UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

JUSCILEIDE BRAGA DE CASTRO

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COVARIAÇÃO POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL EM AMBIENTES DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES COM SUPORTE DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

FORTALEZA
2016

JUSCILEIDE BRAGA DE CASTRO

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COVARIAÇÃO POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL EM AMBIENTES DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES COM SUPORTE DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação. Área de concentração: Educação brasileira. Linha de pesquisa: Educação, currículo e ensino. Eixo: Tecnologias digitais na educação.
Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

C351c Castro, Juscileide Braga de.
Construção do conceito de covariação por estudantes do Ensino Fundamental em ambientes de múltiplas representações com suporte das tecnologias digitais / Juscileide Braga de Castro. – 2016.
273 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Educação brasileira.
Orientação: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

1. Tecnologia educacional. 2. Teoria dos Campos Conceituais. 3. Covariação. 4. Estruturas multiplicativas. I. Título.

CDD 370

JUSCILEIDE BRAGA DE CASTRO

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COVARIAÇÃO POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL EM AMBIENTES DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES COM SUPORTE DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação. Área de concentração: Educação brasileira. Linha de pesquisa: Educação, currículo e ensino. Eixo: Tecnologias digitais na educação.

Aprovada em: 16/03/2016.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Profa. Dra. Ana Maria Iório Dias
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Paulo Meireles Barguil
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Profa. Dra. Marcília Chagas Barreto
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

____
Prof. Dr. Antônio Luiz de Oliveira Barreto
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A todos os professores e professoras, para que possa proporcionar o esclarecimento de dúvidas e disseminação de novas ideias para a prática pedagógica.

AGRADECIMENTOS

Para a concretização desta tese, recebi contribuições de natureza diversas que não podem e nem devem deixar de ser mencionadas, pois, ninguém faz nada sozinho. Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos.

À minha mãe (*in memoriam*), que me deixou ensinamentos que seguirei por toda a minha vida.

Ao meu filho, Igor Braga Palhano, pela paciência e compreensão por minhas ausências, principalmente, pela torcida que tem sido importante a cada vitória.

À minha família, meus irmãos e sobrinhos que me acompanharam nesta caminhada, torcendo e apoiando todos os meus passos e escolhas. Ao meu irmão Ítalo Braga, em especial, pelas orientações e ajuda na análise dos dados quantitativos.

Ao professor e orientador, José Aires de Castro Filho, pela amizade, generosidade e confiança em mim depositada. Agradeço por acreditar em meu potencial, assim como por todas as oportunidades que me foram dadas.

Aos professores: Marcília Chagas Barreto, Paulo Meireles Barguil e Ana Maria Iório Dias pelas valorosas contribuições na qualificação, imprescindíveis para o desenvolvimento da pesquisa e conclusão desta tese. Ao professor Antônio Luiz de Oliveira Barreto por, juntamente aos demais professores, ter aceitado participar da banca de defesa.

À Prefeitura Municipal de Fortaleza e à escola onde realizei a pesquisa. Ao apoio incondicional da professora Ana Carla Amâncio Machado Dias, que possibilitou a realização da pesquisa. A todas as crianças que participaram da pesquisa, pelo carinho e pelo aprendizado que me proporcionaram.

Ao Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem (PROATIVA), pelo qual tenho um enorme carinho por todos os seus integrantes, por me proporcionar uma base sólida de conhecimento e apoio para a realização desse trabalho.

Ao Projeto OBEDUC, por me proporcionar ricos momentos de aprendizado sobre as estruturas multiplicativas que foram imprescindíveis para a realização desta tese. Agradeço aos integrantes de todos os núcleos: de Recife, de Ilhéus e, principalmente, do Ceará.

Ao Danilo do Carmo de Souza, à Jéssica Barbosa dos Santos, à Maria Lidiana Ferreira Osmundo e à Maria Silvânia Marques Xavier na realização das intervenções na escola. Ao Fernando Antônio Batista dos Santos Júnior pela criação da identidade visual do projeto.

À Maria Alinne Forte de Brito e ao Nonato Ribeiro com o suporte na revisão e normalização deste trabalho.

À Kiara Lima Costa e à Deborah Monte Medeiros pela amizade, torcida e apoio recebido nessa longa jornada.

À FUNCAP, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Gratidão a tantos outros queridos amigos não citados, cujo afeto, apoio moral e o constante encorajamento nunca faltaram.

"Só conhecendo a forma como os alunos aprendem é possível ensinar." (Gérard Vergnaud)

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar as contribuições de metodologia desenvolvida, com suporte de tecnologias digitais, para o desenvolvimento do conceito de covariação presente nas estruturas multiplicativas. Para isso, foram realizadas análises das situações presentes no campo conceitual multiplicativo, verificando a ocorrência, ou não, da covariação. O desenvolvimento das atividades foi fundamentado em estudos relacionados às contribuições das múltiplas representações para a aprendizagem e da abordagem *seres-humanos-com-mídias*. Utilizou-se, como metodologia, a pesquisa de intervenção. A investigação foi realizada em uma Escola Municipal de Tempo Integral, localizada no município de Fortaleza - Ceará, com estudantes de uma das turmas do 6° ano do Ensino Fundamental. A turma de alunos foi dividida em: Grupo Controle (GC), com 15 alunos e Grupo Experimental (GE), com 12 alunos. A investigação foi dividida em três etapas: pré-teste, intervenção e pós-teste. Todos os alunos, dos dois grupos, participaram do pré-teste e do pós-teste, aplicados individualmente e sem uso do computador. Tendo sido aplicados para diagnosticar os conhecimentos dos alunos em relação à compreensão de situações de proporção simples, de proporção múltipla, de proporção dupla, de interpretação e construção de gráficos lineares e compreensão de padrão de tabelas. A intervenção aconteceu apenas com o GE, no momento das aulas de Matemática. Essa etapa teve duração de 3 meses, com 18 encontros. As atividades desenvolvidas para esses encontros, utilizavam tecnologias digitais como: *software* Geogebra, recurso digital *Equilibrando proporções*, aplicativo *online* Cacoo, *WhatsApp* e *blog*. O GC manteve as aulas de Matemática e de disciplinas eletivas, nos mesmos horários do GE. Os dados foram analisados de modo a conhecer e compreender o desempenho dos alunos antes e após as atividades; os teoremas-em-ação mobilizados durante a intervenção e suas evoluções; e as contribuições das tecnologias usadas para a compreensão do conceito de covariação. Os estudantes submetidos à intervenção apresentaram, estatisticamente, um desempenho superior, quando comparados aos estudantes do GC, demonstrando a eficácia da metodologia. Constatou-se, ainda, a modificação de esquemas por meio de estratégias mais elaboradas, mesmo para situações que já eram conhecidas pelos estudantes do GE. As tecnologias digitais utilizadas contribuíram para a compreensão da invariância e da covariação, ao relacionar múltiplas representações de forma dinâmica, possibilitar a produção de conhecimento e a significação de contextos sociais e matemáticos.

Palavras-chave: Covariação. Estruturas multiplicativas. Tecnologias digitais.

ABSTRACT

This research aimed to analyze the contributions of a methodology with support of digital technologies, for the development of the co-variation concept present in multiplicative structures. Thus, analyzes of situations present in the multiplicative conceptual field were performed, verifying the occurrence or not of covariance. The developed activities were based on studies related to contributions of multiple representations for learning and human-media approach. To verify the contributions of the activities, an intervention research was conducted. The study was performed in a Middle School, located in Fortaleza - Ceara, using students from the 6th year. The students were divided in control group (CG), with 15 students and Experimental Group (EG), with 12 students. The approach used in the research was divided in three stages: pre-test, intervention and post-test. All students, from both groups participated of the pre-test and post-test, which was applied individually without computer use. The testes were applied to diagnose students' knowledge about situations of simple proportion, multiple proportion, double proportion, interpretation and construction of linear graphs and understanding of tables patterns. The intervention was performed only in EG during the mathematics classes. This phase, was carried out in 18 meetings during three months. During these meetings the activities used digital technologies such as Geogebra software, digital resource balancing proportions, online application Cacoo, WhatsApp and blogs. Simultaneously, the GC attend mathematics and elective classes. The produced data were analyzed in order to understand the student performance before and after proposed activities; theorems-in-action mobilized during the intervention and its evolution; and the contributions of the technologies to the understanding of the covariation concept. Students from the EG showed statistically superior performance than students from GC. In addition, was also detected among EG students modification of schemes applying more elaborate strategies, even in already known situations. The used digital technologies have contributed conceptually to the understanding of invariance and covariance, by linking multiple representations of dynamical ways, allowing the construction and production of knowledge and the significance of social and mathematical contexts.

Keywords: Covariation. Multiplicative structures. Digital technologies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE PROTOCOLOS DE TRANSCRIÇÃO

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BIOE	- Banco Internacional de Objetos Educacionais
CAPES	- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
COMEPE	- Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos
CSCL	- *Computer-Supported Collaborative Learning*
E-MULT	- Grupo de estudo das Estruturas Multiplicativas
GC	- Grupo Controle
GE	- Grupo Experimental
INAF	- Instituto Nacional de Analfabetismo Funcional
INEP	- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LIE	- Laboratório de Informática Educativa
MAES	- Grupo de Pesquisa Matemática e Ensino
MEC	- Ministério da Educação
MERLOT	- *Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching*
NLVM	- *National Library of Virtual Manipulatives*
OA	- Objeto de Aprendizagem
OBEDUC	- Observatório da Educação
PCN	- Parâmetros Curriculares Nacional
PISA	- *Program International Students Assessment*
PMF	- Prefeitura Municipal de Fortaleza
PROATIVA	- Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem
RCNEI	- Referencial Curricular Nacional da Educação Infantil
RIVED	- Rede Internacional Virtual de Educação
SAEB	- Sistema de Avaliação da Educação Básica
TCC	- Teoria dos Campos Conceituais
TCLE	- Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDIC	- Tecnologia Digital de Informação e Comunicação
TIC	- Tecnologia de Informação e Comunicação
UCA	- Um Computador por aluno
UECE	- Universidade Estadual do Ceará
UESC	- Universidade Estadual de Santa Cruz

UFC	- Universidade Federal do Ceará
UFF	- Universidade Federal Fluminense
UNIJUÍ	- Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Avaliações de larga escala aplicadas a alunos da Educação Básica, em nível internacional, nacional e local, como: *Program International Students Assessment* (PISA); Prova Brasil, Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Sistema Permanente de Avaliação da Educação do Estado do Ceará (SPAECE) apontam baixos índices de proficiência em Matemática, principalmente relacionadas ao raciocínio multiplicativo.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes[1] (PISA) dos últimos anos mostra que, embora o Brasil tenha melhorado suas notas em matemática de 334 pontos em 2000 para 391 pontos em 2012, o País continua no nível 1, numa escala de 1 a 5 (BRASIL, 2012). Esses dados demonstram que estudantes brasileiros não conseguem interpretar situações que exigem apenas deduções diretas da informação dada e não são capazes de entender percentuais, frações ou gráficos.

Os resultados divulgados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2011, relativos aos alunos do 5° ano do Ensino Fundamental, reafirmam o baixo desempenho em matemática, pois, apenas 1,70% dos alunos do 5º ano pontuaram no nível mais alto (BRASIL, 2011). Em uma análise mais detalhada em relação aos conteúdos das estruturas multiplicativas, constata-se que somente 20,22% dos alunos são capazes de resolver problemas contendo a multiplicação envolvendo a noção de proporcionalidade; 10,55% conseguem resolver problemas com a divisão exata ou a multiplicação de números naturais; 4,39% resolvem problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais requerendo mais de uma operação e 1,70% dos alunos são capazes de resolver problemas compreendendo multiplicação com significado de combinatória.

Os resultados do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) também apontam um baixo desempenho em Matemática. No exame realizado em 2012, apenas 20,2% dos estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental estavam no nível considerado adequado (CEARÁ, 2013). Segundo a escala de proficiência do SPAECE, é considerado no nível adequado os estudantes que atingirem acima de 250 pontos, sendo capazes, dentre outras habilidades, de resolverem problemas utilizando a multiplicação e reconhecendo que um número não se altera ao multiplicá-lo por um.

---

[1] *Program International Students Assessment.* Suas avaliações têm periodicidade trienal e contemplam, apenas, três áreas: Leitura, Matemática e Ciências. A próxima avaliação de Matemática está prevista para o ano de 2018, pois, em 2015 aconteceu a de Ciências.

Esses resultados mostram uma baixa proficiência que os estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental apresentam ao chegar ao 6° ano de escolaridade, em relação aos problemas envolvendo raciocínio multiplicativo (multiplicação, divisão, razão, porcentagem e proporcionalidade).

O raciocínio multiplicativo tem sido estudado por Vergnaud (1988) em sua Teoria dos Campos Conceituais (TCC), que propõe a divisão de conceitos matemáticos em campos conceituais. Esse tipo de raciocínio faz parte do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, no qual estão presentes os conceitos de funções linear e não-linear, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, a razão, a proporção, o número racional, a multiplicação e a divisão (VERGNAUD, 1983, 1988, 1994).

Os problemas que envolvem a operação de multiplicação e/ou divisão diferem dos problemas que envolvem, por exemplo, a adição. Magina, Santos e Merline (2010, 2012) explicam que o raciocínio multiplicativo corresponde à definição de uma relação fixa entre duas quantidades, ou seja, toda situação multiplicativa envolve duas quantidades (de naturezas iguais ou distintas) e uma relação constante entre elas.

Devido a essas características, as situações do campo conceitual multiplicativo, segundo Vergnaud (1983, 1988, 2009), apresentam um quadro de proficiência mais crítico por envolverem um esquema mais complexo de pensamento. Diversos autores consideram que o raciocínio proporcional é um processo complexo de pensamento matemático, que faz parte do campo multiplicativo e serve para consolidar ideias matemáticas, sendo, portanto, a base para pensamentos matemáticos mais avançados envolvendo relações proporcionais (CRAMER; POST; CURRIER, 1993; LESH; POST; BEHR, 1988; VERGNAUD, 1983; LAMON, 2005).

Lamon (2005) esclarece que o raciocínio proporcional tem como base a sofisticação do raciocínio multiplicativo devido à necessidade de comparar duas quantidades em termos relativos, ou seja, estabelecendo relações, ao invés de em termos absolutos, como é requisitado no raciocínio aditivo.

Os conceitos relacionados à proporcionalidade são fundamentais para a compreensão da Matemática de uma forma geral, pois são habilidades extremamente pertinentes nas práticas cotidianas da sociedade. Estas habilidades podem estar presentes em situações do dia a dia, como na preparação de uma receita; na comparação de preços de produtos com quantidades diferentes; na verificação do montante a ser recebido em relação às horas trabalhadas, na constatação dos quilômetros percorridos em uma viagem, baseado na velocidade e no tempo transcorrido; além de muitas outras.

Lamon (2003) explica que a compreensão de proporcionalidade envolve a capacidade de fazer análises conscientes da relação entre duas quantidades - invariância, e da compreensão de como elas variam em conjunto - covariância. A invariância é percebida por uma relação fixa entre duas quantidades, como quilômetros por hora. A covariação envolve o entendimento de situações em que duas quantidades variam em conjunto. Por exemplo, se para fazer um bolo gastam-se 3 ovos por bolo, para fazer 5 bolos, usando esta mesma proporção, serão precisos 15 ovos.

Os conceitos envolvidos no campo conceitual das estruturas multiplicativas estão presentes em vários conteúdos curriculares da Matemática da Educação Básica, perpassando todos os blocos de conteúdos classificados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Números e Operações, Grandezas e Medidas, Espaço e Forma e Tratamento da Informação (BRASIL, 1997). Pode-se considerar que a compreensão da proporcionalidade e o desenvolvimento do raciocínio proporcional são basilares para o ensino elementar da Matemática (LESH; POST; BEHR, 1988).

Ainda que o currículo de Matemática considere, desde cedo, a proporcionalidade em seu percurso escolar, o que se observa é que os estudantes apresentam dificuldades em compreender a sua natureza multiplicativa.

Silvestre e Ponte (2009) sugerem que o raciocínio proporcional deve envolver a capacidade de: distinguir situações de natureza proporcional de situações que não tem essa natureza; compreender a natureza multiplicativa das relações proporcionais e resolver diferentes tipos de situações, com abordagens e representações diferenciadas (textos, gráficos, tabelas, razões).

É muito comum que o ensino seja focado nas regras e procedimentos, objetivando, principalmente, a fixação do conteúdo para a obtenção de resultados imediatos (VERGNAUD, 2009). No estudo de proporcionalidade, por exemplo, o algoritmo da regra de três não favorece o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Post, Behr e Lesh (1988) e Hart (1984) esclarecem que, muitas vezes, o uso do algoritmo é mal compreendido pelos alunos, gerando, em poucas ocasiões, um método de resolução natural, além do automatismo ser, muitas vezes, utilizado pelos estudantes.

Para evitar a falta de compreensão do uso do algoritmo do produto cruzado, Ponte *et al.* (2010) defendem que é preciso enfatizar as relações multiplicativas existentes nas relações de proporcionalidade, uma vez que essas associações envolvem aspectos de covariação de quantidades e a invariância entre essas quantidades.

Diversos autores associam o raciocínio proporcional com o sentido de covariação, considerando, também, as relações multiplicativas (CABRITA, 1998; LAMON, 2005, 2007; LESH; POST; BEHR, 1988). Lesh, Post e Behr (1988) consideram que o sentido de covariação está presente no raciocínio proporcional como uma forma de raciocínio matemático que possibilita múltiplas comparações, assim como compreender mentalmente conjuntos de informações relacionadas ao pensamento qualitativo[2] e quantitativo.

A compreensão de covariância de quantidades e a invariância de razões ou produtos pode colaborar com a capacidade de distinguir relações multiplicativas entre duas quantidades (LAMON, 2007). A relação entre duas variáveis diferentes requer processos cognitivos dissemelhantes, uma vez que é possível distinguir dois tipos de raciocínio: o raciocínio escalar que ocorre quando as transformações acontecem “dentro” de uma mesma variável[3] e o raciocínio funcional percebido nas relações “entre” duas variáveis diferentes (LAMON, 1994).

Esse raciocínio mencionado por Lamon (1994, 2005, 2007) está presente em situações multiplicativas com relações quaternárias[4], denominadas de proporção - simples, dupla e múltipla (MAGINA; SANTOS; MERLINE, 2010, 2012; SANTOS, 2012, 2015). Nessas situações, é possível fazer dois tipos de análise: uma horizontal, correspondente ao operador funcional que relaciona duas quantidades de natureza distinta; e a outra vertical, associada ao operador escalar que opera com as quantidades de mesma grandeza[5] (VERGNAUD, 1983, 1988, 2009).

Assim, a relação um-para-muitos pode ser considerada a base do conceito de proporção, uma vez que envolve uma relação entre duas quantidades que se mantém invariável em uma determinada situação, como, por exemplo: 1 mão tem 5 dedos; 1 carro tem 4 rodas; 1 pacote tem 10 bombons; dentre outros (NUNES; BRYANT, 1997, 2009).

A relação funcional presente nas situações multiplicativas quaternárias não é de fácil compreensão das crianças (CASTRO *et al.*, 2015; VERGNAUD, 2009), e implica, segundo (VERGNAUD, 2009, p. 252): "[…] não somente a noção de relação numérica, mas também aquela de quociente de dimensões”, no caso, dos exemplos anteriormente citados: dedos por mão, rodas por carro, bombons por pacote. Logo, em se tratando, por exemplo, de

---

[2] Esse tipo de pensamento é requisitado antes da realização de cálculos, e permite o desenvolvimento de parâmetros e estratégias mentais apropriadas para compreender cada situação (LESH; POST; BEHR, 1988).
[3] O termo variável, utilizado por Lamon (2007), está associado à grandeza.
[4] Envolve uma relação entre quatro quantidades, de naturezas distintas, organizadas duas a duas (SANTOS, 2012).
[5] A relação entre grandeza e unidade é expressa por um número que quantifica quantas vezes a grandeza contém a unidade (LORENZATO, 2006).

proporção simples, ao compreender a relação funcional e estabelecer o operador funcional, tem-se o coeficiente linear de uma função - propriedade do coeficiente constante[6] (VERGNAUD, 1994).

Ao se analisar a estrutura de uma situação de proporção, é possível verificar propriedades isomórficas da função linear[7]; propriedades do coeficiente constante; e propriedades específicas de funções bilineares[8], o que possibilita que os estudantes utilizem, não apenas, os conceitos de Aritmética, mas noções da Álgebra (VERGNAUD, 1994; POST; BEHR; LESH, 1988).

De acordo com Nunes e Bryant (2009), é possível, ao se trabalhar com situações multiplicativas, como as que envolvem proporção e funções lineares, duas abordagens radicalmente distintas. A primeira abordagem baseia-se em verificar os esquemas iniciais dos estudantes, possibilitando o seu desenvolvimento, de modo que os alunos tenham consciência das relações escalares e funcionais das situações trabalhadas. Para isso, são utilizadas, em determinadas situações, diagramas, tabelas e gráficos, como ferramentas para ajudar os estudantes a compreender os modelos que estão sendo usados e transformá-los em modelos para situações posteriores. A segunda abordagem é ainda mais algébrica e utiliza como ferramenta a representação de frações e os números decimais, para permitir a abstração dos alunos desde o início das situações físicas. Segundo Nunes e Bryant (2009), não há pesquisas que tragam evidências de qual dessas abordagens é mais eficaz, destarte, investigações baseadas em uma dessas abordagens podem proporcionar grandes contribuições para a sala de aula.

Compreende-se que as duas abordagens podem trazer aporte para o aprendizado dos alunos, contudo, enquanto percebe-se um tratamento quase que totalmente algébrico, com ênfase na simplificação de expressões algébricas, resolução de equações, aplicação de regras para manipulação simbólica, com elevado nível de abstração, na segunda abordagem; verifica-se a possibilidade de trabalhar com a aritmética de uma forma mais algebrizada, como forma de contribuir com a aprendizagem da álgebra em anos posteriores. Diante disso, esta tese se baseia na primeira abordagem, pois entende-se que não há como desenvolver a compreensão da covariação considerando apenas a aritmética ou apenas a álgebra, pois esse conceito está no limite entre esses dois campos conceituais.

---

[6] $f(x) = ax \rightarrow x = \frac{1}{a} f(x)$

[7] $f(x + x') = f(x) + f(x'); f(x - x') = f(x) - f(x'); f(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1f(x_1) + c_2f(x_2);$

[8] $f(c_1x_1, c_2x_2) = c_1c_2f(x_1, x_2)$

Para Warren e Cooper (2008), a algebrização da aritmética, no currículo de matemática, está associada ao desenvolvimento do pensamento matemático a partir da descoberta de relações funcionais, do trabalho com padrões e das generalizações matemáticas. A álgebra, nesse sentido, não é considerada apenas como um conjunto de técnicas, mas como uma forma de pensar nas situações matemáticas (KIERAN, 2007).

A articulação entre a álgebra e a aritmética é defendida por Schliemann, Carraher e Brizuela (2007) porque, muitas vezes, a forma como a aritmética tem sido ensinada tem desenvolvido concepções pouco favoráveis à aprendizagem algébrica.

Estudos verificaram que muitos estudantes realizam processos aritméticos em expressões algébricas, pois atribuem significado aritmético aos símbolos (TELES, 2004; GIL, 2008). Diversos trabalhos defendem o desenvolvimento do ensino da aritmética e de álgebra, de modo simultâneo e desde os anos iniciais da escolarização (FREIRE, 2007; KIERAN, 2007; SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007). Investigações realizadas no intuito de desenvolver o pensamento algébrico mostram a importância de o ensino ir além do trabalho com cálculos, indicando a necessidade de buscar generalizações e focar na compreensão das relações, das regularidades e dos padrões (CARRAHER; SCHLIEMANN; SCHWARTZ, 2003; BLANTON; KAPUT, 2004; SILVESTRE, 2012).

Carraher e Schliemann (2007) e Blanton e Kaput (2005) explicam que elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, representações icônicas e gráficos podem ser usadas para expressar generalizações, ou seja, utilizar um conjunto de representações simbólicas que compõe um conceito (VERGNAUD, 1990, 1983, 1988). Assim: "[...] a verificação do significado de representações simbólicas depende não só da habilidade que o sujeito tenha para representar as entidades e as relações entre elas, mas principalmente de elementos conceituais que devem ser levados em conta." (VERGNAUD, 1990, p. 76).

Blanton e Kaput (2004) afirmam que o raciocínio funcional pode ser desenvolvido com a ideia de covariação e de raciocínio proporcional por meio de representações como os gráficos. O uso de gráficos cartesianos também é recomendado por Carraher, Schliemann e Schwartz (2003), pois, além de constituírem representações interessantes, podem corresponder a situações às quais os alunos atribuem significado.

Os gráficos podem ser considerados ferramentas de transmissão de informação, pois sintetizam os dados (WILD; PFANNKUCH, 1999). Assim, podem ser utilizados para trabalhar de forma intradisciplinar, por possibilitar a ligação com outros domínios da Matemática (CASTRO, 2012; LOPES, 2010).

Para Pagan e Magina (2011), a compreensão de gráficos de forma contextualizada favorece o desenvolvimento de competência de tal modo que situam os estudantes em um campo mais amplo do conhecimento, possibilitando uma maior compreensão das informações. Vännman (1990) explica que é importante aproveitar as múltiplas representações pictóricas para analisar dados, pois esses métodos gráficos parecem estimular a reflexão, ao contrário de muitas fórmulas que induzem ao automatismo.

Mendonça (2008) e Cazorla (2008), afirmam que o ensino de Matemática deveria ir além de promover o reconhecimento de símbolos, o manejo de fórmulas e a utilização de regras práticas para resolver problemas modelo. Para isso, a escola precisa dar sentido e vida à Matemática escolar, que parece muito distante da realidade do aluno (CAZORLA, 2008). A curiosidade sobre a vida real pode fomentar o interesse pela Matemática como ferramenta para entender a realidade (DUNKELL, 1990). Cramer, Post e Currier (1993), defendem a utilização de diferentes representações como forma de possibilitar que o estudante avalie, com sentido crítico, diferentes situações de modo a reconhecê-las como proporcionais ou não.

A capacidade de transpor uma representação na outra (tabelas em gráficos, linguagem verbal em diagramas, representação icônica em símbolos, por exemplo), pode trazer um maior significado à compreensão dos conceitos estudados. Todavia, o trabalho com múltiplas representações é muitas vezes difícil ao se utilizar, apenas, lápis e papel, pois demanda tempo e habilidade.

Pesquisas apoiam o uso de múltiplas representações por meio de ambientes computacionais (CONFREY, 1992; BORBA; VILLARREAL, 2005; FERRARA; PRATT; ROBUTTI, 2006; PIERCE; STACEY, 2001). Borba e Villarreal (2005), explicam que o computador facilita as visualizações sem, necessariamente, eliminar a reflexão, possibilitando ainda a formulação de conjecturas, refutações, explicações de conceitos e resultados.

Pierce e Stacey (2001) defendem a exploração de múltiplas representações (numérica, algébrica e gráfica) por meio do computador, pois, além de facilitar o entendimento de conceitos pelos estudantes, os encorajam a utilizar a compreensão de exemplos simples em situações mais complexas, ampliando a gama de problemas que eles podem resolver.

O uso de computadores propicia ainda a utilização de tecnologias mais dinâmicas e interativas, que, além de possibilitarem as múltiplas representações, oportunizam a manipulação de objetos e a observação de resultado, permitindo a construção de significados pelo estudante (FERRARA; PRATT; ROBUTTI, 2006).

A viabilização do enfoque experimental pode ser oportunizada pelo computador. Borba e Penteado (2001, p. 43) explicam que "[...] o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas". A experimentação permite aos alunos reformular e rejeitar hipóteses; lançar novas questões e constatar dúvidas em situações não previstas pelo professor.

Sendo assim, pode-se observar que o computador, por meio dos mais variados recursos tecnológicos como *softwares* e recursos digitais, tem favorecido o desenvolvimento e as experimentações matemáticas, potencializando formas de resolução de problemas e produção colaborativa. Tais recursos têm sido cada vez mais utilizados na escola para apoiar diferentes situações de ensino.

Verifica-se que esses indícios extrapolam o uso da tecnologia para a visualização ou representação de situações em múltiplas representações, mas o entendimento do uso de tecnologia para possibilitar a produção de conteúdo pelos estudantes. Essa possibilidade de produção vai muito além da exploração de informações contidas em *sites* para a realização de um trabalho, pois as tecnologias amplificam as formas de comunicação; de produção, de representação e, principalmente, da integração de tecnologias que a *web* 2.0 permite aos usuários. A exploração de ferramentas da *web* 2.0 tem contribuído para o desenvolvimento de atividades em que os sujeitos constroem conceitos, resolvem problemas e socializam soluções de forma conjunta, permitindo a reflexão das diferentes situações que surgem em determinados contextos.

Algumas pesquisas (DUARTE, 2012; FREIRE, 2007), que utilizaram como suporte didático as tecnologias digitais, foram desenvolvidas considerando atividades focadas em tópicos específicos, como o pensamento algébrico ou com abordagens que utilizam a integração de tecnologias (CASTRO; CASTRO FILHO, 2012). Essas pesquisas trazem indícios de que a tecnologia tem desvelado a criação de ambientes de aprendizagem, significativos e propícios para a produção coletiva (STAHL; KOSCHMANN; SUTHERS, 2006).

A experiência adquirida ao longo dos últimos anos como professora de matemática, pesquisadora no Grupo de pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem (PROATIVA[9]) e na equipe de formação do Projeto Um

[9] O grupo de pesquisa PROATIVA (*www.proativa.virtual.ufc.br*) dedica-se ao desenvolvimento de recursos interativos e realização de pesquisas que mostrem a efetividade do uso de objetos de aprendizagem (vídeos, animações, simulações, dentre outros) e de como professores podem utilizar esses recursos em sala de aula.

Computador por aluno (UCA[10]), ajudou a refletir sobre as dificuldades que muitos estudantes apresentam em compreender a Matemática e de como a inserção de computadores pode auxiliar a integração curricular e a criação de atividades significativas para os alunos (CASTRO; CASTRO FILHO, 2012).

Durante o mestrado, pude desenvolver uma intervenção com crianças do 5° ano de uma escola pública de Fortaleza contemplada com o projeto UCA, com o objetivo de verificar como tecnologias digitais, recursos digitais e *blog* poderiam auxiliar na compreensão e construção de gráficos estatísticos, constatando, assim, que eles podem ser inseridos no currículo de Matemática por meio de atividades inter e intradisciplinares se trabalhados de forma significativa, ou seja, possibilitando que as crianças utilizassem temas de seu próprio interesse. "Essa liberdade de escolha dos temas pelas crianças as fez relacionar os saberes escolares com a vida cotidiana, proporcionando um aumento na motivação, o que se refletiu, diretamente, no engajamento às atividades" (CASTRO, 2012, p. 162)[11].

A metodologia utilizada na intervenção, acompanhada de recursos didáticos (*laptop* educacional, recurso digital e *blog*), proporcionou, além da compreensão de gráficos, o desenvolvimento da autonomia, do senso crítico, assim como da capacidade de argumentação diante de situações que utilizem diferentes formas de representação, como tabelas, gráficos de barras[12] e de setores[13], contribuindo, portanto, para a formação cidadã[14] dessas crianças.

Em vista disso, pesquisas sobre Tecnologia na Educação Matemática precisam abranger muitas dimensões e abordar questões importantes relacionadas ao desenvolvimento humano e tecnológico. Diante do exposto, levantam-se as seguintes questões:

O uso da tecnologia, explorando múltiplas representações, contribui para a compreensão da covariação? Como se desenvolvem os esquemas de ação dos estudantes em situações com suporte da tecnologia? Como as diferentes representações e, principalmente, os gráficos podem ser usados em situações relacionadas às estruturas multiplicativas e que

---

[10] O Projeto Um Computador por Aluno (UCA) foi um projeto piloto com objetivo de proporcionar a inclusão digital e inovação pedagógica nas escolas públicas. Diferente de muitos outros projetos, o Projeto UCA tem “sua ênfase no aprendizado de novas ações pedagógicas com apoio da tecnologia, visando mudanças no currículo escolar” (BRASIL, 2009, p. 5). No Ceará, o referido projeto aconteceu em nove escolas, nos anos de 2010 a 2013, e contou com o trabalho de formação de professores para o uso de tecnologias digitais, sob coordenação da UFC Virtual. (*http://blogs.virtual.ufc.br/uca-ce/*).

[11] Optou-se por manter a impessoalidade ao longo do texto, apesar de alguns parágrafos da introdução terem sido construídos em 1[a] pessoa.

[12] Nesse trabalho, considerou-se gráfico de colunas (barras verticais) e gráfico de barras horizontais como gráficos de barra.

[13] Também conhecido como gráfico de *pizza* ou gráfico circular.

[14] Considerou-se cidadania como a capacidade de atuação reflexiva, ponderada e crítica de um indivíduo em seu grupo social (LOPES, 2004).

envolvem covariação? Quais são os desempenhos e estratégias dos estudantes do Ensino Fundamental em situações referentes à covariação?

Diante dessas questões, o objetivo geral desta pesquisa é investigar as contribuições de abordagens com o uso de tecnologias digitais no desenvolvimento do conceito de covariação presente nas estruturas multiplicativas, por estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental. Para ajudar a alcançar esse objetivo geral, têm-se os seguintes objetivos específicos:

a) Analisar a compreensão de covariação por alunos do 6° ano do Ensino Fundamental em situações com suporte das tecnologias digitais a partir de múltiplas representações;
b) Mapear estratégias dos estudantes na resolução de situações que envolvam covariação;
c) Identificar a contribuição de recursos digitais para auxiliar a compreensão do conceito de covariação com diferentes representações.

Muito além dessas questões, espera-se que os resultados encontrados nessa pesquisa tragam subsídios para o desenvolvimento de metodologias para trabalhar com as estruturas multiplicativas nas escolas e assim:

a) Compreender o papel da covariação e seu ensino desde a Educação Básica, relacionando esse conceito com diferentes representações, especialmente, os gráficos;
b) Desenvolver metodologia que favoreça a aprendizagem dos estudantes em relação às estruturas multiplicativas;
c) Vislumbrar o potencial dos diferentes suportes didáticos e metodologias que envolvam tecnologias digitais na aprendizagem dos estudantes;
d) Conhecer as características e funcionalidades para o desenvolvimento de recursos digitais que possam ser utilizados na Educação Básica para o ensino e a aprendizagem das estruturas multiplicativas e da covariação.

Diante do que foi apresentado, a tese abrangerá dois grandes campos de estudo e que demandam referências específicas: I) Educação Matemática e II) Tecnologias Digitais na Educação. Estas áreas de estudos contam com vasto quadro teórico de pesquisadores de destaque em âmbito nacional e internacional. Como são campos abrangentes, foram consideradas temáticas teóricas mais específicas e alinhadas ao desenvolvimento da tese.

No capítulo 1, para discutir a aprendizagem matemática do campo conceitual multiplicativo, dentro da Educação Matemática, serão enfocados os estudos de Vergnaud (1983, 1988, 1994, 2009), Nunes e Bryant (1997, 2009) e outros pesquisadores nacionais sobre Campos Conceituais, especificamente, das Estruturas Multiplicativas (MAGINA; SANTOS; MERLINE, 2010, 2012; SANTOS, 2012, 2015). Também serão estudados autores que realizaram pesquisas voltadas à covariação (CARLSON *et al.*, 2002; CONFREY; SMITH, 1994, 1995; IRWIN, 1996; MORITZ, 2004).

No capítulo 2, discute-se o campo relacionado com as Tecnologias Digitais na Educação e as contribuições das múltiplas representações para a aprendizagem (BORBA, 2007; BORBA; VILLARREAL, 2005; PRAIN; WALDRIP, 2006; PIERCE; STACEY, 2001; TYTLER; PRAIN; PETERSON, 2007). Também serão exploradas diferentes abordagens com o uso de tecnologias digitais: instrumental, *humans-with-media* e multimodal (ARZARELLO; ROBUTTI, 2010; BITTAR, 2011; BORBA, 2007; BORBA; VILLARREAL, 2005; LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011). Por fim, serão discutidas pesquisas que tenham proporcionado a produção coletiva de materiais, de modo a identificar contribuições de abordagem e de ferramentas, buscando identificar como as tecnologias digitais contribuem para a aprendizagem dos conceitos.

No capítulo 3, apresentam-se os procedimentos metodológicos desta investigação, o contexto em que esta pesquisa foi desenvolvida, assim como a metodologia adotada para seu desenvolvimento. Descrevem-se a escolha do local e dos sujeitos envolvidos, as etapas do estudo, os instrumentos de coleta de dados, os materiais utilizados e, por fim, os procedimentos de análise de dados. Convém adiantar que essa pesquisa é caracterizada como de intervenção, e considerou para análises dados quantitativos (pré-testes e pós-testes) e qualitativos coletados durante a intervenção do grupo experimental.

No capítulo 4, apresentam-se os resultados da pesquisa considerando os dados obtidos através de atividades diagnósticas para a avaliação dos conhecimentos prévios, realizadas com os grupos GC e GE, repetida novamente com os dois grupos para a avaliação dos conhecimentos adquiridos; em conjunto com algumas estratégias e teoremas-em-ação desenvolvidos pelos estudantes do GE antes e após a intervenção, os quais estão divididos em quatro categorias: (1) desempenho em situações de proporções; (2) desempenho na compreensão de grandezas; (3) desempenho em representação tabular e gráfica; e (4) desempenho geral, considerando todos os aspectos analisados na intervenção

No capítulo 5, apresentam-se as análises qualitativas das contribuições da tecnologia digital à aprendizagem do conceito de covariação a partir das estruturas multiplicativas. Para isso, analisa-se atividades com recursos digitais, *softwares*, aplicativos *online* (*Cacoo e WhatsApp*) e postagens no *blog*, identificando o seu papel para o desenvolvimento das concepções e competências dos estudantes em relação às estruturas multiplicativas e a covariação. As contribuições das tecnologias digitais para a aprendizagem, foram divididas em três categorias: (1) visualização e representação; (2) construção e produção de conhecimento; e (3) significação.

Por fim, o sexto capítulo aborda os resultados encontrados como respostas aos objetivos propostos, inicialmente, na introdução, os quais estão relacionados ao campo da Educação Matemática e das Tecnologias Digitais na Educação, assim como as implicações da pesquisa e estudos futuros.

2 O CAMPO MULTIPLICATIVO E A COVARIAÇÃO: DO PENSAMENTO PROPORCIONAL AO FUNCIONAL

Neste capítulo, abordam-se aspectos do pensamento proporcional e funcional que estão relacionados com a covariação. Na seção seguinte, discute-se a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud (1990), enfocando a covariação presente nas estruturas multiplicativas. Assim, define-se TCC explicando a tríade (conjunto de situações, invariantes e representações) por meio da covariação, buscando compreender as diversas formas de pensamento que podem surgir nessas situações. As seções seguintes tratam do campo aritmético, abordando o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo, relacionando-os com as situações, principalmente multiplicativas, tratadas por Vergnaud; e do campo algébrico, abordando o raciocínio funcional e o raciocínio covariacional. Intercalada às discussões das seções, são apresentadas pesquisas realizadas sobre essas temáticas.

2.1 Do pensamento proporcional ao funcional

Lesh, Post e Behr (1988), explicam que a proporcionalidade pode ser considerada um conceito fundamental no desenvolvimento de concepções matemáticos nos estudantes, assim, pode ser reputada uma fronteira entre os conhecimentos mais simples e mais complexos.

Alguns pesquisadores defendem que as crianças menores de 11 anos não são capazes de raciocinar proporcionalmente, a menos que utilizem estratégias idiossincráticas ou intuitivas informais (FALK; WILKENING, 1998; PIAGET; INHELDER, 1975). O raciocínio pré-proporcional pode ser considerado aditivo e, para Piaget, a pré-proporcionalidade acontece por meio das funções de coordenação, enquanto que a proporcionalidade é baseada nas operações reversíveis. A lógica das ações reversíveis nas crianças somente é constituída entre 7-8 anos e os 11-12 anos (PIAGET; INHELDER, 1975).

Spinillo (1997) também concorda que, muitas vezes, as crianças resolvem certos problemas de proporcionalidade de forma intuitiva, mas também podem desenvolver a compreensão de razão e de proporção fora da escola (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1989). Resnick e Singer (1993) também aceitam essa perspectiva, explicando que, antes de iniciarem o período de escolarização, as crianças já são capazes de realizar julgamentos proporcionais.

Na literatura é possível encontrar diversas definições para raciocínio proporcional (CABRITA, 1998; CRAMER; POST; CURRIER, 1993; LAMON, 2007; LESH; POST; BEHR, 1988; SPINILLO, 1997; VERGNAUD, 1983, 1988). Spinillo (1997) considera raciocínio proporcional como a capacidade de estabelecer relações de primeira e de segunda ordem. As relações de primeira ordem estão relacionadas à razão (relação parte-parte) e fração (relações parte-todo), enquanto que as relações de segunda ordem envolvem a comparação entre as relações de primeira ordem (relação parte-parte e relação parte-todo). Como exemplo de relação de primeira ordem, tem-se a relação que se pode fazer com os estudantes do sexo feminino ou do sexo masculino de uma turma de alunos de uma escola, já as relações de segunda ordem são obtidas ao se comparar essas duas relações entre si.

Para Lamon (2005), o desenvolvimento do raciocínio proporcional requer a capacidade de comparar duas grandezas em termos relativos ao invés de termos absolutos, como acontece no raciocínio aditivo. Cabrita (1998) também assevera a comparação entre grandezas, porém considerando a invariância e a covariância entre elas:

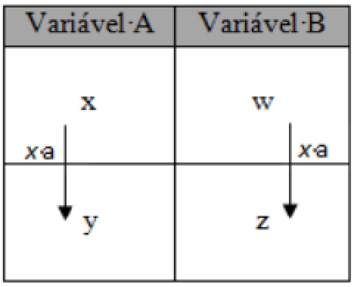
> O raciocínio proporcional envolve, então, o estudo da estrutura e da invariância, e equivalência e da não equivalência, segundo uma variedade de transformações diferentes, o sentido de covariância e de comparações múltiplas [...]. (CABRITA, 1998, p. 170-171).

Diversos autores associam o raciocínio proporcional com o sentido de covariação, considerando, também, as relações multiplicativas (CABRITA, 1998; LAMON, 2007; LESH; POST; BEHR, 1988). Sobre isso, Lesh, Post Behr (1988) consideram que o sentido de covariação está presente no raciocínio proporcional como uma forma de raciocínio matemático que possibilita múltiplas comparações, assim como compreender mentalmente conjuntos de informações relacionadas ao pensamento qualitativo e quantitativo.

Silvestre (2012) explica que o desenvolvimento do raciocínio proporcional passa pelo pensamento qualitativo e, somente depois, para estratégias que envolvem o raciocínio multiplicativo e indica três fases como representativas dos níveis de sofisticação do raciocínio proporcional: (1) estratégias com pensamento qualitativo: está relacionada com a utilização de métodos informais como, “maior que”, “menor que”, “mais que”, “menos que”, para comparar grandezas; (2) estratégias de composição: utilização de conhecimentos de adição e subtração para a resolução de problemas de proporcionalidade, mesmo depois de identificar regularidades numéricas em uma razão; e (3) estratégias multiplicativas: estão associadas à compreensão da invariância e covariação.

A covariação é um dos conceitos que estão presentes nas Estruturas Multiplicativas estudadas por Vergnaud (1983, 1988, 2009) e que consiste em compreender como as quantidades crescem e decrescem em um mesmo sentido, isto é, engloba situações de relações entre quantidades (PONTE *et al*., 2010), como pode ser visto na Figura 1[15].

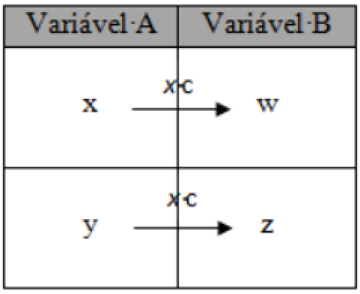
Figura 1 – Covariação de grandezas.



Fonte: Ponte *et al.*, (2010, p. 3).

A invariância também envolve relação entre quantidades de natureza distinta (Figura 2), mas, segundo Lamon (2005), enquanto a covariação engloba a noção de que ambas as quantidades variam em um conjunto, a invariância implica a compreensão de que as relações dessas quantidades se mantêm constante.

Figura 2 – Invariância de grandezas.



Fonte: Ponte *et al.* (2010, p. 3).

A compreensão de covariância de quantidades e a invariância de razões ou produtos pode colaborar com a capacidade de distinguir relações multiplicativas entre duas quantidades (LAMON, 2007). A relação entre duas variáveis diferentes requer processos cognitivos não semelhantes, uma vez que é possível distinguir dois tipos de raciocínio: o raciocínio escalar que ocorre quando as transformações acontecem "dentro" de uma mesma

[15] As Figuras 1 e 2, ilustradas por Pontes *et al*. (2010) apresentam relações entre a variável A e B. Nessas ilustrações, a variável tem o mesmo sentido de grandeza.

variável e o raciocínio funcional percebido nas relações “entre” duas variáveis diferentes (LAMON, 1994).

Em pesquisa realizada por Blanton e Kaput (2004), foi constatado que o raciocínio funcional pode ser desenvolvido com a ideia de covariação e de raciocínio proporcional por meio de gráficos. O uso de gráficos cartesianos também é recomendado por Carraher, Schliemann e Schwartz (2008), pois, além de constituir representações interessantes, podem corresponder a situações a que os alunos atribuem significado.

O desenvolvimento de um conceito, como o de covariação, por exemplo, requer, segundo Vergnaud (1990), relacionar as possíveis situações, as representações e os invariantes, isto é, a formação de uma tríade, como será visto em seguida.

2.2 A Teoria dos Campos Conceituais e a covariação

A teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi criada por Gerard Vergnaud, um psicólogo francês, sob influências teóricas de Piaget e Vygotsky (MOREIRA, 2002; VERGNAUD, 2003). Como discípulo de Piaget, Vergnaud busca ampliar e direcionar sua teoria para compreender o funcionamento cognitivo do *'sujeito-em-situação'*, por meio das estruturas gerais de pensamento, em contextos escolares. Apesar de reconhecer contribuições de Piaget em relação aos conceitos de adaptação, de desequilibração e de reequilibração, põe em destaque em sua teoria o conceito de esquema. As influências *Vygotskyanas* estão relacionadas ao papel atribuído para a interação social, a linguagem e o simbolismo à conceptualização (MOREIRA, 2002; VERGNAUD, 2003).

Enquanto Piaget atribui o papel de construção de conceitos às operações lógicas, para Vergnaud (1988), o processo de conceitualização do real é ponto determinante para o desenvolvimento cognitivo. O desenvolvimento do conceito, para Vergnaud (1988, 1990), requer a compreensão de uma tríade de conjuntos: [***s, I, S***][16], em que '***s*** ' está relacionado ao conjunto de situações que dão significado ao conceito; '***I'*** o conjunto dos invariantes (objetos, propriedades, relações) necessários para o domínio das situações e '***S*** ' é o conjunto das representações simbólicas, usadas para representar os invariantes, as situações e os procedimentos para lidar com ambos.

[16] Notação usada no texto de Vergnaud (1988)

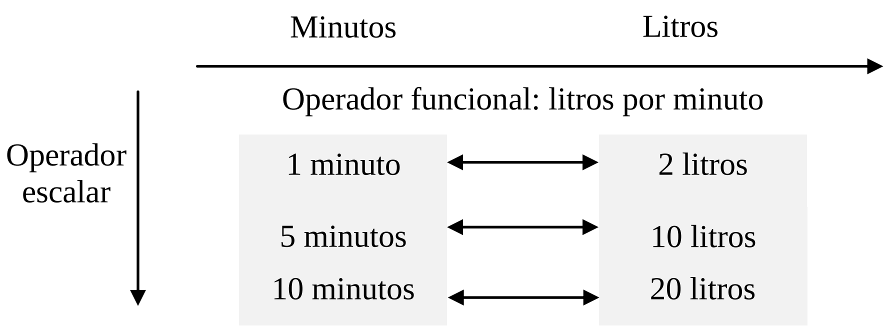
Desse modo, um conceito não pode ser reduzido a uma definição, pois é por meio das situações que um conceito passa a ter sentido para a criança. Logo, um conceito vai sendo desenvolvido à medida que se vivenciam situações diversificadas.

Muitas situações podem envolver a covariação, verificando o modo como as relações invariáveis são expressas, foco de estudo desse trabalho. Considera-se como relação invariável, a relação entre duas quantidades em uma situação multiplicativa.

Como exemplo, é preciso pensar em uma situação em que é possível relacionar duas quantidades a uma terceira. Ao se verificar que uma torneira despeja 2 litros de água a cada minuto, pode-se referir a relação 'litros por minuto' a esta terceira variável que está conectada às duas primeiras (quantidade de litros e minutos).

Se a quantidade de água despejada em um reservatório aumenta à medida que o tempo passa, nesse caso, o operador a ser considerado, que é uma relação invariável, será '2 litros por minuto', pois independente do tempo transcorrido e da quantidade de água despejada, a relação '2 litros por minuto' será mantida a mesma (Figura 3).

Figura 3 – Situação de covariação: o caso da torneira.



Fonte: Elaboração própria

Na Figura 3, é possível verificar a relação invariável, 2 litros por minuto, por meio do quociente entre a associação de litros e minutos, em qualquer das opções: 2 litros em 1 minuto, 10 litros em 5 minutos, 20 litros em 10 minutos. Essa relação invariável, presente nesse tipo de situação, é denominada de operador funcional por Vergnaud (1983).

Considerando a importância das situações para a compreensão dos conceitos, Vergnaud assevera a necessidade de conhecê-las, a partir do ponto de vista conceitual e estrutural. Outras situações mais complexas, além do exemplo do caso da torneira, e que envolvem covariação devem ser consideradas. Nessas situações, há mais de duas quantidades que se relacionam, visualizados em problemas que envolvem proporções duplas e múltiplas, as quais serão melhor detalhadas na seção seguinte.

Ao deparar-se com determinada situação, o sujeito pode dispor ou não de competências necessárias para a sua resolução (VERGNAUD, 1990). Logo, é preciso disponibilizar um repertório variado de situações para que a criança possa desenvolver novas competências e ampliar seus esquemas. Sobre isso, Magina *et al*. (2001, p. 13) explica que:

> Problemas teóricos e práticos levam à formação de conceitos, enquanto conceitos explícitos e conhecimentos implícitos levam à formação de competência. A competência é traçada pela ação do aluno diante das situações (no caso, resolução de problemas) e as concepções dos alunos podem ser traçadas por suas expressões verbais ou outras representações simbólicas (tais como a escrita ou o gesto).

O desenvolvimento das concepções e competências acontece após um longo período, pois requisitam de experiência, maturação e aprendizagem (MAGINA *et al.*, 2001; VERGNAUD, 1988, 1998).

A criança, ao se deparar com um problema, analisa a situação e opta por uma operação ou uma sequência de operações para resolvê-lo. Quando a situação faz parte do repertório da criança, esta, por já possuir competência, utiliza regras conhecidas e, portanto, o automatismo, o que não contribui para ampliar seu conhecimento. Todavia, ao deparar-se com situações que ainda não possui competência para resolvê-la, a criança passa a refletir sobre a situação e buscar outros esquemas, o que possibilita novas descobertas.

Diante disso, em termos práticos, é fundamental saber avaliar o conhecimento dos estudantes e escolher situações didáticas adequadas que auxiliem a construção do conceito e mobilizem diferentes esquemas. Segundo Gitirana *et al*. (2014), as competências estão vinculadas com a combinação de esquemas. A noção de esquema foi primeiramente desenvolvida por Piaget e, também utilizada por Vergnaud (1990, p. 136), que define como "[...] organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações". Dessa forma, o esquema gera regras de ação para resolver uma determinada situação.

Um exemplo de esquema comumente utilizado na escola é o algoritmo[17] da multiplicação e da divisão, pois são compostos por uma regra ou conjunto de regras. Nesse caso, pode-se dizer que a utilização desses algoritmos para resolver determinada situação, por crianças dos anos finais do Ensino Fundamental, gera o automatismo, embora, possa-se requisitar outras competências, ao se alterar o campo numérico, por exemplo.

---

[17] Um algoritmo é uma regra de um conjunto eficaz de regras para resolver uma determinada classe de problemas. Este conjunto de regras faz com que seja possível encontrar uma solução para todos os problemas de classe num número finito de passos, se tais soluções existem, ou para mostrar que não há solução (VERGNAUD, 1998, p. 171, tradução nossa)

O esquema pode envolver: (1) objetivos, antecipações; (2) regras de ação usadas para tomar decisões; (3) invariantes operatórios; e (4) inferências em situações (VERGNAUD, 1998, p. 173, tradução nossa[18]). Dessa forma, o esquema está relacionado a uma conceitualização implícita, já que se associa com a ação, isto é, com a forma de uma pessoa organizar seus invariantes (MAGINA *et al.*, 2011; VERGNAUD, 1990). A expressão invariante operatória está relacionada com os conhecimentos mobilizados nos esquemas. Segundo Vergnaud (1990; 1998), são gerados pelo esquema dois tipos de invariantes operatórios: o conceito-em-ação e o teorema-em-ação. Esses invariantes operatórios estão direcionados ao reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação e, portanto, guiam a construção dos modelos mentais.

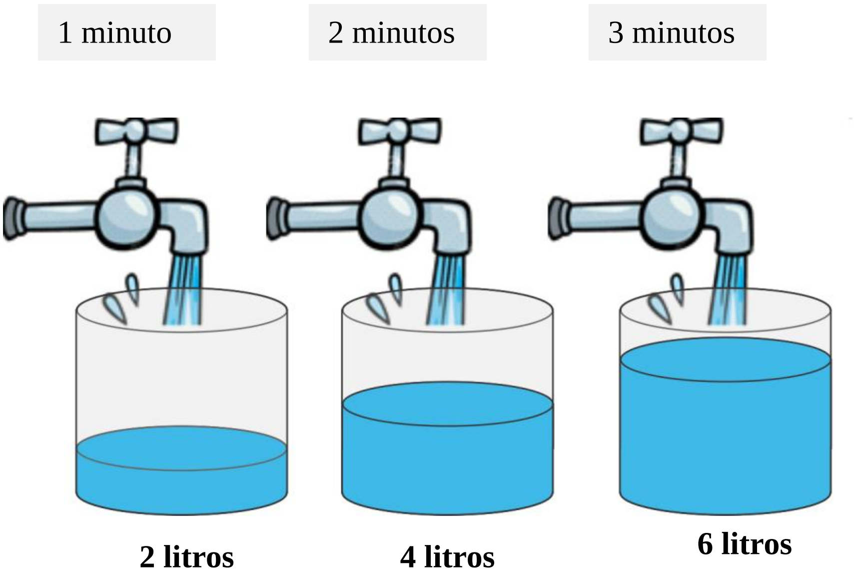
Conceitos-em-ação são objetos, predicados, ou categorias de pensamento, tidos como pertinentes, relevantes à situação (VERGNAUD, 1998, 2009). Sendo, portanto, a estrutura de pensamento que o indivíduo convoca para sustentar sua elaboração de resolução do problema, mas não sabe explicitar, formalmente, o esquema. Não faz sentido, portanto, classificá-los em verdadeiros ou falsos, já que estão relacionados com os conceitos matemáticos.

Já os teoremas-em-ação podem ser verdadeiros ou falsos e estão diretamente ligados à competência que o indivíduo possui e que são utilizadas em situações específicas. O estudante, ao se deparar com um problema, analisa a situação e opta por uma operação ou uma sequência de operações para resolvê-lo. Essa trajetória de estratégias utilizadas em processos de aprendizagem pode utilizar representações certas ou erradas, explícitas ou totalmente implícitas. Conhecer os teoremas-em-ação ou relações da ação do aluno é importante para a proposição de situações-problema adequadas à expansão do conhecimento matemático (MAGINA *et al.*, 2001).

Para explorar melhor os teoremas-em-ação e sua relação com a TCC, será retomado o exemplo da torneira, apresentado no início dessa seção. Tem-se que um conceito presente em uma determinada situação pode ser representado de diversas formas. No exemplo da torneira, verifica-se que o operador '2 litros por minuto' é um invariante e pode ser representado na forma de figura, tabela e gráfico, dentre outras representações (Figura 3, Figura 4 e Figura 5).

[18] *1. goals and anticipations; 2. rules of action, information seeking, and control; 3. operational invariants; 4. possibilities of inference.*

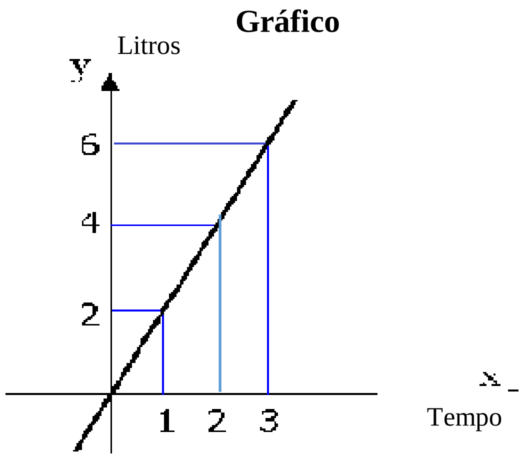
Figura 4 – Representação icônica: o caso da torneira.



Fonte: Elaboração própria

Figura 5 – Representação por tabela e gráfico: o caso da torneira.

Tabela	
Minutos (x)	Litros [f(x)]
1	2
2	4
3	6



Fonte: Elaboração própria

De acordo com a TCC, a representação é utilizada como sendo um sistema simbólico, pois isso pode ajudar a estabelecer relações entre os conceitos e o conjunto de situações. Para explicar a importância da representação, Vergnaud recorre à ideia de função simbólica defendida por Piaget (MAGINA *et al*., 2001).

Vergnaud (1998) considera que as representações oferecem possibilidades de inferência. Assim, além da linguagem natural, a simbolização também pode contribuir para a aquisição de conceitos, sendo que as diferentes representações simbólicas podem ter efeito diferente na compreensão dos conceitos.

O conhecimento não é em sua essência simbólico, por esse motivo, o reconhecimento de invariantes e a construção de objetos em níveis mais altos são aspectos essenciais do conhecimento (VERGNAUD, 1982). Diante dessas colocações, pode-se entender que um campo conceitual é composto por um grupo de problemas heterogêneos, isto é, que envolve diferentes situações, propriedades, relações e operações de pensamento, sendo necessário que todos esses elementos estejam conectados para garantir o processo de aprendizagem.

Para Vergnaud (1990), o conhecimento está organizado em campos conceituais, podendo ser explícito, quando estão ligados à concepção, e implícito, quando ligados à competência. Ao pensar na situação da torneira a partir de diferentes representações (figuras, tabela e gráfico), ilustrada na Figura 3, Figura 4 e Figura 5, pode-se solicitar, por exemplo, que o estudante indique quantos litros de água a torneira teria despejado em 8 minutos, lembrando que a torneira despeja, a cada minuto, 2 litros de água. Ilustra-se, na sequência, algumas das resoluções possíveis desse problema.

a) $\underbrace{2+2+2+2+2+2+2+2}_{8\ vezes} = 16$ *litros de água*

b)

Tempo	Litros
1	2
2	4
3	6
...	...
8	**16**

c) $2 \cdot 8 = 16$ *litros de água*

d)

tempo decorrido	litros
1 minuto	*2 litros*
8 minutos	*x litros*

$x = 2 \cdot 8$

$x = 16$ *litros*

e) $f(x) = 2x \rightarrow para\ x = 8\ minutos,\ têm\text{-}se: f(8) = 2 \cdot 8 \rightarrow f(8) = 16$

Observa-se que todas essas resoluções utilizaram representações diferentes, embora o resultado de todos esses teoremas-em-ação seja 16 litros, é importante ressaltar que eles podem ter respostas verdadeiras ou falsas (VERGNAUD, 1983, 1998; GITIRANA *et al*., 2014). Nas cinco resoluções apresentadas, pode-se observar as diferentes estratégias utilizadas.

Na primeira resolução (a), percebe-se que a estratégia envolve a adição de parcelas repetidas, isto é, raciocínio aditivo, mesmo o problema sendo multiplicativo. Isso demonstra que os alunos podem utilizar alguns esquemas aprendidos em outras situações para auxiliá-los na resolução de problemas, contudo, para algumas situações, esse esquema pode não ser suficiente. Nunes e Bryant (1997) chamam essa estratégia de progressão aritmética entre dois conjuntos.

Na segunda resolução (b), utiliza-se de uma tabela para explicitação do pensamento. Percebe-se que o estudante pode conseguir solucionar o problema ao estabelecer o padrão que existe em cada coluna. Carraher, Schliemann e Brizuela (2000), ressaltam que em muitos casos as crianças costumam tratar as colunas de uma tabela como problemas separados e que, apesar de essa estratégia levar à resposta correta, em alguns casos não propicia o entendimento das relações entre as colunas e como essas relações influenciam o conjunto de dados apresentados (covariação).

Na terceira resolução (c), a terceira variável (litros por minuto) é multiplicada pela variável tempo. A resolução somente é correta quando se estabelece uma relação entre as grandezas, encontrando o valor unitário, ou seja, em 1 minuto a torneira despeja 2 litros de água. Porém, como o valor unitário já está subtendido, não é possível, verificando apenas na solução, saber se essa relação foi compreendida, pois essa composição binária está correta apenas se as variáveis forem consideradas como números e não como dimensão (VERGNAUD, 1983). Vergnaud (2009) expõe essa estratégia como sendo a utilização de uma lei binária, onde os alunos estabelecerão uma relação entre as grandezas diferentes, como, no caso, litros e minutos.

Na quarta resolução (d), percebe-se a utilização do algoritmo, também conhecido como regra de três ou método do produto cruzado. Vergnaud (1998) considera o algoritmo como uma regra ou conjunto delas, que pode ajudar a encontrar a solução ou mostrar que ela não existe. Verifica-se no referido exemplo que, sendo dados a, b e c, é preciso determinar o termo desconhecido *'x'*: $\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$. Essa é uma estratégia muito encontrada nos livros didáticos e ensinada na escola (VERGNAUD, 2009), mas, devido à má compreensão dos alunos e ao seu automatismo, não favorece o raciocínio proporcional (HART, 1984; POST; BEHR; LESH, 1988).

Para Vergnaud (1990), o automatismo é uma manifestação do invariante da organização da ação, pois, "[...] a automatização não impede que o sujeito conserve o controle das condições sob as quais tal operação é apropriada ou não" (VERGNAUD, 1990, p. 138). De certa forma, pode-se dizer que as condutas de um indivíduo em uma determinada situação pode ser parte automatizada e parte consciente (VERGNAUD, 1998).

Na resolução 5 (e), é observado um procedimento em que se expressa simbolicamente um caso especial de uma função linear [$f(x) = ax$; função afim]. Essa forma de resolução não é muito comum aos estudantes, já que compreender as relações funcionais e explicitá-las algebricamente requer esquemas mais elaborados.

Percebe-se, a partir dos exemplos apresentados, que na resolução de uma única situação é possível obter diferentes teoremas-em-ação. Compreender os teoremas-em-ação utilizados pode ser "[...] um caminho de analisar as estratégias intuitivas dos estudantes e ajudá-los na transformação do conhecimento intuitivo para o conhecimento explícito" (VERGNAUD, 1988, p. 149).

Diante das discussões levantadas, entende-se que os conceitos precisam ser definidos não só pela estrutura, mas pelas suas propriedades, pelas situações nas quais podem surgir e pelas representações simbólicas que representam os invariantes desse conceito. Dentro de um campo conceitual, os conceitos estão interligados podendo estar em mais de um campo, formando uma rede complexa de conceitos (VERGANUD, 1996).

Por isso, um conceito não deve ser estudado de forma isolada (MAGINA *et al.*, 2001). Existem vários campos conceituais: o campo das estruturas aditivas, o campo das estruturas multiplicativas, o campo algébrico, dentre outros. Logo, requisitam raciocínios diferentes, os quais serão discutidos a seguir.

2.3 O campo aritmético: raciocínio aditivo e multiplicativo

Educadores matemáticos utilizam o termo 'raciocínio aditivo' para problemas que são resolvidos por meio das operações de adição e subtração, e o termo 'raciocínio multiplicativo' àqueles que são solucionados utilizando as operações de multiplicação e divisão (BEHR *et al.*, 1994; MAGINA *et al.*, 2001; STEEFFE, 1994; VERGNAUD, 1983, 1988). Esta forma de pensar, com foco na estrutura do problema, em vez das operações aritméticas utilizadas para resolver situações, baseia-se nos estudos de como as crianças aprendem matemática.

Uma das conjecturas levantadas pelos educadores matemáticos é a de que, para que a criança aprenda adição e subtração de forma adequada, ela precisa compreender a relação inversa entre elas, de modo análogo acontece com a multiplicação e a divisão. Desta forma, focar especificamente no ensino de cada operação, prática típica da educação do 'passado', justifica-se apenas ao se trabalhar habilidades de cálculos (NUNES; BRYANT, 2009).

Nunes e Bryant (2009) explicam que existem suposições de que as ligações entre adição e subtração, assim como da multiplicação e divisão, possam ser conceituais, pois: "[...] eles se relacionam com as conexões entre as quantidades de cada um desses domínios de raciocínio" (2009, p. 8[19], tradução nossa).

Desta forma, também é possível perceber conexões entre a adição e a multiplicação, o mesmo acontecendo com a subtração e a divisão. Essas conexões podem ser observadas quando, ao resolver uma situação que envolve o raciocínio multiplicativo, é possível, em alguns casos, utilizar adições repetidas, assim como é possível resolver uma divisão fazendo subtrações sucessivas (NUNES; BRYANT, 2009). Mesmo com as ligações processuais entre a adição e a multiplicação e entre a subtração e a divisão, as formas de raciocínio envolvidos são diferentes o suficiente para delimitá-los em dois campos conceituais distintos, o aditivo e o multiplicativo (VERGNAUD, 1983).

O raciocínio aditivo e multiplicativo tem suas origens em diferentes esquemas de ação. Normalmente as crianças compreendem e usam primeiramente o raciocínio aditivo para, somente depois, fazerem uso do raciocínio multiplicativo, apesar das dificuldades não serem as mesmas de um campo conceitual para outro. As crianças podem usar esquemas de ação apropriados, desde muito jovens, envolvendo o raciocínio aditivo e multiplicativo.

Situações presentes no campo conceitual aditivo envolvem operações aritméticas e noções aditivas (adição, subtração, diferença, intervalo). Essas situações envolvem relação ternária, ou seja, ligam três elementos entre si (VERGNAUD, 2009). Os problemas que envolvem o raciocínio aditivo referem-se a situações de uma variável, conjuntos de objetos do mesmo tipo em que se juntam, se separam ou se comparam os seus elementos (NUNES; BRYANT, 1997, 2009).

---

[19] Texto original: "*they relate to the connections between quantities within each of these domains of reasoning* "

Situações presentes no campo conceitual multiplicativo também envolvem operações aritméticas, mas como noções multiplicativas (funções linear e não-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, proporção, número racional, multiplicação, divisão, combinação e outros). Portanto, o campo conceitual das estruturas multiplicativas não se limita aos conceitos de multiplicação e de divisão (CORREIA; SPINILLO, 2004). Isso é possível, pois, segundo Nunes (2005, p. 84), "[...] o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis (ou duas grandezas ou quantidades). Qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si". Assim, essas situações abrangem relações ternária e quaternária (VERGNAUD, 2009).

Os termos utilizados para classificar situações que envolvem o raciocínio multiplicativo variam entre autores, pois eles baseiam suas classificações em aspectos diferentes (MAGINA; SANTOS; MERLINE, 2010, 2012; NUNES; BRYANT, 1997; SANTOS, 2015; VERGNAUD, 1983, 1988, 2009).

Todavia, parece haver um consenso de que esse tipo de raciocínio, por mais simples que seja, envolve duas ou mais variáveis em uma relação fixa entre si. Por esse motivo, considera-se que o raciocínio multiplicativo constitui a base para a compreensão das crianças das relações proporcionais e funções lineares (KAPUT; WEST, 1994; VERGNAUD, 1983).

Nunes e Bryant (1997) distinguem três tipos principais de situação multiplicativa: (1) situações de correspondência um-para-muitos; (2) situações que envolvem relações entre variáveis (covariação); e (3) situações que envolvem distribuição, divisão e divisão ao meio.

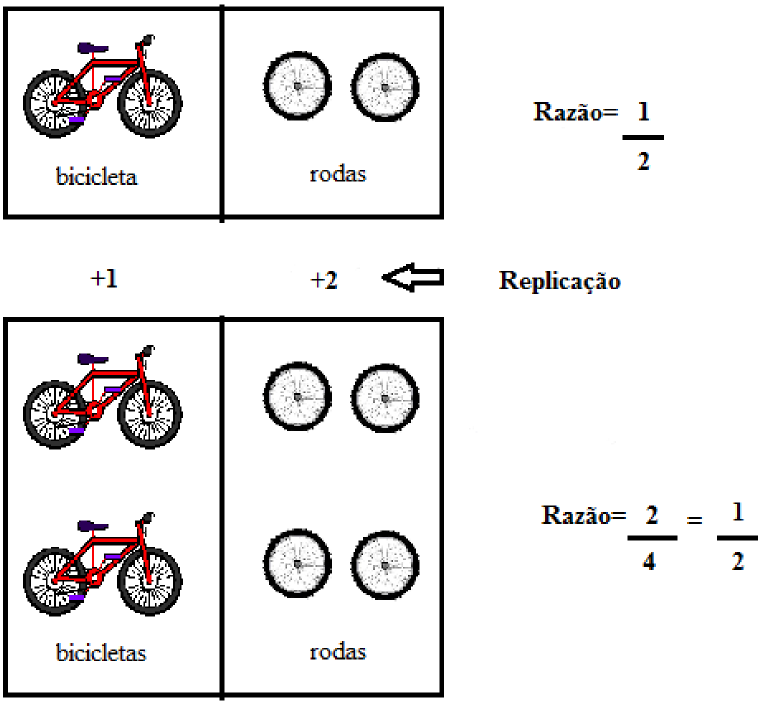
As situações de correspondência um-para-muitos são aquelas que abrangem uma relação constante entre dois conjuntos (bicicleta tem duas rodas - 1:2; cadeira tem 4 pés - 1:4, dentre outros). Por exemplo, uma bicicleta tem duas rodas. Para que a razão entre esses dois conjuntos se mantenha constante, quando acrescentar 1 ao conjunto de bicicletas, é preciso somar 2 ao conjunto de rodas (Figura 6).

Assim, as ações necessárias para manter a relação entre dois conjuntos constantes (razão) são de replicação[20] sendo que o número de replicações denota o operador escalar aplicado a ambos os conjuntos.

---

[20] "Replicação envolve somar a cada conjunto a unidade correspondente para o conjunto de modo que a correspondência invariável um-para-muitos seja mantida" (NUNES; BRYANT, 1997, p. 144).

Figura 6 – Exemplo de situação de correspondência um-para-muitos.



Fonte: Elaboração própria

As situações de relação entre variáveis (covariação) se distinguem das situações de correspondência um-para-muitos, principalmente, por fazer referência a valores contínuos. Por isso, as situações de correspondência um-para-muitos envolvem variáveis discretas[21], pois não faz sentido em falar *'meia bicicleta tem uma roda'*. Já para as situações de covariação, como o caso da torneira exemplificado anteriormente (Figuras 3 e 4), faz sentido afirmar que em meio minuto a torneira despeja 1 litro de água (litro por minuto). Outros exemplos podem estar relacionados à distância percorrida por hora; preço por quilo, velocidade por hora, dentre outros.

Desse modo, enquanto a correspondência um-para-muitos expressa a relação entre conjuntos por uma razão, na covariação há um fator que funciona como uma terceira variável conectando as outras duas (NUNES; BRYANT, 1997).

Já as situações que contemplam distribuição, segundo Nunes e Bryant (1997), relacionam-se à operação de divisão e à possibilidade de cortes sucessivos, sendo a distribuição uma ação da divisão. Nessa situação é preciso considerar o total, o número de receptores e a quota. Assim, exemplo como: 'Foram comprados para uma festa 100

[21] Os valores discretos representam contagem, quantidade (conjunto).

salgadinhos que deverão ser divididos igualmente para 10 crianças. Quantos salgadinhos cada criança receberá?'; pode ser classificado como uma situação de distribuição.

É possível verificar que as três classificações das situações que contemplam as estruturas multiplicativas, feitas por Nunes e Bryant (1997), foram elaboradas considerando o sentido de número que essas situações proporcionavam. Nas situações de correspondência um-para-muitos há dois novos sentidos de número, a razão e o operador escalar. Nas situações de covariação, esse novo sentido é alcançado por meio de um fator, função ou quantidade intensiva conectando as duas variáveis e pode se tornar mais complexa à medida que o número de variáveis aumenta. Por último, na situação de distribuição, surge um novo sentido de número que são as frações.

Ao invés de explorar o sentido de número, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática apresentam situações multiplicativas a partir de problemas, sem fazer distinção à operação (multiplicação e/ou divisão) e nem aos tipos de relações envolvidas, diferenciando-as em: (1) multiplicação comparativa - quando se estabelece uma comparação entre as quantidades; Exemplo 1: 'João tem o dobro de carrinhos de José' ou 'José tem a metade dos carrinhos de João'; (2) proporcionalidade - quando envolve a ideia de proporção, isto é, comparação entre razões, muito comum em situações cotidianas; Exemplo 2: 'Em dois dias são produzidos em uma confecção, 50 vestidos. Quantos vestidos serão feitos em 10 dias?' ; (3) organização retangular - Busca estabelecer relação entre as variáveis quantificadas; Exemplo 3: 'Verifique quantos metros quadrados de cerâmica serão necessários para um quarto que tem 3 metros de comprimento por 4 de largura' e (4) combinatória - envolve a escolha e agrupamento de elementos em conjunto, estando relacionada ao raciocínio combinatório; Exemplo 4: 'Numa festa há 4 meninos e 5 meninas, examine quantos casais diferentes podem ser formados' (BRASIL, 1997).

Ainda que essas classificações apresentadas pelos PCN não sejam suficientes para conhecer todas as situações e invariantes possíveis de serem exploradas e utilizadas no campo multiplicativo, são importantes fontes de orientações didáticas para o professor. Pode-se verificar que, embora perceba-se em todo o documento influências da Teoria dos Campos Conceituais, não há orientações didáticas quanto à aplicação dessa teoria.

Vergnaud (1983, 1988, 2009) apresenta uma classificação para as situações das estruturas multiplicativas, considerando que a relação de multiplicação não é constituída por uma relação binária, mas quaternária. Portanto, não considera o grau de complexidade e nem o tipo de operação (multiplicação ou divisão), mas a sua estrutura que conduz aos seguintes conjuntos de situações: (1) isomorfismo de medidas; (2) produto de medidas; (3) proporção dupla e (4) proporção múltiplas, os quais serão detalhados a seguir.

2.3.1 Isomorfismo de medidas

As situações classificadas como isomorfismo de medidas são modeladas por função linear, por pertencerem à classe de problemas que estabelecem proporções simples entre duas grandezas. São relações quaternárias entre quatro quantidades, onde duas quantidades são medidas de um tipo e as outras duas são medidas de outro tipo. Essas relações estão presentes em situações cotidianas, estruturando "[...] uma proporção de medidas simples entre duas medidas espaciais M_1 e M_2" (VERGNAUD, 1983, p. 129, tradução nossa[22]). Assim, duas dessas medidas são de um tipo e as outras duas são de outro ($M_1A \cdot M_2B = M_2A \cdot M_1B$[23]), são exemplos as relações entre: pessoas e objetos (partição); preço e metro (preço pago por metro de tecido); tempo e distância (velocidade), dentre outras.

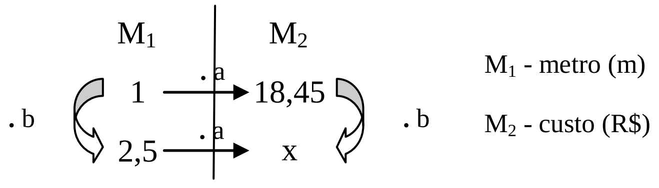
Essas situações podem ser resolvidas considerando como procedimentos: (i) a multiplicação; (ii) a divisão - por partes ou por cota, e (iii) a quarta proporcional, as quais serão exemplificadas buscando estabelecer possibilidade de existência de covariação.

2.3.1.1 Isomorfismo de medidas pela multiplicação

Consiste de uma relação de quatro termos em que na resolução se extrai uma relação de três termos por meio de uma relação unária ou por meio de uma lei binária de composição (VERGNAUD, 1983). Seguem alguns exemplos.

<u>Exemplo1:</u> Para fazer uma fantasia para a escola, Maria precisará de 2,50 metros de tecido. Quanto ela precisará gastar, sabendo que cada metro de tecido custa R$18,45?

Figura 7 – Esquema do problema do exemplo 1.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

[22] Texto original: " *a simple direct proportion between two measure spaces M_1 e M_2*".
[23] Optou-se por utilizar em todos os esquemas de problemas, a mesma nomenclatura dada por Vergnaud (1983) - *M_1 e M_2*.

No exemplo 1 e Figura 7, verificam-se duas grandezas: metro (m) e reais (R$). De forma explícita, vê-se apenas uma relação entre três termos (relação ternária), pois as crianças costumam ver as grandezas apenas como números, apesar de tratar-se de uma relação de quatro termos.

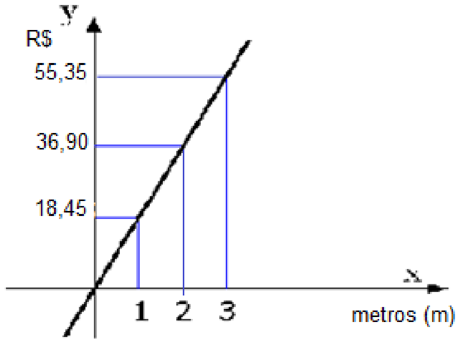
Por isso é muito comum que, na resolução desse tipo de problema, as crianças apenas multipliquem *2,5* **.** *18,45* ou *18,45* **.** *2,5* ($M_2B \cdot M_1A = x$), contudo, se considerar as grandezas envolvidas, isto é, se for feita uma análise dimensional,[24] será verificado que, ao se multiplicar metro por custo ou vice-versa, não se obtém o custo. Essa correspondência acontece, pois, há uma relação unária que já está explícita *1m → R$18,45* (horizontal).

De posse dessa relação é possível estabelecer o operador *18,45 R$/m* ou como Nunes e Bryant (1997) explicam, uma terceira variável originada da relação com as duas primeiras *'R$ - reais'* e *'m - metro'*, logo, uma covariação que pode ser representada por meio de tabelas e em termos funcionais na forma de um gráfico de uma função linear.

