado por (4) é instável em relação ao seu bordo, desde que  $n \leq 5$ . Isto significa que  $CM$  não minimiza área para variações que preservam seu bordo.

Agora, vamos considerar a esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$  como um equador de  $\mathbb{S}^{n+2}$  em relação ao pólo norte  $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{n+2}$ . Nesse contexto, vamos identificar o ponto  $x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1}$  com o ponto  $x = (x_1, \dots, x_{n+2}, 0) \in \mathbb{S}^{n+2}$ . Se tomarmos  $\overline{M} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} \mathbb{S}^{n+1}$ , a aplicação  $(t, x) \mapsto (\cos t)x + (\sin t)N$  define uma isometria entre  $\overline{M}$  e  $\mathbb{S}^{n+2} - \{\pm N\}$ . Daí, o cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon M \subset \mathbb{S}^{n+2}$ , construído sobre uma hipersuperfície mínima e fechada  $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$  é dado por

$$\begin{aligned} \Phi : M^n \times [-\epsilon, 0] &\rightarrow \mathbb{S}^{n+2} \\ (x, t) &\mapsto (\cos t)x + (\sin t)N. \end{aligned} \quad (5)$$

A aplicação (5) é uma extensão natural, para o caso esférico, dos cones definidos em (1). No Capítulo 2, provamos o resultado a seguir

**Teorema 1.1** *Se  $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$  é um superfície mínima, fechada e não totalmente geodésica, então, para  $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$  suficientemente próximo de  $\frac{\pi}{2}$ , o cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon \Sigma \subset \mathbb{S}^4$  (definido por (5)) é instável em relação ao seu bordo.*

Outro problema abordado neste trabalho é o estudo de métricas quasi-Einstein. Nos últimos anos, as métricas tipo Einstein e suas generalizações têm sido amplamente estudadas; como exemplos temos os sólitons de Ricci e as métricas quasi-Einstein. Os

sólitons de Ricci são soluções estacionárias do fluxo de Ricci; para mais detalhes, recomendamos o “survey” de (Cao, 2009) e as referências lá contidas. Por outro lado, uma das motivações para o estudo de métricas quasi-Einstein é sua relação direta com métricas Einstein que geram uma estrutura de produto warped para a variedade subjacente. (Para mais detalhes veja (2012) ou (2003)).

Em (2007), Besse propõe que se determine sob quais condições um produto warped  $M^{n+m} = B^n \times_u F^m$  satisfaz a equação de Einstein  $\text{Ric}_g = \lambda g$  para uma certa constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , onde  $g = g_B + u^2 g_F$ . Mais precisamente, o autor escreveu:

“*Não obstante, produtos warped dão novos exemplos de variedades Einstein completas, e as equações de Einstein são bem interessantes*”. [veja o capítulo 9 da página 265]

Se  $X, Y, V$  e  $W$  são campos de vetores tangentes a  $M$ , com  $X$  e  $Y$  horizontais e  $U$  e  $V$  verticais, sabe-se (veja o corolário 43 de 1983) que

$$\text{Ric}_g(X, Y) = \text{Ric}^B(X, Y) - \frac{m}{u} \text{Hess } u(X, Y),$$

$$\text{Ric}_g(X, V) = 0,$$

e

$$\text{Ric}_g(V, W) = \text{Ric}^F(V, W) - g(V, W)u^\#,$$

onde

$$u^\# = u^{-1} \Delta u + \frac{m-1}{u^2} g_B(\nabla u, \nabla u).$$

Uma consequência é que temos  $\text{Ric}_g = \lambda g$  se, e somente se, a base  $B$  satisfaz

$$\text{Ric}^B - \frac{m}{u} \text{Hess } u = \lambda g_B \tag{6}$$

e a fibra  $F$  é Einstein, com constante de Einstein

$$\mu = u \Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2. \tag{7}$$

Um fato interessante é que a equação (6) implica a equação (7) (veja, por exemplo, 2003). Assim, se queremos saber quando um produto warped é Einstein, é suficiente conhecermos as variedades que satisfazem a equação (6), as quais são conhecidas como variedades *m-quasi-Einstein*.

Muitos autores têm estudado as métricas *m-quasi-Einstein*. Em (1997), Qian prova que, se uma variedade Riemanniana  $M$  satisfaz a equação (6) com  $\lambda > 0$ , então  $M$  é compacta. A recíproca deste fato vale desde que a métrica *m-quasi-Einstein* sobre

$M$  não seja *trivial*, isto é, desde que  $u$  não seja constante. De fato, é provado em (Kim, 2003) que, se  $M$  é compacta e satisfaz (6) com  $\lambda \leq 0$ , então  $u$  é constante.

As variedades de Einstein são exemplos triviais (faça  $u$  constante em (6)) de métricas quasi-Einstein. Por outro lado, se considerarmos o modelo warped  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$  do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  e escolhermos  $u(t, x) = e^t$ , então

$$\text{Ric} - \frac{m}{u} \text{Hess } u = -(m + n - 1)g,$$

o que nos dá um exemplo não trivial de métrica  $m$ -quasi-Einstein em  $\mathbb{H}^n$ .

No Capítulo 3, provamos o seguinte resultado de unicidade de estruturas quasi-Einstein em  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ :

**Teorema 1.2** *Suponha que  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, u, \lambda)$  é  $m$ -quasi-Einstein. Então, temos  $u(x, t) = e^{\pm \alpha t}$  ou  $u(x, t) = \cosh(\alpha t + a)$  e  $\lambda = -(n - 1)$ , onde  $\alpha = \sqrt{(n - 1)m^{-1}}$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ , e  $a \in \mathbb{R}$ .*

Por fim, no Capítulo 4 nós abordamos o problema de rigidez de hipersuperfícies completas e não compactas em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Em (1977), Goddard conjecturou que hipersuperfícies completas tipo-espaço do espaço de De Sitter, com curvatura média constante, seriam totalmente umbílicas. Desde então, muitos autores vêm estudando o problema. Em (1987), Akutagawa mostrou que a conjectura é verdadeira se  $H^2 < 4(n - 1)/n^2$  quando  $n > 2$ , ou se  $H^2 \leq 1$  quando  $n = 2$ . No caso compacto, em (1988), Montiel provou ser verdadeira a conjectura sem limitação sobre a curvatura média constante  $H$ . Para o caso não compacto, Aquino e H. de Lima provaram recentemente, em (2014), que as únicas hipersuperfícies completas, de curvatura média constante e imersas no espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , com imagem pela aplicação hiperbólica de Gauss contida em uma hipersuperfície totalmente umbílica de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , são as totalmente umbílicas.

Outros autores estudaram o mesmo problema para hipersuperfícies de espaços que não sejam, necessariamente,  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Por exemplo, no Teorema 1.1 de (Camargo, 2011), os autores mostraram que, se  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço, completa, conexa, imersa isometricamente no *Steady State Space*  $\mathcal{H}^{n+1}$  e limitada a partir do infinito, então  $\Sigma^n$  é um hiperplano de  $\mathcal{H}^{n+1}$ , desde que a curvatura média (não necessariamente constante)  $H$  seja menor ou igual a 1 e a função altura  $h$  de  $\Sigma^n$  tenha norma do gradiente integrável.

Ainda em relação ao caso não compacto, na seção 3.3 nós provamos um resultado de rigidez para hipersuperfícies completas de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ ,  $n \geq 3$ , para o caso em que a curvatura média  $H$  é limitada, a curvatura escalar é constante e menor que 1 e supondo, ainda, uma certa condição de integrabilidade. Mais precisamente, provamos o teorema a seguir.

**Teorema 1.3** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ ,  $n \geq 3$ , uma hipersuperfície tipo-espaço completa, conexa e imersa isometricamente em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , com curvatura média  $H$  limitada e curvatura*

escalar constante  $R < 1$ . Suponha que, para um certo vetor não nulo  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , tenhamos  $|a^T| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$  e que ocorra um dos seguintes casos:

- (i)  $a$  é tipo-tempo;
- (ii)  $a$  é tipo-luz e a imagem  $N(\Sigma^n)$  da aplicação hiperbólica de Gauss está contida em uma horoesfera determinada por  $a$ ;
- (iii)  $a$  é tipo-espaço e a imagem  $N(\Sigma^n)$  da aplicação hiperbólica de Gauss está no interior de um hemisfério fechado de  $\mathbb{H}^{n+1}$  determinado por  $a$ .

Então,  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica.

## 2 CONES MÍNIMOS INSTÁVEIS

Neste capítulo, estudamos uma certa classe de *cones* mínimos com bordo em uma forma espacial Riemanniana  $\overline{M}$  que admite um campo conforme fechado e não trivial. A distribuição normal a este campo é involutiva e, portanto, integrável. É possível, então, folhear  $\overline{M}$  por hipersuperfícies totalmente umbílicas. Nossos cones são construídos sobre hipersuperfícies mínimas, fechadas e não totalmente geodésicas de folhas dessa distribuição. Isto define uma versão mais geral dos cones usados por Simons na Seção 6 de (1968) e permite obter uma extensão, para o caso  $\Sigma^2 \subset \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^4$ , do Teorema 6.1.1 de (1968), o qual afirma que, se  $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$  é uma hipersuperfície mínima, fechada e não totalmente geodésica, então o *cone*  $CM \subset \mathbb{R}^{n+2}$  é instável se  $n \leq 5$ .

Na Seção 2.1, relembremos a conhecida *fórmula de Simons*, que fornece uma expressão para o traço-Laplaciano da segunda forma fundamental de uma imersão mínima  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ . Uma consequência imediata, para o caso em que  $\overline{M}$  tem curvatura constante e a codimensão é 1, é colecionada no corolário 2.1. Na Seção 2.2, relembremos alguns fatos básicos da teoria de Sturm-Liouville; em particular, a caracterização variacional de  $\lambda_1$  descrita no Teorema 2.2 será bastante útil. As Seções 2.3 e 2.4 reúnem uma coleção de resultados técnicos que, na Seção 2.5, serão utilizados para obtermos o principal resultado deste capítulo, o Teorema 2.6.

### 2.1 A fórmula de Simons

Nesta seção,  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+k}$  denotam variedades Riemannianas de dimensões  $n$  e  $n+k$ , respectivamente, com conexões de Levi-Civita  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$ , também respectivamente. Aqui,  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$  é uma imersão isométrica; denotamos por  $TM^\perp$  o fibrado normal de  $f$ , por  $S(M)$  o fibrado cuja fibra em cada ponto  $p \in M$  é o espaço das transformações lineares simétricas de  $T_pM$  em  $T_pM$  e por  $H(M) = \text{Hom}(TM^\perp, S(M))$  o fibrado de homomorfismos de  $TM^\perp$  em  $S(M)$ .

A segunda forma fundamental da imersão  $f$  é a seção suave  $A \in \Gamma(H(M))$  dada por

$$A^\eta(v) = -(\overline{\nabla}_v N)^T, \quad (8)$$

onde  $\eta \in (T_pM)^\perp$ ,  $v \in T_pM$ ,  $p \in M$  e  $N$  é uma extensão qualquer de  $\eta$  a um campo em  $\overline{M}$ , normal a  $f(M)$  em uma vizinhança de  $f(p)$ .

Podemos ver  $A$  como uma forma bilinear simétrica sobre  $T_pM$ , com valores em  $(T_pM)^\perp$ . Mais precisamente, para  $u, v \in T_pM$ , definimos  $B(u, v) \in (T_pM)^\perp$  por

$$\langle B(u, v), \eta \rangle = \langle A^\eta(u), v \rangle, \quad (9)$$

para todo  $\eta \in (T_pM)^\perp$ .

Considere, agora, a transposta  ${}^tA$  de  $A$ , isto é, a seção  ${}^tA \in \Gamma(\text{Hom}(S(M), TM^\perp))$ , dada por  $\langle {}^tA(s), \eta \rangle = \langle A^\eta, s \rangle$ , onde  $s \in S_pM$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ . Então, definimos  $\bar{A} \in \Gamma(\text{Hom}TM^\perp, TM^\perp)$  por

$$\bar{A} = {}^tA \circ A. \quad (10)$$

Além disso, se  $(\eta_1, \dots, \eta_k)$  é um referencial ortonormal local em  $TM^\perp$ , definimos  $\underline{A} \in \Gamma(\text{Hom}(S(M), S(M)))$  pondo, para cada  $s \in S_pM$ ,

$$\underline{A}(s) = \sum_{i=1}^k [A^{\eta_i}, [A^{\eta_i}, s]]. \quad (11)$$

Um cálculo direto mostra que esta definição independe do referencial ortonormal  $(\eta_1, \dots, \eta_k)$  escolhido.

A seguinte proposição pode ser encontrada em (1968).

**Proposição 2.1** *Em cada ponto  $p \in M$ ,  $\bar{A}$  e  $\underline{A}$  são operadores simétricos, positivos e semidefinidos.*

Vamos definir, agora, duas novas seções em  $\Gamma(H(M))$ . Para tanto, fixe uma base ortonormal  $(e_1, \dots, e_n)$  em  $T_pM$ . Para  $u, v \in T_pM$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ , faça

$$\langle \bar{R}'^\eta(u), v \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle (\bar{\nabla}_u \bar{R})(e_i, v)e_i, \eta \rangle + \langle (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{R})(e_i, u)v, \eta \rangle), \quad (12)$$

onde  $\bar{R}$  é o tensor de curvatura de  $\bar{M}$ , dado por

$$\bar{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z,$$

para cada  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\bar{M})$ . Prova-se que  $\bar{R}'$  é bem definido (i. e., independe da escolha do referencial  $(e_1, \dots, e_n)$ ), é linear em  $\eta$ ,  $u$  e  $v$  e é simétrico em  $u$  e  $v$ .

Definamos, ainda,

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(A)^\eta(u), v \rangle &= \sum_{i=1}^n \{2\langle \bar{R}(e_i, v)B(u, e_i), \eta \rangle + 2\langle \bar{R}(e_i, u)B(v, e_i), \eta \rangle \\ &\quad - \langle A^\eta(u), \bar{R}(e_i, v)e_i \rangle - \langle A^\eta(v), \bar{R}(e_i, u)e_i \rangle \\ &\quad + \langle \bar{R}(e_i, B(u, v))e_i, \eta \rangle - 2\langle A^\eta(e_i), \bar{R}(e_i, u)v \rangle\}. \end{aligned} \quad (13)$$

No que segue,  $\nabla^2$  é o traço-Laplaciano (veja (Caminha,2010)). Em (Simons, 1968), Simons demonstra o seguinte teorema:

**Teorema 2.1 (Fórmula de Simons)** *Seja  $A$  a segunda forma fundamental de uma imersão mínima  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ . Então,*

$$\nabla^2 A = -A \circ \bar{A} - \underline{A} \circ A + \bar{R}(A) + \bar{R}'. \quad (14)$$

O seguinte corolário, para o caso em que  $\overline{M}$  tem curvatura seccional constante e a codimensão é um, nos será útil:

**Corolário 2.1** *Se  $f : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  é uma imersão mínima, então*

$$\nabla^2 A = -\|A\|^2 A + cnA. \quad (15)$$

**Demonstração:** Fixe  $p \in M$  e uma base ortonormal  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $T_p M$ , formada por autovetores de  $A^\eta$ , onde  $\eta \in (T_p M)^\perp$  é unitário. Isto significa que existem números reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tais que  $A^\eta(e_i) = \lambda_i e_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Se  $\nu = \alpha\eta$ , então

$$\begin{aligned} A \circ \overline{A}(\nu) &= A({}^t A(A^\nu)) \\ &= A(\langle {}^t A(A^\nu), \eta \rangle \eta) \\ &= A(\langle A^\eta, A^\nu \rangle \eta) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \langle A^\eta(e_i), A^\nu(e_i) \rangle \right) A^\eta \\ &= \alpha \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) A^\eta \\ &= \|A\|^2 A^\nu. \end{aligned}$$

Também, temos que  $\underline{A} \circ A(\nu) = \underline{A}(A^\nu) = [A^\eta, [A^\eta, A^\nu]] = 0$ , pois  $\nu = \alpha\eta$ .