Figura 8 – Representação do exemplo 1 por meio de tabela e gráfico.

Tabela	
Metros (m)	**R$** [f(x)]
1	18,45
2	36,90
3	55,35

Gráfico



Fonte: Elaboração própria.

O gráfico da Figura 8 representa uma função linear *f : R → R tal que f(x) = ax (a ≠ 0),* e operador linear bijetivo, ou seja, o domínio e a imagem da função possuem a mesma quantidade de elementos, o que também caracteriza o isomorfismo de medidas (mesma forma).

Neste caso, *f(x) = 18,45x*, *'a'* é o operador funcional igual a *18,45* representa o coeficiente da função linear que tem como grandeza *R$/m*. Esse modelo multiplicativo, em que se utiliza o operador funcional adotado por Vergnaud, ressalta a proporcionalidade, permitindo

[24] A análise dimensional está relacionada às grandezas envolvidas na operação.

estender esse modelo para situações multiplicativas mais complexas e diferentes campos numéricos.

Ainda na Figura 7, é possível visualizar na vertical, um operador (b) que é adimensional, denominado de operador escalar. Assim, na vertical esquerda têm-se: *1 . b=2,5*. Logo, na vertical direita o operador escalar também vale 2,5, o que permite fazer o seguinte procedimento para a resolução: *18,45 . b →18,45 . 2,5 = 46,125* reais.

Na Figura 8, tem-se um gráfico que é considerado por Carvalho (2008) como um tipo de ajuda mnemônica para o estabelecimento do raciocínio relacional. Situações que envolvem isomorfismo de medidas podem apresentar funções lineares proporcionais que apresentam gráficos com a mesma aparência (gráficos isomórficos).

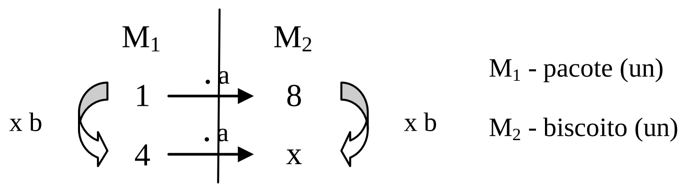
Nesses casos, Carvalho (2008) alerta sobre a importância de analisar como o raciocínio dos estudantes pode ser afetado por gráficos isomórficos. As relações lineares proporcionais podem representar, por meio de gráficos, quantidades contínuas, no caso de quantidades discretas, pode-se utilizar o gráfico de barras ou definir o domínio dos naturais em situações que se utilize como representação o gráfico de uma função linear.

O Exemplo 2, a seguir, apresenta uma situação que pode ser resolvida por meio da multiplicação, entretanto, diferencia-se do anterior por conter apenas quantidades discretas[25].

Exemplo 2*:* Rafael comprou 4 pacotes de biscoito. Em cada pacote tem 8 biscoitos. Quantos biscoitos Rafael tem?

Percebe-se, nesse exemplo, que o operador funcional é 8 biscoitos/pacote e o operador escalar vale 4 (Figura 9). Apesar disso, o fato desse exemplo tratar de quantidades discretas faz com que o domínio da função linear obtida por meio do operador funcional seja apenas os números naturais, desta maneira, $f : N \rightarrow N$ *tal que* $f(x) = 8x$.

Figura 9 – Esquema do problema do exemplo 2.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

[25] Quantidades que só podem assumir valores inteiros.

2.3.1.2 Isomorfismo de medidas pela divisão

Envolve dois tipos de divisão: a divisão partitiva, também conhecida como divisão por partes e a divisão quotitiva (divisão por quota). Em estudos feitos por Vergnaud (2009), verificam-se diferentes dificuldades em se compreender esses dois tipos de divisão, pois requisitam cálculos relacionais diferentes. Segundo Vergnaud (2009), os cálculos relacionais envolvem operações de pensamento necessárias para compreender as relações existentes na operação, logo, são diferentes dos cálculos numéricos, que correspondem apenas às resoluções numéricas dos problemas.

Além disso, os cálculos nem sempre são exatos, gerando números fracionários; o quociente nem sempre é o resultado do operador; as divisões podem gerar restos diferentes e com regra operatória que nem sempre é o inverso da multiplicação (VERGNAUD, 2009).

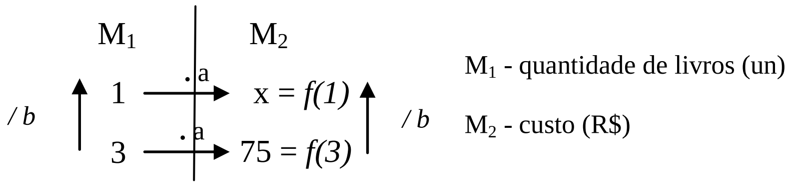
Enquanto na divisão por partes é preciso procurar e obter a extensão da parte (valor unitário da mesma medida) conforme o valor escalar indicado, trazendo a ideia de repartir, na divisão por quota procura-se obter o número de partes (quota), conforme extensão indicada, tendo a ideia de medir (exemplos 3 e 4).

Exemplo 3*:* Igor gastou R$75,00 na compra de 3 livros. Quanto custou cada livro?

Vê-se no exemplo 3 que o problema indica duas medidas: $M_1B=3$, referente a quantidade de livros e $M_2B=75$ concernente ao custo dos livros. Existe uma relação entre as medidas M_1 (quantidade de livros, com grandeza em unidade) e M_2 (custo em reais) que gera um operador que expressa o preço por livro, podendo ser compreendido como operador funcional. Percebe-se, portanto, que no esquema da divisão por partes tem-se relação entre quantidades de natureza diferente (custo em reais e quantidade de livros).

Na figura 10, expõe-se esquema referente ao exemplo 3. Esse esquema apresenta uma inversão mental a respeito do operador escalar *(b)* em relação aos outros esquemas discutidos. Vergnaud (1983) explica que compreender a inversão da relação *'. b'* (produto do operador escalar) para '*/b*' (quociente) não é uma tarefa fácil para as crianças, por isso é comum encontrar *'x'*, de forma que o produto entre *'x'* e *'b'* resulte em *f(B)*, no caso da figura 10, corresponde a *f(3)*, por meio de tentativa e erro.

Figura 10 – Esquema do problema do exemplo 3.

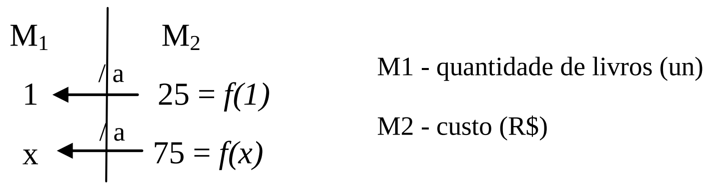


Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

As situações que envolvem a divisão por quota apresentam grandezas de mesma natureza, como pode ser visto no exemplo 4, além disso, costumam ser consideradas mais complexas do que a divisão por parte, pois a inversão acontece no operador funcional, diferente da divisão por partes que acontece em relação ao operador escalar (Figuras 10 e 11). Vê-se, portanto que a incógnita '*x'* recai em 'B'.

<u>Exemplo 4</u>*:* Igor foi a uma livraria e comprou livros a R$25,00 cada. Sabendo que Igor gastou um total de R$75,00, quantos livros ele comprou*?*

Figura 11 – Esquema do problema do exemplo 4.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

Igualmente, por assim dizer, nos problemas de divisão por quota inverte-se o operador funcional *'(***.** *a)'* (produto), aplicando-se o operador *'/a'* (quociente) à *'f(B)*' para obter *B=x*. Esse tipo de inversão também não é um procedimento fácil, porque o operador inverso tem a dimensão inversa, muitas vezes se opera com o procedimento escalar por adições sucessivas *(a + a + a + ...)* até que se obtenha *'f(B)'.*

Outras situações de divisão ainda mais complexas podem ser trabalhadas se considerar o operador funcional e escalar como frações. Sobre isso, Nunes e Bryant (1997) explicam que a utilização de frações em situações de divisão são complexas pois requisitam das crianças um novo sentido de número.

2.3.1.3 Isomorfismo de medidas pela quarta proporcional

São situações que requisitam tanto a multiplicação quanto a divisão. Esse tipo de problema remete aos problemas de proporção direta explorados na escola (*exemplo 5*).

Exemplo 5*:* A cada 2 voltas que Carol dá numa pista de corrida, ganha 3 pontos. Quantas voltas precisará fazer para conseguir 9 pontos?

Figura 12 – Esquema do problema do exemplo 5.

M_1	M_2
3	2
9	x

M1 - pontos (un)

M2 - voltas (un)

Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

Na Figura 12 apresenta-se o esquema referente ao exemplo 5. É muito comum esse tipo de situação ser resolvida na escola por meio do algoritmo: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, também conhecido como método do produto cruzado. Vergnaud (2009) evidencia em seu trabalho que problemas que concebem situações de multiplicação e divisão são casos simples de problemas mais gerais que usam regra de três, por isso, qualquer um dos problemas apresentados anteriormente poderia ser resolvido utilizando esse algoritmo.

Ao se introduzir um algoritmo, se está induzindo que o aluno crie um determinado esquema. Todavia, é preciso ter cautela para que o estudante não o use de forma automática, sem utilizar o raciocínio proporcional que a situação exige (HART, 1984; POST; BEHR; LESH, 1988).

Muito além dos procedimentos a serem utilizados nas situações de isomorfismo de medidas, Nunes e Bryant (1997) explicam que os estudantes precisam conseguir identificar que há um terceiro valor, relacionando duas quantidades (covariação), o qual, dentro de uma mesma situação, se mantém invariante para qualquer par de números. Baseados nos processos enumerados por Vergnaud (1983) para esse tipo de situação, Schliemann e Carraher (1997) destacam três procedimentos: (i) o escalar - considera a relação entre grandezas do mesmo tipo; (2) o funcional - considera a relação entre grandezas diferentes e (3) a regra de três - compara duas razões por meio de algoritmo; os autores explicam que o procedimento mais utilizado pelas pessoas não escolarizadas é o escalar.

Sobre isso Schliemann e Carraher (1997, p. 19) explicam que, em muitas situações “[...] apesar da utilização de adições em lugar de multiplicações, a estratégia demonstra a compreensão de uma relação multiplicativa e não de uma relação aditiva onde as transformações em uma variável seriam idênticas às transformações na outra.” Contudo, à medida que os estudantes passam a conhecer o algoritmo na escola, passam a se distanciar do real significado das relações proporcionais envolvidas.

2.3.2 Produto de medidas

As situações classificadas como produto de medidas seguem um modelo de função bilinear (ou n-linear), com três ou mais variáveis. Essa terceira variável (M_3), contém, por meio de composição cartesiana outras duas grandezas M_1 e M_2, sendo comumente verificados em problemas de área, volume, combinatória e outros conceitos físicos (VERGNAUD, 1983).

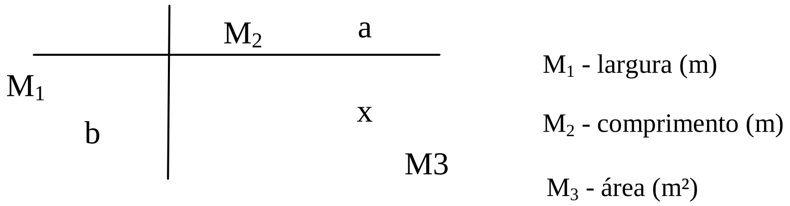
Em termos matemáticos, por exemplo para a função área, tem-se uma forma bilinear definida em um espaço vetorial, no caso $R^2 \rightarrow R$, *em que* $f(x,y) = x \cdot y$, para o exemplo 6.

Exemplo 6: *Sabendo que o quarto tem 4 metros de comprimento por 3 metros de largura, determine a área desse ambiente.*

Nesse exemplo tem-se que há uma relação multiplicativa entre comprimento e largura, $f(x,y) = 3 \cdot 4$, em que não há covariação. Apesar de a área depender linearmente da largura do quarto, assim como depender linearmente do comprimento, não há uma relação de dependência entre a largura do quarto e o seu comprimento. Caso semelhante também pode ser observado em problemas que envolvem a ideia de volume, já que têm-se $f(x,y,z)= x \cdot y \cdot z$.

Vergnaud (1983) explica que na solução de '$a \cdot b = x$' não é fácil perceber o operador funcional e escalar da função, pois o produto de medidas é uma relação ternária que envolve aspectos dimensionais e numéricos. Destarte, voltando ao Exemplo 6, têm-se que área (m²) = largura (m) . comprimento (m) ou, como expresso na Figura 13, $M_3 = M_1 \cdot M_2$.

Figura 13 – Esquema do problema do exemplo 6.



Fonte: Elaboração baseada em Vergnaud (1983).

Contudo, é possível observar que em situações em que uma dessas grandezas (comprimento ou largura) é fixa, a função deixa de ser bilinear e passa a ser linear, no caso do Exemplo 6, se considerar a largura fixa, f*(x) = 3x*. Desse modo, a largura fixa pode ser considerada uma constante, sendo vista como um operador funcional. Situação semelhante pode ser visualizada no exemplo 7.

Exemplo 7*:* Uma piscina tem capacidade de 240m³ e área de 150m². Calcule a altura da piscina.

Percebe-se que no exemplo 7 a altura da piscina (m) será determinada pelo quociente entre o volume (240m³) e a área (150m²). Vergnaud (1983) considera esse tipo de problema como um isomorfismo duplo ou uma dupla proporção, já que, em situações semelhantes, quando se multiplica a altura por uma constante, o volume também é alterado em função dessa constante, sendo que essa constante pode ser vista como um operador funcional, por esse motivo, também verifica-se, nesse tipo de situação, a covariação.

No produto de medida, ainda há situações que envolvem o conceito de combinação, sendo resolvidas utilizando o esquema de produto cartesiano. Problemas de combinatória exploram as possibilidades de formação de conjuntos, podendo conter ideias de permutação, arranjo ou combinação.

Essas ideias se diferenciam porque a permutação considera quantas possibilidades existem de se organizar um número de objetos de forma distinta, enquanto que o arranjo é um caso particular da permutação, pois, na escolha dos objetos, a ordem importa, já a combinação é utilizada quando se quer fazer escolhas não ordenadas desses elementos (exemplo 8).

<u>Exemplo 8</u>*:* Carmelita levou para um acampamento de final de semana, 2 bermudas e 3 blusas. Quantas combinações diferentes ela poderá fazer com as roupas que levou?

Figura 14 – Representação de tabela cartesiana como resolução do Exemplo 8.

Fonte: Elaboração própria.

O exemplo 8 apresenta um problema de combinação em que a sua resolução pode ser feita por meio de uma tabela, como representada na Figura 14.

Esse tipo de resolução não contribui para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, pois o estudante pode encontrar o resultado da combinação por contagem. Também verifica-se que não há uma relação entre as bermudas e as blusas que defina um operador, ou seja, não há uma relação de dependência entre as bermudas e blusas, do mesmo modo, não há covariação. Assim, diante da natureza dessas situações, as unidades do produto são expressas como produtos de unidades elementares (VERGNAUD, 1983).

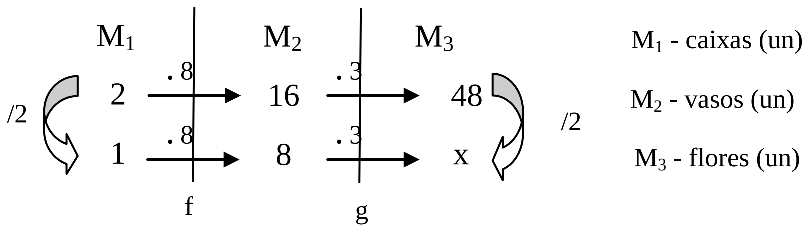
2.3.3 Proporção múltipla

Nas situações que envolvem Proporção Múltipla, há mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, em uma relação de quatro quantidades (quaternária), sendo que todas as medidas são proporcionais e dependentes duas a duas (M_1, M_2, M_3, ..., M_n), formando, assim, uma composição de funções lineares (exemplo 9).

Exemplo 9*:* Em duas caixas foram colocados 16 vasos de flores, totalizando 48 flores. Quantas flores têm em uma caixa com 8 vasos?

Analisando o exemplo 9 observa-se que se M_1 ou M_2 fossem retiradas, mesmo assim seria possível inferir a quantidade de flores em uma caixa com 8 vasos. Isso só é possível por haver uma relação de proporcionalidade entre M_1 e M_2, M_2 e M_3, M_1 e M_3. É factível também determinar os operadores escalares e funcionais (Figura 15).

Figura 15 – Esquema do problema do exemplo 9.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

Na Figura 15, visualiza-se que há covariação entre M_1 e M_2, pois, por meio do operador funcional, verifica-se que há 8 vasos de flores por caixa. O mesmo pode ser verificado entre M_2 e M_3, em que se constata que tem 3 flores por vaso. Também se pode relacionar M_1 e M_3, em que se obtém ao multiplicar os operadores funcionais da função *f:N→ N tal que f(x) = 8x* e da função *g:N→ N tal que g(x) = 3x* que há 24 flores por caixa. Assim, em termos funcionais têm-se *f(g(x)) :N→ N tal que*:

$$fog \text{ ou } f(g(x)) = 8 \cdot 3x \rightarrow f(g(x)) = 24x$$

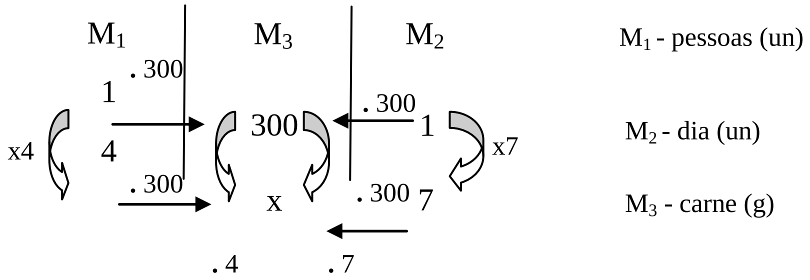
2.3.4 Proporção dupla

Nas situações em que se tem uma proporção dupla, também há mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, em uma relação de quatro quantidades (quaternária), contudo, a medida M_3 é proporcional a M_1 e M_2, não havendo proporcionalidade entre M_1 e M_2 sendo, portanto, diferentes e independentes, configurando-se em proporções duplas e função bilinear (exemplo 10).

Exemplo 10*:* Uma pessoa consome por dia 300g de carne. Quantas gramas de carne serão consumidas por uma família de 4 pessoas em 7 dias?

No problema do exemplo 10, verifica-se que há uma relação de invariância entre o número de pessoas e a quantidade de carne consumida (M_1 e M_3), no caso, 300 gramas de carne por pessoa. De forma análoga, verifica-se o mesmo entre a quantidade de carne consumida por dia em que se têm 300 gramas de carne por dia (M_2 e M_3). Todavia essa mesma relação não acontece entre M_1 e M_2 (Figura 16).

Figura 16 – Esquema do problema do exemplo 10.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

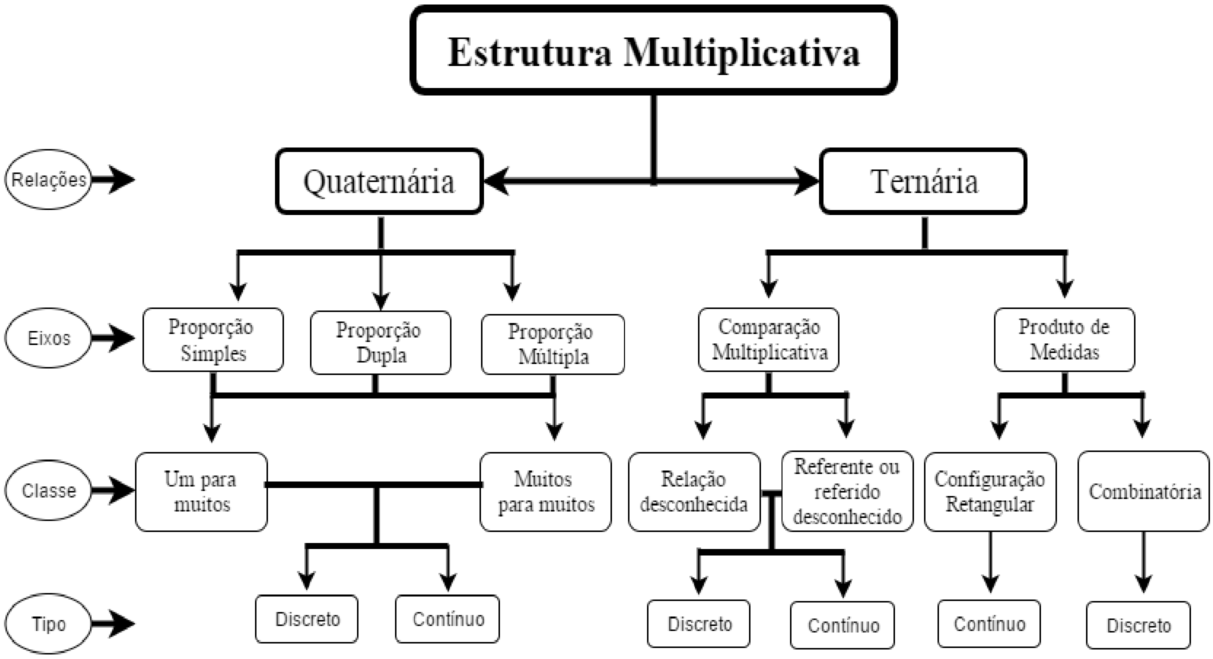
A Figura 16 apresenta um esquema que demonstra a bilinearidade das funções envolvidas na situação do exemplo 10. Assim, seguindo o modelo de uma função bilinear têm-se que *f(x,y) = 300xy*, em que *'x'* representa a quantidade de pessoas e *'y'* a quantidade de dias.

Ao analisar o esquema da Figura 16, constata-se a invariância e, portanto, a covariação presente no exemplo. Acredita-se, embora não tenha sido encontrado nenhuma pesquisa que fundamente essa inferência, que dentre as situações das estruturas multiplicativas que permitem a exploração da covariação, essa seja uma das mais difíceis, pois a coordenação desses dois tipos de invariância que acontecem parece requisitar esquemas mais elaborados de pensamento. Pretende-se, portanto, explorar essa situação como forma de compreender esses esquemas.

As análises das situações multiplicativas apresentadas nos exemplos de 1 a 10, mostram as possibilidades de explorar a covariação nas situações de isomorfismo de medidas (exemplos 1 a 5), de proporção múltipla (exemplo 9) e de proporção dupla (exemplo 10), por esse motivo, serão exploradas apenas essas situações.

Considerando todas as classificações dos problemas de estruturas multiplicativas discutidas por Vergnaud (1983, 1988), Magina, Santos e Merlini (2012) e Santos (2012, 2015), organizaram, baseados em Vergnaud (1983, 1988, 1994), as situações de problemas do campo conceitual multiplicativo considerando as relações, eixos, classes e tipos (Figura 17).

Figura 17 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.



Fonte: Elaboração própria baseada em Santos (2015).

O esquema da estrutura multiplicativa apresentado na Figura 17 está dividido em duas partes: relações quaternárias e relações ternárias, que por sua vez são divididas em eixos. As relações quaternárias, segundo esse esquema, são divididas em três eixos: proporção simples que é análogo a isomorfismo de medidas - termo dado por Vergnaud; proporção dupla e proporção múltipla. Sendo que cada um desses eixos é constituído de duas classes de situações; um-para-muitos e muitos-para-muitos, e ainda cada classe leva em consideração dois tipos de quantidades: discreta e contínua.

As relações ternárias constituem a outra relação desse esquema e dividem-se em dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medida. No primeiro eixo, constam duas classes: relação desconhecida e referente ou referido desconhecido, considerando dois tipos de quantidades: contínua e discreta. Quanto ao segundo eixo das relações ternárias, o produto de medidas, conta com duas classes de problemas: a configuração retangular, que permite o trabalho com quantidades contínuas, e a combinatória, que permite apenas a quantidade discreta.

Embora o esquema apresentado na Figura 17 seja apenas uma sistematização das situações propostas por Vergnaud (1994), essa organização torna mais claro a compreensão de todos os elementos do campo multiplicativo: relações, eixos, classes e tipos. Por esse motivo, adota-se, nesta tese, a nomenclatura dos eixos dados por Santos (2015): proporção simples, proporção dupla, proporção múltipla, comparação multiplicativa e produto de medidas.

Considerando os eixos apresentados por Santos (2015) e que podem envolver o conceito de covariação, estes podem ter graus de dificuldade diferentes. Gitirana *et al*. (2014) aplicaram um teste de sondagem, contendo 15 problemas do campo multiplicativo, com 504 estudantes da rede pública de São Paulo, que cursavam do 2° ao 9° ano do Ensino Fundamental. A partir dessa pesquisa, foi possível estabelecer uma proposta de classificação e extensões dos problemas relativos à sua complexidade - protótipos, 1ª extensão, 2ª extensão, 3ª extensão e 4ª extensão (GITIRANA *et al*., 2014).

Desta forma, verificou-se que problemas de proporção simples do tipo multiplicação e divisão por partes que envolvem relação um-para-muitos são considerados do tipo protótipos, ou seja, mais fáceis. Os problemas de proporção simples do tipo divisão por cota e os de proporção dupla são de 1ª extensão. Os de proporção simples que envolve multiplicação e divisão, relação muitos-para-muitos (quarta proporcional, segundo classificação de Vergnaud) são de 2ª extensão e, por fim, os problemas de proporção múltipla são de 3ª extensão.

Conhecer os eixos dos problemas multiplicativos e seus graus de complexidade é importante, pois ajuda a garantir a exploração de conjuntos diferentes de situações que possibilitem a compreensão de um conceito. Desta forma, para verificar as dificuldades de uma situação é necessário também considerar, além dos eixos, as classes (um-para-muitos e muitos-para-muitos) e o tipo de variável envolvida.

Problemas que envolvem quantidades contínuas e/ou discretas podem apresentar complexidades diferentes. Em pesquisa realizada por Boyer, Levine e Hut-tenlocher (2008) com estudantes de 6 a 9 anos de idade utilizando problemas de comparação,[26] foi constatado que as crianças apresentam maiores dificuldades em problemas que possuem grandezas discretas do que nos que tem grandezas contínuas, sendo atribuído esse resultado à capacidade dos alunos em estabelecer relações aditivas em grandezas discretas em vez de estabelecer relações proporcionais.

Na pesquisa feita por Fernández *et al*. (2010) com 755 estudantes espanhóis de diferentes níveis de ensino (4° e 9° ano) verificou-se que a natureza das grandezas (discretas e

[26] São problemas em que são dados quatro valores com o objetivo de analisar qual situação é verdadeira: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ou $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$ (LESH, POST, BEHR, 1988).

contínuas) não tem influência no desempenho dos alunos em problemas de valor omisso[27]. Estes autores defendem que a idade e a experiência escolar ajudam a aperfeiçoar o desempenho dos alunos independente da natureza das grandezas (discretas e contínuas).

Verifica-se uma diferença de desempenho ao relacionar os resultados obtidos por Fernández *et al*. (2010) e Boyer, Levine e Hut-tenlocher (2008). Entende-se que dois fatores podem ter influenciado a diferença de resultados. O primeiro pode ter relação com a diferença de faixa etária dos sujeitos das duas pesquisas, indicando que as crianças mais novas tendem a ter maiores dificuldades com grandezas discretas. A segunda pode estar relacionada com fatores culturais já que as pesquisas foram realizadas em países diferentes, o que deve influenciar, dentre outras questões, o currículo vigente em cada localidade.

Outras questões trazidas em pesquisas estão relacionadas com quantidades intensivas e extensivas[28] e as relações de proporcionalidade direta e indireta (CARVALHO; NUNES; CAMPOS, 2008; NUNES; DESLI; BELL, 2003).

Em pesquisa planejada por Nunes, Desli e Bell (2003) com estudantes de 6 a 8 anos de idade, eles foram solicitados a resolverem situações-problemas sobre paladar, velocidade e custo, com o objetivo de comparar a capacidade de resolver problemas com quantidades intensivas e extensivas e de analisar como os tipos de relações de proporcionalidade (direta ou inversa) poderiam influenciar na compreensão de problemas de estrutura multiplicativa. Seus resultados trazem evidências de que as crianças possuem maior dificuldade em compreender quantidades intensivas, podendo estar relacionadas ao entendimento de relações inversas. Dentre os problemas utilizados por esses pesquisadores está um sobre o paladar, em que foram considerados dois copos de suco de limão, sendo que, na primeira situação (relação direta), um dos copos continha mais açúcar que no outro e a quantidade de suco era constante e na segunda situação (relação indireta) a quantidade de açúcar não variava, mas a quantidade de suco variava.

O estudo de Carvalho, Nunes e Campos (2008) teve como objetivo explorar se diferentes informações sobre dados contínuos afetavam as interpretações gráficas de 84 estudantes ingleses com idades de 11 a 14 anos, por meio de 20 problemas de proporcionalidade direta e inversa, com fatores gráficos. Para isso, os dados contínuos foram convencionalmente representados por pontos ou linhas no sistema de coordenadas, enquanto

---

[27] São problemas do tipo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ no qual três valores são conhecidos (incluindo um par completo) e o objetivo é encontrar a parte omissa da segunda (e equivalente) razão (LESH; POST; BEHR, 1988).

[28] Nunes, Desli e Bell (2003) explicam que as quantidades extensivas podem ser representadas por um único número inteiro, enquanto que as intensivas são representadas pela razão entre dois números.

que dados discretos foram representados por barras. Foi constatado que todos os estudantes resolveram mais facilmente o problema de proporcionalidade direta do que o de proporcionalidade inversa.

A pesquisa de Carvalho, Nunes e Campos (2008) trazem evidências de que o uso de representações gráficas pode ajudar na compreensão dos estudantes, principalmente em situações de proporcionalidade direta. Embora seja importante desenvolver o entendimento em relação a esses dois tipos de proporcionalidade, nesta tese, será tratada, apenas, situações multiplicativas que envolvem proporção. Essa opção se fundamenta no fato de que as situações de proporcionalidade inversa saem do campo da linearidade, logo, como esta tese se baseia em estudos de Vergnaud (1983, 1988, 2009), só prevê situações das estruturas multiplicativas do tipo linear ou n-linear, o que proporciona uma grande variedade de situações: proporção simples, dupla e múltipla.

É possível trabalhar com situações de proporção simples em problemas que envolvem área. Nunes e Bryant (2009) explicam que é possível calcular a área de um retângulo utilizando um problema classificado como proporção simples, em que uma linha corresponderia a *'x'* unidades. Em pesquisa realizada com crianças de 9 a 10 anos por Nunes, Light e Mason (1993) em que trabalhavam dentro de uma situação de isomorfismo de medidas, foi verificado que as crianças obtinham melhores desempenhos quando comparavam a área de uma figura a quadrados do que quando utilizavam uma régua. As crianças que utilizaram a régua trabalharam dentro de uma situação de produto de medidas, tendo que considerar três quantidades: o valor da base, o valor da altura e a área, além disso, também tinham três relações a serem consideradas: a relação entre a base e a altura, a relação entre base e área, e a relação entre a altura e a área (a área está proporcional à base, se a altura é constante e proporcional à altura, se a base é constante).

A unidade de um quadrado pode ser utilizada para fazer a medição de diferentes superfícies, por meio de diferentes operações. Desta forma, pode-se atribuir uma medida (número) para a área de um quadrado e utilizá-la para cobrir outra superfície, determinando a área por meio de contagem. Sobre isso, Nunes, Light e Mason (1993) explicam que nem sempre é possível ter a quantidade suficiente de quadrados para cobrir a superfície, requisitando que se forme filas ao longo da base da figura, estabelecendo uma correspondência de um-para-muitos entre o número de linhas que se encaixam ao longo da altura e o número de unidades de quadrados em cada linha.

Nessa pesquisa, foi verificado que os alunos ao resolverem problemas de proporção simples, além de ampliarem seus conhecimentos e concepções sobre área, foram capazes de comparar uma área triangular com uma retangular e expandir a compreensão de como a área é medida, enquanto os estudantes que trabalharam apenas com situações de produto de medidas não obtiveram sucesso em ampliar seus conhecimentos para pensar sobre a área de triângulos.

As pesquisas apresentadas mostram a variedade de possibilidade de exploração de problemas de proporção, além de alertar para as diferentes complexidades dessas situações, já que, além dos eixos - proporção simples, dupla e múltipla, é preciso considerar a classe (um-para-muitos e muitos-para-muitos) e o tipo de grandeza envolvida, se é discreta ou contínua.

As discussões levantadas nessa seção, também demonstram as diferentes estruturas presentes em situações multiplicativas, verificando, essencialmente nas relações quaternárias: proporção simples (isomorfismo de medidas), proporção dupla e proporção múltipla; relações funcionais e escalares que se associam à invariância e à covariação, e que, por sua vez, associam-se à ideia de função. Devido a essas características, na seção seguinte discute-se sobre o campo que tem uma interseção com o campo aritmético, no caso, o campo algébrico.

2.4 O campo algébrico: raciocínio funcional e covariacional

Segundo Lessa (1996), a aritmética trabalha com a concepção de número e com suas operações (adição, subtração, multiplicação, divisão) e enfatiza a obtenção de resposta a partir de cálculos, enquanto que a álgebra, com as relações entre as quantidades utilizando símbolos para representar um número, tendo, portanto, foco na representação de problemas por meio de equações, que se processa em um nível mais abstrato utilizando e operando com os símbolos.

Para Lins e Gimenez (1997), a aritmética corresponde às relações quantitativas sobre coleções de objetos, sendo considerada o núcleo dos anos iniciais do Ensino Fundamental, ao trabalhar com a compreensão dos números e suas operações com objetivo de desenvolver o sentido do número na criança (BRASIL, 1997, 1998b). Os PCN também consideram os conceitos numéricos e a capacidade de realizar operações, mas sugerem a utilização de linguagem oral, algoritmos e registros informais (BRASIL, 1998a).

A álgebra, no entanto, realiza generalizações de modelos consistindo em “[...] um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 137). Sendo que o conhecimento algébrico desenvolve a capacidade de abstração e generalização e é uma ferramenta importante na resolução de problemas, em que o uso somente de estratégias pertencentes ao campo da aritmética se mostra insuficientes (DA ROCHA FALCÃO, 1993).

Autores como Carraher e Schliemann (2007), Carraher, Schliemann e Brizuela (2000), Freire (2007), Lins e Gimenez (1997) e Da Rocha Falcão (1993) já pesquisaram sobre atividades ligadas ao campo conceitual algébrico e recomendam que estas sejam introduzidas já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como forma de promover uma transição da aritmética para a álgebra. Esses estudos ainda mostram que a abordagem desses dois campos (aritmética e álgebra) não deve ser fragmentada, pois essa quebra curricular causa dificuldades de compreensão nos alunos quando são iniciados aos conceitos algébricos e apontam à necessidade da aritmética e álgebra darem significado uma a outra.

Vergnaud (1988) também recomenda que o ensino da álgebra se inicie já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois, assim, pode-se preparar melhor os estudantes para lidarem com as questões epistemológicas envolvidas na transição da aritmética para a álgebra. Sobre isso, Blanton e Kaput (2008) acrescentam que é preciso incentivar os estudantes a construírem regularidades, conjecturas, generalizações, por meio de uma *algebrização* de problemas aritméticos.

A proposta não é adiantar o ensino da álgebra, mas propor situações ligadas ao cotidiano das crianças e baseadas no raciocínio multiplicativo, raciocínio este, ligado à aritmética. Carraher *et al*. (2006, p. 4) explica que a: "[...] notação simbólica, funções, tabelas e gráficos são ferramentas poderosas para crianças compreender e expressar relações funcionais entre uma ampla variedade de situações problema". Entende-se que a utilização de tabelas, retas numéricas e gráficos possa contribuir com a compreensão das relações presentes nas estruturas multiplicativas, relações estas que possuem características funcionais e, portanto, algébricas, permitindo, ainda, a generalização da situação.

Considerando que em situações multiplicativas de proporção simples, dupla e múltipla existem relações funcionais e escalares (invariância e covariação), logo, requisitam um raciocínio funcional, já que faz parte das atividades necessárias para formar o conceito de função (SMITH, 2008). Sobre isso, Smith (2008, p.143-144, tradução nossa[29]) indica seis tipos de atividades para formar a base para o conceito de função:

---

[29] Texto original: *1. Engage in some type of physical or conceptual activity. 2. Identify two or more quantities that vary in the course of this activity and focus one's attention on the relationship between the two variables. 3. Make a record of the corresponding values of these quantities, typically tabular, graphical, or iconic. 4. Identify patterns in these records. 5. Coordinate the identified patterns with the actions involved in carrying out the activity. 6. Using this coordination to create a representation of the identified pattern in the relationship.*

> 1. Envolver-se em algum tipo de atividade física ou conceitual;
> 2. Identificar duas ou mais quantidades que variam no decorrer desta atividade e concentrar-se sobre as relações entre as duas variáveis;
> 3. Fazer registro da correspondência destas quantidades por meio de tabelas, gráficos ou figuras;
> 4. Identificar padrões desses registros;
> 5. Coordenar os padrões identificados com as ações envolvidas na realização da atividade;
> 6. Criar, a partir dessa coordenação, uma representação do padrão identificado nas relações.

Verifica-se, nessa sequência de atividades apresentadas por Smith (2008), a presença do conceito de covariação. No desenvolvimento do raciocínio funcional, os alunos precisam ser capazes de reconhecer de que forma as quantidades variam em relação as outras (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000).

Blanton e Kaput (2005) acompanharam durante um ano uma professora do 3° ano, a partir de um projeto de desenvolvimento profissional, com o objetivo de analisar como ocorreu o desenvolvimento das habilidades de raciocínio algébrico de seus alunos. Por meio dessa investigação, os autores puderam verificar que raciocinar sobre funções está relacionado a: (1) simbolizar quantidade e operar com as expressões simbólicas; (2) representar dados graficamente; (3) descobrir relações funcionais; (4) prever resultados desconhecidos utilizando dados conhecidos; e (5) identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

Essas constatações apontadas por Blanton e Kaput (2005) demonstram que o raciocínio funcional está relacionado com o raciocínio covariacional, também tendo sido verificado por Confrey e Smith (1994, 1995).

Para chegar a essa conclusão, Confrey e Smith (1994; 1995) exploraram uma abordagem em que era necessário encontrar uma regra que relaciona as variáveis independentes e dependentes. Contudo, por ser uma abordagem abstrata e que enfatiza as regras, é considerada de difícil compreensão para os estudantes mais jovens (CONFREY; SMITH, 1995).

Confrey e Smith (1995) ainda explicam que as atividades que envolvem covariação necessitam que sejam geradas duas sequências de padrão e depois feita a justaposição delas, assim como acontece em tabelas de valores. Segundo Confrey e Smith (1994), quando os alunos percebem a covariação entre duas quantidades, são capazes de coordenar a variação das duas variáveis como eles se movem para cima e para baixo da tabela. De outra forma, eles podem descrever como uma quantidade muda em relação a outra.

Outros investigadores têm também trabalhado com o conceito de variação única, especialmente quando trabalhando com os alunos mais jovens. Warren (2005a), por exemplo, estudou a habilidade que jovens estudantes tinham para generalizar regras de padrões de crescimento. Ela descobriu que, enquanto os alunos têm a capacidade de raciocinar sobre as funções, essa única variação foi cognitivamente mais fácil para os mais jovens alunos.

Uma boa contribuição para a noção de covariação pode ser vista no trabalho de Saldanha e Thompson (1998), que descreve a covariação como o envolvimento da coordenação de duas quantidades; com a percepção de que um valor de uma quantidade varia de acordo com outro. Estes autores ainda mencionam as relações de valor a cada momento no tempo. Nesse trabalho, o desenvolvimento das imagens de covariação é visto como o desenvolvimento evolutivo da coordenação de duas quantidades.

Em geral, os estudantes apresentam pouca dificuldade em determinar como um conjunto único de dados varia, porém, determinar as relações existentes entre dois conjuntos de dados (covariação) pode ser considerado um desafio (CARLSON *et al*., 2002; WARREN, 2005a, 2005b; WARREN; COOPER, 2008).

Nos estudos de Monk (1992), foi observado que estudantes universitários, na disciplina de cálculo, mostram uma forte tendência a focar mais na forma dos gráficos do que em entender o gráfico de uma função como um meio para definir uma relação de covariação entre duas variáveis.

O entendimento das conexões entre duas variáveis pode afetar a forma como os estudantes dão sentido às relações representadas em um gráfico (SALDANHA; THOMPSON, 1998), pois não é incomum que interpretem o gráfico como uma figura icônica com semelhanças com a situação que se está representando. Um exemplo dessa situação pode ser visualizado em um dos problemas apresentados no trabalho de Carlson *et al.* (2002), em que um aluno pode interpretar um gráfico que representa uma relação entre o volume e a altura do líquido numa garrafa como sendo a própria forma da garrafa.

Carlson *et al.* (2002) explica que um contraste entre a representação icônica e covariacional de um gráfico se faz necessária para desenvolver a percepção de que no gráfico deve-se considerar a representação entre quantidades que podem mudar em conjunto, ressaltando ainda que ambientes dinâmicos usados nessa situação descrita, têm o potencial para apoiar a interpretação e a construção das relações entre quantidades, pois propiciam uma série de questões. A exploração desses ambientes dinâmicos e do potencial que eles trazem para as sequências de ensino serão melhor tratadas no capítulo seguinte.

Muitos dos estudos que envolvem o tema de covariação estão voltados para a matemática avançada e estatística, desse modo, há pesquisas (CONFREY; SMITH, 1994, 1995; SALDANHA; THOMPSON, 1998; WARREN, 2005a, 2005b) que investigam os benefícios do raciocínio covariacional no desenvolvimento de funções e da álgebra; outras (CARLSON *et al.*, 2002; OEHRTMAN; CARLSON; THOMPSON, 2008) que analisam como o raciocínio covariacional ajuda no desenvolvimento de ideias relacionadas ao cálculo e à estatística (ZIEFFLER; GARFILD, 2009). Poucos trabalhos investigaram como as crianças entendem covariação, já que não é um conceito comumente explorado na Educação Básica, muitas vezes, desconhecido pelos professores que atuam nesse nível de ensino, principalmente no Brasil.

Irwin (1996), em um experimento de ensino, entrevistou 107 crianças, de 4 a 7 anos, sobre a sua compreensão de covariação e compensação nas relações parte-todo, sobre quantidades incontáveis, quantidades contadas e equações numéricas, mostrando que a capacidade de prever mudanças em quantidades contadas aumentou com a idade. A maioria dos estudantes de sete anos de idade demonstrou uma compreensão de covariância, mas o estudo anterior é importante porque olha para a mudança das noções iniciais de covariação, que é importante no raciocínio funcional. Irwin (1996) também descobriu que crianças de 4 anos já possuem uma compreensão inicial de covariação.

Blanton e Kaput (2004) também investigaram crianças que estudavam da pré-escola até o 5° ano, com o objetivo de analisar o raciocínio destas crianças em problemas contextualizados e diretamente proporcionais. Um dos problemas utilizados traz as relações combinadas entre a quantidade de cães, de olhos e de caudas. Dentre os achados estão as diferenças perceptíveis entre as crianças dos diferentes níveis. As crianças da pré-escola utilizaram contagem básica, sem, inicialmente, perceber qualquer padrão, somente depois da professora mostrar os dados em gráficos, utilizando pontos e barras para representar olhos e cauda, foi que entenderam o padrão. No caso dos olhos, elas visualizaram um padrão de dois, associando que a cada novo cão adicionado ao grupo teriam de acrescentar dois olhos. As crianças do segundo ano em diante utilizaram gráficos por conta própria, descrevendo os padrões. Com a ajuda do professor, as crianças do segundo ano também foram capazes de prever o número de olhos para 7 cães sem usar contagem. As do terceiro ano em diante descreveram relações multiplicativas de comparação como “duplo”, demonstrando entendimento que para saber a quantidade de olhos bastava multiplicar a quantidade de cães por 2.

Assim, a partir de pesquisas como as de Irwin (1996) e Blanton e Kaput (2004) verifica-se que as crianças, mesmo mais novas, utilizam o conceito de covariação nas quantidades contadas quando o problema é contextualizado e o padrão é diretamente proporcional. Seus estudos focam covariação como um trampolim cognitivo no desenvolvimento do raciocínio funcional, considerando que problemas desse tipo podem ser representados por meio de uma função: $f(x) = mx + b$ em que '*b*' é zero, sendo uma alternativa para a transição da aritmética para a álgebra e para a formação do conceito de função, já que a função linear $f(x) = mx$ é de mais fácil compreensão.

Essa transição pode acontecer por meio da exploração de situações multiplicativas de proporção simples, proporção dupla e múltipla, uma vez que o "*m*" presente na função linear $f(x) = mx$ é o operador funcional, presente na relação entre as grandezas existentes nesses tipos de situação. Essa abordagem deve acontecer com a exploração de diferentes representações, como tabelas e gráficos e o uso de tecnologias para dar dinamicidade e facilitar a construção dessas representações.

Uma pesquisa realizada com estudantes do sétimo ano de uma escola dos Estados Unidos por Nickerson, Nydam e Bowers (2000), teve como objetivo investigar os conhecimentos relacionados a gráficos, notação algébrica e taxa de variação[30] e como esses conceitos poderiam ser construídos pelos estudantes. Foram realizadas atividades com o *SimCalc*[31] durante cerca de três semanas, com as seguintes abordagens: 1) a representação gráfica em um sistema de plano cartesiano, 2) escrita e avaliação de simples expressões algébricas, e 3) a compreensão de taxa de variação.

Durante a primeira semana, as atividades foram concentradas nos gráficos de posição. Para isso utilizaram-se planilhas e modelagem de gráficos por meio de detectores de movimento ligados ao computador, desafiando os estudantes a reverem o movimento conforme *feedback* gráfico que aparecia na tela do *software.* Também foi solicitado que os estudantes tentassem prever como dois personagens no *SimCalc*, o Sapo e o palhaço, se moveriam com base em dados gráficos de posição. Depois do professor ouvir as previsões dos estudantes, foi feita a simulação, com a intenção de concentrar-se em descrições qualitativas de gráficos. Após algumas simulações, os estudantes começaram a descrever o movimento com maior precisão, desenvolvendo estratégias para coordenar a distância e o tempo.

As atividades posteriores incentivaram o uso de notações algébricas para descrever os padrões das tabelas e dos dados do gráfico, para isso as atividades focaram na identificação de padrões. Por último, foram trabalhadas as taxas de variação, por meio de atividades focadas em gráficos de velocidade. Dentre as atividades, foi solicitado que os

[30] Esse trabalho considera taxa de variação o coeficiente "m"da função linear $f(x) = mx + b$

[31] É um *software* de álgebra dinâmica e interativa, com licença paga, criado pelo *Massachussets Institute of Techonology* (MIT). Historicamente, as concepções do *SimCalc* aproximam-se de um grande movimento de Educação baseada na linguagem de programação Logo para crianças, já que é um *software* baseado na animação e na construção. Mas, ao contrário do Logo, as representações dinâmicas não se concentram em linguagem de programação.

alunos planejassem e criassem histórias (simulação) considerando que o personagem mudasse de taxa de variação e de direção. Resultados de um pós-teste indicaram que os estudantes passaram a compreender uma série de conceitos pré-algébricos, pois passaram a ser capazes de entender contextos com números inteiros referentes aos pontos em qualquer dos quadrantes de um plano cartesiano e principalmente na interpretação de gráficos (NICKERSON; NYDAM; BOWERS, 2000).

É importante ressaltar que fica evidente que essa abordagem buscou colocar as animações do *software* como foco da atividade e não como uma aplicação a ser estudada após a notação formal dominada, ou seja, o *SimCalc* não foi utilizado para consolidar os conhecimentos, mas para desenvolvê-los. Uma das vantagens que pode ser observada nesse trabalho é que o *software* não exigiu que os estudantes descrevam o movimento ou situação com equações algébricas. Isto pode ser considerado vantajoso uma vez que oportuniza que os estudantes possam entender a situação por meio da representação gráfica sem primeiro ter que dominar as equações algébricas, possibilitando, assim, uma transição mais tranquila da aritmética para a álgebra.

Com base no trabalho realizado por Nydam e Bowers (2000), entende-se que essa transição pode ser facilitada ao se abordarem as estruturas multiplicativas explorando conceitos de covariação a partir de diferentes representações e com suporte das tecnologias. Diante disso, no capítulo seguinte serão apresentadas possibilidades do uso das tecnologias para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

3 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E AS POSSIBILIDADES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Atualmente existem muitas tecnologias disponíveis na escola, como calculadoras, computadores e dispositivos portáteis: *laptops*, *tablets* e celulares que também podem ser ligados em rede (*Intranet*[32] e *Internet*[33]). Essa conexão entre diversos dispositivos possibilita a geração de dados em tempo real e a interação, como as que podem acontecer, por exemplo, na resolução de problemas colaborativos.

Esse capítulo está dividido em três seções. A primeira seção relaciona as teorias de aprendizagem que suportam o uso de múltiplas representações com o papel desempenhado pela tecnologia na utilização de representações em matemática. A seção seguinte versará sobre possíveis abordagens: instrumental, seres humanos com mídias e multimodal. Por fim, a última seção abordará a colaboração e a produção de material, explorando as contribuições das múltiplas representações para a produção de conhecimento dos estudantes.

3.1 As representações múltiplas no ensino de matemática com o uso de tecnologia

Para Vergnaud (1990), as representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, dentre outras) são utilizadas para representar os invariantes (relações, procedimentos) e as situações de um conceito. No caso de problemas de estruturas multiplicativas, estes podem ser representados verbalmente, isto é, em linguagem natural; por meio de linguagem matemática ao utilizar expressões aritméticas e algébricas, mediante diagramas, figuras, tabelas ou gráficos.

Lautert e Spinillo (1999, p. 24) afirmam que "[...] a complexidade das representações matemáticas se reflete nas diferentes formas de se conceber as relações entre representação e conhecimento/raciocínio". Sobre isso, apresentam diversas linhas de pensamento: a primeira, defendida por Piaget, de que as representações são o resultado da construção dos esquemas cognitivos, relacionadas às capacidades lógicas adquiridas a partir de cada estágio do desenvolvimento; a segunda defende que as representações simbólicas não são a expressão do pensamento, mas algo que o constitui, podendo ser construídas no decorrer de uma atividade ou na resolução de um problema (MEIRA, 1993, 1995). Outras linhas de

---

[32] Rede de computadores privada, exclusiva de um determinado local - conexão local.
[33] Rede de computadores conectados a nível mundial - conexão global.

pensamento consideram tanto a capacidade lógica do indivíduo como as situações de uso e produção (VERGNAUD, 1983).

A utilização de diferentes representações em uma mesma situação contribui para o desenvolvimento da compreensão da criança já que as representações simbólicas são usadas para representar os invariantes (VERGNAUD, 1994). Decorre, então, que Tyler, Prain e Peterson (2007, p. 317, tradução nossa)[34] explicam que "[...] a aprendizagem de novos conceitos não pode ser separada da maneira de como aprender a representá-los e nem do que significam as representações usadas". Assim, ao dominar um conceito, espera-se que o estudante seja capaz de mobilizá-lo em diferentes situações e representações.

Lesh, Post e Behr (1988) afirmam que as ideias matemáticas podem ser representadas por meio de objetos físicos, imagem falada ou símbolos. A valorização de diferentes representações também é defendida por Carraher e Schliemann (2007) reconhecendo que, muito além das notações utilizadas na aritmética e na álgebra, existem três sistemas simbólicos fundamentais: as tabelas, os gráficos e a linguagem natural.

Vergnaud (1983) considera que as tabelas são uma boa forma de apresentar problemas multiplicativos, pois as informações podem ser organizadas em fileiras e colunas. Esse tipo de representação possibilita o registro e a organização de valores numéricos, por isso proporciona a apreciação numérica da variação desses valores, assim como da relação entre variáveis, sendo reconhecida por investigadores que destacam a sua eficiência no estímulo ao pensamento funcional (SMITH, 2008).

A representação por meio de gráficos cartesianos se constitui mediante a relação entre duas variáveis representadas nos eixos *'x'* e *'y'*. Segundo Carraher, Schliemann e Schwartz (2008), gráficos se constituem em representações interessantes e que podem ser utilizadas em situações a que os estudantes atribuam significado. Os gráficos cartesianos e as tabelas podem permitir, se utilizados em conjunto, que os alunos complementem e clarifiquem a interpretação de tabelas, assim como, por meio dos gráficos, aprofundar a compreensão de covariação.

Prain e Waldrip (2006) explicam que o termo múltiplas representações está relacionado às possibilidades de se usar em diferentes formas de representar um conceito. Desta forma, assim como Vergnaud (1990, 1998), Tytler, Prain e Peterson (2007) defendem que a aprendizagem de novos conceitos também precisa estar vinculada à compreensão do significado das representações usadas.

[34] Texto original: *Therefore learning about new concepts cannot be separated from learning both how to represent these concepts as well as what these representations signify.*

Para Keller e Hirsch (1998), o uso de diferentes representações pode trazer benefícios como: (1) tornar um conceito mais concreto, (2) enfatizar de forma seletiva, diferentes aspectos de conceitos complexos, e (3) facilitar a ligação cognitiva das representações. Aliada a esses benefícios, a tecnologia pode favorecer o trabalho com múltiplas representações (PRAIN; WALDRIP, 2006; PIERCE; STACEY, 2001), uma vez que dinamiza o processo de construção de gráficos e tabelas, por exemplo.

Todos os conceitos matemáticos podem e devem ser trabalhados por meio de múltiplas representações, dentre eles o de função. Confrey e Smith (1994) utilizaram gráficos, tabelas e calculadora para ajudar na compreensão dos alunos sobre função, considerando aspectos como o campo de aplicabilidade, a taxa de variação e os padrões. Nesse trabalho, cada uma dessas representações foi pensada para atividades específicas, como, por exemplo, os gráficos apoiaram uma exploração qualitativa, considerando aspectos como a forma e a direção, enquanto que a tabela pode ser usada para introduzir abordagem mais explícita da covariação em funções.

Em relação às funções e às múltiplas representações, Ponte (1992, p. 11) afirma que “[...] o ensino das funções precisa articular de forma equilibrada as três formas de representação mais importantes, nomeadamente as formas numérica, gráfica e algébrica”. Ainda explica que o trabalho com situações reais servem de suporte à compreensão das expressões algébricas e que a tecnologia pode desempenhar um importante papel no ensino desse conteúdo, especialmente as calculadoras gráficas e os computadores.

Embora a sequência de atividades desenvolvidas nesta tese não tenha como finalidade específica o trabalho com funções - pode-se dizer que está no limite entre a aritmética e a álgebra, verifica-se que a compreensão dessas duas representações (tabela e gráfico) e ainda das relações numéricas, pode vir a contribuir para que o estudante consiga compreender a covariação em um conjunto de dados, desta forma, a tecnologia digital pode vir a ser um importante instrumento para facilitar essas representações e dar maior dinamicidade ao processo.

O uso das múltiplas representações possibilitadas no ensino por meio do uso da tecnologia digital é sustentado por Borba e Villarreal (2005) por possibilitar o desenvolvimento de ideias e conjecturas dos estudantes, servindo de base para a elaboração de demonstrações matemáticas. Assim, a aprendizagem pode ser desenvolvida apoiada pelo computador.

O computador tem se mostrado uma importante ferramenta nas atividades matemáticas de cunho exploratório e investigativo, pois agiliza os cálculos demorados e repetitivos, permitindo que os estudantes se concentrem na exploração dos conceitos ou situações, na descoberta de relações ou semelhanças, na modelagem de fenômenos e na testagem de conjecturas (PAPERT, 2008).

O uso de tecnologias digitais para fins educacionais pode trazer vantagens como: a facilidade de visualização e representação de gráficos; as simulações de situações reais; o trabalho em contextos investigativos; a produção de conteúdo e informação; dentre outras (CASTRO, 2012). Devido a essas possibilidades, a tecnologia, combinada com as vantagens que as múltiplas representações oferecem, apresenta características igualmente importantes: dinamicidade e interatividade.

As diferentes ferramentas tecnológicas disponíveis no computador (*software*) e por meio da Internet (objetos de aprendizagem, *blogs*), podem favorecer o trabalho com as múltiplas representações. Tais recursos têm sido cada vez mais utilizados na escola para apoiar situações de ensino em que somente a utilização de materiais manipulativos ou material impresso não é suficiente. Apesar disso, os ganhos cognitivos em se utilizar tecnologias digitais no ensino de matemática não dependerão apenas dos recursos escolhidos, mas da metodologia adotada.

Ainley, Nardi e Pratt (2000) realizaram pesquisa com crianças de 8 e 9 anos em escolas primárias que participavam de um projeto com uso de *laptops*, em que foi realizada uma abordagem pedagógica com o uso de computadores, denominada "*Active Graphing*" cujo objetivo era ajudar as crianças a desenvolverem habilidades interpretativas por meio de experiência de coleta de dados, tabulação de dados em uma planilha e produção e leitura de gráficos.

Nessa pesquisa as planilhas eletrônicas foram usadas para auxiliar as crianças na aprendizagem de habilidades gráficas, permitindo que os gráficos fossem utilizados como ferramentas analíticas. O planejamento das atividades foi realizado junto ao professor da turma, pois os problemas trabalhados deveriam abordar questões de interesse das crianças, assim como elementos simples que permitissem verificar as alterações (variações) de uma variável e também possibilitar que elas pudessem tomar decisões sobre o experimento realizado. A partir desse estudo verificou-se que crianças de 8 e 9 anos são capazes de interagir com os dados coletados e os gráficos e verificar significados e tendências.

Valorizar atividades em que os alunos sintam necessidade do simbolismo presente em situações matemáticas, de modo que o estudante compreenda o significado, pode se configurar como um grande desafio. Bills, Wilson e Ainley (2005), realizaram um projeto para desenvolver a competência algébrica em alunos de 11 e 12 anos, com o uso das planilhas eletrônicas, apoiando-se em cinco princípios. O primeiro está relacionado à importância de buscar o equilíbrio entre os diferentes tipos de atividades algébricas. O segundo princípio explica que a familiaridade e fluência com as estruturas da aritmética ajuda os estudantes a, posteriormente, expressarem generalizações por meio de notações algébricas. O terceiro está baseado no uso das planilhas eletrônicas e do poder que esse *software* tem de permitir um retorno imediato das ações do estudante. O quarto está fundamentado na intencionalidade de se proporem atividades que sejam significativas aos alunos. Por fim, o quinto princípio defende que os estudantes compreendam a utilidade dos conceitos algébricos trabalhados e das notações algébricas, de descobrir o valor de uma incógnita, de entender padrões e relações.

Todavia a compreensão das notações algébricas por meio de planilhas pode ser dificultada devido às características dessa ferramenta. Em outra pesquisa, Ainley (1996) analisou situações de exploração com planilhas eletrônicas e *laptops* (*Primary Laptop Project*) em uma pesquisa com 8 pares de crianças de 11 anos de idade em uma escola primária. Para isso, fez uma intervenção com o objetivo de analisar o desenvolvimento do conceito de variáveis com o uso de notação algébrica formal.

Os resultados desses trabalhos demonstram que as planilhas eletrônicas podem tornar o uso da linguagem simbólica algébrica significativa, contribuindo para a compreensão de variáveis, pois "[...] como em outros ambientes baseados nos computadores, o pensamento das crianças é apoiado pelo *feedback* dado pelo computador nas suas tentativas de chegar à formalização" (AINLEY, 1996, p. 421, tradução nossa)[35]. Contudo, como as planilhas eletrônicas não têm objetivos educacionais, não há *feedbacks* durante a realização das atividades, o que, em muitos casos, acaba sendo dado pelo professor.

Esse trabalho alerta para os riscos das formalizações algébricas desvinculadas das atividades exploratórias, pois é comum que essas formalizações aconteçam de forma forçada, apresentadas pelo professor, e não a partir de atividades que possibilitem a reflexão dos estudantes sobre os dados em contextos reais. Sobre isso, Ainley (1996, p. 405, tradução nossa)[36] explica que:

---

[35] Texto original: *"Like other computer-based environments, children's thinking is supported by feedback given by the computer on their attempts to give a formalization"*.

[36] Texto original: "*The fact that children meet variables in a context where there is a clear purpose for their use may suggest an additional explanation for the relative success of children working in computer-based environments*".

> O fato das crianças encontrarem variáveis num contexto onde existe um claro propósito para o seu uso, pode sugerir uma explicação adicional para o relativo sucesso do trabalho das crianças em ambientes baseados na utilização do computador.

A tecnologia pode tornar os contextos mais significativos, possibilitando a geração de um número maior de dados, o que pode contribuir para a relevância de exploração de atividades gráficas. Por isso, Ainley (2011, p. 13, tradução nossa)[37] ressalta a "[...] utilidade de mostrar resultados graficamente, com a finalidade de procurar padrões e tomar decisões sobre novos dados a serem recolhidos".

Também foi observado que as crianças da pesquisa demonstraram dificuldades, principalmente por não compreender o poder da notação algébrica formal, presentes nas planilhas (AINLEY, 1996). Isso pode ser explicado pelo fato de as planilhas terem um caráter aritmético bem maior que o algébrico, já que as fórmulas, símbolos e/ou representações algébricas representadas nas planilhas eletrônicas, nem sempre são fiéis à linguagem matemática. Verificam-se exemplos dessa limitação na representação do sinal de multiplicação que é feita por meio de um asterisco (*); em alguns operadores lógicos utilizados pela ferramenta como (<>) para indicar o símbolo de diferença; a indicação do expoente de uma potência ou de um polinômio deve ser dado por (^), por exemplo: 5^2 seria representado por *5^2*, assim como x^3 por *x^3*.

Ainda que a planilha eletrônica seja uma ferramenta reconhecida para o desenvolvimento da compreensão de notações algébricas e de relações gerais, Kieran (2007) explica que os estudantes acabam generalizando de forma recursiva, o que pode dificultar a compreensão e identificação das regras e padrões algébricos.

Outros usos da planilha eletrônica têm sido relatados considerando a metodologia empregada na utilização dessa ferramenta, considerando atividades em uma abordagem instrumental (HASPEKIAN, 2003). Outras possibilidades do uso da planilha eletrônica podem ser vislumbradas por meio do *Google Drive*, em que várias pessoas podem acessar o mesmo documento, mesmo estando em locais diferentes. O sincronismo na utilização desse recurso, mesmo quando os usuários estão em locais diferentes, faz dessa ferramenta uma interessante alternativa ao trabalho colaborativo, contudo, faltam pesquisas que descrevam limitações e possibilidades pedagógicas para a Matemática.

Gafanhoto e Canavarro (2011) realizaram um estudo de caso com estudantes do 9° ano com o objetivo de investigar de que modo os alunos utilizam as representações

---

[37] Texto original: *" the utility of displaying results graphically, in order to look for patterns, and make decisions about further data to be collected".*

múltiplas na resolução de tarefas que implicam a utilização de Funções num contexto de trabalho com o *Geogebra*. Para isso, os alunos foram incentivados a realizarem um conjunto de tarefas diversas em que podiam recorrer, se julgassem necessário, ao *software*. Em geral, todos os grupos utilizaram planilhas eletrônicas do *Geogebra* por julgarem de uso bem mais simples e rápido que papel e lápis, inclusive para a realização dos cálculos, mas também utilizaram representações algébricas, gráficas, tabulares e numéricas.

Os resultados demonstram que os estudantes, predominantemente, recorrem à representação gráfica, apesar de usarem uma variedade de representações no trabalho com funções. A utilização do s*oftware* para a realização das atividades possibilitou que os estudantes estabelecessem relações entre as diferentes representações.

Sobre as possibilidades de utilizar múltiplas representações por meio do *Geogebra*, Hohenwarter e Preiner (2007) afirmam ser essa uma de suas características mais peculiares, ressaltando que o *software* possibilita que cada expressão na zona algébrica possua uma representação na zona gráfica e vice-versa.

Em pesquisa realizada por Pinheiro e Cabrita (2013) com 19 estudantes do 6° ano, de idade entre 11 e 13 anos, por meio de estudo de caso, teve como finalidade implementar uma experiência que pudesse contribuir com o desenvolvimento do raciocínio proporcional e da representação gráfica (função linear) utilizando o *Geogebra*. A proposta pedagógica pautou-se na exploração das relações proporcionais entre a medida do lado de um quadrado e um perímetro associado à representação gráfica da função linear dessa situação.

Apesar de os alunos terem apresentado motivação na realização da atividade proposta e conseguirem identificar representações gráficas de proporcionalidade direta, não foi observado contribuição do *Geogebra* no desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta e nem do raciocínio proporcional dos estudantes. Um dos pontos levantados pelos autores para essa constatação pode estar relacionado à proposta pedagógica planejada que se centrou na construção do quadrado, demandando um longo tempo, ao invés de centrar-se nas relações que poderiam ser mantidas, ou no tipo de representação gráfica que se obteria.

O conhecimento da utilização das ferramentas do *Geogebra* requisita tanto o professor quanto os alunos um certo período de tempo para aprender. Sendo, portanto, uma desvantagem dos *softwares* de uma forma geral, pois, apesar de eles serem mais completos que os objetos de aprendizagens que são focados em conteúdos específicos, o período necessário para essa adaptação pode não compensar sua utilização (CASTRO FILHO *et al*., 2008; CONFREY, 1992).

O *Geogebra* também possui versões para uso em dispositivos móveis[38], trazendo vantagens de portabilidade e mobilidade. Embora os dispositivos móveis possam trazer limitações como: tamanho de tela, pouco espaço de armazenamento, falta de conexão imersiva, dentre outras, dependendo do dispositivo. Vale ressaltar que trazem possibilidades de interação, de trabalho colaborativo, de ampliação de tempo e de espaço da escola, já que os estudantes podem utilizá-lo a qualquer hora e em qualquer lugar (CASTRO; CASTRO FILHO, 2012). Mesmo com a disponibilização desse *software* para dispositivos móveis, faltam trabalhos que relatem os benefícios pedagógicos e limitações para o ensino da matemática.

Essas pesquisas aqui apresentadas, embora apontem algumas limitações, mostram como as planilhas eletrônicas (*Excell*, *Calc*) e o *Geogebra* podem ser utilizados para estabelecer relações entre diferentes representações. Entende-se que estes recursos possam contribuir com a aprendizagem dos estudantes, pois constituem-se como mecanismos que aprimoram o processo de significação, oferecendo procedimentos variados de interpretação e entendimento. Todavia, além das possibilidades que as ferramentas podem proporcionar, é preciso considerar as abordagens de uso, as quais serão discutidas a seguir.

3.2 A integração e o uso de tecnologias digitais: algumas abordagens

Atualmente, uma grande quantidade de recursos/ferramentas pode ser encontrados na *web* (jogos, rede social, *blogs*, *sites* de busca, dentre outros), disponibilizando informações e entretenimento, o que tem mudado a forma como as pessoas se comunicam e aprendem (OLIVE, 2011). Contudo, o que se tem observado é que o processo educativo escolar pouco se assemelha a como as pessoas aprendem fora da escola, necessitando, portanto, entender como o uso de tecnologia digital na sala de aula pode melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática.

Alguns pesquisadores argumentam que as tecnologias educacionais vêm passando por uma evolução significativa, o que tem permitido recursos digitais cada vez mais visuais, interativos e dinâmicos (ARZARELLO; ROBUTTI, 2010; HEGEDUS; MORENO-ARMELLA, 2009). Alguns desses recursos já possibilitam a utilização de múltiplas representações (textual, numérica, gráfica, simbólica, dentre outras), com atributos de dinamicidade e conexão, que facilitam que trabalhos sejam realizados à distância, por

[38] Essa versão pode ser acessada no *link*: <*https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra&hl=br*>

exemplo, ou que um determinado grupo de alunos estejam conectados a fim de trabalhar em conjunto para resolver um mesmo problema.

As representações e comunicações possibilitadas pela tecnologia digital, trazem para a Educação Matemática uma variedade de formas de expressão. Após mais de 10 anos investigando o impacto da integração de ambientes de *softwares* dinâmicos, Hegedus e Moreno-Armella (2009) afirmam que a interseção entre a representação e a comunicação podem trazer mudanças para a aprendizagem, participação e envolvimento dos estudantes. Para isso, é preciso considerar a mobilidade de objetos matemáticos em várias representações por meio de diferentes dispositivos e a flexibilidade de capacidade de coleta, manipulação e exibição das diferentes construções (representações).

O primeiro tipo de participação foi denominado por Hegedus e Moreno-Armella (2009) de performances matemáticas, pois envolve atividades de criações individuais ou em pequenos grupos, ou ainda interações coordenadas entre os grupos. O segundo tipo foi denominado de participação para exibição pública que envolve alterações sistemáticas, ou em pequenos grupos, em que os alunos constroem, enviam, recebem, apresentam e discutem as atividades a fim de buscar padrões, de provocar generalizações, de expor ou de contextualizar casos especiais.

Nesse tipo de atividade, integrada e compartilhada com os colegas de grupo, existem experiências em que os sujeitos integram uma atividade conjunta, visando a um projeto coletivo, que é a aprendizagem – produto de trocas de ideias, discussões, compartilhamento de informação, construção social de conceitos.

Esse tipo de concepção de aprendizagem, fundamenta-se na teoria sociocultural de Vygotsky (1994), pois possibilita que os sujeitos proponham, discutam e organizem ideias ao longo do processo educativo. Dessa maneira, é possível dizer que os participantes dessas interações ensinam e aprendem mutuamente (DILLENBOURG, 1999; PANITZ, 1996; STAHL; KOSCHMANN; SUTHERS, 2006).

Alguns autores defendem que o envolvimento pode surgir a partir da participação em atividades de sala de aula, ao possibilitar, por exemplo, a criação de atividades numa visão sociocultural (HEGEDUS; MORENO-ARMELLA, 2009). A participação e envolvimento são, sem dúvidas, importantes para a aprendizagem, contudo, o desenvolvimento de ambientes cada vez mais interativos, dinâmicos e sociais requisitam uma análise da natureza dessa aprendizagem, já que possibilitam representações matemáticas por meio de diferentes formas comunicativas.

Mesmo com a existência dessas características, "[...] é preciso ter cuidado para não dar a impressão de que a própria tecnologia faz a diferença no ensino e na aprendizagem. É, naturalmente, não a tecnologia que faz a diferença, mas sim como é usada e por quem" (OLIVE, 2011, p. 3, tradução nossa)[39]. Apesar de concordar com a afirmação de Olive (2011), é preciso esclarecer que a tecnologia digital tem um papel importante no ensino, caso contrário, não faria sentido utilizá-la. Desse modo, é necessário explorar seu potencial, para, então, desenvolver metodologias adequadas ao que se quer fazer e, assim, se obterem resultados satisfatórios.

Arzarello e Robutti (2010) referem-se ao modelo de representação e comunicação, descrito anteriormente por Hegedus e Moreno-Armella (2009), explicando que a reformulação e integrações de tecnologias perpassam por três abordagens: (1) abordagem instrumental; (2) abordagem de *seres-humananos-com-mídias* e (3) abordagem multimodal. A seguir, discutem-se essas abordagens.

3.2.1 Abordagem instrumental

Esta abordagem é baseada no trabalho sobre ergonomia cognitiva de Vérrilon e Rabardel (1995), os quais defendem um modelo que envolve sistema de atividades instrumentais para descrever os processos que envolvem a interação humano-instrumento. Assim, consideram como uma ferramenta muda de um artefato[40] para um instrumento nas mãos de um usuário, e como tanto a ferramenta e usuário são transformados no processo (VÉRRILON; RABARDEL, 1995).

Sobre essa abordagem, Clark-Wilson (2013) explica que, uma vez que os indivíduos são apresentados aos esquemas[41] de utilização de um determinado instrumento, a relação entre artefato e seus usos podem evoluir dando origem ao processo de gênese instrumental. Bittar (2011, p. 162) exemplifica que:

---

[39] Texto original: *"One needs to be careful not to give the impression that technology itself makes the difference in teaching and learning. It is, of course, not the technology that makes the difference but rather how it is used and by whom"*

[40] Vérrilon e Rabardel (1995) e posteriormente, Arzarello e Robutti (2010) e Clark-Wilson (2013) consideram que um mesmo objeto poder ser considerado artefato e instrumento e que a distinção entre ambos se dá pelo fato de um objeto ser considerado artefato quando é utilizado por uma pessoa durante uma atividade e que o mesmo pode ser denominado de instrumento quando requer a utilização de esquemas do indivíduo que o utiliza.

[41] É importante ressaltar que apesar de na perspectiva vygotskyana, um instrumento ser considerado um elemento que está situado entre o artefato e as operações psíquicas atuantes sobre ele, a ideia de esquema, aqui mencionada, está apoiada em conceitos da psicologia cognitiva, estando baseados na definição dada por Piaget e ampliada por Vergnaud (1990).

> Na abordagem instrumental, um artefato pode ser um meio material, como um martelo, uma enxada, ou um meio simbólico, como uma linguagem simbólica (linguagem algébrica, símbolos vetoriais etc.). O instrumento consiste do artefato acrescido de um ou vários esquemas de utilização desse artefato, esquemas esses construídos pelo sujeito.

Assim, um *software* ou um recurso digital, por exemplo, também pode ser considerado como um artefato ao ser usado apenas por esquemas de uso, mas que, mais tarde, pode ser considerado como um instrumento, à medida que passa a desenvolver diferentes esquemas de ação e aplicação desses recursos.

Segundo Almeida e Oliveira (2009), essa abordagem faz uma relação entre como se utilizar a máquina e o pensamento matemático, fornecendo bases conceituais para a compreensão dos esquemas que surgem a partir da interação dos alunos com os recursos.

Em uma pesquisa realizada com professores que ensinam Matemática na Educação Básica durante 2 anos, Bittar (2011) desenvolveu um trabalho de formação, com o objetivo de investigar a integração da tecnologia na prática pedagógica desses professores. Dessa forma, para cumprir o objetivo inicialmente traçado, buscou identificar e estudar os esquemas desenvolvidos pelos participantes da pesquisa, o que permitiu analisar a relação do professor com o artefato ou instrumento. Os professores eram incentivados a explorar diferentes *softwares* e discutir coletivamente suas impressões sobre o recurso em grupos.

Os resultados indicaram uma mudança de postura do professor que passou a defender a ideia de que os *softwares* fossem utilizados de modo a promover a aprendizagem. Além disso, foi percebido que as discussões coletivas propiciavam novas aprendizagens, em que novos esquemas eram gerados. Apesar de o esquema ser individual, Bittar (2011) explica que durante as discussões em grupos ficaram evidenciados os diferentes estágios (apropriação tecnológica, uso pedagógico, análise crítica) em que os professores se encontravam em relação ao uso de tecnologia nas aulas de Matemática. Nesse caso, a abordagem instrumental possibilitou compreender como o professor entende e incorpora a tecnologia digital em suas aulas.

Ainda que o trabalho proposto nesta tese não esteja relacionado à formação de professores, a pesquisa de Bittar (2011) mostra como se dá o processo de gênese instrumental, ou seja, como se dá a elaboração do instrumento pelo sujeito, que, no caso, passa de artefato para instrumento, segundo Vérrilon e Rabardel (1995). Apesar dessa abordagem teórica não ter sido realizada voltada para estudar como o aluno aprende na presença de instrumentos, Bittar (2011) salienta que essa abordagem é adequada para ser utilizada pelos estudantes.

Almeida e Oliveira (2009) realizaram uma pesquisa com o objetivo de verificar como dois alunos, que trabalhavam habitualmente em conjunto, nas aulas do 11º ano de escolaridade, integram a calculadora gráfica em aulas de matemática ao trabalharem o tema Funções Racionais, ou seja, como se caracteriza o processo de gênese instrumental. Foi verificado que os alunos conseguiram integrar as calculadoras gráficas em situações significativas, desenvolvendo, para isso, esquemas instrumentais.

A calculadora gráfica ajudou-os a desenvolver esquemas mentais que permitiram a compreensão da Álgebra e suas formas de representação. Isso foi possível devido à calculadora disponibilizar visualizações rápidas dos efeitos de mudança de parâmetros de um gráfico. Essa forma dinâmica, permitiu que os estudantes estabelecessem conexões entre a expressão analítica e a representação gráfica de uma função. Também foi percebido que os estudantes, no segundo ano de utilização da calculadora gráfica, passaram a adaptar esquemas instrumentais em situações em que ainda não tinham esquemas desenvolvidos, como os de compreensão algébrica (ALMEIDA; OLIVEIRA, 2009).

As pesquisas apresentadas reforçam a necessidade do uso das tecnologias digitais não apenas como artefatos, mas como instrumentos que possam favorecer, a partir da dinamicidade e das relações que são possíveis serem feitas por meio das representações, o desenvolvimento de seus esquemas cognitivos dos conceitos trabalhados (BITTAR, 2011; ALMEIDA; OLIVEIRA, 2009). A seguir, será discutida a abordagem *Seres-humanos-com-mídias.*

3.2.2 Abordagem seres-humanos-com-mídias

Inicialmente introduzida por Borba e Villarreal (2005), pode ser considerada uma ampliação da abordagem instrumental (ARZARELLO; ROBUTTI, 2010). Para Borba e Villarreal (2005), na abordagem *Seres-humanos-com-mídias*, o papel da tecnologia digital no processo de produção de conhecimento matemático fica mais evidente, pois o pensamento não é apenas individual e nem coletivo, mas constituído por *humanos-com-mídia* de acordo com as múltiplas possibilidades ou restrições que determinada mídia oferece.

Desta forma, Borba e Villarreal (2005) explicam que há uma interação entre humanos e mídias, de tal forma que o computador molda o ser humano, assim como o ser humano molda o computador, pois o conhecimento é produzido por seres humanos, mas também por diferentes meios, como a oralidade, a escrita ou mesmo novas modalidades de linguagem que emergem da tecnologia digital (BORBA, 2007).

Essas formas diferentes de linguagem podem ser observadas em interações em cursos *online* que incluem formas de oralidade como o bate-papo, ou em salas de aulas presenciais, com o uso de um *software*, por exemplo, em que estes podem ser utilizados com funções diferentes das que foram inicialmente projetados, possibilitando que os estudantes elaborem hipóteses, baseados na experimentação e nos diferentes elementos visuais fornecidos por ele.

Portanto, essa abordagem envolve tanto ferramentas como o sujeito em atividades matemáticas, podendo ser fundamentada, segundo Arzarello e Robutti (2010), baseados em Borba e Villarreal (2005), em duas ideias principais. A primeira ideia enfatiza que a construção do conhecimento é feita de forma social, em que também deve ser considerado como os indivíduos trabalham juntos. A segunda explica que as mídias são partes da construção porque elas podem assumir diferentes papéis na reorganização do pensamento.

Alguns trabalhos discutem como a interação entre humanos e mídias altera a forma de produção de conhecimento, considerando, portanto, como as pessoas colaboram (BARBOSA; 2012, BORBA; VILLARREAL, 2005, BORBA, 2007).

Damiani (2008) explica que as atividades realizadas em grupo, de forma conjunta, oferecem enormes vantagens, que não estão disponíveis em ambientes de aprendizagem individualizada. Alguns dos benefícios desse tipo de trabalho com estudantes estão relacionados com a realização de discussões, permitindo a socialização dos indivíduos por meio de processos interativos; com aquisição de aptidões e habilidades cognitivas, ao analisar, por exemplo, erros e multiplicidade de soluções (DAMIANI, 2008; STAHL; KOSCHMANN; SUTHERS, 2006).

Borba e Zulatto (2006) desenvolveram um curso *online* para mais de 40 professores brasileiros sobre como ensinar geometria por meio do *software Geometricks*[42].

O primeiro curso desenvolvido foi baseado em um modelo que envolvia pouca interação, o que fez com que os professores se comportassem, inicialmente, de forma passiva no segundo curso, mesmo com formato diferente. Contudo, esse comportamento foi se alterando à medida que participavam do novo curso. A comunicação era feita de forma assíncrona por meio de *e-mails* e de forma síncrona, por duas horas semanais, em atividades que requisitavam a resolução de problemas. Isso foi possível devido à plataforma permitir que a tela de qualquer um dos participantes fosse compartilhada com todos os outros.

---

[42] *Software* desenvolvido para o ensino de geometria e que permite a construção de objetos geométricos que podem ser movimentados livremente. Esse *software* possibilita o trabalho com geometria analítica, área, gráficos de equações lineares e a Geometria Fractal. O *Geometricks* não é um *software* livre, mas sua versão demo pode ser baixada no seguinte *link*: *http://www.rc.unesp.br/gpimem/programasbaixar.php*

Ainda em relação a esse trabalho, Borba e Zulatto (2006) relatam um dos episódios que um professor constrói uma figura e o grupo de professores discutem sobre a simetria desta figura. Eles ressaltam que a convergência de ideias diferentes, observadas durante as discussões, geram a construção coletiva do conhecimento sobre a geometria (conhecimento do conteúdo), sobre a utilização do *software* de geometria em sala de aula (conhecimento pedagógico do conteúdo) e sobre o uso do próprio *software* de geometria (conhecimento tecnológico). Desta forma, defendem que a abordagem *seres-humanos-com-mídia* é útil para analisar as práticas educativas que envolvem o uso da tecnologia digital, uma vez que a plataforma disponível tornou possível a co-construção do conhecimento matemático em um curso *online*.

Ainda que essa pesquisa tenha sido realizada no âmbito da formação continuada de professores, é possível constatar que diferentes coletivos podem gerar diferentes tipos de conhecimento, transformando a própria noção de problema.

Barbosa (2012) desenvolveu uma pesquisa com alunos recém-ingressos na Educação Superior, no Curso de Matemática e que estavam cursando a disciplina de Cálculo I, tendo como objetivo mostrar que o coletivo formado pelos alunos e pelas TIC produz conhecimento matemático visto como processo. Para isso, foi realizada uma atividade que analisa como o coletivo, formado pelos alunos e pelo *software Winplot*, explora as propriedades acerca de função composta. A visão de produção do conhecimento, adotada na pesquisa de Barbosa (2012), é consistente com a noção de *seres-humanos-com-mídias* (BARBOSA; VILLARREAL, 2005).

Durante a pesquisa ficou constatado que a experimentação do padrão gráfico, vivenciada pelo *software*, possibilitou a generalização de uma abordagem algébrica. Apesar de entender que a visualização tem sua importância, foi constatado que algumas duplas preferiam relacionar os gráficos gerados às suas expressões algébricas. Verificou-se que o ambiente que os estudantes estavam envolvidos possui características relacionadas às TIC e à produção do conhecimento, tais como visualização e representações múltiplas. O entrelaçamento dessas características às TIC possibilitou que, por meio de discussões e escrita, os estudantes formulassem conjecturas. Assim, a agilidade nos *feedbacks* dados pelo *software Winplot*, permitiu que refutassem ou confirmassem suas conjecturas, o que possibilitava a produção de conhecimento matemático. Essa produção podia acontecer de forma coletiva, na troca com os parceiros, no processo de interpretação individual, podendo ser expressos na forma oral, na forma escrita ou na ação de trabalhar com o computador (BARBOSA, 2012).

Verifica-se, a partir dessas pesquisas (BARBOSA, 2012; BORBA; ZULATTO, 2006), que o uso de mídias diferentes possibilita diferentes tipos de colaboração, muito provavelmente, devido ao fato de as mídias terem a capacidade de alterar a noção do problema, por possibilitarem múltiplas representações (BORBA, 2007). Problemas envolvendo funções, por exemplo, podem abranger diferentes tipos de respostas, tornando-se mais desafiadores aos alunos com o uso de mídias que possibilitam a construção de gráficos.

Castro e Castro Filho (2012) realizaram uma pesquisa para desenvolver a compreensão de gráficos estatísticos, por meio do Projeto intitulado *Um Mundo de Informações,* com 25 crianças do 5° ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de melhorar a aprendizagem dos alunos na área de Tratamento da Informação. Os conceitos matemáticos foram inseridos em situações vinculadas ao cotidiano, relacionando os gráficos (de barras e de setores) ao conhecimento diário, além da exploração de outros conhecimentos curriculares como Ciências, Língua Portuguesa, Geografia, História e Música. Para isso, as crianças escolheram os temas e propuseram as investigações de acordo com interesses e curiosidades.

As investigações executadas pelas crianças eram realizadas em grupos, que foram constituídos a partir de interesse e afinidade, sendo compostas de quatro etapas: planejamento, coleta de dados, organização de dados e publicação da notícia (CASTRO, 2012). Para auxiliar as investigações e a produção colaborativa de um jornal digital, foram utilizados recursos digitais, *laptops* educacionais e um *blog*[43].

Embora o projeto tenha sido criado com o objetivo inicial de trabalhar conceitos presentes nos gráficos, verificou-se que a combinação de diferentes linguagens e tecnologias, de modo a integrar o currículo escolar, favoreceu, além da construção e compreensão de gráficos, a apropriação tecnológica e a formação cidadã. Castro e Castro Filho (2015), ao analisarem esse mesmo projeto, ainda constataram o desenvolvimento do pensamento estatístico a partir de situações de coleta de dados, de classificação, de escolha da amostra, de cruzamento de variáveis e da definição do gráfico. Pode-se inferir ainda, ao analisar o projeto, que a tecnologia possibilitou a ênfase na exploração dos dados, simulações, investigação de problemas com dados reais e envolvimento dos alunos em ferramentas para o trabalho coletivo.

As análises realizadas por Castro (2012) e Castro e Castro Filho (2012, 2015), sobre o projeto realizado, mostram como o uso articulado e bem planejado de uma sequência de atividades pode ser desenvolvida com êxito quando mediados. A produção coletiva

[43] http://1mundodeinformacoes.blogspot.com.br/search/label/Escola%20Monteiro%20Lobato

requisita a utilização de ferramentas tecnológicas, a mediação do professor ou pesquisador. A mediação pode ajudar na resolução de divergências; provocar questionamentos, intensificar o diálogo entre os membros do grupo, facilitar o desenvolvimento de estratégias para solucionar problemas.

Contudo, ainda que estes resultados indiquem uma melhora significativa de estudantes entre o pré e pós-teste, os dados quantitativos para este estudo não indicam, necessariamente, que os participantes tiveram melhor desempenho por causa da presença de múltiplas representações, sendo necessárias, portanto, mais investigações.

Os *softwares*, recursos digitais, papel, lápis, oralidade, escrita podem expressar ideias em diferentes linguagens, assim como a *internet*, que traz muitas possibilidades de interfaces e consequentemente de produção de conhecimento matemático. Borba (2007) explica que a *internet*, ao possibilitar a interação entre tais coletivos, também permite a linguagem multimodal. A seguir será discutida a abordagem multimodal.

3.2.3. Abordagem multimodal

A multimodalidade é uma abordagem que envolve comunicação e representação, indo além da própria linguagem falada, sendo uma abordagem desenvolvida devido às grandes mudanças na sociedade com o desenvolvimento de mídias e tecnologias. Essas mudanças implicam profundas alterações em praticamente todos os segmentos da nossa sociedade, afetando a maneira como pensamos e agimos (KENSKI, 2007).

As tecnologias digitais são, sem dúvida, especialmente interessantes para a multimodalidade porque os tipos de recursos que estão disponíveis permitem diferentes combinações e exigem diferentes formas de interagir (PRICE; JEWITT, 2013).

Nesse tipo de abordagem, todas as formas de comunicação são reconhecidas, logo, não se restringe apenas à interação verbal, mas todos os tipos são considerados, tais como gestos e olhares, elementos pictóricos e imagens em movimento, sons, dentre outras representações e comunicações (ARZARELLO; ROBUTTI, 2010, LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011). Como exemplos que ilustram como esses diversos modos podem ser empregados para representar e comunicar uma situação, têm-se as funções que podem ser representadas na forma de registro algébrico, gráfico, ou escrita em linguagem natural. Sua representação gráfica pode ainda ser feita em papel milimetrado, usando um *software* com características dinâmicas, descrito oralmente e com a ajuda de gestos.

As tecnologias digitais têm possibilitado a utilização de processos mais dinâmicos e interativos, do que as tecnologias analógicas tradicionais como lápis e papel, na construção tanto de gráficos de funções, como de diferentes figuras geométricas, permitindo que a linguagem multimodal esteja cada vez mais presente em sala de aula. A dinâmica de utilização de figuras interativas e outras linguagens vem, aos poucos, conectando o mundo da escola, tradicionalmente associado com a oralidade e com a escrita, para experiências mais enriquecedoras ligadas à comunicação e ao conhecimento.

Desta forma, pode-se relacionar a multimodalidade às diferentes formas de representar um raciocínio, ideia ou até mesmo à prática de representar conceitos de diferentes formas, com o objetivo de que os alunos se apropriem do significado dos conceitos, conforme forem compreendendo as diferentes formas representacionais destes (TYTLER; PRAIN; PETERSON, 2007).

Segundo Price e Jewitt (2013), na abordagem multimodal a interação deve ser considerada como parte da construção de significado, pois é realizado das escolhas feitas a partir de uma rede de alternativas, a qual pode incluir a seleção de um recurso em detrimento de outro, a posição e direcionamento de um corpo na manipulação de objetos, dentre outras possibilidades. Cabe ressaltar que significado, para Price e Jewitt (2013), é entendido como a conexão interativa entre o potencial significado de um artefato material, o potencial significado do ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra, e os recursos, intenções e experiências anteriores que as pessoas trazem para esse encontro ou discussão. Assim, os modos são social e culturalmente projetados em diferentes processos de construção de significado.

Price e Jewitt (2013) realizaram pesquisa com estudantes de 10-11 anos, agrupados em pares, com o objetivo de analisar as interações em um ambiente de aprendizagem, explorando uma abordagem multimodal. Essa abordagem possibilitou descrever e classificar as formas de interação, que foram além da linguagem oral ou formas específicas de ação, mas permitiram compreender e analisar o posicionamento do corpo, do olhar e a integração dos modos. As análises desta pesquisa ilustram a interação entre esses modos e o “fluxo de ação multimodal”, particularmente em termos de ritmo, ritmo e estrutura de interação, e as implicações disso para a interação e o processo de produção de significados.

Prain e Waldrip (2006) acreditam que a aprendizagem pode ser possibilitada por meio da realização de atividades que envolvam multimodalidade e múltiplas representações, para isso apresentam três motivos: (i) uma representação pode complementar, confirmar ou reforçar conhecimentos anteriores (prévios); (ii) uma nova representação pode restringir ou refinar a construção de uma interpretação; e (iii) diferentes representações ajudam na compreensão de um conceito. Há ainda um quarto motivo, levantado por Laburú, Barros e Silva (2011, p. 474):

> [...] uma nova representação pode vir a se acomodar melhor, não só cognitivamente a um indivíduo, por servir-lhe de elo apropriado para compreender um conceito, em razão da existência de esquemas prévios já construídos pelo sujeito e que são próprios dele, mas por, igualmente, se conformar subjetivamente ao seu estilo de aprender.

Há, portanto, uma trajetória individual, ou seja, subjetiva, para a construção de significados, que deve ser considerada (LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011) e que para Arzarello e Robutti (2010) pode estar relacionada com o paradigma de personificação. É preciso considerar que cada estudante tem suas próprias necessidades cognitivas, além de preferências motivacionais particulares.

Os estudantes podem possuir um estilo de aprendizagem preferido, que está relacionado com características visuais, auditivas, leitoras, cinestésicas e multimodais, ou seja, que contempla mais de um desses atributos (FLEMING, 1995). Devido às diversidades de estilos de aprendizagem, níveis de motivação e experiências vivenciadas,"[...] é altamente questionável um esquema educacional baseado num único formato representativo que somente dá conta das necessidades de um tipo particular de aluno ou grupo de alunos e exclui outros" (LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011, p. 483).

Embora concorde-se com Laburú, Barros e Silva (2011) de que os estudantes possuam estilos de aprendizagem diferentes, é questionável, pelo menos por enquanto, o desenvolvimento de uma proposta personalizada para cada estudante em sala de aula, uma vez que a realidade escolar brasileira possui salas superlotadas e infraestrutura precária. Além disso, diferenciar e separar as contribuições da multimodalidade, das múltiplas-representações seria quase impossível, já que há muitas semelhanças entre elas. Como a proposta segue referencial teórico de Vergnaud (1990), que se baseia no conjunto de representações para o desenvolvimento de um conceito, opta-se pelas múltiplas-representações.

Considerando as três abordagens (instrumental, *seres-humanos-com-mídias* e multimodal) aqui apresentadas e discutidas, constata-se que os pressupostos que melhor se adéquam à proposta desenvolvida nesta tese são os da abordagem *seres-humanos-com-mídias,* já que esta também engloba os pressupostos da abordagem instrumental.

Essa abordagem considera que a produção de conhecimento acontece a partir da interação entre homens e diferentes mídias, logo, a matemática produzida a partir da interação entre humanos com papel e lápis é diferente da produzida por humanos e mídias.

Diante das abordagens discutidas, tem-se que a representação e a comunicação possibilitadas pela evolução das tecnologias digitais contribuem para a produção do conhecimento, logo, para o desenvolvimento da aprendizagem. Contudo, Stahl, Koschmann e Suthers (2006) ressaltam que a comunicação humana e o uso de recursos representacionais para esta comunicação são muito flexíveis, pois, apesar de as tecnologias digitais poderem trazer possibilidades à aprendizagem, elas não têm a capacidade de especificar funções comunicativas.

Pesquisas que envolvem em seu contexto o desenvolvimento de conceitos por meio das múltiplas representações e da produção de conhecimento, requisitam um acompanhamento mais sistemático, desta forma, a seguir, apresentar-se-ão os procedimentos metodológicos da investigação.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo é apresentado o contexto em que esta pesquisa foi desenvolvida, assim como a metodologia adotada para seu desenvolvimento. Descrevem-se a escolha do local e dos sujeitos envolvidos, as fases e etapas do estudo, os instrumentos de coleta de dados, os materiais utilizados e os procedimentos de análise de dados.

4.1 O contexto da pesquisa e o método

Cumpre esclarecer que este trabalho integra um projeto de pesquisa aprovado e financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por meio do Edital n° 049/2012 do Programa Observatório da Educação (OBEDUC). O referido programa objetiva fomentar estudos e pesquisas em educação estimulando a produção acadêmica e formação de recursos a partir da articulação entre pós-graduação, licenciaturas e Educação Básica.

O projeto OBEDUC ao qual este trabalho está vinculado é intitulado: *Um estudo sobre o domínio de estruturas multiplicativas no Ensino Fundamental*, sendo este executado em rede entre os estados da Bahia, Pernambuco e Ceará, tendo por objetivo geral investigar estratégias que podem ser desenvolvidas e adotadas por professores do Ensino Fundamental para o ensino de conceitos do campo conceitual multiplicativo. Os resultados alcançados, nesta tese, ajudaram a compreender as estratégias dos estudantes e sua evolução ao trabalhar com conceitos das estruturas multiplicativas, ademais, verificar contribuição de metodologia de ensino que utilize como suporte didático as tecnologias digitais.

Devido aos objetivos inicialmente propostos nesta tese envolverem a avaliação da capacidade cognitiva e do desenvolvimento dessas capacidades nos estudantes por meio de abordagem metodológica que contempla o uso de tecnologias digitais, essa pesquisa é caracterizada como uma pesquisa de intervenção. Pesquisas dessa natureza objetivam gerar mudanças, propiciando o desenvolvimento cognitivo e favorecendo explicações sobre sua formulação, podendo proporcionar implicações educacionais (SPINILLO; LAUTERT, 2008).

Nas pesquisas de intervenção, o pesquisador pode assumir uma posição que provoque a autodescoberta dos estudantes ou ainda uma posição de instrução tutorada em que apresenta explicações e *feedbacks*, estabelece o diálogo e incentiva a colaboração. Spinillo e Lautert (2008) explicam que não há evidências de que qualquer desses posicionamentos é mais eficaz que o outro, argumentando ainda, que é mais fácil optar por um desses posicionamentos em situações experimentais controladas, uma vez que em ambientes como uma sala de aula as duas formas de assistência podem aparecer de maneira combinada.

Apesar disso, essa pesquisa opta por escolher salas de aula em funcionamento ao invés de situações experimentais controladas, pois o progresso alcançado em situações controladas pode ser atribuído às circunstâncias que não são comuns fora do âmbito da investigação.

Devido a essa opção, o delineamento dessa pesquisa pode ser considerado quase experimental, uma vez que os grupos que participarão da pesquisa (grupo controle - GC e grupo experimental - GE) podem não ser equivalentes. Para evitar grandes diferenças entre os grupos (idade, escolaridade, conhecimentos prévios) na intervenção realizada em escola OBEDUC, escolheram-se estudantes de uma mesma sala de aula, logo, de mesmo ano de escolaridade.

As aulas com o GC continuaram acontecendo nos mesmos horários e locais pré-determinados pela escola e o GE passou pela intervenção em outra sala de aula, nos horários destinados às aulas de matemática e às disciplinas eletivas[44], na mesma escola.

Todos os estudantes do grupo controle e grupo experimental responderam à pré-testes e pós-testes (Apêndices C e D). O conteúdo desses testes consiste na exploração do conceito de covariação, presente nas estruturas multiplicativas (proporção simples, proporção múltipla e proporção dupla), considerando a utilização de diferentes representações, inclusive tabular e gráfica.

Além do tratamento estatístico que foi feito nos dados quantitativos obtidos por meio de pré e pós-teste, aplicado no início da intervenção e ao final, respectivamente, no grupo experimental, e no mesmo período no grupo controle; também foram considerados os dados qualitativos coletados durante a intervenção com o grupo experimental para cumprir com os objetivos inicialmente planejados para essa tese. Desta forma, essa pesquisa possui métodos mistos (DAL-FARRA; LOPES, 2013).

A seguir, apresentar-se-ão locais e sujeitos da pesquisa.

[44] Por ser uma escola de Tempo Integral, possui um currículo diferenciado. As disciplinas eletivas aconteciam às sextas-feiras, nos dois últimos tempos. Estas aulas se diferenciavam das demais por serem optativas e realizadas por meio de projetos.

4.2 Locais de pesquisa e sujeitos

No Ceará, quatro escolas participam do projeto OBEDUC desde 2013, sendo três dessas contempladas com o projeto Um Computador por Aluno (UCA)[45], (Escolas A, B e D) e uma escola que utiliza o Laboratório Móvel de Informática Educativa (LIE móvel)[46] (Escola C). As possibilidades de mobilidades geradas pelo uso do *laptop*, de disponibilidade dos computadores no modelo 1:1 e a facilidade de acesso à *internet*, são motivos determinantes para a escolha dessas escolas.

Quadro 1 – Informações sobre as escolas que participam do projeto OBEDUC no Ceará.

Escola/Cidade	Quant. de alunos[47]	Turnos	Anos
Escola **A** / São Gonçalo do Amarante	400	manhã e tarde	1° ao 9° ano
Escola **B** / Barreira	476	manhã e tarde	1° ao 9° ano
Escola **C** / Fortaleza	408	tempo integral	6° ao 9° ano
Escola **D** / Fortaleza	206	manhã e tarde	1° ao 5° ano

Fonte: Elaboração própria.

Todas as escolas mencionadas no Quadro 1 concordaram em participar da pesquisa, assinando, para isso, um termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Apêndice B) o qual foi devidamente protocolado no Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos (COMEPE) da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)[48]. Considerando a disponibilidade da professora de Matemática e da escola, a clientela atendida (anos finais do Ensino Fundamental), a infraestrutura adequada e a localização, optou-se por realizar a

---

[45] O Projeto Um Computador por Aluno (UCA) foi um projeto piloto com objetivo de proporcionar a inclusão digital e inovação pedagógica nas escolas públicas. Diferente de muitos outros projetos, o Projeto UCA tem "[...] sua ênfase no aprendizado de novas ações pedagógicas com apoio da tecnologia, visando mudanças no currículo escolar" (BRASIL, 2009, p. 5). No Ceará, o referido projeto aconteceu em nove escolas, nos anos de 2010 a 2013, e contou com o trabalho de formação de professores para o uso de tecnologias digitais, sob coordenação da UFC Virtual. *http://blogs.virtual.ufc.br/uca-ce.*

[46] A Prefeitura Municipal de Fortaleza fez adesão ao Programa Um Computador por Aluno (PROUCA) adquirindo laptops educacionais. Estes tem sido disponibilizados para as escolas municipais por meio de Laboratórios Móveis de Informática Educativa (LIE Móvel).

[47] Alunos matriculados em 2013 cursando o Ensino Fundamental (anos iniciais e finais). Não foram considerados os alunos da Educação Infantil.

[48] O protocolo foi feito na UESC, pois a coordenação geral do projeto OBEDUC E-mult é feita pela Profa. Dra. Eurivalda Santana.

pesquisa na Escola C. A realização da pesquisa só foi iniciada após a liberação da Prefeitura Municipal de Fortaleza (PMF) (Anexo D).

A escolha do ano de escolaridade levou em consideração dois critérios: primeiro, o de que o grupo de alunos a participarem da intervenção não tivessem tido contato com a formalização dos conceitos de proporcionalidade, como o algoritmo da regra de três; e segundo, os resultados de testes preliminares realizados em crianças nessa faixa etária por Castro *et al*. (2015) constataram a falta de estratégias que considerem a relação entre as duas medidas em problemas de proporção simples de divisão por parte e por quota, isto é, o uso do operador funcional, sugerindo que estudantes do 6° ano ainda não compreendem covariação.

No ano de 2015, a Escola em questão possuía 3 turmas de 6° ano, todas de Tempo Integral. As turmas tinham entre 32 e 35 alunos matriculados, tendo sido escolhida apenas uma das turmas para participar da investigação. A escolha foi feita pela professora de Matemática das turmas de acordo com os horários disponíveis e interesse dos discentes em participar da investigação. A turma escolhida foi dividida em dois grupos: grupo experimental (GE) com 12 estudantes e grupo controle (GC) com 15 estudantes[49].

Havia sido previsto, inicialmente, que a divisão dos grupos seria realizada de acordo com interesse em participar da pesquisa, porém, a consulta revelou que apenas 2 alunos não queriam participar. Desta forma, solicitou-se à professora de Matemática que fizesse a escolha levando em consideração, principalmente, a frequência dos alunos. Os estudantes do GE, ou seja, os que participaram da intervenção, foram caracterizadas nos resultados pela letra “E” e por um número (E01, E02, ... E12) que serve para identificá-las na pesquisa e preservar suas identidades.

O GE passou a ser constituído por três grupos, com 4 estudantes em cada, formados pelos próprios alunos:

- Grupo 1: E01, E04, E10 e E12;
- Grupo 2: E02, E06, E09 e E11;
- Grupo3: E03, E05, E07 e E08;

A seguir, serão detalhadas as etapas dessa pesquisa.

[49] Embora a turma escolhida tenha 32 alunos matriculados, tiveram que ser excluídos os estudantes que deixaram de participar de pelo menos, um dos testes (pré-teste e pós-teste).

4.3 Etapas da pesquisa

Para uma melhor sistematização e compreensão da investigação, dividiu-se a pesquisa em etapas (Quadro 2): [1] avaliação dos conhecimentos prévios; [2] atividades de intervenção, realizadas apenas com o Grupo Experimental (GE); e [3] avaliação dos conhecimentos adquiridos.

Quadro 2 – Sistematização das etapas da pesquisa junto aos grupos.

Etapas da pesquisa	Grupos	
	Controle (GC)	Experimental (GE)
1ªetapa: Avaliação diagnóstica - Pré-teste	X	X
2ªetapa: Atividades de intervenção	-	X
3ªetapa: Av. Conhecimentos adquiridos - Pós-teste	X	X

Fonte: Elaboração própria.

Na primeira etapa, realizaram-se atividades para diagnosticar os conhecimentos dos alunos em relação à compreensão de situações de proporção simples (multiplicação, divisão por quota e por partição), proporção dupla e proporção múltipla, interpretação e construção de gráficos lineares e compreensão de padrão de tabelas. Também foi aplicado um questionário para saber o perfil dos estudantes e conhecimento sobre tecnologia digital (Apêndice E). Nessa etapa, os alunos utilizaram apenas lápis e papel.

A intervenção aconteceu apenas no Grupo Experimental, no momento das aulas de Matemática. Essa etapa teve duração de 3 meses[50], com 18 encontros, divididos em dois momentos: (1) Construção e reflexão acerca de conceitos Matemáticos e (2) Produção colaborativa de vídeo a partir dos conceitos trabalhados nas aulas de Matemática. O primeiro momento aconteceu no horário das aulas de matemática em 12 encontros, e o segundo, no momento destinado às aulas de disciplina eletiva, com 6 encontros. O GC manteve as aulas de Matemática e de disciplinas eletivas, nos mesmos horários do GE.

Durante a segunda etapa, os alunos do GE foram divididos em 3 grupos, realizaram atividades e desenvolveram materiais relacionados com o conceito de covariação a

[50] De acordo com o calendário da escola, o projeto aconteceu no 3° bimestre e em parte do 4° bimestre.

partir de conteúdos matemáticos exigidos nessa etapa[51] (Anexos B e C) e que também estavam sendo trabalhados com o GC.

Foram realizadas atividades, algumas dessas, utilizando o livro didático adotado (SOUZA, 2012), com suporte de ferramentas como o *Cacoo*, o *Google Docs* e o *software Geogebra*. Foram exploradas algumas atividades de proporção simples por meio do recurso digital *Equilibrando proporções*. Também foi proposta a análise de situações reais, as quais foram postadas em *blog* (*http://pensar-conectar-fazer.blogspot.com.br/*). As aulas de produção colaborativa, tiveram o objetivo de proporcionar a construção dos conceitos a partir da produção de vídeos, servindo como importante momento de reflexão. Assim, na segunda etapa, foram utilizados como materiais, lápis, papel, livro didático, *laptop* educacional com *wireless,* além de recursos e ferramentas disponíveis no *laptop* e *Internet*.

A avaliação dos conhecimentos adquiridos foi realizada na terceira etapa por meio de pós-testes com situações semelhantes às exploradas no pré-teste. Além do pós-teste aplicado aos dois grupos (Apêndice D), foi aplicado um questionário de autoavaliação (Apêndice G), apenas com o GE. Nessa fase, assim como na primeira, não foi utilizado nenhum tipo de tecnologia digital, apenas lápis e papel.

Na seção seguinte, serão detalhados os instrumentos utilizados para a coleta de dados durante a investigação.

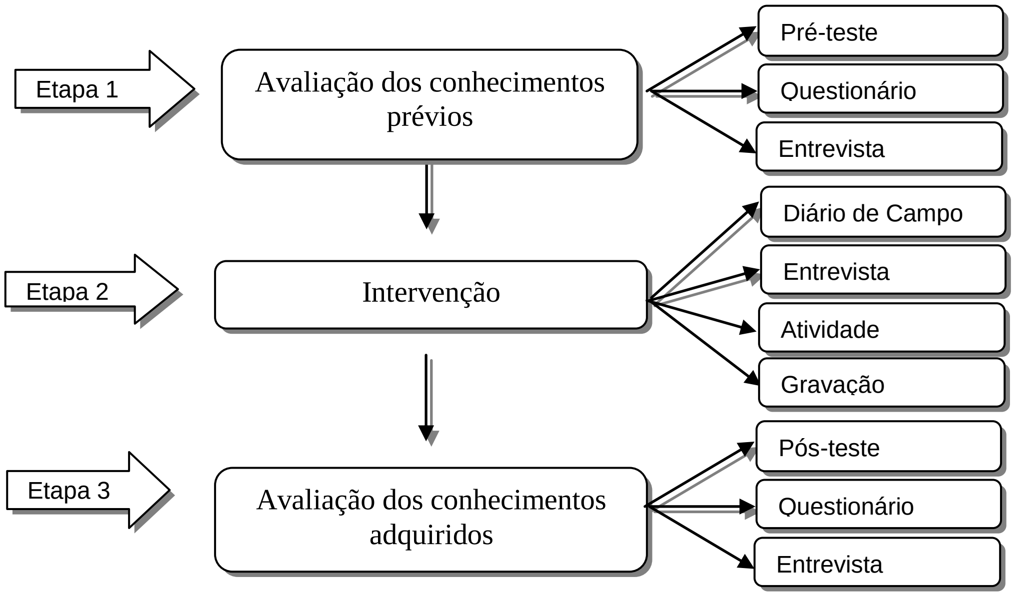
4.4 Instrumentos de coleta de dados

Para a coleta de dados dessa pesquisa, utilizaram-se instrumentos como avaliação diagnóstica (pré-teste), avaliação final (pós-teste), questionários, entrevistas não estruturadas, efetuadas, principalmente, com os estudantes dos grupos que participaram da intervenção, observações registradas em diário de campo, postagens de discussões no *blog* e *WhatsApp*, análise dos materiais produzidos durante intervenção, como os vídeos. Esses instrumentos foram utilizados ao longo da investigação, de acordo com cada etapa (Figura 18).

---

[51] As competências relacionadas aos conteúdos matemáticos abordados na intervenção foram marcadas no Anexo C. Os conteúdos referentes ao 3° e 4° bimestre estão no Anexo D.

Figura 18 – Instrumentos utilizados em cada etapa.



Fonte: Elaboração própria.

O pré-teste (atividade diagnóstica) e o pós-teste foram utilizados individualmente, com todos os grupos, para verificar os conhecimentos prévios e os conhecimentos adquiridos, respectivamente, na primeira e terceira etapa.

Os questionários também foram individuais, com perguntas, em sua maioria, fechadas e padronizadas, para facilitar a codificação, a tabulação e a comparação com outros dados relacionados ao tema pesquisado. Na primeira etapa, foram utilizados para a verificação de aspectos gerais (idade, preferências e habilidades tecnológicas), e na terceira foram aplicados apenas com o GE para autoavaliação do estudante do grupo experimental.

As entrevistas não estruturadas foram utilizadas apenas com o GE, em todas as etapas. É um instrumento comumente utilizado para conhecer as perspectivas do aluno, além de oferecer boa percepção das diferenças individuais e mudanças do entrevistado. Por isso, foi utilizada para verificação de teoremas-em-ação e evolução das estratégias e pensamento matemático do grupo experimental. Também foi usada para entender a prática colaborativa e as possíveis formas de interpretação e representação de questões relativas às estruturas multiplicativas. As entrevistas não estruturadas com o GE foram capturadas por meio de câmera de vídeos e geraram protocolos de transcrição.

As interações e postagens realizadas no *blog* do projeto, assim como o material produzido pelos grupos durante a intervenção, também foram considerados na análise de dados. A seguir, apresentam-se os materiais utilizados e detalham-se as tecnologias digitais utilizadas durante a intervenção.

4.5 Materiais e tecnologias utilizadas

Por ser uma pesquisa de intervenção, foram utilizados muitos materiais (lápis, papel, canetinhas), principalmente tratando-se de tecnologias. Além da utilização de *laptops* educacionais com o *Geogebra* e o *K-word* instalado, havia *Internet* para que os estudantes pudessem acessar o recurso digital *Equilibrando Proporções* e o *blog*. Para suscitar as discussões a respeito dos conceitos de proporcionalidades presentes no cotidiano, foi exibido o vídeo Razão e Proporção: matemática na vida[52].

Foram criados três *e-mails*[53] para que cada grupo pudesse utilizar e gerenciar uma conta no *Google Drive*[54]. Essa conta possibilitou a utilização de aplicativos *online*, como o editor de texto, o *Cacoo* e o armazenamento das produções em forma de texto e imagem. Como forma de continuar as discussões iniciadas em sala de aula e relacionar os conceitos trabalhados com situações reais vivenciados diariamente, foi criado um grupo no aplicativo *WhatsApp*[55]. A seguir, serão detalhados o *software Geogebra*, o recurso digital *Equilibrando Proporções*, o *blog* e o aplicativo *online Cacoo*.

4.5.1 Software Geogebra

É um *software* livre, também disponível *online*[56], com versão original em inglês, mas que também possui versões em português. Comumente utilizado no ensino de matemática por combinar geometria, álgebra e cálculo, conseguindo, portanto, unificar em uma só plataforma um sistema de geometria dinâmico[57] (*Dynamic Geometry System* – DGS) com um sistema de computação algébrica (*Computer Algebric System* – CAS). Devido a essas características dinâmicas, torna possível que o estudante gaste o mínimo de tempo necessário na construção de objetos repetitivos e concentre-se nas associações possíveis entre os objetos.

Desta forma, permite fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, figuras geométricas, seções cônicas para representar funções, dentre outras possibilidades,

---

[52] https://www.youtube.com/watch?v=gowQmgx1J8E

[53] Como os estudantes tinham menos de 13 anos, estas contas de *e-mail* foram criadas e são gerenciadas pela pesquisadora.

[54] O *Google Drive* (*https://drive.google.com*) é um pacote de aplicativos do *Google* que funciona totalmente online diretamente no navegador. Os aplicativos são compatíveis com o *OpenOffice.org/BrOffice.org, KOffice* e *Microsoft Office.*

[55] Aplicativo de mensagem multiplataforma que permite trocas de mensagens pelo celular gratuitamente, desde que esteja conectado à rede *wifi*, *3G* ou 4*G*.

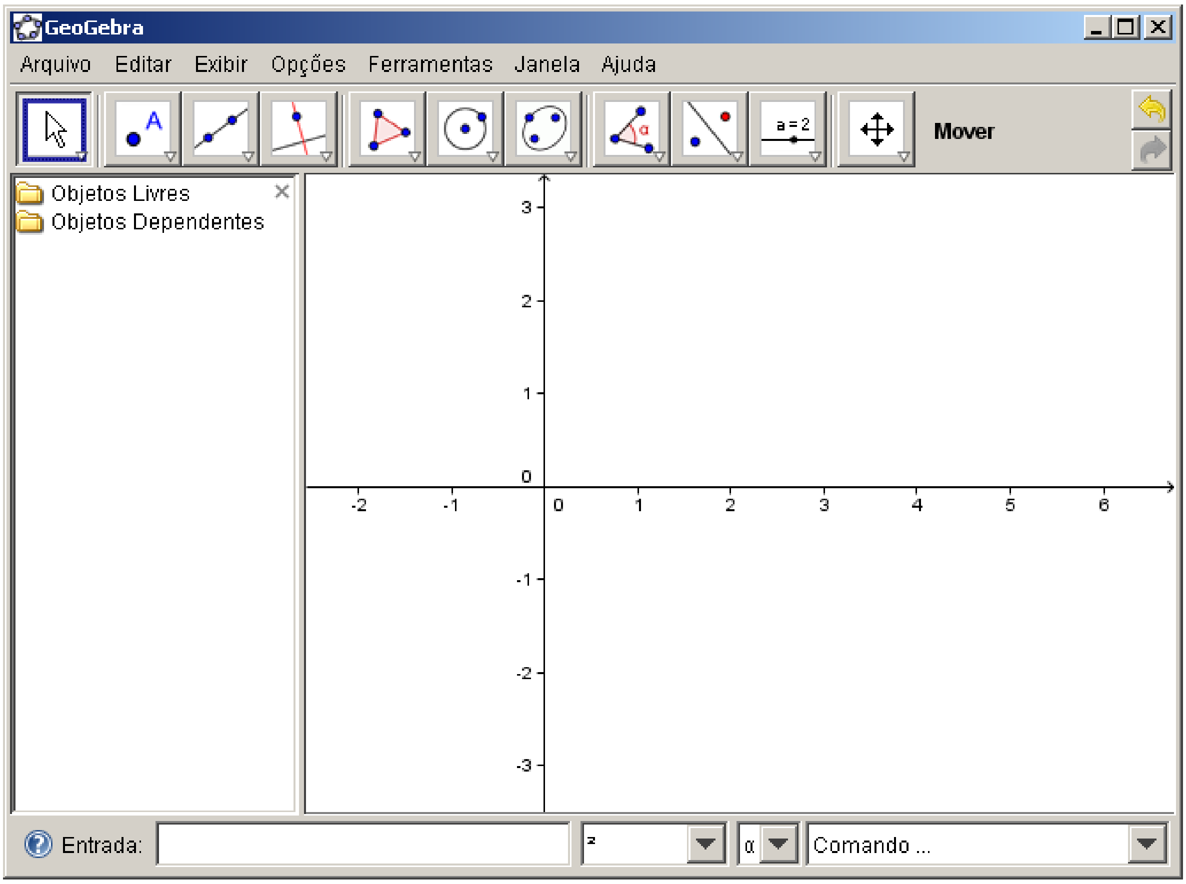
[56] *www.geogebra.org*

[57] Os *softwares* de Geometria Dinâmica permitem simular construções geométricas, de forma dinâmica e interativa, pois possibilitam a transformação contínua, em tempo real, ocasionada pelo “arrastar”.

modificando-as de forma dinâmica. Também concede trabalhar com variáveis vinculadas a números, logo, também possibilita utilizar equações e coordenadas ligadas às construções feitas no *software*, por isso, pode-se achar desde pontos extremos de funções mais simples, até derivadas e integrais de funções. Do mesmo modo, possibilita produzir aplicação de transformações geométricas de figuras (reflexão, translação, rotação, inversão e homotetia), trigonometria, dentre outras possibilidades.

Na tela do *Geogebra* há barras de menus, de ferramentas, janela de comandos, de construção e janela de álgebra (Figura 19). A barra de ferramenta traz opções para construção básica de: pontos, pontos médios, pontos de interseção; retas, retas paralelas e perpendiculares; segmentos; polígonos; circunferências ou círculos; construção de pontos sobre objetos; objetos livres, semilivres e dependentes.

Figura 19 – Tela do *Geogebra* (versão em português).



Fonte: *Screenshoot* de tela

Também tem opção de botão seletor que serve para a criação de segmento com um ponto que se movimenta sobre ele, com o objetivo de poder modificar dinamicamente os parâmetros de uma função, por exemplo. Ainda que possibilite a representação algébrica das funções, estas não foram trabalhadas, por não fazerem parte do objetivo.

4.5.2 Recurso digital Equilibrando proporções

Esse recurso traz 10 situações fixas em que o estudante precisa avaliar se a relação entre as grandezas é diretamente ou inversamente proporcional, sendo, portanto, indicado para o trabalho de proporção e proporcionalidade, junto ao 6° e 7° ano do Ensino Fundamental. As grandezas são apresentadas de forma textual, de forma icônica e por meio de tabela, como pode ser visto na Figura 20.

Figura 20 – Tela do Recurso digital Equilibrando proporções.

Fonte: *Screenshoot* de tela do *site*[58]

58 *http://condigital.unicsulvirtual.com.br/conteudos/EquilibrandoProporcoes/EquilibrandoProporcoes.html*

O recurso permite que o usuário simule a situação, podendo aumentar ou diminuir uma determinada grandeza. Ao fazer essa interação, poderá perceber que as grandezas estão relacionadas. Apesar das situações serem apresentadas por meio de múltiplas-representações, não é exigido que o usuário encontre o que a situação solicita, já que a intenção é identificar o tipo de grandeza.

É importante observar que todas as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais podem ajudar na compreensão da covariação, por serem problemas de proporção simples. Porém, ainda que isso não seja explorado pelo recurso, é possível fazer uma mediação e promover essa compreensão.

4.5.3 Blog

O *blog* é uma página da *web* que pode ser editada com facilidade, sem a necessidade de conhecimento de linguagem de programação. Essa ferramenta possibilita a postagem de informações e comentários pelos leitores de forma simples e rápida, sendo usado para que os estudantes registrem suas descobertas a respeito dos conceitos matemáticos existentes em situações cotidianas.

Figura 21 – Tela do *blog* do Projeto Pensar, conectar e fazer.

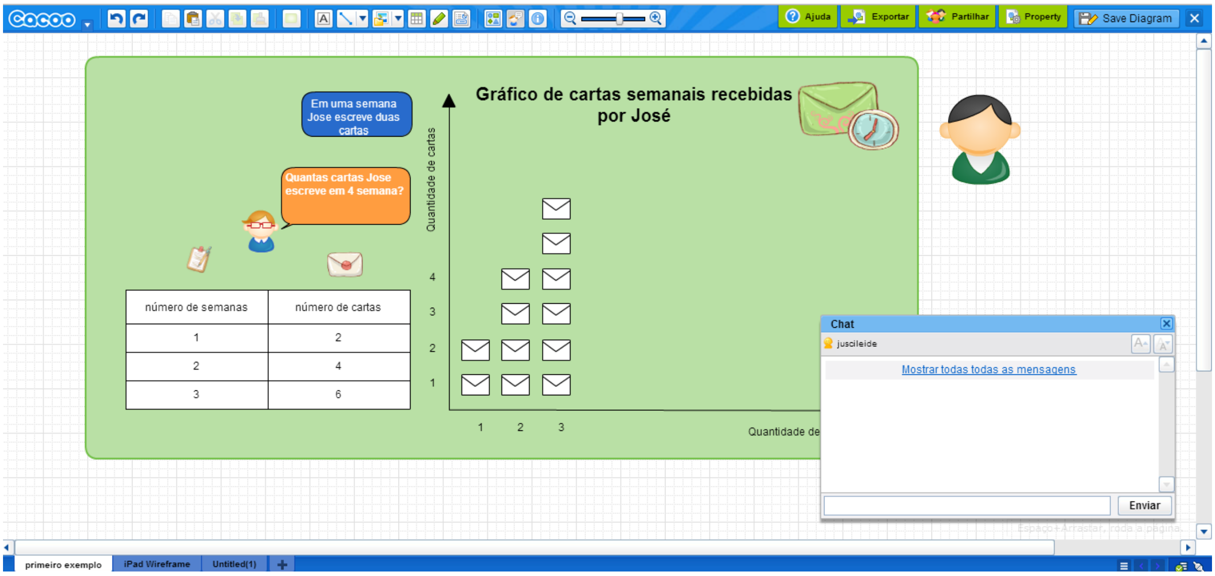
Fonte: Pensar... (2015).

Na Figura 21 apresenta-se a tela inicial do *blog* em que além de postagem realizada pelos estudantes, é possível verificar, no lado esquerdo, a disponibilização de acesso de aplicativos e recursos utilizados *online*.

4.5.4 Aplicativo Cacoo

É um aplicativo *online* usado para construir tabelas, diagramas, infográficos, de forma colaborativa. É possível pintar e inserir imagens, textos, tabelas, *emojis*[59], *backgrounds*, linhas, formas geométricas, dentre outros objetos. Embora a versão livre apresente uma menor quantidade de *background* e *emojis*, os que são disponibilizados na versão gratuita são suficientes para representar uma variedade de situações, como pode ser visto na Figura 22.

Figura 22 – Exemplo de produção feita com o aplicativo *Cacoo*.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 22, verifica-se a representação de uma situação por meio de tabela e gráfico tipo pictograma. A seguir, descreve-se a intervenção e as atividades realizadas.

4.6 Atividades desenvolvidas

Toda a intervenção aconteceu em 18 encontros, divididos em dois momentos: (1) Construção e reflexão de conceitos Matemáticos, com 12 encontros (Quadro 3) e (2)

[59] Biblioteca de figuras prontas, disponibilizada por alguns aplicativos.

Produção colaborativa de vídeo a partir dos conceitos trabalhados nas aulas de Matemática, com 6 encontros (Quadro 4). É importante ressaltar que essa separação foi necessária para adequar as atividades planejadas para intervenção com a dinâmica escolar, já que, por acontecer em escola de Tempo Integral, não seria possível utilizar contraturno para fazer alguma atividade. Contudo, embora existisse essa separação, os conceitos matemáticos e a metodologia utilizada em ambos os momentos eram semelhantes.

Quadro 3 – Resumo da intervenção: aulas de matemática.

Aula/Data	Atividades realizadas
1ª/ 09.09.2015	- Apresentação dos alunos, formadores/divisão de equipes e escolha coletiva de um nome para o projeto; - Esclarecimentos e sondagem sobre o domínio tecnológico (exploração do *laptop* e editor de texto); - Sondagem das concepções sobre multiplicação e divisão a partir de discussão coletiva de uma situação (noção inicial de grandeza); - Atividade no *WhatsApp*: O que é grandeza? Que tipo(s) de grandeza(s) eu posso encontrar na minha casa?
2ª/ 14.09.2015	- Discussão sobre grandezas utilizando os exemplos postados pelas crianças no *WhatsApp*; - Apresentação de tipos diferentes de gráficos (pictograma, de barra e de linha); - Utilização do aplicativo *Cacoo* para representar as situações trabalhadas (apropriação da ferramenta); - Atividade no *WhatsApp*: continuação da discussão sobre grandezas por meio de registros textuais ou fotos.
3ª/ 17.09.2015	- Discussão sobre grandezas utilizando os exemplos postados pelas crianças no *Whatsapp*; - Exploração e resolução de situações do livro didático (múltiplas-representações); - Resolução, em grupo, de atividade (Apêndice H) com o uso do *Cacoo;* - Atividade no *WhatsApp*: início da discussão sobre relação entre grandezas por meio de registros textuais ou fotos.
4ª/ 21.09.2015	- Discussão sobre relação entre grandezas utilizando os exemplos postados pelas crianças no *WhatsApp*; - Identificação da relação entre grandezas em problemas propostos no livro didático; - Finalização da resolução, em grupo, de atividade (Apêndice H) com o uso do *Cacoo;* - Atividade no *WhatsApp*: continuação da discussão sobre relação entre grandezas por meio de registros textuais ou fotos.
5ª/ 28.09.2015	- Discussão breve sobre relação entre grandezas; - Postagem da atividade (Apêndice H) no *blog*; - Análise das questões postadas no *blog* pelos grupos; - Apresentação do *Geogebra* para a construção de gráficos; - Atividade no *WhatsApp*: visitar locais como supermercados e mercados e fazer registros de produtos de uma mesma marca, com quantidades e preços diferentes;
6ª/ 30.09.2015	- Resolução da atividade em grupo (Apêndice I); - Análise e exploração das situações postadas no *WhatsApp* pelas crianças; - Atividade no *WhatsApp*: visitar locais como supermercados e mercados e fazer registros de produtos de uma mesma marca, com quantidades e preços diferentes;
7ª/ 01.10.2015	- Exploração das situações postadas no *WhatsApp* pelas crianças; - Análise de situação postada pela pesquisadora no *blog* (o caso do biscoito Óreo); - Atividade no *WhatsApp*: discussão e interpretação de situações representadas por meio de gráficos (postagem feita pesquisadora);
8ª/ 05.10.2015	- Interpretação de gráficos construídos no *Geogebra*; - Análise de preços de um folder de supermercado- uso do *Cacoo* e *Geogebra* - Atividade no *WhatsApp*: discussão e interpretação de situações representadas por meio de gráficos (postagem feita pela pesquisadora);

9ª/ 07.10.2015	- Interpretação de gráficos construídos no *Geogebra*; - Postagem no *blog* de análise de preços de um folder de supermercado; -Atividade no *WhatsApp*: discussão de situações diversas (dúvidas, curiosidades, relações)
10ª/ 15.10.2015	- Utilização e exploração do recurso digital Equilibrando proporções; - Atividade no *WhatsApp*: discussão de situações diversas (dúvidas, curiosidades, relações)
11ª/ 19.10.2015	- Discussão coletiva de situações das Estruturas Multiplicativas (Anexo A); -Utilização do *Geogebra* e *Cacoo* para representar essas situações; -Atividade no *WhatsApp*: discussão de situações diversas (dúvidas, curiosidades, relações)
12 ª/ 04.11.2015	- Construção dos gráficos que representam a situação apresentada no vídeo (*Geogebra*); - Interpretação coletiva desses gráficos; - Sondagem das concepções sobre multiplicação e divisão a partir da interpretação da situação representada por meio de gráfico.

Fonte: Elaboração própria.

Como pode ser verificado no Quadro 3, as aulas de matemática eram repletas de discussões, principalmente em grupo, com o uso de diferentes tecnologias. As atividades realizadas seguiram o roteiro de atividades desenvolvidas, sendo que, ao longo da intervenção, buscou-se compreender e responder as seguintes questões:

1. Concepção de multiplicação e divisão: O que é multiplicação? O que é divisão? Quando utilizamos essas operações? Em que tipo de situações? Como essas concepções se alteraram ao longo da intervenção? As estratégias são predominantemente multiplicativas? Algum estudante ainda utiliza estratégias aditivas?

2. Compreensão de grandeza e relações: O que é grandeza? Existem outros tipos de gráficos que podem ser utilizados para representar essas relações? Explorar outras representações gráficas (gráfico de barras e de linhas). A compreensão das grandezas envolvidas em cada situação é facilitada com o recurso digital *Equilibrando Proporções*? As diferentes representações, que o recurso digital *Equilibrando Proporções* propõe, ajudam na compreensão e resolução de situações com grandezas diretamente proporcionais?

3. Múltiplas-representações: Há dificuldades de encontrar padrões em uma tabela? Os estudantes entendem gráficos lineares? Conseguem relacionar os dados de uma situação em uma tabela e/ou gráfico? O gráfico, normalmente, evidencia a compreensão do operador funcional. As crianças compreenderam isso? Ou não ficou tão evidente essa compreensão? Com a ampliação do campo numérico (sai dos naturais e passa a trabalhar com os racionais), como ficam as representações feitas pelas crianças? E o gráfico? Quais dificuldades?

4. Campo numérico: A ampliação do campo numérico causou dificuldades? Que tipo de dificuldades? Como as estratégias se alteraram ou não, em relação ao campo numérico (números decimais e fracionários?).

As aulas destinadas à produção de vídeo, que aconteciam durante a disciplina eletiva, deveriam, obrigatoriamente, estar relacionadas com a realização de um projeto. Deste modo, criou-se um projeto para produção de vídeos intitulado *Pensar, conectar e fazer*, em que esses vídeos teriam que, de alguma forma, mostrar os conceitos relacionados com proporcionalidade e que estão presentes em muitas situações trabalhadas nas aulas de matemática (Quadro 3). Para a produção colaborativa de vídeos do projeto, foram realizadas atividades na sequência e de acordo com o que pode ser visualizado no Quadro 4.

Quadro 4 – Resumo da intervenção: aulas disciplina eletiva - vídeos.

Aula/Data	Atividades realizadas
1ª/ 18.09.2015	- Esclarecimentos sobre o projeto; - Exibição e discussão do vídeo Razão e Proporção: matemática na vida; - Apresentação das etapas de produção de vídeos;
2ª/ 02.10.2015	- Esclarecimentos sobre as etapas de produção de vídeo; - Oficina sobre criação de vídeo; - Discussão em grupo para definição do tema;
3ª/ 09.10.2015	- Realização de pesquisas para a construção do roteiro do vídeo; - Construção de roteiro;
4ª/ 16.10.2015	- Finalização da construção do roteiro (descrição de cenas, elaboração de falas, etc); - Execução do que foi planejado no roteiro (confeccionar cenários, desenhos, etc);
5ª/ 23.10.2015	- Execução do que foi planejado no roteiro (confeccionar cenários, desenhos, etc); - Edição do vídeo;
6ª/ 30.10.2015	- Edição do vídeo; - Exibição dos curtas produzidos pelos grupos; - Autoavaliação.

Fonte: Elaboração própria.

As atividades realizadas seguiram o roteiro de atividades desenvolvidas, sendo que, ao longo da intervenção, buscou-se responder as seguintes questões:

1. Definição do tema: Os alunos entenderam a importância de pesquisar o tema? Como realizaram a pesquisa sobre o tema? (*Internet*, entrevistas, livros, filmagens, registros fotográficos, visitas a locais, vídeos, etc.). Com a pesquisa, foi necessário fazer algum tipo de modificação no tema? A pesquisa ajudou os estudantes a entenderem o tema e as possíveis relações com a matemática? Como? Que tipo de compreensão?

2. Clareza dos conceitos matemáticos: Como as crianças estão representando os conceitos matemáticos? Os conceitos matemáticos estão claros? É possível melhorá-los?

3. Engajamento na atividade: Como está o engajamento dos estudantes na atividade? Todos estão participando da discussão e da elaboração do roteiro? Está havendo divisão de tarefas ou estão construindo em conjunto?

4. Avaliação: Como foi a participação do estudante na produção do vídeo (autoavaliação)? O grupo ficou satisfeito com o vídeo produzido? A produção realizada pode gerar novos questionamentos que gerem novas produções ou que requisitem um aprofundamento no tema. Após a finalização da intervenção, foram aplicados pós-testes, conforme explicitado nas etapas de pesquisa. A seguir, explica-se como os dados coletados antes, durante e após a intervenção foram analisados.

4.7 Procedimento de análise de dados

Strauss e Corbin (2008), explicam que a análise de dados é um dos processos de uma pesquisa em que o pesquisador procura descobrir algo sobre o objeto investigado. É um processo sistemático em que é necessário organizar os dados coletados, identificar padrões para separá-los em partes, examinar temas emergentes, para, enfim, interpretar as informações (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Conforme explicitado, esta investigação possui métodos mistos de pesquisa, isto é, dados quantitativos com comparações estatísticas a serem realizadas a nível horizontal (entre grupos -controle *x* experimental) e vertical (intragrupos - pré-teste *x* pós-teste), e dados qualitativos referente à análise dos teoremas-em-ação e, portanto, do conjunto de estratégias mobilizadas pelos estudantes do grupo GE antes (pré-teste), durante e depois (pós-teste) da intervenção; e das contribuições das tecnologias digitais utilizadas durante o processo.

Para constatar o desempenho dos estudantes antes e após a intervenção, os pré e pós-testes foram corrigidos e tabulados (Apêndices L a R). Essas análises, buscaram categorizar as situações exploradas no teste e a construção das tabelas de dados que foram analisadas com o auxílio do *Software Statistica*, versão 12.0, empregando nível de significância de 0,05. De posse desses dados, foram realizados testes de normalidade e homocedasticidade com os dados, a partir dos testes de *Shapiro Wilk´s* e *Levene*, respectivamente, com o uso do referido *software*. Esses testes indicaram que o tipo de distribuição variava de acordo com o grupo de dados analisados, indicando a necessidade da utilização de estatísticas paramétricas e não paramétricas (SIEGEL, 1975). Logo, os testes utilizados precisaram variar conforme Quadro 5.

Quadro 5 – Definição dos testes de acordo com o tipo de distribuição.

Tipo de Comparação	**Tipo de Distribuição/ Tipo de Estatística**	**Teste Escolhido**
Controle x experimental	Distribuição Normal/paramétrica	*T de Student*
Controle x experimental	Distribuição não Normal /não-paramétrica	*U de Mann-Whitney*
Pré teste x Pós teste	Distribuição não Normal /não-paramétrica	*Wilcoxon*
Pré teste x Pós teste	Distribuição Normal/paramétrica	*T pareado*

Fonte: Elaboração própria.

Desta forma, quando se analisam dados independentes, como é o caso dos dados do grupo controle e experimental, e a distribuição for normal, utiliza-se o teste *T de Student*, caso contrário, usa-se o teste *U de Mann-Whitney*. O objetivo desses testes é verificar se os grupos diferiam significativamente antes da intervenção e, se após a intervenção, passaram a apresentar diferenças expressivas.

Já para dados dependentes, isto é, nos casos em que os dois conjuntos de dados a serem comparados são do mesmo grupo (pré-teste e pós-teste), para distribuição normal optou-se pelo teste T pareado, para distribuições não normais foi utilizado o teste de *Wilcoxon*. Esses testes têm por finalidade verificar a evolução de cada grupo.

Ainda que uma análise quantitativa consiga responder a algumas questões de causalidade, considera-se que certos achados são melhor entendidos em análises qualitativas, que, nesta tese, tem por objetivo identificar a evolução de estratégias utilizadas pelos alunos (teoremas-em-ação), assim como caracterizar situações de comunicação e representação determinantes para o desenvolvimento do conceito de covariação durante interação dos grupos do GE.

Para os dados qualitativos, realizou-se triangulação de dados coletados através de diferentes instrumentos (diários de campo, questionários, entrevistas não estruturadas, materiais produzidos pelos estudantes) e assim obtiveram-se perspectivas diferentes do mesmo assunto. Após triangulação, foi utilizado o método de comparação constante de Strauss e Corbin (2008), que consiste em codificar e analisar os dados, comparando de modo contínuo os fatos que aparecem, buscando compreender a evolução das estratégias utilizadas pelos estudantes e de como o pensamento matemático evolui considerando as formas de comunicação e representação utilizadas, a partir das atividades desenvolvidas pelos alunos apenas do GE.

Essa pesquisa de intervenção, portanto, envolveu a observação de alunos utilizando diferentes recursos didáticos, a partir de metodologia desenvolvida pela pesquisadora e a emissão de inferências acerca dos elementos do conceito que emergem ao longo da atividade.

O tratamento e a análise dos dados ocorreram em todos os estágios da pesquisa, considerando para isso os referenciais teóricos e as informações coletados no campo, originando categorias com fragmentos teóricos que auxiliam na interpretação. A seguir apresentar-se-á o capítulo de discussão dos resultados.

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: DESEMPENHO E ESTRATÉGIAS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados relacionados ao desempenho e estratégias dos estudantes. Para isso, foram analisados o pré e pós-teste (GC e GE) de forma quantitativa, a partir de testes estatísticos (SIEGEL, 1975) e, qualitativa, por meio da comparação de estratégias e teoremas-em-ação desenvolvidas antes e após intervenção (STRAUSS; CORBIN, 2008), conforme explicitado nos procedimentos metodológicos.

Considerando os diferentes aspectos analisados nos testes e que estão relacionadas com a construção do conceito de covariação, fez-se as seguintes categorizações: (1) desempenho em situações de proporções; (2) desempenho na compreensão de grandezas; (3) desempenho em representação tabular e gráfica; e (4) desempenho geral, considerando todos os aspectos analisados na intervenção.

Os resultados referentes a cada uma dessas categorias, serão apresentados em função das competências de cada grupo (GC e GE) de forma quantitativa e, qualitativa, considerando os testes do GE.

5.1 Desempenho em situações de proporções

No pré e pós-testes foram analisados o desempenho em três tipos de situações: (I) proporção simples, (II) proporção múltipla e (III) proporção dupla; os quais serão analisados separadamente.

5.1.1 Proporção simples

As questões relacionadas às situações de proporção simples, nos pré e pós-testes (Apêndices C e D) eram 8, com classificação de acordo com o Quadro 6.

Quadro 6 – Classificação das questões de proporção simples no pré e pós-teste.

Questão	Operação	Classe	Tipos
1a	Multiplicação	um-para-muitos	Discreta
1b	Divisão por cota	um-para-muitos	Discreta
2a	Multiplicação e divisão	muitos-para-muitos	Discreta
2b	Divisão por partes	um-para-muitos	Discreta
3a	Multiplicação e divisão	muitos-para-muitos	Contínua
3b	Multiplicação e divisão	muitos-para-muitos	Contínua
3c	Divisão por partes	um-para-muitos	Contínua
7	Multiplicação e divisão	muitos-para-muitos	Contínua

Fonte: Elaboração própria.

Verifica-se, no Quadro 6, que foram contempladas, nos testes, todas as situações de proporção simples classificadas por Santos (2015), buscando uma distribuição proporcional em relação à classe e tipo. Embora se tenha conhecimento que situações de proporção simples envolvendo a multiplicação sejam prototípicas (GITIRANA *et al*., 2014), optou-se por incluí-las, para garantir a variedade de situações e, portanto, uma análise mais completa.

Para o desempenho dos estudantes nesse tipo de situação, foi atribuído 0 ponto para as questões que não estivessem corretas ou em branco e 1 ponto para as questões corretas. Desta forma, o estudante que conseguisse responder todas essas situações corretamente teria **pontuação máxima de 8 pontos**. Esses critérios foram adotados nas análises dos pré e pós-testes do grupo controle (GC) e experimental (GE) e deram origem aos dados do Apêndice L, utilizados nessa análise. De posse dos dados, calcularam-se médias aritméticas e desvios-padrão (Tabela 1).

Tabela 1 – Média e Desvio Padrão em Proporção Simples por grupo no pré-teste e pós-teste.

Situações analisadas	**Grupo Experimental (GE)**		**Grupo Controle (GC)**	
	Média/Desvio padrão		Média/Desvio padrão	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Proporção simples	4,83/±1,58	7,67/±0,65	4,73/±1,16	4,73/±1,67

Fonte: Elaboração própria (Ver Apêndice L).

Ao analisar a Tabela 1, verifica-se que a média do GE aumentou, entre o pré-teste e o pós-teste; e que o desvio padrão diminuiu, significando uma menor variação dos dados em relação à média, isto é, que o desempenho do GE é mais homogêneo. Esses resultados mostram uma melhora no desempenho do grupo experimental como um todo.

Para as análises estatísticas desse conjunto de dados, foram necessários testes diferentes, assim como detalhado nos procedimentos metodológicos, por terem sido verificados dados com diferentes tipos de normalidade (Quadro 7).

Quadro 7 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - proporção simples.

Comparação	**Normalidade**	**Teste Usado**	**Nível de significância (p)**
Controle x experimental (pré-teste)	Sim	*T de Student*	0,850354
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	**0,000037**
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	**0,003346**
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Sim	*T pareado*	0,564076

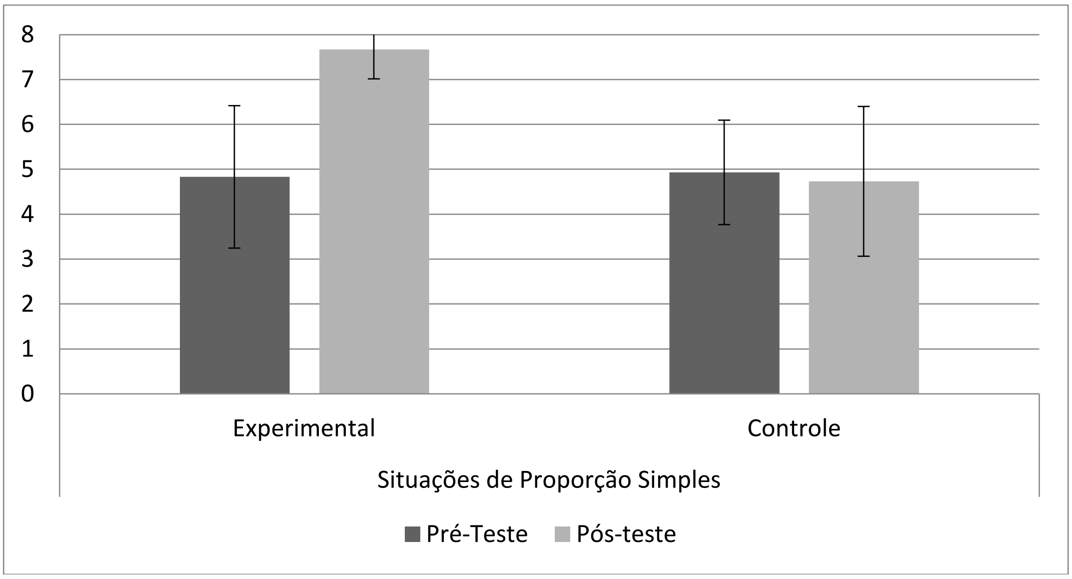
Fonte: Elaboração própria (*Software Statistica:* versão 12.0).

De acordo com os níveis de significância (*p*) que constam no Quadro 7, os grupos controle e experimental (pré-teste) não diferiam estatisticamente (*p*=0,850354)[60]. Após a intervenção, a análise entre GC e GE (pós-teste), mostra um desempenho significativamente diferente entre esses grupos (*p*=0,000037) [61]. Comparações entre o pré-teste e o pós-teste, em cada grupo, foram realizadas através do teste *Wilcoxon*, para o grupo experimental e teste *T pareado*, para o grupo controle. Convém lembrar que a diferença do tipo de teste usado está relacionada com normalidade e a homocedasticidade dos dados. Desta forma, de acordo com o Quadro 7, os estudantes do grupo experimental tiveram um desempenho estatisticamente superior, se comparar seus pré e pós-teste (*p*=0,003346), sendo que essa melhoria no desempenho não foi constatada no grupo controle (*p*=0,564076).

No Gráfico 1 é possível visualizar a média dos grupos, antes e depois da intervenção, e seus respectivos desvios-padrão. Visualiza-se o aumento da média do grupo experimental e a diminuição do desvio-padrão.

[60] Trabalha-se com nível de confiança de 95%, em todos os testes, o que significa que os dados são considerados significativos quando $p \leq 0{,}05$. Logo, quanto menor e mais próximo de zero, mais significativo é o resultado.
[61] Optou-se por não fazer o arredondamento para que se tenha uma melhor compreensão do nível de significância.

Gráfico 1 – Média de desempenho - grupo experimental e controle - proporção simples.



Fonte: Elaboração própria.

Esses resultados mostram que houve uma melhoria significativa no desempenho do GE que pode ser contatado, não apenas, pelo melhor desempenho, mas pela mudança de concepções desse grupo de estudantes. No início da intervenção, esses estudantes tinham uma concepção limitada em relação à multiplicação e à divisão (Protocolo 1).

Protocolo 1 – Concepção de Multiplicação.

P[62]: O que pra vocês é multiplicação?
E05: Multiplicar é uma soma.
E09: É quantas vezes o número se repete...
E02: Ah, é a mesma coisa de somar! [E12 e E04 discordam, mas não conseguem justificar].
E09: A multiplicação foi criada para não se fazer contas maiores [A maioria das crianças parecem concordar. E02 complementa a afirmação de E09].
E02: A multiplicação ajuda a resolver somas grandes. Por exemplo: resolver 196 somado 20 vezes, ao invés de somar várias vezes, basta multiplicar e fica mais fácil!

Verifica-se, no Protocolo 1, que os estudantes relacionam a operação de multiplicação com a adição de parcelas iguais e, embora sejam instigados, não conseguem trazer outras concepções de multiplicação. Como forma de tentar entender melhor essa ideia, a pesquisadora questionou se a multiplicação só serve para abreviar resultados (Protocolo 2).

[62] Nos protocolos de falas, o 'P' representa a fala da pesquisadora.

Protocolo 2 – Para que serve a multiplicação

P: Mas a multiplicação só serve para não demorar a encontrar o resultado?
E12: É!
E04: Só serve para estudar!
P: Então a Matemática só serve para passar de ano?
E04: É. [E12 concorda, mas há uma divergência de opiniões entre a turma]
E02: Não! A gente usa no dia a dia!
P: Como?
E02: No mercantil.
E10: No caixa. [As crianças começam a dar exemplos]
P: Então, onde mais usamos a multiplicação?
E02: Para resolver coisas repetidas!
P: E só para essa coisa repetida? [Os estudantes ficam em silêncio]

Ainda que o Protocolo 2 revele uma divergência quanto à função social da matemática, constata-se que a concepção de multiplicação não se amplia, ficando, ainda, restrito à soma de parcelas iguais. É importante ressaltar que essa ideia não é errada, embora possa induzir à falsa concepção de que ao se multiplicar, sempre aumenta. Magina, Santos e Merline (2014), explicam que essa concepção pode ser oriunda de problemas do ponto de vista didático, em que o professor se detém, apenas, em apontar a multiplicação como uma continuidade (filiação) com a adição.

Durante o questionamento sobre multiplicação, também surgiu a ideia de divisão, pois E08 explicou que para dividir precisava multiplicar. Outra estudante complementa: "Meu professor falou que a divisão serve para saber quantas vezes o número cabe dentro do outro" (informação verbal de E02). Os demais estudantes parecem concordar com a afirmação da colega.

A informação verbal dada pela estudante E02 apresenta apenas uma das ideias de divisão, no caso, a de divisão por quota, já que esta ideia se relaciona com a ação de medir grandezas de mesma natureza, estando relacionada com a ideia de medir (VERGNAUD, 1983, 1988, 2009; CASTRO *et al.*, 2015). Entende-se que essas duas ideias (repartir e medir), são necessárias para a compreensão das situações que envolvem divisão e não podem ficar restritas a uma única concepção.

Conforme discutido no referencial teórico desta tese, na proporção simples é possível identificar dois tipos de divisão: a divisão por quota e a divisão por parte, embora as duas utilizem a mesma operação, no caso a divisão, trazem ideias diferentes e com dificuldades distintas. A divisão por quotas contempla a ideia de medir, enquanto que a divisão por partes, a ideia de repartir (CASTRO *et al.*, 2015).

As entrevistas feitas no início da intervenção, logo após o pré-teste, revelaram a utilização excessiva de regras para solucionar os algoritmos utilizados nos testes. Dentre as falas dos estudantes têm-se: “Para multiplicar um número por 10, basta repetir o número e acrescentar um zero, e assim vale para multiplicar por 100 e 1000” (Informação verbal de E02); "Dá para dividir um número por 10, por 100 e por 1000 só tirando os zeros do número, sabia?” (Informação verbal de E05). Diante dessas explicações, a pesquisadora os indagou sobre os casos que não tem zero para acrescentar, instigando reflexões de como poderia ser feito. Há ainda a necessidade de explicar porque dá certo colocar zeros e retirar zeros nessas situações.

Os estudantes ficaram em silêncio e não souberam explicar, ainda que, no primeiro caso, a regra oriente fazer o deslocamento da vírgula e, no segundo, pode ser explicado pelo fato de o sistema de numeração ser decimal. Essa situação mostra que os estudantes tiveram uma educação muito voltada às regras e procedimentos, o que pode ter contribuído para a limitação de suas concepções sobre os conceitos existentes nas estruturas multiplicativas. Acredita-se que isso aconteça devido ao ensino de Matemática, comumente, focar mais na operação do que na compreensão da situação e das relações envolvidas.

Após a intervenção, essas concepções de multiplicação e divisão se ampliam, como pode ser visto no Protocolo 3.

Protocolo 3 – Concepções finais de multiplicação e divisão.

P: Vocês lembram que no nosso primeiro dia eu perguntei o que é multiplicação e o que é divisão? Lembram?
E[63]: Sim. [A pesquisadora relembra o que as crianças disseram no primeiro dia de intervenção].
P: E aí, continua a mesma coisa?
E03: Eu aprendi que dá para multiplicar e dividir de um jeito diferente.
P: Que jeito é esse?
E03: Usando as tabelas[64] e também os gráficos.
E02: Sim! Quando tem muita coisa pra somar eu uso a multiplicação. Tem também as relações!
P: E a gente vê essas relações aonde?
E09: Na tabela, ora!
E02: Nas grandezas que tem na tabela.
E04: Nos gráficos também dá pra ver.
P: Legal demais! E na nossa vida? Onde que a gente pode encontrar multiplicação e divisão?
E08: Na cozinha.
E02: Nas comidas! Por exemplo, numa merenda da tarde aqui na escola, tem um bolinho que

[63] Significa que muitos estudantes responderam em conjunto.
[64] As tabelas mencionadas pelos estudantes referem-se a formas de organizar as grandezas e mostrar suas relações.

todo mundo gosta. Só que a moça diz que não pode repetir porque é contado! São dois bolinhos para cada aluno. Aí pode multiplicar!
E04: Se em uma mesa senta 4 pessoas, se tem 40 pessoas, vou precisar de 10 mesas!
E05: Na festa também usa muito. [As crianças perguntam sobre a festa de encerramento].
P: Ok! Ótimos exemplos!
E02: A gente aprendeu a entender as tabelas e os gráficos e ver que pode ter multiplicação e divisão lá!
P: E isso ajudou em que sentido E02?
E02: Ajudou a entender a relação!

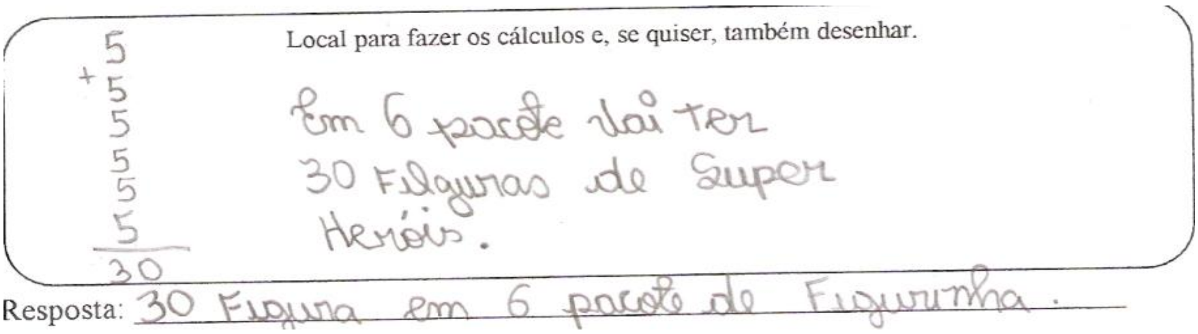
O Protocolo 3 mostra que os estudantes ampliaram suas concepções de multiplicação e divisão. Se antes a multiplicação só estava relacionada à ideia de soma de parcelas iguais (Figura 23 e Figura 24) e a divisão, à quantas vezes um número cabe dentro do outro, os estudantes, ao falarem das relações existentes entre as grandezas, evidenciam a percepção da existência de uma relação fixa entre duas grandezas (GITIRANA *et al*., 2014; MAGINA; SANTOS; MERLINE, 2013, 2014; NUNES *et al.*, 2009; SANTOS, 2012, 2015; VERGNAUD, 1983, 1988, 2009). Essa percepção fica mais evidente quando os estudantes apresentam exemplos com relação entre duas grandezas: 2 bolinhos por pessoa (E02) e 4 pessoas por mesa (E04).

No pré-teste, as estratégias aditivas prevalecem e, mesmo quando os estudantes utilizam a multiplicação, utilizam adições de parcelas repetidas. A questão *1a* desse teste apresenta uma **proporção simples de multiplicação**, como pode ser verificado no enunciado a seguir.

<u>Enunciado da 1a questão</u>: José coleciona figurinhas de heróis. Sabendo que em cada pacote vem 5 figurinhas, responda: a) Quantas figurinhas terão em 6 pacotes?

A questão é classificada por Gitirana *et al.* (2014) como Prototípica, logo, já era de se esperar que estudantes do 6° ano não tivessem dificuldades em resolvê-la, principalmente, por envolver apenas grandezas discretas. Embora todos os estudantes tenham encontrado a resposta correta para essa questão, no pré e pós-teste, é importante analisar as ações mentais utilizadas na resolução deles. Na Figura 23, apresenta-se uma estratégia em que se verifica, de forma explícita, que o estudante compreende a multiplicação como soma de parcelas iguais.

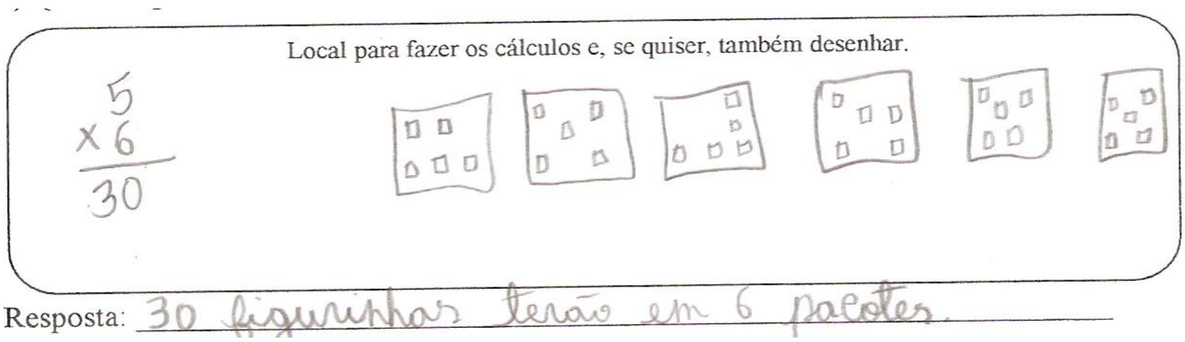
Figura 23 – Compreensão da multiplicação como soma de parcelas iguais.



Fonte: Pré-teste de E05.

Esse esquema utilizado por E05 está fundamentado e é possível, pois, a multiplicação é distributiva em relação à adição. De forma semelhante, além de E05, outros 3 estudantes (E01, E06 e E10) explicitaram essa concepção na resolução do pré-teste. Constatou-se, ainda, que em uma das estratégias havia a combinação da multiplicação com a adição (Figura 24).

Figura 24 – Compreensão da multiplicação como soma de parcelas iguais – combinação.



Fonte: Pré-teste de E02.

Mesmo não utilizando a operação de adição de forma explícita, na estratégia adotada por E02, há desenhos que representam os pacotes, no caso, 6 pacotes e em cada um deles há a representação de 5 figurinhas. Logo, diante dessas representações e dos questionamentos feitos durante o início da intervenção, conclui-se que a estudante também possui a concepção de multiplicação como soma de parcelas repetidas (adição), embora tenha usado representações diferentes.

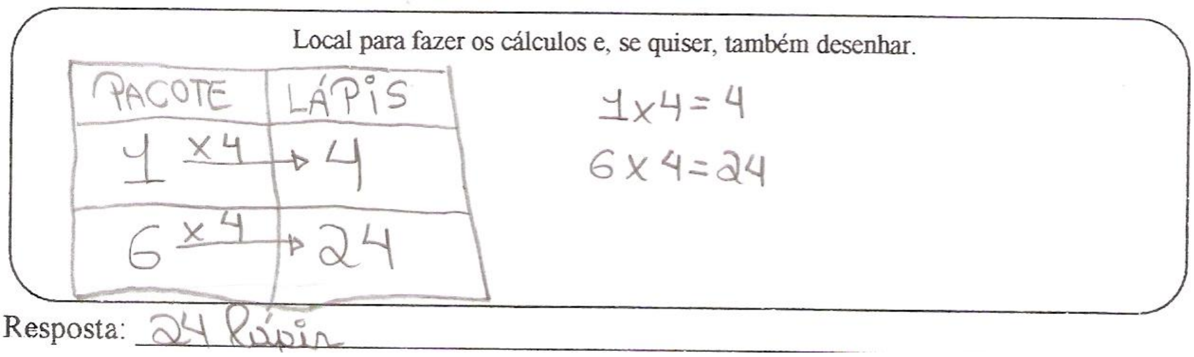
Os demais testes apresentaram como resolução o produto de '*6 . 5 = 30*'. Por meio de entrevistas, foi constatado que os estudantes não entendiam as grandezas presentes na situação e, portanto, trabalhavam apenas com sua magnitude, sendo este fato constatado em todos os tipos de situação. A concepção predominante é de que as proporções simples formam uma relação de três termos e não de quatro, já que não era percebido pelos estudantes o valor unitário que era dado, por exemplo na questão *1a* (Apêndice C), sendo considerado para eles dados válidos para resolvê-la o 6 (número de pacotes) e o 5 (número de figurinhas do pacote), logo, o 30 só representava a resposta que a questão pedia. Vergnaud (1983), explica que esse tipo de resolução é correto apenas se foram consideradas as variáveis como números e não como dimensão.