Usando que o tensor curvatura de  $\overline{M}$  é dado por

$$\langle \overline{R}(X, Y)W, Z \rangle = c(\langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) \quad (16)$$

e que a imersão  $f$  é mínima, isto é, que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ , segue de um cálculo direto que  $\langle \overline{R}(A)^\nu(u), v \rangle = \langle cnA^\nu(u), v \rangle$ , para todos  $u, v \in T_p M$ . Assim,  $\overline{R}(A) = cnA$ . Usando estes fatos, é fácil concluir que  $\overline{R}' = 0$ , o que conclui a demonstração.

Para mais detalhes sobre os resultados desta seção nós recomendamos a leitura do parágrafo 4 de (Simons, 1968).

## 2.2 O problema de Sturm-Liouville

Nesta seção, relembremos alguns fatos básicos da teoria de Sturm-Liouville que serão usados no primeiro capítulo desta tese.

Chamamos *equação de Sturm-Liouville* uma equação diferencial ordinária da forma

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) + q(x))u = 0, \quad (17)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  e as funções  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $\rho(x)$  são de classe  $C^1$  em um intervalo da reta,

com  $p(x)$  e  $\rho(x)$  positivas. Um problema de Sturm-Liouville regular consiste em uma equação do tipo (17) em um intervalo  $[a, b]$ , juntamente com as condições de contorno  $u(a) = u(b) = 0$ . Os valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  para os quais o problema admite solução não trivial são ditos os *autovalores* do problema. Já as soluções não triviais correspondentes a um autovalor  $\lambda$  são ditas as *autofunções* do problema, associadas a  $\lambda$ .

Vamos considerar o espaço  $C^0[a, b]$  das funções contínuas em  $[a, b]$ , munido com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx. \quad (18)$$

A norma canônica associada é denotada por  $\|f\|_2$ , para  $f \in C^0[a, b]$ . Um conjunto  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$  é dito *ortonormal* se  $\|f_\alpha\|_2 = 1$  e  $\langle f_\alpha, f_\beta \rangle = 0$ , para todos  $\alpha, \beta \in I$  distintos.

A seguinte proposição pode ser encontrada em (Sotomayor, 1979) (veja a Proposição 7 do Capítulo 4 e a Observação 8, logo em seguida).

**Proposição 2.2** *Considere o problema de Sturm-Liouville regular*

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) + q(x))u = 0 \quad (19)$$

no intervalo  $[a, b]$ , com  $u(a) = u(b) = 0$ . Então, podemos afirmar que:

- (i) Os autovalores formam uma seqüência  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$  que tende para  $+\infty$ ;
- (ii) Existe uma base ortonormal  $(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$  de  $C^0[a, b]$ , tal que  $f_i$  é autofunção associada a  $\lambda_i$ , para  $i \geq 1$ ;
- (c) Se  $f \in C^2[a, b]$  satisfaz as condições de contorno do problema, então a expansão de  $f$  na base dada em (ii),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n, \quad (20)$$

converge uniformemente para  $f$  em  $[a, b]$ .

Para uma função  $u \in C^1[a, b]$  satisfazendo as condições de contorno  $u(a) = u(b) = 0$  do problema de Sturm-Liouville regular dado pela equação (17), definimos o quociente de Rayleigh de  $u$  por

$$RQ[u] = \frac{\int_a^b (p(x)[u'(x)]^2 - q(x)u^2(x))dx}{\int_a^b u^2(x)\rho(x)}. \quad (21)$$

A caracterização variacional a seguir para  $\lambda_1$  pode ser encontrada em (Courant, 1966).

**Teorema 2.2** *Para um problema de Sturm-Liouville regular com condições de contorno  $u(a) = u(b) = 0$ , o menor autovalor  $\lambda_1$  satisfaz*

$$\lambda_1 = \min_u RQ[u], \quad (22)$$

onde  $u \in C^1[a, b]$  é qualquer função satisfazendo as condições de contorno. Além disso, o mínimo é atingido somente quando  $u$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_1$ .

### 2.3 Folheações geradas por campos conformes fechados

No que segue,  $\overline{M}_c^{n+k+1}$  é uma variedade Riemanianna  $(n + k + 1)$ -dimensional, com curvatura seccional constante  $c$ . Supomos  $\overline{M}$  munida de um campo conforme fechado e não nulo  $\xi$ , isto é, tal que  $\overline{\nabla}_X \xi = \psi_X \xi$ , para todo  $X \in \mathcal{X}(\overline{M})$ , onde  $\psi_{x_i} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, dita o *fator conforme* de  $\xi$ , e  $\overline{\nabla}$  denota a conexão de Levi-Civita de  $\overline{M}$ . Em particular, é imediato verificar (cf. 2011) que a distribuição  $\{\xi^\perp\}$  é integrável, com folhas totalmente umbílicas em  $\overline{M}$ . Sejam  $\Xi^{n+k}$  uma folha de tal distribuição e  $\varphi : M^n \rightarrow \Xi^{n+k}$  uma imersão isométrica, onde  $M^n$  é uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional fechada. Se  $\Psi(t, \cdot)$  denota o fluxo de  $\xi/\|\xi\|$ , a compacidade de  $M$  garante que podemos escolher  $\epsilon > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \Phi & : M^n \times [-\epsilon, 0] \rightarrow \overline{M}^{n+k+1} \\ (p, t) & \mapsto \Psi(t, \varphi(p)), \end{aligned} \tag{23}$$

é uma imersão. O **cone  $\epsilon$ -truncado sobre  $M$  na direção de  $\xi$** , o qual será denotado por  $C_\epsilon M$ , é a variedade com bordo  $M^n \times [-\epsilon, 0]$ , munida da métrica induzida por  $\Phi$ . Observamos que  $C_\epsilon M$  é uma subvariedade compacta imersa em  $\overline{M}_c^{n+k+1}$  e  $\partial(C_\epsilon M) = M \cup M_\epsilon$ , onde  $M_\epsilon = \{\Psi(-\epsilon, \varphi(p)); p \in M\}$ . Por vezes, fixado o campo  $\xi$ , nos referiremos apenas ao cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon M$ .

Denotamos por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $C_\epsilon M$ . Além disso, frequentemente nos referiremos à função diferenciável  $\lambda : M \times [-\epsilon, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\lambda(q, t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\psi_\xi}{\|\xi\|}(\Psi(s, \varphi(q))) ds\right).$$

A proposição a seguir relaciona a norma da segunda forma fundamental de  $C_\epsilon M$  em pontos distintos ao longo de uma mesma geratriz.

**Proposição 2.3** *Se  $A(q, t)$  denota a segunda forma fundamental de  $C_\epsilon M$  no ponto  $(q, t)$  e  $A(q)$  denota a segunda forma fundamental de  $M$  no ponto  $q$ , então*

$$\|A^N(q, t)\| = \frac{1}{\lambda(q, t)} \|A^\eta(q)\|,$$

onde  $\eta$  é a normal a  $T_q M$  em  $T_q \Xi$  e  $N$  denota o transporte paralelo de  $\eta$  ao longo da curva integral de  $\xi/\|\xi\|$  que passa por  $q$ .

**Demonstração:** Fixe um ponto  $p \in M$  e, em uma vizinhança  $\Omega \subset M$  de  $p$ , um referencial ortonormal  $(e_1, \dots, e_n, \eta)$ , com  $e_1, \dots, e_n$  tangentes a  $M^n$  e  $\eta$  normal a  $M^n$  em  $\Xi^{n+k}$ . Podemos supor que  $A^\eta(e_i(p)) = \lambda_i e_i(p)$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Sejam  $E_1, \dots, E_n, N$  os campos sobre  $\Phi(\Omega \times (-\epsilon, 0])$  obtidos a partir dos  $e_i$ 's e de  $\eta$  por transporte paralelo ao longo das curvas integrais de  $\frac{\xi}{\|\xi\|}$  que intersectam  $\Omega$ . Tal paralelismo fornece

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_k \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\frac{\xi}{\|\xi\|}} \bar{\nabla}_{E_i} N, E_k \rangle \\
&= \frac{1}{\|\xi\|} [\langle \bar{R}(\xi, E_i) N, E_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{\xi} N, E_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\xi, E_i]} N, E_k \rangle] \\
&= \frac{1}{\|\xi\|} [\langle \bar{R}(\xi, E_i) N, E_k \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{E_i} \xi} N, E_k \rangle] \\
&= -\frac{\psi_{\xi}}{\|\xi\|} \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_k \rangle,
\end{aligned} \tag{24}$$

onde  $\bar{R}$  denota o operador de curvatura de  $\bar{M}$  e utilizamos, na última igualdade, o fato de que  $\bar{M}$  tem curvatura seccional constante. Além disso, se  $D$  é a conexão de Levi-Civita de  $\Xi^{n+k}$ , então

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_k \rangle_{(p,0)} = \langle D_{e_i} \eta, e_k \rangle_p = -\langle A^{\eta}(e_i), e_k \rangle_p = -\lambda_i \delta_{ik}. \tag{25}$$

Resolvendo o problema de Cauchy formado por 24 e 25, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_i \rangle_{(p,t)} = -\lambda_i \exp \left( -\int_0^t \frac{\psi_{\xi}}{|\xi|} (\varphi(p), s) ds \right) = \frac{-\lambda_i}{\lambda(p, t)}$$

e, para  $k \neq i$ ,

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_k \rangle_{(p,t)} = 0,$$

para todo  $t \in (-\epsilon, 0]$ .

Como  $\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \xi \rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \xi \rangle = -\psi_{\xi} \langle N, E_i \rangle = 0$ , segue que, no ponto  $(p, t)$

$$\begin{aligned}
A^N(E_i) &= -(\bar{\nabla}_{E_i} N)^{\top} \\
&= -\sum_{k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_k \rangle E_k - \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle \frac{\xi}{\|\xi\|} \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda} E_i,
\end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Como  $A^N(\frac{\xi}{\|\xi\|}) = -(\bar{\nabla}_{\frac{\xi}{\|\xi\|}} N)^{\top} = 0$ , segue que

$$\|A^N(p, t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_i}{\lambda(p, t)} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2(p, t)} \|A^{\eta}(p)\|^2,$$

o que conclui a demonstração.

**Corolário 2.2** *O cone  $C_\epsilon M$  é mínimo em  $\overline{M}$  se, e somente se,  $M$  é mínima em  $\Xi$ .*

**Demonstração:** Segue dos cálculos acima que  $\|H(p, t)\| = \frac{1}{\lambda}\|H(p)\|$ , onde  $H(p, t)$  é o vetor curvatura média de  $C_\epsilon M$  em  $(p, t)$  e  $H(p)$  é o vetor curvatura média de  $M$  em  $p$ . Isto prova o corolário.

O seguinte lema técnico é uma versão adaptada da prova do Teorema 4.1 de (Caminha, 2011) e será útil na demonstração da próxima proposição.

**Lema 2.1** *Fixe  $p \in M$  e, em uma vizinhança  $\Omega$  de  $p$  em  $M$ , um referencial ortonormal  $(e_1, \dots, e_n)$ , geodésico em  $p$ . Se  $E_1, \dots, E_n$  são os campos sobre  $\Phi(\Omega \times (-\epsilon, 0])$  obtidos dos  $e_i$ 's por transporte paralelo ao longo das curvas integrais de  $\frac{\xi}{\|\xi\|}$  que intersectam  $\Omega$ , então*

$$\nabla_{E_i} E_i = -\frac{\psi_\xi}{\|\xi\|^2} \xi \quad (26)$$

no ponto  $(p, t)$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

**Demonstração:** Escolha campos  $(\eta_1, \dots, \eta_k)$  sobre  $\Omega$ , tais que  $(e_1, \dots, e_n, \eta_1, \dots, \eta_k)$  é um referencial ortonormal adaptado à imersão  $\varphi$ . Se  $E_1, \dots, E_n, N_1, \dots, N_k$  são, respectivamente, os campos sobre  $\Phi(\Omega \times (-\epsilon, 0])$ , obtidos dos  $e_i$ 's e dos  $\eta_\beta$ 's por transporte paralelo ao longo das curvas integrais de  $\frac{\xi}{\|\xi\|}$  que intersectam  $\Omega$ , segue que  $(E_1, \dots, E_n, \frac{\xi}{\|\xi\|}, N_1, \dots, N_k)$  é um referencial ortonormal sobre  $\Phi(\Omega \times (-\epsilon, 0])$  adaptado à imersão (23).

Vamos calcular  $\overline{\nabla}_{E_i} E_i$  e, depois, tomar sua componente tangente ao longo do cone  $C_\epsilon M$ . Primeiro, note que

$$\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, \xi \rangle = -\langle E_i, \overline{\nabla}_{E_i} \xi \rangle = -\psi_\xi. \quad (27)$$

Denotando, uma vez mais, por  $\overline{R}$  o operador curvatura de  $\overline{M}$ , segue do paralelismo dos  $E_i$ 's que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle &= \frac{1}{\|\xi\|} \langle \overline{\nabla}_\xi \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle \\ &= \frac{1}{\|\xi\|} \langle \overline{R}(\xi, E_i) E_i + \overline{\nabla}_{E_i} \overline{\nabla}_\xi E_i + \overline{\nabla}_{[\xi, E_i]} E_i, E_l \rangle \\ &= \frac{1}{\|\xi\|} (\langle \overline{R}(\xi, E_i) E_i, E_l \rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_{E_i} \xi} E_i, E_l \rangle) \\ &= -\frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

onde usamos, novamente, o fato de  $\overline{M}$  ter curvatura seccional constante.

Denotando por  $D$  e  $\nabla^M$  as conexões Riemaniannas de  $\Xi^{n+k}$  e  $M^n$ , respectivamente, segue que

$$\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle_p = \langle D_{e_i} e_i, e_l \rangle_p = \langle \nabla_{e_i}^M e_i, e_l \rangle_p = 0, \quad (29)$$

uma vez que  $(e_1, \dots, e_n)$  é geodésico em  $p$  (sobre  $M$ ). Então, resolvendo o problema de Cauchy formado por (28) e (29), obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_i \rangle_{(p,t)} = 0, \quad (30)$$

para  $-\epsilon \leq t \leq 0$ .