No pós-teste, havia uma questão análoga à questão 1a do pré-teste:

<u>Enunciado da 1a questão</u>: A diretora da escola está organizando uns *kits* de material escolar para entregar na escola. Em cada pacote terá 4 lápis. Com base nessa informação, responda:
a) Quantos lápis terão em 6 pacotes?

Embora todos os estudantes do GE tenham acertado essa questão no pré-teste e no pós-teste, verifica-se a mudança de estratégias e, consequentemente, dos teoremas-em-ação envolvidos. Todos os estudantes do GE utilizaram estratégias multiplicativas, explicitando, pelo menos, uma das possíveis relações existentes na situação e as grandezas envolvidas na situação (Figura 25, Figura 26 e Figura 27).

Figura 25 – Proporção simples - multiplicação - operador funcional.

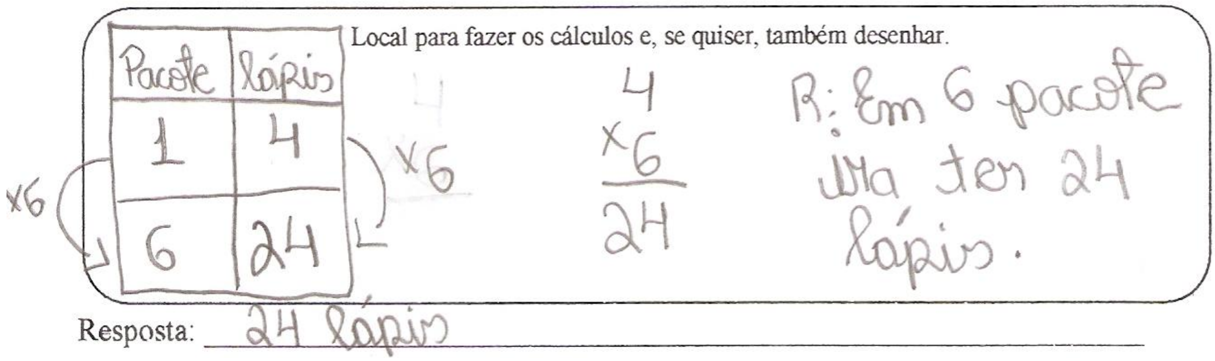


Fonte: Pós-teste de E08.

A Figura 25 apresenta uma estratégia usada por 4 estudantes do grupo experimental, em que se encontra a relação entre duas grandezas, denominado por Vergnaud (1983, 1988, 2009) de operador funcional. Se a quantidade de pacotes quadruplica, o mesmo acontece com a quantidade de lápis, já que isso é definido pela relação dada entre o quociente entre lápis/pacote, que indica o operador funcional 4 lápis por pacote. Ao chamar de f a relação entre a quantidade de pacotes e de lápis, tem-se o seguinte raciocínio: $f(1)=4 \rightarrow f(6) = f(6 \,.\, 1) = 6 \,.\, f(1)$, logo, baseia-se na propriedade linear das relações de proporcionalidade.

A Figura 26 mostra uma estratégia utilizada por 5 estudantes do grupo experimental em que é estabelecido o operador escalar.

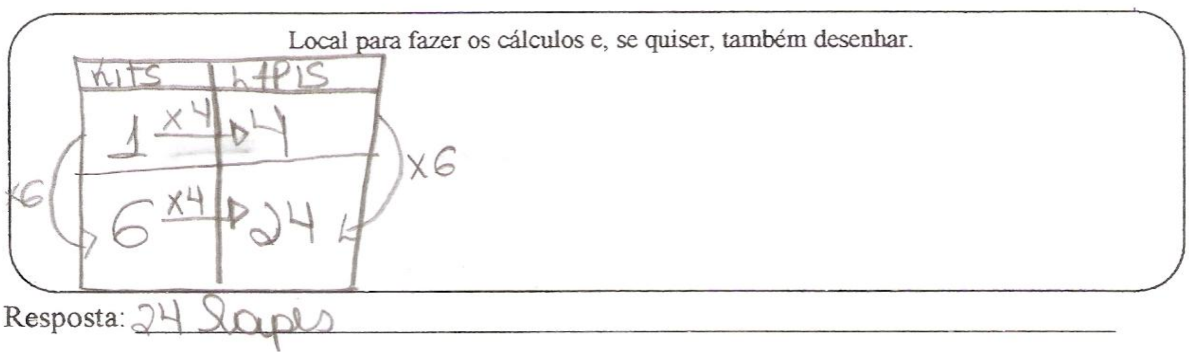
Figura 26 – Proporção simples - multiplicação - operador escalar.



Fonte: Pós-teste de E05.

Nessa estratégia, o estudante busca a relação dentro da mesma grandeza, calculando, no caso: *6 pacotes/1pacote = 6*, um operador adimensional, isto é, que não tem dimensão. Desse modo, a quantidade de lápis final será o sêxtuplo da quantidade de *kits*. Pode-se dizer que essa estratégia está de acordo com a propriedade da função linear relacionada à homogeneidade: *f(a.x) = a f(x),* com '*a*' sendo o operador escalar. Assim, como *a =6* e *f(x) = 4*, tem-se: *6 . f(x) = 6 . 4 = 24 lápis*. Houveram ainda 3 estratégias que utilizaram o operador funcional e escalar (Figura 27).

Figura 27 – Proporção simples - multiplicação - operador funcional e escalar.



Fonte: Pós-teste de E03.

Ao combinar as estratégias do operador funcional e escalar, esses estudantes utilizam os dois teoremas-em-ação já mencionados na estratégia do operador funcional e na estratégia do operador escalar. Acredita-se que essa combinação de estratégias possa estar relacionada com o fato da intervenção ter focado na compreensão da covariação. Para isso, os estudantes precisariam, além de compreender a relação de invariância entre duas grandezas, entender como essa relação varia em conjunto, logo, a necessidade de estabelecer os dois operadores: funcional e escalar.

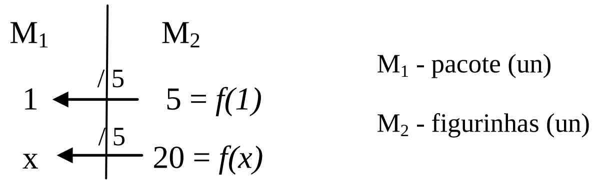
Como forma de compreender melhor as concepções de divisão que os estudantes apresentavam antes da intervenção, o pré-teste (Apêndice C) propôs situações de proporção simples com divisão, considerando a divisão quotitiva e a divisão partitiva.

A **proporção simples - divisão por quota** foi analisada a partir da questão *1b* do referido teste, tendo o seguinte enunciado:

<u>Enunciado da 1a questão do pré-teste</u>: José coleciona figurinhas de heróis. Sabendo que em cada pacote vem 5 figurinhas, responda: b) Quantos pacotes José precisa comprar para ter 20 figurinhas?

A Figura 28 apresenta a estrutura dos esquemas envolvidos na questão *1b*. Mesmo parecendo sofisticado, por não ser usual para os estudantes da faixa etária desse estudo, ajuda no entendimento das relações que estão por trás de problemas de divisão por quotas.

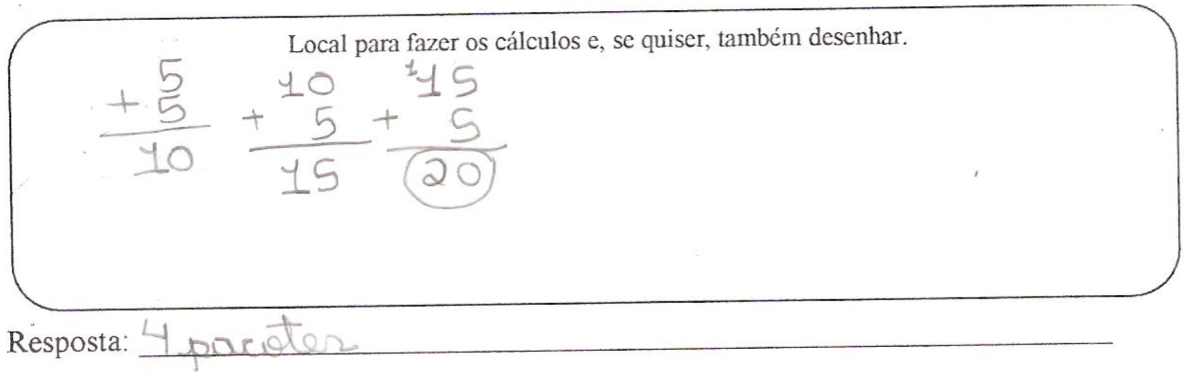
Figura 28 – Esquema envolvendo a questão 1b.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

Por meio do esquema apresentado, é possível constatar que existe uma relação entre a medida M_1 (quantidade de pacote) e a medida M_2 (quantidade de figurinhas). Nota-se que em M_2 é preciso utilizar o operador escalar como '*/5*'. O pré-teste mostra que 50%, ou seja, seis estudantes do GE utilizaram estratégias de somas sucessivas e agrupamento (E01, E02, E05, E06, E08 e E10), como pode ser visto na Figura 29 e Figura 30.

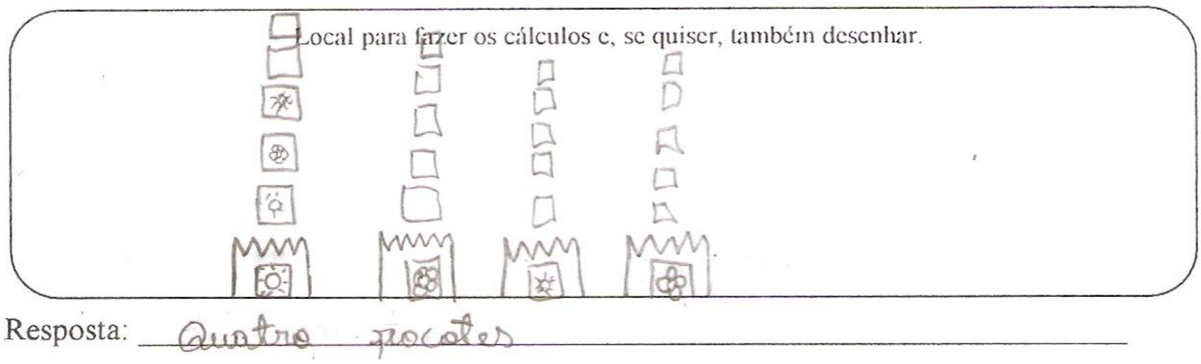
Figura 29 – Resolução por adições repetidas.



Fonte: Pré-teste de E08.

Estas estratégias remetem a um raciocínio tipicamente aditivo. Para Gitirana *et al.* (2014) e Vergnaud (1983), é um procedimento esperado para esse tipo de situação, pois os estudantes costumam achar mais fácil encontrar quantas vezes 5 cabe dentro de 20, ao invés de inferir o operador escalar e aplicá-lo para verificar a quantidade de pacotes.

Figura 30 – Resolução por agrupamento e correspondência.



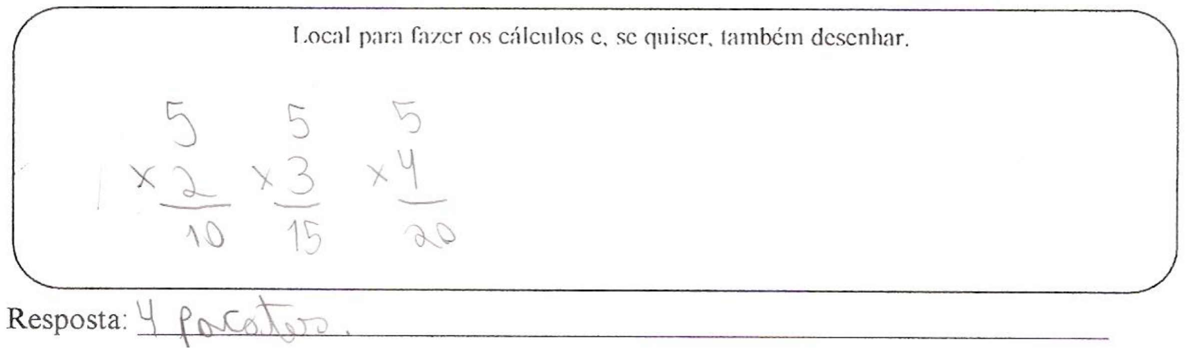
Fonte: Pré-teste de E01.

A Figura 30, mostra uma estratégia que parece ser menos sofisticada do que a anterior (Figura 29). Como forma de esclarecer a estratégia adotada, o aluno E01 explicou em entrevista: "Eu desenhei as 5 figurinhas que tinham em cada pacote, depois eu fui contando até chegar em 20!" (informação verbal de E01). Verifica-se que, embora o estudante tenha sentido a necessidade de representar as figuras do pacote, este fez um agrupamento por correspondência até chegar à quantidade intencionada, no caso, 20 figuras, demonstrando um raciocínio aditivo.

A Figura 31 retrata uma estratégia multiplicativa, porém, auxiliada pela concepção de que é uma soma de parcelas iguais. Nota-se que, na resolução, E11 utiliza a tabuada de 5 (multiplicação) e a repete até conseguir encontrar a quantidade total de figuras.

O uso da tabuada de multiplicação, neste caso, reforça a ideia da prática da multiplicação como soma de parcelas iguais, restringindo assim o raciocínio multiplicativo.

Figura 31 - Resolução por multiplicações sucessivas.



Fonte: Pré-teste de E11.

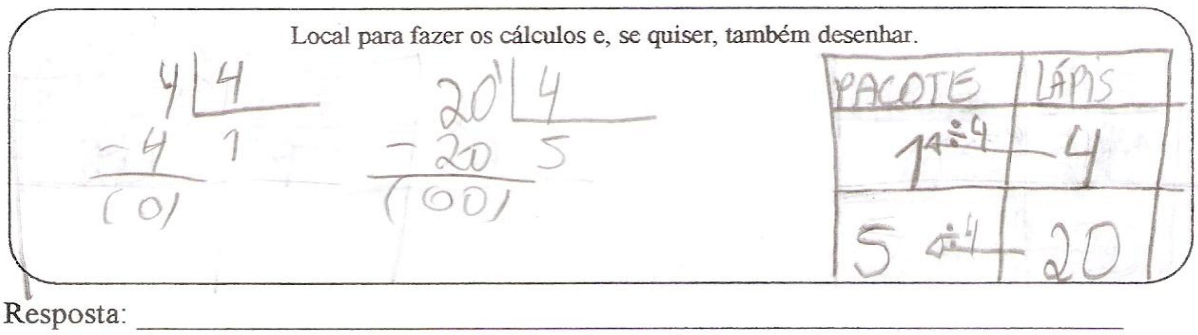
Nota-se, ao analisar o conjunto das estratégias utilizadas no pré-teste para a questão *1b*, que nenhum dos estudantes do grupo experimental utilizou a operação de divisão para resolver a situação. Apenas dois estudantes (E03 e E09), de um total de 12, erraram essa questão, tendo, portanto, um índice de acerto de 83,33%.

Observa-se, ao analisar a questão de divisão por quota do pós-teste do GE, que não foram observadas estratégias aditivas ou combinação de aditivas com multiplicativas, como no pré-teste, apenas estratégias multiplicativas: estratégias do operador funcional (4 estudantes), escalar (7 estudantes) e combinação de operadores (1 estudante). Tendo alcançado, após intervenção, índice de acerto de 100%. No pós-teste (Apêndice D), a questão de proporção simples - divisão por cota era a *1b*, conforme enunciado a seguir.

Enunciado da 1a questão: A diretora da escola está organizando uns *kits* de material escolar para entregar na escola. Em cada pacote terá 4 lápis. Com base nessa informação, responda:
b) Se a diretora tiver 20 lápis, quantos pacotes poderá formar?

Nas estratégias do operador funcional e da combinação do operador funcional com escalar, observou-se que todos os estudantes buscavam estabelecer a relação entre as duas grandezas (quantidade de pacote e de lápis) e depois encontrar a quantidade de pacotes (Figura 32).

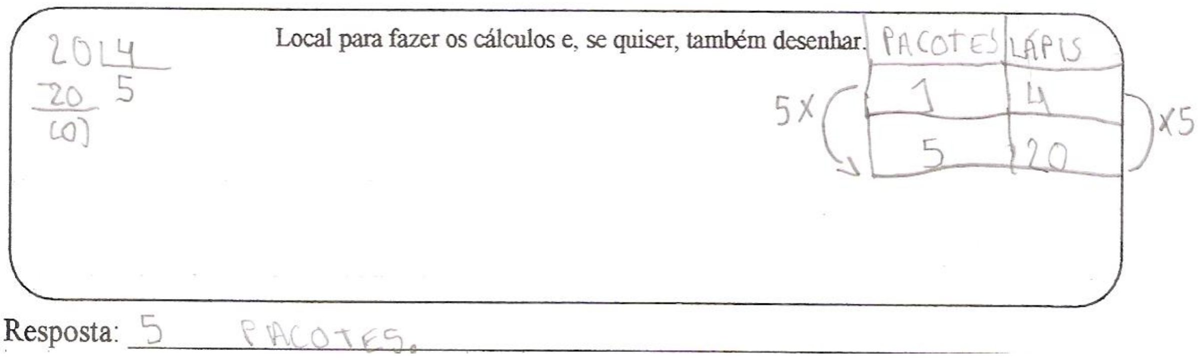
Figura 32 – Proporção simples - divisão por quota - operador funcional.



Fonte: Pós-teste de E06.

Nas estratégias que envolviam a busca do operador escalar, houve algumas variações (Figura 33, Figura 34 e Figura 35). Na Figura 33, E12 encontra o operador escalar pela divisão entre as quantidades de lápis. Essa divisão permitiu encontrar a relação escalar, que pode também ser utilizada na grandeza pacotes, encontrando, desta forma, a quantidade de pacotes que podem ser formados com 20 lápis.

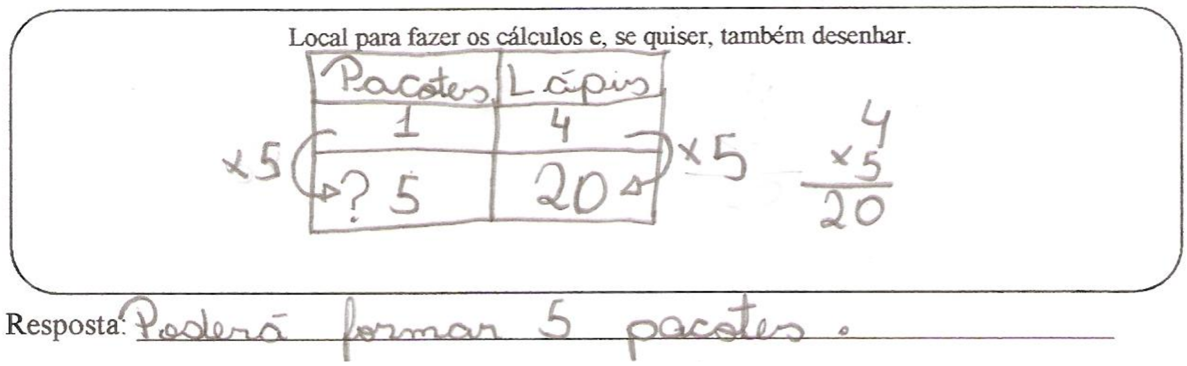
Figura 33 – Proporção simples - divisão por quota - operador escalar por divisão.



Fonte: Pós-teste de E12.

Na Figura 34, E07 encontra o operador escalar pela operação de multiplicação. Em entrevista, a referida aluna, explicou que pensou em um número que multiplicado por 4 tivesse como resultado 20, assim, fez uma inversão da divisão, ao usar a multiplicação, mostrando que percebe que há uma estreita relação entre essas duas operações (GITIRANA *et al.*, 2014).

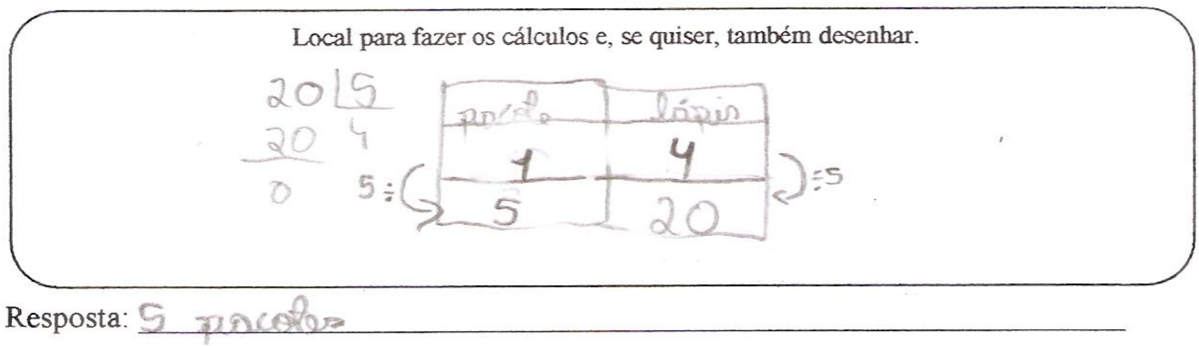
Figura 34 – Proporção simples - divisão por quota - operador escalar por multiplicação.



Fonte: Pós-teste de E07.

Na Figura 35, mostra-se uma estratégia que também fica evidente o uso do operador escalar, todavia, mesmo E01 explicitando o operador, observa-se que há uma certa confusão em relação às operações realizadas. A tabela da Figura 35 expõe uma setinha, com o operador e a operação realizada, sendo que $4 \div 5 \neq 20$, o correto seria $20 \div 5$ ou $4 \cdot 5$, demonstrando que o erro está apenas na direção da setinha. Embora a representação indique o erro na posição da setinha, o estudante revela entender que a operação $20 \div 5$ seria correta, ao representar o algoritmo dessa divisão.

Figura 35 – Proporrção simples - divisão por quota - operador escalar.



Fonte: Pós-teste de E01.

Logo, as estratégias relacionadas a divisão quotitiva modificaram-se no pós-teste, percebe-se, ainda, a utilização da operação de divisão, que no pré-teste era evitada.

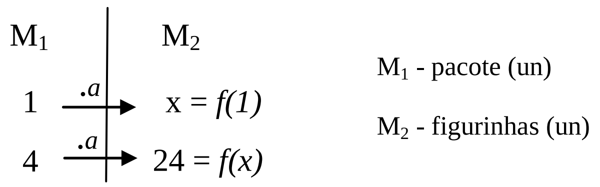
Para as situações de **proporções simples - divisão por parte**, no pós-teste, assim como no pré-teste, foram elaboradas duas situações: *2b* e *3c* (Apêndice C e D). No pré-teste os estudantes do GE tiveram índices de acerto de 58,33% e 91,67%, respectivamente, sendo que, no pós-teste, esses índices subiram para 91,67% e 100%, nessa mesma ordem. Vale ainda ressaltar a mudança de estratégias que passaram a serem todas considerando o raciocínio multiplicativo, prevalecendo, em todos os testes do GE, relacionados à divisão partitiva, a estratégia do operador funcional.

A primeira questão relacionada a essa situação no pré-teste (Apêndice C), tem seguinte enunciado:

<u>Enunciado da 2a questão</u>: Brenda coleciona figurinhas das olimpíadas. Ela comprou 4 pacotes e obteve 24 figurinhas. Responda: b) Quantas figurinhas vêm em cada pacote?

O esquema da Figura 36 apresenta a relação entre as medidas M_1 (pacote) e M_2 (figurinhas). Nota-se que a relação entre essas duas medidas expressa figurinhas por pacote, denominado por Vergnaud (1983, 1988) de operador funcional, representado no esquema do dessa figura por '*(. a)*'.

Figura 36 – Esquema envolvendo a questão 2c.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

A questão *3c* desse teste (Apêndice C) também apresenta uma proporção simples de divisão por partes, como pode ser verificado no enunciado a seguir.

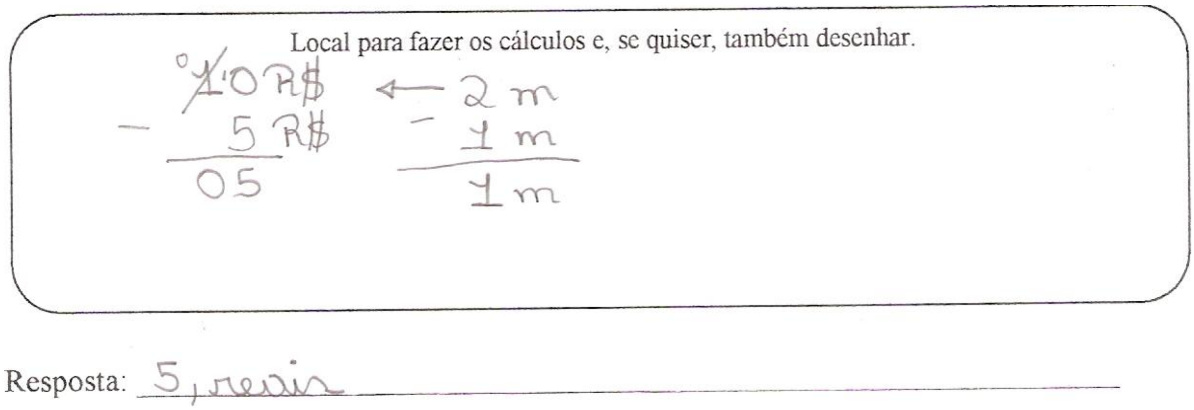
<u>Enunciado da 3a questão</u>: Na escola de Danilo vai ter um baile de Carnaval. A escola conseguiu um desconto especial para comprar o tecido das fantasias. Cada 2 metros de tecido custará 10 reais. Responda: c) Quanto custa 1 metro de tecido?

Ao se analisarem as estratégias utilizadas pelos alunos, no pré-teste, nas duas situações apresentadas; *2b e 3c* observa-se que nenhum dos estudantes demonstrou utilizar o operador funcional como forma de resolvê-lo. A compreensão da relação com o operador funcional é especialmente importante para a compreensão da covariação (NUNES, BRYANT, 1997).

Nas duas questões (*2b e 3c*), as estratégias que prevaleceram foram de multiplicação (*4* **.** ***6*** *=24*). Para explicar essa estratégia, E11 disse que, para achar a quantidade de figurinhas em 1 pacote, bastava pensar em um número que multiplicado por 4, dava como resultado 24, assim, encontrou o 6.

Uma estratégia diferente das demais surgiu na resolução da questão *3c*. Na Figura 37, tem-se a representação dessa resolução. Nota-se que a aluna percebe que existem duas grandezas diferentes, separando-as, portanto, em colunas diferentes. Contudo, para resolver o problema, é feita uma subtração. Em entrevista E02 explica: "Se 1 é a metade de 2, então, a metade de 10 é 5. Se é metade eu posso diminuir, né?" (informação verbal de E08).

Figura 37 – Estratégia de subtração da metade.



Fonte: Pré-teste de E08.

O interessante dessa estratégia é o fato de E08 ser capaz de explicitar o princípio de uma relação, embora ainda não devidamente explicitada. A representação de uma seta ao lado do 2m e apontando para os 10 reais, mostra que foi entendido que a mesma relação tem que acontecer às demais grandezas. Embora a relação explícita em sua ação seja a do operador escalar, isso fica claro quando é mencionado a relação vertical de metade entre 2 e 1 metro. As demais análises nessas questões ainda revelaram que apenas 2 alunos (E04 e E08) utilizaram a divisão como operação para resolver a questão *2b* e a mesma quantidade para a questão *3c* (E04 e E06).

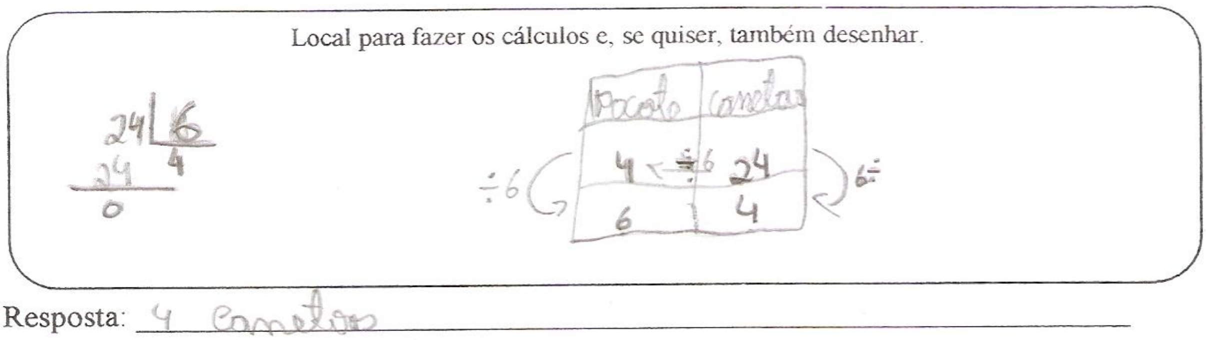
No pós-teste, verificou-se uma melhoria não apenas do desempenho, mas de estratégias e raciocínio, já que os estudantes conseguiram explicitar as relações envolvidas na situação. As questões do pós-teste (*2b e 3c*) eram análogas às questões do pré-teste, conforme enunciado a seguir.

Enunciado da 2a questão: Jusci comprou 4 pacotes de canetas e obteve 24 canetas. Responda:

b) Quantas canetas vêm em cada pacote?

Na resolução da situação da questão *2b*, apenas um estudante do GE, no pós-teste, não conseguiu resolvê-la com êxito. De acordo com a Figura 38, é possível observar que apesar de E01 não ter apresentado a resposta correta, consegue estabelecer a relação de 6 canetas por pacote, ao conectar por setinha as grandezas canetas e pacotes e manifestar o operador funcional como 6 canetas/pacote e a operação como uma divisão.

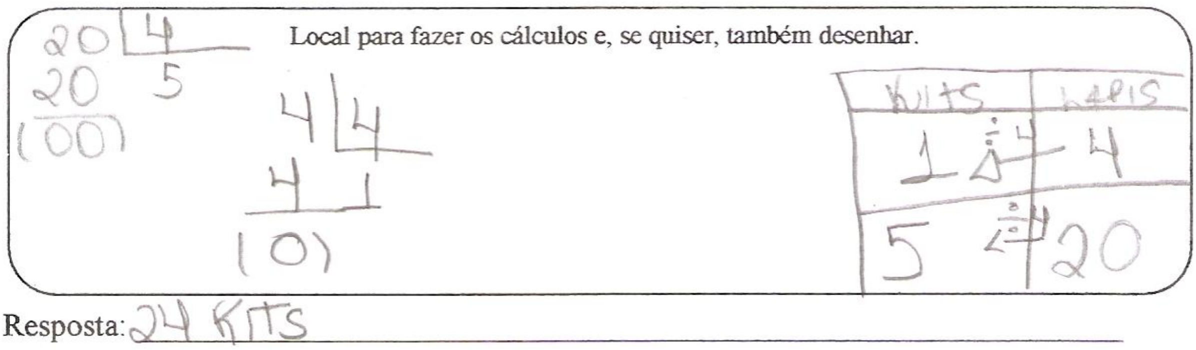
Figura 38 – Proporção simples - divisão por parte - confusão dos operadores.



Fonte: Pós-teste de E01.

A representação feita por E01 na Figura 38 mostra que o estudante confundiu os dois operadores, funcional e escalar. Em entrevista individual, E01 percebeu o erro cometido, antes de ser apontado pela pesquisadora, pois, ao tentar explicar as relações, viu que *4÷6* não seria 6. Os demais testes do GE relacionados à divisão partitiva foram resolvidos explicitando, em sua maioria, a relação do operador funcional (Figura 39).

Figura 39 – Proporção simples - divisão por parte - operador funcional.



Fonte: Pós-teste de E03.

Sobre a utilização do operador funcional na resolução de situações com divisão partitiva, Vergnaud (1983, 1988) explica que, nessas situações, fica explícito a relação entre duas medidas. Contudo, embora se tenha observado nessa intervenção, um predomínio de estratégias multiplicativas com o operador funcional, estas não são comumente explicitadas nas resoluções dos estudantes de 6° ano (CASTRO *et al.*, 2015).

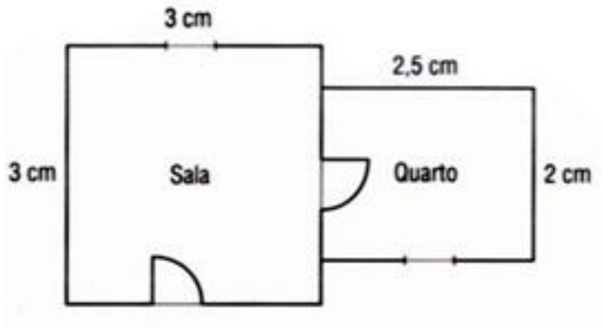
Por fim, na proporção simples, têm-se situações que envolvem as duas operações: multiplicação e divisão. No pré-teste e pós-teste, haviam 4 situações de proporção simples que, por serem da classe de correspondência muitos-para-muitos, envolviam as operações de multiplicação e de divisão. São elas: *2a*, *3a*, *3b* e *7* (Apêndices C e D). Considerando as situações de proporção simples, estas foram as que os estudantes apresentaram maior dificuldade, já que a porcentagem de acertos foram, respectivamente, 58,33%; 50%; 33,33% e 0%, no pré-teste. Após intervenção, os desempenhos atingiram: 91,67%; 100%; 100% e 83,33%, respectivamente.

As questões erradas mostraram a falta de compreensão da situação, uma vez que os estudantes utilizaram para resolver apenas as magnitudes, sem considerar as relações envolvidas. Desse modo, nessas situações, verificou-se o uso de operações de adição e de multiplicação em que os estudantes não sabiam justificar o seu uso e, quando entrevistados, não souberam explicar a estratégia adotada.

Chamou a atenção, ao se analisarem os pré-testes, a falta de acertos na 7ª questão do teste, que tem o seguinte enunciado:

Enunciado da 7a questão: Na Figura 40, estão apresentados dois cômodos da planta de uma casa. Na realidade, a sala é quadrada com lados 6m. Calcule as dimensões reais do quarto.

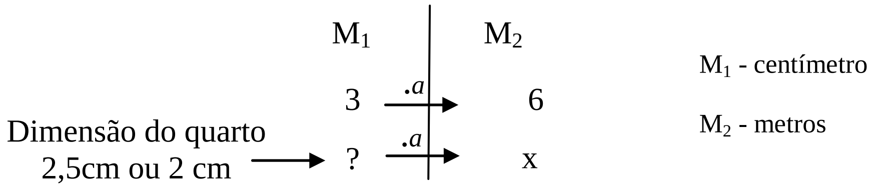
Figura 40 – Imagem da 7ª questão do pré e pós-teste.



Fonte: Pré-teste e Pós-teste (Apêndices C e D).

Essa questão requisita que os estudantes percebam que há uma relação entre o desenho, representado em centímetros (cm) e a dimensão real do quarto, medida em metros (m), tendo a estrutura representada na Figura 41.

Figura 41 – Esquema da questão 7.



Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

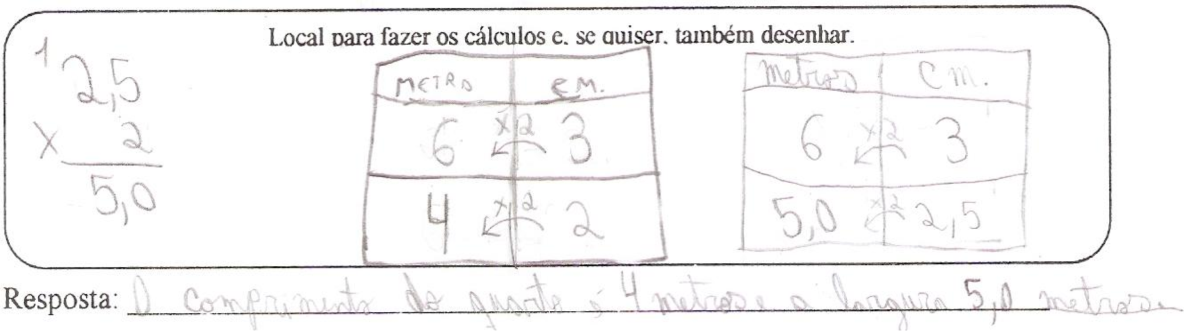
Percebe-se, ao se analisar a Figura 41, que a estrutura é semelhante à de outras situações muitos-para-muitos. Segundo as entrevistas realizadas com os estudantes do grupo experimental, houve duas dificuldades: a primeira é que os alunos não entenderam como podiam relacionar o desenho com as dimensões reais solicitadas; e a segunda, é que achavam que, por ser a imagem de uma figura geométrica, deveriam calcular o perímetro[65]. Esses depoimentos revelam as limitações do conhecimento matemáticos desses alunos, além de que mostrar que estes não estão acostumados a fazer relações.

Como no pré-teste não houve nenhum acerto na 7ª questão, decidiu-se mantê-la no pós-teste, onde se observou uma melhoria acentuada no desempenho e, nas estratégias apresentadas pelo GE (Figura 42 e Figura 43).

A Figura 42 apresenta estratégia multiplicativa em que os estudantes percebem a relação entre as duas grandezas, definindo para isso o operador funcional. No caso, como a questão pede a definição da largura e comprimento do quarto, os estudantes precisaram definir dois valores, logo, observam-se duas tabelas.

[65] Soma dos lados de um polígono.

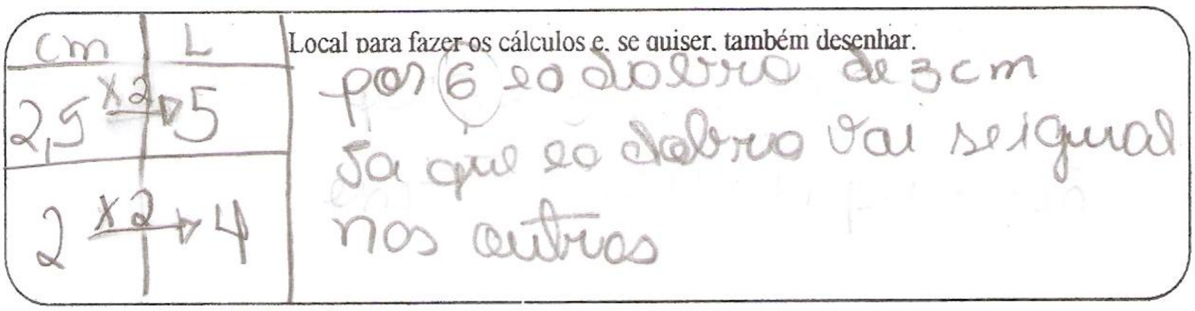
Figura 42 – Proporção simples - multiplicação e divisão - operador funcional.



Fonte: Pós-teste de E11.

A Figura 43, mostra que E03 considerou, ao definir o operador funcional, que há uma relação de dobro entre 3 centímetros e 6 metros. De acordo com entrevista realizada com E03, o dobro está associado a *2x*. Mesmo o operador funcional sendo *2 m por cm*, não se pode estabelecer a relação de dobro entre dois conjuntos com grandezas diferentes, já que a comparação só deve acontecer dentro de uma mesma dimensão. Segundo Santos (2015), esse tipo de comparação está presente em situações ternárias do eixo de comparação multiplicativa.

Figura 43 – Proporção simples - multiplicação e divisão - operador funcional (relação de dobro).

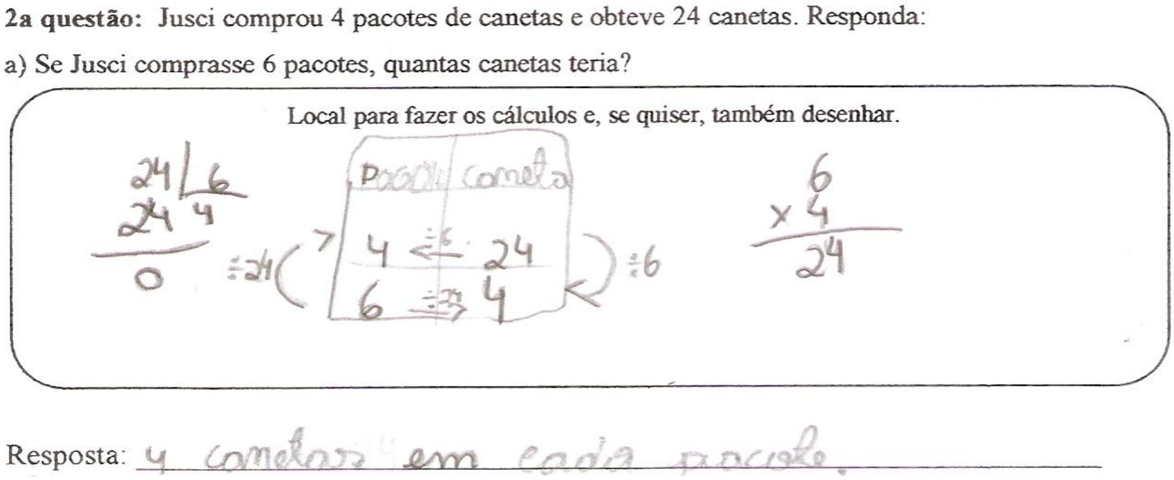


Fonte: Pós-teste de E03.

Assim, mesmo observando melhoria no desempenho e mudanças de estratégias, prevalecendo as multiplicativas, E03 demonstra uma concepção equivocada e limitada do campo multiplicativo. Ressalta-se que, não foi objetivo dessa intervenção desenvolver a compreensão de todas as situações multiplicativas, já que se tem como foco a compreensão da covariação, existente nas relações quaternárias.

Outra resolução errada, foi verificada na questão *2a*, que também é de proporção simples - multiplicação e divisão. A Figura 44 mostra que E01 definiu dois operadores funcionais e escalares diferentes, para a mesma situação. Nota-se que ele consegue estabelecer a relação corretamente, entre 24 canetas e pacote (invariância), mas não consegue compreender o conjunto de dados que fazem parte da situação (covariação).

Figura 44 – Proporção simples - multiplicação e divisão - confusão nos operadores.

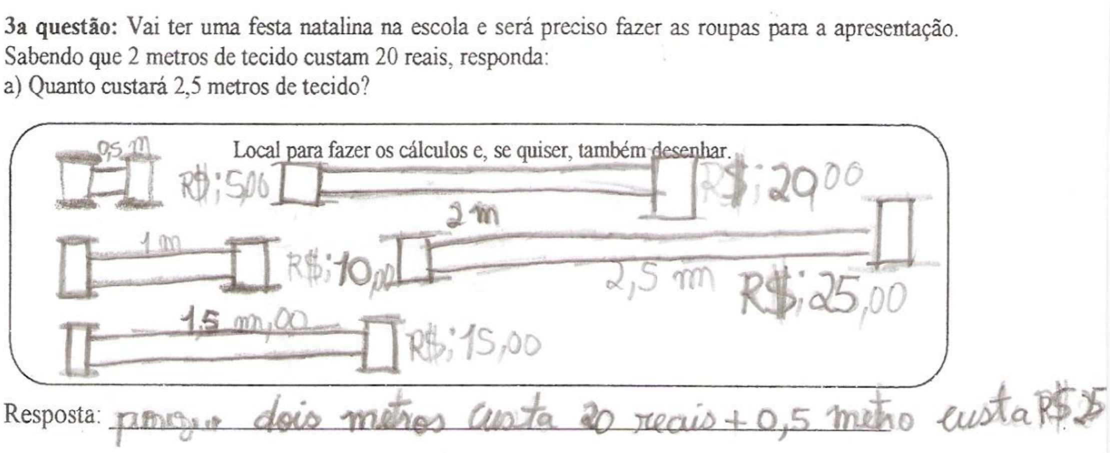


Fonte: Pós-teste de E01.

Esse caso apresentado (Figura 44) foi o único de proporção simples que mostra a dificuldade de coordenar a invariância e a covariação de um conjunto de dados. Mesmo nas demais situações de proporção simples - multiplicação e divisão, com correspondência muitos-para-muitos, sendo mais difíceis, os estudantes passaram a apresentar melhor desenvoltura após intervenção.

Foi constatado um predomínio de estratégias multiplicativas, também utilizando o operador funcional, nesse tipo de situação. Das questões analisadas que envolvem proporção simples - multiplicação e divisão, com correspondência muitos-para-muitos, apenas na 3ª questão item *a* (Figura 45) foram observadas estratégias diferentes das já apresentadas e discutidas, até o momento.

Figura 45 – Proporção simples - multiplicação e divisão - combinação de estratégia.


3a questão: Vai ter uma festa natalina na escola e será preciso fazer as roupas para a apresentação. Sabendo que 2 metros de tecido custam 20 reais, responda:
a) Quanto custará 2,5 metros de tecido?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: dois metros custa 20 reais + 0,5 metro custa R$ 5

Fonte: Pós-teste de E01.

Na Figura 45, visualiza-se uma representação diferente das demais resoluções, pois E01 não usa uma tabela, mas desenhos expressando as quantidades para relacionar as grandezas: à esquerda a quantidade em metros e à direita o valor em reais. Após fazer a representação e estabelecer as relações, o estudante utiliza a adição para chegar ao resultado final, caracterizando, portanto, uma combinação de estratégias: multiplicativa ao fazer as relações das grandezas, estabelecendo dois conjuntos e; aditiva, ao somar as quantidades de uma mesma dimensão (reais).

As análises de situações de proporção simples demonstram, portanto, uma melhoria significativa no desempenho e modificação de estratégias, com predominância, após intervenção, do raciocínio multiplicativo.

5.1.2 Proporção múltipla

As situações de proporção múltipla do pré e pós-teste aplicados só continham uma questão, no caso a 4ª, envolvendo proporção múltipla (Apêndices C e D). Para o desempenho dos estudantes, nesse tipo de situação, foi atribuído 0 ponto, para as questões que não estivessem corretas ou em branco e 1 ponto, para a questão correta. Desta forma, os estudantes que conseguissem responder a situação, de forma correta, teriam **pontuação de 1 ponto**. Esses critérios foram adotados nas análises dos pré e pós-testes do grupo controle (GC) e experimental (GE), dando origem aos dados do Apêndice M, utilizados nessa análise.

A Tabela 2 mostra as médias aritméticas de acerto e os desvios-padrão referente às situações de proporção múltipla.

Tabela 2 – Média e Desvio Padrão em Proporção Múltipla por grupo no pré-teste e no pós-teste.

Situações analisadas	Grupo Experimental (GE)		Grupo Controle (GC)	
	Média/Desvio padrão		Média/Desvio padrão	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Proporção Múltipla	0,08/±0,29	0,75/±0,45	0,27/±0,46	0,07/±0,26

Fonte: Elaboração própria (Ver Apêndice M).

Na Tabela 2, verifica-se, comparando as médias entre pré e pós-teste do GE, que houve uma melhoria na média, enquanto que no GC houve uma leve queda de desempenho, ainda que essas questões, do pré e pós-teste, tenham sido construídas para que tivessem o mesmo nível de dificuldade. Constata-se, ainda, um aumento do desvio-padrão do grupo experimental, se comparados pré e pós-teste, o que significa que a dispersão dos dados aumentou em relação à média, fato que pode ser verificado nas tabelas do Apêndice M.

As análises estatísticas do desempenho entre grupos e intra grupos mostra resultados positivos no desempenho do grupo experimental (Quadro 8).

Quadro 8 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - proporção múltipla.

Comparação	Normalidade	Teste Usado	Nível de significância (p)
Controle x experimental (pré-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,246217
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	**0,000376**
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	**0,011719**
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Não	*Wilcoxon*	0,224917

Fonte: Elaboração própria (*Software Statistica:* versão 12.0).

Todos os dados referentes à situação de proporção múltipla deram não paramétricos, o que possibilitou que fossem utilizados o mesmo tipo de teste para cada tipo de comparação: entre grupos (controle e experimental) - *U de Mann-Whitney* e intra grupos - *Wilcoxon* (pré e pós-teste) (Quadro 8).

Os níveis de significância (p), que constam no Quadro 8, mostram que os grupos controle e experimental (pré-teste) não diferiam estatisticamente (p=0,246217), antes da intervenção, e que após a intervenção, na ocasião do pós-teste, esses grupos passaram a ter desempenhos consideráveis estatisticamente (p=0,000376).

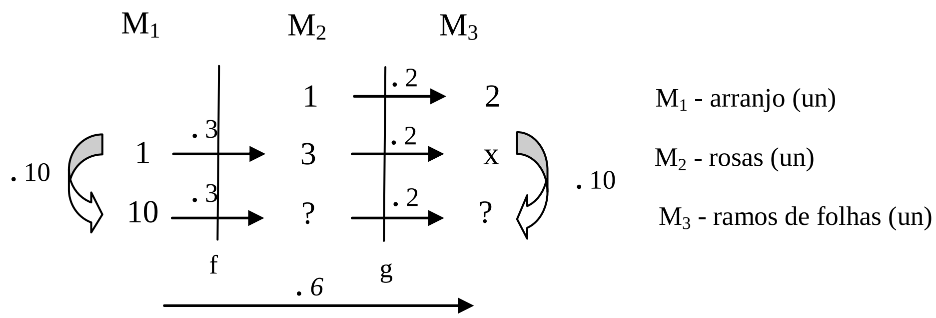
Os testes realizados para comparações entre pré e pós-teste de cada grupo, mostraram que há um desempenho superior, com considerável nível de significância, para o grupo experimental (p=0,011719), enquanto que para o grupo controle, devido ao *p= 0,224917, ou seja, p> 0,05*, não há diferenças significativas entre seus resultados, antes e depois da intervenção.

A comparação das estratégias e teoremas-em-ação desenvolvidos pelos alunos antes e após intervenção, também deixa evidente a ampliação da compreensão conceitual dos estudantes. No pré-teste (Apêndice C), a questão que se refere à situação de proporção múltipla tem o seguinte enunciado:

Enunciado da 4a questão: Para fazer arranjos que decorarão a festa na escola foram utilizadas 3 rosas vermelhas. Em cada rosa vermelha, tem 2 ramos de folhas. Para 10 arranjos, quantas rosas e quantos ramos de folhas serão necessários?[66]

De acordo com o enunciado e com a Figura 46, verifica-se que o estudante precisa perceber que há uma relação entre os arranjos e as rosas (M_1 e M_2), entre as rosas e ramos de folhas (M_2 e M_3) e, ainda, entre arranjos e ramos de folhas (M_1 e M_3).

Figura 46 – Esquema da situação da 4ª questão do teste.



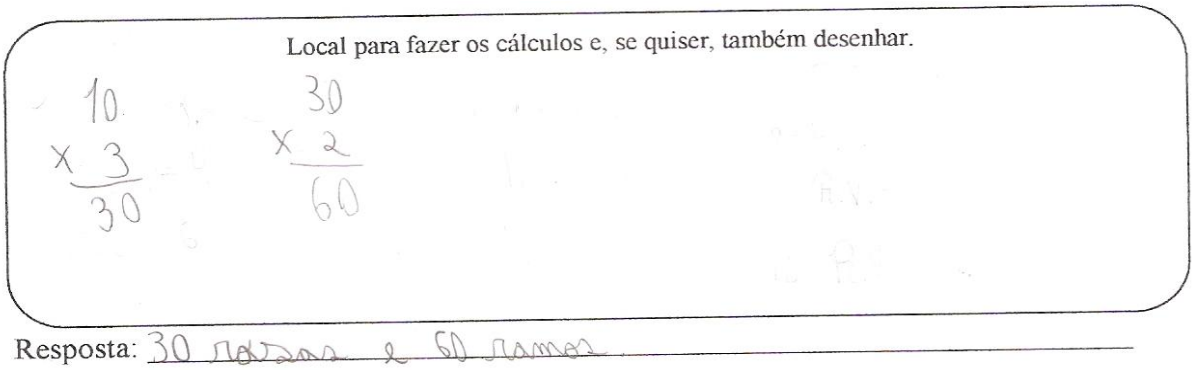
Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

Pode-se afirmar que as relações estabelecidas formam uma composição de funções. Justificando, portanto, o fato de apenas 1 estudante conseguir resolvê-la, pois, se os estudantes têm dificuldades em estabelecer relação entre duas grandezas, entre três é ainda mais difícil.

A Figura 47, mostra que E11 conseguiu compreender as relações e estabelecer os operadores funcionais envolvidos, (**.** *3)*, entre arranjos e rosas (M_1 x M_2) e (**.** *2)* entre rosas e ramos de folhas (M_2 x M_3).

66 Embora a relação de 3 rosas para cada arranjo não tenha ficado evidente, verificou-se que as dificuldades que os estudantes apresentaram nessa questão não foi a de relacionar rosas e arranjos, mas rosas e folhas.

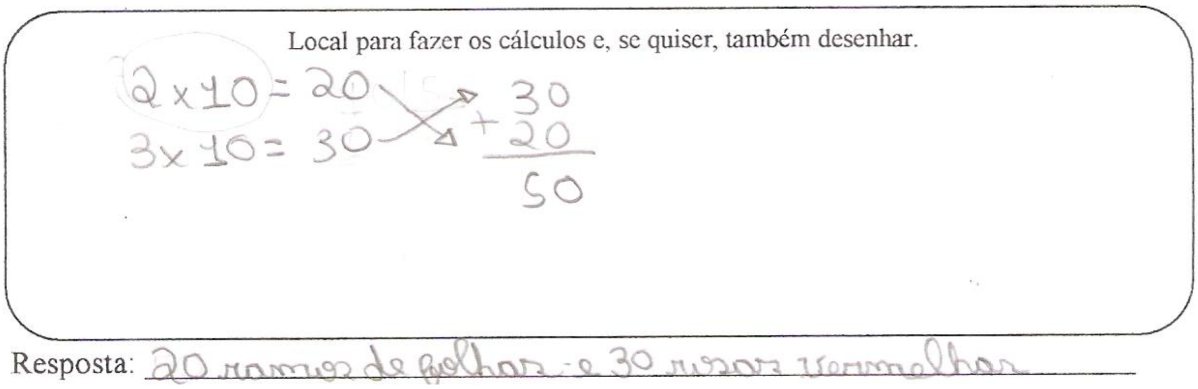
Figura 47 – Estratégia para composição de funções – multiplicação.



Fonte: Pré-teste de E11.

Outra estratégia, embora errada, mostra a tentativa fracassada de estabelecer as relações (Figura 48).

Figura 48 – Estratégia para composição de funções - relações inadequadas.



Fonte: Pré-teste de E08.

Na Figura 48, E08 estabelece a primeira relação corretamente, ou seja, entre arranjos e rosas ($M_1 \cdot M_2$), porém, a segunda relação, ou melhor, arranjos e ramos de folhas ($M_1 \cdot M_3$), não está correta. Nota-se que o operador utilizado está correto, contudo, essa relação deveria ser entre rosas (M_2) e ramos de folhas (M_3). Essa análise demonstra que E08 não percebeu haver relações entre todas as grandezas (M_1, M_2 e M_3).

As demais estratégias utilizadas pelas crianças não puderam ser entendidas pela pesquisadora, nem mesmo com o auxílio das entrevistas, pois os estudantes não sabiam explicar o que tinham feito. Foi mencionado, por alguns desses alunos, que optaram por uma operação (adição, subtração, multiplicação ou divisão), mesmo sem saber qual era a adequada. Isso ficou evidente, ao serem encontradas estratégias de adição, multiplicação ou divisão entre as magnitudes envolvidas na questão de forma indiscriminada, como tentativa de encontrar um resultado.

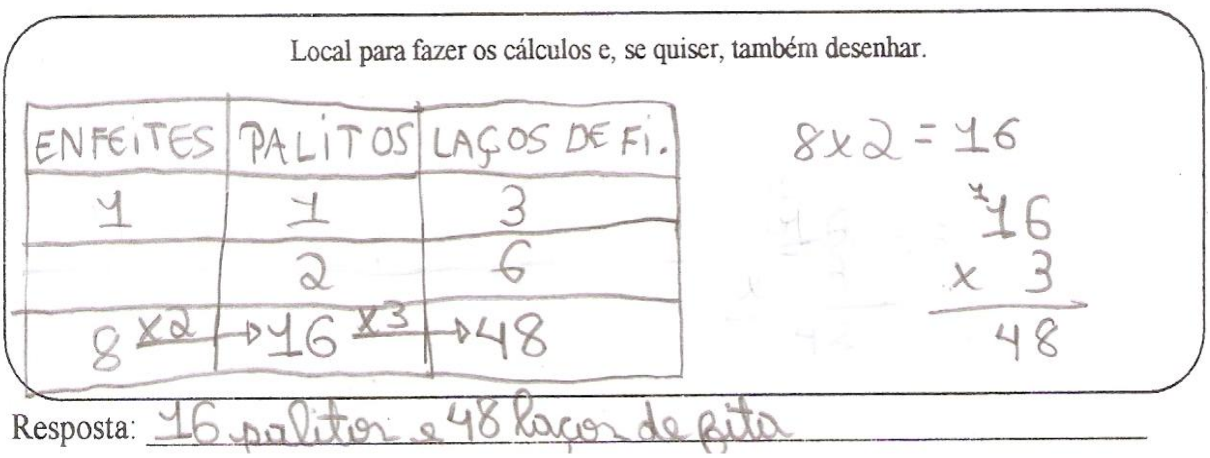
Após a intervenção, verifica-se uma ampliação das competências dos estudantes. Comparando o pré e o pós-teste, é possível verificar uma melhoria no desempenho de 8,22% para 75%, mesmo tendo sido uma situação muito pouco explorada na intervenção. A situação de proporção múltipla no pós-teste (Apêndice D) é a 4ª questão, e tem o seguinte enunciado:

Enunciado da 4a questão: A diretora da escola resolveu decorar a quadra para uma festa de Natal. Cada enfeite colocado na quadra precisará de 2 palitos (armações) e em cada palito terá três laços de fita. Serão necessários 8 enfeites. Quantas palitos e laços de fita serão necessários para fazer os 8 enfeites?

As estratégias utilizadas pelo GE foram predominantemente multiplicativas (Figura 49, Figura 50 e Figura 51), mas também tiveram combinação de estratégias - aditivas e multiplicativas (Figura 52).

A Figura 49 apresenta uma estratégia multiplicativa. Verifica-se a identificação das três grandezas - enfeites, palitos e laços de fita e a definição das relações funcionais entre elas. Pode-se extrair o seguinte teorema-em-ação da situação: *$f(1)=2 \rightarrow f(x_1) = 2x_1$, com x_1=quantidade de palitos por enfeite.* Esse teorema-em-ação é similar ao utilizado em proporção simples, quando se parte da estratégia do operador funcional. Mas, é preciso considerar que há uma composição de funções, desse modo, verifica-se ainda: *$g(1)=3 \rightarrow g(x_2) = 3x_2$, com x_2=quantidade de laços por palito.* Logo, esse tipo de situação requisita juntar os dois teoremas, de modo que: $f(g(x)) = 2.3x$, com x= *quantidade de laços por enfeite.*

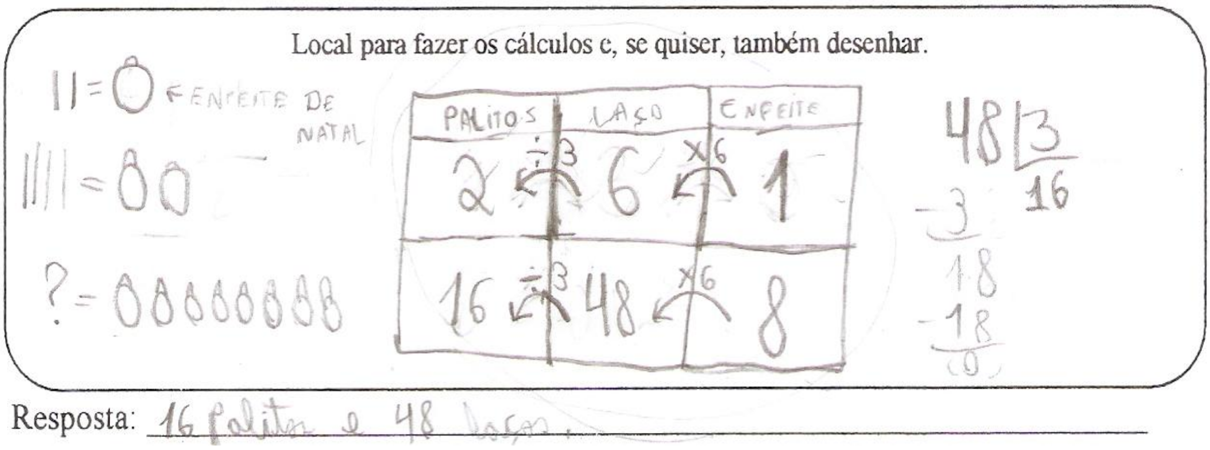
Figura 49 – Proporção múltipla - estratégia multiplicativa - composição de proporção simples.



Fonte: Pós-teste de E08.

Na Figura 50, E11 percebe que as três grandezas - palitos, laços e enfeites estão relacionadas. Observa-se que, além de ter percebido a relação de dependência entre as grandezas, organizou as relações de modo a indicar que a relação funcional entre laços e enfeites, são de 6 laços por enfeite, já que cada enfeite tem 2 palitos. Assim*:* $f(1)=6 \rightarrow f(x_1)=6x_1$, *com* x_1*=quantidade de laços por enfeite.* Ao estabelecer essa relação, E11 já considera a relação entre as três grandezas como dependentes, fazendo uma inversão em relação a estratégia da Figura 49.

Figura 50 – Proporção múltipla - estratégia multiplicativa - relações dependentes.



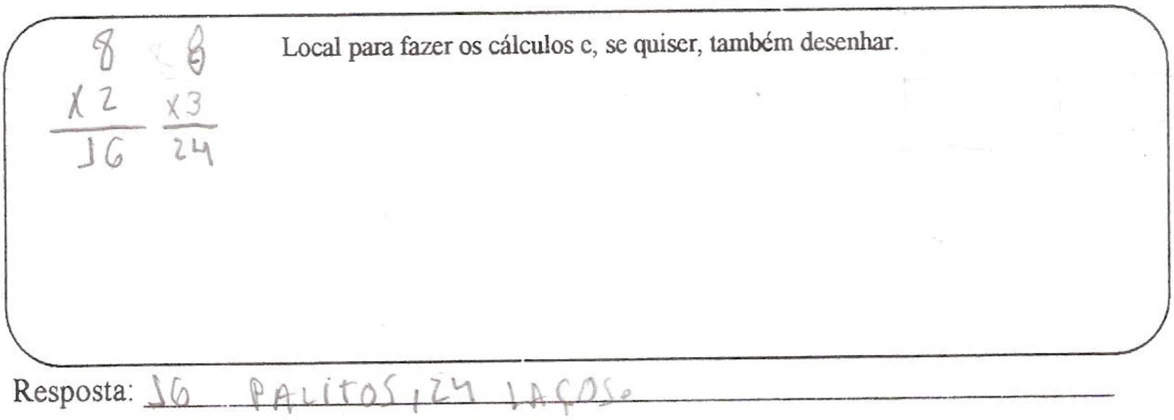
Fonte: Pós-teste de E11.

A outra relação visualizada na estratégia da Figura 50 é a de laços por palito, com $g(6)=2 \rightarrow g(x_2) = x_2/3$, *com* x_2*=quantidade de laços por palito.* Na Figura 49 e na Figura 50, embora os operadores funcionais indicados em cada situação sejam diferentes, estão convenientemente indicados de acordo com as relações estipuladas pelos estudantes.

A dificuldade dessa situação está em perceber que a relação acontece nas três grandezas, formando uma composição de duas proporções simples e que não são relações independentes (Figura 51).

Na Figura 51 é possível perceber que E12 considerou a relação entre enfeites e palitos, ao multiplicar $8 \cdot 2 = 16$. Mesmo essa primeira relação estando certa, não foi computado no desempenho o acerto, já que a questão pedia todas as relações. A segunda relação observada, acontece entre enfeites e laços de fita. Verifica-se que E12 não percebeu que essa relação dependia da quantidade de palitos e não eram relações independentes.

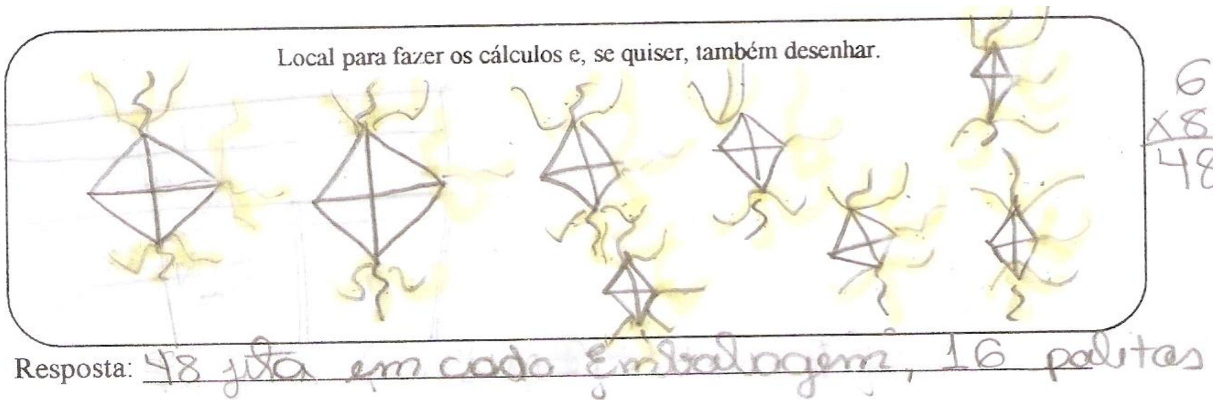
Figura 51 – Proporção múltipla - estratégia multiplicativa - relações independentes.



Fonte: Pós-teste de E12

Na situação de proporção múltipla houve ainda combinação de estratégias - aditivas e multiplicativas - usadas com sucesso por dois estudantes - E03 e E07 - conforme visualizado na Figura 52.

Figura 52 – Proporção múltipla - estratégia aditiva.



Fonte: Pós-teste de E03.

Na Figura 52 verifica-se que cada desenho representa um enfeite. Em cada enfeite tem 2 palitos e nas suas extremidades há 2 conjuntos com 3 fitas. Sem dúvida, a representação das grandezas envolvidas na situação foi importante para que E03 percebesse as relações existentes. Isso fica visível ao multiplicar $6 \cdot 8 = 48$ e ao explicar, em entrevista, que fez esse produto por ter visto que são 6 laços por enfeite de Natal, demonstrando ter consciência do operador funcional da situação.

Ao se verificar a estrutura e as relações presentes nas situações de proporção simples e múltipla, percebe-se que todas as grandezas envolvidas possuem algum tipo de correspondência, ou seja, relações dependentes. Todavia, as situações de proporção dupla, possuem relações dependentes e independentes, o que amplifica a dificuldade de os estudantes estabelecerem o comportamento dessas relações, como será melhor detalhado a seguir.

5.1.3 Proporção dupla

No pré e pós-teste aplicados, apenas a 5ª questão contempla a situação de proporção dupla (Apêndices C e D), logo, o estudante que respondeu corretamente obteve **pontuação de 1 ponto**. Isso foi determinado pelo seguinte critério: obteve 0 ponto, os alunos que não responderam essa questão corretamente ou a deixou em branco; obteve 1 ponto, os estudantes que responderam corretamente a questão. Desta forma, esses critérios foram adotados nas análises dos pré e pós-testes do grupo controle (GC) e experimental (GE) e deram origem aos dados do Apêndice N, utilizados nessa análise.

A Tabela 3 apresenta as médias aritméticas de acerto e os desvios-padrão referente às situações de proporção dupla. Os resultados mostram que a média do grupo experimental e do controle, tiveram pequena melhora em relação ao desempenho mostrado antes da intervenção, inclusive com aumento do desvio padrão. Esse aumento no desvio padrão mostra que apesar da melhoria das médias, esta não aconteceu de forma homogênea, já que houve um aumento da dispersão dos dados.

Tabela 3 – Média e Desvio Padrão em Proporção Dupla por grupo no pré-teste e no pós-teste.

Situações analisadas	**Grupo Experimental (GE)**		**Grupo Controle (GC)**	
	Média/Desvio padrão		Média/Desvio padrão	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Proporção Dupla	0,17/±0,39	0,50/±0,52	0,27/±0,46	0,40/±0,51

Fonte: Elaboração própria (Ver Apêndice N).

Em relação às análises estatísticas, verifica-se que não houve alteração no nível de significância (*p*), o que significa que os grupos não divergiam antes e nem depois da intervenção. Em relação ao desempenho em situações de proporção dupla, constatou-se que, nem grupo experimental e nem grupo controle tiveram melhoria significativa, embora o grupo experimental (p=0,06789) tenha chegado bem mais próximo do nível de significância esperado, $p \leq 0{,}05$ (Quadro 9).

Quadro 9 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - proporção dupla.

Comparação	**Normalidade**	**Teste Usado**	**Nível de significância (*p*)**
Controle x experimental (pré-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,67832
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,66055
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	0,06789
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Não	*Wilcoxon*	0,10881

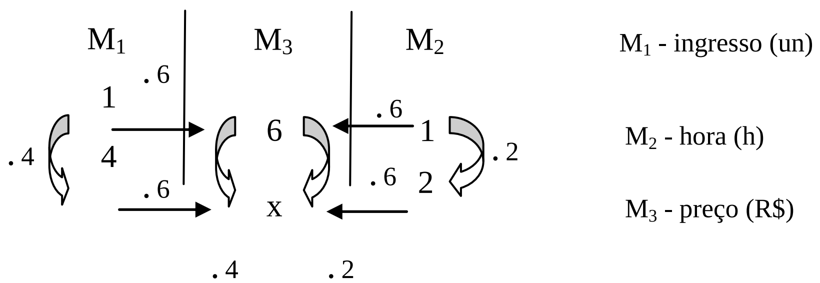
Fonte: Elaboração própria (*Software Statistica:* versão 12.0).

Acredita-se que este resultado, bem inferior aos demais desempenhos, possa estar relacionado a três fatores: o primeiro é que foi uma situação pouco explorada na intervenção, por conta da dificuldade de relacioná-la às situações próximas do dia a dia dos estudantes; segundo, o fato de haver apenas uma questão, diminui a significância de uma análise estatística; e principalmente, o terceiro, por sua estrutura, já que as proporções duplas envolvem funções bilineares que tem comportamentos diferentes das funções lineares. Assim, no pré-teste (Apêndice C), a questão que se refere à situação de proporção dupla, de classe um-para-muitos, é a 5ª, e tem o seguinte enunciado:

Enunciado da 5a questão: Um ingresso para utilizar a *lanhouse* perto da minha casa, durante uma hora, custa R$6,00. Quanto custará 4 ingressos para jogar 2 horas?

No problema do enunciado da 5ª questão, verifica-se que há uma relação de invariância entre a quantidade de ingressos e o preço pago (M_1 e M_3), no caso, 6 reais por ingresso. De forma análoga, verifica-se o mesmo entre o preço pago por hora, sendo, neste caso, 6 reais por hora (M_2 e M_3). Todavia, essa mesma relação não acontece entre M_1 e M_2, pois são relações independentes (Figura 53).

Figura 53 – Esquema da situação da 5ª questão do teste.



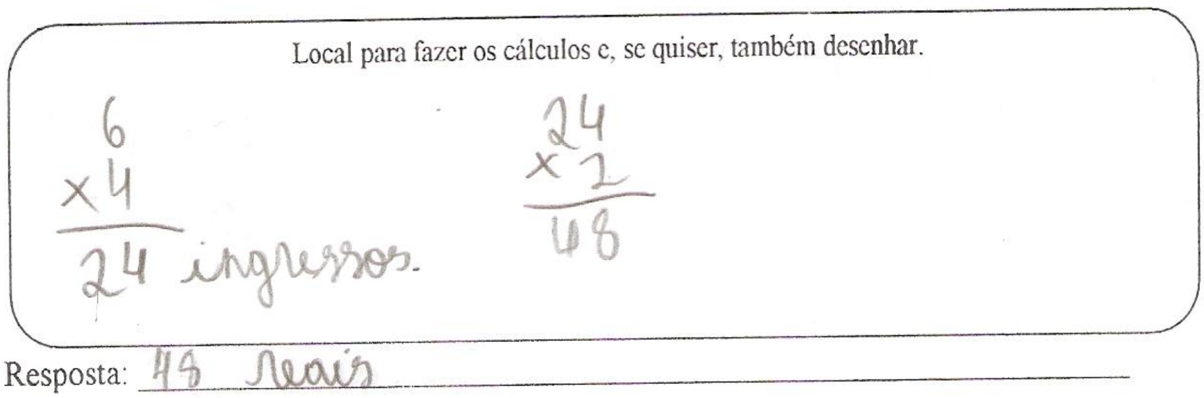
Fonte: Elaboração própria baseada em Vergnaud (1983).

A Figura 53, apresenta um esquema que demonstra a bilinearidade das funções envolvidas na situação da 5ª questão do teste. Assim, seguindo o modelo de uma função bilinear, têm-se que *f(x,y) = 6xy*, em que *'x'* representa a quantidade de ingressos e *'y'* a quantidade de horas.

Ao analisar as estratégias dos pré-testes, verificaram-se apenas duas resoluções que consideraram a bilinearidade das funções. Estas estratégias, embora semelhantes, diferenciam-se, apenas, no tipo de raciocínio.

A primeira, visualizada na Figura 54, apresenta a estratégia de E02. Nota-se que, embora o resultado esteja correto e haja a compreensão das relações (M_1 e M_3) e (M_2 e M_3), configurando um raciocínio multiplicativo, fica clara certa confusão em relação às grandezas envolvidas. Isso fica evidente, quando, ao multiplicar 6 por 4, coloca como resultado 24 ingressos. Na realidade, a grandeza que está sendo operada é reais, sendo 4 e 2 operadores escalares que auxiliam a resolução, do qual devem originar a função *f(4,2).*

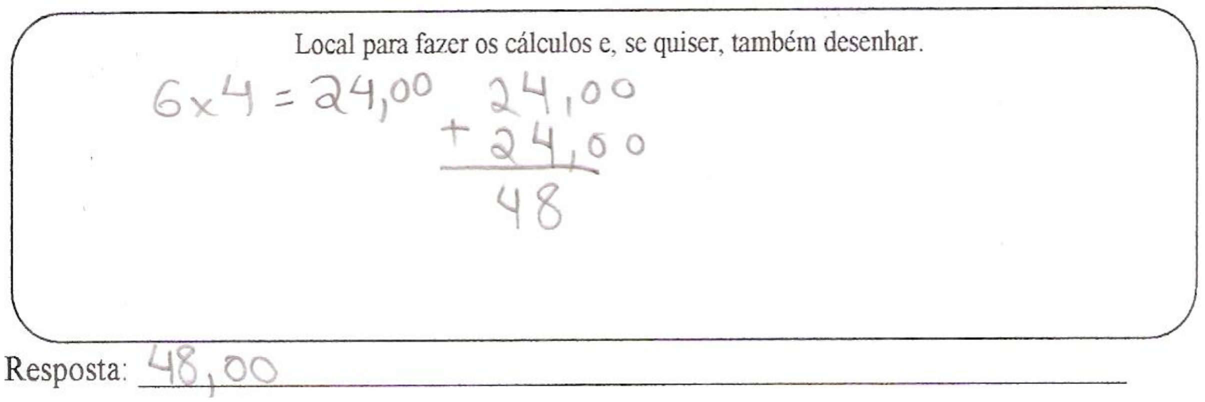
Figura 54 – Estratégia de proporção dupla - raciocínio multiplicativo.



Fonte: Pré-teste de E02.

A segunda estratégia mencionada combina raciocínio aditivo e multiplicativo, a compreensão da relação entre as grandezas, ainda que não consiga diferenciar as grandezas e os operadores envolvidos. Também evidencia o uso da multiplicação como soma de parcelas iguais (Figura 55). A estratégia da Figura 55 fica melhor compreendida ao analisar o Protocolo 4.

Figura 55 – Estratégia de proporção dupla - raciocínio aditivo e multiplicativo.



Fonte: Pré-teste de E08.

Protocolo 4 – Estratégia de proporção dupla - raciocínio aditivo e multiplicativo

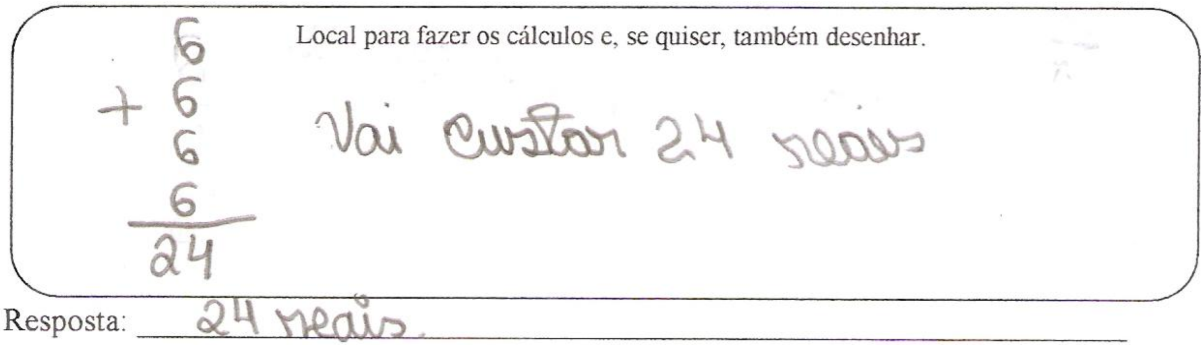
P: Por que você colocou aqui 6*x4*?
E08: Porque eu tenho que comprar 4 ingressos para duas horas, cada uma hora custa 6 reais, então, para 4 ingressos para 2 horas eu coloquei 6x4 aqui! [Aponta para a folha de resolução do teste]
P: E por que você somou?
E08: Porque foram 4 ingressos e foram 6 reais, então dá 24! [Refere-se, mais uma vez, a primeira parte da resolução]. Então, *24 + 24* dá 48. Aqui é porque não foi só 1 hora, foram 2 horas, então é *24 +24*.

No Protocolo 4, a criança explica todos os procedimentos adotados para a resolução. Fica claro, em sua fala, a compreensão de que há uma relação entre ingressos e horas, assim como entre o preço e o número de horas. Todavia, essa compreensão não foi atingida pelos demais colegas, já que houve baixos índices de acertos (apenas E02 e E09 responderam corretamente).

A análise dos teoremas-em-ação utilizados pelos estudantes que não conseguiram acertar a 5ª questão do teste, evidencia a falta da compreensão do tipo de relação que acontece entre as três grandezas envolvidas (ingresso, preço e hora), como detalhado anteriormente.

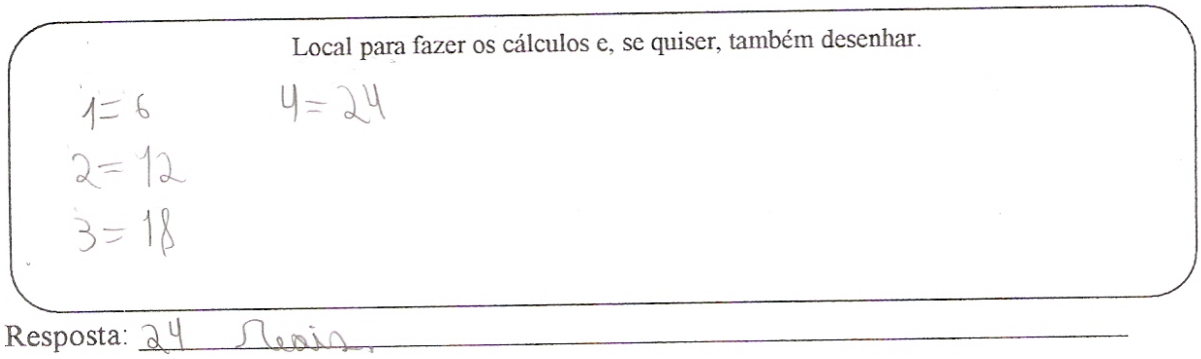
Na Figura 56, tem-se uma estratégia aditiva que só apresenta a relação entre o preço e a quantidade de ingressos. Esse tipo de compreensão da relação também pode ser verificado na Figura 57.

Figura 56 – Estratégia de proporção dupla - raciocínio aditivo.



Fonte: Pré-teste de E05.

Figura 57 – Estratégia de proporção dupla - relação entre duas grandezas.



Fonte: Pré-teste de E11.

A Figura 57, também mostra que E11 fez uma associação entre o preço e a quantidade de ingressos, usando como simbologia o sinal de igualdade (=). Durante a entrevista foi esclarecido que o símbolo matemático não foi usado com o sentido matemático de igualdade, mas para apontar a relação entre as grandezas: "[...] um ingresso vale 6 reais, dois valem 12 reais..." (informação verbal de E11).

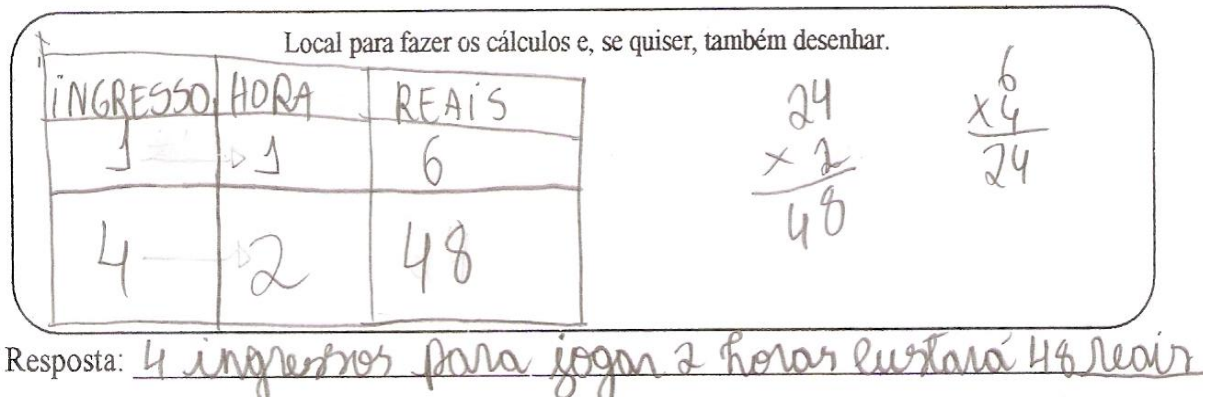
Embora E11 tenha feito um uso inadequado do signo e não tenha ciência de todas as relações da situação, essa forma de explicitar a relação, chamou atenção por não ser um procedimento esperado e nem comum em estudantes do 6° ano.

A comparação do desempenho dos alunos entre o pré-teste (16,67%) e pós-teste (50%) mostra que os estudantes tiveram pouca melhoria, se comparado ao desempenho alcançado nas demais situações. Atribui-se ao fato de não ter surgido, durante intervenção, situações de proporção dupla, principalmente, considerando que estas teriam uma representação gráfica diferente das demais situações trabalhadas até aqui, o que poderia causar um obstáculo para a compreensão dos estudantes. No pós-teste (Apêndice D), a situação de proporção dupla teve o mesmo enunciado do pré-teste.

Mesmo assim, verificam-se estratégias diferentes das apresentadas no pré-teste, principalmente, explicitando as grandezas, suas relações, além de utilizarem, predominantemente, o raciocínio multiplicativo (Figura 58, Figura 59 e Figura 60).

Na Figura 58, verifica-se que E02 conseguiu identificar as grandezas presentes na situação, porém não indica as relações funcionais e nem escalares. Ao multiplicar *6 . 4*, E02 faz correspondência entre preço e ingresso, encontrando que 4 ingressos custarão R$24,00. Como o ingresso só dá direito a 1 hora na *lanhouse*, E02 percebeu ainda, a necessidade de relacionar o valor obtido com a quantidade de horas: *24 . 2*, demonstra ter percebido que a grandeza relacionada com o preço tem dependência com as grandezas relacionadas aos ingressos e as horas. Logo, $f(x,y) = 6xy$, em que *'x'* representa a quantidade de ingressos e *'y'* a quantidade de horas.

Figura 58 – Proporção dupla - estratégia multiplicativa - relações dependentes e independentes.

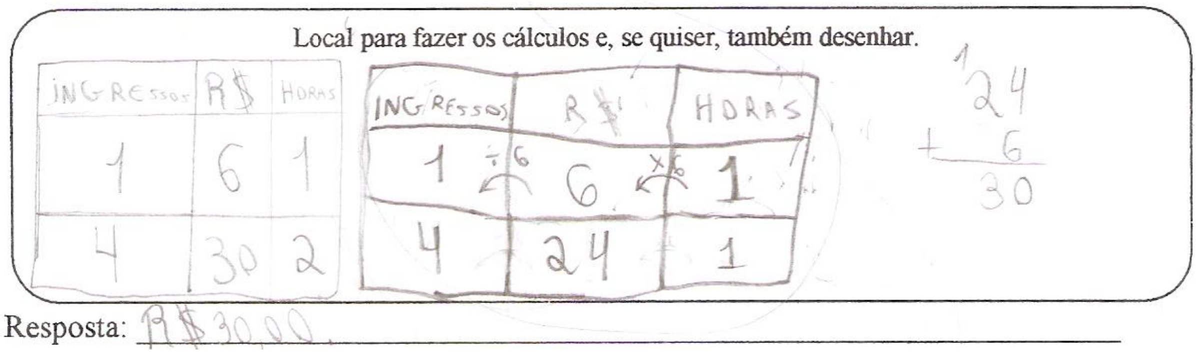


Fonte: Pós-teste de E02.

Ao resolver essa situação, os estudantes estão utilizando teoremas-em-ação relacionados com as propriedades das funções bilineares (GITIRANA *et al.*, 2014). Dessa forma, considerando o valor a ser pago: *preço = f (ingresso, hora).* Logo: *f(ingresso1+ingresso2+ingresso3+ingresso4,horas)=f(ingresso1,hora)* + *f(ingresso2,hora)* + *f(ingresso3, hora)* + *f(ingresso4, hora).* O que evidencia que a grandeza correspondente ao preço é dependente das grandezas que estão relacionas a hora e ingressos, mas que, estas duas últimas, são independentes entre si.

Diante da dificuldade de visualizar as relações de dependência e independência entre as grandezas presentes em situações de proporção dupla, verificaram-se estratégias em que os estudantes consideraram todas as grandezas dependentes (Figura 59).

Figura 59 – Proporção dupla - estratégia multiplicativa- relações dependentes.

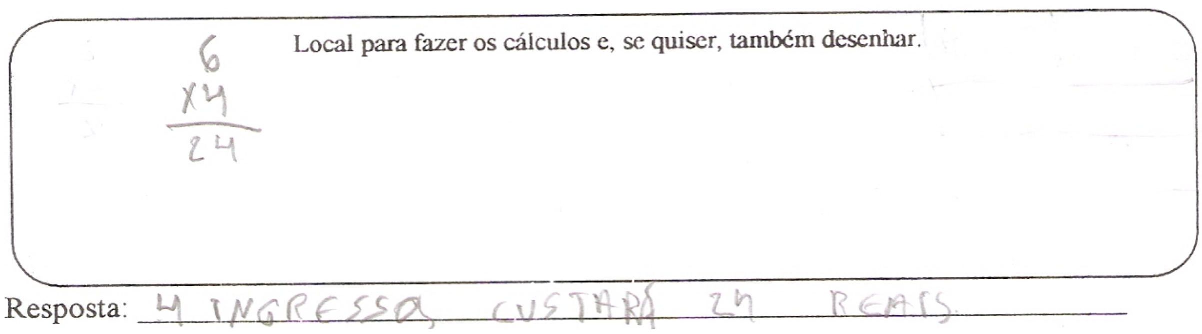


Fonte: Pós-teste de E11.

A Figura 59 deixa evidente que E11 identificou as grandezas e as relacionou, definindo o operador funcional entre reais e horas como 6 reais por hora. O operador funcional definido entre preço pago por ingresso foi considerado como o inverso da relação encontrada de preço por hora. É possível verificar na linha seguinte, que também coloca que 1 hora custa 24 reais, se forem 4 ingressos. Em entrevista, E11 deixou claro que não sabia como relacionar o valor a ser pago pelos 4 ingressos com a quantidade de horas.

Também houve estratégia em que o estudante considerou apenas uma relação, no caso, entre preço e quantidade de ingressos, como visualizado na Figura 60.

Figura 60 – Proporção dupla - estratégia multiplicativa - relação única.



Fonte: Pós-teste de E12.

Decerto, em relação à proporção dupla, a intervenção contribuiu para que os estudantes identificassem as grandezas e algumas relações, porém, não foi eficiente em possibilitar que os estudantes compreendessem o tipo de relações - de dependência e/ou independência - entre as grandezas. Percebe-se, nos exemplos apresentados, que os estudantes conseguem, na maioria dos casos, compreender a invariância entre as grandezas com relações dependentes, mas ao analisar a situação como um todo e compreender como se comporta o conjunto de dados da situação - covariação, não obtiveram êxito.

Buscou-se, na literatura, trabalhos que pudessem subsidiar a discussão das estratégias e teoremas-em-ação, assim como, indicar melhores opções didáticas para a abordagem de proporção dupla, contudo, são escassos. Sabe-se que, de acordo com pesquisas, a proporção múltipla traz maior dificuldade do que a proporção dupla (GITIRANA *et al*., 2014). Todavia, o que foi percebido após a intervenção, é que os alunos do GE apresentaram maior dificuldade em proporção dupla do que em múltipla. Acredita-se que isso possa ter correspondência com o tipo de relações presentes nessa estrutura e, ao fato de que a intervenção se baseou em representações gráficas feitas, apenas, para funções lineares.

5.2 Desempenho na compreensão de grandezas

No pré e pós-teste (Apêndices C e D), a identificação do tipo de grandezas, direta ou inversamente proporcionais, foi feita por meio dos resultados da 6ª questão. Essa questão continha quatro situações em que era necessário verificar se o raciocínio apresentado na situação em relação à proporcionalidade das grandezas estava correto, indicando se era verdadeiro ou falso. Para isso, os estudantes precisavam analisar as situações e inferir se a relação era verdadeira ou não.

Para determinar o desempenho dos estudantes, foi atribuído 0 ponto para as questões que não estavam corretas ou em branco e 1 ponto para as questões corretas. Desta forma, o estudante que conseguisse responder todas essas situações corretamente, teria **pontuação máxima de 4 pontos**. Esses critérios foram adotados nas análises dos pré e pós-testes do GC e GE e deram origem aos dados do Apêndice O, utilizados nessa análise.

A Tabela 4 apresenta os resultados em relação aos desempenhos dos estudantes em situações que requisitam a compreensão de grandezas direta e inversamente proporcionais.

Tabela 4 – Média e Desvio Padrão em Compreensão de Grandezas direta e inversamente proporcionais por grupo no pré-teste e no pós-teste.

Situações analisadas	**Grupo Experimental (GE)**		**Grupo Controle (GC)**	
	Média/Desvio padrão		Média/Desvio padrão	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Compreensão de grandezas direta e inversamente proporcionais	3,17/±1,19	3,5/±0,52	2,87/±0,91	2,87/±1,13

Fonte: Elaboração própria (Ver Apêndice O).

Verifica-se que a média dos estudantes, do grupo experimental e controle já eram relativamente altas, antes da intervenção com 3,17 e 2,87, respectivamente, de um total máximo de 4 pontos. Após a intervenção, a média do grupo experimental teve uma pequena melhora, assim como diminuição do desvio-padrão (dados mais homogêneos - próximos da média); enquanto que o grupo controle, manteve a média, com aumento do desvio padrão (Tabela 4). Apesar do aumento na média e da diminuição do desvio-padrão, as análises estatísticas não apresentaram mudanças significativas nem entre grupo controle e experimental e nem entre pré-teste e pós-teste de cada grupo, pois todos os níveis de significância (*p*) deram maiores que 0,05 (Quadro 10).

Quadro 10 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - Compreensão de Grandezas direta e inversamente proporcionais.

Comparação	**Normalidade**	**Teste Usado**	**Nível de significância (p)**
Controle x experimental (pré-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,24536
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,121184
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	0,529369
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Não	*Wilcoxon*	0,69487

Fonte: Elaboração própria (*Software Statistica:* versão 12.0).

Muito embora os resultados não sejam estatisticamente melhores, verifica-se um desempenho satisfatório, com cerca de 87,5% de aproveitamento[67]. Se esse desempenho já era alto no pré-teste, era de se esperar pouca mudança numa intervenção.

Ainda que os estudantes tenham apresentado um bom desempenho no pré-teste e pós-teste em relação a identificação da natureza das grandezas pode-se afirmar que esses testes não foram suficientes para analisar as noções iniciais e finais sobre o que é grandeza e a compreensão de suas relações.

O que se percebeu, ao verificar os conhecimentos prévios desses estudantes em entrevistas realizadas, é que os alunos não tinham compreensão de grandezas, mesmo aqueles que acertaram as sentenças no pré-teste que estavam relacionadas com grandezas direta e inversamente proporcionais.

Essa constatação inicial foi feita durante a primeira intervenção, por meio de sondagem sobre as concepções de multiplicação e divisão. Para isso, foi utilizada uma situação sugerida pelos estudantes: “Um caderno custa R$ 10,00. Se eu comprar 9 cadernos

[67] Dado obtido calculando a porcentagem de acertos do GE, em relação a pontuação máxima possível, no pós-teste - Apêndice N.

quanto eu vou gastar? ” (situação construída coletivamente pelos alunos). Durante resolução dessa situação, E08 realizou o produto dos números presentes na situação proposta (Protocolo 5).

Protocolo 5 – Resolução de situação: noção inicial de grandeza.

P: Por que o resultado dá 90?
E08: Porque dez vezes nove é igual a noventa! [Escreve no quadro: *10 . 9 =90*] Não, deixa eu fazer de outra forma! [A aluna faz utilizando o algoritmo da multiplicação para dois números].
E02: Mas não tinha que ter uma vírgula e dois zeros depois do dez? [Após questionamento de E02, E08 coloca o que E02 sugere]
E05: Mas é a mesma coisa! [E08 apaga, parecendo concordar com E05 e finaliza a operação]
P: Dá noventa o que? [Aponta para o resultado que a aluna encontrou]
E08: O resultado! O resultado de 10 reais vezes 9. O resultado é quanto ele vai gastar para comprar os cadernos.
P: Então, o que é esse 90? [Os alunos ficam em silêncio] Quando eu multiplico 10 reais por 9 cadernos, dá noventa o que? [Os alunos ficam em silêncio] 90 cadernos? 90 copos?
E12: Reais?
E08: Ah, é o dinheiro!
P: Como que eu multiplico 10 reais por 9 cadernos e dá 90 reais?

O Protocolo 5 deixa evidente que E08 extraiu da situação proposta uma relação de três termos, mesmo esta sendo quaternária, já que é uma proporção simples - multiplicação de correspondência um-para-muitos. Segundo Vergnaud (1983), esta composição (*10 . 9 =90*) está correta, apenas se o 10 e o 9 forem vistos como número. Se forem consideradas as grandezas envolvidas, matematicamente falando, 10 reais vezes 9 cadernos não podem resultar em 90 reais.

Vale destacar que, durante as discussões que se seguiram, os alunos não demonstraram preocupação em identificar as grandezas da situação, já que estavam acostumados a ficarem atentos apenas aos números da questão. Diante disso, eram sempre questionados pela pesquisadora e instigados a encontrarem as grandezas envolvidas na situação. Aproveitando a situação criada pela turma e respondida por E09 com o auxílio dos colegas, a pesquisadora sugeriu o uso de tabela para separar as grandezas envolvidas na situação (Protocolo 6).

Protocolo 6 – Identificando grandezas e representando em tabelas.

P: Daria certo usar uma tabela para separar as grandezas da situação? [Os estudantes ficam em silêncio] Como eu poderia fazer? [Os alunos discutem, mas não conseguem chegar a uma conclusão]
E12: Tem a quantidade de cadernos...
P: Sim!
E12: Tem também quanto custa.
P: O que vocês acham? As grandezas são essas mesmo ou alguém tem outra ideia?

O aluno E12 consegue identificar as grandezas e mostra que estas podem ficar em colunas diferentes da tabela. Durante a construção da tabela os demais estudantes começaram a entender a representação e a sugerir: "De um lado (refere-se à primeira coluna), a gente coloca os valores da quantidade de cadernos, no outro lado (faz referência à outra coluna), a gente coloca o preço dos cadernos" (Informação verbal de E05). Após colocar o valor unitário do caderno, a pesquisadora fez alguns questionamentos: "Se um caderno custa 10,00, dois cadernos custam quanto? E três cadernos? E cinco cadernos? E nove cadernos?" Os alunos prontamente responderam.

A representação das grandezas da situação em tabela ajudou os estudantes a perceberem os dois tipos de grandezas e suas relações. Possibilitou, também, verificar a relação quaternária presente na situação, já que, contrário do que aconteceu na estratégia relatada no Protocolo 5, agora era possível ver de forma explícita a relação unária: 1 caderno custa 10 reais. Diante disso, os alunos foram incentivados a sempre, antes de iniciar a resolução de uma situação, buscar identificar as grandezas envolvidas.

A identificação das grandezas da situação foi feita por todos os estudantes do GE no pós-teste, diferente do pré-teste, que nenhum dos estudantes explicitou as grandezas e, mesmo em entrevistas, não foram capazes de identificar as grandezas e suas relações. Contudo, essa competência acabou não sendo avaliada nos testes, pois sua importância só foi verificada durante a intervenção. No decorrer da intervenção foram, ainda, propostas situações que envolviam quantidades discretas e contínuas. Todavia, essa compreensão requisitava a ampliação do campo numérico, ou seja, trabalhar não apenas com o conjunto dos números inteiros, mas também dos racionais, como é o caso dos números decimais e fracionários.

A percepção das grandezas quando estas vinham relacionadas à fração não era de fácil entendimento para os alunos, devido às dificuldades inerentes ao próprio conceito de fração (NUNES; BRYANT, 1997).

Durante a intervenção, as noções de grandezas foram trabalhadas por meio de discussões no *WhatsApp*, produções no aplicativo *Cacoo*, simulações no *Geogebra* e recurso digital *Equilibrando proporções*, como será discutido na seção sobre as contribuições da tecnologia. A noção de grandeza direta e inversamente proporcional foi feita, apenas, em uma intervenção, com o recurso *Equilibrando proporções*, no entanto, apesar do potencial de representação desse recurso para compreender as relações direta e inversamente proporcionais, a pesquisadora optou em incentivar que os estudantes compreendessem a relação do operador funcional nas situações diretamente proporcionais. A seguir, discute-se o desempenho em representações.

5.3 Desempenho em representação tabular e gráfica

No pré e pós-testes foram analisados o desempenho em representação tabular e gráfica, por meio de três distintos aspectos: (I) interpretação de gráficos lineares; (II) identificação de padrões em tabela; e (III) construção do gráfico; detalhados na sequência.

5.3.1 Interpretação de gráficos lineares

O desempenho relacionado à interpretação de gráficos foi analisado a partir da 8ª questão do pré e pós-teste e 9ª. questão, item c (Apêndices C e D). Na 8ª questão, foram apresentados 2 gráficos (pré-teste) ou 1 gráfico (pós-teste), enquanto que a 9ª. questão dos dois testes solicitava a interpretação, a partir do gráfico construído anteriormente. Desta forma, a **pontuação máxima obtida nessa categoria seria de 4 pontos,** uma vez que foi atribuído 0 ponto para as questões que não estivessem corretas ou em branco; e 1 ponto para as questões corretas. Esses critérios foram adotados nas análises dos pré e pós-testes do grupo controle (GC) e experimental (GE) e deram origem aos dados do Apêndice P, utilizados nessa análise.

Como se pode constatar na Tabela 5, a média do grupo experimental subiu de 0,75 ponto (antes da intervenção) para 4 pontos (após a intervenção), mostrando que todas as crianças do GE conseguiram acertar esse tipo de situação. O mesmo não foi observado no GC que teve uma diminuição na média obtida.

Tabela 5 – Média e Desvio Padrão em Interpretação de gráficos lineares por grupo no pré-teste e no pós-teste.

Situações analisadas	Grupo Experimental (GE)		Grupo Controle (GC)	
	Média/Desvio padrão		Média/Desvio padrão	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Interpretação de gráficos lineares	0,75/±1,36	4/±0	1,4/±0,89	0,4/±0,63

Fonte: Elaboração própria (Ver Apêndice P).

As análises dos testes estatísticos, verificados no Quadro 11, mostram níveis de significância a favor da intervenção.

Quadro 11 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - Interpretação de gráficos lineares.

Comparação	Normalidade	Teste Usado	Nível de significância (p)
Controle x experimental (pré-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,097111
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	**0,000013**
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	**0,002218**
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Não	*Wilcoxon*	0,068704

Fonte: Elaboração própria - *Software Statistica:* versão 12.0

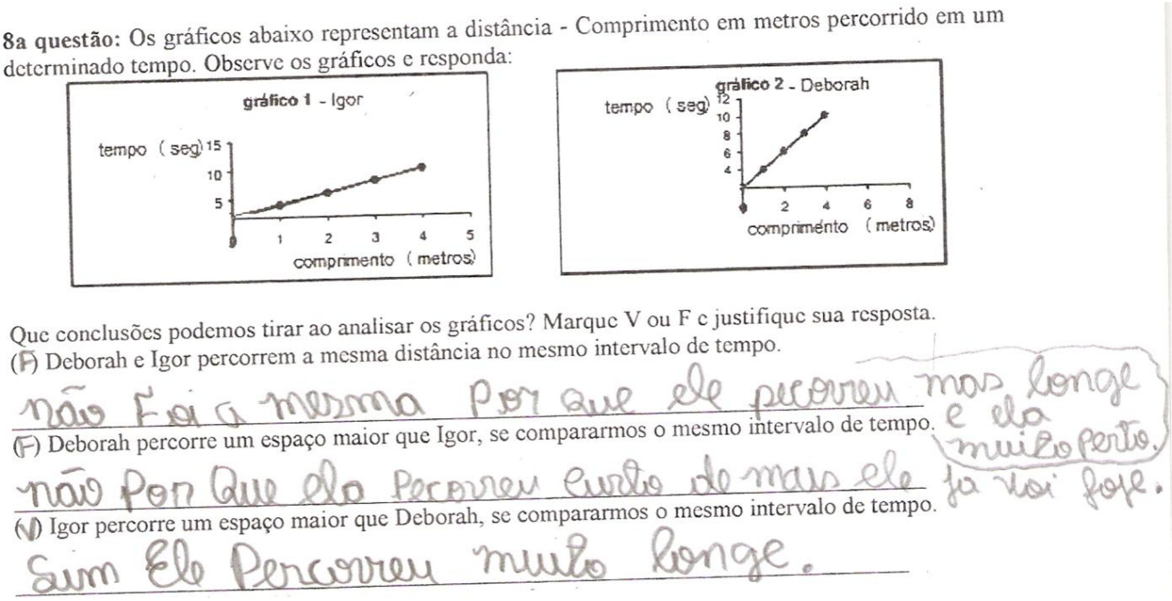
No Quadro 11, verifica-se que os grupos controle e experimental (pré-teste) não diferiam estatisticamente (p=0,097111) no início. Após a intervenção, a análise entre GC e GE (pós-teste), mostra um desempenho significativamente diferente entre esses grupos (p=0,000013). Já as comparações entre o pré-teste e o pós-teste, em cada grupo, foram realizadas por meio do teste *Wilcoxon*, para ambos os grupos. Desta forma, de acordo com o Quadro 11, os estudantes do grupo experimental tiveram um desempenho estatisticamente superior, se comparar seus pré e pós-teste (p=0,002218), sendo que essa melhoria no desempenho não foi constatada no grupo controle (p=0,068704).

Assim, os testes estatísticos mostraram-se favoráveis à intervenção, também em relação ao desempenho na interpretação de gráficos lineares. No pré-teste o índice de acerto do GE, considerando todas as questões de interpretação, foi de apenas 18,75%. Mesmo se considerar apenas a questão com maior número de acerto, no caso a 8ª, essa média fica em 22,22%.

Na 8ª questão do pré-teste (Apêndice C), eram apresentados dois gráficos mostrando os metros percorridos por Igor e Deborah em função do tempo, dados em segundos, em que a relação de metros por segundo, nos dois gráficos, era a mesma, apesar de a representação está sendo feita em escalas diferentes (Figura 61).

Na Figura 61, verifica-se que a partir das respostas dadas por E05, é possível inferir que este, não conseguiu perceber que a relação, nos dois gráficos era a mesma, embora que as escalas dos eixos fossem diferentes. Em entrevista individual feita com E05, o aluno falou que não entendia muito gráfico e que suas respostas foram baseadas na reta mais longa (gráfico 1 -Igor) ou na reta mais curta (Gráfico 2 - Deborah).

Figura 61 – Interpretação de gráfico - pré-teste.


8a questão: Os gráficos abaixo representam a distância - Comprimento em metros percorrido em um determinado tempo. Observe os gráficos e responda:

Que conclusões podemos tirar ao analisar os gráficos? Marque V ou F e justifique sua resposta.

(F) Deborah e Igor percorrem a mesma distância no mesmo intervalo de tempo.
não Foi a mesma Por que ele percorreu mas longe e ela muito perto.

(F) Deborah percorre um espaço maior que Igor, se compararmos o mesmo intervalo de tempo.
não Por Que ela Percorreu curto de mais ele ja foi loge.

(V) Igor percorre um espaço maior que Deborah, se compararmos o mesmo intervalo de tempo.
Sim Ele Percorreu muito longe.

Fonte: Pré-teste de E05.

Assim como a resposta de E05, os demais estudantes apresentaram concepções muito parecidas ou nem conseguiram determiná-las, pois não foram capazes de justificar seus argumentos e nem explicitar suas estratégias para interpretação do gráfico.

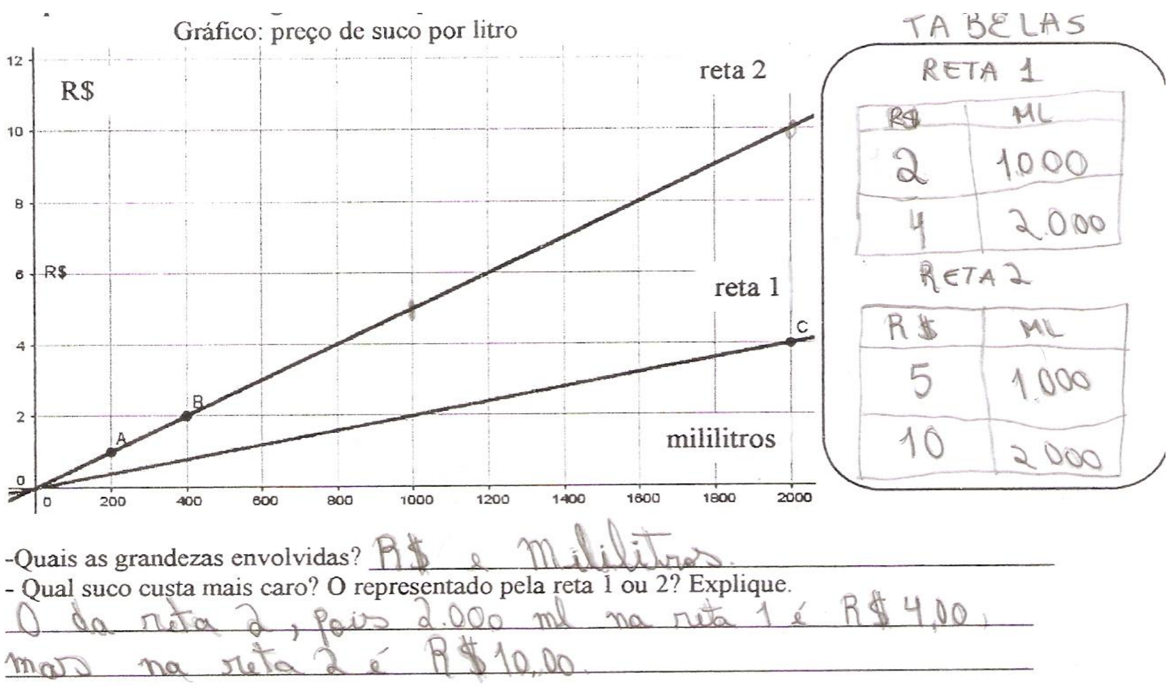
A intervenção possibilitou o desenvolvimento dessa competência, quer por meio da representação de gráficos pelo *Geogebra*, ou por discussões feitas em sala de aula e no grupo do *WhatsApp*, em relação à compreensão dos gráficos representados.

Dessa forma, no pós-teste (Apêndice D), foi verificado que nas atividades de interpretação de gráficos, todos os estudantes do GE conseguiram explicitar as grandezas envolvidas, estabelecer as relações funcionais e escalares para cada reta representada, e ainda, comparar o conjunto de dados representados em cada gráfico (Figura 62 e Figura 63).

Constata-se, portanto, além da ampliação das competências apresentadas no pré-teste, a compreensão da invariância e da covariação presente na situação representada no gráfico.

Na Figura 62, verifica-se a construção de tabelas para auxiliar a interpretação do gráfico. Percebe-se que E11 opta por verificar o valor a ser pago pelo suco, a partir de duas coordenadas comuns, do *eixo x*: 1000ml e 2000ml, e assim, inferir o que custa maior valor. Tendo empregado o seguinte raciocínio: *x=1.000ml→f(1000)=2* e *g(1000)=5→f(1000)<g(1000),* sendo *f(x) = reta 1 e g(x) = reta 2*. O mesmo foi feito para *f(2000)* e *g(2000).*

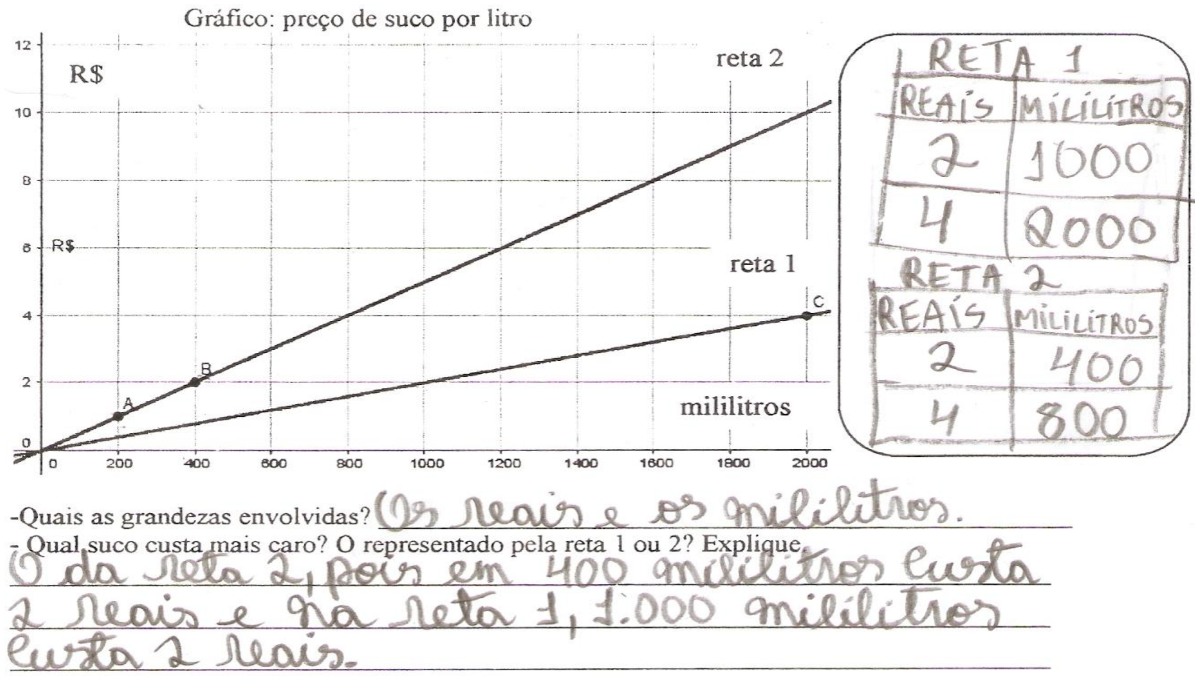
Figura 62 – Interpretação de gráfico - comparação por ml.



Fonte: Pós-teste de E11.

A Figura 63, também apresenta uma representação tabular como auxílio para interpretação da situação representada por gráfico. Verifica-se que E02 utiliza como parâmetro de comparações, coordenadas comuns do *eixo y*: R\$2,00 e R\$4,00. Desta forma, foi considerado: $f(x) = g(x) \rightarrow x_1 > x_2$, sendo *f(x) = reta 1 e g(x) = reta 2.*

Figura 63 – Interpretação de gráfico - comparação por reais.



Fonte: Pós-teste de E02.

As estratégias das Figura 62 e Figura 63, embora diferentes, mostram que os estudantes conseguem compreender e comparar dois conjuntos de dados distintos, além de compreenderem a representação gráfica, sendo capazes, também, de explicitar seus teoremas-em-ação. A seguir, analisa-se o desempenho na identificação de padrão de tabela.

5.3.2 Identificação de padrões em tabela

O desempenho relacionado à identificação das relações de uma tabela, ou seja, o estabelecimento de padrões, foi verificado por meio da análise da 9$^{a.}$ questão, item a (Apêndices C e D). Foi usado o seguinte critério: 0 ponto, para questões respondidas de forma incorreta ou que estivessem em branco; 1 ponto para as que estivessem preenchidas de forma correta. Desse modo, a **pontuação máxima adquirida nessa categoria foi de 1 ponto**. Esses critérios foram adotados nas análises dos pré e pós-testes do GC e GE, deram origem aos dados do Apêndice Q, utilizados nessa análise.

Na Tabela 6, têm-se os dados referentes à média de acerto e desvios-padrão referentes à identificação de padrão de tabela.

Tabela 6 – Média e Desvio Padrão em Identificação de padrão de tabela por grupo no pré-teste e no pós-teste.

Situações analisadas	Grupo Experimental (GE)		Grupo Controle (GC)	
	Média/Desvio padrão		Média/Desvio padrão	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Interpretação de padrão de tabela	0,42/±0,51	1/±0	0,47/±0,52	0,2/±0,41

Fonte: Elaboração própria (Ver Apêndice Q).

Constata-se, nessa tabela, que os GE e GC tiveram desempenhos bem próximos antes da intervenção e que após, a intervenção, o desempenho do grupo experimental passou a ser superior ao do grupo controle, com média chegando a atingir pontuação máxima. Nota-se, ainda, que o grupo controle teve uma diminuição do rendimento, se comparar o pré e o pós-teste, médias 0,47 e 0,2 ponto, respectivamente.

Observa-se que os dois testes, pré e pós (Apêndices C e D), tiveram nível de dificuldade semelhante, com diferenças apenas na disposição da tabela, que primeiro era disposta na horizontal e depois disposta na vertical.

As análises dos testes estatísticos mostram que o grupo controle e experimental não diferiam significativamente, mas que, depois da intervenção, essa diferença passou a ser significativa (p=0,000485), como pode ser confirmado no Quadro 12.

Quadro 12 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - Interpretação de padrão de tabela.

Comparação	Normalidade	Teste Usado	Nível de significância (p)
Controle x experimental (pré-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,845252
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	**0,000485**
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	**0,017961**
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Não	*Wilcoxon*	0,142214

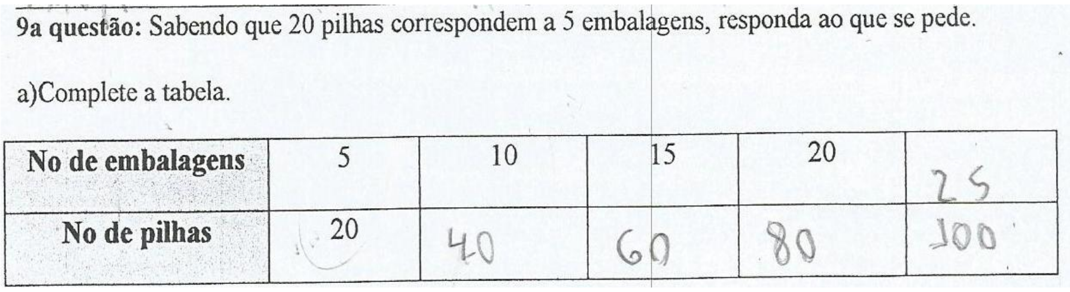
Fonte: Elaboração própria (*Software Statistica:* versão 12.0).

Tem-se ainda, no Quadro 12, que os dados referentes ao pré e pós-teste dos dois grupos foram analisados pelo teste de *Wilcoxon*, já que a distribuição dos dados não era normal. Os resultados mostram que o pré e pós-teste do GE tinham níveis de significância menor que 0,05 (p=0,017961), indicando que houve uma melhora significativa no desempenho. Já esse desempenho não foi verificado no grupo controle, pois seus níveis de significância deram superiores a 0,05.

As tabelas são formas de representação que podem desempenhar um importante papel nas generalizações, pois, permitem o registro sistemático de diversos resultados e a busca de padrões desse conjunto de dados (SCHILIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007).

Ao se analisar qualitativamente os testes do GE, averígua-se que, no pré-teste (Apêndice C), mesmo os estudantes que acertaram o preenchimento da tabela, não foram capazes de explicitar as relações por meio do raciocínio multiplicativo (Figura 64).

Figura 64 – Identificando padrões em tabela - pré-teste.



9a questão: Sabendo que 20 pilhas correspondem a 5 embalagens, responda ao que se pede.

a)Complete a tabela.

No de embalagens	5	10	15	20	25
No de pilhas	20	40	60	80	100

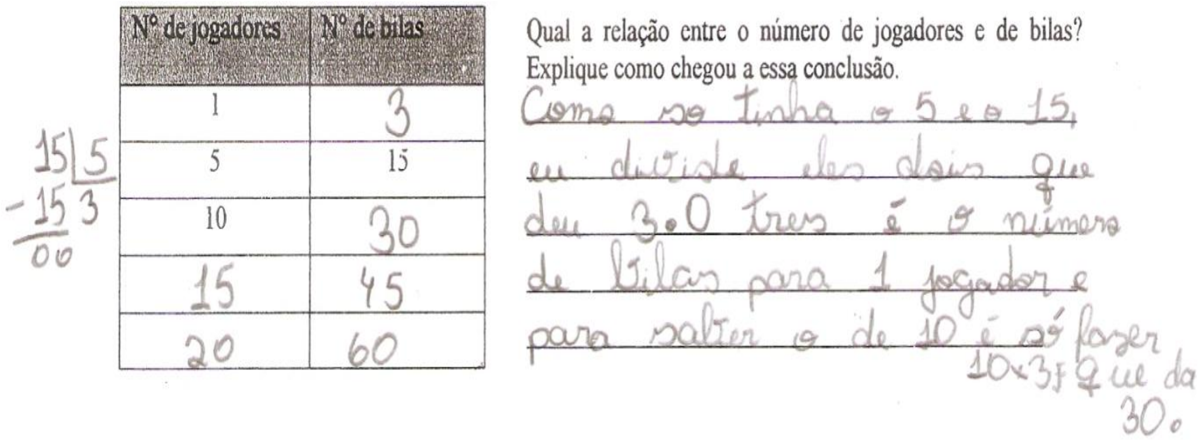
Fonte: Pré-teste de E12.

Isso fica evidente quando, em entrevistas individuais, E12 justifica o preenchimento da tabela da Figura 64, por meio de padrões aditivos: "[...] aqui é de 5 em 5 e nesse das pilhas é de 20 em 20" (informação verbal de E12).

Para Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), o estabelecimento de padrões, mesmo que aditivos, são importantes para que os estudantes possam começar a pensar e a fazer generalizações sobre dois conjuntos de valores interligados, nesse caso, entre a quantidade de pilhas por embalagem. O pré-teste revelou que 41,67% das crianças do GE, conseguiam estabelecer padrões aditivos no preenchimento de tabelas. Após a intervenção, verificou-se que 100% dos estudantes eram capazes de estabelecer padrões, utilizando para isso, raciocínio aditivo.

A compreensão do padrão de tabelas se deu, principalmente, pelo operador funcional, com 11 estudantes indicando a relação funcional, como exemplificado na Figura 65 e Figura 66.

Figura 65 – Padrão de tabela - operador funcional implícito.



Nº de jogadores	Nº de bilas
1	3
5	15
10	30
15	45
20	60

15|5
-15 3
00

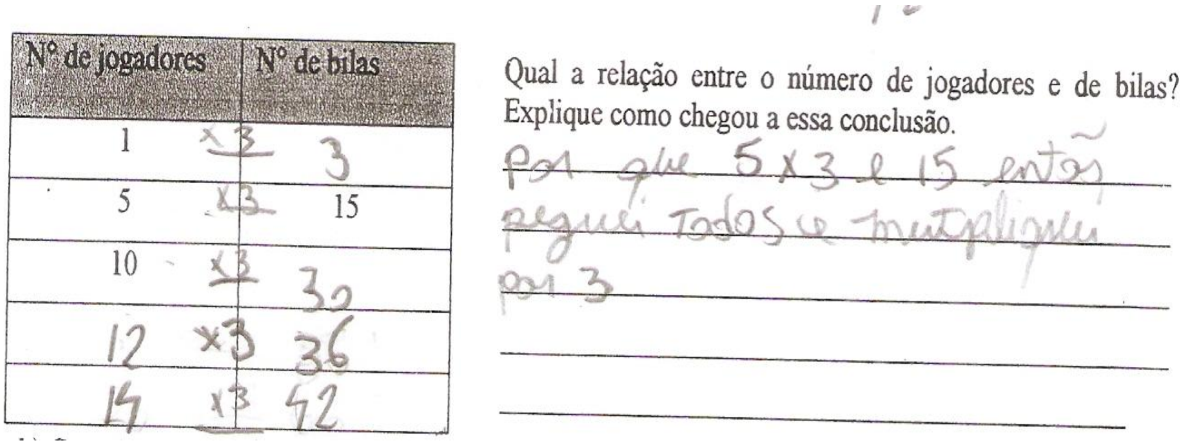
Qual a relação entre o número de jogadores e de bilas? Explique como chegou a essa conclusão.

Como so tinha o 5 e o 15, eu dividi eles dois que deu 3. O tres é o número de bilas para 1 jogador e para saber o de 10 é só fazer 10x3 que da 30.

Fonte: Pós-teste de E07.

Na Figura 65, E07 não explicita o operador funcional da tabela, mas, em sua explicação, deixa claro que percebeu a relação de 3 bilas por jogador, tendo encontrado essa relação fazendo uma operação de divisão. Na Figura 66, E10 deixa explícito o operador funcional na tabela e em sua explicação deixa transparecer que encontrou a relação por meio de uma multiplicação.

Figura 66 – Padrão de tabela - operador funcional explícito.



Nº de jogadores	Nº de bilas
1 x3	3
5 x3	15
10 x3	30
12 x3	36
14 x3	42

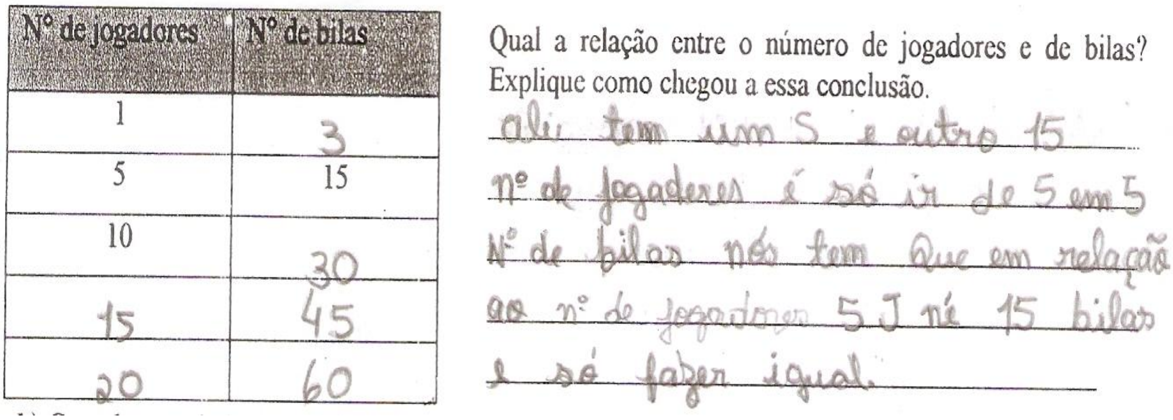
Qual a relação entre o número de jogadores e de bilas? Explique como chegou a essa conclusão.

Por que 5x3 é 15 então peguei todos e multipliquei por 3

Fonte: Pós-teste de E10.

Tanto na Figura 65, como na Figura 66, os estudantes demonstram compreender como essas relações funcionais estabelecidas influenciam no conjunto de dados que compõem cada grandeza envolvida na tabela, atestando, portanto, o entendimento da covariação. Essa percepção também pode ser observada na estratégia aditiva da Figura 67.

Figura 67 – Padrão de tabela - estratégia aditiva.



Nº de jogadores	Nº de bilas
1	3
5	15
10	30
15	45
20	60

Qual a relação entre o número de jogadores e de bilas? Explique como chegou a essa conclusão.

ali tem um 5 e outro 15
nº de jogadores é só ir de 5 em 5
Nº de bilas nós tem Que em relação
ao nº de jogadores 5 J né 15 bilas
e só fazer igual.

Fonte: Pós-teste de E01.

Na Figura 67 constata-se que, para o estabelecimento dos padrões, E01 buscou encontrar o padrão presente nas linhas e colunas da tabela. Sobre o estabelecimento de padrões em tabelas, Carraher, Schliemann e Brizuela (2000) explicam que é mais comum os estudantes utilizarem e perceberem a relação aditiva entre as linhas do que as relações funcionais entre as colunas, pois, fazer os alunos pensarem sobre a relação invariante entre as grandezas, requer manobras didáticas específicas.

Diante disso, verifica-se, mais uma vez, a efetividade da intervenção, ao possibilitar que 100% dos estudantes do GE, identificassem o padrão tabular. Desse total, averiguou-se, ainda, que 91,67% desses alunos perceberam e explicitaram as relações funcionais dos dados tabulares. A compreensão das relações funcionais e escalares foram também requisitados na interpretação e construção dos gráficos lineares, o que, para Carraher, Schliemann e Brizuela (2000), contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Na sequência, mostra-se o desempenho em construção de gráficos lineares.

5.3.3 Construção de gráficos lineares

O desempenho relacionado à construção de gráficos lineares foi verificado por meio da análise da 9ª questão, item b (Apêndices C e D). Foi usado o seguinte critério: 0 ponto, para questões respondidas de forma incorreta ou que estivessem em branco; 1 ponto para as que estivessem preenchidas de forma correta. Assim, a **pontuação máxima adquirida nessa categoria foi de 1 ponto**. Esses critérios foram adotados nas análises dos pré e pós-testes do grupo controle (GC) e experimental (GE) e deram origem aos dados do Apêndice R, utilizados nessa análise.

A Tabela 7 mostra as médias e os desvios-padrão relacionados ao desempenho de construção de gráficos lineares. Verifica-se que ambos os grupos, controle e experimental, não possuíam nenhuma competência em relação à construção de gráficos e que esta só foi desenvolvida pelo grupo experimental, depois da intervenção, conforme médias apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 – Média e Desvio Padrão em Construção de gráficos lineares por grupo no pré-teste e no pós-teste.

Situações analisadas	Grupo Experimental (GE)		Grupo Controle (GC)	
	Média/Desvio padrão		Média/Desvio padrão	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Construção de gráficos lineares	0/±0	0,75 /±0,45	0/±0	0/±0

Fonte: Elaboração própria (Ver Apêndice R).

De acordo com o
Quadro 13, verifica-se que não havia diferenças entre o grupo controle e experimental, antes da intervenção, mas que, após a intervenção, a diferença entre esses dois grupos passou a ser estatisticamente significativa (p= 0,001306), logo, com desempenhos diferentes. As análises do pré e pós-teste desses dois grupos mostram que o GE teve uma melhora significativa em relação ao desempenho apresentado antes da intervenção.

Quadro 13 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - Construção de gráficos lineares.

Comparação	Normalidade	Teste Usado	Nível de significância (p)
Controle x experimental (pré-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	1
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	**0,001306**
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	**0,007686**
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Não	*Wilcoxon*	1

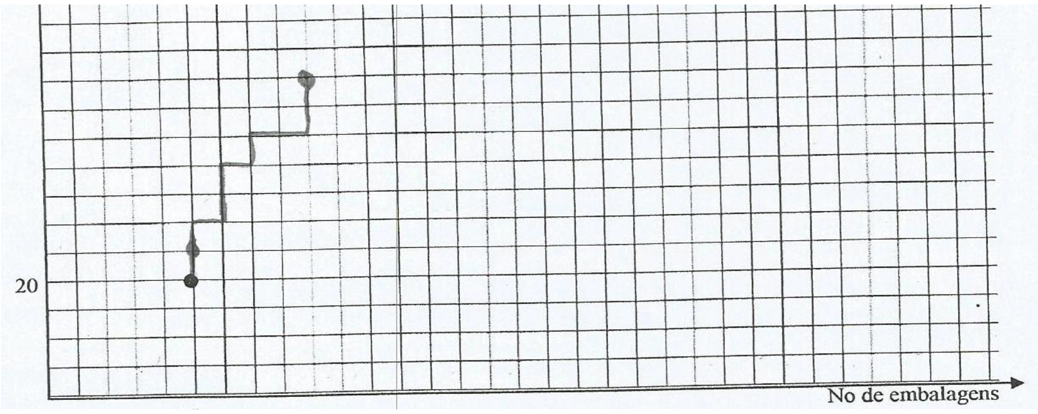
Fonte: Elaboração própria (*Software Statistica:* versão 12.0).

Portanto, os resultados mostram que, em relação à construção de gráficos lineares, os estudantes que participaram da intervenção passaram a apresentar maior desempenho. Assim como apresentado nas análises estatísticas, nenhum dos estudantes do GE e nem do GC foram capazes de construir o gráfico corretamente no pré-teste.

Chamou atenção nas análises a grande quantidade de testes em branco nessa questão (58,33%). Mesmo os pré-testes que continham algum esboço, esses demonstravam que os alunos não sabiam como era a representação do gráfico. Durante a aplicação do pré-teste, muitos alunos perguntaram como deveria ser esse gráfico, contudo, as crianças foram instruídas a fazerem de acordo como o que elas conheciam.

Na Figura 68, tem-se a tentativa de E01 de representar a quantidade de pilhas por embalagens. Para a construção desse gráfico, foi fornecido parte das informações em uma tabela. Foi colocado na malha quadriculada a localização de um dos pontos do gráfico, (5;20), que corresponde a 20 pilhas em 5 embalagens. Como pode ser verificado na Figura 68, E01 demonstrou não conhecer esse tipo de representação, fato esse confirmado em entrevista individual. O estudante não soube explicar a representação feita, porém, no intuito de esclarecer a construção, a pesquisadora fez questionamentos (Protocolo 7).

Figura 68 – Construção de gráficos - desconhecimento da representação.



Fonte: Pré-teste de E01.

Protocolo 7 – Explicação sobre a representação..

P: O que são esses pontos que você marcou? [E01 fica em silêncio]. Por que têm esses pontos?
E01: Os pontos? Ah, já tinha um ponto, então achei que tinha que colocar! Não é?
P: E essas linhas, o que significa?
E01: É pra ligar os pontos.

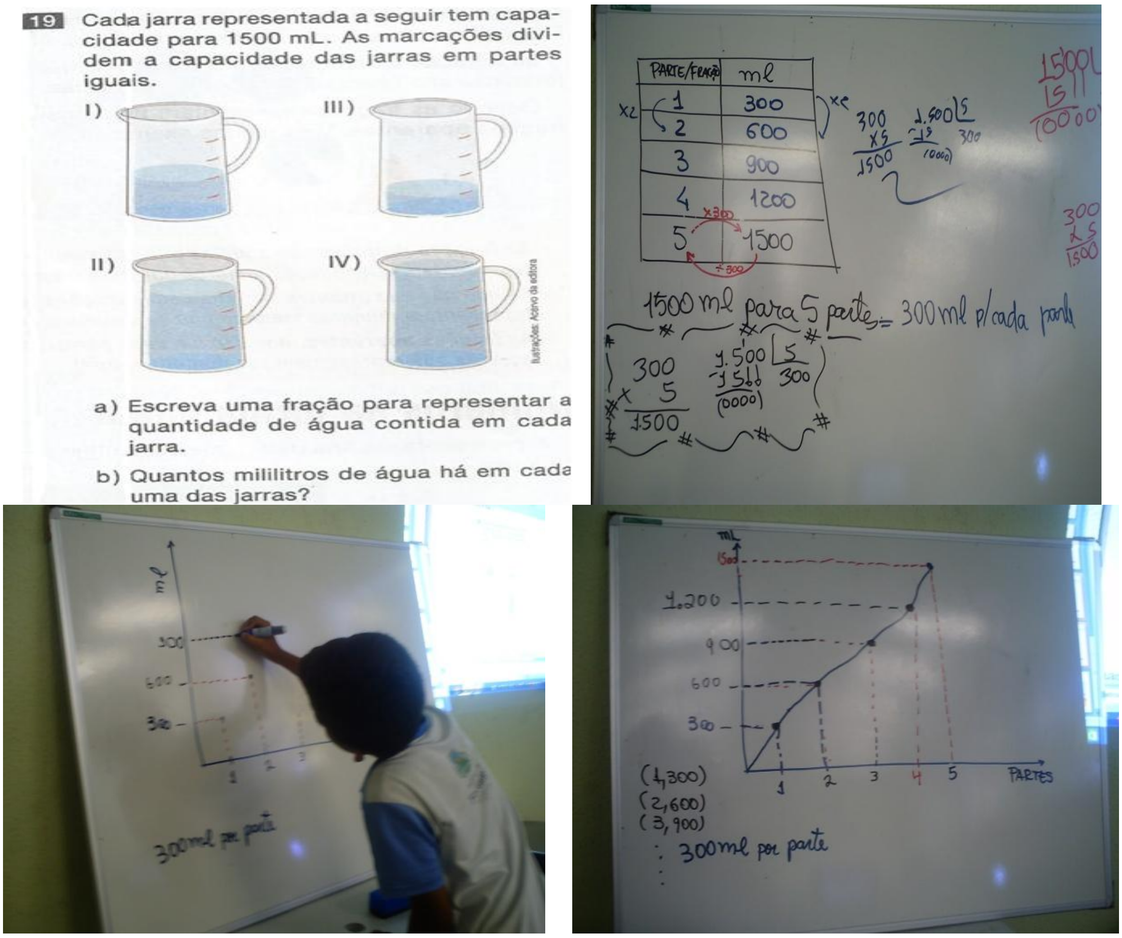
Em relação à representação das informações em gráficos, é importante observar que, muitas vezes, as crianças fazem representações de gráficos diferente das convenções adotadas (CASTRO, 2012). Tem-se um exemplo dessa falta de conhecimento da representação na Figura 68.

Em atividades de construção, destaca-se, além da importância da compreensão dos princípios lógicos, a necessidade de, também, conhecer o conjunto de regras matemáticas e convenções que são necessárias para fazer determinadas representações. Para Nunes e Bryant (1997, p. 25):

> As regras matemáticas obedecem às regras lógicas, mas elas vão além disso. Há também um conjunto de convenções que foram projetadas pelos nossos ancestrais e transmitidas de geração a geração na cultura em que a criança por acaso está inserida. Essas convenções são necessárias para o domínio de técnicas matemáticas.

Depois do pré-teste, no início da intervenção, constatou-se que, além de conhecer as representações, os estudantes precisavam compreender as relações entre as quantidades representadas e relacionadas por meio do gráfico, como pode ser verificado na resolução de uma das situações do livro didático (Figura 69 e Protocolo 8).

Figura 69 – Resolução coletiva de situação do livro didático envolvendo fração: reconhecimento de grandeza e múltiplas representações.



Fonte: Souza (2012, p. 131, q19) e intervenção

A questão do livro apresenta uma jarra de água dividida em 5 partes iguais, perguntando a fração correspondente a cada parte e seus respectivos *ml* (mililitros). Entende-se que a jarra seja uma grandeza discreta, mas, no caso apresentado, a jarra é graduada e essa graduação corresponde a uma quantidade de água, medida em mililitros.

A pesquisadora chama a atenção dos estudantes a perceberem essas partes da jarra. Explica que a jarra toda tem 1500ml, questiona a fração correspondente a cada parte da jarra. Facilmente as crianças apontam que tem duas grandezas envolvidas: a jarra, que está dividida em 5 partes, e mililitros, que se refere à quantidade de água. Conseguem indicar a fração de cada parte e estabelecer que são 1500ml por jarra (o todo).

Porém, inicialmente, as crianças têm dificuldade de estabelecer e entender a relação entre as partes de cada jarra, até que uma das crianças tem a ideia de dividir 1500 ml por 5 (Protocolo 8).

Protocolo 8 – Descobrindo a relação.

P: O que significa esse 300?
E02: O valor de 1500 dividido por 5.
E03: 1500 dividido por 5 dá 300 e a prova real é 5 vezes 300 que dá 1500. [Faz no quadro para mostrar - ver figura 46]
P: Mas o que é esse 300?
E05: É o resultado!
E08: Que 300ml é cada parte!
P: E 300ml é cada parte? É isso que significa?
E02: São 5 partes!
E12: Cada parte tem 300.
E02: Ao todo tem 1500 ml. Se eu botar 300 em cada parte dá 1500.
E12: Os 300 é a quantidade igual de cada parte! A quantidade é a mesma que tem em cada parte.
P: E em duas partes?
Todos respondem: 600ml.
E12: Está fácil!
P: Por que agora está fácil?
E02: Porque é só fazer de 300 em 300.
E12: É só fazer 300 vezes 2.
P: E aqui? [Aponta para 3 partes]
E12: 300 . 3=900.

O Protocolo 8 mostra a estratégia utilizada pelos estudantes para encontrar a relação referente a cada parte da jarra. De posse dessa relação, os estudantes conseguem inferir o quanto corresponde cada parte, fazendo a representação por tabela. Surge a ideia de fazer um gráfico para representar a situação, contudo, os gráficos construídos, até então, eram figurativos, representavam as quantidades por figuras, por meio do aplicativo online *Cacoo*.

Apenas a aluna E02 mostrou ter noção de construção de gráficos menos figurativos, isto é, lineares, até aquele momento, auxiliando seus colegas na construção. Os estudantes buscaram fazer a distribuição nos eixos de forma proporcional, já que E02 explicou que tem que ser mais ou menos a mesma distância dos outros espaços. Mesmo assim, as linhas do gráfico, que é linear, não ficaram muito alinhadas (Figura 69). Com o gráfico construído, foram feitos alguns questionamentos (Protocolo 9).

Protocolo 9 – Compreensão do gráfico e identificação dos pontos.

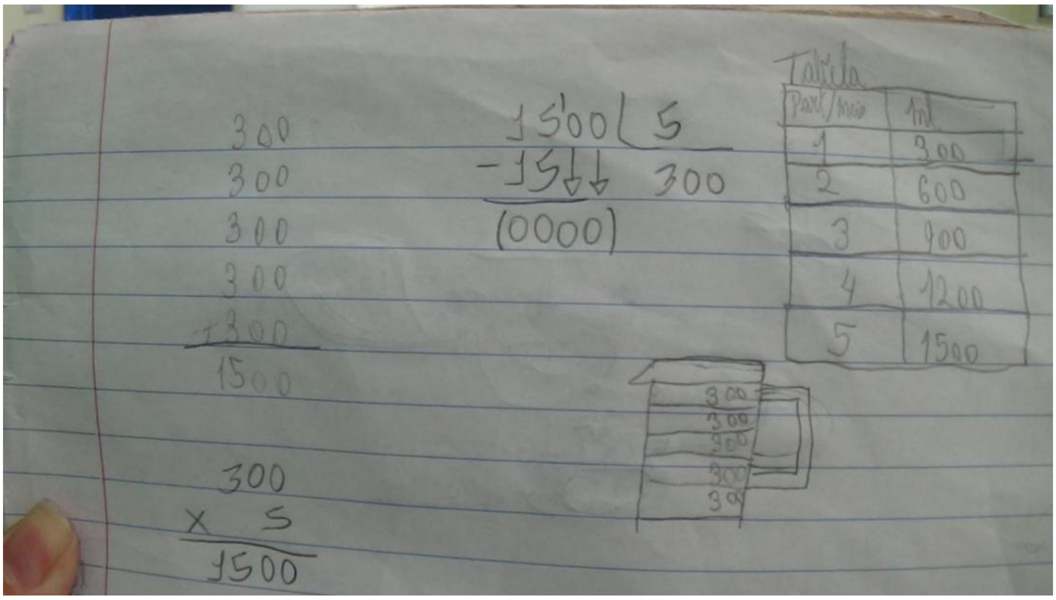
P: Por que dá uma reta? Apesar de não estar muito reto? [risos]
[As crianças argumentam que alguns setores ficaram retos. A pesquisadora vai no gráfico e ressalta os pontos e pergunta se alguém quer explicar]
E02: É uma linha porque sempre vai continuar! [Aponta para o gráfico e mostra que ele tem continuidade]
P: Mas o que representa essa reta?
E02: Embaixo é 300.
P: Não entendi.
E02: Vai continuar.
P: Vai continuar sim. Vamos ver aqui. Esse primeiro ponto é formado por quem?
Crianças: Por 1 parte da jarra e 300 ml.[E02 escreve o par ordenado (1;300)]
Pesquisadora: Então, o segundo ponto?
E08: 2 partes da jarra e 600ml. [As crianças vão dizendo para os demais pontos]
P: Vocês percebem que há uma relação de proporcionalidade entre cada uma dessas partes?
[As crianças ficam em silêncio]
P: Se aqui aumenta 1 parte, aqui aumenta 300, ou seja, cada uma parte vale 300ml. Se vocês perceberem essa relação, a gente consegue fazer qualquer coisa!

Importante observar a concepção de E02 de que o gráfico linear tem continuidade e é infinito. Também se percebe que a reta é formada por pontos que relacionam as duas grandezas: mililitros e parte da jarra.

Constata-se ainda que a relação mililitros por parte, origina o par ordenado (1;300) que representa um ponto (x;y) no plano cartesiano. A verificação desses pontos é importante, porque é a partir da ideia de par ordenado e da relação formada por esses pares que foi introduzido o uso do *software Geogebra*, a ser discutido no capítulo 6. Foi ressaltado que o gráfico linear, utilizado para representar a situação discutida, é uma das formas de representar a situação.

Diante disso, surgiu outro tipo de representação gráfica da situação, como pode ser visto na Figura 70.

Figura 70 – Estratégias e representações para a questão do livro didático.



Fonte: Intervenção - atividade E09

A Figura 70 mostra as diferentes estratégias utilizadas por E09 para resolver a situação proposta pelo livro didático. Além do algoritmo da adição, da multiplicação e da divisão, também utiliza a tabela e uma imagem que faz lembrar a jarra mencionada na questão.

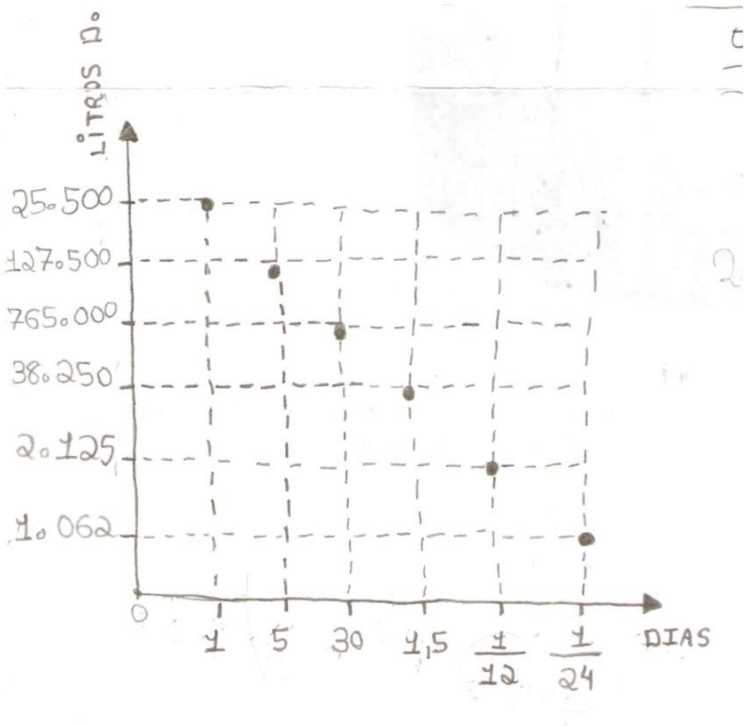
Verifica-se a mobilização de diferentes invariantes que incluem esquemas aditivos e multiplicativos e as representações são utilizadas para dar sentido a esses invariantes (VERGNAUD, 1990).

No caso, E09 explica que a compreensão dessa situação e das relações necessárias para a solução da situação foram mais fáceis de entender com a tabela e o desenho da jarra.

Outro obstáculo para a construção do gráfico pelos estudantes estava relacionado com o campo numérico, isto é, quando tinha que ser representado frações e números decimais (Figura 71).

Figura 71 – Tabela e Gráfico construído para representar o Apêndice I.

dia	Litros desperdiçados
1	25.500
5	127.000
30	765.000
1,5	38.250
1/2	12.750
1/12	2.125
1/24	1.062



Fonte: Intervenção - atividade em grupo (E03, E05, E07 e E08)

De acordo com atividade do Apêndice I, a tabela e o gráfico da Figura 71 representam a quantidade de litros desperdiçados por dia na casa de Silvania, em uma torneira que tem abertura de 9 mm. Verificam-se dois problemas nessa construção: o primeiro está relacionado à representação dos dias na reta numérica (eixo x), em que 1,5; 1/12 e 1/24 aparecem após 30 dias, na realidade deveria ser 1/24; 1/12; 1,5 e 30; o segundo é que não foi considerada a proporcionalidade, já que a distância entre 1 e 5, é praticamente a mesma entre 5 e 30, sendo o mesmo fato observado no eixo dos litros (eixo y). Ao entrevistar um dos integrantes do grupo, E08 explicou que achava que tinha que representar os dias na mesma ordem que aparecia na tabela. Nota-se que o grupo também representa os litros desperdiçados (eixo y), seguindo o mesmo critério dado ao eixo x. Isso mostra que os estudantes não entendiam que o plano cartesiano[68] é formado por retas e que as coordenadas ali representadas precisam estar localizadas de acordo com sua posição em uma reta numérica. Também é possível inferir que E08 não conseguiu identificar o invariante, no caso, o operador funcional que relacionava todos os dados da tabela e consequentemente do gráfico.

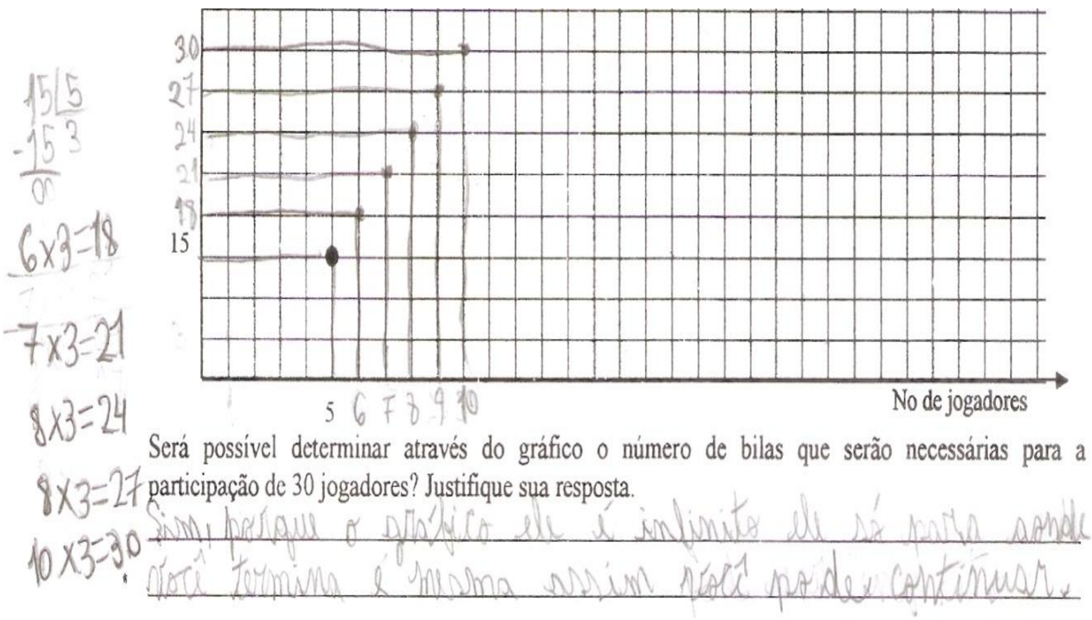
Ainda que os estudantes tenham apresentado dificuldades na construção e na compreensão dos gráficos, estes e as tabelas seriam as formas mais apropriadas de representar

[68] Foi criado por Descartes a partir da introdução de formas euclidianas dentro de um plano bidimensional determinado por dois eixos perpendiculares entre si.

uma relação entre duas grandezas. Como as proporções simples envolvem a relação entre dois conjuntos, não é adequado utilizar apenas a reta numérica, comum em situações aditivas. Diante disso, Nunes *et al.* (2009) recomendam o uso simultâneo de tabelas e gráficos, desde os anos iniciais, para a resolução de situações multiplicativas. Após intervenção, verificou-se que além do desempenho ter melhorado significativamente, as competências relacionadas à construção de gráficos lineares foram ampliadas, mesmo nos testes que não pontuaram no desempenho (25%).

Na Figura 72, visualiza-se a tentativa de uma das crianças em construir o gráfico linear, contudo, além de não ter feito a representação da reta, apenas dos pontos, estes não foram distribuídos proporcionalmente no *eixo y*. Esse problema esteve presente nos 3 testes do GE que apresentaram erro, isto é, que não pontuaram no desempenho.

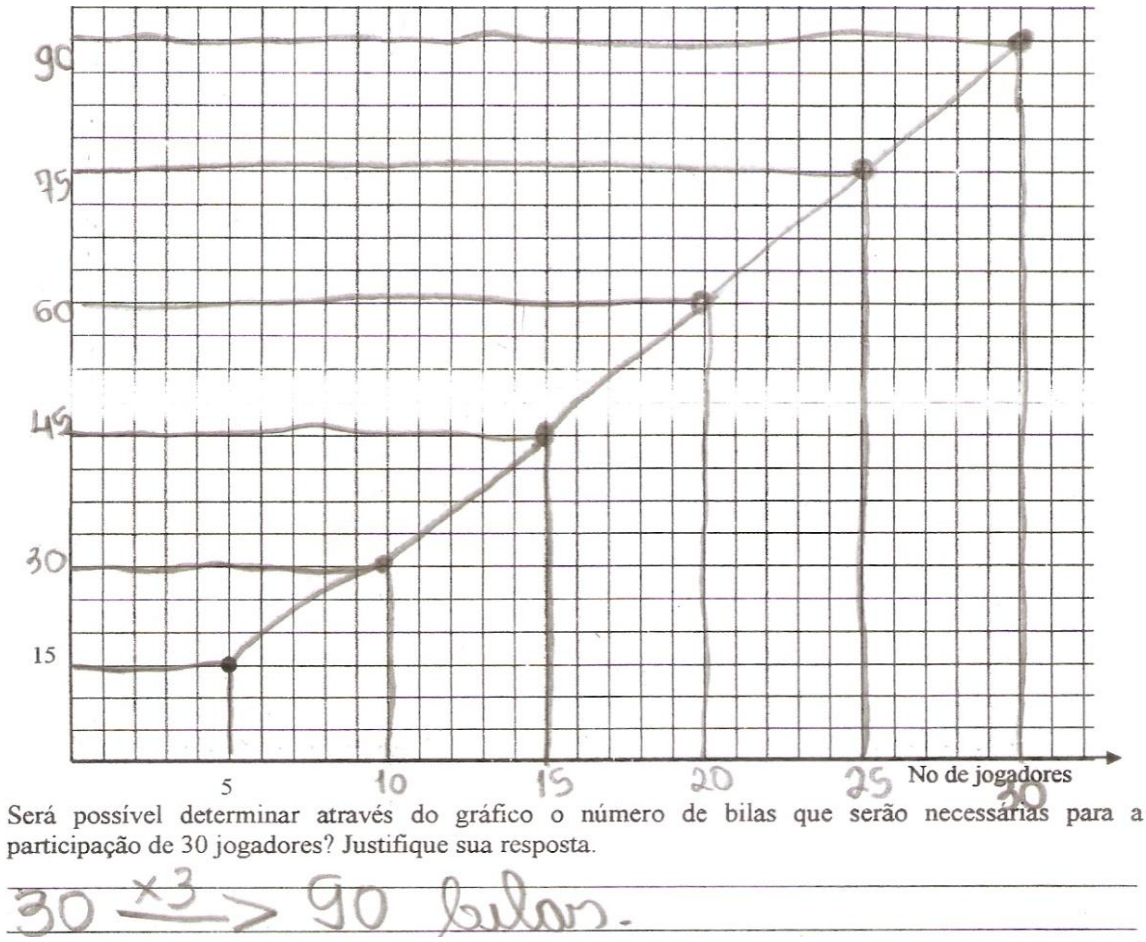
Figura 72 – Construção de gráfico - eixos desproporcionais.



Fonte: Pós-teste de E09.

Os demais estudantes conseguiram estabelecer, a partir da relação funcional explicitada, 3 bilas por jogador, outros pontos que fazem parte da reta, demonstrando compreender a covariação presente na situação. Além disso, conseguem determinar as relações proporcionais necessárias em cada eixo do gráfico, como na Figura 73.

Figura 73 – Construção de gráfico.



Fonte: Pós-teste de E05.

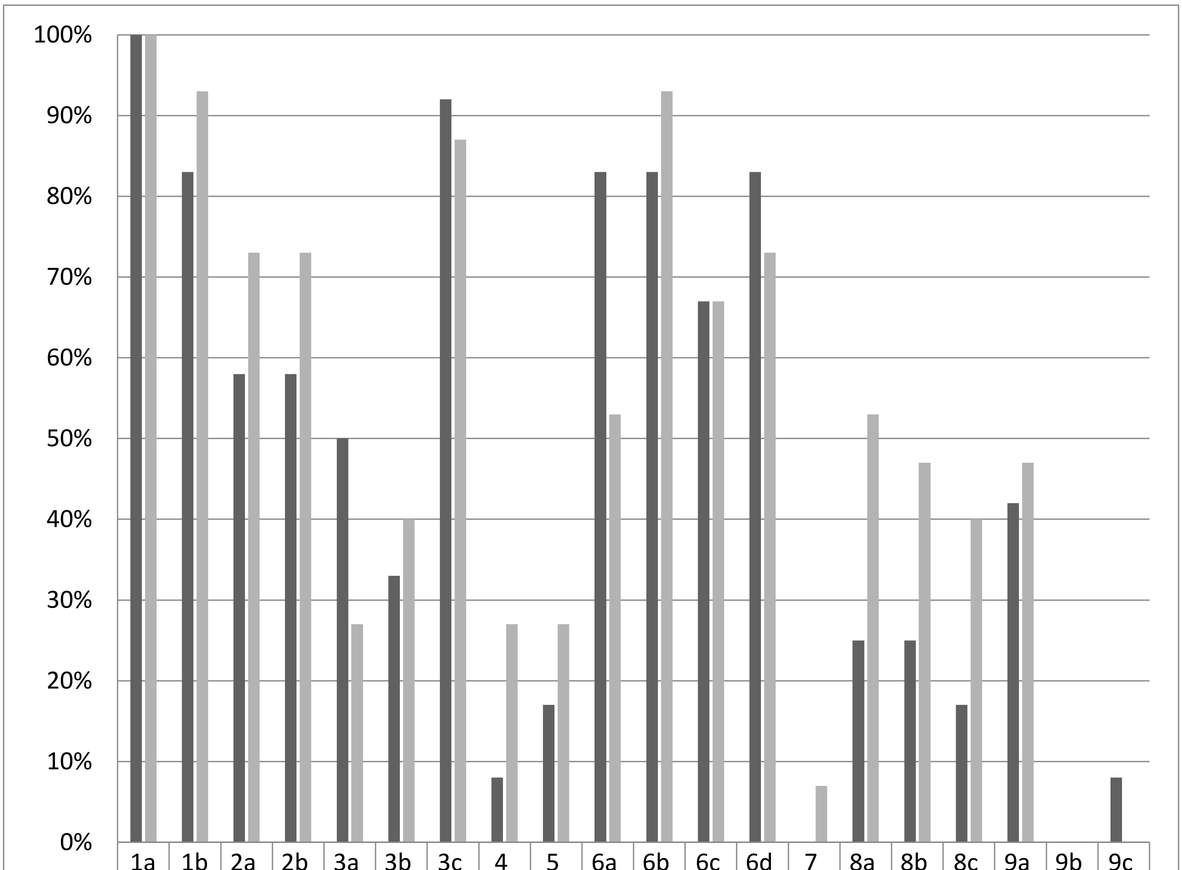
Diante das discussões trazidas, constata-se uma evidente evolução do GE após intervenção, pois foram capazes de estabelecer as relações funcionais e escalares para conseguir representar a reta, o que demonstra um maior domínio do conceito de covariação. A seguir, o desempenho antes e após intervenção será analisado de forma geral.