De forma análoga a (28), obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle = -\frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle. \quad (31)$$

Por outro lado, se  $A_\beta : T_p M \rightarrow T_p M$  denota o operador de Weingarten de  $\varphi$  na direção  $\eta_\beta$  e se escrevemos  $A_\beta e_i = \sum_{j=1}^n h_{ij}^\beta e_j$ , então

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle_p = \langle D_{e_i} e_i, \eta_\beta \rangle_p = \langle A_\beta e_i, e_i \rangle = h_{ii}^\beta. \quad (32)$$

Resolvendo o problema de Cauchy formado por (31) e (32), obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle_{(p,t)} = h_{ii}^\beta \exp\left(-\int_0^t \frac{\psi_\xi}{\|\xi\|}(s) ds\right) = \frac{h_{ii}^\beta}{\lambda(p,t)}. \quad (33)$$

Além disso, um cálculo simples mostra que

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle = -\frac{\psi_\xi}{\|\xi\|}. \quad (34)$$

Segue finalmente de (30), (33) e (34) que, em  $(p, t)$ ,

$$\bar{\nabla}_{E_i} E_i = -\frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} \frac{\xi}{\|\xi\|} + \frac{1}{\lambda(p,t)} \sum_{\beta=1}^k h_{ii}^\beta N_\beta \quad (35)$$

e, daí, obtemos imediatamente (26). Isto conclui a demonstração.

Dada uma função  $F \in C^\infty(C_\epsilon M)$ , para cada  $t \in [-\epsilon, 0]$  definimos a função  $F_t \in C^\infty(M)$  pondo  $F_t(p) = F(p, t)$ , para  $p \in M$ . O seguinte lema relaciona os Laplacianos de  $F$  e  $F_t$ .

**Proposição 2.4** *Para toda  $F \in C^\infty(C_\epsilon M)$ , tem-se*

$$\begin{aligned} \Delta F(p, t) &= \frac{1}{\lambda^2(p, t)} \left[ \Delta F_t(p) - \frac{1}{\lambda(p, t)} \langle \text{grad}(F_t), \text{grad}(\lambda_t) \rangle_p \right] \\ &\quad + n \frac{\lambda'(p, t)}{\lambda(p, t)} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

onde  $\lambda'$  denota  $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$  e  $\text{grad}$  denota o gradiente em  $M$ .

**Demonstração:** Fixe um ponto  $p \in M$  e, em uma vizinhança  $\Omega \subset M$  de  $p$ , um refe-

referencial ortonormal  $(e_1, \dots, e_n, \eta_1, \dots, \eta_k)$  adaptado a  $\varphi$ , tal que  $(e_1, \dots, e_n)$  é geodésico em  $p$ . Assim como na proposição 2.3, estenda paralelamente tal referencial para obter, respectivamente, campos  $E_1, \dots, E_n, N_1, \dots, N_k$  ao longo de  $\Phi(\Omega \times (-\epsilon, 0])$ . Então,  $(E_1, \dots, E_n, \frac{\xi}{\|\xi\|}, N_1, \dots, N_k)$  é um referencial ortonormal adaptado à imersão 23.

O Laplaciano de  $F$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta F &= \sum_{i=1}^n E_i(E_i(F)) + \frac{\xi}{\|\xi\|} \left( \frac{\xi}{\|\xi\|}(F) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} E_i)(F) - (\nabla_{\xi/\|\xi\|} \xi / \|\xi\|)(F). \end{aligned} \quad (36)$$

Pelo Lema 2.1, temos

$$(\nabla_{E_i} E_i)(F) = \left( -\frac{\psi_\xi}{\|\xi\|^2} \xi \right) (F) = -\frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (37)$$

Agora, vamos calcular o termo  $E_i(E_i(F))(q, t)$ , onde  $q \in \Omega$  e  $t \in [-\epsilon, 0]$ . Para tanto, tome uma curva diferenciável  $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = q$  e  $\alpha'(0) = e_i(q)$ . Considere, então, a superfície parametrizada

$$\begin{aligned} f &: (-\delta, \delta) \times [-\epsilon, 0] \rightarrow \overline{M} \\ &(s, t) \rightarrow \Psi(t, \varphi(\alpha(s))). \end{aligned}$$

Note que a imagem de  $f$  está contida no cone  $C_\epsilon M$ . Pelo lema de simetria (cf. 1988),

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{ds} \frac{\xi}{\|\xi\|} = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\xi}{\|\xi\|} = \frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} \left( \frac{1}{\|\xi\|} \right) \xi,$$

o que implica

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, E_j \right\rangle = \frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, E_j \right\rangle.$$

Como  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, E_j \right\rangle_{(q,0)} = \langle E_i, E_j \rangle_{(q,0)} = \langle e_i(q), e_j(q) \rangle = \delta_{ij}$ , resolvendo o problema de Cauchy resultante obtemos

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, E_i \right\rangle_{(q,t)} = \exp \left( \int_0^t \frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} (q, u) du \right) = \lambda(q, t)$$

e

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, E_j \right\rangle_{(q,t)} = 0,$$

se  $j \neq i$ .

Além disso, um cálculo direto mostra que  $\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \xi \right\rangle = \frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \xi \right\rangle$ . Como  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \xi \right\rangle_{(q,0)} = \langle E_i, \xi \rangle_{(q,0)} = 0$ , segue da unicidade de soluções do problema de Cauchy que  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \xi \right\rangle_{(q,t)} = 0$ ,

para todo  $t \in [-\epsilon, 0]$ .

Como  $\frac{\partial f}{\partial s}$  é tangente ao cone, segue dos cálculos acima que, em  $(q, t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, E_j \right\rangle E_j + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\rangle \frac{\xi}{\|\xi\|} \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, E_i \right\rangle E_i \\ &= \lambda E_i. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} E_i(F)(q, t) &= \frac{1}{\lambda(q, t)} \frac{\partial f}{\partial s}(q, t) \cdot (F) \\ &= \frac{1}{\lambda(q, t)} dF_t(e_i(q)) \\ &= \frac{1}{\lambda(q, t)} \langle \text{grad}(F_t), e_i \rangle_q, \end{aligned}$$

para todos  $(q, t) \in \Omega \times [-\epsilon, 0]$  e  $F \in C^\infty(C_\epsilon M)$ . Assim,

$$E_i(E_i(F))(q, t) = \frac{1}{\lambda(q, t)} \langle \text{grad}((E_i(F))_t), e_i \rangle_q.$$

Por outro lado, no ponto  $q$ ,

$$\begin{aligned} \text{grad}((E_i(F))_t) &= \frac{1}{\lambda_t} \text{grad} \langle \text{grad}(F_t), e_i \rangle + \langle \text{grad}(F_t), e_i \rangle \text{grad} \left( \frac{1}{\lambda_t} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_t} \text{grad}(e_i(F_t)) - \langle \text{grad}(F_t), e_i \rangle \frac{1}{\lambda_t^2} \text{grad}(\lambda_t). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} E_i(E_i(F))(q, t) &= \frac{1}{\lambda(q, t)} \left[ \frac{1}{\lambda(q, t)} e_i(e_i(F_t))(q) - \frac{\langle \text{grad}(F_t), e_i \rangle_q}{\lambda^2(q, t)} e_i(q)(\lambda_t) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2(q, t)} \left[ e_i(e_i(F_t))(q) - \frac{\langle \text{grad}(F_t), e_i \rangle_q}{\lambda(q, t)} \langle \text{grad}(\lambda_t), e_i \rangle_q \right], \end{aligned}$$

para todos  $(q, t) \in \Omega \times [-\epsilon, 0]$ . Usando o fato de que  $(e_1, \dots, e_n)$  é geodésico em  $p$ , obtemos, no ponto  $(p, t)$ ,

$$\sum_{i=1}^n E_i(E_i(F)) = \frac{1}{\lambda^2} \left[ \Delta F_t - \frac{1}{\lambda} \langle \text{grad}(F_t), \text{grad}(\lambda_t) \rangle \right]. \quad (38)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi/\|\xi\|}\xi/\|\xi\| &= \frac{1}{\|\xi\|}\nabla_{\xi}\xi/\|\xi\| = \frac{1}{\|\xi\|}\left[\frac{1}{\|\xi\|}\nabla_{\xi}\xi + \xi\left(\frac{1}{\|\xi\|}\right)'\right] \\ &= \frac{1}{\|\xi\|}\left[\frac{1}{\|\xi\|}(\tilde{\nabla}_{\xi}\xi)^{\top} - \frac{\|\xi\|\psi_{\xi}}{\|\xi\|^2}\xi\right] = \frac{1}{\|\xi\|}\left[\frac{1}{\|\xi\|}(\psi_{\xi}\xi)^{\top} - \frac{\psi_{\xi}}{\|\xi\|}\xi\right] = 0, \end{aligned}$$

onde  $(\cdot)^{\top}$  denota a projeção ortogonal sobre  $T(C_{\varepsilon}M)$ . Daí  $(\nabla_{\xi/\|\xi\|}\xi/\|\xi\|)(F) = 0$ . Substituindo este fato, (37) e (38) em (36), obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \Delta F(p, t) &= \frac{1}{\lambda^2(p, t)}\left[\Delta F_t(p) - \frac{1}{\lambda(p, t)}\langle \text{grad}(F_t), \text{grad}(\lambda_t) \rangle_p\right] \\ &\quad + n\frac{\psi_{\xi}}{\|\xi\|}\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(p, t). \end{aligned}$$

Por fim, um cálculo simples mostra que  $\frac{\psi_{\xi}}{\|\xi\|} = \frac{\lambda'}{\lambda}$ . Isto conclui a demonstração.

Suponha, agora, que  $B$  e  $F$  são duas variedades Riemannianas e que  $f > 0$  é uma função suave sobre  $B$ . O produto warped  $M = B \times_f F$  é a variedade produto  $B \times F$  munida da métrica Riemanniana

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2\sigma^*(g_F),$$

onde  $\pi$  e  $\sigma$  são as projeções canônicas de  $B \times F$  sobre  $B$  e  $F$ , respectivamente, e  $g_B$  e  $g_F$  são as métricas Riemannianas de  $B$  e  $F$ , também respectivamente.

Quando a variedade ambiente  $\overline{M}$  é um produto warped, temos a seguinte consequência.

**Corolário 2.3** *Suponha que  $\overline{M}_c^{n+k+1} = I \times_f F^{n+k}$ , com  $f(0) = 1$ . Seja  $\varphi : M^n \rightarrow F^{n+k}$  uma imersão isométrica, com  $M$  fechada. Então*

$$\Delta L(t, p) = \frac{1}{f^2(t)}\Delta L_t(p) + n\frac{f'(t)}{f(t)}\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial t^2},$$

para toda  $L \in C^{\infty}(I \times_f M^n)$ .

**Demonstração:** Sabemos que, no produto warped  $I \times_f F^{n+k}$ , o campo  $\xi = (f \circ \pi_I)\partial_t$  é conforme fechado, com fator conforme  $\psi_{\xi} = f' \circ \pi_I$ . Observe que  $\xi \neq 0$ , uma vez que  $f$  é positiva.

O fluxo de  $\frac{\xi}{\|\xi\|} = \partial_t$  é

$$\Psi(t, (t_0, p)) = (t + t_0, p)$$

e é claro que as subvariedades  $\{t_0\} \times F^{n+k}$ , com  $t_0 \in I$ , são folhas da distribuição  $\xi^{\perp}$ .

Considere, agora, uma imersão isométrica  $\varphi : M^n \rightarrow F^{n+k}$  onde, como antes,  $M$  é fechada. Observe que  $\{0\} \times F^{n+k}$  (com a métrica induzida de  $I \times_f F^{n+k}$ ) é isométrica

a  $F^{n+k}$ , de sorte que podemos supor que a imersão  $\varphi$  é de  $M^n$  para  $\{0\} \times F^{n+k}$ . Usando a compacidade de  $M$  para escolher  $\epsilon > 0$  de forma conveniente, o cone  $C_\epsilon M$  é dado pela imersão

$$\Phi(p, t) = \Psi(t, (0, \varphi(p))) = (t, \varphi(p)),$$

para  $t \in [-\epsilon, 0]$  e  $p \in M^n$ . Na verdade,  $\Phi$  continua uma imersão se trocamos  $t \in [-\epsilon, 0]$  por  $t \in I$ . Observe que, nesse caso, o cone  $\epsilon$ -truncado é isométrico a  $[-\epsilon, 0] \times_f M^n$ .

Desse modo, a função  $\lambda : M \times [-\epsilon, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$\lambda(p, s) = \exp \left( \int_0^s \frac{\psi_\xi}{\|\xi\|} (\Psi(t, \varphi(p))) dt \right) = \exp \left( \int_0^s \frac{f'}{f}(t) dt \right) = f(s).$$

Em particular,  $\lambda_s : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é constante,  $\forall s \in [-\epsilon, 0]$ . O resultado segue, agora, da proposição 2.4. Isto conclui a demonstração.

## 2.4 Instabilidade de $C_\epsilon M$

Ao longo de toda esta seção, nos ateremos às notações da seção anterior. Em particular,  $\overline{M}$  continua tendo curvatura seccional constante e igual a  $c$ .

Sabemos, pelo Corolário 2.2, que  $M^n$  é mínima em  $\Xi^{n+k}$  se, e só se,  $C_\epsilon M$  é mínimo em  $\overline{M}_c^{n+k+1}$ . Então, dada  $M$  mínima, faz sentido estudar a estabilidade ou instabilidade de  $C_\epsilon M$  em relação ao seu bordo. Aqui, vamos supor  $k = 1$ , isto é, que  $C_\epsilon M$  é uma hipersuperfície de  $\overline{M}$ . Começamos com o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 2.2** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima e orientada de  $\Xi^{n+1}$ , esta por sua vez orientada pela normal unitária  $\frac{-\xi}{\|\xi\|}$ . Nestas condições, o elemento de volume de  $C_\epsilon M$  é  $\lambda^n dM \wedge dt$ .*

**Demonstração:** Considere um referencial ortonormal  $(e_1, \dots, e_n)$  em um aberto  $\Omega \subset M$ , orientado positivamente. Se  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  é o referencial dual, então  $dM = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n$  em  $\Omega$ .

Seja  $\eta \in \Gamma(NM)$  a normal unitária que relaciona as orientações de  $M$  e  $\Xi$  e sejam  $E_1, \dots, E_n, N$  os campos em  $\Phi(\Omega \times (-\epsilon, \epsilon))$  obtidos dos  $e_i$ 's e de  $\eta$ , respectivamente, por transporte paralelo ao longo das curvas integrais de  $\frac{\xi}{\|\xi\|}$  que intersectam  $\Omega$ . Fixado  $p \in \Omega$ ,  $(e_1, \dots, e_n, \eta)$  é uma base positiva de  $T_p \Xi$  e, daí,  $(e_1, \dots, e_n, \eta, -\frac{\xi}{\|\xi\|})$  é base positiva de  $T_p \overline{M}$ . Orientando  $C_\epsilon M$  por  $N$  temos então que  $(E_1, \dots, E_n, N, -\frac{\xi}{\|\xi\|})_{(p,t)}$  é base positiva de  $T_{(p,t)} \overline{M}$  e, daí,  $(E_1, \dots, E_n, \frac{\xi}{\|\xi\|}, N)_{(p,t)}$  também é base positiva de  $T_{(p,t)} \overline{M}$ , para todo  $(p, t) \in \Omega \times (-\epsilon, \epsilon)$ . Assim,  $(E_1, \dots, E_n, \frac{\xi}{\|\xi\|})$  é base positiva e ortonormal de  $T_{(p,t)}(C_\epsilon M)$ .