5.4 Desempenho geral

A verificação do desempenho geral dessa intervenção, no caso, 4ª categoria, considerou todos os aspectos anteriormente analisados de forma individual: (1) desempenho em situações de proporções; (2) desempenho na compreensão de grandezas direta e inversamente proporcionais; (3) desempenho em representação tabular e gráfica. Para isso, foram utilizados os mesmos critérios anteriormente estabelecidos: 0 ponto, para questões respondidas de forma incorreta ou que estivessem em branco; 1 ponto para as que estivessem preenchidas de forma correta. Assim, a **pontuação máxima adquirida considera todas as questões do teste, totalizando 20 pontos.** Essa análise considerou os dados das tabelas que estão no Apêndice L a R para a construção do Gráfico 2 e Gráfico 3.

O Gráfico 2 mostra o comparativo entre as médias obtidas no pré-teste entre o grupo experimental (GE) e controle (GC). No geral, é possível ver que o desempenho no pré-teste dos dois grupos é muito próximo, fato esse confirmado pelo Quadro 14, que mostra que não há diferenças significativas entre os dois grupos (GE e GC).

Gráfico 2 – Médias por questão - Pré-teste - Grupo experimental e controle.

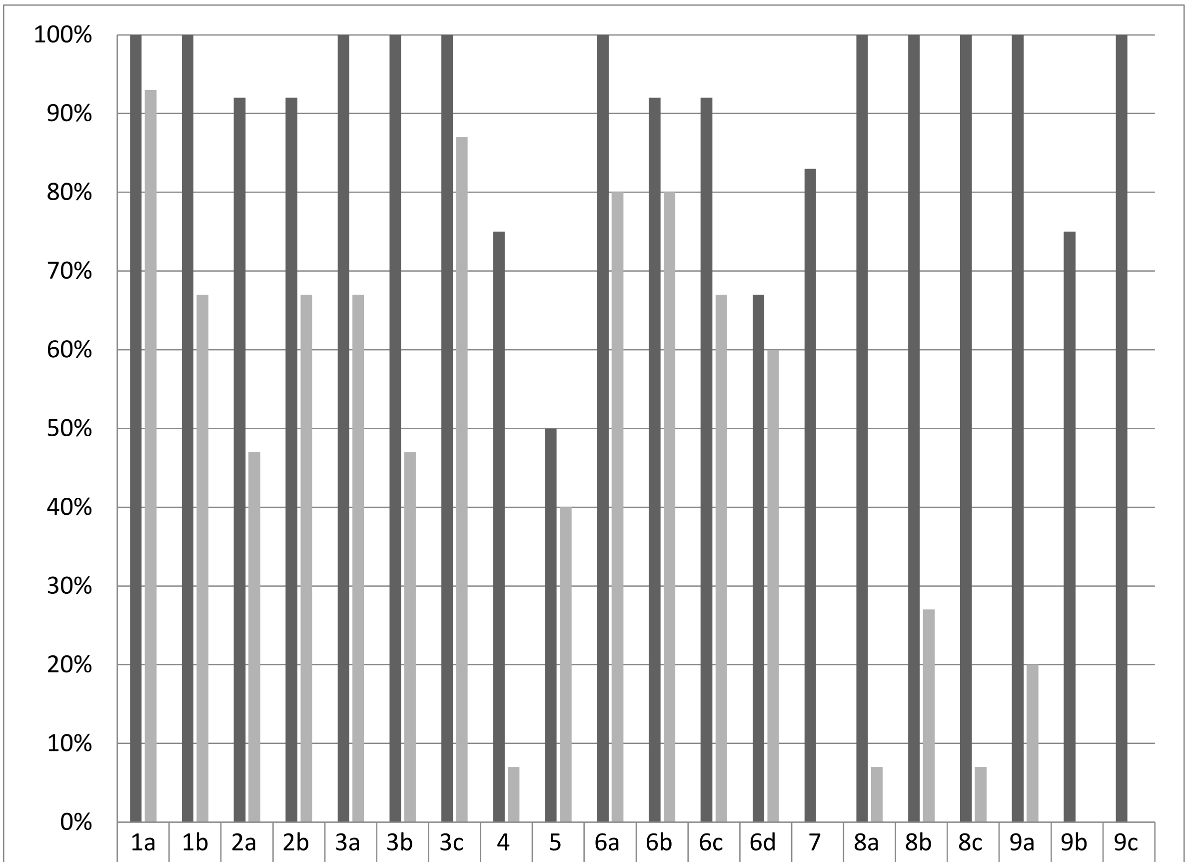


	1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4	5	6a	6b	6c	6d	7	8a	8b	8c	9a	9b	9c
GE	1,0	0,8	0,5	0,5	0,5	0,3	0,9	0,0	0,1	0,8	0,8	0,6	0,8	0,0	0,2	0,2	0,1	0,4	0,0	0,0
GC	1,0	0,9	0,7	0,7	0,2	0,4	0,8	0,2	0,2	0,5	0,9	0,6	0,7	0,0	0,5	0,4	0,4	0,4	0,0	0,0

Fonte: Elaboração própria.

O Gráfico 3 faz o mesmo comparativo, só que, após a intervenção, com os resultados do pós-teste. Pode-se observar que a menor pontuação obtida por GE foi de 50% na 5ª questão, que corresponde à situação de proporção dupla. Em 18 questões, de um total de 20, o GE ficou com pontuação acima de 75%.

Gráfico 3 – Médias por questão - Pós-teste - Grupo experimental e controle.



	1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4	5	6a	6b	6c	6d	7	8a	8b	8c	9a	9b	9c
GE	1,0	1,0	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	0,7	0,5	1,0	0,9	0,9	0,6	0,8	1,0	1,0	1,0	1,0	0,7	1,0
GC	0,9	0,6	0,4	0,6	0,6	0,4	0,8	0,0	0,4	0,8	0,8	0,6	0,6	0,0	0,0	0,2	0,0	0,2	0,0	0,0

Fonte: Elaboração própria.

Pode-se ainda constatar, no Gráfico 3, que as médias do grupo experimental passam a ser maiores em todos os aspectos analisados, no caso, em todas as questões, na ocasião do pós-teste.

O Quadro 14 confirma a relevância da intervenção, pois mostra que antes, no pré-teste, os grupos não diferiam estatisticamente (p=0,256388), sendo que após a intervenção, passaram a diferirem (p=0,000001).

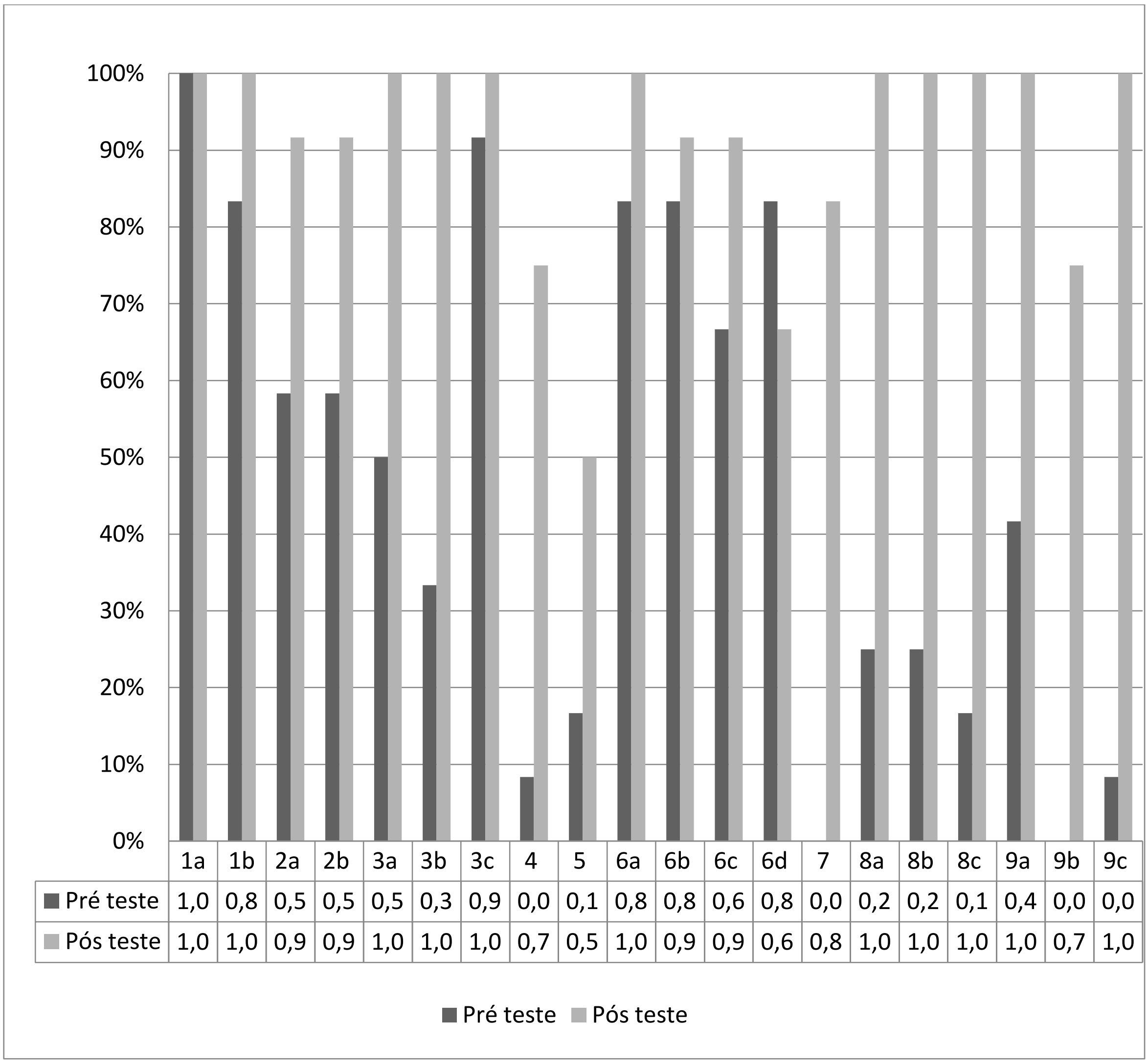
Quadro 14 – Resultados dos testes estatísticos e níveis de significância - Desempenho geral.

Comparação	Normalidade	Teste Usado	Nível de significância (p)
Controle x experimental (pré-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	0,256388
Controle x experimental (pós-teste)	Não	*U de Mann-Whitney*	**0,000001**
Pré-teste x Pós-teste (Experimental)	Não	*Wilcoxon*	**0,0000001**
Pré-teste x Pós-teste (Controle)	Não	*Wilcoxon*	0,052565

Fonte: Elaboração própria (*Software Statistica:* versão 12).

A comparação dependente, no caso verificando o antes e o depois de cada grupo, foi significativa, apenas, para o grupo experimental, com nível de significância muito próximo ao zero (*p*=0000001), mostrando a eficácia da intervenção. No Gráfico 4, é possível identificar o aumento expressivo de quase todas as médias do GE, no pós-teste.

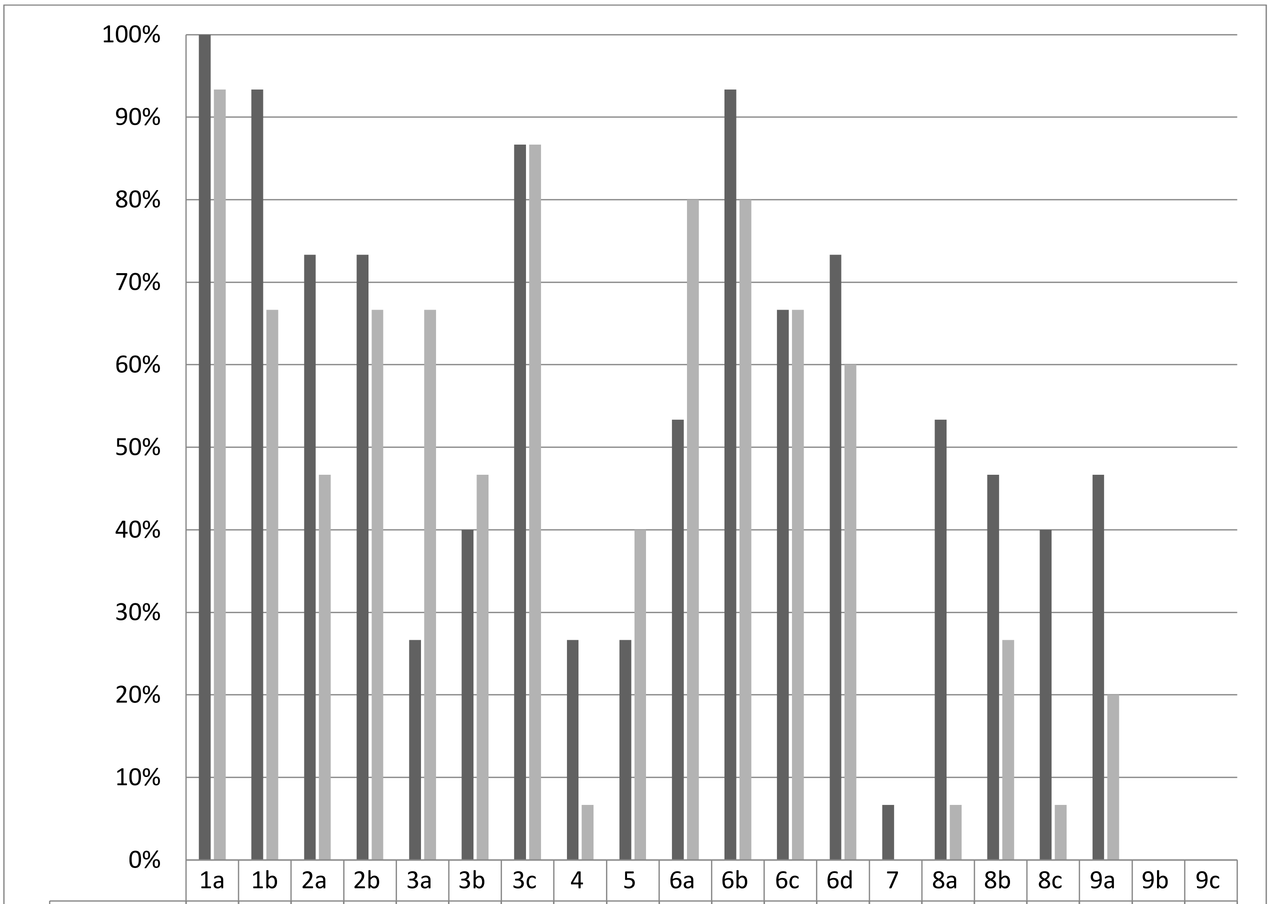
Gráfico 4 – Médias por questão - Grupo experimental - Pré-teste e Pós-teste.



Fonte: Elaboração própria.

O grupo controle não apresentou diferenças significativas entre pré e pós-teste (p=0,052565), mostrando oscilações em relação às médias obtidas (Gráfico 5). Embora o grupo controle não tenha recebido a intervenção com a metodologia desenvolvida nesta tese, manteve as aulas com competências/habilidades e conteúdos relacionados aos testes em questão (Apêndices C e D). O grupo experimental e controle tiveram a mesma quantidade de aulas de matemática, tendo diferenças, apenas, na disciplina eletiva, já que o grupo controle optou por trabalhos com origami (Matemática e arte) e os do grupo experimental por produção colaborativa de vídeos relacionados com a Matemática. Mesmo que as disciplinas eletivas tenham colaborado para os ótimos resultados do grupo experimental, com certeza, não seriam suficientes, pois os vídeos produzidos nesse momento precisavam dos conceitos matemáticos trabalhados nas aulas de matemática.

Gráfico 5 – Médias por questão - Grupo controle - Pré-teste e Pós-teste.



	1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4	5	6a	6b	6c	6d	7	8a	8b	8c	9a	9b	9c
Pré teste	1,00	0,93	0,73	0,73	0,27	0,40	0,87	0,27	0,27	0,53	0,93	0,67	0,73	0,07	0,53	0,47	0,40	0,47	0,00	0,00
Pós teste	0,93	0,67	0,47	0,67	0,67	0,47	0,87	0,07	0,40	0,80	0,80	0,67	0,60	0,00	0,07	0,27	0,07	0,20	0,00	0,00

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados até aqui apresentados demonstram a eficiência da metodologia, com resultados mais do que satisfatórios para o GE. Estas constatações em relação a todas as atividades aqui apresentadas e analisadas mostram que os estudantes do GE, embora inicialmente não fossem capazes de compreender um conjunto de dados, foram desenvolvendo o raciocínio de modo que passaram a compreender a invariância e a covariação.

Isso fica claro quando, além de conseguirem estabelecer uma relação, conseguem analisar e/ou representar um conjunto de dados seguindo esse mesmo padrão, seja por tabela ou gráfico. Passaram, portanto, a coordenar a variação de duas variáveis (CONFREY; SMITH, 1994, 1995), aqui apresentado como grandezas ou por *x* e *f(x).*

Considerando a estrutura que pode ser usada para analisar a compreensão dos alunos sobre a dinâmica das situações, envolvendo a mudança de duas quantidades, Carlson *et al*., (2002), apresentaram cinco níveis de ações mentais que envolve covariação. O primeiro nível (MA1) está relacionada com a compreensão de como duas variáveis podem mudar em conjunto, necessárias em situações em que se rotula as coordenadas *(x,y)* de uma função. No segundo nível (MA2), é preciso também identificar quando uma variável muda em relação a outra. No caso de um gráfico linear, saber encontrar a coordenada *'y'* a partir da coordenada *'x'* e vice-versa. No terceiro nível (MA3), espera-se que os estudantes sejam capazes de coordenar possíveis mudanças nas variáveis que alteram a outra, necessárias, por exemplo, nas construções de retas secantes. No quarto nível (MA4), ações mentais indicam a capacidade de coordenar a taxa de variação média de uma função uniforme por meio de alterações na variável de entrada. No quinto nível (MA5), tem-se a competência de coordenar a taxa de variação instantânea da função com mudanças contínuas na variável independente para o todo o domínio da função.

Pode-se afirmar, baseado em Carlson *et al*. (2002), que um estudante atingiu um determinado nível de raciocínio covariacional se for capaz de mobilizar todas as ações mentais dos níveis anteriores. Contudo, esse quadro só permite compreender os níveis mais complexos das ações mentais de covariação, já que, mesmo o nível 1, faz referência à compreensão de duas variáveis podem mudar em conjunto, necessárias em situações em que se rotulam as coordenadas *(x,y)* de uma função, o que necessita que os estudantes já tenham conhecimentos básicos de função. Desse modo, mesmo averiguando níveis complexos de ações mentais, verifica-se que as crianças dessa pesquisa passaram do nível zero ao nível 2.

De acordo com o que foi visto nessa pesquisa até aqui, o raciocínio covariacional tem relevância não apenas na interpretação e representação de informações em um gráfico de uma função, mas em situações reais presentes na vida social e que nem sempre é representada por função, embora isso possa ser feito. Verificou-se, ainda, que as representações gráficas e tabulares foram importantes para auxiliar nas inferências dos estudantes.

No próximo capítulo, será apresentada a análise qualitativa acerca das contribuições das tecnologias digitais usadas nesta intervenção

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: CONTRIBUIÇÕES DA TECNOLOGIA DIGITAL PARA A APRENDIZAGEM

Neste capítulo, serão analisadas e discutidas as contribuições da tecnologia digital para o desenvolvimento do conceito de covariação. Para isso, foram explorados protocolos de entrevistas e discussões coletivas, feitas presencialmente ou virtualmente por meio do *WhatsApp*, representações (tabular e gráfica) construídas por meio do *Geogebra* ou do aplicativo *online Cacoo*, simulações feitas no recurso digital *Equilibrando proporções* e *Geogebra* e postagens no *blog*.

A apreciação desses dados possibilitou verificar contribuições conceituais das tecnologias digitais utilizadas na intervenção, definidas nas seguintes categorias: (1) visualização e representação; (2) construção e produção de conhecimento; e (3) significação, das quais serão definidas e detalhadas na sequência.

6.1 Visualização e representação

As representações simbólicas são importantes para o entendimento dos invariantes (VERGNAUD, 1994). Assim, a aquisição de um conceito não pode estar dissociada da aprendizagem de como representá-los e da compreensão de seu significado (TYLER; PRAIN; PETERSON, 2007).

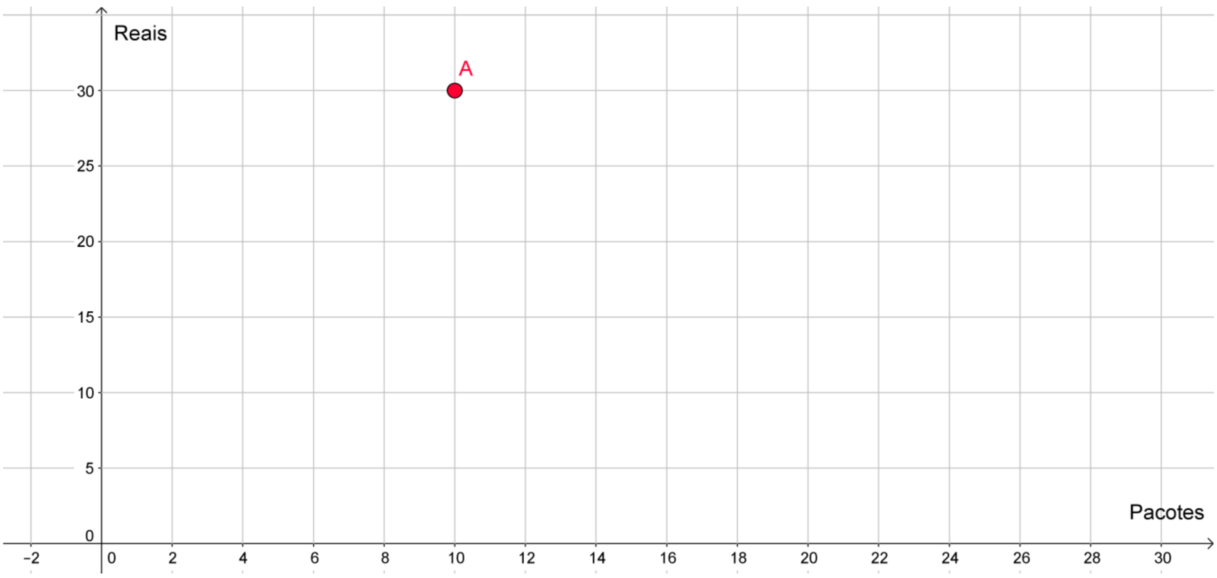
No decorrer da realização da intervenção, as tecnologias digitais possibilitaram a exploração de múltiplas representações, tendo sido fundamental para que os estudantes desenvolvessem seus esquemas de ação. Assim, além de conhecer as convenções da representação de um gráfico linear estabelecidos pela sociedade (CASTRO, 2012; NUNES; BRYANT, 1997), como título, plano cartesiano, eixos representando as variáveis envolvidas, pontos associados a um par ordenado formado pelas quantidades envolvidas, retas construídas a partir de, pelo menos, dois pontos; os estudantes puderem desenvolver a compreensão dos invariantes presentes na situação.

Dentre esses invariantes, pode-se, mais uma vez, mencionar a relação funcional estabelecida entre duas variáveis, no caso de um gráfico, a relação invariante entre: x e $f(x)$; e a covariação existente em um conjunto de dados; dentre outros. Desta forma, as atividades que envolviam gráficos, tabelas e, ainda, representações icônicas, foram importantes para a construção do conceito de covariação.

As construções dos gráficos por meio do *software Geogebra*, possibilitaram agilidade na construção e no surgimento de discussões relacionadas com a compreensão do conceito de covariação, como pode ser visto na Figura 74 e no Protocolo 10.

A Figura 74 mostra um plano cartesiano representando a relação preço por pacote, por apenas um único ponto: A (10;30). No fundo do plano cartesiano, há uma malha quadriculada segmentada de acordo com a distribuição numérica nos dois eixos: eixo *x*, de 2 em 2, e eixo *y*, de 5 em 5. Essa disposição de diferentes escalas nos eixos, teve a intenção, apenas, de deixar mais visível o ponto A representado. De uma forma geral, nessa situação, os estudantes precisavam a partir da invariância das grandezas do ponto A, estipular os demais conjuntos de dados que comporão a reta que passa pela origem.

Figura 74 – Representação de uma relação no plano cartesiano.



Fonte: Elaboração própria (S*oftware Geogebra).*

Antes dessa atividade, os estudantes já haviam tido contato com outras situações em que o gráfico era representado, mas a reta estava visível, permitindo que outros pontos fossem visualizados sem dificuldades. A utilização desse *software* favoreceu a visualização da linearidade, permitindo a compreensão de que os pontos marcados em um gráfico linear seguem o mesmo princípio lógico. Contudo, essa situação apresentou maior obstáculo para o entendimento dos estudantes, como percebido no Protocolo 10.

Protocolo 10 – Relação no plano cartesiano a partir de um ponto.

P: Que grandezas estão sendo representadas?
E08: Pacotes e reais.
P: Muito bem! Aqui eu tenho a quantidade de pacotes [aponta para o eixo x] e aqui eu tenho o valor em reais [aponta para o eixo y]. O que representa esse ponto A?
E02: 10 pacotes custam 30 reais.
P: Como você identificou?
E02: Vendo o ponto!
P: Ok! Vejam que olhando para essa situação, eu posso dizer que 0 pacote custa 0 real. Alguém consegue me dizer um outro ponto que obedece a relação dita por E02: 10 pacotes custam 30 reais e que faça parte desse conjunto?
E02: 20?
E12: 12 e ...[As crianças começam a dizer muitos números]
E03: 12 pacotes dá 35 reais? [Outras crianças concordam com E03]
P: Por quê?
E05: Porque vai de 5 em 5. [E12 também concorda com E05]
E02: O pacote vai de 2 em 2.
E03: Mas é porque a linha está de 5 em 5 e a outra está de 2 em 2. [Menciona os eixos dispostos em escalas diferentes]

O Protocolo 10 mostra que, apesar de os estudantes conseguirem constatar a invariância entre a coordenada dada pelo *eixo x* e *eixo y* do gráfico, (10;30), não conseguiram relacionar com outras posições, nem estipular outros pontos. A falta de conhecimento das representações no gráfico é evidente, já que os estudantes, inicialmente, "leram" as escalas dos eixos e não o que estava sendo representado, o ponto A. É importante observar que, enquanto a invariância corresponde à compreensão do operador funcional, a covariação está associada à compreensão dessa relação no conjunto de dados, o que necessita da percepção do operador funcional e escalar.

A pesquisadora explica que, apesar dos eixos serem importantes para a localização do ponto, é preciso que os estudantes atentassem às relações entre as duas coordenadas, no caso, 10 pacotes e 30 reais e como elas estão relacionadas com os demais pontos. Os alunos começam a entender melhor a situação apresentada, ao ser desenhado um segmento da origem até o ponto A e, quando também, representou-se, ao lado do gráfico, uma tabela, separando as grandezas e mostrando as relações, semelhante ao que foi realizado em atividades anteriores e analisadas na seção anterior.

A análise do referido protocolo, também atesta que os alunos possuem um domínio e conhecimento da representação tabular, já que ao representar a situação da Figura 74 em tabela, conseguiram perceber os demais pontos referentes ao gráfico da situação, como percebido na continuação do Protocolo 10.

E12: Ah, assim eu sei! É 3! [E12 mostra que conseguiu relacionar a informação do gráfico com a tabela construída, referindo-se ao operador funcional. A pesquisadora coloca uma setinha saindo do 10 pacotes e chegando no 30 reais.]
P: Eu estou multiplicando ou dividindo?
E11: Multiplicando.
P: Legal, e agora, consigo saber para outras quantidades de pacote?
E08: Dá sim! 1 pacote é 3 reais!
E12: 3 pacotes dá 9 reais [As crianças começam a dizer vários pontos que pertencem a essa reta]
P: E se eu quiser saber quanto custarão 1.000 pacotes?
E12: Eita, é muito pacote! Vixi,é muito dinheiro: *1.000* **.** *3 = 3.000* reais!

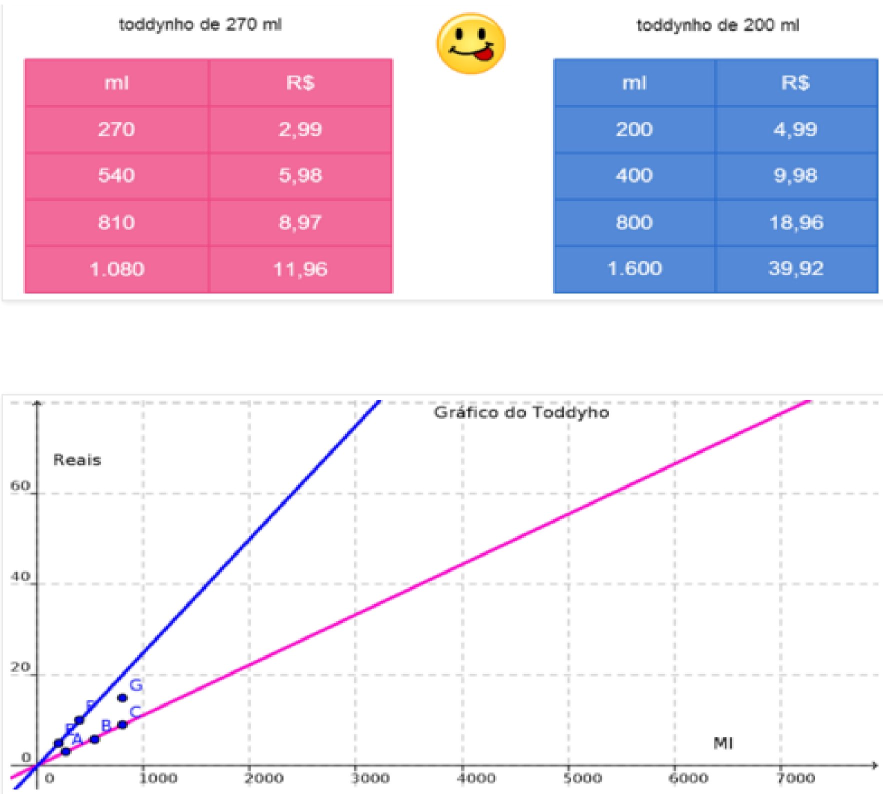
A continuação do Protocolo 10 deixa claro que a compreensão dos demais pontos do gráfico, desenhado posteriormente após definição coletiva, com o auxílio do segmento de reta e da tabela, foi possível após o estabelecimento do operador funcional. Verifica-se que os estudantes puderam inferir outros conjuntos de dados que já não estavam no segmento de reta traçado no *software*, ou seja, foram capazes de fazer projeções para valores que extrapolavam os limites do gráfico na escala representada. É importante observar que enquanto a invariância corresponde a compreensão do operador funcional, a covariação está associada a compreensão dessa relação no conjunto de dados, o que necessita da percepção do operador funcional e escalar. Percebe-se que, ao utilizar as duas representações (tabular e gráfica), os estudantes puderam compreender melhor os invariantes (PRAIN; WALDRIP, 2006) e, assim como Gafanhoto e Canavarro (2011), estabelecerem relações entre as diferentes representações.

Essas ações só foram possíveis devido ao uso do *software Geogebra*, que trouxe agilidade, precisão e dinamicidade ao processo de construção e reflexão dos conceitos trabalhados, permitindo que o foco fosse na compreensão das relações, na testagem de conjecturas ou no estabelecimento de generalizações. As tecnologias digitais beneficiam o uso de múltiplas representações devido à facilidade e a dinamicidade que proporcionam (PRAIN; WALDRIP, 2006; PIERCE; STACEY, 2001).

Em comparação a momentos de construção do gráfico, também coletivo, mas feito manualmente no quadro (Figura 69 e Protocolo 8), verifica-se que há diferenças qualitativas e quantitativas, uma vez que, na representação feita sem o auxílio do computador, não foi possível ter a precisão de escalas - proporcionalmente distribuídas em cada eixo; rapidez na construção e as simulações de outras situações de forma dinâmica. Essas constatações estão de acordo com a explicação de Borba e Villarreal (2005), ao considerar que a Matemática produzida com o uso de *softwares* é diferente da produzida, apenas, com lápis e papel.

A coordenação entre essas representações também tem o potencial de ajudar os estudantes a perceberem equívocos e reelaborarem seus pensamentos. Na Figura 75, tem-se a representação de uma situação de comparação entre o preço de achocolatados de mesma marca, mas, que são vendidos em quantidades diferentes. Para fazer a comparação, o grupo 2 construiu duas tabelas: a primeira, para representar o achocolatado de 270ml e a segunda, o de 200ml. Embora os achocolatados não sejam vendidos em quantidades de 270ml, 400ml, 810ml etc, os estudantes relacionaram o preço por ml, de cada produto, com a quantidade de produtos que poderiam comprar de cada tipo. Por exemplo: 1 achocolatado de 270ml custa R$2,99, 2 achocolatados, desse mesmo tipo, correspondem a 540ml (2 **.** 270ml) e custa R$5,98 (2 **.** R$2,99) e assim sucessivamente. Essa estratégia não facilita a comparação das tabelas, já que, em nenhuma das linhas da tabela, houve correspondência de preço ou quantidade. A percepção e comparação dos dois produtos ficou mais evidente pelo gráfico (Figura 75).

Figura 75 – Comparação de preço de achocolatado - grupo 2.



toddynho de 270 ml

ml	R$
270	2,99
540	5,98
810	8,97
1.080	11,96

toddynho de 200 ml

ml	R$
200	4,99
400	9,98
800	18,96
1.600	39,92

Fonte: *Blog* Pensar, conectar e fazer[69].

[69] http://pensar-conectar-fazer.blogspot.com.br/2015/10/eba-toddynho.html

Na Figura 75, observa-se que os estudantes não fizeram legenda para associar a tabela com a reta correspondente, mas que é perceptível que as retas azul e rosa correspondem, respectivamente, aos dados de mesma cor. Verifica-se a existência de um ponto (ponto G) que não pertence a nenhuma das retas.

Logo que a referida atividade foi postada no *blog* do projeto, um dos alunos questionou seus colegas e a pesquisadora, sobre o ponto fora das retas (Protocolo 11).

Protocolo 11 – Construção do gráfico: ponto fora da reta

E02: Que ponto é esse? [Aponta para o ponto G]
E08: G(800; 14,97).
E02: E por que ele está fora da reta?
E08: Não sei [A pesquisadora aproveita esse momento para fazer a mediação].
P: Vamos analisar?
E08: Aqui, 200ml é R$4,99. Então 400ml é R$9,98 e 800ml é R$14,97. [Refere-se a tabela azul que também está errada]
P: E será que 2 . 9,98 = 14,97? [E08 refaz as contas]
E08: Não, dá R$19,96. [Percebe que cometeu um erro]
P: E os outros pontos, será que estão certos?
E08: Está sim, pois, estão todos dentro das retas.

O Protocolo 11, mostra que E02 percebe que há uma regularidade nos pontos relacionados na tabela com a representação gráfica no plano cartesiano, logo, para que as relações permaneçam as mesmas os pontos precisam seguir o mesmo padrão. Diante dessa constatação, os gráficos também passaram a ser utilizados pelos estudantes como forma de verificar e corrigir, quando necessário, os cálculos das relações tabulares.

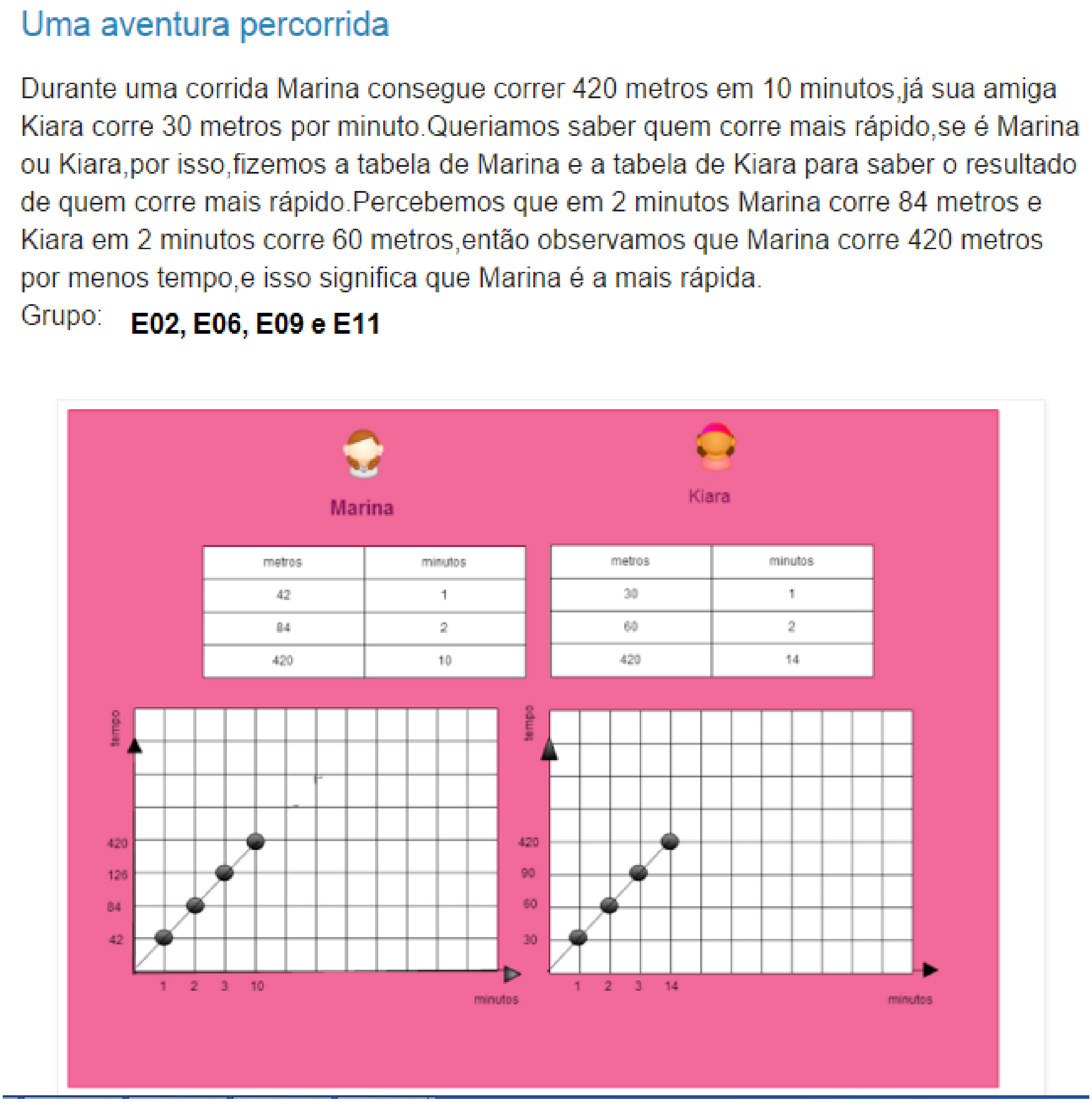
Averigua-se que a representação tabular feita no aplicativo *online Cacoo* não foi suficiente para a percepção de que haviam relações calculadas inadequadamente, por isso, não apresentavam comportamento linear, como verificado por E02 (Protocolo 11) ao constatar um ponto fora da reta representada pelo grupo 2.

Borba e Villarreal (2005) mencionam que a visualização provoca dois tipos de raciocínio, o primeiro relacionado ao uso de demonstração formal, e o segundo, ligado à elaboração da solução do problema e ao teste e explicação de conjecturas e de resultados alcançados, como pode ser visto no caso anteriormente descrito.

No decorrer da intervenção, foram propostas diferentes atividades para desenvolver o conceito de covariação, sempre explorando as múltiplas representações. Para a construção dessas representações eram usados, além do *Geogebra*, o aplicativo *online Cacoo*.

A integração do uso desses recursos (*Geogebra*, *Cacoo*), como visto na Figura 75, foi importante para explorar o potencial individual de cada recurso e amenizar algumas das limitações observadas (CASTRO; CASTRO FILHO, 2012). Assim, uma das potencialidades do aplicativo Cacoo é a criação de infográficos70 que representassem as situações que surgiram na intervenção, usando, para isso, representações icônicas, tabulares e gráficas e, em alguns casos, textos, como na Figura 76.

Figura 76 – Postagem do Grupo 2 - Atividade do Apêndice H.



Fonte: *Blog* Pensar, conectar e fazer[71].

70 É um desenho ou imagem que também possui textos que explicam ou informam sobre determinado assunto.
71 http://pensar-conectar-fazer.blogspot.com.br/2015/09/uma-aventura-percorrida.html

Na Figura 76 e no *blog* do projeto, é possível constatar o potencial de representação e visualização de invariantes, proporcionado pelo aplicativo *Cacoo*. Nessa situação em específico (Apêndice H), os estudantes construíram tabelas, fizeram o gráfico mostrando a situação e colocaram suas conclusões de forma textual. No entanto, o aplicativo não favoreceu e nem facilitou a representação gráfica, já que a malha, os eixos e as escalas dos eixos tinham que ser definidos manualmente, o que demandou muito tempo e algumas imprecisões na representação.

Na Figura 76, é possível visualizar que no primeiro gráfico, referente ao desempenho de Marina, o *eixo x* foi representado com uma escala de 1 em 1, mas, após os três primeiros pontos da malha, pula para o 10. O mesmo acontece com o gráfico que representa o desempenho de Kiara, que pula de 3 para 14, não obedecendo à escala.

Compreende-se a importância de saber estabelecer escalas na representação, mas, nessa situação em específico, esse problema foi decorrente das limitações do aplicativo e restrições do conhecimento matemático do grupo. Castro (2012) afirma que é importante conhecer as potencialidades e as limitações dos recursos digitais utilizados, pois, dessa forma, é possível conseguir um melhor aproveitamento da situação proposta. Considerando que a finalidade inicial seria fazê-los compreender e relacionar conjuntos de dados, optou-se em construir os gráficos lineares no *Geogebra*, explicando a definição dessas escalas dos eixos a partir do *software*.

A visualização e as representações puderam, também, ser exploradas pelo recurso digital *Equilibrando Proporções*. Considerando as dificuldades inerentes da situação de proporção simples de correspondência muitos-para-muitos (GITIRANA *et al*., 2014; SANTOS, 2015), utilizou-se essa ferramenta para auxiliar na compreensão dessas relações

Embora o objetivo do referido recurso seja apenas analisar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais, este foi explorado de outras formas. Convém aqui ressaltar que as situações propostas nesse recurso, além de serem de proporção simples – correspondência muitos-para-muitos, também exploram o campo numérico dos números racionais, com algumas grandezas e relações expressas por números decimais, por se tratar de grandezas contínuas.

Diante do potencial existente no recurso para explorar as representações de uma grandeza e suas relações de diferentes formas, foi solicitado que os estudantes não apenas identificassem o tipo de relação das grandezas, mas que, quando as grandezas fossem diretamente proporcionais, resolvessem a situação proposta no recurso. Para isso, poderiam manipular e simular as grandezas da forma que achassem conveniente, usar a calculadora ou fazer outras representações em uma folha. Ao utilizar o recurso, a primeira situação diretamente proporcional que surgiu foi a que está representada na Figura 77.

Figura 77 – Situação 3 do recurso digital *Equilibrando proporção.*

Fonte: *Screenshoot* de tela do *site.*

A Figura 77 apresenta uma situação[72] de correspondência muitos-para-muitos, de multiplicação e divisão. É possível verificar na tela, a existência de ícones que representam, de forma icônica, as grandezas da situação (quantidade de carnes e quantidade de pessoas). O recurso permite a interação com esses ícones (simulação), de tal forma que é possível aumentar ou diminuir a quantidade de uma grandeza e ver como esse aumento ou diminuição influencia na quantidade da outra grandeza, já que elas estão relacionadas. Essa visualização é realizável por meio de representação numérica e icônica da quantidade de grandezas. Há ainda, a representação da relação entre as grandezas de forma tabular, porém, não permite interação, pois é estática. O recurso também não apresenta gráfico linear representando a situação.

[72] A situação 3, da Figura 77 apresenta uma situação em que se estabelece a quantidade de carne por pessoa consumida em uma churrascaria. Convém mencionar que, em uma situação real, as pessoas não consomem a mesma quantidade de carne, além disso, a média estabelecida por pessoa, está muito acima do normal.

Verifica-se, portanto, o potencial demonstrado pelo recurso digital *Equilibrando proporções* de representar os invariantes presentes nas relações de correspondência-muitos-para-muitos de diferentes formas, possibilitando o desenvolvimento da compreensão da covariação, a partir do estabelecimento das relações entre quantidades distintas e iguais.

A utilização do recurso foi feita de forma individual, mas os estudantes podiam discutir estratégias e resoluções com seus colegas de grupo. Inicialmente, os estudantes faziam as simulações, mas não sabiam muito bem o que elas significavam (Protocolo 12).

Protocolo 12 – Descobrindo a relação funcional com o recurso *Equilibrando Proporções.*

E06: Eu fiz o seguinte: quando eu diminuo aqui ao máximo, até chegar em 1, esse aqui fica sendo o resultado [aponta para o local do recurso onde é possível aumentar e diminuir a quantidade de grandezas envolvidas na situação].
P: Por que você diminuiu para 1? Não entendi.
E06: Porque se eu diminuir até 1...ah, não sei explicar não!
P: Calma! Tem alguma relação com isso aqui na tabela? [Aponta para as grandezas representadas na tabela].
E06: Acho que tem.
P: Qual a relação dessa 1 pessoa e desse 3,1*Kg* com as informações da tabela?
E06: Porque se eu multiplicar, ... se eu colocar uma seta pra cá...se eu multiplicar *75* **.** *3,1*, aí dava esse resultado! [Desenha uma seta na primeira linha da tabela, no sentido da esquerda para a direita]
P: Isso dá certo todas as vezes?
E06: Dá sim. Olha aqui... *248* **.** *3,1* [Coloca a seta no mesmo sentido anterior e usa a calculadora], que deu esse resultado aqui! [Aponta para a letra *b* da tabela - Figura 77]

Como pode ser visto pelo Protocolo 12, o recurso digital possibilitou que E06 conseguisse achar a relação entre as duas grandezas (quantidade de carnes e de pessoas), apenas manipulando seus elementos de simulação (+ / -), como pode ser visto na Figura 77. Ao fazer essa manipulação, a estudante pôde verificar, visualmente, o aumento ou diminuição das grandezas, de acordo com as relações estabelecidas na situação. Apesar de E06 encontrar a relação, não conseguiu percebê-la de imediato.

Além da estratégia mostrada por E06, de reduzir a relação das grandezas a uma relação unária (VERGNAUD, 1983), observaram-se estratégias em que os estudantes manipulavam os elementos até o valor solicitado. Essa segunda estratégia acabou dificultando e tornando mais demorada a compreensão das relações entre as grandezas, já que eles não eram desafiados a refletir e compreender a situação. Ao perceber isso, a pesquisadora buscou questioná-los para que pudessem inferir as relações.

O uso da calculadora, nas situações do recurso, foi necessário para garantir que os estudantes centrassem na compreensão das relações e não no cálculo com números decimais.

Verificou-se, ainda, que, à medida que os estudantes iam manipulando os elementos de simulação, as relações ficavam mais evidentes e as dificuldades diminuíam, como pode ser visto na situação da Figura 78 e no Protocolo 13.

Figura 78 – Situação 7 do recurso digital *Equilibrando proporção*.

Fonte: *Screenshoot* de tela do *site.*

Protocolo 13 – Entendendo as relações funcionais com o recurso *Equilibrando Proporções.*

E06: Essa aqui! Metros e reais...muito fácil! Eu já sei! [Fala das grandezas da situação e escreve no papel] Eu vou diminuindo o dinheiro até chegar em 1. Então se eu fizer 12...opa! Quase caí na pegadinha: $12 \div 1{,}15 = 8$! Deixa-me ver aqui na calculadora. Eu sei, achei! Então olha aqui ...$16{,}5 \div 1{,}5 = 11$!
P: E como você soube o que tinha que fazer?
E06: Pelo desenho.
P: O desenho pode ajudar?
E06: Eu encontro o número que eu vou precisar para saber o resultado que eu quero. Aqui, oh! [Mostra que fez a situação reduzindo as relações até chegar a uma relação de correspondência um-para-muitos]
P: A gente chama isso de relação.
P: E como você sabe se multiplica ou divide?
E06: É de dividir porque está saindo daqui, mas se saísse daqui seria uma multiplicação. [Aponta mais uma vez para a tabela, mas agora da Figura 78].

O Protocolo 13 mostra uma maior segurança de E06 em relação aos procedimentos necessários para estabelecer a relação (operador funcional). Também fica claro que a interação, por meio das representações icônicas das grandezas, possibilitadas pelo recurso *Equilibrando proporções*, foi importante para o estabelecimento dessa compreensão, mesmo com as dificuldades que esse tipo de situação provoca. Percebe-se ainda, que E06 consegue perceber que a relação encontrada pode sofrer uma inversão, dependendo da relação que se pretende fazer.

A utilização de determinada estratégia pelos estudantes considera um repertório de competências que estes já possuem (VERGNAUD, 2009). A modificação de estratégias mostra a ampliação dessas competências que foram possibilitadas pela interação com recurso digital ao simular, por meio de múltiplas representações, situações de correspondência-muitos-para-muitos. Pode-se, portanto, concluir que essa interatividade[73], ajudou nessa mudança de estratégias, pois estimulou a criação de novas hipóteses, conjecturas e generalizações e, consequentemente, contribuiu para o desenvolvimento do conceito de covariação.

Conforme já mencionado, faz parte da construção desse conceito o entendimento de grandezas e de suas relações. Como forma de explorar essa percepção, utilizou-se o celular[74] e um aplicativo de mensagens instantâneas chamado *WhatsApp* em atividades para serem realizadas fora do horário de aula, o que proporcionou além da ampliação do tempo, a extensão das aulas de matemática para outros espaços.

O *WhatsApp* foi proposto, inicialmente, como uma forma de comunicação entre GE e pesquisadora, pois, devido a alguns problemas na escola[75], haviam semanas que não acontecia intervenção. Contudo, mostrou-se uma importante ferramenta para a compreensão dos conceitos trabalhados na intervenção. Para isso, os estudantes eram incentivados a fazerem registros diários de suas descobertas em relação às grandezas e postar no grupo criado. As descobertas vinham acompanhadas de registros fotográficos, textos, áudios, tabelas, gráficos, desenhos, *emojis*, dentre outras formas de representação, como alguns exemplos apresentados na Figura 79.

---

[73] Considera-se, nesta tese, a definição dada por Malheiros, Borba e Zulatto (2010), de que interatividade é a possibilidade do ser humano interagir com a máquina.

[74] O uso do celular não era permitido na escola. Como algumas crianças não tinham celular, estes usavam o dispositivo móvel de seus pais ou familiares.

[75] Reforma, falta d´água, queda de árvore, dentre outros.

Figura 79 – Imagens postadas no *WhatsApp* para representar grandezas e algumas relações.

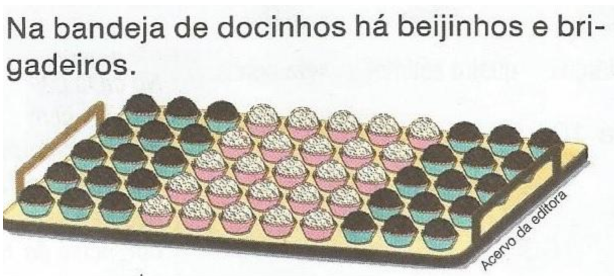
Exemplo de E08 Exemplo de E07

Exemplo de E11 Exemplo de E02

Fonte: Grupo do *WhatsApp.*

Nos exemplos da Figura 79, é possível verificar que os estudantes representaram diferentes grandezas, seja por meio de fotos feitas em seus domicílios ou por pesquisas utilizando *sites* de busca, como no exemplo de E11. Ao postarem essas representações, os estudantes tornaram concreta a concepção de grandeza, possibilitando que a pesquisadora e os demais percebessem a ligação entre a representação e o conceito. Demonstrando que " [...] o papel da mídia no processo de visualização vai além do simples ato de mostrar uma imagem" (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 97). Esses achados estão de acordo com o que Keller e Hirsch (1998) apontam como benefícios das representações. Também foram retirados exemplos do livro didático de matemática (Figura 80).

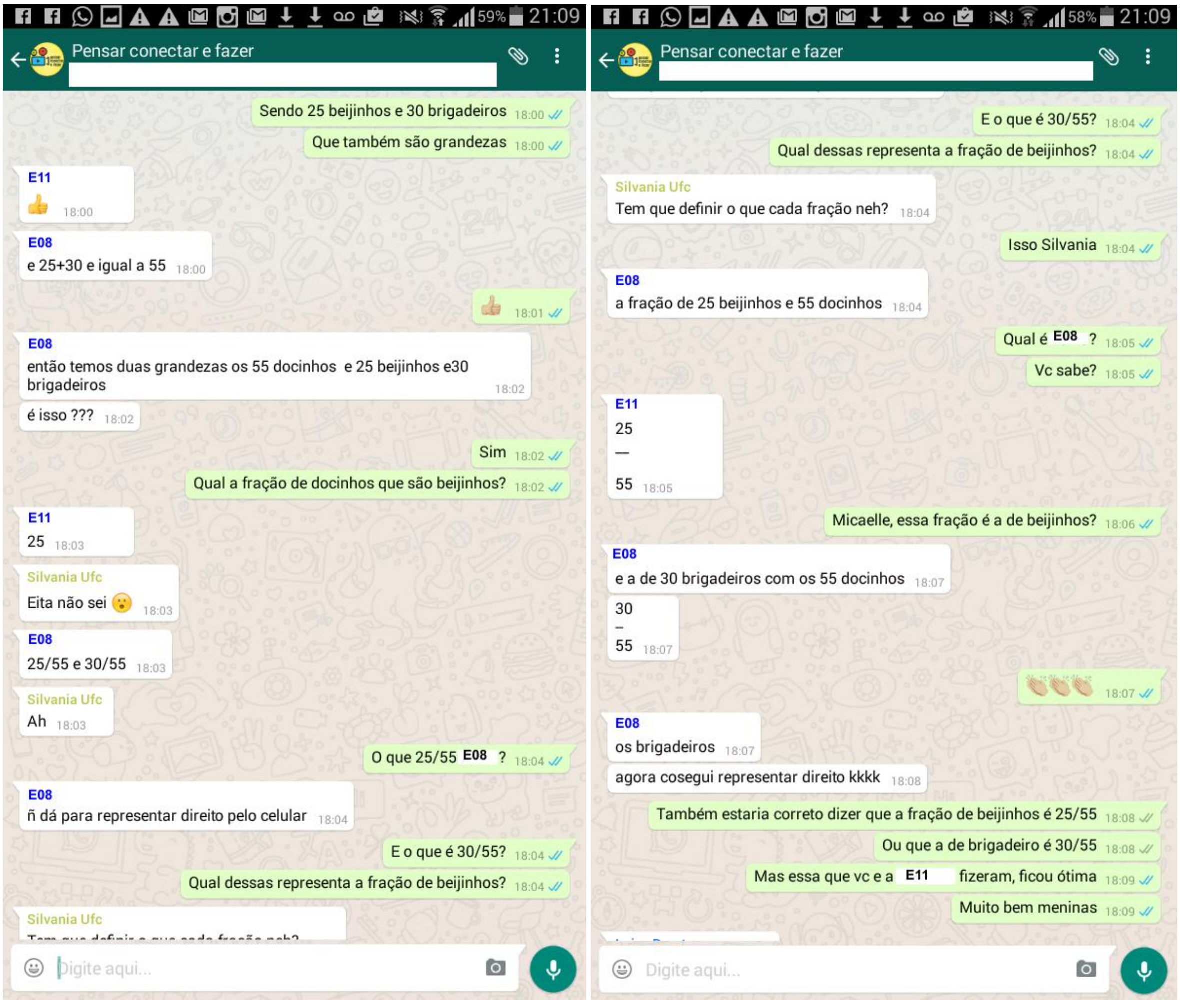
Figura 80 – Imagem retirado de livro didático.



Fonte: Souza (2012, p. 128).

A Figura 80 suscitou discussão sobre as diferentes grandezas que estão representadas nessa imagem. Ao final da discussão, os estudantes concluíram que haviam beijinhos e brigadeiros em uma bandeja de docinhos, chegando a relação de 55 docinhos por bandeja, invariante que corresponde ao operador funcional (Figura 81).

Figura 81 – Representação de notações matemáticas.



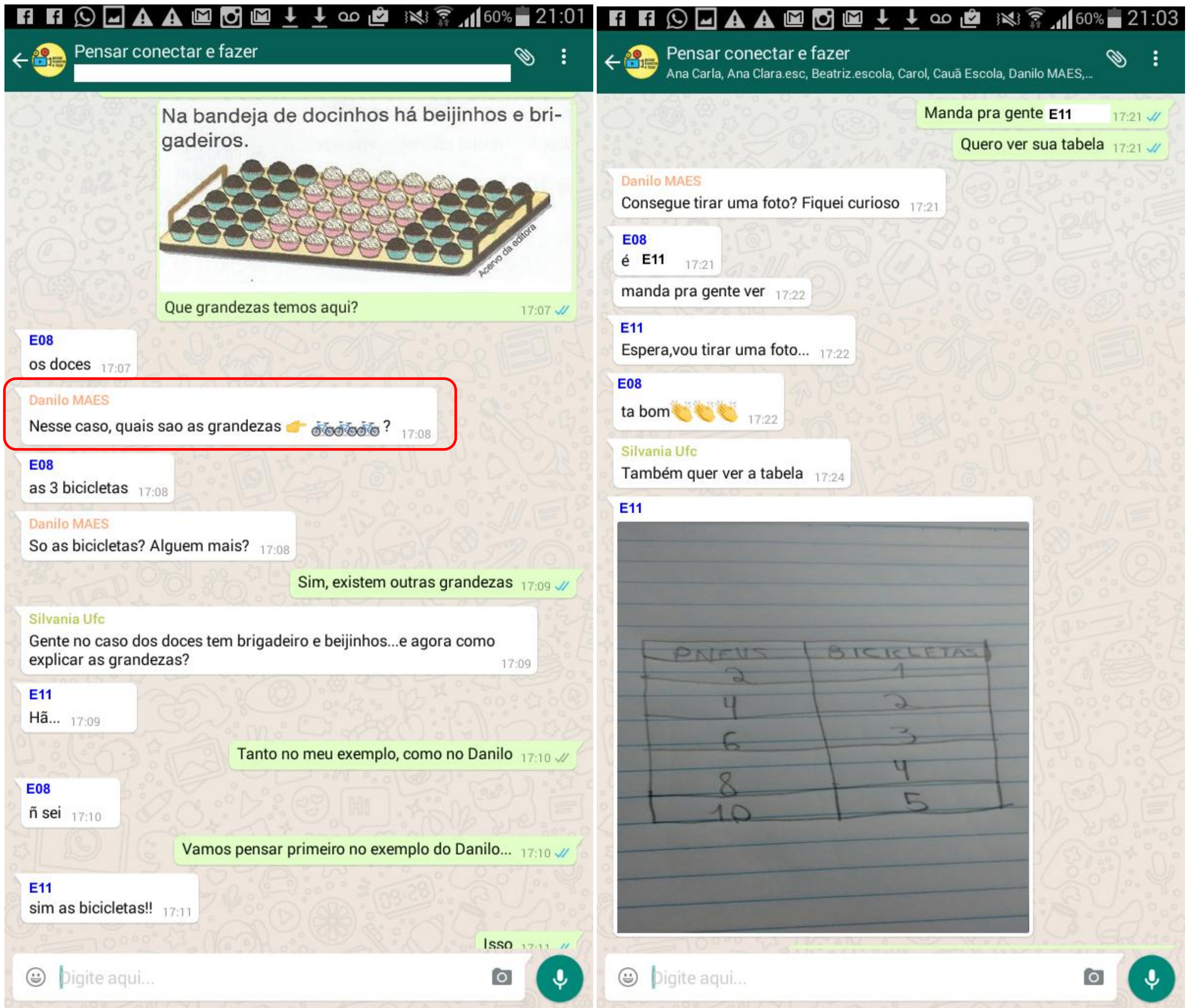
Fonte: Grupo do *Whatsapp* - Pensar, conectar e fazer.

No protocolo documentado na Figura 81, constata-se a preocupação de E08 e E11 em fazer o registro correto da representação do número fracionário. Ainda que o *WhatsApp* não tenha sido criado para essa finalidade, os estudantes conseguiram fazer adequações para o uso apropriado dessas notações, trazendo para as discussões realizadas as vantagens das representações para a construção dos conceitos matemáticos.

A Figura 82 apresenta uma discussão para a compreensão das grandezas e suas relações iniciadas pelo Danilo (ver marcação em vermelho) com a utilização de *emojis*.

Observa-se, também, uma tabela, construída por E11, para representar e explicitar a compreensão das grandezas e de suas relações.

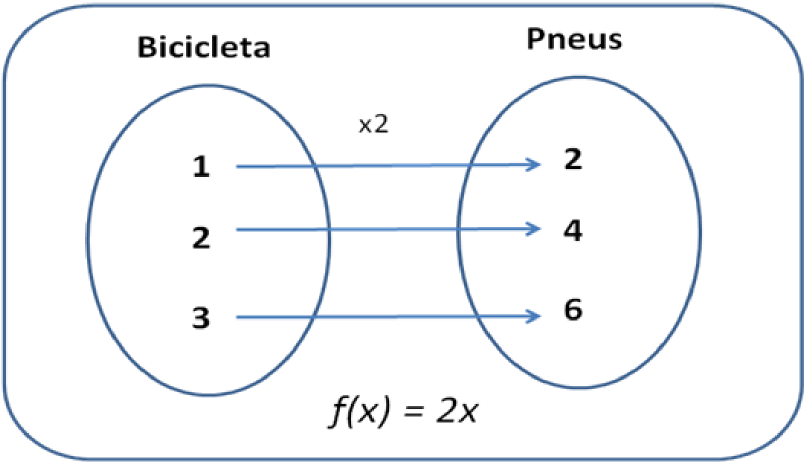
Figura 82 – Relação entre grandezas - *emojis* e representação tabular.



Fonte: Grupo do *Whatsapp* - Pensar, conectar e fazer.

Por trás da representação postada por E11 no *WhatsApp*, tem-se, na forma de tabela, uma situação multiplicativa de correspondência um-para-muitos (NUNES; BRYANT, 1997; MAGINA; SANTOS; MERLINE, 2013, 2014; SANTOS, 2015), que abrangem uma relação constante entre dois conjuntos, no caso 1 bicicleta tem 2 pneus, tendo como relação fixa 2 pneus por bicicleta. Pode-se também afirmar que a relação desses dois conjuntos tem características de função (Figura 83).

Figura 83 – Representação funcional da relação entre as grandezas.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 83, verifica-se uma correspondência biunívoca (unívoca nos dois sentidos) entre os conjuntos, função bijetora[76], representados por E11, por meio de tabela. Vergnaud (2009, p. 73) explica que na correspondência biunívoca, "[...] a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um elemento e um só do segundo conjunto e reciprocamente". Desse modo, as representações têm uma importante relação com o conceito matemático, tendo forte relação com a construção do conhecimento, como será detalhado na categoria seguinte.

Foram percebidas, ainda, outras vantagens e contribuições do *WhatsApp* e dos demais recursos digitais usados na intervenção. Na próxima seção, será discutida como as tecnologias digitais podem colaborar com a produção matemática.

6.2 Construção e produção de conhecimento

A *Internet* amplifica a capacidade de comunicação, construção e produção de conhecimento, pois pode aumentar os espaços de aprendizagem, interligando as pessoas com o mundo. Considerando a abordagem *seres-humanos-com-mídias*, pode-se entender que a produção de conhecimento é condicionada pelas tecnologias, em que a unificação de humanos e mídias forma um coletivo pensante (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Fundamentadas nesse constructo teórico e nas múltiplas representações, as atividades da intervenção foram planejadas de modo a permitir essa interação entre humanos e

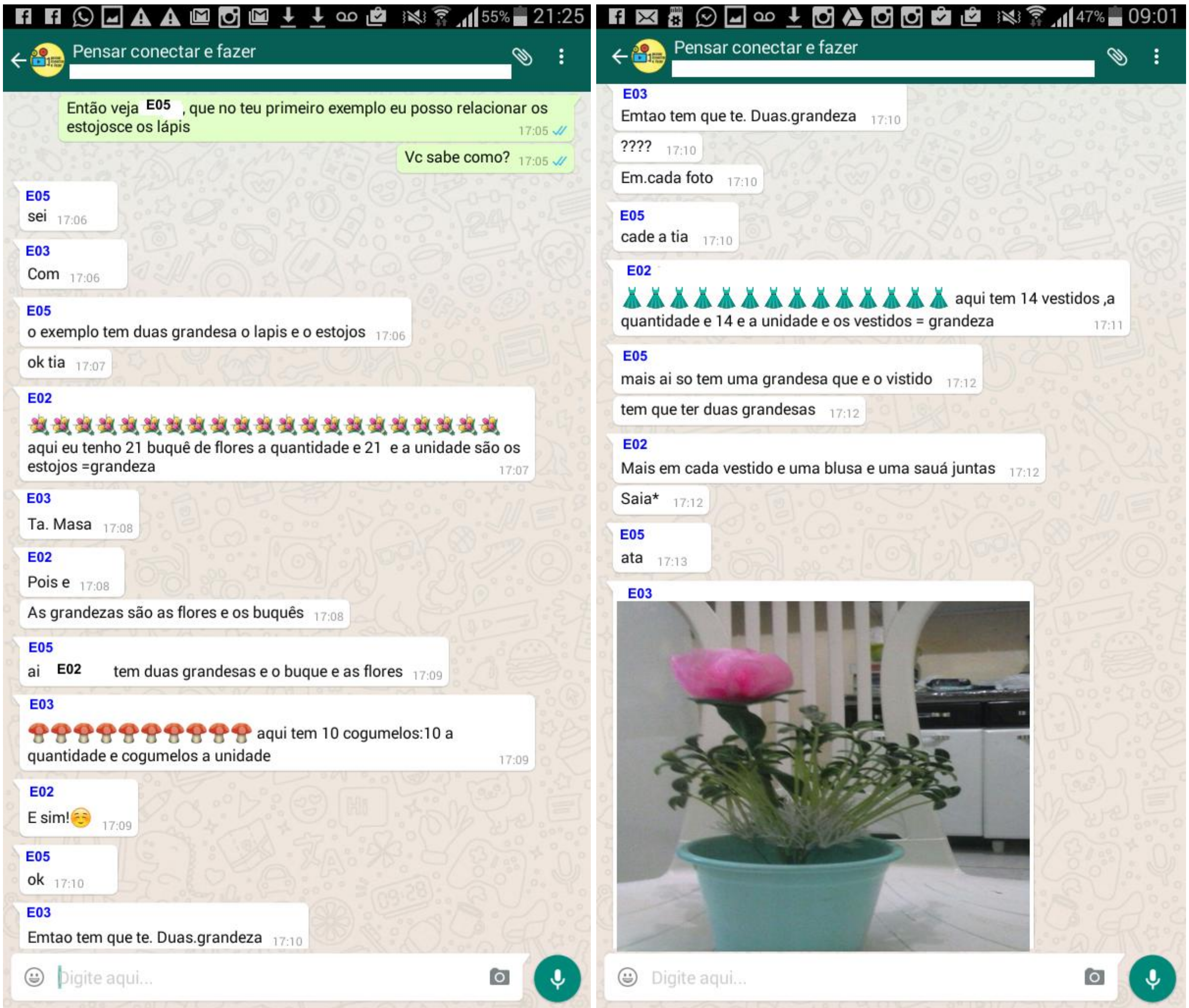
[76] Toda função que é, simultaneamente, injetora - elementos diferentes do domínio tem imagens diferentes, e sobrejetora - todos os elementos do contradomínio estão relacionados com elementos do domínio.

mídias, potencializando, portanto, a construção e produção do conhecimento matemático dos alunos.

Dentre as atividades que envolviam tecnologias digitais, o *WhatsApp* mostrou-se um recurso com potencial não apenas de comunicação[77], mas de produção de conhecimento (Figura 84 e Figura 85).

Para iniciar as discussões que aparecem na Figura 84, a pesquisadora pediu que os alunos postassem exemplos de situações em que se podia relacionar mais de uma grandeza. Nota-se que os estudantes colocam vários exemplos, alguns mostrando essa relação entre grandezas, como o de E02 ao postar *emojis* de buquês de flores, outros apenas mostrando uma grandeza, sem explicitar a relação.

Figura 84 – Produção de conhecimento - Compreensão de Grandeza e de suas relações.



Fonte: Grupo do *Whatsapp* - Pensar, conectar e fazer.

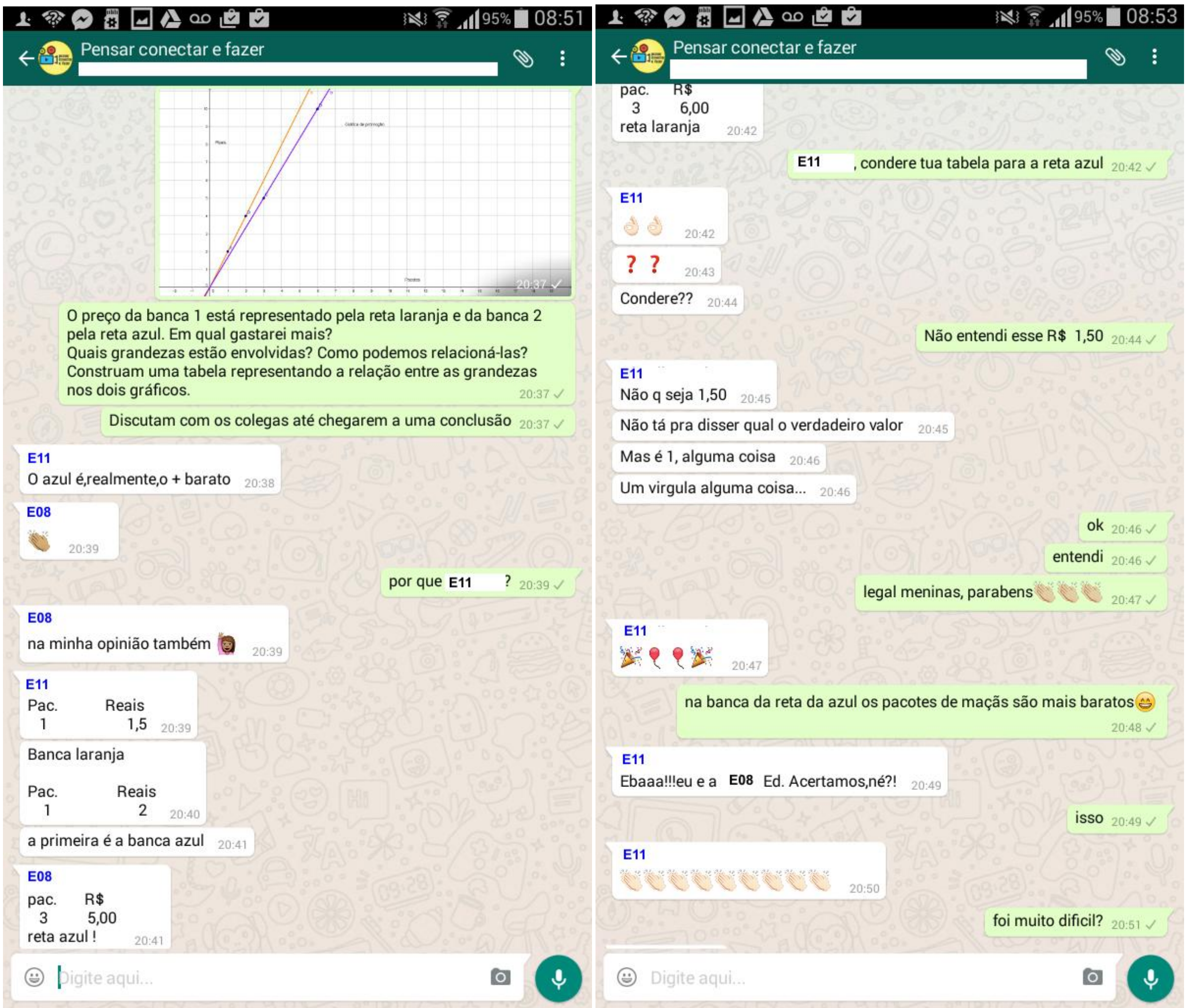
[77] O aplicativo *WhatsApp* foi criado com o objetivo de troca de mensagens.

Verifica-se que as crianças, além de exemplificar o que foi solicitado, discutem os exemplos dados pelos colegas, contribuindo para a compreensão coletiva de grandeza e suas relações.

De acordo com Santos (2006), a reunião e interação[78] de pessoas com diferentes saberes, contribui para consolidação de uma inteligência coletiva, ajudando, assim, a moldar a forma como as pessoas produzem conhecimento (LÉVY, 1993).

Outros assuntos tratados no *WhatsApp* propiciaram a produção de conhecimento matemático. Desta forma, além dos exemplos que os estudantes davam sobre grandeza e das discussões sobre suas possíveis relações, foi explorada, também, a interpretação dos alunos, por meio de situações representadas, apenas, por gráficos construídos no *Geogebra*. Esse tipo de discussão aconteceu, na maior parte do tempo, por meio do *WhatsApp* (Figura 85).

Figura 85 – Produção de conhecimento - Interpretação de gráficos lineares.



Fonte: Grupo do *WhatsApp* - Pensar, conectar e fazer.

[78] De acordo com Malheiros, Borba e Zulatto (2010), interação é um fenômeno elementar das relações humanas.

A Figura 85 ilustra um dos protocolos desse tipo de atividade. Diferente das situações de construção de gráfico, feitas em sala de aula com o uso do *Geogebra*, em que os alunos, primeiramente, construíam a tabela para depois fazerem o gráfico, nas situações de interpretação, com o gráfico construído, os estudantes precisavam inferir as relações presentes em cada representação. Para isso, escolhiam uma coordenada do eixo das abscissas, para ambas as retas, e verificavam a coordenada da ordenada, pois, do contrário, não ajudaria na comparação.

Observa-se, na Figura 85, que E08 e E11 chegam à mesma resposta, mas por estratégias diferentes. Enquanto E11 busca a relação unitária de pacotes por reais em cada reta (azul e laranja), por estimativa, já que não apresentava um valor exato, definindo, para isso, $x=1$ e comparando $f(1)$ de ambas as retas, E08 escolheu uma relação em que era possível saber que 3 pacotes custam R$5,00 e R$6,00, respectivamente, reta azul e laranja, estabelecendo, portanto, $x=3$ e comparando os $f(3)$ da reta azul e laranja. Importante notar na Figura 85 que, mesmo com estratégias diferentes, E11 percebe que E08 também acertou.

Constata-se, desse modo, que as atividades de interpretação de gráficos, por meio do *WhatsApp*, como representada na Figura 85, pode trazer, pelo menos, duas contribuições: a primeira, relacionada ao aspecto conceitual da covariação, pois representar mais de uma situação, por duas retas, requisita a verificação da invariância e da covariação de cada reta, para então comparar esse conjunto de dados, o que exige uma ampliação do repertório de competências; e a segunda, por propiciar a socialização de diferentes estratégias, por meio da interação social estabelecida no ambiente. Pode-se dizer que essas contribuições estão relacionadas com a produção do conhecimento matemático, realizado coletivamente, pois os estudantes desenvolveram a capacidade de argumentação, de expressão e representação da matemática, de aprimorar estratégias em processo de resolução de problemas, competências estas adquiridas, ao longo do processo interativo.

A Figura 84 e Figura 85 mostram que o *WhatsApp* teve um uso que foi além dos fins a que se destina, ou seja, troca de mensagens – comunicação, passando, portanto, de artefato para instrumento, devido ao desenvolvimento de outros esquemas de uso, conforme explicitado por Clark-Wilson (2013).

Valente (2003, p. 1) afirma que em ambientes virtuais "[...] é possível criar situações de aprendizagem bastante similares ao que acontece no presencial (VALENTE, 2003, p. 1). Contudo, o que se observou na intervenção é que o *WhatsApp*, como ambiente virtual para a discussão e produção de conhecimento matemático, apresentou potencialidades que superaram as discussões em sala de aula, como: o diálogo ser permeado de exemplos que se tornaram concretos por meio das representações dadas pelos estudantes (imagens, *emojis*, tabelas, gráficos); e a multimodalidade expressa na participação ativa das crianças, por textos, áudios, vídeos, imagens, e que não era tão efetiva em momentos presenciais da intervenção. Um exemplo que pode ser dado para fundamentar essa afirmação é o fato de E11 ter participação ativa em todas as discussões no *WhatsApp* e, na sala de aula, expressar seus pensamentos em raros momentos.

Tytler, Prain e Peterson (2007) esclarecem que a multimodalidade permite expressar o raciocínio de diferentes formas, o que contribui para a apropriação do conceito. Devido a essas características multimodais do *WhatsApp,* da proposta desenvolvida na pesquisa e da mediação da pesquisadora, os esquemas de uso puderam evoluir, de artefato, para instrumento de produção do conhecimento, transformando o usuário e o instrumento durante o processo (VÉRRILON; RABARDEL, 1995; ARZARELLO; ROBUTTI, 2010; CLARK-WILSON, 2013), acontecendo o que Clark-Wilson (2013) chama de gênese instrumental.

Segundo Lévy (1993), Borba e Villarreal (2005) e Borba (2007), ao longo da história, diferentes tecnologias têm moldado a forma como as pessoas produzem conhecimento, principalmente quando há interação entre humanos e mídias.

Essa interação viabilizada pelas tecnologias digitais podem ainda contribuir com o desenvolvimento de competências, ajudando a estabelecer conexões entre os estudantes, pois entende-se que ambientes como o Cacoo, o *blog* e o *WhatsApp* são propícios a favorecer a interação e a produção coletiva. Para Coll (2010), as tecnologias digitais facilitam a mudança de postura do aluno, pois podem tornar os alunos mais produtores do que consumidores.