Por outro lado, vimos que se  $\alpha_i : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  é uma curva diferenciável tal que  $\alpha_i(0) = p$  e  $\alpha_i'(0) = e_i(p)$ , e se  $f_i : (-\delta, \delta) \times (-\epsilon, 0] \rightarrow \overline{M}$  é a superfície parametrizada

dada por  $f_i(s, t) = \Psi(t, \varphi(\alpha_i(s)))$ , então

$$E_i(p, t) = \frac{1}{\lambda(p, t)} \frac{\partial f_i}{\partial s}(0, t).$$

Usando a identificação canônica de  $T_{(p,t)}(M \times (-\epsilon, 0])$  com  $T_p M \oplus \mathbb{R}$ , temos que  $\Phi_*(e_i(p) \oplus 0)_{(p,t)} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Phi(\alpha_i(s), t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f_i(s, t) = \frac{\partial f_i}{\partial s}(0, t)$ ; com isso,

$$\Phi_* \left( \frac{e_i(p)}{\lambda(p, t)} \oplus 0 \right)_{(p,t)} = E_i(p, t).$$

Daí, usando a identificação de  $T_{\Phi(p,t)}(C_\epsilon M)$  com  $\Phi_*(T_{(p,t)}(M \times (-\epsilon, 0]))$ , temos que  $\lambda^n(dM \wedge dt)(E_1, \dots, E_n, \frac{\xi}{\|\xi\|}) = \lambda^n(dM \wedge dt)(\frac{e_1}{\lambda} \oplus 0, \dots, \frac{e_n}{\lambda} \oplus 0, 0 \oplus \partial t) = 1$ , o que conclui a demonstração.

Para o enunciado da proposição a seguir, que calcula a segunda variação da área para  $C_\epsilon M$ , dada uma imersão  $\varphi : M^n \rightarrow \Xi^{n+1}$ , denotamos, como antes, por  $N$  o campo normal unitário ao longo de  $C_\epsilon M$ , obtido por transporte paralelo de um campo  $\eta$ , unitário e normal a  $M$  em  $\Xi$ , ao longo das curvas integrais de  $\xi$  que intersectam  $M$ .

**Proposição 2.5** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana fechada e orientada, minimamente imersa em  $\Xi^{n+1}$ . Suponha que a função  $\lambda(p, t)$  não depende do ponto  $p$ . Seja  $N(p, t)$  a normal unitária sobre  $C_\epsilon M$ , e seja  $F \in C^\infty(C_\epsilon M)$  tal que  $F(p, -\epsilon) = F(p, 0) = 0$ , para cada  $p \in M$ . Se  $V(p, t) = F(p, t)N(p, t)$ , então*

$$I(V, V) = \int_{M \times [-\epsilon, 0]} F \lambda^{n-2} \left( -\Delta F_t - n \lambda \lambda' \frac{\partial F}{\partial t} - \lambda^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c(n+1) \lambda^2 F - \|A\|^2 F \right) dM \wedge dt.$$

**Demonstração:** Por definição,

$$I(V, V) = \int_{C_\epsilon M} \langle -\nabla^2 V + \bar{R}(V) - \bar{A}(V), V \rangle.$$

- Cálculo de  $\nabla^2 V$ :

Por definição,

$$\nabla^2 V = \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}^\perp \nabla_{E_i}^\perp V - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\perp V) + \nabla_{\xi/\|\xi\|}^\perp \nabla_{\xi/\|\xi\|}^\perp V - \nabla_{\nabla_{\xi/\|\xi\|} \xi/\|\xi\|}^\perp V.$$

Note que

$$\nabla_{E_i}^\perp V = \nabla_{E_i}^\perp (FN) = F \nabla_{E_i}^\perp N + E_i(F)N = E_i(F)N,$$

pois  $\nabla_{E_i}^\perp N = 0$ , uma vez que  $N$  é unitário e estamos em codimensão 1. Pelo mesmo

motivo,  $\nabla_{E_i}^\perp \nabla_{E_i}^\perp V = E_i(E_i(F))N$ .

Também temos que

$$\nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\perp V = F \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\perp N + (\nabla_{E_i} E_i)(F)N = (\nabla_{E_i} E_i)(F)N.$$

Além disso, é fácil ver que  $\nabla_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}^\perp \nabla_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}^\perp V = \frac{\xi}{\|\xi\|} \left( \frac{\xi}{\|\xi\|}(F) \right) N$ .

Como  $\nabla_{\frac{\xi}{\|\xi\|}} \frac{\xi}{\|\xi\|} = 0$  (cf. demonstração da Proposição 2.4), segue que

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \left[ \sum_{i=1}^n (E_i(E_i(F)) - (\nabla_{E_i} E_i)(F)) + \frac{\xi}{\|\xi\|} \left( \frac{\xi}{\|\xi\|}(F) \right) \right] N \\ &= (\Delta F)N. \end{aligned}$$

• Cálculo de  $\langle \bar{R}(V), V \rangle$ :

Por definição,

$$\bar{R}(V) = \sum_{i=1}^n (\bar{R}(E_i, V)E_i)^\perp + \left( \bar{R} \left( \frac{\xi}{\|\xi\|}, V \right) \frac{\xi}{\|\xi\|} \right)^\perp.$$

Utilizando o fato de que  $\bar{M}$  tem curvatura seccional constante  $c$ , juntamente com o fato de que  $V \perp N$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(V), V \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, V)E_i, V \rangle + \left\langle \bar{R} \left( \frac{\xi}{\|\xi\|}, V \right) \frac{\xi}{\|\xi\|}, V \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c(\langle V, E_i \rangle \langle E_i, V \rangle - \langle E_i, E_i \rangle \langle V, V \rangle) \\ &\quad + c \left( \left\langle V, \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\rangle \left\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, V \right\rangle - \left\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\rangle \langle V, V \rangle \right) \\ &= -cn \langle V, V \rangle - c \langle V, V \rangle \\ &= -c(n+1) \langle V, V \rangle \\ &= -c(n+1)F^2. \end{aligned}$$

• Cálculo de  $\bar{A}(V)$ :

Por definição,  $\bar{A}(V) = \langle A^N, A^V \rangle N$ . Mas,

$$\begin{aligned}
\langle A^N, A^V \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle A^N(E_i), A^V(E_i) \rangle + \left\langle A^N \left( \frac{\xi}{\|\xi\|} \right), A^V \left( \frac{\xi}{\|\xi\|} \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\frac{\xi}{\|\xi\|}} N, \bar{\nabla}_{\frac{\xi}{\|\xi\|}} V \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, F \bar{\nabla}_{E_i} N + E_i(F)N \rangle \\
&= F \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \\
&= F \|A(p, t)\|^2.
\end{aligned}$$

Assim, segue da Proposição 2.3 que

$$\bar{A}(V) = \frac{F}{\lambda^2(p, t)} \|A(p)\|^2 N.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle -\nabla^2 V + \bar{R}(V) - \bar{A}(V), V \rangle &= -\langle (\Delta F)N, FN \rangle - c(n+1)F^2 \\
&\quad - \frac{F}{\lambda^2(p, t)} \|A(p)\|^2 \langle N, FN \rangle \\
&= -F(\Delta F) - c(n+1)F^2 - \frac{F^2}{\lambda^2(p, t)} \|A(p)\|^2.
\end{aligned}$$

Então, segue da Proposição 2.4, juntamente com o fato de  $\lambda(p, t)$  não depender de  $p$ , que

$$\begin{aligned}
\langle -\nabla^2 V + \bar{R}(V) - \bar{A}(V), V \rangle &= -F \left( \frac{1}{\lambda^2} \Delta F_t + n \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right) \\
&\quad - c(n+1)F^2 - \|A\|^2 \frac{F^2}{\lambda^2} \\
&= \frac{F}{\lambda^2} (-\Delta F_t - n\lambda\lambda' \frac{\partial F}{\partial t} - \lambda^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}) \\
&\quad - c(n+1)\lambda^2 F - \|A\|^2 F.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando o resultado do Lema 2.2, basta integrarmos sobre  $M \times [-\epsilon, 0]$  para obter o resultado desejado. Isto conclui a demonstração.

Considere, agora, o espaço  $C^\infty(M)$  das funções diferenciáveis sobre  $M^n$  e o espaço  $C_0^\infty[-\epsilon, 0] = \{g : [-\epsilon, 0] \rightarrow \mathbb{R}; g \in C^\infty \text{ e } g(-\epsilon) = g(0) = 0\}$ . Consoante (Simons, 1968), a proposição anterior motiva a definição de dois operadores diferenciais lineares,

$$L_1 : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

e

$$L_2 : C_0^\infty[-\epsilon, 0] \rightarrow C^\infty[-\epsilon, 0],$$

definidos por

$$L_1(f) = -\Delta f - \|A\|^2 f$$

e

$$L_2(g) = -\lambda^2 g'' - n\lambda\lambda'g' - c(n+1)\lambda^2 g,$$

respectivamente.

A respeito dos mesmos, temos os dois resultados auxiliares a seguir.

**Lema 2.3**  $L_1$  pode ser diagonalizado por autofunções  $\{f_i\}_{i \geq 1}$ . Ademais, se  $\lambda_i$  denota o autovalor correspondente a  $f_i$ , com  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , então  $\lambda_i \rightarrow +\infty$ . Também, se  $i \neq j$ , então  $\int_M f_i f_j = 0$ . Por fim, se  $u \in C^\infty(M)$ , então existe uma única decomposição da forma  $u = \sum_{i=1}^\infty a_i f_i$  para certos  $a_i \in \mathbb{R}$ .

Para uma prova do lema acima veja (Simons, 1968).

**Lema 2.4**  $L_2$  pode ser diagonalizado por autofunções  $\{g_i\}_{i \geq 1}$ . Ademais, se  $\delta_i$  denota o autovalor correspondente a  $g_i$ , com  $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots$ , então  $\delta_i \rightarrow +\infty$ . Também, se  $i \neq j$ , então  $\int_{-\epsilon}^\epsilon g_i g_j \lambda^{n-2} = 0$ . Por fim, se  $g \in C_0^\infty[-\epsilon, 0]$ , então existe uma única decomposição da forma  $g = \sum_{i=1}^\infty a_i g_i$ , para certos  $a_i \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** A equação  $L_2(g) = \delta g$  é equivalente a

$$-\lambda^2 g'' - n\lambda\lambda'g' - c(n+1)\lambda^2 g - \delta g = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por  $-\lambda^{n-2}$ , temos

$$\lambda^n g'' + n\lambda^{n-1}\lambda'g' + c(n+1)\lambda^n g + \delta\lambda^{n-2}g = 0,$$

ou seja,

$$(\lambda^n g')' + c(n+1)\lambda^n g + \delta\lambda^{n-2}g = 0.$$

Esta é uma equação de Sturm-Liouville, de forma que o resultado segue da Proposição 2.2. Isto conclui a demonstração.

A demonstração do teorema a seguir é essencialmente a mesma do Lema 6.1.6 de (Simons, 1968). Por completude, apresentemo-la.

**Teorema 2.3** Com as notações da Proposição 2.5, é possível escolher  $F$  tal que  $I(V, V) < 0$  se, e somente se,  $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ , onde  $\lambda_1$  e  $\delta_1$  são, respectivamente, o primeiro autovalor

de  $L_1$  e o primeiro autovalor de  $L_2$ .

**Demonstração:** Para  $p \in M$  fixado, tem-se  $F(p, \cdot) \in C_0^\infty[-\epsilon, 0]$ . Assim, nas notações do Lema 2.4,  $F(p, t) = \sum_{j=1}^\infty a_j(p)g_j(t)$ . Mas, como  $a_j \in C^\infty(M)$ , temos, pelo Lema 2.3,

$$F(p, t) = \sum_{i,j=1}^\infty a_{ij}f_i(p)g_j(t).$$

Agora, segue da Proposição 2.5 que

$$\begin{aligned} I(V, V) &= \int_{M \times [-\epsilon, 0]} \lambda^{n-2} \sum_{i,j=1}^\infty a_{ij}f_i g_j \sum_{k,l=1}^\infty (a_{kl}L_1(f_k)g_l + a_{kl}f_k L_2(g_l)) \\ &= \int_{M \times [-\epsilon, 0]} \lambda^{n-2} \sum_{i,j=1}^\infty a_{ij}f_i g_j \sum_{k,l=1}^\infty a_{kl}(\lambda_k + \delta_l)f_k g_l \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^\infty a_{ij}a_{kl}(\lambda_k + \delta_l) \int_{M \times [-\epsilon, 0]} f_i f_k g_j g_l \lambda^{n-2}. \end{aligned}$$

Usando novamente os resultados dos Lemas 2.3 e 2.4, temos

$$I(V, V) = \sum_{i,j=1}^\infty a_{ij}^2(\lambda_i + \delta_j) \left[ \int_M f_i^2 \right] \left[ \int_{-\epsilon}^0 g_j^2 \lambda^{n-2} \right].$$

Se  $I(V, V) < 0$ , então algum  $\lambda_i + \delta_j$  é negativo e, assim,  $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ , pois  $\lambda_1 \leq \lambda_i$  e  $\delta_1 \leq \delta_j$ . Reciprocamente, se  $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ , escolha  $F(p, t) = f_1(p)g_1(t)$  para obter  $I(V, V) < 0$ . Isto conclui a demonstração.

O seguinte proposição fornece uma cota superior para o autovalor  $\lambda_1$ .

**Proposição 2.6** *Seja  $\varphi : M^n \rightarrow \widetilde{M}_c^{n+1}$  uma imersão mínima, com  $M$  fechada e não totalmente geodésica. Defina o operador diferencial linear  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  pondo  $L(f) = -\nabla^2 f - \|A\|^2 f$ , onde  $A$  é a segunda forma fundamental da imersão  $\varphi$ . Se  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor de  $L$ , então  $\lambda_1 \leq -cn$ .*

**Demonstração:** Em geral, temos de (Chavel, 1984) que

$$\lambda_1 \leq \left[ \int_M f^2 \right]^{-1} \int_M f L(f),$$

para qualquer  $f \in C^\infty(M)$  não identicamente nula.

Dado  $\epsilon > 0$ , defina  $f_\epsilon = (\|A\|^2 + \epsilon)^{\frac{1}{2}}$ . É claro que  $f_\epsilon \in C^\infty(M)$  e que, se  $M$  não for totalmente geodésica, então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_M f_\epsilon^2 = \int_M \|A\|^2 \neq 0.$$

Procedendo como na Proposição 6.1.7 de (Simons, 1968), consideremos um referencial

ortonormal local  $(e_1, \dots, e_n)$  em  $M$ . Então,

$$e_i(f_\epsilon) = \frac{1}{f_\epsilon} \langle \nabla_{e_i} A, A \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_\epsilon &= \frac{1}{f_\epsilon} \langle \nabla^2 A, A \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{(f_\epsilon)^3} \langle \nabla_{e_i} A, A \rangle^2 + \frac{1}{f_\epsilon} \langle \nabla_{e_i} A, \nabla_{e_i} A \rangle \right) \\ &\geq \frac{1}{f_\epsilon} \langle \nabla^2 A, A \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{(f_\epsilon)^3} \langle A, A \rangle \langle \nabla_{e_i} A, \nabla_{e_i} A \rangle + \frac{1}{f_\epsilon} \langle \nabla_{e_i} A, \nabla_{e_i} A \rangle \right) \\ &\geq \frac{1}{f_\epsilon} \langle \nabla^2 A, A \rangle, \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz na primeira desigualdade acima. Com isso,

$$\nabla^2 f_\epsilon \geq \frac{1}{f_\epsilon} \langle \nabla^2 A, A \rangle. \quad (39)$$

Por outro lado, pelo Corolário 2.1,  $\nabla^2 A = -\|A\|^2 A + cnA$ . Substituindo em (39) obtemos

$$(\nabla^2 f_\epsilon) f_\epsilon \geq \langle cnA - \|A\|^2 A, A \rangle = cn\|A\|^2 - \|A\|^4.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f_\epsilon L(f_\epsilon) &= f_\epsilon (-\nabla^2 f_\epsilon - \|A\|^2 f_\epsilon) \\ &= -(\nabla^2 f_\epsilon) f_\epsilon - \|A\|^2 f_\epsilon^2 \\ &\leq \|A\|^4 - cn\|A\|^2 - \|A\|^2 (\|A\|^2 + \epsilon) \\ &\leq -cn\|A\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_M f_\epsilon^2 \right]^{-1} \int_M f_\epsilon L(f_\epsilon) \leq -cn,$$

de onde concluímos a demonstração.

## 2.5 Cones mínimos em produtos warped

Nesta seção, vamos considerar um produto warped  $\overline{M}_c^{n+2} = I \times_f F^{n+1}$  de curvatura seccional constante  $c$ , com  $f(0) = 1$ . Observamos que, pela Proposição 7.42 de

(O'Neill, 1983), a variedade  $F^{n+1}$  deve ter curvatura seccional constante  $k$  e devem valer as relações

$$\frac{f''}{f} = -c = \frac{(f')^2 - k}{f^2}.$$

Se  $M^n$  é uma hipersuperfície mínima, fechada e não totalmente geodésica de  $F^{n+1} \approx \{0\} \times F^{n+1}$ , então, consoante a demonstração do Corolário 2.3, identificaremos o cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon M$  com o produto warped  $[-\epsilon, 0] \times_f M^n$ , imerso canonicamente em  $\overline{M}_c^{n+2}$ .

Agora, se  $N(t, p)$  é o campo normal unitário ao longo de  $C_\epsilon M$  e se  $G \in C^\infty(C_\epsilon M)$  é tal que  $G(-\epsilon, p) = G(0, p) = 0$  para cada  $p \in M$ , então, pondo  $V(t, p) = G(t, p)N(t, p)$ , segue da Proposição 2.5 que

$$I(V, V) = \int_{M \times [-\epsilon, 0]} G f^{n-2} \left( -\Delta G_t - n f f' \frac{\partial G}{\partial t} - f^2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c(n+1) f^2 G - \|A\|^2 G \right) dM \wedge dt, \quad (40)$$

onde  $\|A\|^2$  denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental de  $M^n$  em  $F^{n+1}$  e  $\Delta$  é o operador Laplaciano em  $M^n$ . Como visto anteriormente, a expressão (40) sugere a definição de dois operadores diferenciais lineares. O primeiro deles é  $L_1 : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , tal que

$$L_1(g) = -\Delta g - \|A\|^2 g, \quad (41)$$

para  $g \in C^\infty(M)$ , enquanto que o segundo é  $L_2 : C_0^\infty[-\epsilon, 0] \rightarrow C^\infty[-\epsilon, 0]$ , tal que

$$L_2(h) = -f^2 h'' - n f f' h' - c(n+1) f^2 h, \quad (42)$$

onde  $C_0^\infty[-\epsilon, 0] = \{h \in C^\infty[-\epsilon, 0]; h(-\epsilon) = h(0) = 0\}$ .

O seguinte teorema é apenas uma reformulação do Teorema 2.3.

**Teorema 2.4** *Considere um produto warped  $\overline{M}_c^{n+2} = I \times_f F^{n+1}$ , com curvatura seccional constante  $c$ , e  $f(0) = 1$ . Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima e fechada de  $F^{n+1}$ . Se consideramos  $C_\epsilon M = [-\epsilon, 0] \times_f M^n$  imerso canonicamente em  $\overline{M}_c^{n+2}$ , então  $C_\epsilon M$  é instável em relação ao seu bordo se, e somente se,  $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ , onde  $\lambda_1$  e  $\delta_1$  são os primeiros autovalores de  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente.*

**Exemplo 2.1** Quando tomamos  $I = (-1, \infty)$ ,  $f(t) = t + 1$  e  $F^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$ , o cone  $\epsilon$ -truncado sobre uma hipersuperfície mínima, fechada e não totalmente geodésica  $M^n$  de  $\mathbb{S}^{n+1}$  é a imersão canônica de  $[-\epsilon, 0] \times_{t+1} M^n$  em  $I \times_{t+1} \mathbb{S}^{n+1}$ . Usando o fato de que a correspondência  $(t, p) \mapsto (t+1)p$  define uma isometria entre  $I \times_{t+1} \mathbb{S}^{n+1}$  e  $\mathbb{R}^{n+2} - \{0\}$ ,

$C_\epsilon M$  pode ser visto como a imagem da imersão

$$\begin{aligned}\Phi &: [-\epsilon, 0] \times M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} \\ (t, p) &\mapsto (t+1)p.\end{aligned}$$

Com a mudança de variável  $t+1 \mapsto t$ , podemos reescrever  $\Phi$  como

$$\begin{aligned}\Phi &: [1-\epsilon, 1] \times M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} \\ (t, p) &\mapsto tp,\end{aligned}$$

que é a definição usada em (Simons, 1968). Aqui, tem-se  $\lambda_1 \leq -n$  pela Proposição 2.6. Por outro lado, como  $L_2$ , neste caso, é dado por  $L_2(h) = -(t+1)^2 h'' - n(t+1)h'$ , as autofunções e os autovalores do problema de Sturm-Liouville  $L_2(h) = \delta h$ ,  $h(-\epsilon) = h(0) = 0$ , são

$$h_j(t) = (t+1)^{-\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{-j\pi}{\log(1-\epsilon)} \log(t+1)\right)$$

e

$$\delta_j = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{\log(1-\epsilon)}\right)^2,$$

respectivamente, onde usamos a mudança de variáveis  $t+1 = e^s$ . Com isso,

$$\lambda_1 + \delta_1 \leq -n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\log(1-\epsilon)}\right)^2.$$

Então, se assumirmos  $n \leq 5$  e escolhermos  $0 < \epsilon < 1$  suficientemente próximo de 1, obteremos  $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ , isto é, que  $C_\epsilon M^n$  é instável.

O cone sobre  $M^n$ ,  $CM^n$ , é definido por Simons em (1968) como a aplicação

$$\begin{aligned}\Phi &: [0, 1] \times M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} \\ (t, p) &\mapsto tp.\end{aligned}$$

Isto é uma imersão, exceto nos pontos de  $\{0\} \times M$ , onde temos  $\Phi(0, p) = 0$ . Sabemos que  $CM - \{0\}$  é uma subvariedade mínima de  $\mathbb{R}^{n+2}$  se  $M$  é uma subvariedade mínima de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Se  $M^n$  é uma hipersuperfície mínima, fechada e não totalmente geodésica de  $\mathbb{S}^{n+1}$  e se  $n \leq 5$ , o exemplo acima mostra que pode ser escolhida uma variação do cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon M^n$ , com  $\epsilon$  conveniente, que mantém o bordo fixado e diminui área. Estende-se essa variação para  $CM^n$  mantendo-se fixo o conjunto dos pontos  $tp$  com  $t < 1 - \epsilon$  e obtém-se uma variação de  $CM^n$  que diminui área. Tal argumento é, essencialmente, a prova do seguinte teorema (Teorema 6.1.1 de 1968).

**Teorema 2.5** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima, fechada e não totalmente geodésica*

em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Se  $n \leq 5$ , o cone  $CM \subset \mathbb{R}^{n+2}$  não minimiza área em relação ao seu bordo.

Nosso principal objetivo neste capítulo é estender o resultado acima para o caso em que o ambiente Riemanniano  $\overline{M}_c^{n+2}$  é a esfera  $\mathbb{S}^{n+2}$ . Para isto, tomemos  $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $f(t) = \cos(t)$  e  $F^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$ . Fixado o ponto  $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{n+2}$ , consideremos  $\mathbb{S}^{n+1}$  com um equador de  $\mathbb{S}^{n+2}$  em relação a  $N$ . Neste contexto, vamos identificar o ponto  $x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1}$  com o ponto  $x = (x_1, \dots, x_{n+2}, 0) \in \mathbb{S}^{n+2}$ . Com isto, a correspondência  $(t, x) \mapsto \cos(t)x + \sin(t)N$  define uma isometria entre  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos(t)} \mathbb{S}^{n+1}$  e  $\mathbb{S}^{n+2} - \{\pm N\}$ . Daí, sendo  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão de uma variedade Riemanniana fechada  $M^n$  em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , o cone  $\epsilon$ -truncado  $C_\epsilon M$  pode ser visto como a imagem da imersão

$$\begin{aligned} \Phi : [-\epsilon, 0] \times M^n &\rightarrow \mathbb{S}^{n+2} \\ (t, x) &\mapsto \cos(t)x + \sin(t)N. \end{aligned} \quad (43)$$

Segue da Proposição 2.6 que  $\lambda_1 \leq -n$ . Por outro lado,

$$L_2(h) = -\cos^2(t)h'' + n \sin(t) \cos(t)h' - (n+1) \cos^2(t)h,$$

de forma que, multiplicando ambos os membros da equação  $L_2(h) = \delta h$  por  $-\cos^{n-2}(t)$ , obtemos

$$\cos^n(t)h'' - n \sin(t) \cos^{n-1}(t)h' + (n+1) \cos^n(t)h = -\delta h \cos^{n-2}(t)$$

ou, ainda,

$$(\cos^n(t)h')' + (n+1) \cos^n(t)h + \delta \cos^{n-2}(t)h = 0. \quad (44)$$

A equação (44), com condições iniciais  $h(-\epsilon) = h(0) = 0$ , é um problema de Sturm-Liouville regular. A função  $u(t) = \sin(\frac{\pi}{\epsilon}t)$  satisfaz as condições iniciais, de modo que, pela caracterização variacional de  $\delta_1$  dada pelo Teorema 2.2, tem-se

$$\delta_1 \leq \frac{\int_{-\epsilon}^0 (\frac{\pi^2}{\epsilon^2} \cos^n(t) \cos^2(\frac{\pi}{\epsilon}t) - (n+1) \cos^n(t) \sin^2(\frac{\pi}{\epsilon}t)) dt}{\int_{-\epsilon}^0 \sin^2(\frac{\pi}{\epsilon}t) \cos^{n-2}(t) dt}.$$

Para  $n = 2$ , temos

$$\delta_1 \leq \frac{\int_{-\epsilon}^0 (\frac{\pi^2}{\epsilon^2} \cos^2(t) \cos^2(\frac{\pi}{\epsilon}t) - (3) \cos^2(t) \sin^2(\frac{\pi}{\epsilon}t)) dt}{\int_{-\epsilon}^0 \sin^2(\frac{\pi}{\epsilon}t) dt} = \delta(\epsilon).$$

Um cálculo direto mostra que  $\lim_{\epsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}} \delta(\epsilon) = \frac{1}{2}$ . Com isso, escolhendo-se  $\epsilon$  suficientemente próximo de  $\frac{\pi}{2}$ , obtemos  $\lambda_1 + \delta_1 < -2 + \frac{1}{2} < 0$ , ficando, assim, demonstrado o principal resultado deste capítulo.

**Teorema 2.6** *Seja  $\Sigma^2$  uma superfície mínima, fechada e não totalmente geodésica de  $\mathbb{S}^3$ . Então, o cone  $C\Sigma \subset \mathbb{S}^4$ , dado por 43, é mínimo mas não minimiza área em relação a variações que fixam seu bordo.*

### 3 UM TEOREMA DE RIGIDEZ EM $\mathbb{S}_1^{n+1}$

Goddard conjecturou, em (1977), que qualquer hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média constante do espaço de De Sitter deveria ser totalmente umbílica. Desde então, muitos autores têm estudado este problema (cf. 2014, 1987, 1988 e 2011). Neste capítulo, provamos que, sob condições apropriadas sobre as curvaturas escalar e média, uma hipersuperfície tipo-espaço e completa de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  tem que ser totalmente umbílica. Na seção 3.1, discutimos alguns fatos elementares da geometria de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , como sua conexão de Levi-Civita e seu tensor de curvatura. Na seção 3.2, discorremos sobre hipersuperfícies do espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , demonstrando alguns resultados técnicos, como a proposição 3.2, que será fundamental na demonstração do principal resultado deste capítulo (seção 3.3), o teorema 3.1.

#### 3.1 O espaço de De Sitter

Seja  $\mathbb{L}^{n+2}$  o espaço  $(n+2)$ -dimensional de Lorentz-Minkowski, munido da métrica Lorentziana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dada por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2}. \quad (45)$$

O espaço de de Sitter  $(n+1)$ -dimensional é a hiperquádrica  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  de  $\mathbb{L}^{n+2}$  dada por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle x, x \rangle = 1\}. \quad (46)$$

Por sua vez, a hiperquádrica  $\mathbb{H}^{n+1}$  de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , definida por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle x, x \rangle = -1\},$$

possui duas componentes conexas, ambas isométricas ao espaço hiperbólico  $(n+1)$ -dimensional.

Um cálculo fácil mostra que  $\xi(x) = x$  é um campo normal unitário globalmente definido sobre  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Uma vez que  $\langle \xi, \xi \rangle = 1$ ,  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  é uma hipersuperfície Lorentziana de  $\mathbb{L}^{n+2}$ . O endomorfismo de Weingarten correspondente a  $\xi$  é dado por  $A(X) = -\nabla_X^0 x = -X$ , onde  $\nabla^0$  denota a conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{L}^{n+2}$ . Se  $\bar{\nabla}$  denota a conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , então a fórmula de Gauss da imersão canônica de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  em  $\mathbb{L}^{n+2}$  é dada por

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y + \langle AX, Y \rangle \xi = \bar{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle x, \quad (47)$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ .

Se  $R^0$  e  $\bar{R}$  denotam os tensores de curvatura de  $\mathbb{L}^{n+2}$  e  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , respectivamente, segue da equação de Gauss para hipersuperfícies semi-Riemannianas (cf. 1983) que

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= (R^0(X, Y)Z)^T - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX \\ &= -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X,\end{aligned}\tag{48}$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ . Assim,  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  tem curvatura seccional constante e igual a 1.