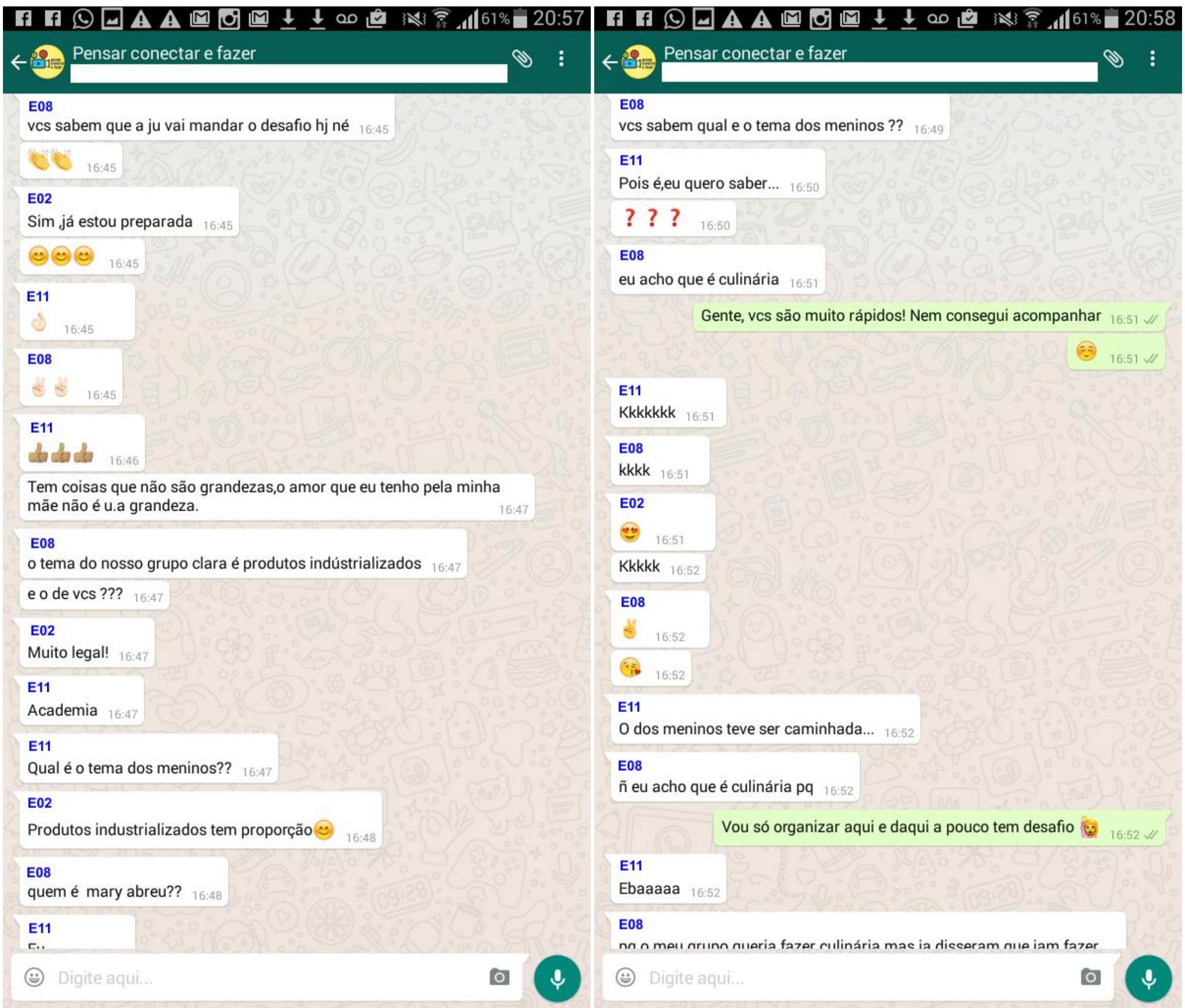
Na realização desta pesquisa, a produção coletiva foi viabilizada pela utilização do *Geogebra*, em que os estudantes, em grupo, construíam gráficos para representar a situação trabalhada; pelo aplicativo *online Cacoo*, ao possibilitar a criação de infográficos com representações icônicas, tabulares e textuais; pelo *blog* do projeto; pelo *WhatsApp*, como discutido anteriormente; e, principalmente pela integração de todos esses recursos.

Como parte desse processo de produção, durante disciplina eletiva foi desenvolvido um projeto de produção de vídeos como forma de refletir e aplicar os conceitos aprendidos durante as aulas de Matemática em situações criadas pelos estudantes. Essa produção seguiu uma série de etapas: (1) Escolha do tema, (2) Realização de pesquisa, (3) Elaboração do roteiro, (4) Execução, (5) Edição de vídeo e (6) Avalição; de acordo com Apêndice J, utilizando, para isso, um modelo de roteiro, disponível no Apêndice K.

Para o processo de construção do vídeo, além das questões relativas ao tipo de vídeo, os grupos precisaram ter bem claros os aspectos matemáticos que estariam nas situações criadas por eles, respondendo às seguintes questões: Como esse tema pode ser abordado de modo a relacionar com a ideia de multiplicação, divisão e/ou proporcionalidade? Que grandezas serão definidas? Que tipo de relação há entre essas grandezas? Como ficará a representação dessa situação?

Essas questões eram resolvidas pelos grupos de forma coletiva nos encontros presenciais destinados a disciplina eletiva, ou ainda pelo *WhatsApp*. Na Figura 86, verifica-se uma discussão entre componentes do grupo 2 (E02, E11) e 3 (E08) sobre o tema que foi escolhido por cada grupo. Nota-se a que os estudantes estavam vigilantes em relação à proposição abordar aspectos da proporção ou não.

Figura 86 – Discussão sobre o tema dos vídeos.



Fonte: Grupo do *WhatsApp* - Pensar, conectar e fazer.

Essa definição contou com discussões intensas em cada grupo, pois surgiam algumas discordâncias durante o processo. No grupo 3, por exemplo, E08 sugeriu usar como tema a escola, no entanto, os demais não aceitaram. Após novos e acalorados debates, surgiu a ideia de abordarem alimentos, mas as crianças não tinham clareza de como os conceitos matemáticos poderiam ser trabalhados nessa temática.

A fase de pesquisas sobre o assunto[79] escolhido foi importante para que as crianças pudessem ter mais clareza de como explorar o assunto selecionado em cada vídeo produzido. Foi nesse momento, que o grupo 3 resolveu comparar produtos industrializados com produtos saudáveis, verificando como eles influenciavam a saúde das pessoas. Também teve grupo (grupo 2) que na fase de pesquisa resolveu mudar a proposição inicial, por não conseguir encontrar as relações com os conceitos trabalhados.

A fase seguinte consistia na elaboração do roteiro. O grupo 1, por exemplo, teve como temática *a caminhada*, e no roteiro decidiram contar a história de dois amigos - Marcos e Joaquim, que eram vizinhos e estudavam na mesma escola. Resolveram fazer uma caminhada até a escola e ver quem chegava mais rápido. Porém, Joaquim sempre era mais lento que Marcos e não tinha esperanças de chegar antes do amigo. Em meio às discussões para definir o roteiro, as crianças decidiram que Joaquim, mesmo mais lento, deveria chegar na frente, para isso, inspiraram-se na fábula da lebre e da tartaruga[80].

Definiram que as grandezas seriam passos e minutos. Para decidirem a relação de passos por minuto de cada personagem, fizeram uma pequena encenação na escola, para verificar quantos passos seriam possíveis serem dados em cada minuto. Para isso, E10 cronometrou 1 minuto e E01 e E04 andavam e contavam os passos, até atingir o tempo de 1 minuto. Definiram que Marcos, o mais rápido, andaria obedecendo a uma relação de 120 passos por minuto e Joaquim a de 100 passos por minuto.

Embora todas as relações indicassem que Marcos era bem mais rápido, Joaquim conseguiu vencer (Figura 87).

---

[79] As pesquisas eram feitas em *site* de buscas como o *Google* (*www.google.com*)
[80] Fábula de Esopo, na qual uma tartaruga ganha a corrida de uma lebre.

Figura 87 – Representação gráfica da situação retratada na "A grande corrida"[81]

Fonte: Intervenção - produção de vídeo - grupo 1.

Na Figura 87, tem-se uma das telas do vídeo " A grande corrida". Verifica-se que o gráfico representado apresenta a evolução de Marcos e Joaquim durante a corrida. Para conseguirem definir quanto tempo Marcos deveria ficar parado para que Joaquim pudesse passar à frente, a equipe construiu algumas tabelas (Figura 88).

Figura 88 – Tabelas com as relações do vídeo "A grande corrida".

JOAQUIM

passos	minutos
100	1
600	6
1500	15

MARCOS

passos	minutos
120	1
6oo	5
1500	16

Fonte: Intervenção - produção de vídeo - grupo 1.

As tabelas não ajudaram muito na compreensão e esclarecimento da situação, pois o grupo não conseguiu representar o tempo em que Marcos ficou parado. Percebe-se, na tabela de relações de Marcos, que na última linha há uma relação que não é possível entender somente com a tabela, já que não foi representado o tempo em que Marcos ficou parado. O

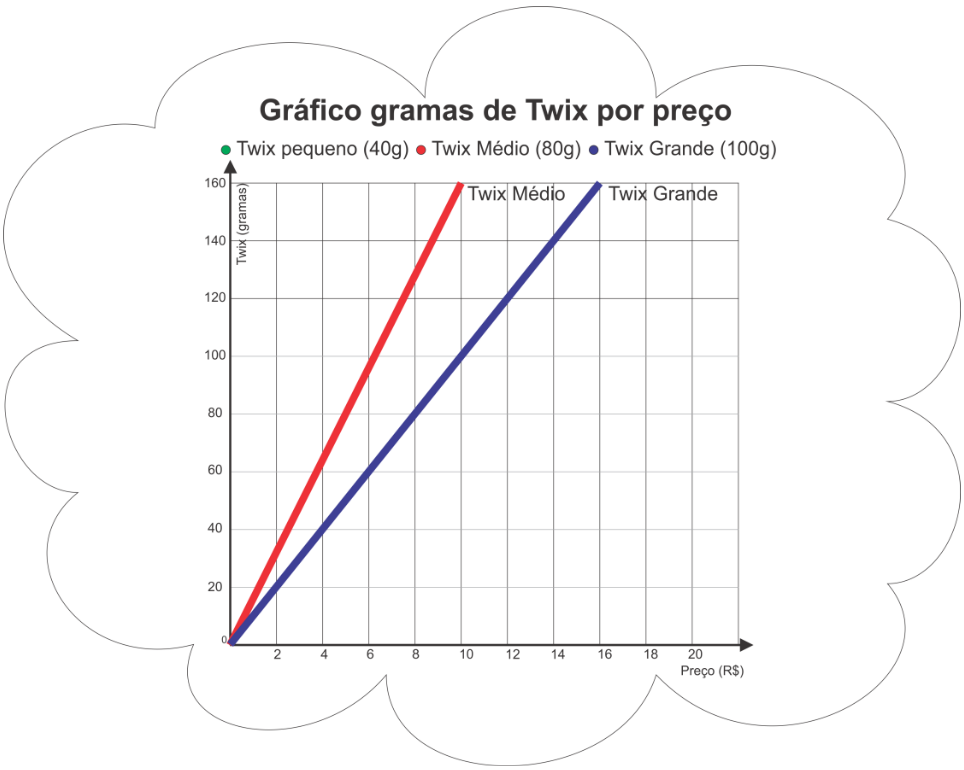
[81] Disponível em: *https://www.youtube.com/watch?v=dlLbL0A-O8Y*

conjunto das relações representadas na tabela de Marcos perdeu as características de função bilinear, uma vez que, para o intervalo em que $5 < x < 8{,}5$, não há deslocamento de Marcos, fazendo com que os domínios entre $5 < x < 8{,}5$ tenham a mesma imagem.

O deslocamento de Marcos (reta azul; Figura 87) pode ser definido como: $f(x)=120\,x$, quando $0 < x \leq 5$ e $f(x) = 120\,x - 420$, para $x \geq 8{,}5$. Verifica-se a permanência do operador funcional, mas a 2ª função passa também a ter um coeficiente linear e ter características de função afim: $f(x) = mx + b$, para os intervalos determinados. Essas características justificam a dificuldade que os estudantes tiveram para definir o tempo em que Marcos ficaria parado, pois os alunos não foram apresentados à representação algébrica das funções. Por isso, as simulações no *software Geogebra* foram importantes para que o grupo compreendesse as relações e o conjunto de dados que regulavam a situação proposta.

O grupo 2 mudou de tema algumas vezes: academia, loja de brinquedos, festa de aniversário, até que decidiu pelo contexto de uma loja de doces. A Figura 89 tem uma das telas do vídeo produzido pelo grupo e que indica as relações pensadas pela personagem quando, ao chegar em uma loja repleta de bombons, precisou ajudar uma amiga que não faria uma boa compra por não saber muita matemática.

Figura 89 – Representação gráfica da situação retratada na "Doçura economizada[82]".



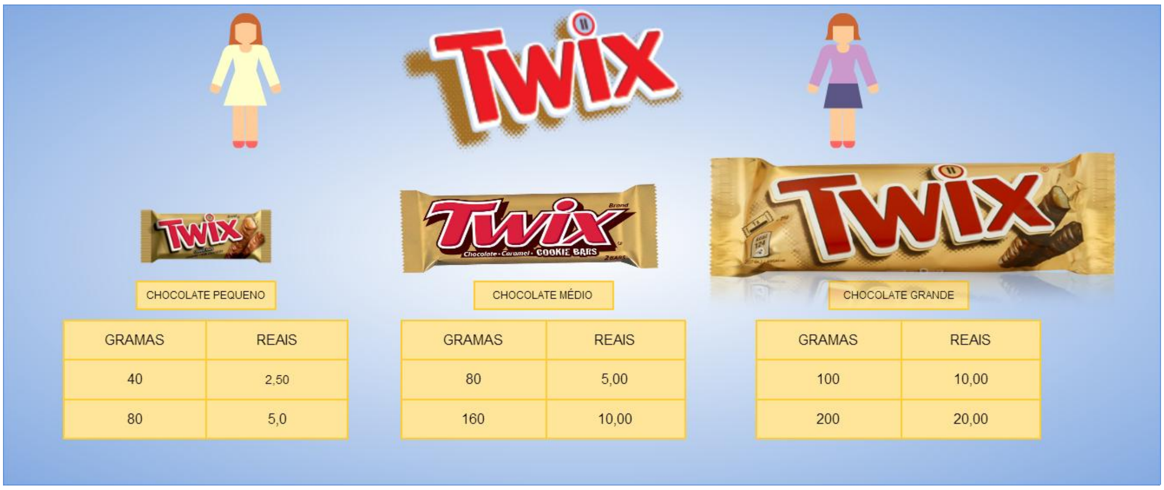
Fonte: Intervenção - produção de vídeo - grupo 2.

[82] Disponível em: *https://www.youtube.com/watch?v=PIu4tWqjFDY*

Apesar do tipo de chocolate escolhido existir, o grupo 2 preferiu escolher suas próprias relações, tanto da quantidade em gramas, quanto do preço do produto, portanto, são todos dados fictícios. Devido a essa opção, as estudantes puderam analisar e definir o que aconteceria no vídeo. Ao determinar as relações, contata-se que o grupo definiu a relação gramas por reais (Figura 89), onde o normal seria o preço por gramas, já que, em termos funcionais, deve-se determinar o preço a pagar, $f(x)$ em função da quantidade de gramas de chocolate que se deseja comprar.

Na Figura 89 e Figura 90, foram representadas as relações que seriam consideradas para cada tipo de chocolate que teria disponível na loja de doces: *Twix* de 40g, de 80g e de 100g. Percebe-se que a relação do chocolate de 40g e de 80g é a mesma, apresentando o seguinte raciocínio: $f(x1)=16x1$; $f(x2)=16x2$ e $f(x3)=16x3$, com $x1$, $x2$ e $x3$ sendo dado em reais (R$). Observa-se que $[f(x1)= f(x2)] < f(x3)$. Logo, apesar de conseguirem inferir que o chocolate *Twix* na embalagem de 100g sairia mais caro, as crianças desse grupo definiram que a quantidade de chocolate $f(x)$ seria dada em função do valor dado em reais, ou seja, fizeram uma inversão do domínio e da imagem da função.

Figura 90 – Tabela da situação representada no vídeo “Doçura economizada”.



Fonte: Intervenção - produção de vídeo - grupo 2.

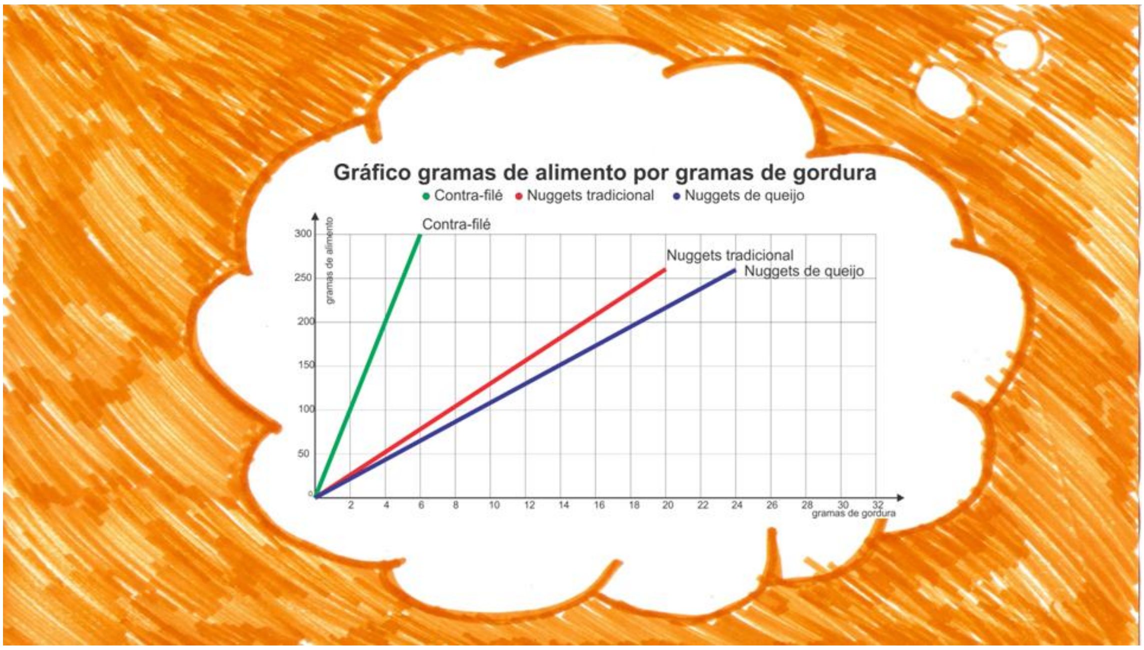
Essa inversão, nesse tipo de função é possível, pois trata-se de uma função bijetora, logo, aceita a inversão. A função inversa, portanto, teria como operador funcional $1/16=0,0625$ para $f\text{-}1(x1)$ e $f\text{-}1(x2)$ e $1/10=0,10$ pra $f\text{-}1(x3)$, sendo representada por $f\text{-}1(x1) = 1/16\ x1$, $f\text{-}1(x2) = 1/16\ x2$ e $f\text{-}1(x3) = 1/10\ x3$, com $x1$, $x2$ e $x3$ sendo dado em gramas (g).

O grupo 3 escolheu como tema a alimentação. Inicialmente, pensaram em comparar vários tipos de alimentos como refrigerantes, hambúrgueres e *nuggets*. Essa ideia foi descartada quando precisaram definir as grandezas, pois perceberam que para fazer comparações era necessário que os três tipos de alimentos utilizassem as mesmas grandezas. Como o refrigerante era medido em litros e os *nuggets* e os hambúrgueres em gramas, optaram por escolher apenas um tipo de alimento para comparar com outros alimentos mais saudáveis. Ao analisar a tabela nutricional que vem nas caixas de *nuggets*, os estudantes perceberam que também haviam diferenças quantitativas em relação à quantidade de gordura para cada tipo de *nuggets*.

A partir dessas descobertas e reflexões, o roteiro do vídeo foi construído, tendo considerado que a protagonista do vídeo deveria trazer sua experiência e descobertas sobre os alimentos, na forma de um diário. A Figura 91 apresenta uma das relações retratadas no vídeo. Verifica-se que os estudantes relacionaram a quantidade de alimento medido em grama, com a quantidade de gordura desse alimento, usando também o grama.

As relações retratadas na Figura 91 e a entrevista realizada com o referido grupo mostram que os estudantes conseguiram encontrar o operador escalar de cada uma das funções representadas pelas retas verde, vermelha e azul. Para a construção do gráfico, também foram capazes de estabelecer um conjunto de dados (pelo menos dois pontos para cada relação), conseguiram ainda, concluir que os *nuggets* de queijo possuem mais gordura do que o *nuggets* tradicional, e que o contra-filé tem bem menos gordura que os *nuggets*.

Figura 91 – Representação da situação retratada no vídeo: "Tenha consciência, coma bem![83]".



Fonte: Intervenção - produção de vídeo - grupo 3.

[83] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=RJ3i1qhNKyY

Conforme descrito, durante o processo de produção dos vídeos, os grupos (re) definiam os temas de acordo com interesse e curiosidades, assim como (re)construíam a história que seria contada no vídeo, escolhiam personagens, dentre outros elementos. A análise do processo retratado demonstra o crescimento cognitivo, tanto no aspecto conceitual, procedimental, como atitudinal, pois, além do domínio e precisão na abordagem dos conceitos matemáticos nos vídeos, os estudantes se apropriaram dos procedimentos necessários em cada etapa, como também, desenvolveram a autonomia, o poder de argumentação, o senso crítico, a criatividade, o que condiz com a construção e produção de conhecimento.

É na interação social, segundo Vygotsky (1994), que se dá o nascimento e desenvolvimento de novas estruturas cognitivas. No caso da produção de vídeos, ao compreender e procurar diferentes possibilidades de soluções para o problema tratado, os estudantes desenvolveram novos esquemas.

As conclusões das situações criadas pelos grupos e retratadas nos vídeos eram alcançadas por meio do confronto de, pelo menos, duas formas de representação: tabular e gráfica. As simulações gráficas proporcionadas pelo *Geogebr*a e confrontadas com os dados das tabelas construídas no *Cacco* possibilitaram que os grupos manipulassem os dados de modo a atender a história que havia sido criada para os vídeos. Um exemplo dessa manipulação pode ser visto no processo desenvolvido pelo grupo 1, pois os estudantes queriam que o personagem mais lento ganhasse a corrida com 1 segundo de diferença (Figura 87 e Figura 88).

Para Lévy (1993), a manipulação de parâmetros, como as simulações feitas pelo grupo 1, ajuda o estudante a perceber as relações de causa e efeito em relação aos parâmetros analisados. Assim, o conhecimento produzido a partir da unificação entre humanos e não humanos (BORBA; VILLARREAL, 2005), no caso, as crianças e as mídias utilizadas, como o *Geogebra* e o *Cacoo*, formam um coletivo pensante, influenciando a tomada de decisão dos estudantes em relação a definição do cenário proposto no vídeo.

Esse processo de produção de vídeo, em uma visão sociocultural, também está de acordo com o que Hegedus e Moreno Armella (2009) denominam de performances matemáticas. Essa inferência está fundamentada nas ações observadas e descritas anteriormente, pois, a partir de pequenos grupos os alunos discutiram, construíram, testaram hipóteses, buscaram soluções, desenvolveram estratégias, generalizaram e ainda, contextualizaram casos específicos de aplicação do conceito de covariação.

Nesse caso, a aprendizagem é conseguida por meio de troca de ideias, discussões, simulações, compartilhamento de informações. Os vídeos, produto dessa aprendizagem, mostram de forma concreta as concepções construídas ao longo do projeto em relação ao conceito de covariação. Esse produto deu um grande significado ao trabalho até então desenvolvido, uma vez que os estudantes foram corresponsáveis por todo o processo, tendo, portanto, a autoria dessas produções. Diante disso, a próxima categoria explora as contribuições das tecnologias digitais para a significação.

6.3 Significação

Conforme mencionado na primeira categoria, as representações mentais são importantes para a compreensão de um conceito, pois, segundo Vygotsky (2009), servem de mediadores na relação do homem com o mundo, as quais estão atreladas ao uso dos instrumentos e de signos como mediadores da atividade humana, impregnados de significado cultural. Como o ser humano desenvolve-se em um ambiente social, essa produção de significados está relacionada ao significado cultural, ou seja, com a forma do indivíduo interpretar e agir sobre o mundo.

As tecnologias digitais podem ajudar na construção do significado, ao oportunizar a experimentação de ideias, levantamento de hipóteses, formulação de conjecturas, mas também ao possibilitar que o estudante seja confrontado com situações de tomada de decisão. A partir do contexto social, os alunos puderam compreender o significado de algumas relações trabalhadas ao longo do projeto.

Como a noção de grandeza ainda era muito vaga e superficial, dificultando, ou às vezes, até impossibilitando a identificação da grandeza, os estudantes foram incentivados a buscar identificar as diferentes grandezas usadas no dia a dia. Para isso, precisavam fazer registros na forma de imagens, de vídeos, de áudios ou de textos apresentando e explicando a grandeza registrada. Essa descoberta deveria ser postada no grupo do *WhatsApp* para que fossem discutidas pelos demais colegas. Os estudantes tiveram uma participação ativa colocando como exemplos: lápis, estojos, mochilas, esmaltes, garrafas, bonecas, dentre outras grandezas, na sua maioria discretas estando relacionadas com a ideia de contar. Um dos únicos exemplos envolvendo grandeza contínua, dado pelos estudantes, foi levado à sala de aula por E02, que informou ter encontrado esse exemplo através de um *site* de busca na *Internet* (Protocolo 14).

Protocolo 14 – Descobrindo a grandeza.

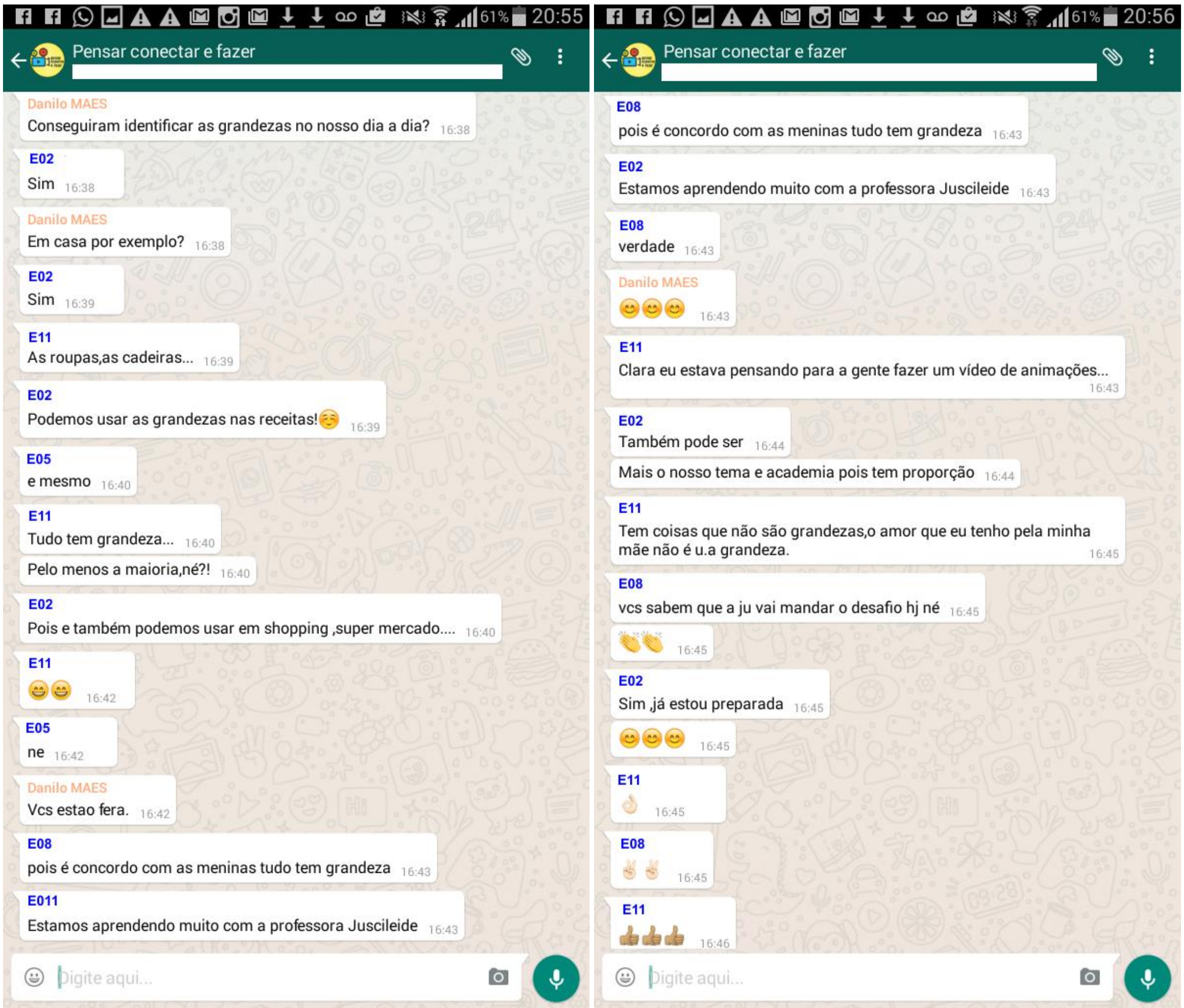
E02: Olha professora, na internet tem dizendo o que é grandeza. [...] também tem uns exemplos!
P: E quais exemplos você trouxe?
E02: Tem velocidade e massa!
P: Ah, a massa é mais conhecida como "peso". [A pesquisadora vê o caderno de E02 com o registro da pesquisa]. Vocês sabem que grandeza é essa?
E12: É ser gordo!
P: E ser gordo é grandeza? [As crianças riem]
P: Tem a ver com massa! [Os estudantes ficam em silêncio]
P: Quando vocês sobem numa balança daquelas de farmácia, o ponteiro indica o que?
E09: A quantidade. [E02 concorda]
E08: A quantidade que você está pesando!
P: E é só a quantidade? [As crianças ficam em silêncio] Se eu peso 50, eu peso 50 o que?
E12: Quilômetros...Unidades! [Fica tentando adivinhar - os demais ficam em silêncio, mas prestando atenção]
P: A grandeza massa é medida normalmente em qual unidade?
E11: 5 e 0. [A pesquisadora repete a pergunta]
E03: É um! [As crianças falam uma diversidade de números até que E12 responde]
E12: Quilos! Quilos! [Comemora]

O Protocolo 14 traz uma discussão de um tipo de grandeza bastante usada no cotidiano, afinal, todos já utilizaram uma balança, quer para verificar sua massa ou a de alimentos como carnes, peixes e legumes. No entanto, mesmo sendo algo do dia a dia, os estudantes tiveram dificuldade em indicar a unidade de medida normalmente utilizada nesse tipo de grandeza, mostrando a necessidade de abordar diferentes grandezas e ampliar a compreensão de unidades de medida utilizadas nas diferentes situações.

A troca de mensagens entre os alunos e a pesquisadora através do *WhatsApp* teve um importante papel na ampliação das concepções sobre grandeza. Depois de uma série de exemplos que surgiram durante a discussão nesse ambiente, os estudantes construíram o significado conceitual, mas, também, social de grandeza (Figura 92).

Vê-se, na Figura 92, que os estudantes conseguem reconhecer funções sociais ao identificar o uso de grandezas em receitas e em supermercados. Também se observa que os alunos conseguiram trazer exemplo do que não é grandeza. E11 justifica o porquê do amor que ela sentia por sua mãe não ser uma grandeza "[...] o amor que sinto pela minha mãe não dá para contar e nem medir" (informação textual de E11).

Figura 92 – Compreensão de grandezas[84].



Fonte: Grupo do *WhatsApp* - Pensar, conectar e fazer.

Tem-se, portanto, a concepção de que grandeza é tudo que pode ser medido e contado. Lorenzato (2006, p. 51) explica que a medida: "[...] é a relação entre grandeza e unidade, que se expressa num número que quantifica quantas vezes a grandeza contém a unidade". A importância da compreensão de grandeza é enfatizada pelos PCN que, ao estabelecer o bloco de Grandezas e Medidas, como um dos blocos de conteúdos de Matemática, enfatiza o caráter prático e utilitário, que é evidenciado pela sua forte relevância social (BRASIL, 1997).

Outras situações em que era preciso fazer a comparação de conjunto de dados surgiram a partir de situações cotidianas vivenciadas fora da escola. Para dar mais sentido e significado para as atividades que estavam sendo realizadas no projeto, foi solicitado que os

[84] A intervenção e as discussões no grupo do *WhatsApp* eram também mediadas por dois estudantes de Licenciatura em Matemática: Danilo do Carmo (UECE - MAES) e Maria Silvania Marques Xavier de Souza (UFC - PROATIVA), conforme planejamentos e orientações dadas pela pesquisadora.

estudantes fizessem uma visita ao supermercado, ao mercantil ou a qualquer outro tipo de estabelecimento comercial.

Durante a visita deveriam registrar, por meio de fotos tiradas pelo celular ou por anotações, situações em que fosse constatado um mesmo produto (de mesma marca), com tamanhos diferentes e preços diferentes, para que, em sala, pudessem analisar qual seria a melhor compra. Os estudantes levaram exemplos de chocolates de várias marcas, biscoitos, leite e sabão em pó (Figura 93).

Figura 93 – Registro de pesquisa de sabão em pó feita em supermercado por E07.

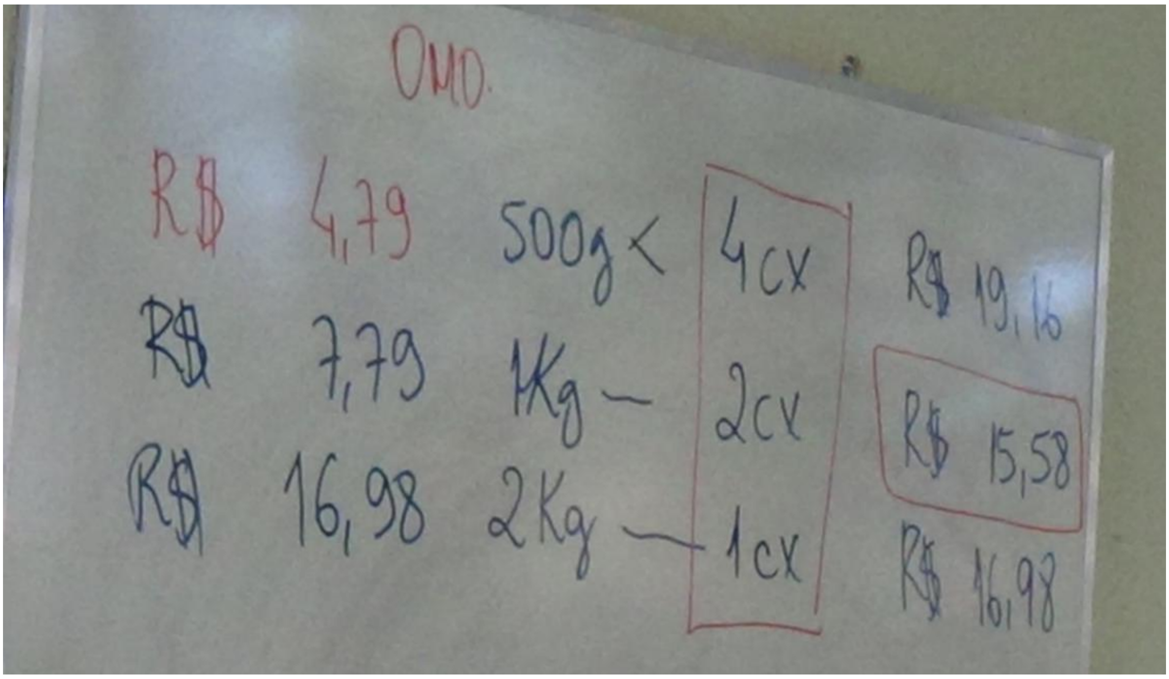
Fonte: Imagens capturadas pelo celular de E07.

De posse dos registros, foi iniciada a análise, inicialmente coletiva - com todos os grupos - das situações registradas pelos estudantes. O produto escolhido para isso foi o sabão em pó, pois, além do registro feito por E07, havia anotações feitas por E10, do mesmo produto, contendo a mesma marca, mas com a quantidade e o preço diferente da pesquisa de E07 (Protocolo 15).

Protocolo 15 – Comparando preços e quantidades de um mesmo produto.

P: Se eu quiser comprar 2 Kg de sabão, qual compra eu devo fazer? [Os alunos ficam em silêncio]. Quantas caixas de 500 gramas serão necessárias?
E04, E08 e E12: Quatro! [Respondem prontamente. Os demais alunos concordam em seguida]
P: E de 1k, eu vou precisar comprar quantas?
Todos: Duas!
P: E de 2 Kg?
E12: Uma!
P: Qual é o que sai mais barato? [Organiza as informações no quadro]
E10: O do meio, o do meio é mais barato!
P: Tem certeza? Como é que eu sei?
E10: É!
E04: Porque *7 + 7 =14* e *8 + 8 = 16* [faz uma estimativa]
E03: Mas eu acho melhor comprar a de 500g, é mais barato!
E04: Não, não é. Duas caixas de 1 Kg saem por menos de 16 reais! A de 500g, sai por mais...uma é R$4,79 [O estudante está fazendo por cálculo mental, pois, até então, não havia sido feito o registro dos valores gastos na compra de 2kg do produto]
P: Aqui, duas caixas dá menos de 16 reais?
E04: Dá sim! Dá 16 e pouco...
E03: Dá não. [Enquanto alguns alunos discutem, os demais fazem as operações necessárias para chegar a uma conclusão definitiva do impasse e informam os resultados para que a pesquisadora faça o registro - Figura 94. A pesquisadora volta então a questionar]

Figura 94 – Registro da análise da comparação dos preços e quantidade de um mesmo produto



Fonte: Intervenção

P: Se por mês, preciso comprar 2 Kg de sabão em pó, qual escolha sai mais barata? 4 caixas de 500g, 2 caixas de 1 kg ou 1 caixa de 2Kg?
E03: Quatro.
E04: Duas.
E12: [Sinaliza com os dedos que é apenas 1 caixa].
E08: Não, é duas caixas de 1Kg.
E03: Não, sério? Duas caixas fica barato se for o de 500g.
E08: Mas se você comprar só duas de 500g vai gastar mais do que só uma de 1Kg e vai levar menos E03! [risos].

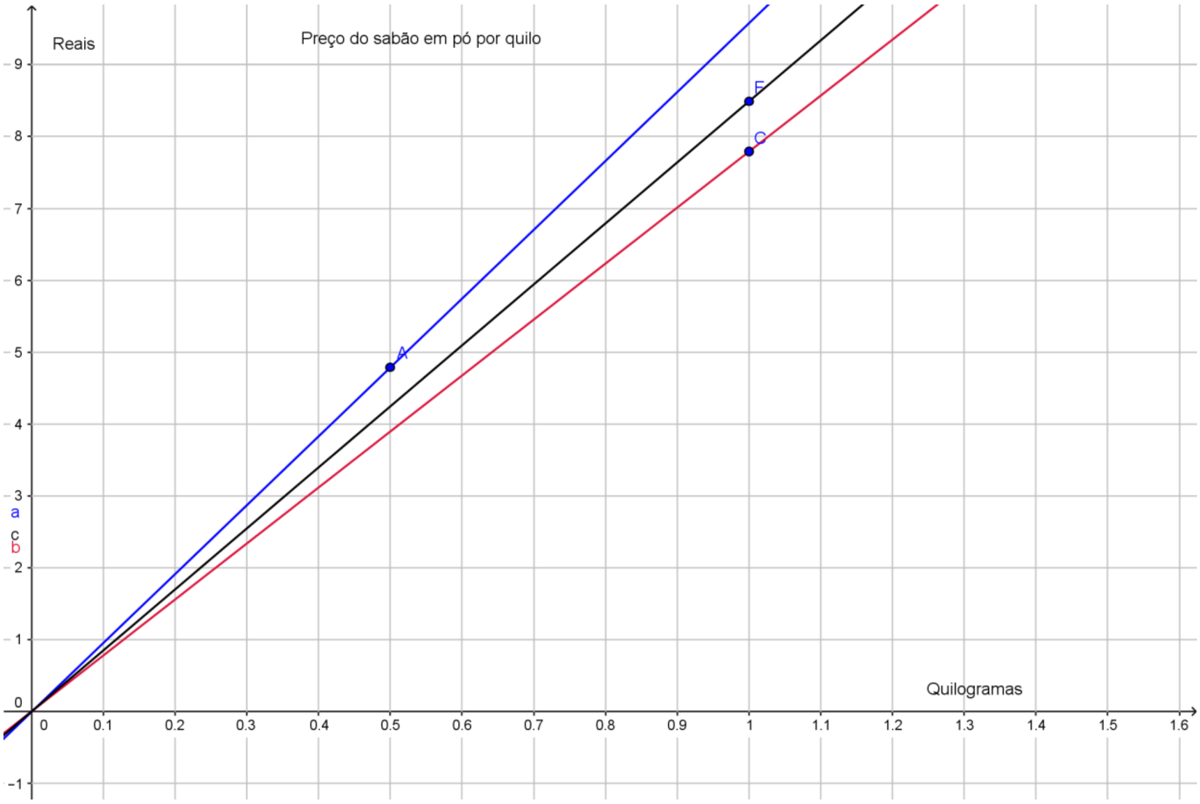
O Protocolo 15 apresenta a discussão que surgiu, a partir de pesquisa realizada fora da escola, em que os alunos precisavam analisar a melhor compra retratada na situação. Convém ressaltar que esse contexto foi facilitado pelo registro dos produtos através de fotos tiradas com celular. Castro e Castro Filho (2012) enfatizam que as tecnologias móveis e a *Internet* têm o poder de ampliar o tempo e o espaço da escola, trazendo novos contextos de aprendizagem para a sala de aula.

Essa situação, em específico, foi significativa para a ampliação do conceito de covariação dos estudantes, pois envolve a relação entre duas grandezas, no caso, preço do produto, em reais, e quantidade do produto, em quilograma. Mas também requisita a coordenação e comparação entre a relação de três conjuntos distintos - sabão Omo de 500g, sabão Omo de 1Kg e sabão Omo de 2 Kg. Como pode ser percebido durante discussão registrada no Protocolo 15 e Figura 94 que as crianças fizeram a comparação, considerando o produto de maior quantidade estabelecendo o seguinte teorema-em-ação: $f(x_1) = 4{,}79x_1$; $f(x_2) = 7{,}79x_2$ e $f(x_3) = 16{,}98x_3$; sendo x_1 = quantidade de caixas de sabão de 500g, x_2 = quantidade de caixas de sabão de 1 Kg e x_3 = quantidade de caixas de sabão de 2Kg. Assim, além de perceber a relação individual que regula cada função; 4,79; 7,79 e 16,98 - respectivamente, operadores funcionais das funções $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$, precisaram comparar as funções, considerando, para isso, respectivamente, os seguintes operadores escalares: 4, 2 e 1 e então, perceber que $f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$.

Esse teorema-em-ação deixa evidente que a covariação envolve a necessidade de coordenar duas sequências de padrões para cada função, buscando relações para variáveis dependentes e independentes (CONFREY; SMITH, 1994, 1995). Contata-se, ainda, que essa atividade foi além do estabelecimento desses padrões, já que requisitava a comparação do conjunto de dados de cada função com as demais.

Mesmo com a prévia conclusão de que a compra de 2 caixas de sabão em pó com 1Kg, seria mais rentável do que as demais (Protocolo 15), foi solicitada a construção do gráfico para representar a situação analisada e verificar se as conclusões estavam corretas (Figura 95).

Figura 95 – Gráfico construído coletivamente para representar a pesquisa do sabão em pó.



Fonte: Elaboração coletiva - *software* Geogebra.

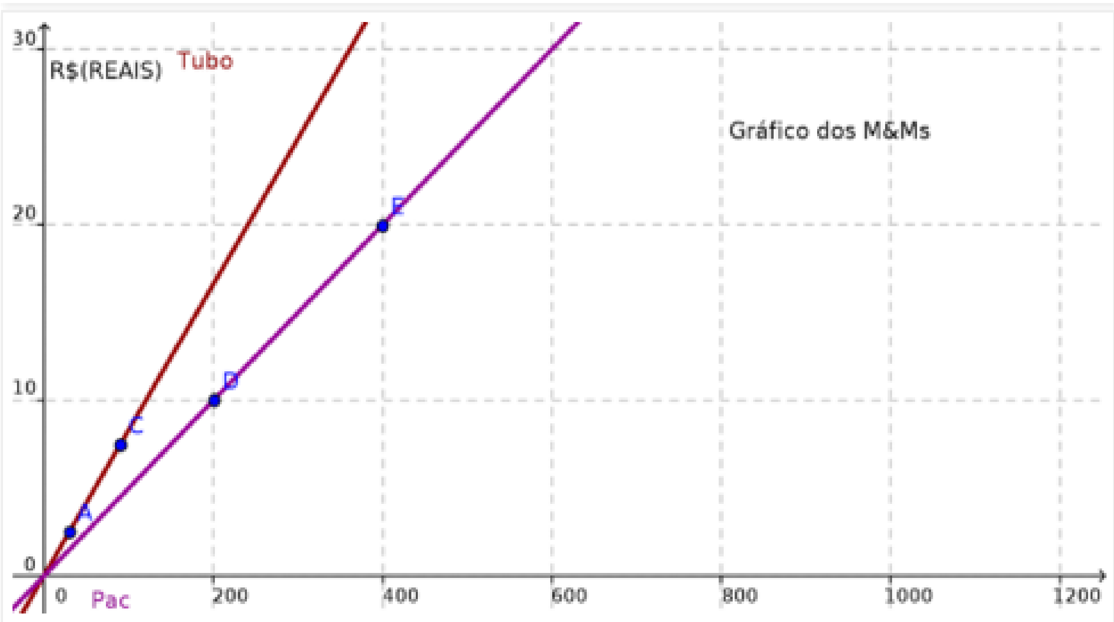
Para a construção do gráfico da Figura 95, os alunos perceberam, com facilidade, a coordenada do primeiro ponto de cada reta (0,5; 4,79); (1; 7,79) e (2; 16,98), reciprocamente: reta azul, reta vermelha e reta preta. Apenas E01 e E10 não perceberam de imediato a correspondência 500g = 0,5 Kg, necessária para a representação. Embora os estudantes já tivessem calculado a coordenada do segundo ponto, ver Figura 94, não conseguiram perceber essa correspondência. A relação escolhida para todos os pontos, inicialmente demarcados, foi a de dobro, assim, o segundo ponto das retas, pela ordem apresentada anteriormente, foram: (1; 9,58); (2; 15,58) e (4; 33,96), com o seguinte raciocínio: $2\ (x_1;\ f(x_1));\ 2\ (x_2;\ f(x_2))$ *e* $2\ (x_3;\ f(x_3))$. Após a construção e análise dos pontos do gráfico, os alunos percebem que muitos outros pontos poderiam terem sido utilizados, assim como visualizam pontos que já tinham definidos na Figura 94.

Carraher, Schliemann e Schwartz (2008) explicam que, assim como a tabela, os gráficos são importantes representações, pois podem complementar e revelar informações que não estão tão visíveis na tabela, sendo, também, uma representação adequada para compreensão da variação entre as duas variáveis representadas nos eixos, como pode ser constatado no relato dessas atividades. Percebe-se, ainda, que ao provocar nos estudantes as generalizações das situações, dá-se um caráter potencialmente algébrico ao raciocínio desenvolvido, principalmente ao adotar, pelo menos, três sistemas simbólicos: tabelas, gráficos e linguagem natural (CARRAHER; SCHILIEMANN, 2007).

Assim, mesmo a situação tendo surgido a partir do contexto social, levando-se em conta uma circunstância real de aplicação dos conceitos estudados, estes não foram abordados se limitando, apenas, às necessidades práticas da matemática, como pode ser constatado na descrição e nos teoremas-em-ação mobilizados durante resolução.

Outras atividades de análise de produtos foram realizadas pelos grupos e postadas no *blog* do projeto, para que fossem socializadas com os demais colegas. Percebe-se, ao analisar as postagens, que os estudantes deram uma importância social ao conceito de covariação (Figura 96).

Figura 96 – Comparação de preço de chocolate - função social.



No gráfico a reta marrom representa os m&m's em tubo e a reta lilás representa os m&m's em pacotes. No ponto D em 200 gramas custa quase R$10 e já 200 gramas do m&m's em tubo custa quase R$20.
Então galera comprem os m&m's em pacote porque sai mais barato!
#FICA A DICA!

Fonte: *Blog* Pensar, conectar e fazer[85].

[85] *http://pensar-conectar-fazer.blogspot.com.br/2015/10/o-passeio-doce.html*

A Figura 96 apresenta um recorte de uma postagem do grupo 2 que mostra a análise e a conclusão do grupo sobre a situação. Verifica-se que o grupo, além de explicar como fez a análise, aproveitou a postagem para emitir um alerta sobre o preço de confeites de chocolate vendidos em tubo e em pacotes, demonstrando entender a importância desse conceito para a vida social.

O *blog* deu significado às construções e às análises feitas pelo grupo, uma vez que, na visão das crianças, serviria para que outras pessoas pudessem entender como fazer uma melhor compra e assim, poder economizar. Castro *et al*. (2013) enfatizam que o *blog* pode trazer várias contribuições, pois, além de permitir que os estudantes o acessem fora da escola, viabilizam a produção de materiais e a aprendizagem.

Algumas das ideias para os temas dos vídeos criados pelo grupo, surgiram dos infográficos postados no *blog*. O grupo 2, com vídeo *Doçura economizada* e o grupo 3, com *Tenha consciência, coma bem!*, conseguiram definir e desenvolver o roteiro, após vivenciar essas situações de comparações criadas a partir de situações trazidas pelos alunos. O vídeo do grupo 1, *A grande corrida*, foi originado a partir da curiosidade das crianças em compreender a matemática por trás da caminhada.

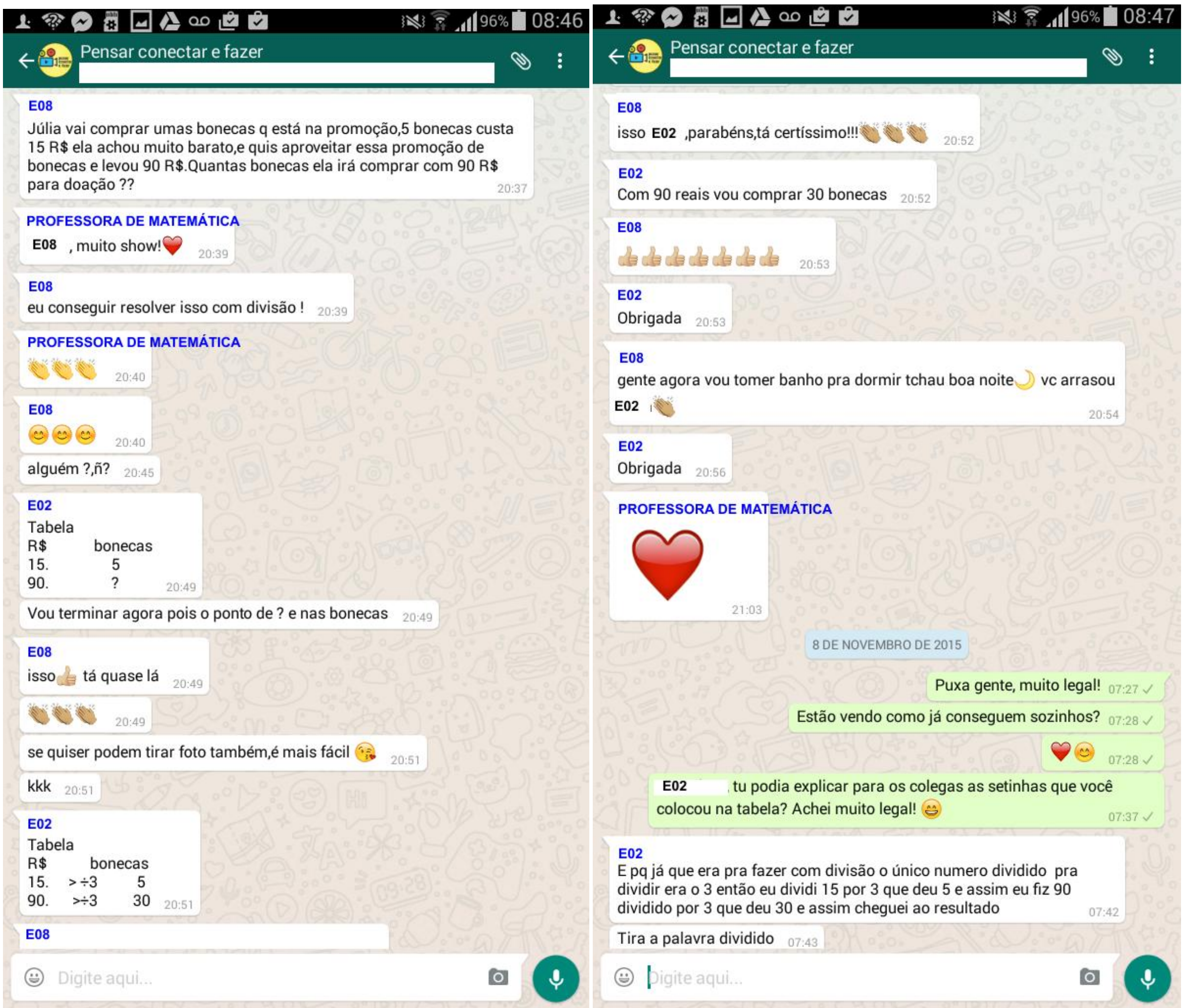
Desse modo, ressaltam-se dois aspectos observados em relação à produção de significados: primeiro, o caráter social, pois o vídeo do grupo 2 mostra como se pode economizar dinheiro em uma compra e o vídeo do grupo 3, aponta problemas de uma alimentação inadequada, exibindo comparações entre diferentes alimentos; e segundo, as representações e conceitos matemáticos empregados nos curtas, permitiram que o pensamento coletivo usado na construção desse produto, transitassem do conhecimento imediato e espontâneo, para a formalização e as abstrações matemáticas.

Os PCN apontam a importância de propor experiências concretas e diversificadas aos estudantes, de forma a propiciar a transposição dos conceitos estudados para contextos reais, ou seja, vivenciados diariamente (BRASIL, 1997). Fazer essa transposição significa explorar a matemática, não de forma superficial e artificial, mas permitindo que adaptem os conceitos aprendidos a novos cenários.

Sendo assim, as tecnologias digitais contribuem para a produção de significados, quando servem de instrumento de produção, de transformação de diferentes contextos, pois a significação também está relacionada com o engajamento dos alunos às atividades, o que pode ser constatado pela mudança de postura e comportamento frente ao processo de aprendizagem.

Dentre esses comportamentos, destaca-se o desenvolvimento da autonomia, do senso crítico, do poder de argumentação e da criatividade. No decorrer desta investigação, observou-se, ainda, o desenvolvimento de liderança de algumas crianças, verificadas nas atividades de produção, ou ainda, em discussão no *WhatsApp* (Figura 97).

Figura 97 – Produção de significados - postura e comportamentos.



Fonte: Grupo do *WhatsApp* - Pensar, conectar e fazer.

A Figura 97 mostra um protocolo de discussões em que E08 propõe uma situação para ser resolvida por E02, além disso, incentiva a resolução, apresentando dicas. Aqui, destaca-se o espírito de liderança de E08 e a autonomia de E02 e E08 em discutir os assuntos trabalhados na aula de matemática, fora do horário de aula, já que, de acordo com a imagem, as discussões iniciaram-se às 20:37 de 07/11/2015 - sábado, e foram finalizadas às 07:43 de 08/11/2015 - domingo. Ressaltam-se, ainda, as representações utilizadas por E02 que, de forma criativa, indicou as relações entre as grandezas da situação em uma tabela improvisada, conseguindo, também, explicitar seu pensamento, ao ser questionada pela pesquisadora.

Hegedus e Moreno-Armella (2009) enfatizam que ambientes que promovam a aprendizagem devem ser interativos, dinâmicos e sociais, possibilitando, também, que sejam feitas representações matemáticas de diferentes formas. Embora ambientes como *WhatsApp*, o *Cacoo* e o *blog*, não tenham sido criados com objetivo de trabalhar conceitos matemáticos a partir de diferentes representações, revelaram contribuições nos aspectos relacionados à representação, produção do conhecimento e significação.

Chegou-se ao final dos resultados com a constatação de que as crianças do grupo experimental vivenciaram a produção de conteúdo, a partir de atividades significativas. A integração das tecnologias digitais utilizadas em atividades desenvolvidas para intervenção permitiu que os alunos saíssem da condição de expectador passivo, ou seja, consumidor de informações e conhecimento, para colaborador ativo e produtor de conhecimento.

As abordagens desenvolvidas na intervenção contribuíram para a melhoria do desempenho em proporções, representações tabulares e gráficas e da noção de grandezas. A intervenção desenvolvida mostrou-se eficaz, pois as análises estatísticas revelaram uma melhoria significativa do GE, também constatadas pela evolução de estratégias e ampliação do repertório de competências explicitados pelos teoremas-em-ação.

Encontram-se nessa pesquisa, portanto, evidências das contribuições das tecnologias digitais, as quais serão expostas a seguir, na conclusão.

7 CONCLUSÃO

Essa pesquisa se propôs a analisar as contribuições de abordagens com o uso de tecnologias digitais no desenvolvimento do conceito de covariação presente nas estruturas multiplicativas, por estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, buscou-se alcançar os objetivos específicos traçados na introdução:

a) Verificar a compreensão de covariação por alunos do 6° ano do Ensino Fundamental em situações com suporte das tecnologias digitais a partir de múltiplas representações;
b) Mapear estratégias dos estudantes na resolução de situações que envolvam covariação;
c) Identificar a contribuição de recursos digitais para auxiliar a compreensão do conceito de covariação com diferentes representações.

Para desenvolver as atividades da intervenção e responder aos objetivos traçados, foram necessários estudos teóricos que ajudassem a compreender as questões didáticas, conceituais e cognitivas desse conceito. Verificou-se que diversos pesquisadores (CABRITA, 1998; LAMON, 1994, 2005, 2007; LESH; POST; BEHR, 1988; SILVESTRE, 2012) encontraram associações entre o raciocínio proporcional e a covariação, ao indicarem que este conceito está inserido em situações de proporcionalidade quando se necessita, por exemplo, fazer múltiplas comparações e, assim, tomar decisões baseadas em dados qualitativos e/ou quantitativos.

A comparação entre grandezas distintas requisita o estabelecimento de relações funcionais, denominado de invariância, e de relações escalares, também chamado de covariância de quantidades (LAMON, 2005; 2007; PONTE *et al*., 2010). Todavia, o estudo realizado evidencia que a covariação envolve a coordenação entre essas duas relações, funcionais e escalares, já que, para compreender como a relação entre duas grandezas varia em conjunto, é preciso entender que a relação entre elas permanece constante, ou seja, que a relação funcional é a mesma para esse conjunto de variáveis.

Logo, devido às características conceituais da covariação, percebe-se seu vínculo com o raciocínio multiplicativo que está também ligado ao estabelecimento de uma relação fixa entre duas quantidades de mesma natureza ou distinta e uma relação constante entre elas. Após análise dessas estruturas, concluiu-se que, dentre as situações das estruturas multiplicativas estudadas por Vergnaud (1983, 1988, 2009); Magina, Santos e Merline (2010, 2012, 2014) e Santos (2012, 2015), as que envolvem o conceito de covariação são as relações quaternárias dos eixos de proporção simples, dupla e múltipla que possuem complexidades diferentes.

As atividades desenvolvidas ao longo da intervenção buscaram aperfeiçoar a compreensão das relações envolvidas nessas situações, procurando, desta forma, desenvolver o raciocínio multiplicativo. Devido à continuidade existente entre o campo aditivo e multiplicativo, foi necessário, também, pensar em atividades que os estudantes não pudessem resolvê-las, apenas, por meio de soma de parcelas iguais, possibilitando a ruptura entre a adição e a multiplicação.

Em virtude de as situações de proporção apresentarem uma estrutura funcional, percebeu-se uma conexão entre o campo conceitual multiplicativo e algébrico. É certo dizer que a covariação também está ligada ao campo algébrico, principalmente em se tratando de situações envolvendo os diferentes tipos de funções. No entanto, por causa do nível escolar dos sujeitos da pesquisa, optou-se por uma abordagem que considerou a aritmética, mas, também, alguns elementos da álgebra. Essa opção metodológica também foi escolhida por possibilitar que os estudantes foquem em buscar generalizações, estabelecer relações, regularidades e padrões, e não no simbolismo algébrico.

Considerou-se, ainda, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) que explica que a construção de um conceito está ligada a uma tríade que relaciona situações, invariantes e representações simbólicas. Sendo assim, foi utilizado e incentivado o uso de diferentes representações: textual, icônica, tabular e gráfica, apoiadas por tecnologias digitais. Estas foram trabalhadas em diversas situações, não apenas escolares. Por último, a mediação da pesquisadora auxiliou os estudantes a compreender as relações envolvidas (invariantes).

A opção de desenvolver intervenção com suporte de tecnologias digitais foi fundamentada em pesquisas, as quais indicam o uso de múltiplas representações por meio de ambientes computacionais (CONFREY, 1992; BORBA; VILLARREAL, 2005; FERRARA; PRATT; ROBUTTI, 2006; PIERCE; STACEY, 2001), apontam benefícios do uso das tecnologias digitais, como: rapidez e agilidade nas construções; visualização e simulação de situações (CASTRO, 2012) e da abordagem *seres-humanos-com-mídias* (ARZARELLO; ROBUTTI, 2010; BARBOSA; 2012; BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA, 2007), a qual considera que a aprendizagem é construída coletivamente a partir da interação entre seres humanos e mídias.

Apesar da existência de poucos recursos digitais que possibilitassem o trabalho do conceito de covariação e que atenda requisitos como: propiciar o trabalho de múltiplas representações a partir do raciocínio multiplicativo; não enfatizar o simbolismo algébrico; ser adequado para o 6° ano do Ensino Fundamental; foram escolhidos: o *software Geogebra,* o aplicativo *online Cacoo*, o recurso digital *Equilibrando proporções*, o aplicativo *WhatsApp* e o *blog*. Ressalta-se que a escolha de vários recursos se deu pela necessidade de suprir limitações identificadas nas análises, por meio da integração dessas ferramentas.

Para responder ao primeiro e ao segundo objetivo específico desta tese, realizou-se análise quantitativa (desempenho) e qualitativa (estratégias) dos dados coletados antes, durante e após intervenção. Os testes estatísticos aplicados no início da intervenção, com GC e GE, constataram que os dois grupos escolhidos para participar da pesquisa não apresentavam diferenças estatísticas significativas, o que foi importante para que se pudesse realizar uma comparação posterior e inferir sobre a melhoria de desempenho. Embora apenas o grupo experimental tenha passado pela intervenção, os conteúdos trabalhados, em ambos os grupos, estavam de acordo com o plano de ensino da escola, tendo sido, também, utilizados pelos dois grupos, o mesmo livro didático de matemática e o recurso digital *Equilibrado proporções*, já que este fazia parte da pesquisa de mestrado da professora de matemática. Desta forma, os grupos receberam tratamentos diferenciados apenas em relação à metodologia e às demais tecnologias digitais escolhidas para intervenção.

As análises em relação ao conhecimento de covariação foram feitas considerando: (1) desempenho em situações de proporções; (2) desempenho na compreensão de grandezas; (3) desempenho em representação tabular e gráfica; e (4) desempenho geral, com todos os aspectos analisados na intervenção.

As questões relacionadas com o desempenho em situações de proporções (1) foram divididas em: proporção simples, dupla e múltipla. Após a intervenção, os testes estatísticos evidenciaram um desempenho estatisticamente superior em situações de proporção simples e múltipla. Apesar de ter acontecido uma melhoria da média no desempenho de proporção dupla, esta não foi suficiente para que fosse significativa. Para Gitirana *et al.* (2014), situações de proporção dupla tem uma complexidade inferior que as de proporção múltipla, todavia, o que foi percebido após a intervenção, é que os alunos do GE apresentaram maior dificuldade em proporção dupla do que em múltipla.

Verifica-se que as três situações de proporções analisadas possuem estruturas diferentes, o que pode ter influenciado os resultados dos testes. Na proporção simples, há uma relação de proporcionalidade entre quatro quantidades, agrupadas duas a duas. Na proporção múltipla e dupla, têm-se, pelo menos, seis quantidades agrupadas duas a duas. A diferença entre a proporção múltipla e dupla está que a primeira forma uma composição de duas proporções simples, todas relacionadas, formando uma função composta; enquanto que na segunda, há relações de dependências e independências, pois tem em sua estrutura uma função bilinear.

Logo, essas características estruturais diferentes permitem que a proporção múltipla possa ser representada por uma função linear, o que não é o caso da proporção dupla. Como a intervenção se baseou em representações lineares, a proporção dupla não pode ser representada por meio de gráficos. Constata-se, nas análises de estratégias e verificações de teoremas-em-ação, que há similaridade entre a proporção simples e múltipla, já que ambas podem ser representadas por funções lineares.

A verificação qualitativa dos protocolos de transcrição, dos testes (pré e pós) e das atividades desenvolvidas correspondentes às situações de proporção, constatou que, antes da intervenção, a concepção dos estudantes em relação à multiplicação era limitada à soma de parcelas iguais. Apesar dessa concepção ser correta, esta fica restrita à continuidade entre a adição e multiplicação, o que implica a necessidade de também propor novas situações que provoquem o rompimento entre o campo aditivo e multiplicativo, além de considerar as diferentes complexidades desse campo conceitual. Em relação à divisão, os estudantes conseguiram associá-la à multiplicação, ao explicarem o uso da prova real, porém, relacionaram a divisão somente à ideia de cota (medir).

Também foi verificado, na sondagem feita na primeira intervenção, que os estudantes, a princípio, preocupavam-se, exclusivamente, com os números e as operações a serem realizadas, ao enfatizarem o uso do algoritmo com prova real e a utilização excessiva de regras. Atribuem-se essas concepções e ações ao fato de o ensino de matemática focar mais na operação do que na compreensão da situação e das relações envolvidas. Tais problemas devem-se, em parte, à formação matemática de alguns professores que têm a concepção de que a lógica matemática pode ser ensinada por repetição das definições e dos algoritmos, por meio de palavras-chave ou modelos pré-definidos sem o entendimento das relações ali estabelecidas (MAGINA *et al*., 2001; MAGINA; SANTOS; MERLINE, 2013). Infelizmente, essa concepção de ensino tem predominado durante muitos anos nas escolas brasileiras.

Assim, as estratégias que prevaleceram, antes da intervenção, foram: aditivas, com uso de agrupamento, correspondência e adição de parcelas iguais - algoritmo da adição; multiplicativas, com predomínio do algoritmo da multiplicação, mesmo quando a situação era de divisão; e a combinação de estratégias, aditivas e multiplicativas. Essas estratégias e raciocínio apresentados no pré-teste pelos dois grupos estão de acordo com o que se esperava, em relação ao desempenho e ao raciocínio empregado por estudantes do 6° ano do Ensino

Fundamental (GITIRANA *et al*., 2014). Nenhuma das resoluções explicitou relações entre grandezas distintas (funcional) ou dentro da mesma medida (escalar), assim como verificado na pesquisa de Castro *et al*. (2015), o que sugere que os estudantes não compreendiam covariação.

Após a intervenção com o uso de tecnologias digitais, os testes demonstraram mudança de estratégias de todos os estudantes do GE, que, mesmo quando a questão estava errada, esta explicitava o raciocínio multiplicativo por meio de relações funcionais e/ou escalares. Gitirana *et al*. (2014) explica que estratégias que considerem relações são mais comuns de serem encontradas em estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental, contudo, as que foram retratadas em seu estudo não deixavam explícitas as relações consideradas. Ressalta-se, ainda, que além das estratégias, foi possível verificar teoremas-em-ação mobilizados pelas crianças durante as atividades.

No caso da proporção dupla, chamou atenção o fato dos estudantes terem considerado, em suas estratégias, todas as relações existentes nesse tipo de situação como dependentes, o que na realidade não é. Como indicado anteriormente, esta estratégia pode ser oriunda da concepção de linearidade desenvolvida na intervenção. Não foram encontrados, na literatura, estudos que pudessem esclarecer esses resultados, requisitando pesquisas para um maior aprofundamento no futuro.

O desempenho na compreensão de grandezas (2) analisou, apenas, o entendimento do tipo de relação: direta e inversamente proporcional. Os testes estatísticos não apontaram melhoria significativa, nem do GE e nem do GC, mesmo com aumento da média apresentada pelo GE. Já as análises qualitativas realizadas com os dados coletados ao longo da intervenção, revela que, no início, as crianças tinham dificuldades em reconhecer as grandezas em uma situação, mas que, no final da intervenção, passaram a identificar e estabelecer relações entre grandezas. Acredita-se que o desenvolvimento dessa competência tenha sido essencial para o sucesso da intervenção, uma vez que, ao invés das crianças focarem apenas nos números de uma situação, passaram a buscar as grandezas e estabelecer suas relações.

Foi percebido, portanto, durante a intervenção, que, ao identificar as grandezas, as crianças conseguiam perceber e diferenciar os conjuntos formados pelas medidas de mesma grandeza e, assim, definir as relações entre esses conjuntos (funcional) dentro de um mesmo conjunto (escalar). O entendimento das relações, isto é, do invariante correspondente ao operador funcional, assim como, da relação escalar, revelou-se importante requisito para a compreensão da covariação. Os estudantes também foram capazes de comparar o conjunto de dados de uma situação com o de outra situação.

O desenvolvimento da noção de grandeza é recomendado por documentos oficiais como o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (RCNEI) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática. Essa recomendação é dada a partir do bloco Grandezas e Medidas, presente nos dois documentos (BRASIL, 1997; BRASIL, 1998b).

Cotidianamente, o conhecimento matemático relativo às Grandezas e Medidas são requisitados, demonstrando a utilidade social do conhecimento matemático. A exploração dessas noções é importante também para os demais blocos de conteúdos matemáticos: Números e Operações, Espaço e Forma e Tratamento da Informação. Mesmo com a importância dada às grandezas, já que o RCNEI e os PCN possuem um bloco específico, estas têm sido trabalhadas na escola apenas como conteúdo (unidades de medida, medidas de comprimento, medidas de área, dentre outros) e, em muitos casos, sem aproveitar as possibilidades interdisciplinares que podem proporcionar aos demais blocos e conteúdos.

O desempenho em representações tabulares e gráficas (3) foi significativamente superior para GE, após intervenção, nos três aspectos analisados: interpretação de gráficos lineares; identificação de padrões em tabela; e construção do gráfico.

Os dados qualitativos deixam evidente que na interpretação de gráficos os estudantes explicitaram as grandezas envolvidas, estabeleceram as relações funcionais e escalares para cada reta representada. Também foram capazes de comparar o conjunto de dados representados em cada gráfico, demonstrando um aumento no repertório de competências percebidas no pré-teste.

Em relação à identificação do padrão em tabelas, constatou-se que, diferente do pré-teste, os alunos estabeleceram o padrão aditivo entre as grandezas; no pós-teste, os estudantes do GE explicitaram as relações funcionais, demonstrando também compreender o padrão escalar, utilizando o raciocínio multiplicativo para estabelecer essas relações. Carraher, Schliemann e Brizuela (2000) explicam que é mais comum que os alunos percebam o padrão aditivo do que o multiplicativo em representações tabulares, confirmando a eficácia da intervenção em desenvolver novos esquemas de ação.

A construção de gráficos lineares foi quantitativamente e qualitativamente superior aos resultados apresentados no pré-teste, no qual nenhum estudante conseguiu pontuar. Os estudantes deixaram evidente a falta de conhecimento das convenções, da compreensão das variáveis de cada eixo do gráfico e da escala usada para retratar as coordenadas. Com a intervenção, estes passaram a conhecer, pelo menos, as convenções necessárias para esse tipo de representação. Logo, mesmo os estudantes que não pontuaram na construção de gráficos lineares, manifestaram mudanças de concepções e ampliação das competências.

A compreensão da relação entre os dois eixos de um plano cartesiano é necessária e requisitada pela escola, uma vez que o estudante precisa saber ler um gráfico, organizar e operar os dados, de modo a conseguir relacionar as informações com os diferentes tipos de representação, já que as representações gráficas, tais como quadros, tabelas e gráficos, têm uma função social que vai além da comunicação (CASTRO, 2012).

Ao considerar a intervenção como um todo, ou seja, o desempenho geral (4) dos estudantes em proporções, compreensão das relações e representações tabulares e gráficas, constatou-se que houve uma melhora estatisticamente significativa, tanto em relação ao GE e GC, que passaram a divergir significativamente, como quando comparado o pré-teste e pós-teste, com aumento expressivo de todas as médias do GE.

Estas constatações em relação a todos os aspectos analisados na intervenção, sejam específicos ou gerais, mostram que os estudantes do GE, embora não fossem capazes de compreender um conjunto de dados, inicialmente, após intervenção desenvolveram esquemas que possibilitaram o entendimento da invariância e da covariação. Isso fica claro quando, além de estabelecer uma relação, analisam e/ou representam um conjunto de dados, seguindo esse mesmo padrão, seja por tabela ou gráfico. Passando, portanto, a saber coordenar a mudança de duas variáveis, conforme explicado por Confrey e Smith (1994, 1995), aqui apresentado como grandezas ou por x e $f(x)$. Além dessa coordenação de variáveis de uma mesma situação, desenvolveram a competência de comparar o conjunto de dados com outros de mesma natureza, e inferir resultados a partir da consciência dessas relações. Pode-se, ainda, concluir que as crianças passaram a compreender e estabelecer padrões, mas, também, a questionar a falta deles.

De acordo com o que foi visto nesta pesquisa, o raciocínio covariacional tem relevância não apenas na interpretação e representação de informações em um gráfico de uma função, mas em situações reais presentes na vida social e que nem sempre é representada por função, embora isso possa ser feito. Como a intervenção não teve a intenção de enfocar o simbolismo algébrico, comuns na álgebra, os estudantes puderam se concentrar na compreensão e estabelecimento de relações, de padrões, de generalizações, dentre outras competências relacionadas com esse campo.

Acredita-se que, devido às capacidades e às competências desenvolvidas pelos estudantes ao longo da intervenção, estes deverão ter mais facilidade ao iniciarem estudos de função, pois, de acordo com Blanton e Kaput (2004), o raciocínio covariacional serve de trampolim cognitivo no desenvolvimento do raciocínio funcional. Esta conclusão se fundamenta nas análises dos teoremas-em-ação mobilizados pelos estudantes durante a resolução de situações propostas, que evidenciam o raciocínio funcional do estudante.

Os resultados deste estudo demonstram que a utilização de relações multiplicativas permitiu que os alunos melhorassem o desempenho e desenvolvessem a compreensão em relação à natureza escalar e funcional das grandezas envolvidas, o que está relacionada com ampliação da capacidade de generalização dos alunos acerca das relações existentes em cada variável e entre variáveis, flexibilizada pelas diferentes representações utilizadas, como tabelas, gráficos ou linguagem natural e matemática. Concorda-se com os pesquisadores Carraher *et al.* (2006), ao afirmarem que as representações têm um importante papel na compreensão das relações de uma situação.

Os bons resultados obtidos no desempenho dos estudantes do GE demonstram que as atividades desenvolvidas junto a esse grupo, com suporte de tecnologias digitais, foram importantes para a diferença de resultados entre os grupos, após intervenção. Para obter esse rendimento, foi necessário traçar estratégias pedagógicas e didáticas que permitissem que as crianças superassem as dificuldades inerentes da complexidade conceitual de cada situação.

Assim, para responder ao terceiro objetivo específico desta tese, analisou-se, qualitativamente, as contribuições das tecnologias digitais para o desenvolvimento conceitual de covariação. A avaliação desses dados possibilita verificar contribuições conceituais das tecnologias digitais utilizadas na intervenção, relacionadas com: a visualização e a representação; a construção e produção de conhecimento; e a significação.

Os recursos digitais que mais contribuíram com a visualização e a representação, foram o *software* Geogebra, o aplicativo *online Cacoo*, o recurso digital *Equilibrando Proporções* e o *WhatsApp*.

O *software Geogebra* deu agilidade, precisão e dinamicidade na construção de gráficos, possibilitando o surgimento de discussões relacionadas à compreensão do conceito de covariação e, desta forma, os alunos focaram no entendimento das relações e não nas habilidades manuais e técnicas de construção. Permitiu, também, que os alunos conhecessem as convenções necessárias para representar gráficos lineares, pois os estudantes puderam visualizar elementos como: plano cartesiano, abscissa, ordenada, título, par ordenado, dentre outros. Com a utilização desse *software,* os alunos passaram a entender que o ponto no gráfico era formado por duas coordenadas e que cada uma delas representava uma medida em cada eixo e ainda que, para que o gráfico fosse uma reta, a relação entre essas coordenadas precisaria ser constante, favorecendo, portanto, a percepção da linearidade, ou seja, de que os pontos marcados em um gráfico linear seguem o mesmo princípio lógico. Devido a essa compreensão de linearidade, puderam inferir pontos que extrapolavam a representação de um segmento de reta, por exemplo e, ainda, verificar erros quando pontos ficavam fora da reta.

Embora o *Geogebra* possibilitasse a representação tabular, optou-se por fazer essas representações pelo aplicativo *online Cacco*, já que, além das tabelas, ele também permitia a representação icônica, textual e, até mesmo, gráfica. Todavia, constatou-se as limitações na construção de gráficos pelo *Cacoo*, uma vez que esta era dificultada pela falta de parâmetros e elementos que servissem para subsidiar essa construção, fazendo com que os alunos perdessem muito tempo e, mesmo assim, os gráficos apresentassem problemas de proporcionalidade.

Assim, a utilização em conjunto desses dois recursos, *Geogebra* e *Cacoo*, possibilitou a exploração, sem limitações, das múltiplas representações (tabular, gráfica, icônica e textual), para uma melhor compreensão dos invariantes (PRAIN; WALDRIP, 2006).

As múltiplas representações puderam também ser exploradas, simultaneamente, pelo *Equilibrando proporções*. Esse recurso digital oportunizou a manipulação e simulação das grandezas representadas na forma icônica, textual e tabular, em situações de proporção simples - correspondência muitos-para-muitos, possibilitando, também, a ampliação do campo numérico, ao propor situações com grandezas contínuas envolvendo números decimais. Apesar de ter como objetivo de apenas identificar se o tipo de grandeza era direta ou inversamente proporcional, devido ao seu poder de representação e simulação, foi proposto ser explorada, principalmente, a compreensão das relações entre as grandezas. Sendo assim, possibilitou o desenvolvimento e aprimoramento de estratégias, já que, ao realizar as simulações, era possível perceber a variação dos dados, que acontecia de acordo com o aumento ou diminuição das quantidades representadas de forma icônica. Verifica-se que as simulações feitas por representação icônica não são transpostas para a tabela, que se apresenta estática no recurso, ou seja, não permite nenhum tipo de interação. Em relação às adequações pedagógicas e didáticas para o uso do recurso digital *Equilibrando proporções*, certificou-se algumas inadequações relacionadas à proposição de situação com contexto inadequado.