### 3.2 Hipersuperfícies tipo-espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$

Considere uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional  $\Sigma^n$ . Dizemos que uma imersão  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  é *tipo-espaço* se o pull-back  $\varphi^*g$  da métrica Lorentziana  $g$  de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  é uma métrica Riemanniana sobre  $\Sigma^n$ . Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos tanto  $g$  quanto  $\varphi^*g$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Dada uma imersão tipo-espaço  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ , é possível escolhermos um campo normal unitário tipo-tempo  $N$  globalmente definido sobre  $\Sigma$ . Dessa forma, obtemos uma aplicação suave  $N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , à qual nos referiremos como *aplicação de Gauss hiperbólica* de  $\Sigma$ .

Para fixarmos a notação usada a seguir, exceto pela métrica, objetos sem uma barra superior se referirão a  $\Sigma$  e objetos com uma barra superior se referirão a  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Sendo assim,  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  denotarão as conexões de Levi-Civita e  $R$  e  $\bar{R}$  os tensores de curvatura de  $\Sigma$  e  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , respectivamente.

O endomorfismo de Weingarten de  $\Sigma$  induzido por  $N$  é dado por  $AX = -\bar{\nabla}_X N$ , para todo  $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ , e as equações de Gauss e Codazzi são dadas, respectivamente, por (cf. O'Neill, 1983)

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W \rangle &= -\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle \\ &\quad - \langle AX, W \rangle \langle AY, Z \rangle + \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle\end{aligned}\tag{49}$$

e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X,\tag{50}$$

onde  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(\Sigma)$ .

A seguir, elencaremos algumas relações das quais faremos uso na próxima seção.

**Proposição 3.1** *Nas notações da discussão acima, se  $\Sigma^n$  tem curvatura média  $H$  e curvatura escalar  $R$ , então*

$$n(n-1)(1-R) = n^2 H^2 - |A|^2.\tag{51}$$

**Demonstração:** Fixe  $p \in \Sigma$  e escolha um referencial ortonormal local  $(e_1, \dots, e_n)$  numa vizinhança de  $p$  em  $\Sigma$ , de tal forma que  $(e_1(p), \dots, e_n(p))$  seja uma base ortonormal de  $T_p\Sigma$  formada por autovetores de  $A_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ . Então, segue da definição de  $R$  e da equação de Gauss (49) que, em  $p$ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \langle R(e_i, e_j) e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} (1 - \langle Ae_i, e_i \rangle \langle Ae_j, e_j \rangle) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j. \end{aligned} \quad (52)$$

Mas, uma vez que

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j &= (\sum_{k=1}^n \lambda_k)^2 - \sum_k \lambda_k^2 \\ &= (-nH)^2 - |A|^2 \\ &= n^2 H^2 - |A|^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Isto conclui a demonstração.

Fixado  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , podemos definir sobre  $\Sigma$  as funções  $f_a = \langle N, a \rangle$  e  $l_a = \langle \varphi, a \rangle$ . Tem-se (veja por exemplo 1999)

$$\nabla f_a = -A(\nabla l_a), \quad (54)$$

$$\nabla l_a = a^T = a + f_a N - l_a \varphi, \quad (55)$$

$$\text{Hess } l_a(X) = -f_a A(X) - l_a X \quad (56)$$

e

$$\text{Hess } f_a(X) = -(\nabla_X A)(a^T) + f_a A^2(X) + l_a A(X). \quad (57)$$

Segue imediatamente da equação (56) que

$$\frac{1}{n} \Delta l_a = H f_a - l_a; \quad (58)$$

por outro lado, a equação (57), juntamente com a equação de Codazzi, fornece

$$\Delta f_a = n \langle \nabla H, a^T \rangle + |A|^2 f_a - n H l_a. \quad (59)$$

Temos, ainda, o seguinte resultado auxiliar.

**Proposição 3.2** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço imersa isometricamente em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  e orientada pelo campo normal unitário  $N$ , com curvatura média  $H$  e*

curvatura escalar constante  $R$ . Se  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , então

$$\operatorname{div}(A(\nabla f_a) + nH\nabla f_a - \frac{1}{n}(n^2H^2 - |A|^2)\nabla l_a) = ((n-2)H|\Phi|^2 + \sum_{i=1}^n(\lambda_i + H)^3)f_a,$$

onde  $\Phi = A + HI$  é o operador sem traço associado a  $A$ .

**Demonstração:** Fixado  $p \in \Sigma^n$ , escolha um referencial ortonormal em uma vizinhança de  $p$ , geodésico em  $p$  e tal que  $A(e_k) = \lambda_k e_k$  em  $p$ , para  $1 \leq k \leq n$ . Considerando o campo  $A(\nabla f_a)$ , tem-se por definição que

$$\operatorname{div}A(\nabla f_a) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} A(\nabla f_a), e_i \rangle.$$

Usando a equação de Codazzi (50), podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}A(\nabla f_a) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} A)\nabla f_a + A(\nabla_{e_i} \nabla f_a), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{\nabla f_a} A)e_i + A(\nabla_{e_i} \nabla f_a), e_i \rangle \\ &= \operatorname{tr}(\nabla_{\nabla f_a} A) + \sum_{i=1}^n \operatorname{Hess} f_a(e_i, Ae_i). \end{aligned} \quad (60)$$

Por outro lado, desde que o referencial  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é geodésico em  $p$ , segue que, em  $p$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_X A)e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X(Ae_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n X \langle Ae_i, e_i \rangle \\ &= X(\operatorname{tr}A), \end{aligned}$$

para todo  $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ . Fazendo  $X = \nabla f$ , obtemos

$$\operatorname{tr}(\nabla_{\nabla f_a} A) = \nabla_{\nabla f_a} \operatorname{tr}(A) = -n \langle \nabla H, \nabla f_a \rangle$$

e, daí,

$$\operatorname{tr}(\nabla_{\nabla f_a} A) = -\operatorname{div}(nH\nabla f_a) + nH\Delta f_a. \quad (61)$$

Agora, a partir das equações 59, 60 e 61, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A(\nabla f_a) + nH\nabla f_a) &= nH|A|^2 f_a - n^2 H^2 l_a + n^2 H a^T(H) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \operatorname{Hess} f_a(e_i, Ae_i). \end{aligned} \quad (62)$$

Neste ponto, observamos que, pela Proposição 3.1,

$$n(n-1)(1-R) = n^2 H^2 - |A|^2.$$

Assim, podemos usar a hipótese sobre a curvatura escalar  $R$  de  $\Sigma^n$  para concluir que  $n^2 H^2 - |A|^2$  é uma função constante sobre  $\Sigma^n$ . Além disso, segue novamente da equação de Codazzi e de (54), (55) e (56) que

$$\begin{aligned} (\nabla_{a^T} A)(e_i) &= (\nabla_{e_i} A)(a^T) \\ &= \nabla_{e_i} A(a^T) - A(\nabla_{e_i} a^T) \\ &= -\nabla_{e_i} \nabla f_a - A(-f_a A(e_i) - l_a e_i). \end{aligned}$$

Como o referencial  $\{e_i\}$  é geodésico em  $p$ , temos  $\nabla_{a^T} A(e_i) = (\nabla_{a^T} A)e_i$  e, daí, pela equação acima,

$$\nabla_{a^T} A(e_i) = -\nabla_{e_i} \nabla f_a + f_a \lambda_i^2 e_i + l_a \lambda_i e_i \quad (63)$$

em  $p$ . Por outro lado, a igualdade

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, Ae_i \rangle$$

implica

$$a^T(|A|^2) = 2 \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{a^T} Ae_i, Ae_i \rangle.$$

Derivando a função constante  $n^2 H^2 - |A|^2$  na direção de  $a^T$ , obtemos, da equação (63), que

$$2n^2 H a^T(H) = -2 \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f_a, Ae_i \rangle + 2f_a \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 + 2|A|^2 l_a,$$

o que implica

$$\sum_{i=1}^n \text{Hess } f_a(e_i, Ae_i) = -n^2 H a^T(H) + f_a \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 + |A|^2 l_a.$$

Substituindo na igualdade (62), obtemos

$$\text{div}(A(\nabla f_a) + nH\nabla f_a) = nH|A|^2 f_a - n^2 H^2 l_a + f_a \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 + |A|^2 l_a.$$

Desenvolvendo  $(\lambda_i + H)^3$ , concluímos que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = -nH^3 - 3H|\Phi|^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i + H)^3,$$

onde  $|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2$ . Assim

$$\begin{aligned} \text{div}(A(\nabla f_a) + nH\nabla f_a) &= nH|A|^2 f_a - n^2 H^2 l_a + |A|^2 l_a - nH^3 f_a \\ &\quad - 3H|\Phi|^2 f_a + f_a \sum_{i=1}^n (\lambda_i + H)^3. \end{aligned} \quad (64)$$

Somando e subtraindo  $H|A|^2 f_a$  no segundo membro da equação (64), obtemos

$$\begin{aligned} \text{div}(A(\nabla f_a) + nH\nabla f_a) &= nH|A|^2 f_a - n^2 H^2 l_a + |A|^2 l_a - 2H|\Phi|^2 f_a \\ &\quad - H|A|^2 f_a + f_a \sum_{i=1}^n (\lambda_i + H)^3. \end{aligned} \quad (65)$$

Agora, somamos e subtraímos  $n^2 H^3 f_a$  no segundo membro da equação (65) para obter

$$\begin{aligned} \text{div}(A(\nabla f_a) + nH\nabla f_a) &= (n-2)H|\Phi|^2 f_a + n^2 H^3 f_a - n^2 H^2 l_a + |A|^2 l_a \\ &\quad - H|A|^2 f_a + f_a \sum_{i=1}^n (\lambda_i + H)^3 \\ &= (n-2)H|\Phi|^2 f_a + (n^2 H^2 - |A|^2) H f_a \\ &\quad + (|A|^2 - n^2 H^2) l_a + f_a \sum_{i=1}^n (\lambda_i + H)^3. \end{aligned} \quad (66)$$

Por fim, pondo a constante  $n^2 H^2 - |A|^2$  em evidência e usando a equação (58), concluímos a demonstração.

### 3.3 Um teorema de umbilicidade

Antes de enunciarmos o principal resultado deste capítulo, vamos enunciar dois resultados técnicos que serão úteis. O primeiro deles é uma consequência simples de um resultado de Yau, observada por A. Caminha (veja 2011). O segundo é conhecido como

o Lema de Okumura (Okumura,1974).

**Lema 3.1** *Considere um campo diferenciável de vetores  $X$  sobre uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional, completa e orientada  $\Sigma^n$ . Se  $\operatorname{div}X$  não muda de sinal sobre  $\Sigma^n$  e  $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , então  $\operatorname{div}X = 0$ .*

**Lema 3.2** *Sejam  $\mu_1, \dots, \mu_n$  números reais satisfazendo  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \beta^2$ , onde  $\beta \geq 0$ . Então,*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3,$$

com igualdade se, e somente se, pelo menos  $n-1$  dos números  $\mu_i$  são iguais.

Podemos, finalmente, enunciar e provar o resultado a seguir.

**Teorema 3.1** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ ,  $n \geq 3$ , uma hipersuperfície tipo-espaço completa e imersa isometricamente em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , com curvatura média  $H$  limitada e curvatura escalar constante  $R < 1$ . Suponha que, para um certo vetor não nulo  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , tenhamos  $|a^T| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$  e que ocorra um dos seguintes casos:*

- (i) *a é tipo-tempo;*
- (ii) *a é tipo-luz e a imagem  $N(\Sigma^n)$  da aplicação de Gauss hiperbólica está contida em uma horoesfera determinada por a;*
- (iii) *a é tipo-espaço e a imagem  $N(\Sigma^n)$  da aplicação de Gauss hiperbólica está no interior de um hemisfério fechado de  $\mathbb{H}^{n+1}$  determinado por a.*

Então,  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica.

**Demonstração:** Consideremos o campo  $X = A(\nabla f_a) + nH\nabla f_a - \frac{1}{n}(n^2H^2 - |A|^2)\nabla l_a$ . Como  $n^2H^2 - |A|^2$  é constante, a hipótese sobre a curvatura média garante que o operador  $A$  é limitado. Uma vez que  $\nabla f_a = -A(\nabla l_a)$ , a integrabilidade de  $|a^T| = |\nabla l_a|$ , juntamente com a limitação de  $A$ , garante a integrabilidade de  $|X|$ .

Como  $|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2$ , segue da equação de Gauss que

$$n(n-1)(1-R) = n(n-1)H^2 - |\Phi|^2$$

e, assim, a hipótese sobre a curvatura escalar de  $\Sigma$  implica que a curvatura média não muda de sinal. Então, trocando  $N$  por  $-N$ , se necessário, podemos supor que  $H > 0$ . Com isso,  $n(n-1)H^2 - |\Phi|^2 > 0$  implica

$$H > \frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Agora, aplicando o Lema de Okumura 3.2 aos autovalores  $\lambda_i + H$  de  $\Phi_p$ , obtemos

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i + H)^3 \geq -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3$$

e, então,

$$(n-2)H|\Phi|^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i + H)^3 \geq (n-2)|\Phi|^2 \left( H - \frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}} \right) \geq 0. \quad (67)$$

Para o caso (i), se  $a$  for tipo-tempo, então  $|\langle N, a \rangle| \geq |N||a| = |a| > 0$ , ou seja,  $f_a$  tem sinal estrito. Com isso, segue da Proposição 3.2 e da desigualdade 67 que  $\text{div}(X)$  tem sinal. Portanto, pelo Lema 3.1, temos  $\text{div}(X) = 0$ . Então, a desigualdade 67 torna-se uma igualdade e, como  $n \geq 3$ , concluímos que  $|\Phi|^2 = 0$ , isto é,  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica.

Para o caso (ii), se  $a$  for tipo-luz, considere uma horoesfera determinada por  $a$ ,

$$L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\},$$

onde  $\tau \neq 0$ . Se a imagem  $N(\Sigma^n)$  da aplicação de Gauss hiperbólica está contida em  $L_\tau$ , então  $f_a = \tau$  tem sinal estrito e o resultado segue como em (i).

Para o caso (iii), se a imagem  $N(\Sigma^n)$  da aplicação de Gauss hiperbólica está no interior de um hemisfério fechado de  $\mathbb{H}^{n+1}$  determinado pelo vetor tipo-espaço  $a$ , então  $f_a > 0$  ou  $f_a < 0$ . Combinando novamente a Proposição 3.2 e a desigualdade (67), obtemos que  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica. Isto conclui a demonstração.

O seguinte exemplo mostra que a condição de integrabilidade de  $|a^T|$  é indispensável.

**Exemplo 3.1 (Cilindro hiperbólico)** Se  $r > 1$  é um número real fixado, então a variedade produto  $\Sigma^n = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{H}^{n-1}(\sqrt{r^2-1})$  está contida naturalmente no espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Se  $g$  é a métrica usual de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  então chamamos  $(\Sigma^n, g)$  de cilindro hiperbólico. Sabe-se (cf. 2013) que a inclusão de  $\Sigma^n$  em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  torna  $\Sigma$  uma hipersuperfície tipo-espaço do espaço de De Sitter, com aplicação de Gauss hiperbólica dada por

$$N(p) = -\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}(\nu(p) - r^2p),$$

onde  $\nu : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  é dada por  $\nu(p) = (p_1, p_2, \dots, 0)$ . Com isso, o endomorfismo de Weingarten associado a  $N$  é dado por

$$A = \text{diag} \left( \frac{\sqrt{r^2-1}}{r}, \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}, \dots, \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \right)$$

e, consequentemente, temos

$$|A|^2 = \frac{r^2-1}{r^2} + (n-1)\frac{r^2}{r^2-1}$$

e

$$H = \frac{nr^2 - 1}{nr\sqrt{r^2 - 1}},$$

sendo  $H$  a curvatura média correspondente de  $\Sigma^n$ . Observe que  $\Sigma^n$  não é totalmente umbílica.

Afirmamos, agora, que a curvatura escalar  $R$  de  $\Sigma^n$  é menor que 1. De fato, pela Proposição 3.1, é suficiente mostrarmos que  $n^2H^2 - |A|^2 > 0$ , o que é imediato:

$$\begin{aligned} n^2H^2 - |A|^2 &= \frac{1}{r^2(r^2 - 1)}((nr^2 - 1)^2 - (r^2 - 1)^2 - (n - 1)r^4) \\ &= \frac{1}{r^2 - 1}(r^2n^2 - (r^2 + 2)n + 2) \\ &= \frac{n - 1}{r^2 - 1}[nr^2 - 2] > 0, \end{aligned}$$

uma vez que  $n \geq 2$  e  $r > 1$ .

## 4 MÉTRICAS QUASI-EINSTEIN EM $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Neste capítulo, apresentaremos uma descrição completa das estruturas *quasi-Einstein* existentes em  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Na seção 4.1, estudamos as métricas *m-quasi-Einstein*, ou simplesmente métricas *quasi-Einstein*, as quais estão diretamente relacionadas com métricas warped de tipo Einstein. Na seção 4.2, construímos dois exemplos de estruturas quasi-Einstein em  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  e enunciamos o principal resultado do capítulo. Na seção 4.3, demonstramos alguns resultados técnicos e provamos o principal resultado deste capítulo.

### 4.1 Generalidades sobre métricas quasi-Einstein

Conforme mencionado na introdução, as métricas *m-quasi-Einstein*, ou simplesmente métricas *quasi-Einstein*, estão diretamente relacionadas com produtos warped Einstein (veja, por exemplo, 2007, 2011, 2012 e 2003). Mais precisamente, se  $m$  é inteiro positivo, uma variedade  $n$ -dimensional *m-quasi-Einstein* é a base de um produto warped Einstein  $(n+m)$ -dimensional. Um ingrediente importante para entender o comportamento de uma tal classe de métricas em uma variedade Riemanniana é o tensor *m-Bakry-Émery* de Ricci, que apareceu primeiramente em (Qian, 1997) e (Bakry, 1996) e é definido a seguir.

**Definição 4.1** *Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $f$  uma função suave sobre  $M^n$ . O tensor *m-Bakry-Émery* de Ricci de  $M$  com respeito a  $f$ , denotado por  $\text{Ric}_f^m$ , é definido por*

$$\text{Ric}_f^m = \text{Ric} + \text{Hess } f - \frac{1}{m} df \otimes df, \quad (68)$$

com  $0 < m \leq \infty$ .

Observe que, se  $f$  é constante, então  $\text{Ric}_f^m = \text{Ric}$  e, assim, o tensor definido acima é uma extensão natural do tensor de Ricci em uma variedade Riemanniana.

O tensor *m-Bakry-Émery* de Ricci pode ser estendido (veja 2012 e 2010) para um campo arbitrário  $X$ , pondo-se

$$\text{Ric}_X^m = \text{Ric} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g - \frac{1}{m} X^b \otimes X^b, \quad (69)$$

onde  $\mathcal{L}_X g$  é a derivada de Lie da métrica  $g$  na direção de  $X$  e  $X^b$  é a 1-forma metricamente dual associada ao campo  $X$ .

Um problema interessante é o de determinar as variedades Riemannianas  $(M^n, g)$  tais que  $\text{Ric}_X^m = \lambda g$ , para algum campo de vetores  $X$  e alguma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Neste contexto, temos a seguinte definição importante.

**Definição 4.2** *Uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  é chamada *m-quasi-Einstein* se*

existem constantes  $m, \lambda \in \mathbb{R}$  e um campo de vetores  $X$  tais que

$$\text{Ric}_X^m = \text{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^b \otimes X^b = \lambda g. \quad (70)$$

No contexto da definição acima, é comum escrevermos que  $(M^n, g, X, \lambda)$ , ou simplesmente  $M^n$ , é  $m$ -quasi-Einstein.

Este problema é classicamente estudado quando  $X = \nabla f$ , para alguma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Nesse contexto, uma vez que  $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\text{Hess } f$ , diremos que  $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$  é  $m$ -quasi-Einstein, com *função potencial*  $f$ , se

$$\text{Ric}_f^m = \text{Ric} + \text{Hess } f - \frac{1}{m}df \otimes df = \lambda g. \quad (71)$$

A equação (70) é particularmente interessante. Se  $m = \infty$ , obtém-se a equação que define os conhecidos sólitons de Ricci. Se  $m$  é um inteiro positivo e  $X = \nabla f$ , então (cf. Teorema 2.2 de ?)  $M^n$  é a base de um produto warped Einstein com fibra  $m$ -dimensional. Quando  $X = 0$ , dizemos que  $(M^n, g, X, \lambda)$  é *trivial*, o que significa que  $(M, g)$  é Einstein.

Observamos que se fazemos  $u = e^{-\frac{f}{m}}$ , então, um cálculo direto mostra que a equação acima é equivalente a

$$\text{Ric} - \frac{m}{u}\text{Hess } u = \lambda g. \quad (72)$$

**Definição 4.3** *Uma variedade  $m$ -quasi-Einstein  $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$  é dita ser **expansiva** se  $\lambda < 0$ , **estacionária** se  $\lambda = 0$  e **contrátil** se  $\lambda > 0$ .*

Observamos que os sólitons de Ricci (o caso  $m = \infty$  da equação (70)) são as variedades Riemanniannas  $(M^n, g)$  que satisfazem a equação

$$\text{Ric} + \text{Hess } f = \lambda g, \quad (73)$$

para alguma função  $f \in C^\infty(M)$  e algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Assim como na definição acima, dizemos que um sólton de Ricci é expansivo, estacionário ou contrátil desde que tenhamos, na equação (73),  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  ou  $\lambda > 0$ , respectivamente.

Relembremos que, em uma variedade compacta  $M^n$ , uma métrica  $\infty$ -quasi-Einstein (i.e., um sólton de Ricci) com  $\lambda \leq 0$  é trivial (veja 2008). O mesmo resultado foi provado em (Kim, 2003) para uma métrica  $m$ -quasi-Einstein em uma variedade compacta com  $m$  finito. Além disso, é bem sabido que sólitons de Ricci compactos e contráteis têm curvatura escalar positiva (veja, por exemplo, 2008). Uma extensão deste resultado para métricas quasi-Einstein contráteis em uma variedade compacta, com  $1 \leq m < \infty$ , foi obtida em (Case, 2011). Recentemente, em (Brozos, 2014), Brozos-Vázquez e co-autores provaram que métricas Lorentzianas quasi-Einstein e localmente conformemente planas são globalmente conformemente equivalentes a uma forma espacial ou localmente

isométricas a uma *pp-wave* ou a um produto warped.

Ressaltamos que Bakry e Ledoux, em (1996), provaram um análogo do teorema de Myers. Além disso, baseados em desigualdades de Sobolev, apresentaram uma nova prova analítica do teorema de Cheng, o qual afirma que, se  $(M^n, g)$  é uma variedade Riemanniana com  $\text{Ric} \geq (n-1)g$  e diâmetro igual a  $\pi$ , então  $M^n$  é isométrica à esfera unitária  $\mathbb{S}^n$ . O resultado de Bakry e Ledoux implica que toda variedade quasi-Einstein contrátil é compacta. Além disso, se  $\mu$  é uma constante tal que  $\Delta_f f = \Delta f - \langle \nabla f, \nabla f \rangle = -m\mu e^{\frac{2}{m}f}$ , Case provou que não existem métricas  $m$ -quasi-Einstein estacionárias com  $\mu \leq 0$ , a não ser nos casos triviais (cf. 2010). Combinando os resultados de Bakry e Ledoux com o teorema de Case, concluímos que toda métrica quasi-Einstein não trivial em uma variedade não compacta deve ser expansiva se  $\mu \leq 0$ . Por outro lado, sabe-se que o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional  $\mathbb{H}^n$ , munido de sua métrica canônica, admite uma estrutura quasi-Einstein expansiva não trivial. Já o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e a esfera Euclidiana  $\mathbb{S}^n$  não admitem estruturas quasi-Einstein não triviais.

## 4.2 Métricas quasi-Einstein em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

No restante desse capítulo, consideramos a métrica canônica sobre  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , a qual é dada por

$$g = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2 + dt^2. \quad (74)$$

Provaremos que  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g)$  admite apenas duas estruturas *quasi-Einstein* distintas, apresentadas nos dois exemplos desta seção.

Começemos esta seção demonstrando alguns lemas que serão úteis à prova do Teorema 4.1. Nosso objeto de estudo é a variedade  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , dada por

$$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; x = (x_1, \dots, x_n), x_n > 0\}, \quad (75)$$

e munida com a métrica Riemanniana

$$g = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2 + dt^2.$$

É imediato verificar que  $E_i = x_n \partial_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $E_{n+1} = \partial_t$  fornecem um referencial ortonormal global. Além disso, um cálculo também imediato mostra que os colchetes de Lie de tais campos são dados por

$$[E_i, E_n] = -E_i, \quad (76)$$

para  $i = 1, \dots, n-1$ , e

$$[E_j, E_i] = 0 \quad (77)$$

nos demais casos.

Agora, usando a fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle, \end{aligned}$$

concluimos que a conexão Riemanniana  $\nabla$  correspondente a  $g$  é dada por

$$\nabla_{E_i} E_i = E_n \quad e \quad \nabla_{E_i} E_n = -E_i, \quad (78)$$

para  $i = 1, \dots, n-1$ , e  $\nabla_{E_j} E_k = 0$  nos demais casos.

O seguinte lema dá a expressão do tensor de Ricci de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ .

**Lema 4.1** *O tensor de Ricci de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  é dado por*

$$\text{Ric} = -(n-1)g + (n-1)dt^2.$$

**Demonstração:** Lembramos que  $\text{Ric}(X, Y) = \sum_{k=1}^{n+1} \langle R(E_k, X)Y, E_k \rangle$ , onde  $R$  denota o operador de curvatura de  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . Para  $i = 1, \dots, n-1$ , temos então que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(E_i, E_i) &= \sum_{k \neq i} \langle R(E_k, E_i)E_i, E_k \rangle \\ &= \sum_{k \neq i} \langle \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i - \nabla_{[E_k, E_i]} E_i, E_k \rangle \\ &= \sum_{k \neq i} \langle \nabla_{E_k} E_n - \nabla_{[E_k, E_i]} E_i, E_k \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_n} E_n - \nabla_{[E_n, E_i]} E_i, E_n \rangle + \sum_{k \neq i, n} \langle \nabla_{E_k} E_n - \nabla_{[E_k, E_i]} E_i, E_k \rangle \\ &= \langle -\nabla_{E_i} E_i, E_n \rangle + \sum_{k \neq i, n} \langle \nabla_{E_k} E_n, E_k \rangle \\ &= -1 + \sum_{k \neq i, k < n} \langle -E_k, E_k \rangle \\ &= -(n-1). \end{aligned}$$

Cálculos diretos também mostram que  $\text{Ric}(E_n, E_n) = -(n-1)$ ,  $\text{Ric}(E_{n+1}, E_{n+1}) = 0$  e  $\text{Ric}(E_i, E_j) = 0$ , se  $i \neq j$ . Isto conclui a demonstração.

**Exemplo 4.1** Consideramos  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  com a métrica canônica (74) e a função potencial  $f(x, t) = \pm \sqrt{(n-1)mt}$ . É fácil ver que  $\nabla f = \pm \sqrt{(n-1)m} \partial_t$  e, com isso,  $\text{Hess } f = 0$

(veja (78)). Como  $\text{Ric}_g = -(n-1)g + (n-1)dt^2$  (cf. lema (4.1)), temos

$$\begin{aligned}\text{Ric}_f^m &= -(n-1)g + (n-1)dt^2 - \frac{1}{m}m(n-1)dt^2 \\ &= -(n-1)g,\end{aligned}\tag{79}$$

isto é,  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, \nabla f, -(n-1))$  é  $m$ -quasi-Einstein, para todo  $m > 0$ .

No exemplo acima,  $X = \nabla f$  é um campo de Killing em relação a  $g$ . Em seguida, descrevemos nosso segundo exemplo, onde o campo associado à estrutura quasi-Einstein não é Killing.

**Exemplo 4.2** Consideramos  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  com a métrica canônica (74), e a função potencial  $f(x, t) = -m \ln(\cosh(\mu t + a))$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $\mu = \sqrt{\frac{n-1}{m}}$ . Não é difícil mostrar que  $\nabla f = -m\mu \tanh(\mu t + a)\partial_t$  e, assim (veja (78)),

$$\text{Hess } f(E_i, E_j) = -m\mu E_i(\tanh(\mu t + a))\delta_{n+1,j}.$$

Em particular,  $\text{Hess } f(E_i, E_j) = 0$  se  $i \neq n+1$  ou  $j \neq n+1$ . Além disso,

$$\text{Hess } f(E_{n+1}, E_{n+1}) = -m\mu^2 \text{sech}^2(\mu t + a),$$

o que nos dá

$$\text{Hess } f = -m\mu^2 \text{sech}^2(\mu t + a)dt^2.\tag{80}$$

Então, os cálculos acima, juntamente com o Lema 4.1 e a definição de  $\mu$ , fornecem

$$\begin{aligned}\text{Ric}_f^m &= -(n-1)g + (n-1)dt^2 - m\mu^2 \text{sech}^2(\mu t + a)dt^2 \\ &\quad - \frac{1}{m}m^2\mu^2 \tanh^2(\mu t + a)dt^2 \\ &= \{(n-1) - m\mu^2[\text{sech}^2(\mu t + a) + \tanh^2(\mu t + a)]\}dt^2 \\ &\quad - (n-1)g \\ &= -(n-1)g,\end{aligned}$$

de sorte que  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, \nabla f, -(n-1))$  é  $m$ -quasi-Einstein, para todo  $m > 0$ .

É importante ressaltar que o objeto básico de estudo em relatividade geral é uma variedade Lorentziana  $(M^n, g)$  satisfazendo a equação de Einstein

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg = 9\pi T,\tag{81}$$

onde  $R$  e  $T$  são, respectivamente, a curvatura escalar e o tensor de *stress-energy* da matéria (cf. Wald, 2010). A primeira solução da equação de Einstein (com  $T = 0$ ) foi obtida por Schwarzschild em 1916 (para mais informações veja 1983). Neste ponto, é im-

portante lembrar que um espaço-tempo *estático* é uma variedade de dimensão quatro que admite um campo tipo-tempo Killing e uma hipersuperfície tipo-espaço que é ortogonal às curvas integrais deste campo (veja 2010). Espaços-tempo estáticos são soluções globais importantes da equação de Einstein em relatividade geral. É importante também lembrar que métricas 1-quasi-Einstein satisfazendo  $\Delta e^{-f} + \lambda e^{-f} = 0$  são *métricas estáticas* com constante cosmológica  $\lambda$ . Métricas estáticas vêm sendo muito estudadas devido à sua conexão com curvatura escalar e ao teorema da massa positiva em relatividade geral (cf. Corvino,2000) e (Anderson, 1999)). Por outro lado, lembramos que, em uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , a linearização do operador de curvatura escalar é dada por

$$\mathfrak{L}_g(h) = -\Delta_g(\text{tr}_g(h)) + \text{div}(\text{div}(h)) - g(h, \text{Ric}_g), \quad (82)$$

onde  $h$  é um 2-tensor. Além disso, o  $L^2$ -adjunto formal  $\mathfrak{L}_g^*$  de  $\mathfrak{L}_g$  é dado por

$$\mathfrak{L}_g^*(u) = -(\Delta_g u)g + \text{Hess } u - u\text{Ric}_g, \quad (83)$$

onde  $u$  é uma função suave sobre  $M^n$ .

Sob tais condições,  $u$  é um elemento não trivial do núcleo de  $\mathfrak{L}_g^*$  se, e somente se, a métrica produto warped  $\bar{g} = -u^2 dt^2 + g$  é Einstein (veja a Proposição 2.7 de (Corvino,2000)).

Se  $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$  é  $m$ -quasi-Einstein, com  $m < \infty$ , podemos considerar  $u = e^{-\frac{f}{m}}$  e reescrever a equação fundamental (71) como

$$\text{Ric} - \frac{m}{u}\text{Hess } u = \lambda g. \quad (84)$$

Com isso, combinando (83) e (84), podemos concluir dos Exemplos 4.1 e 4.2 que  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g)$  produz produtos warped Einstein.

Estamos, agora, em condições de enunciar o principal resultado deste capítulo, o qual mostra que os exemplos descritos anteriormente são únicos. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.1** *Se  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, \nabla f, \lambda)$  é  $m$ -quasi-Einstein, então  $f$  é dada como no Exemplo 4.1 ou como no Exemplo 4.2.*

Observamos que o Teorema 4.1 mostra que existe um produto warped natural sobre a base  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  para cada  $m > 0$ , com função warping  $e^{-\frac{f}{m}}$ , onde  $f$  é dada como nos Exemplos (4.1) ou (4.2). Além disso, relembremos que métricas Riemannianas com  $\text{Ker}(\mathfrak{L}_g^*)$  não trivial são também chamadas *estáticas*. Sendo assim, para  $m = 1$  é fácil checar que  $\Delta e^{-f} + \lambda e^{-f} = 0$ , o que nos permite concluir, de (83), que  $g$  é uma métrica estática em  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ .

### 4.3 Prova do Teorema 4.1

Nesta seção, supomos que  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, \nabla f, \lambda)$  é  $m$ -quasi-Einstein. Inicialmente, usamos o Lema 4.1 para deduzir o resultado auxiliar a seguir.

**Lema 4.2** *Se  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, \nabla f, \lambda)$  é  $m$ -quasi-Einstein, então:*

- (a)  $x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{m} x_n^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + \lambda + (n-1)$ , se  $i < n$ ;
- (b)  $x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \frac{1}{m} x_n^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 + \lambda + (n-1)$ ;
- (c)  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \lambda$ ;
- (d)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ , se  $i < j < n$ ;
- (e)  $x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} + x_n \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{m} x_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_n}$ , se  $i < n$ ;
- (f)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial t}$ , se  $i \leq n$ .

**Demonstração:** Para obter o item (a), aplicamos cada membro de (71) ao par  $(E_i, E_i)$ , com  $i < n$ , e usando (78) em seguida, temos

$$\begin{aligned} \lambda &= -(n-1) + \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle - \frac{1}{m} x_n^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= -(n-1) + E_i \langle \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{E_i} E_i \rangle - \frac{1}{m} x_n^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= -(n-1) + x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{1}{m} x_n^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Agora, aplique um raciocínio análogo aos pares  $(E_n, E_n)$ ,  $(E_{n+1}, E_{n+1})$ ,  $(E_i, E_j)$  com  $i < j < n$ ,  $(E_i, E_n)$  com  $i < n$  e  $(E_i, E_{n+1})$  com  $i \leq n$ , para obter (b), (c), (d), (e) e (f), respectivamente. Isto conclui a demonstração.

Como aplicação do Lema 4.2, temos o seguinte resultado.

**Lema 4.3** *Se  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g, \nabla f, \lambda)$  é  $m$ -quasi-Einstein então,  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \pm \sqrt{-m\lambda}$  ou  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -\sqrt{-m\lambda} \tanh(\mu t + a)$ , onde  $a = a(x)$  e  $\mu = \sqrt{-\frac{\lambda}{m}}$ .*

**Demonstração:** Fixe  $x \in \mathbb{H}^n$  e faça  $h(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ . Então,  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  e, pelo item (c) do Lema 4.2, temos

$$h' = \frac{h^2}{m} + \lambda. \quad (85)$$

Se  $h' \equiv 0$ , então  $h = \pm \sqrt{-m\lambda}$ , o que nos dá a primeira parte.

Suponhamos, então, que  $m^{-1}h^2 + \lambda \neq 0$ . A equação (85) pode ser reescrita como

$$h' = \frac{1}{(m^{-1}h^2 + \lambda)^{-1}}, \quad (86)$$

uma EDO separável de primeira ordem. As soluções são

$$\begin{aligned} h(t) &= \sqrt{m\lambda} \tan\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}(t+c)\right), \text{ se } \lambda > 0, \\ h(t) &= -\frac{m}{t+c}, \text{ se } \lambda = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\left| \frac{h(t) - \sqrt{-m\lambda}}{h(t) + \sqrt{-m\lambda}} \right| = \exp\left(2\sqrt{-\frac{\lambda}{m}}(t+c)\right), \text{ se } \lambda < 0,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ . Mas, como  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ , os dois primeiros casos acima não nos servem. Como estamos supondo  $m^{-1}h^2 + \lambda \neq 0$ , isto é,  $h(t) \neq \pm\sqrt{-m\lambda}$ , temos duas possibilidades para o caso  $\lambda < 0$ :

- (1)  $\frac{h(t) - \sqrt{-m\lambda}}{h(t) + \sqrt{-m\lambda}} = \exp\left(2\sqrt{-\frac{\lambda}{m}}(t+c)\right)$ ;
- (2)  $\frac{h(t) - \sqrt{-m\lambda}}{h(t) + \sqrt{-m\lambda}} = -\exp\left(2\sqrt{-\frac{\lambda}{m}}(t+c)\right)$ .

Escrevendo  $\mu = \sqrt{-\frac{\lambda}{m}}$  temos, para o primeiro caso,

$$h(t) = \sqrt{-m\lambda} \coth(-\mu(t+c)),$$

a qual não serve, uma vez que  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Para o segundo caso, temos

$$h(t) = \sqrt{-m\lambda} \tanh(-\mu(t+c)) = -\sqrt{-m\lambda} \tanh(\mu t + a),$$

o que conclui a demonstração.

Observamos que o lema acima garante que  $\lambda \leq 0$ . Em verdade, segue do item (b) do Teorema 3.6 de (Case, 2010) que, para  $m > 1$ , tem-se  $\lambda < 0$ , pois se tivéssemos  $\lambda = 0$ , então  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  seria Ricci-flat, o que é uma contradição.

Podemos, finalmente, apresentar a prova do Teorema 4.1.

**Demonstração do Teorema 4.1:** Nas notações do Lema 4.3, temos as possibilidades

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \pm\sqrt{-m\lambda}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -\sqrt{-m\lambda} \tanh(\mu t + a),$$

onde  $a = a(x)$  e  $\mu = \sqrt{-\frac{\lambda}{m}}$ .

No primeiro caso, segue do item (f) do Lema 4.2 que

$$\frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\pm \sqrt{-m\lambda}) = 0.$$

Mas como  $\lambda < 0$  (cf. parágrafo que segue a demonstração do Lema 4.3), temos  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  para  $i \leq n$ . Além disso, segue do item (a) do Lema 4.2 que  $\lambda = -(n-1)$  e, assim,  $f(x, t) = \pm \sqrt{m(n-1)}t$ .

Suponhamos, pois, que  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -\sqrt{-m\lambda} \tanh(\mu t + a)$ . Segue do item (f) do Lema 4.2 que

$$\operatorname{sech}^2(\mu t + a) \frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{1}{m} \tanh(\mu t + a) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (87)$$

para cada  $(x, t) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ .

Por outro lado, fixando  $x \in \mathbb{H}^n$  e escolhendo  $t \in \mathbb{R}$  de tal modo que  $\tanh(\mu t + a) = 0$ , segue de (87) que  $\operatorname{sech}^2(\mu t + a(x)) \frac{\partial a}{\partial x_i}(x) = 0$ . Mas, como  $\operatorname{sech}^2(\mu t + a)$  nunca se anula, concluímos que  $\frac{\partial a}{\partial x_i} = 0$ . Como  $x \in \mathbb{H}^n$  foi fixado arbitrariamente, obtemos  $\frac{\partial a}{\partial x_i} \equiv 0$ , o que implica que  $a = a(x)$  é constante. Assim,

$$\frac{1}{m} \tanh(\mu t + a) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

para todo  $(x, t) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , de onde segue que  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ , para  $i \leq n$ . Usando novamente o item (a) do Lema 4.2, obtemos  $\lambda = -(n-1)$ , o que finaliza a demonstração.

## 5 CONCLUSÃO

No primeiro capítulo deste trabalho abordamos o problema da estabilidade de cones Euclidianos construídos sobre superfícies mínimas da esfera unitária, provando que se  $\Sigma^2 \subset \mathbb{S}^3$  é uma superfície mínima, fechada, não totalmente geodésica, então o cone  $C\Sigma \subset \mathbb{S}^4$  é mínimo mas não minimiza área em relação à variações que fixam seu bordo. Uma questão em aberto é saber se há uma dimensão ótima, isto é, se a partir de certa dimensão o cone passa a ser estável.

No segundo capítulo estudamos um problema de rigidez de hipersuperfícies completas e não compactas  $\Sigma^n$  no espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Provamos que se  $n \geq 3$ , a curvatura média  $H$  é limitada, a curvatura escalar  $R$  é constante e menor que 1 e a imagem da aplicação hiperbólica de Gauss está contida em uma horoesfera ou em um hemisfério determinados por um certo vetor  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , então  $\Sigma$  é totalmente umbílica. Um problema interessante seria analisar o caso  $n = 2$ .

Por fim, no terceiro capítulo abordamos o problema de determinar as estruturas *quasi-Einstein* existentes em  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ , provando que esta variedade munida da métrica produto é *m-quasi-Einstein* se, e somente se, a função potencial é da forma  $e^{\pm\alpha t}$  ou  $\cosh(\alpha t + a)$ , com  $\alpha = \sqrt{(n-1)m^{-1}}$ . Seria interessante fazer a mesma classificação para casos mais gerais, como  $M \times \mathbb{R}$ , onde  $M$  tem curvatura de Ricci constante e negativa.

## REFERÊNCIAS

- AKUTAGAWA, K. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. **Mathematische Zeitschrift**, v. 196, n. 1, p. 13–19, 1987.
- ALÍAS, L. On the Ricci curvature of compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space. **Geometriae Dedicata**, v. 77, n. 3, p. 297–304, 1999.
- ALMGREN, F. J. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. **Annals of Mathematics**, p. 277–292, 1966.
- ANDERSON, M. T. Scalar curvature, metric degenerations and the static vacuum Einstein equations on 3-manifolds, I. **Geometric and Functional Analysis**, v. 9, n. 5, p. 855–967, 1999.
- AQUINO, C. P.; LIMA, H. F. On the umbilicity of complete constant mean curvature spacelike hypersurfaces. **Mathematische Annalen**, v. 360, n. 3-4, p. 555–569, 2014.
- BAKRY, D.; LEDOUX, M. Sobolev inequalities and Myers diameter theorem for an abstract Markov generator. **Duke Mathematical Journal**, v. 85, n. 1, p. 253–270, 1996.
- BARROS, A.; RIBEIRO, E. Integral formulae on quasi-Einstein manifolds and applications. **Glasgow Mathematical Journal**, v. 54, n. 01, p. 213–223, 2012.
- BESSE, A. L. **Einstein manifolds**. Springer Science & Business Media, 2007.
- BROZOS-VÁZQUEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.; GAVINO-FERNÁNDEZ, S. Locally conformally flat Lorentzian quasi-Einstein manifolds. **Monatshefte für Mathematik**, v. 173, n. 2, p. 175–186, 2014.
- CAMARGO, F.; CAMINHA, A.; de LIMA, H. Bernstein-type theorems in semi-Riemannian warped products. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 139, n. 5, p. 1841–1850, 2011.
- CAMINHA, A. Introdução a geometria das aplicações harmônicas. **XVI Escola de Geometria Diferencial**. São Paulo: USP, 2010.
- CAMINHA, A. The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, v. 42, n. 2, p. 277–300, 2011.
- CAO, H.-D. **Recent Progress on Ricci Solitons**. Tech. rep., 2009.

CASE, J. On the nonexistence of quasi-Einstein metrics. **Pacific J. Math.**, v. 248, n. ?, p. 227–284, 2010.

CASE, J.; SHU, Y.-J.; WEI, G. Rigidity of quasi-Einstein metrics. **Differential Geometry and its Applications**, v. 29, n. 1, p. 93–100, 2011.

CHAVEL, I. **Eigenvalues in Riemannian geometry**, v. 115. Academic press, 1984.

CORVINO, J. Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000.

COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of mathematical physics**, v. 1. CUP Archive, 1966.

do CARMO, M. P. **Geometria riemanniana**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

EMINENTI, M.; LA NAVE, G.; MANTEGAZZA, C. Ricci solitons: the equation point of view. **Manuscripta Mathematica**, v. 127, n. 3, p. 345–367, 2008.

GODDARD, A.J. Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. Cambridge Univ Press, 1977, v. 82, p. 489–495.

HE, C.; PETERSEN, P.; WYLIE, W. On the classification of warped product Einstein metrics. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 20, n. 2, 2012.

KIM, D.-S.; KIM, Y. Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, n. 8, p. 2573–2576, 2003.

LIMONCU, M. Modifications of the Ricci tensor and applications. **Archiv der Mathematik**, v. 95, n. 2, p. 191–199, 2010.

MONTIEL, S. An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 37, n. 4, p. 909–917, 1988.

NASCIMENTO, F. Y. S. **Sobre a geometria das horoesferas**. 2013.

OKUMURA, M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. **American Journal of Mathematics**, p. 207–213, 1974.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity**,

103, v. 103. Academic press, 1983.

QIAN, Z. Estimates for weighted volumes and applications. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. 48, n. 2, p. 235–242, 1997.

SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. **Annals of Mathematics**, p. 62–105, 1968.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**, v. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.

WALD, R. M. **General relativity**. University of Chicago press, 2010.