O *WhatsApp* também trouxe benefícios em relação à exploração da visualização e representação. Mesmo não tendo sido criado para essa finalidade, se mostrou um ambiente propício às visualizações e às múltiplas representações, nas quais aparecem na forma de registros fotográficos, textos, áudios, vídeos, tabelas, gráficos, desenhos, *emojis*, explorando, desta forma, a construção da noção de grandeza e suas relações e as interpretações de gráficos lineares, proporcionando, assim, o desenvolvimento conceitual de covariação. Mesmo mostrando algumas limitações em representar notações matemáticas e símbolos, estas foram, aos poucos, sendo contornadas pelos próprios estudantes.

A construção e a produção do conhecimento foram outros tipos de contribuição das tecnologias à aprendizagem, ou seja, para a melhoria do desempenho e estratégias dos estudantes do GE, tendo sido viabilizada pela utilização do *Geogebra*, em que os estudantes, em grupo, construíam gráficos para representar a situação trabalhada; pelo aplicativo *online Cacoo*, ao possibilitar a criação de infográficos com representações icônicas, tabulares e textuais; pelo *blog* do projeto; e pelo *WhatsApp.*

Dentre as atividades que envolviam tecnologias digitais, o *WhatsApp* mostrou-se um recurso com potencial não apenas de comunicação, mas de produção de conhecimento, pois a reunião e a interação de pessoas com diferentes saberes favoreceram a consolidação de uma inteligência coletiva. Essa interação ajudou no desenvolvimento da capacidade de argumentação; de expressão e de representação da matemática; de aprimorar estratégias em processo de resolução de problemas; competências estas adquiridas ao longo do processo interativo.

A multimodalidade presente no *WhatsApp* propiciou a integração de tecnologias analógicas (lápis, papel, livro didático) e digitais (*Geogebra*, imagens, vídeos), possibilitando que os estudantes expressassem seus raciocínios de diferentes formas. Constatou-se que as características multimodais do *WhatsApp,* aliadas com a proposta desenvolvida na pesquisa e com a mediação da pesquisadora, possibilitaram com que os esquemas de uso desse recurso pudessem evoluir, de artefato para instrumento de produção do conhecimento. Estas constatações estão de acordo com o que Arzarello e Robutti (2010), Clark-Wilson (2013) e Vérrilon e Rabardel (1995) chamam de gênese instrumental. Essa unificação entre seres humanos e mídias, segundo Borba e Villarreal (2005), forma um coletivo pensante, contribuindo para a produção de conhecimento, o que vai ao encontro com a abordagem *seres-humanos-com-mídias*, usada para fundamentar este trabalho.

Ainda considerando a construção e a produção do conhecimento, o *WhatsApp*, assim como o *Cacoo*, o *Geogebra* e o *blog*, foram utilizados no processo de produção de curtas. Esse processo, possibilitado pela integração de tecnologias analógicas e digitais, demonstra o crescimento cognitivo, tanto no aspecto conceitual, procedimental, como atitudinal, pois, além do domínio e precisão na abordagem dos conceitos matemáticos, os estudantes se apropriaram dos procedimentos necessários em cada etapa, desenvolvendo também atitudes importantes e necessárias ao convívio em sociedade, como: a autonomia, o poder de argumentação, o senso crítico e a criatividade. Demonstrando que as tecnologias digitais podem favorecer a mudança de postura do estudante, o qual passam de consumidores de informação, para produtores de informação e conhecimento.

No caso, o vídeo, fruto dessa construção coletiva, desenvolvida por meio de troca de ideias, discussões, simulações, compartilhamento de informações, é um produto concreto das concepções construídas ao longo do projeto em relação ao conceito de covariação presente nas estruturas multiplicativas. Esse produto deu um grande significado ao trabalho até então desenvolvido, uma vez que os estudantes foram corresponsáveis por todo o processo, criando a história, pensando no contexto e na situação abordada, sendo, portanto, autores dessas produções. Concorda-se, portanto, com a afirmação de Wild e Pfannkuch (1999) de que contextos investigativos são propícios para que os estudantes ajam como produtores de dados.

As análises mostram, ainda, que o processo de produção de vídeos teve contribuições das tecnologias digitais, relacionado com todas as categorias elencadas nessa análise: a visualização e a representação; a construção e produção de conhecimento; e a significação.

A significação foi considerada a partir de três sentidos: o primeiro, associado ao caráter social que determinada situação está inserida; o segundo, ao significado matemático, relacionado às representações e aos conceitos matemáticos necessários para formalizar as abstrações matemáticas; e o terceiro, ligado ao engajamento provocado pelo envolvimento com as atividades e situações abordadas na intervenção.

As atividades desenvolvidas no *WhatsApp* e a mediação da pesquisadora, contribuíram para a significação, considerando os três sentidos dados nessa pesquisa, pois favoreceu a construção do significado matemático e social do conceito, além de proporcionar o engajamento às atividades. Atribui-se a essas evidências a proposta desenvolvida nesta intervenção, assim como, a capacidade que esse aplicativo tem de articular representação, comunicação e mobilidade.

De todos os recursos utilizados nessa intervenção, o *blog* foi o que teve o uso mais restrito, porém também trouxe benefícios para a significação, pois contribuiu para dar significado às construções e às análises de situações reais feitas pelo grupo. Sentido muito semelhante foi atribuído aos infográficos e gráficos construídos pelos estudantes por meio do aplicativo *Cacoo* e do *Geogebra*, respectivamente. Esses infográficos traziam contextos reais de comparação de preços de produtos em supermercados e ao torná-lo público, as crianças acreditavam que serviria para que outras pessoas pudessem entender como fazer uma melhor compra e, assim, economizar.

Defende-se a premissa de que as tecnologias digitais contribuem para a produção de significados quando servem de instrumento de produção, de transformação de diferentes contextos, mas também ao possibilitar que o estudante seja confrontado com situações de tomada de decisão e de confrontos de ideias, pois a significação também está relacionada com o engajamento dos alunos às atividades, o que pode ser constatado pela mudança de postura e comportamento frente ao processo de aprendizagem. Dentre esses comportamentos, destaca-se o desenvolvimento da autonomia, do senso crítico, do poder de argumentação e da criatividade. No decorrer desta investigação, observou-se, ainda, o desenvolvimento de liderança de algumas crianças, verificadas nas atividades de produção, ou ainda, em discussão no *WhatsApp.*

Destarte, as tecnologias digitais utilizadas nessa intervenção foram importantes para tornar o aluno sujeito ativo nos processos de aprendizagem. Além de ter possibilitado um melhor desempenho e evolução de estratégias, também contribuiu no desenvolvimento de competências que ampliarão a capacidade de os estudantes gerenciarem seu próprio processo de aprendizagem.

Assim, acredita-se que os objetivos propostos inicialmente, nesta tese, foram alcançados, de modo que acrescentaram conhecimentos importantes sobre o desenvolvimento do conceito de covariação por estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental, com múltiplas representações e suporte das tecnologias digitais. Dentre essas informações, têm-se que: (1) a covariação está presente nas estruturas multiplicativas em situações quaternárias do eixo de proporção - simples, dupla e múltipla; (2) o desenvolvimento da noção de grandeza e sua identificação nas situações são importantes para que os estudantes centrem suas atenções nas relações e não apenas nos números; (3) a análise das estratégias e dos teoremas-em-ação empregados pelos estudantes, ao longo de uma sequência didática, ajuda a compreender a eficiência didática da metodologia, permitindo modificações no planejamento; (4) o uso de múltiplas representações contribui para que os estudantes compreendam e estabeleçam relações (funcionais e escalares) desenvolvendo o raciocínio multiplicativo; (5) as tecnologias trazem contribuições relacionadas à visualização e representação; construção e produção de conhecimento e significação, dentre outras já apontadas.

Convém ressaltar que, ao propor a exploração do conceito de covariação, não se pretende trazer mais um “conteúdo” para ser trabalhado na escola. Entende-se que, devido sua inserção nas estruturas multiplicativas, é pertinente e adequado ser explorado na Educação Básica, a partir de situações de proporção.

Ressalta-se a importância de que materiais didáticos como livros e recursos digitais explorem, principalmente em situações multiplicativas de proporção, representações tabulares, gráficas e icônicas, assim como a combinação entre elas, já que ficou evidente suas contribuições para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

A pesquisa, ao apontar limitações e/ou contribuições de determinados recursos utilizados, traz indícios de elementos a serem (des)considerados, o que pode fornecer requisitos para a elaboração de outros materiais didáticos, como livros didáticos e recursos digitais, que possam ser utilizados para superarem as dificuldades cognitivas na construção do conceito de covariação, de função e das estruturas multiplicativas.

A abordagem utilizada nessa intervenção pressupõe que o estudante seja protagonista dos processos de ensino e de aprendizagem. Assim, ressalta-se a necessidade de as ações didáticas considerarem não apenas o desenvolvimento conceitual, mas procedimental e atitudinal.

A produção de conhecimento mobilizado pelas tecnologias digitais tem favorecido abordagem didática. Portanto, é preciso considerar metodologias em que os alunos não sejam um receptor passivo, mas que, a partir de atividades significativas, ou seja, que promovam o engajamento, demonstrem disposição em aprender.

Há ainda implicações importantes para o ensino de covariação, função e estruturas multiplicativas, pois a metodologia utilizada mostra a efetividade das ações pedagógicas, considerando o processo de construção de uma sequência de atividades baseadas em teorias, mas aplicadas, em termos práticos, em ambiente escolar. Todavia, indica-se a necessidade de formação de professores para o desenvolvimento e a utilização dessas atividades que poderão ser utilizadas, melhoradas ou adequadas para a realidade de cada escola.

A melhoria significativa do desempenho e competências dos estudantes do GE, conforme explicitado anteriormente, implicam a responsabilidade da pesquisadora em proporcionar ao GC semelhante tratamento. Desta forma, as atividades e metodologias desenvolvidas, serão, em conjunto com a professora de matemática e com apoio dos estudantes do GE, realizadas com os estudantes do GC. Assim, além de poder dar tratamento semelhante aos dois grupos, pretende-se verificar adequações para a utilização desta metodologia em outros contextos.

As análises e reflexões realizadas ao longo desta pesquisa, trazem questões tratadas pela pesquisa que a investigação não foi capaz de abarcar, devido ao tempo e a necessidade de atender aos objetivos traçados inicialmente.

Estudos posteriores poderão analisar com maior profundidade as situações de proporção dupla e múltipla, buscando situações relacionadas com o cotidiano não escolar e expliquem melhor as relações, as representações mais adequadas e os possíveis teoremas-em-ação mobilizados. Além disso, é preciso, também, considerar a aplicação dessa intervenção em outros contextos e diferentes níveis de escolaridade, verificando se surgem outras estratégias e teoremas-em-ação, diferentes dos que foram apresentados nesse estudo.

Não se pode deixar de destacar, como reflexão final, as implicações que esse estudo proporcionou a esta pesquisadora, enquanto professora e investigadora, podendo ser destacado como a experiência mais desafiadora e significativa de sua trajetória acadêmica e profissional.

REFERÊNCIAS

AINLEY, J. Purposeful contexts for formal notation in a spreadsheet environment. **The Journal of Mathematical Behaviour**, v. 15, n. 4, p. 405-422, 1996. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312396900255>. Acesso em: 30 out. 2015.

AINLEY, J. Developing purposeful mathematical thinkinf: a curious tale of apple trees. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSICHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 35., 2011, Ankara. **Proceedings...** Ankara: PME. 2011.

AINLEY, J.; NARDI, E.; PRATT, D. Towards the construction of meaning for trend in Active Graphing. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 5.2, p. 85-114, 2000. Disponível em: <http://eprints.ioe.ac.uk/6837/1/Ainley2000Construction85.pdf>. Acesso em: 5 nov. 2014.

ALMEIDA, A. C.; OLIVEIRA, H. O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11º ano. **Quadrante**, v. 18, n. 1-2, p. 87-118, 2009. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/6990>. Acesso em 5 nov. 2014.

ARZARELLO, F.; ROBUTTI, O. Multimodality in multi-representational environments. **ZDM Mathematics Education**, v. 42, p. 715-731, 2010. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-010-0288-z>. Acesso em: 5 nov. 2014.

BARBOSA, S. M. A produção do conhecimento matemático: uma abordagem gráfica para a função composta. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 3, n. 1, p. 68-82, jan./jul. 2012. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/viewFile/100/70>. Acesso em: 30 out. 2015

BILLS, L.; WILSON, K.; AINLEY, J. Making links between arithmetic and algebraic thinking. **Research in Mathematics Education**, v. 7, p. 67-81, 2005.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, número especial, p. 157-171, 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/11.pdf>. Acesso em: 5 nov. 2014.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Elementary grades students' capacity for functional thinking. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSICHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Oslo. **Proceedings...** Oslo: PME, 2004. v. 2, p. 135-142.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 36, p. 412-446, 2005.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. *In*: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 133-160.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. **Humans with Media**: a performance collective in the classroom? 2007. Disponível em: <http://www.edu.uwo.ca/dmp/assets/Borba_performance.pdf>. Acesso em: 30 out. 2015.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C.; ZULATTO, R. Different media, different types of collective work in online continuing teacher education: would you pass the pen, please? *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSICHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30., 2006, Prague. **Proceedings...** Prague: PME, 2006. v. 2. p. 201-208.

BOYER, T.; LEVINE, S. C.; HUTTENLOCHER, J. Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. **Developmental Psychology**, n. 44, p. 1478-1490, 2008. Disponível em: <http://psychology.uchicago.edu/people/faculty/levine/Boyer_et_al_2008.pdf>. Acesso em: 5 out. 2015

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos PCN**. Brasília, 1998a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. Brasília, 1998b.

BRASIL. Ministério da Educação. **SAEB/Prova Brasil 2011**: primeiros resultados. Brasília, 2011. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/2012/Saeb_2011_primeiros_resultados_site_Inep.pdf>. Acesso em: 30 out. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **PISA**: Relatório da OCDE. Brasília, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2013/country_note_brazil_pisa_2012.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Formação Brasil**: Projeto. Brasília, 2009.

CABRITA, I. **Resolução de problemas:** aquisição do modelo de Proporcionalidade Directa apoiada num documento hipermédia. 1998. Tese (Doutorado) - Universidade de Aveiro, Aveiro, 1998.

CARLSON, M. *et al*. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 33, n. 5, p. 352-378, 2002. Disponível em: <https://math.la.asu.edu/~carlson/covarjrme.pdf>. Acesso em: 5 nov. 2014

CARRAHER, D. *et al*. Aritmetic and algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, n. 2, p. 87-115, 2006. Disponível em: <https://ase.tufts.edu/education/documents/publicationsBrizuela/CarraherSchliemannBrizuelaEarnest2006.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2015.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M. **Early Algebra, Early Arithmetic:** treating operations as functions. 2000. Disponível em: <http://earlyalgebra.terc.edu/our_papers/2003/Carraheretall_PMENA2000_PBS.pdf>. Acesso em: 22 set. 2014.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; SCHWARTZ, J. Early Algebra is not the same as Algebra early. *In*: KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 235-274.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. K. **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte, NC: NCTM, 2007. p. 669-705.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1989.

CARVALHO, L. M. T. L. **O papel dos artefatos na construção de significados matemáticos por estudantes do Ensino Fundamental II**. 2008. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008.

CARVALHO, L. M. T. L.; NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M. O efeito de diferentes informações sobre dados contínuos apresentados graficamente. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. **Anais**... Recife: UFPE, 2008

CASTRO, J. B. **A utilização de objetos de aprendizagem para a construção e compreensão de gráficos estatísticos**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

CASTRO, J. B. *et al*. O uso do blog em projetos colaborativos a partir do laptop educacioanal. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2., 2013, Campinas. **Anais**... São Paulo: SBC, 2013. p. 695-704.

CASTRO, J. B. *et al*. **Divisão por cota e partição:** uma análise das estratégias de estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais**... Ilhéus: UESC, 2015. p. 2248-2259.

CASTRO, J. B.; CASTRO FILHO, J. A. Projeto Um Mundo de Informações: Integração de Tecnologias Digitais ao Currículo Escolar. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE

INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 1., 2012, Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: SBC, 2012.

CASTRO, J. B.; CASTRO FILHO, J. A. Desenvolvimento do Pensamento Estatístico com Suporte Computacional. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, p. 870-896, 2015. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24999>. Acesso em: 20 nov. 2015.

CASTRO FILHO, J. A. *et al*. Quando objetos digitais são efetivamente para a aprendizagem: o caso da matemática. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA ESUCAÇÃO, 29., 2008, Fortaleza. **Anais**... Fortaleza: SBC, 2008. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/747/733>. Acesso: 30 out. 2015.

CAZORLA, I. O papel da Estatística na leitura de mundo: o letramento estatístico. **Publicatio UEPG**: Ciências Humanas, Ciências Sociais Aplicadas, Linguagem, Letras e Artes, Ponta Grossa, v. 1, n. 16, p. 45-53, jun 2008.

CEARÁ. Secretaria de Educação. **Estatísticas da Educação Básica**: Ceará 2008/2012. Fortaleza, 2013.

CLARK-WILSON, A. A methodological approach to researching the development of teachers' knowledge in a multi-representational technological setting. In: **______**. **The mathematics teacher in the digital era**. Dordrecht: Springer, 2013.

COLL, C. **Psicologia da educação virtual:** aprender e ensinar com as tecnologias da informação e comunicação. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CONFREY, J. Using computers to promote students' inventions on the function concept. *In*: MALCOM, L.; ROBERTS; SCHEONGOLD, K. **The year in school science**. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, 1992. p. 141-174.

CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplictive unit. **Educational Studies in Mathematics**, v. 26, n. 2, p. 135-164, 1994. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01273661>. Acesso em: 5 out. 2014.

CONFREY, J.; SMITH, E. Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 1, p. 66-86, 1995.

CRAMER, K.; POST, T. Making connections: a case for proportionality. **Arithmetic Teacher**, v. 60, n. 6, p. 342-349, 1993. Disponível em: <http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_3.html>. Acesso em: 30 nov. 2015.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. *In*: OWENS, D. **Research ideas for the classroom**. New York: Macmillan, 1993. p. 159-178.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. *In*: SCHILLIEMAN, A. D. *et al*. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: UFPE, 1993.

DAL-FARRA, R. A.; LOPES, P. T. C. Métodos mistos de pesquisa em Educação: pressupostos teóricos. **Nuances**: estudos sobre educação, Presidente Prudente, v. 24, p. 67-80, set./dez. 2013. Disponível em: <http://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/viewFile/2698/2362>. Acesso em: 30 out. 2015.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13>. Acesso em: 20 nov. 2015.

DILLENBOURG, P. What do you mean by collaborative learning?. *In*: DILLENBOURG, P. **Collaborative-learning:** cognitive and computational approaches. Oxford: Elsevier, 1999. p. 1-19.

DUARTE, J. A. L. Tecnologias para desenvolver o pensamento algébrico. In: Congresso Internacional TIC e Educação, 2., 2012, Lisboa. **Anais**... Lisboa: [s.n.], 2012. p. 1927-1943.

DUNKELL, A. Examples from the in-service classroom, age group 7-12. *In*: HAWKINS, A. **Trainig teachers to teach statistics**: Proceedings of the International Statistical Institure Round Table Conference. Netherlands: International Statistics Institute, 1990. p. 102-109.

FALK, R.; WILKENING, F. Children’s construction of fair chances: adjusting probabilities. **Developmental Psychology**, v. 34, n. 6, p. 1340-1357, 1998. Disponível em: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9823516>. Acesso em: 20 nov. 2015.

FERNÁNDEZ, C. *et al*. How do proportional and additive methods develop along primary and secondary school? *In*: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 34., 2010, Belo Horizonte. **Proceedings**... Belo Horizonte: PME, 2010. v. 2. p. 353-360.

FERRARA, F.; PRATT, D.; ROBUTTI, O. The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. *In*: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. **Handbook of research on the psychology of mathematics education:** Past, present and future. Rotterdam: Sense, 2006. p. 237-273.

FLEMING, N. D. I'm different; not dumb. Modes of presentation (VARK) in the tertiary classroom: research and development in Higher Education. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE HIGHER EDUCATION AND RESEARCH DEVELOPMENT SOCIETY OF AUSTRALASIA, 1995, Australasia. **Proceedings**... Australasia: Herdsa, 1995. p. 308-313.

FREIRE, R. S. **Objetos de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

GAFANHOTO, A.; CANAVARRO, A. P. Representações múltiplas de funções em ambiente com Geogebra: Um estudo sobre o seu uso por alunos de 9.º ano. *In*: MARTINHO, M. *et al*. **Ensino e aprendizagem da álgebra**. Póvoa de Varzim: SPIEM, 2011. p. 125-148.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontíficia Universidade Católica, Porto Alegre, 2008.

GITIRANA, V. *et al*. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

HART, K. **Ratio:** children’s strategies and errors: a report of the strategies and errors in secondary mathematics project. Windsor: NFER, 1984.

HASPEKIAN, M. **Between arithmetic and algebra:** a space for the spreadsheet?: contribution to an instrumental approach. 2003. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/190090/filename/Haspekian_2003.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2014.

HEGEDUS, S. J.; MORENO-ARMELLA, L. Intersecting representation and communication infrastructures. **ZDM**, v. 41, n. 4, p. 399-412, 2009. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-009-0191-7>. Acesso em: 20 nov. 2015.

HOHENWARTER, M.; PREINER, J. **Dynamic mathematics with GeoGebra**. 2007. Disponível em: <http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html>. Acesso em: 28 nov. 2014.

IRWIN, K. Children's understanding of the principles of covariation and compensation in part-whole relationships. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 1, n. 27, p. 25-40, 1996.

KAPUT, J.; WEST, M. M. Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. *In*: HAREL, G.; CONFREY, J. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, NY: State University of New York, 1994. p. 237-292.

KELLER, B. A.; HIRSCH, C. R. Student preferences for representations of function. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v. 29, n. 1, p. 1-17, 1998.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologia:** o novo ritmo da informação. 2. ed. Campinas: Papirus, 2007.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v. 16, n. 1, p. 5-26, 2007.

LABURÚ, C. E.; BARROS, M. A.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações, aprendizagem significativa e subjetividade: três referenciais conciliáveis da educação científica. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 17, n. 2, p. 469-487, 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v17n2/a14v17n2.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2015.

LAMON, S. Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. *In*: HAREL, G.; CONFREY, J. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, NY: State University on New York, 1994. p. 89-119.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding:** essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

LAMON, S. Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. *In*: LESTER JUNIOR, F. K. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: Information Age, 2007. p. 629-667.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Como as crianças representam a operação de divisão: da linguagem matemática oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia**, v. 7, n. 1, p. 23-39, 1999. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/tp/v7n1/v7n1a03.pdf>. Acesso em: 5 out. 2014.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. *In*: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Number, concepts and operations in the Middle Grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118.

LESSA, M. M. L. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra:** um estudo comparativo. 1996. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1996.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: 34, 1993.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOPES, C. A. E. Literacia estatística e INAF 2002. *In*: FONSECA, M. C. F. **Letramento no Brasil:** habilidades matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002. São Paulo: Global, 2004.

LOPES, C. E. Os desafios para a Educação Estatística no currículo de Matemática. *In*: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A. **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado das Letras, 2010.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática**. Campinas: Editores Associados, 2006.

MAGINA, S. *et al*. **Repensando adição e subtração**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S. P.; SANTOS, A.; MERLINE, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v20n2/1516-7313-ciedu-20-02-0517.pdf>. Acesso em: 5 out. 2015.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental?: contribuição para o debate. **Em Teia**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 1, n. 1, p. 1-23, 2010.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. **Anais**... Fortaleza: UFC, 2012.

MALHEIROS, A. P. S.; BORBA, M. C.; ZULATTO, R. B. A. **Educação a distância online**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MEIRA, L. Aprendizagem e ensino de funções. *In*: SCHLIEMAN, A. D. *et al*. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: UFPE, 1993. p. 62-84.

MEIRA, L. The microevolution of mathematical representations into children's activity. **Cognition and Instruction**, v. 13, n. 2, p. 269-313, 1995.

MENDONÇA, L. O. **A Educação Estatística em um ambiente de modelagem Matemática no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2008.

MONK, S. Students’ understanding of a function given by a physical model. *In*: HAREL, G.; DUBINSKY, E. **The concept of function:** aspects of epistemology and Pedagogy. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 175-193.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2014.

MORITZ, J. B. Reasoning about covariation. *In*: BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. **The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic, 2004. p. 227-256.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA, 2000.

NICKERSON, S. D.; NYDAM, C.; BOWERS, J. S. Linking algebraic concepts and contexts: Every picture tells a story. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 6, n. 2, p. 92-98, 2000.

NUNES, T. *et al*. **Educação Matemática:** números e operações. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. Understanding relations and their graphical representation. *In*: NUNES, T.; BRYANT, P.; WATSON, A. **Key understanding in mathematics learning**. London: Nuffield Foundation, 2009. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P4.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2014.

NUNES, T.; DESLI, D.; BELL, D. The development of children's understanding of intensive quantities. **International Journal of Educational Research**, v. 39, n. 7, p. 651-675, 2003. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0883035504000849>. Acesso em: 5 out. 2014.

NUNES, T.; LIGHT, P.; MASON, J. Tools for thought: the measurement of lenght and area. **Learning and Instruction**, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1993. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959475209800042>. Acesso em: 5 out. 2014.

OEHRTMAN, M.; CARLSON, M.; THOMPSON, P. Foundational reasoning abilites that promote coherence in students' function understanding. *In*: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. **Making the connection:** research and practice in undergraduate mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2008. p. 27-42.

OLIVE, J. **Research on Technology in Mathematics Education:** theoretical frameworks and practical examples. Seoul: Korea Society of Educational Studies in Mathematics, 2011.

PAGAN, A.; MAGINA, S. A interdisciplinaridade auxiliando o ensino da Estatística na Educação Básica. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais**... Recife: [s.n.], 2011.

PANITZ, T. **A definition of collaborative vs cooperative learning**. 1996. Disponível em: <http://www.londonmet.ac.uk/deliberations/collaborative-learning/panitz-paper.cfm>. Acesso em: 28 abr. 2013.

PAPERT, S. **A máquina das crianças:** repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PENSAR, conectar e fazer. 2015. Disponivel em: <http://pensar-conectar-fazer.blogspot.com.br/>. Acesso em: 30 out. 2015.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **The origin of the idea of chance in children**. New York: Norton, 1975.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on students' responses to learning in a CAS environment. **Mathematics Education Reserch Journal**, Austrália, v. 13, n. 1, p. 28-46, 2001.

PINHEIRO, J.; CABRITA, I. O desenvolvimento do raciocínio proporcional num ambiente dinâmico de geometria dinâmica: ressonância de um programa de formação contínua em matemática - m@c2. **Indagatio Didactica**, v. 5, n. 1, p. 184-200, jul 2013. Disponível em: <http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/2427/2298>. Acesso em: 15 nov. 2015.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator**, v. 3, p. 1-16, 1992. Disponível em: <http://math.coe.uga.edu/TME/Issues/v03n2/Ponte.pdf>. Acesso em: 5 out. 2014.

PONTE, J. P. *et al*. **O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades**. Lisboa: Instituto de Educação, 2010. Disponível em:

<http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf>. Acesso em: 1 set. 2014.

POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. Proportionality and the development of prealgebra understandings. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **Algebraic concepts in the curriculum K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 78-90.

PRAIN, V.; WALDRIP, B. An exploratory study of teachers' and students' use ofmulti-modal representations of concepts in primary science. **International Journal of Science Education**, n. 28, n. 15, p. 1843-1866, 2006.

PRICE, S.; JEWITT, C. A multimodal approach to examining 'embodiment' in tangible learning environments. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TANGIBLE EMBEDDED AND EMBODIED INTERACTION, 7th., 2013, Barcelona. **Proceedings**... Barcelona: ACM, 2013. p. 43-50.

RESNICK, L. B.; SINGER, J. A. Protoquantitative origins of ratio reasoning. *In*: ROMBERG, T. **Rational numbers:** an integration of research. Hisllsdale, NJ: Erlbaum, 1993. p. 107-130.

SALDANHA, L. A.; THOMPSON, P. W. Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *In*: BERENSON, S. *et al*. **Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the Unternational Group for the Psychology of Mathematics Education**. Raleigh: PME, 1998. v. 1. p. 298-303.

SANTOS, A. **Processos de formação colaborativa com foco no Campo Conceitual Multiplicativo**: um caminho possível com professoras polivalente. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SANTOS, A. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas:** reflexões teóricas e práticas. Curitiba: Appris, 2015.

SANTOS, S. C. **A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem:** o caso da geometria euclidiana espacial. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. Razões e proporções na vida diária e na escola. *In*: SCHLIEMANN, A. D. *et al*. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: UFPE, 1997. p. 13-37.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.; BRIZUELA, B. M. **Bringing out the algebraic character of arithmetic:** from children's ideas to classroom practice. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates, 2007.

SIEGEL, S. **Estatística não-paramétrica para as ciências do comportamento**. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.

SILVESTRE, A. **O desenvolvimento do raciocínio proporcional**: percursos de aprendizagem de alunos do 6° no de escolaridade. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2012.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. **Resolução de problemas de valor omisso:** análises das estratégias dos alunos. Vila Real, 2009. Disponível em: <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2009/GD1/2009_02_ASilvestre_JPPonte.pdf>. Acesso em: 30 out. 2015.

SMITH, E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. *In*: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. **Algebra in the early grades**. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 133-163.

SOUZA, J. R. **Vontade de saber matemática**: 6° ano. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

SPINILLO, A. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In: SCHLIEMANN, A. *et al*. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: UFPE, 1997. p. 40-61.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Pesquisa-intervenção em psicologia do desenvolvimento cognitivo: princípios metodológicos, contribuição teórica e aplicada. *In*: CASTRO, L. R.; BESSET, V. L. **Pesquisa-intervenção na infância e juventude**. Rio de Janeiro: FAPERJ, 2008. p. 294-321.

STAHL, G.; KOSCHMANN, T.; SUTHERS, D. Computer-supported collaborative learning: an historical perspective. *In*: SAWYER, R. K. **Cambridge handbook of the learning sciences**. Cambridge, UK: Cambridge University, 2006. p. 409-426.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Pesquisa qualitativa:** técnicas e procedimentos para o desenvolvimento da teoria fundamentada. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TELES, R. A. M. A aritmética e a álgebra na Matemática escolar. **Educação Matemática em Revista**, v. 11, n. 16, p. 8-15, maio 2004.

TYTLER, R.; PRAIN, V.; PETERSON, S. Representational issues in students learning about evaporation. **Research in Science Education**, v. 37, p. 313-331, 2007. Disponível em: <link.springer.com/article/10.1007%2Fs11165-006-9028-3>. Acesso em: 25 out. 2014.

VALENTE, J. A. Criando ambientes de aprendizagem Via Rede Telemática: experiências na formação de professores para o uso da Informática. In: VALENTE, J. A. **Formação de educadores para o uso da informática na escola**. Campinas: UNICAMP, 2003. Cap. 1, p. 1-19. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/oea/pub/livro4/>. Acesso em: 6 fev. 2016.

VÄNNMAN, K. Some aspects of statistical graphics for secundary school teachers. *In*: HAWKINS, A. **Trainig teachers to teach statistics**: Proceedings of the International Statistical Institure Round Table Conference. Netherlands: International Statistics Institute, 1990. p. 110-125.

VERGANUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. *In*: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD, G. Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, v. 3, n. 2, p. 31-41, 1982.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York, NY: Academic Press, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. *In*: HIEBERT, H.; BEHR, M. **Research Agenda in Mathematics Education**: number concepts and operations in the Middle Grades. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

VERGNAUD, G. La Théorie des Champs Conceptuels. **Researches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, 1990. Disponível em: <http://rdm.penseesauvage.com/La-theorie-des-champs-conceptuels.html>. Acesso em: 5 out. 2014.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? *In*: GUERSHON, H.; CONFREY, J. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, NY: State University of New York, 1994. p. 41-59.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 2, n. 17, p. 161-181, 1998. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0364021399800573> Acesso em: 5 out. 2014.

VERGNAUD, G. A gênese dos Campos Conceituais. *In*: GROSSI, E. **Por que ainda há quem não aprende?**: a teoria. Petrópolis: Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. **A criança, a Matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Curitiba: Actas, 2009.

VÉRILLON, P.; RABARDEL, P. Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. **European Journal of Psychology of Education**, n. 10, n. 1, p. 77-103, 1995.

VYGOSTKY, L. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

VYGOTSKY, L. **A formação social da mente:** desenvolvimento dos processos mentais superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

WARREN, E. Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In: CLARKSON, P. *et al*. **Building connections:** research, theory and practice. Sidney: Merga, 2005a. p. 759-766.

WARREN, E. Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20th., 2005, Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: PME, 2005b. p. 305-312.

WARREN, E.; COOPER, T. J. **Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school:** algebra and algebraic thinking in school mathematics. Reston, VA: NCTM, 2008. p. 113-126.

WILD, C. J.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review**, v. 67, n. 3, p. 223-265, 1999. Disponível em: <http://iase-web.org/documents/intstatreview/99.Wild.Pfannkuch.pdf>. Acesso em: 5 out. 2014.

ZIEFFLER, A. S.; GARFILD, J. B. Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. **Statistical Education Research Journal**, v. 8, n. 1, p. 7-31, 2009. Disponível em: <http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ8(1)_Zieffler_Garfield.pdf>. Acesso em: 5 out. 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO ASSINADO PELO RESPONSÁVEL

Prezados Pai, Mãe ou Responsável,

Seu filho está sendo convidado a participar como voluntário(a) da pesquisa: **PRODUÇÃO COLABORATIVA EM AMBIENTES DE MÚLTIPLAS-REPRESENTAÇÕES: ESTUDO DA COVARIAÇÃO A PARTIR DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS,** realizada pela doutoranda **Juscileide Braga de Castro**, aluna regular do PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ (UFC), sendo orientada pelo Professor Doutor José Aires de Castro Filho.

Essa pesquisa visa investigar as contribuições de uma abordagem com o uso de tecnologia no desenvolvimento de conceitos matemáticos, como os de covariação. As atividades serão desenvolvidas durante as aulas de matemática de seu filho, sendo utilizados para isso, *laptops*, recursos digitais, *softwares*, vídeos, dentre outros materiais. Também utilizaremos um *blog* e produção de vídeos pelos próprios alunos com o objetivo de tornar significativas as atividades desenvolvidas.

Para isso, gostaríamos de sua permissão para que seu filho(a) possa ser acompanhado durante o projeto, entrevistado(a), fotografado(a) ou filmado(a) durante a realização de tais atividades. Estas entrevistas, fotos, vídeos e áudios serão utilizados apenas para efeito de pesquisa, sendo respeitada toda a integridade e anonimato de seu filho(a), ou seja, o seu nome não será revelado no decorrer da análise e na publicação do estudo. Não será cobrado nenhum valor para sua participação, assim como não haverá ressarcimento por contribuir com o estudo.

A participação de seu filho será de fundamental importância, para que possam ser atingidos os objetivos do estudo, colaborando com o desenvolvimento de novas metodologias para o ensino de matemática. Em caso de dúvida, você poderá comunicar-se com a coordenadora do projeto Juscileide Braga, pelo telefone: (85) 988318798 ou e-mail: juscileide@virtual.ufc.br.

Este termo de consentimento é entregue em duas vias para sua assinatura, caso venha a concordar em participar da pesquisa, sendo destinada uma via para você e outra para a pesquisadora. Agradecemos sua disponibilidade e atenção!

____

Juscileide Braga de Castro (coordenadora do projeto)

( ) Sim, é de livre e espontânea vontade que autorizo meu filho(a) a participar do projeto.

( ) Não, não autorizo meu filho(a) a participar do projeto.

Nome do aluno: ____

Nome do responsável pelo aluno(a): ____

RG (doc. identidade) do responsável: ____

Assinatura do responsável: ____

Fortaleza, _____ de ________________de 2015.

APÊNDICE B – MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO ASSINADO PELAS ESCOLAS

Ao:
Comitê de Ética em Pesquisa c/ seres humanos
Universidade Estadual de Santa Cruz

Senhor(a) Coordenador(a) do CEP-UESC

Eu,____, diretor(a) da escola ____ conheço o Protocolo de Pesquisa intitulado "**Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental**". Com a Coordenação Geral da pesquisadora Dra. Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana da Universidade Estadual de Santa Cruz a Sede da pesquisa, desenvolvido numa rede de pesquisa com a Universidade Federal de Pernambuco - Núcleo 1 - coordenado pela Dra. Sintria Labres Lautert e a Universidade Federal do Ceará – Núcleo 2 - coordenado pelo Dr. José Aires de Castro Filho. Concordo com sua realização após a apresentação do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido devidamente preenchido e assinado pelas partes.

O início desta pesquisa neste Serviço só poderá ocorrer, a partir da apresentação da carta de aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa da UESC.

Atenciosamente,

____

Diretor(a) da escola

APÊNDICE C – PRÉ-TESTE (AVALIAÇÃO DOS CONHECIMENTOS PRÉVIOS)

Caro estudante, responda as questões a seguir de acordo com seus conhecimentos. A resolução dessas questões não incidirão sobre notas escolares. Suas respostas serão de natureza confidencial. Por favor, sempre que possível explicite seu raciocínio.

Agradecemos sua colaboração nesse processo!

Nome Completo:____Turma: ______

1a questão: José coleciona figurinhas de heróis. Sabendo que em cada pacote vem 5 figurinhas, responda:

a) Quantas figurinhas terão em 6 pacotes?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

b) Quantos pacotes José precisa comprar para ter 20 figurinhas?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

2a questão: Brenda coleciona figurinhas das olimpíadas. Ela comprou 4 pacotes e obteve 24 figurinhas. Responda:

a) Se Brenda comprasse 6 pacotes, quantas figurinhas teria?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

b) Quantas figurinhas vem em cada pacote?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

3a questão: Na escola de Danilo vai ter um baile de Carnaval. A escola conseguiu um desconto especial para a comprar o tecido das fantasias. Cada 2 metros de tecido custará 10 reais. Responda:

a) Quanto custará 2,5 metros de tecido?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

b) Danilo tem 15 reais, quantos metros de tecido poderá comprar?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

c) Quanto custa 1 metro de tecido?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

4a questão: Para fazer arranjos que decorarão a festa na escola foram utilizadas 3 rosas vermelhas. Em cada rosas vermelha tem 2 ramos de folhas. Para 10 arranjos, quantas rosas e quantos ramos de folhas serão necessários?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

5a questão: Um ingresso para jogar durante uma hora no *playstation* custa R$ 6,00. Quanto custará 4 ingressos para jogar 2 horas?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

6a questão: Leia as frases abaixo e depois indique (V) para verdadeiro ou (F) para falso. Justifique sua resposta de acordo com o raciocínio utilizado para responder.

( ) Se Silvania demora 10 minutos para percorrer a distância de sua casa à escola, Silvania e Carol levarão 20 minutos para percorrer a mesma distância.

____

( )Se Rodrigo faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 6 horas.

____

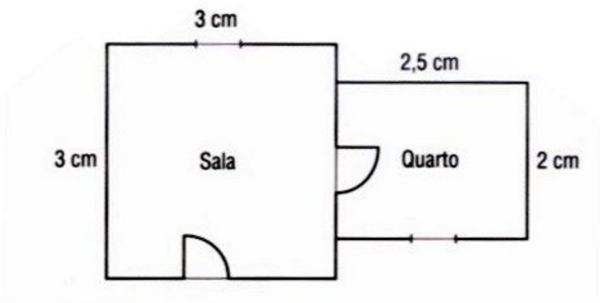
( ) Se Deborah leva 2 dias para pintar um muro sozinha, com a ajuda de mais dois colegas pintará em 6 dias.

____

( ) Se uma torneira enche uma piscina em 30 minutos, 2 torneiras podem encher a mesma piscina em 15 minuto.

____

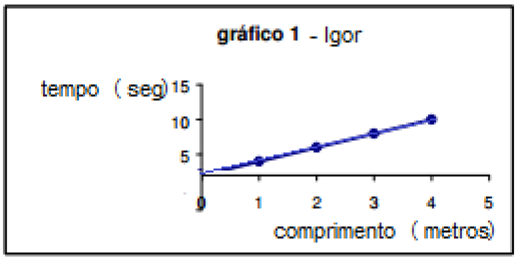
7a questão: Na figura estão representados dois cômodos da planta de uma casa. Na realidade, a sala é quadrada com lados de 6 m. Calcule as dimensões reais do quarto.

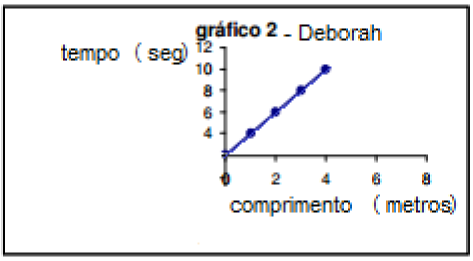


Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

8a questão: Os gráficos abaixo representam a distância - Comprimento em metros percorrido em um determinado tempo. Observe os gráficos e responda:





Que conclusões podemos tirar ao analisar os gráficos? Marque V ou F e justifique sua resposta.

( ) Deborah e Igor percorrem a mesma distância no mesmo intervalo de tempo.

____

( ) Deborah percorre um espaço maior que Igor, se compararmos o mesmo intervalo de tempo.

____

( ) Igor percorre um espaço maior que Deborah, se compararmos o mesmo intervalo de tempo.

____

9a questão: Sabendo que 20 pilhas correspondem a 5 embalagens, responda ao que se pede.

a)Complete a tabela.

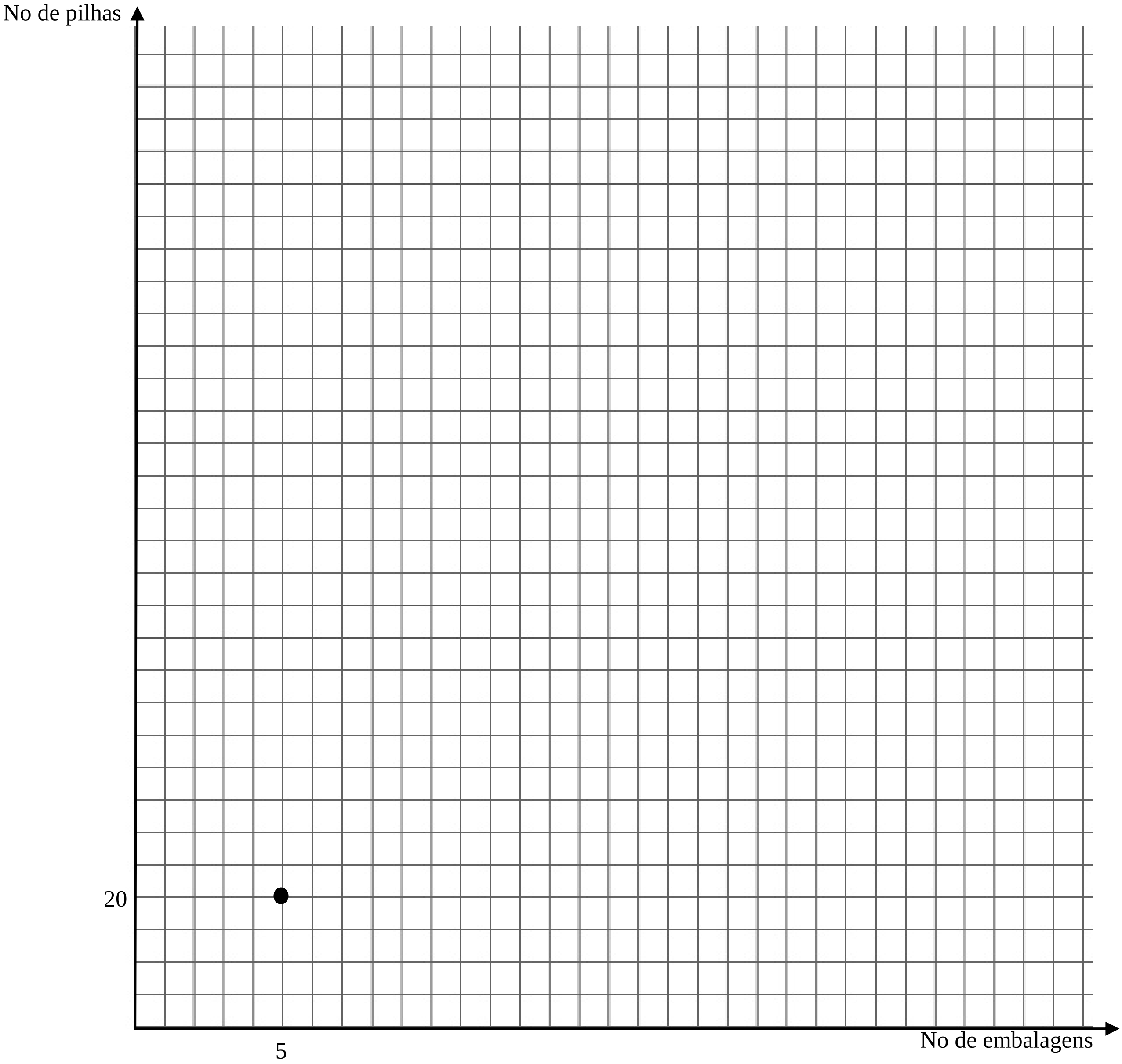
No de embalagens	5	10	15	20	
No de pilhas	20				

Observe a tabela da página anterior e responda: Qual a relação entre o número de embalagens e pilhas? Explique como chegou a essa conclusão.

____

____

b) Complete os dados no gráfico abaixo de acordo com a tabela da questão anterior.



Será possível determinar através do gráfico o número de pilhas que há em 30 embalagens? Justifique sua resposta.

____

____

Muito obrigada! :)

APÊNDICE D – PÓS-TESTE (AVALIAÇÃO DOS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS)

Caro estudante, responda as questões a seguir de acordo com seus conhecimentos. A resolução dessas questões não incidirão sobre notas escolares. Suas respostas serão de natureza confidencial. Por favor, sempre que possível explicite seu raciocínio.

Agradecemos sua colaboração nesse processo!

Nome Completo:____Turma: ______

1a questão: A diretora da escola está organizando uns kits de material escolar para entregar na escola. Em cada pacote terá 4 lápis. Com base nessa informação, responda:

a) Quantas lápis terão em 6 pacotes?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

b) Se a diretora tiver 20 lápis, quantos pacotes poderá formar?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

2a questão: Jusci comprou 4 pacotes de canetas e obteve 24 canetas. Responda:

a) Se Jusci comprasse 6 pacotes, quantas canetas teria?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

b) Quantas canetas vem em cada pacote?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

3a questão: Vai ter uma festa natalina na escola e será preciso fazer as roupas para a apresentação. Sabendo que 2 metros de tecido custam 20 reais, responda:

a) Quanto custará 2,5 metros de tecido?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

b) Com 30 reais consigo comprar quantos metros de tecido?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

c) Quanto custa cada 1 metro de tecido?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

4a questão: A diretora da escola resolveu decorar a quadra para uma festa de Natal. Cada enfeite colocado na quadra precisará de 2 palitos (armações) e em cada palito terá três laços de fita. Serão necessários 8 enfeites. Quantas palitos e laços de fita serão necessários para fazer os 8 enfeites?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

5a questão: Um ingresso para utilizar a *lanhouse* perto da minha casa, durante uma hora, custa R$6,00. Quanto custará 4 ingressos para jogar 2 horas?

Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

6a questão: Leia as frases abaixo e depois indique (V) para verdadeiro ou (F) para falso. Justifique sua resposta de acordo com o raciocínio utilizado para responder.

( ) Se Silvânia demora 10 minutos para percorrer a distância de sua casa à escola, Silvânia e Carol levarão 10 minutos para percorrer a mesma distância.

____

____

( )Se Rodrigo faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 4 horas.

____

____

( ) Se Deborah leva 3 dias para pintar um muro sozinha, com a ajuda de mais dois colegas pintará em 1 dia.

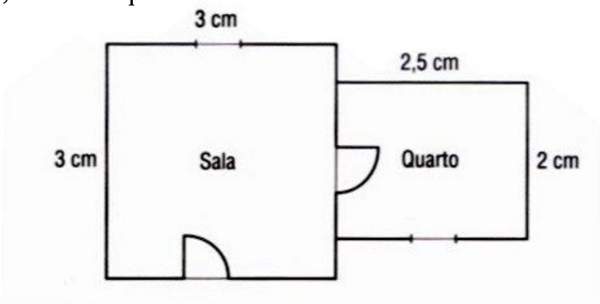
____

____

( ) Se uma torneira enche uma piscina em 30 minutos, 2 torneiras podem encher a mesma piscina em 10 minutos.

____

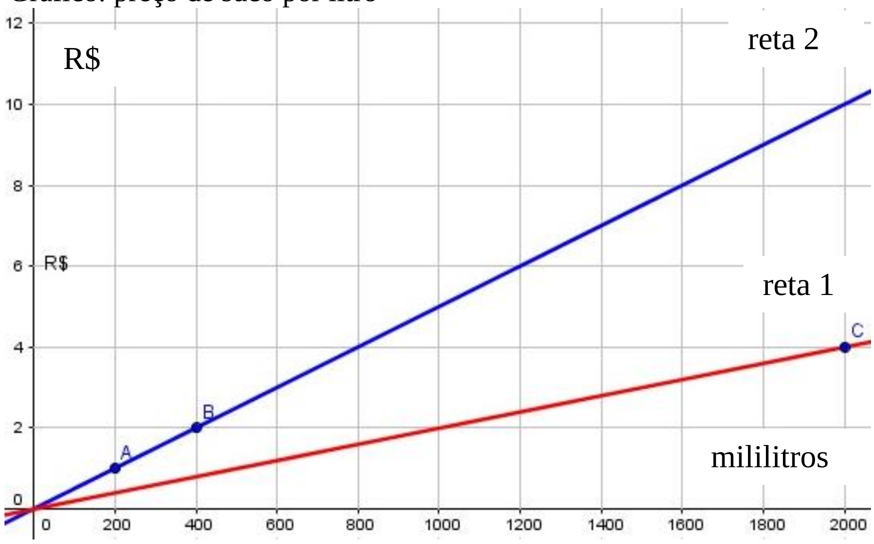
7a questão: Na figura estão representados dois cômodos da planta de uma casa. Calcule as dimensões reais do quarto, sabendo que a dimensão real de cada lado da sala vale 6m.



Local para fazer os cálculos e, se quiser, também desenhar.

Resposta: ____

8a questão: Observe os gráficos e responda:
Gráfico: preço de suco por litro



-Quais as grandezas envolvidas? ____
- Qual suco custa mais caro? O representado pela reta 1 ou 2? Explique.
____
____
____

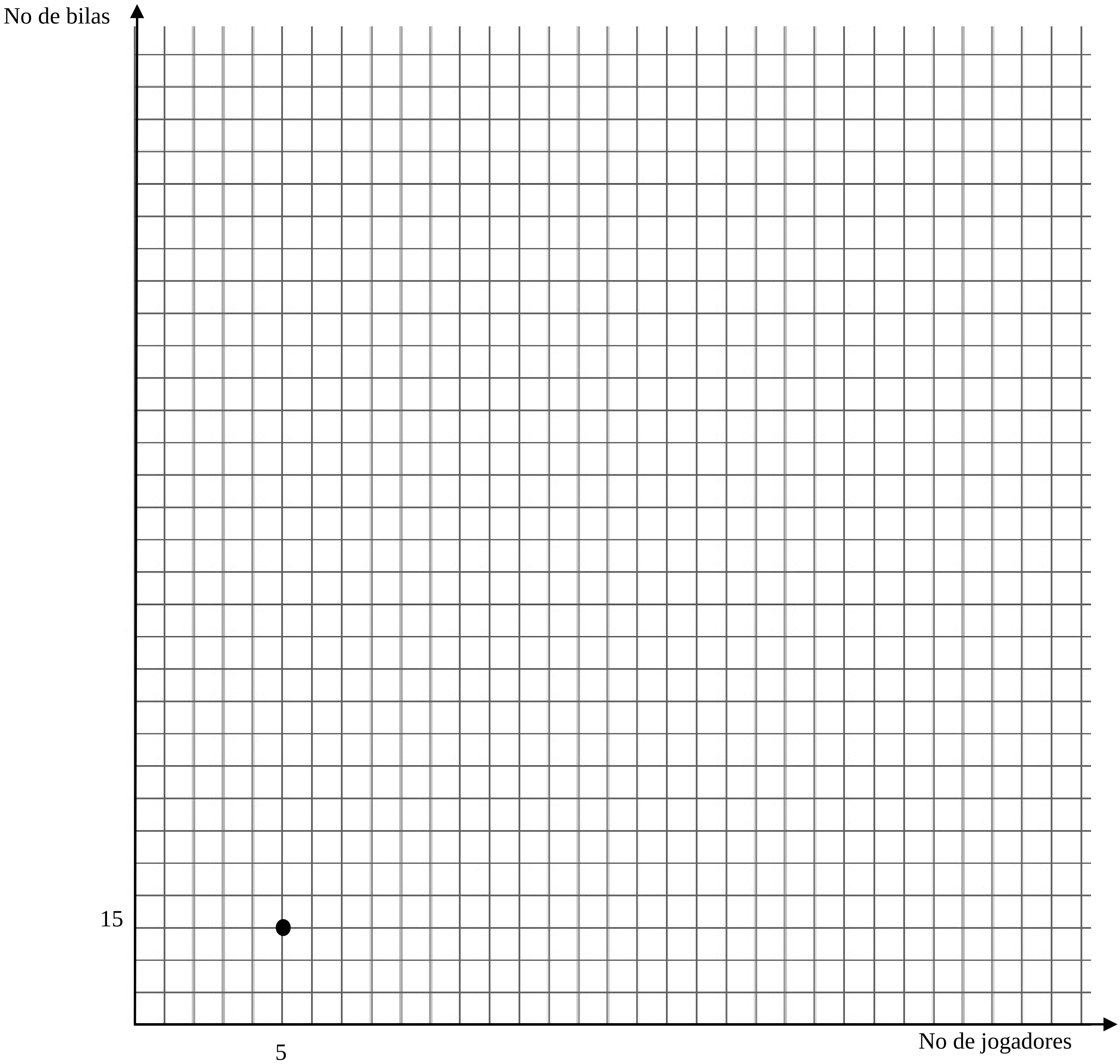
9a questão: Danilo organizou um campeonato de bila na escola. Para 5 jogadores participarem do campeonato, será preciso ter 15 bilas. De acordo com essa informação responda:

a)Complete a tabela de acordo com as informações dadas.

N° de jogadores	N° de bilas
1	
5	15
10	

Qual a relação entre o número de jogadores e de bilas? Explique como chegou a essa conclusão.

b) Complete os dados no gráfico abaixo de acordo com a tabela da questão anterior.



Será possível determinar através do gráfico o número de bilas que serão necessárias para a participação de 30 jogadores? Justifique sua resposta.

APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO GERAL (IDADE, PREFERÊNCIAS, HABILIDADES TECNOLÓGICAS)

Caro estudante, precisamos conhecer um pouco de você, sobre suas preferências e sua vivência com o uso das tecnologias, para isso, solicitamos o preenchimento dos quesitos a seguir. Suas respostas serão de natureza confidencial.

Agradecemos sua colaboração nesse processo!

Dados pessoais

1. Nome Completo:____

2. Turma: ( ) A ( ) B ( ) C

3. Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

4. Idade: ( ) 10 ( ) 11 ( ) 12 ( ) 13 ( ) 14 anos ou mais

5. Você tem e-mail? ( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, informe: ____

6. Como você descreve seu rendimento na escola?

( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Muito bom

7. O que você faz no seu tempo livre?

( ) Leitura ( ) Televisão ( ) Esporte ( ) Jogos ( ) Internet ( ) Outro: Especificar:____

Preferências

8. Enumere as disciplinas abaixo de 1 a 8 de acordo com suas preferências. 1 = gosto muito/8= não gosto

( ) Arte ( ) Ciências ( ) Educação Física ( ) Geografia ( ) História ( ) Inglês

( ) Matemática ( ) Português

9.Para você, que tipo de aula é melhor?

( ) Com uso de dinâmicas ( ) Com apresentação de trabalhos ( ) Com Debates

( ) Expositiva ( ) Com resolução de exercícios ( ) Com trabalhos em grupo

( ) Outro tipo: Especificar_______________

10. Como você prefere fazer as atividades escolares?

( ) Individualmente ( ) Em dupla ( ) Em grupo

11. Você gosta de trabalhar em grupo? ( ) Sim ( ) Não Justifique sua resposta

____

____

11.Gosta de Matemática? ( ) Sim ( ) Não

12. Tem dificuldade em Matemática? ( ) Sim ( ) Não Em caso positivo, especifique:

____

____

13. Na sua opinião, para que serve a matemática?

( ) Tem por objetivo ajudar o aluno a pensar, raciocinar, achar diversos caminhos para resolver problemas;

( ) Desenvolve raciocínio e habilidades que são de grande importância;

( ) É fundamental no dia-a-dia das pessoas;

( ) Serve para passar de ano

( ) Não serve para nada

( ) Outro. Especifique:____

14. Se pudesse escolher, o que você gostaria de estudar/aprender na escola? Justifique.

____

____

<u>Habilidades, hábitos e preferências tecnológicas</u>

15. Você tem computador em casa? ( ) Sim ( ) Não

16. Como você acessa a internet?

( ) Não acesso ( ) Computador em casa - banda larga ( ) Computador em casa - 3G/4G

( ) Celular - 3G/4G ( ) Casa de parentes ou amigos ( ) *Lanhouse* ( ) Escola ( ) Outro

17. Com qual frequência acessa a internet?

( ) Nunca ( ) Uma ou duas vezes por semana ( ) Três ou quatro vezes por semana

( )Diariamente

18. Com que finalidade você utiliza computador/internet?

( ) Para estudo (Fazer trabalhos da escola, pesquisas, etc);

( ) Para entretenimento (conversar com os amigos, ver vídeos e fotos; jogos, etc);

( ) Para comunicação (conversar com os amigos ou parentes distantes, etc)

( ) Outra finalidade. Especificar: ____

19.Que recursos do computador você utiliza?

( ) Editores de texto (*Word, Writer*, etc);

( ) Planilhas eletrônicas (*Excel, Calc*, etc);

( ) Softwares de apresentação (*Power Point, Impress*);

( ) Editores de Vídeos (*Movie Maker*);

( ) Leitores de vídeo/áudio (*Windows Media Player, etc);*

( ) Editores de imagem (*Paint*, etc);

( ) Internet;

( ) Outro. Especifique:____

20. O que você sabe fazer no computador?

( ) Sei ligar e desligar o computador

( ) Sei usar o editor de texto

( ) Sei usar planilhas eletrônicas

( ) Sei editar/fazer vídeos

( ) Sei editar imagens

( ) Sei criar apresentações

21. Se pudesse escolher, que programa ou recurso gostaria de usar durante as aulas? Explique.

____

____

____

APÊNDICE F – DIÁRIO DE CAMPO

O diário de campo será utilizado para descrever as observações gerais. Como cada etapa tem um objetivo específico, a seguir têm-se as questões que nortearão as anotações em cada etapa da pesquisa.

1º etapa –**Avaliação dos conhecimentos prévios (pré-teste)**

- Que tipo de dificuldades ou dúvidas foram verificadas durante a realização do pré-teste?
- Os estudantes demonstraram interesse em realizar as atividades? Explicar.

2º etapa – Intervenção

- Detalhar a reação (motivação, dúvidas, perguntas, participação, etc) dos alunos durante a realização das atividades individuais e em grupo.
- Que tipo de dificuldades ou dúvidas estão sendo verificadas em relação aos conceitos trabalhados? E na utilização de ferramenta/recurso tecnológico? Explicar.

-Que tipos de representações os alunos estão usando durante as atividades? Explicar.

-Que ferramentas/materiais (recurso do *laptop*, lápis e papel, *software*, etc) os alunos utilizaram para fazer a (s) representação (ões)?

- Durante a realização da atividade os estudantes trabalham individualmente ou em grupo?
- Que tipos de discussões/conflito (passividade, atividade, discordância, etc) são observados durante realização de atividades em grupo? Detalhar.
- Os estudantes estão utilizando/demonstrando habilidades (colaboração, autonomia, senso crítico, criatividade, etc) não observadas na realização de atividades anteriores? Explique.
- Os estudantes utilizaram recursos/ferramentas não apresentadas para realizar a atividade proposta? Qual? Detalhar.

3º etapa –**Avaliação dos conhecimentos adquiridos (pós-teste)**

- Que tipo de dificuldades ou dúvidas foram verificadas durante a realização do pós-teste?
- Os estudantes demonstraram interesse em realizar as atividades? Explicar.

OBSERVAÇÕES GERAL

Dia _____ Etapa da pesquisa: ________ Horário início: ________ Horário fim: _________

Observações gerais (Utilizar as questões norteadoras de cada etapa da pesquisa)

Anotações: questionamentos, dúvidas e dificuldades dos alunos. Descrever ações por horário.

Desenhar o esboço do ambiente ou disposição do grupo observado

APÊNDICE G – REGISTRO DE AUTO-AVALIAÇÃO DOS ESTUDANTES

Caro estudante, solicitamos o preenchimento dos quesitos a seguir. Suas respostas serão de natureza confidencial. Agradecemos sua colaboração nesse processo!

1. Nome Completo:____

2. Turma: ( ) A ( ) B ( ) C

3. Preencha o quadro de acordo com a realização das atividade em grupo.

	Poucas Vezes	Muitas vezes	Sempre
Sei dividir as tarefas no grupo de trabalho			
Entendo o que precisa ser feito para ajudar o grupo			
Coopero com as atividades realizadas em grupo			
Dou ideias para o grupo resolver os problemas			
Ouço as ideias do grupo			
Consigo utilizar estratégias adequadas			
Justifico com clareza minhas ideias			

4. Complete as frases:

a) A minha colaboração na elaboração, desenvolvimento e apresentação das atividades foi:

____

b)Tive dificuldade em:

____

c) Aprendi a:

____

d) O que mais gostei foi:

____

e) Não gostei de:

____

APÊNDICE H – 1A ATIVIDADE DE GRUPO

Grupo ____
Participantes:____

Situação 01: Uma impressora imprime 40 panfletos preto e branco em 10 minutos. Se o panfleto for colorido, outra impressora imprime a uma razão de 3 panfletos por minuto. Responda:

(a) Quantos panfletos preto e branco são impressos em 1 minuto?

(b) Para imprimir 24 panfletos coloridos, quanto tempo seria necessário?

(c) Qual a impressora mais rápida? Explique.

Grupo ____ Participantes:____

Situação 02: Durante uma corrida Marina consegue correr 420 metros em 10 minuto, já sua amiga Kiara corre 30 metros por minuto. Responda:

(a) Quantos metros Marina corre em 1 minuto?

(b) Quanto tempo seria necessário para Kiara percorrer 420 metros?

(c) Quem corre mais rápido, Marina ou Kiara? Explique

Grupo ____ Participantes:____

Situação 03: Na casa de Silvânia tem uma torneira que quando acionada despeja 30 litros de água em 10 minutos. Já na casa de Danilo tem uma torneira que despeja 4 litros por minuto. Responda:

(a) Quantos litros despeja a torneira de Silvânia em 1 minuto?

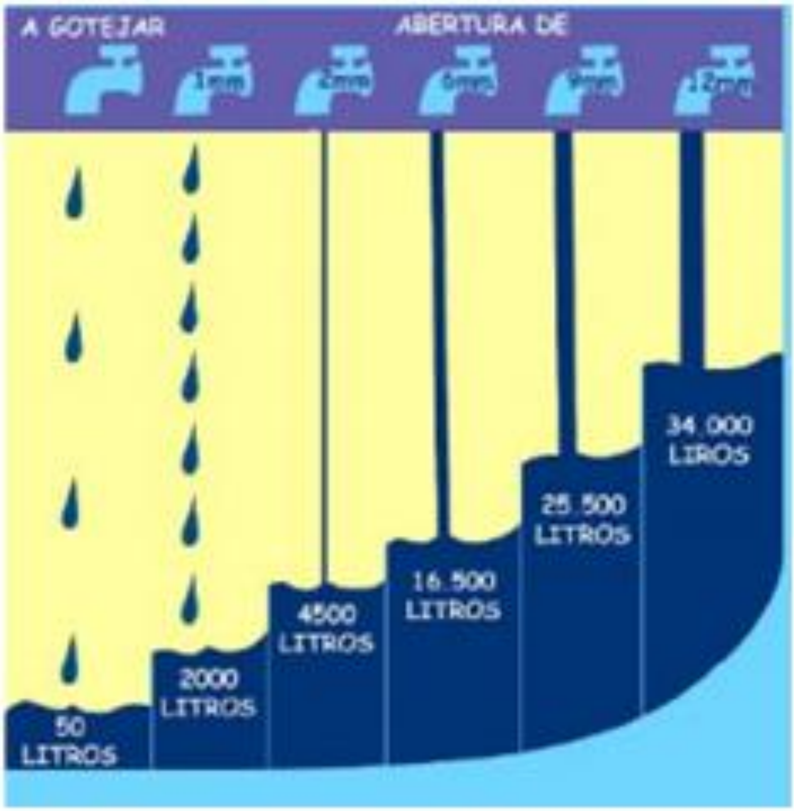
(b) Em quanto tempo a torneira de Danilo encherá um reservatório de 420 litros?

(c) Qual das torneiras encheria um mesmo balde em menor tempo, a da casa da Silvânia ou da casa de Danilo? Explique.

APÊNDICE I – 2ª ATIVIDADE DE GRUPO

Grupo ____
Participantes:____

Situação: Observe o gráfico e preencha a tabela:

Um dia de desperdício de água	dia	Litros desperdiçados
	1	
	5	
	30	
	1,5	
	1/2	
	1/12	
	1/24	

A torneira na casa de Silvânia está com uma abertura de 9mm.

Analise a situação, preencha a tabela e construa um gráfico que represente a relação de litros desperdiçados por dia na casa de Silvânia. Elaborem um texto (em grupo) explicando suas conclusões.

APÊNDICE J – ETAPAS PARA ELABORAÇÃO DE VÍDEO

Grupo: ____

Em cada etapa é necessário responder as perguntas e fazer o que é solicitado, para então, passar para a etapa seguinte.

1a etapa. Escolha do Tema

Sobre o que será o vídeo? Por que? Defina um nome para seu projeto.

2a etapa. Realização da pesquisa

Como a matemática está relacionada com esse tema? Há relações de proporção ou proporcionalidade? O que o grupo sabe sobre esse assunto?
Dica: Você pode fazer a pesquisa utilizando *internet*, entrevistas, livros, filmagens, registros fotográficos , visitas a locais, vídeos, etc.

3a etapa. Elaboração do roteiro

Que recursos serão utilizados? (vídeos remixados a partir de filmes, filmagens com pessoas, cenas montadas com imagens, animações quadro-a-quadro – Stop Motion, entre outros.). Como se organizar com os recursos? (filmagens com pessoas ou com massinhas e outros materiais). Como será feita a divisão de tarefas? O que acontecerá em cena? (recursos). Preencher modelo de roteiro disponibilizado.
Dica: Pode ser que ajude elaborar uma pergunta a ser respondida ao longo do vídeo.

4a etapa. Execução

Vai usar celular, câmera, computador?

5a etapa. Edição do vídeo

Que programa utilizar? (*Movie Maker*, *Scratch*, *Kdenlive*, entre outros). Como salvar o documento em vídeo? Como postar e compartilhar no *YouTube*, *Blog* ?

6a etapa. Avaliação

O que aprendi ao elaborar esse vídeo? Como foi a integração do grupo? O objetivo proposto na 1a etapa foi alcançado? As relações matemáticas apresentadas estão claras? Durante a produção do vídeo surgiram outras questões? Preencher ficha de avaliação de grupo e individual.

Agora, se quiser, já pode começar um outro vídeo!

APÊNDICE K – MODELO DE ROTEIRO PARA PRODUÇÃO DE VÍDEO

Grupo: ____

Tema: ____

Nome do projeto/Título do vídeo:___________________________________

Vídeo	**Áudio**

Créditos

Coordenação geral:
Juscileide Braga de Castro
Lidiana Osmundo
Jéssica Barbosa

Roteiro e Direção:____
Imagens:____
Produção e edição:____
Sonoplastia:____
Participação especial:____
Agradecimento:____

Esse vídeo faz parte do **Projeto pensar, conectar e fazer**
http://pensar-conectar-fazer.blogspot.com.br/
Grupo **PROATIVA**
www.proativa.virtual.ufc.br

APÊNDICE L – TABELA 01: SITUAÇÕES DE PROPORÇÃO SIMPLES

	Grupo Experimental (n=12)							
	Pré-teste				Pós-teste			
Estudantes	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
E01	1	1	1	2	1	1	1	3
E02	1	1	2	3	1	1	2	4
E03	1	0	2	0	1	1	2	4
E04	1	1	2	3	1	1	2	3
E05	1	1	1	0	1	1	2	4
E06	1	1	1	1	1	1	2	3
E07	1	1	2	2	1	1	2	4
E08	1	1	2	2	1	1	2	4
E09	1	0	1	0	1	1	2	4
E10	1	1	2	1	1	1	2	4
E11	1	1	2	1	1	1	2	4
E12	1	1	1	2	1	1	2	4
	Grupo Controle (n=15)							
	Pré-teste				**Pós-teste**			
Estudantes	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
E13	1	1	2	3	1	1	2	2
E14	1	1	2	1	1	0	2	2
E15	1	1	0	2	0	0	2	2
E16	1	1	2	2	1	0	2	3
E17	1	1	1	0	1	1	1	1
E18	1	1	2	1	1	1	2	3
E19	1	1	2	2	1	1	1	2
E20	1	1	2	1	1	1	2	1
E21	1	1	2	1	1	0	1	0
E22	1	1	1	1	1	1	1	1
E23	1	1	2	2	1	1	2	3
E24	1	1	1	0	1	1	0	0
E25	1	1	1	3	1	0	2	1
E26	1	1	2	1	1	1	2	3
E27	1	0	2	1	1	1	1	0

Legenda

PROPORÇÃO SIMPLES - PS (Total de 8 questões)

A- **Proporção Simples - multiplicação** (PS-mult) - 1 questão por teste
B- **Proporção Simples - divisão por quota** (PS-div.q) - 1 questão por teste
C- **Proporção Simples - divisão por parte** (PS-div.p) - 2questão por teste
D- **Proporção Simples - multiplicação e divisão** (PS-mult.div) - 4 questões por teste

Média de desempenho - PROPORÇÃO SIMPLES															
Grupo Experimental - GE (n=12)								**Grupo Controle - GC (n=15)**							
Pré-teste				**Pós-teste**				**Pré-teste**				**Pós-teste**			
A	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
12	10	19	17	12	12	23	45	12	14	24	21	14	10	23	24
Média: 4,83				Média: 7,67				Média: 4,73				Média: 4,73			

APÊNDICE M – TABELA 02: SITUAÇÃO DE PROPORÇÃO MÚLTIPLA

	Grupo Experimental (n=12)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**PM**	**PM**
E01	0	0
E02	0	1
E03	0	1
E04	0	1
E05	0	1
E06	0	0
E07	0	1
E08	0	1
E09	0	1
E10	0	1
E11	1	1
E12	0	0
	Grupo Controle (n=15)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**PM**	**PM**
E13	0	1
E14	1	0
E15	0	0
E16	0	0
E17	0	0
E18	0	0
E19	0	0
E20	1	0
E21	1	0
E22	0	0
E23	0	0
E24	0	0
E25	0	0
E26	1	0
E27	0	0

Legenda

PROPORÇÃO MÚLTIPLA - PM (Total de 1 questão)

Média de desempenho - PROPORÇÃO MÚLTIPLA			
Grupo Experimental - GE (n=12)		**Grupo Controle - GC (n=15)**	
Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
PM	**PM**	**PM**	**PM**
01	09	04	01
Média: 0,08	Média: 0,75	Média: 0,27	Média: 0,07

APÊNDICE N – TABELA 03: SITUAÇÃO DE PROPORÇÃO DUPLA

	Grupo Experimental (n=12)	
	Pré-teste	Pós-teste
Estudantes	PD	PD
E01	0	0
E02	1	1
E03	0	1
E04	0	1
E05	0	1
E06	0	0
E07	0	0
E08	1	1
E09	0	0
E10	0	0
E11	0	1
E12	0	0
	Grupo Controle (n=15)	
	Pré-teste	Pós-teste
Estudantes	PD	PD
E13	0	1
E14	0	0
E15	0	1
E16	0	0
E17	0	0
E18	1	1
E19	0	0
E20	1	1
E21	0	0
E22	0	0
E23	0	1
E24	0	0
E25	1	1
E26	1	0
E27	0	0

Legenda

PROPORÇÃO DUPLA - PD (Total de 1 questão)

Média de desempenho - PROPORÇÃO MÚLTIPLA			
Grupo Experimental - GE (n=12)		Grupo Controle - GC (n=15)	
Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
PD	PD	PD	PD
02	06	04	06
Média: 0,17	Média: 0,5	Média: 0,27	Média: 0,4

APÊNDICE O – TABELA 04: COMPREENSÃO DA RELAÇÃO ENTRE AS GRANDEZAS

	Grupo Experimental (n=12)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**GRD**	**GRD**
E01	2	4
E02	4	4
E03	4	3
E04	4	4
E05	0	4
E06	4	4
E07	3	3
E08	4	3
E09	4	3
E10	3	3
E11	3	4
E12	3	3
	Grupo Controle (n=15)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**GRD**	**GRD**
E13	3	4
E14	3	2
E15	4	3
E16	2	3
E17	2	4
E18	4	3
E19	2	2
E20	3	4
E21	3	3
E22	4	0
E23	2	3
E24	1	2
E25	4	4
E26	3	4
E27	3	2

Legenda

COMPREENSÃO DA RELAÇÃO ENTRE AS GRANDEZAS - GRD (Total de 4 questões)

Média de desempenho - PROPORÇÃO MÚLTIPLA			
Grupo Experimental - GE (n=12)		**Grupo Controle - GC (n=15)**	
Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
GRD	**GRD**	**GRD**	**GRD**
38	42	43	43
Média: 3,17	Média: 3,5	Média: 2,87	Média: 2,87

APÊNDICE P – TABELA 05: INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS LINEARES

	Grupo Experimental (n=12)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**IG**	**IG**
E01	3	4
E02	3	4
E03	0	4
E04	0	4
E05	0	4
E06	0	4
E07	0	4
E08	0	4
E09	0	4
E10	0	4
E11	3	4
E12	0	4
	Grupo Controle (n=15)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**IG**	**IG**
E13	0	1
E14	3	0
E15	2	0
E16	1	0
E17	0	0
E18	1	1
E19	2	0
E20	1	2
E21	1	1
E22	1	0
E23	0	0
E24	2	0
E25	3	0
E26	2	0
E27	2	1

Legenda

INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS LINEARES - IG (Total de 4 questões)

Média de desempenho - PROPORÇÃO MÚLTIPLA			
Grupo Experimental - GE (n=12)		**Grupo Controle - GC (n=15)**	
Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
IG	**IG**	**IG**	**IG**
9	48	21	06
Média: 0,75	Média: 4	Média: 1,4	Média: 0,4

APÊNDICE Q – TABELA 06: IDENTIFICAÇÃO DE PADRÃO DE TABELA

	Grupo Experimental (n=12)	
	Pré-teste	Pós-teste
Estudantes	PTAB	PTAB
E01	0	1
E02	1	1
E03	0	1
E04	0	1
E05	0	1
E06	0	1
E07	1	1
E08	1	1
E09	0	1
E10	1	1
E11	1	1
E12	0	1
	Grupo Controle (n=15)	
	Pré-teste	Pós-teste
Estudantes	PTAB	PTAB
E13	1	1
E14	0	0
E15	0	0
E16	0	1
E17	0	0
E18	1	0
E19	1	0
E20	1	1
E21	0	0
E22	1	0
E23	0	0
E24	0	0
E25	1	0
E26	1	0
E27	0	0

Legenda

IDENTIFICAÇÃO DE PADRÃO DE TABELA - PTAB (Total de 1 questão)

Média de desempenho - PROPORÇÃO MÚLTIPLA			
Grupo Experimental - GE (n=12)		Grupo Controle - GC (n=15)	
Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
PTAB	PTAB	PTAB	PTAB
5	12	7	3
Média: 0,42	Média: 1	Média: 0,47	Média: 0,2

APÊNDICE R – TABELA 07: CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS LINEARES

	Grupo Experimental (n=12)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**CGR**	**CGR**
E01	0	1
E02	0	1
E03	0	0
E04	0	1
E05	0	1
E06	0	1
E07	0	1
E08	0	1
E09	0	0
E10	0	0
E11	0	1
E12	0	1
	Grupo Controle (n=15)	
	Pré-teste	**Pós-teste**
Estudantes	**CGR**	**CGR**
E13	0	0
E14	0	0
E15	0	0
E16	0	0
E17	0	0
E18	0	0
E19	0	0
E20	0	0
E21	0	0
E22	0	0
E23	0	0
E24	0	0
E25	0	0
E26	0	0
E27	0	0

Legenda

CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS LINEARES - CGR (Total de 1 questão)

Média de desempenho - PROPORÇÃO MÚLTIPLA			
Grupo Experimental - GE (n=12)		**Grupo Controle - GC (n=15)**	
Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
CGR	**CGR**	**CGR**	**CGR**
0	12	0	0
Média: 0	Média: 0,75	Média: 0	Média: 0

ANEXOS

ANEXO A – SITUAÇÕES RETIRADAS DO TESTE OBEDUC

1ª: Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

2ª: Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?

3ª: A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?

4ª: Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?

5ª: Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?

6ª: Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno ganha 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele ganhou?

ANEXO B – COMPETÊNCIAS/ HABILIDADES -MATEMÁTICA - 6° ANO – PMF

Prefeitura de Fortaleza
Secretaria Municipal da Educação

2.1 MATEMÁTICA - 6º ANO

Pag1_ANA

2.1.1 Competências/Habilidades

Ao final do 6º ano do Ensino Fundamental, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Realizar leitura e escrita dos números do nosso sistema decimal e de outras culturas e reconhecimento de sua importância nas outras áreas de conhecimento.
- Aplicar o uso das operações fundamentais com números naturais – adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada na solução de problemas.
- Observar a presença da geometria no cotidiano.
- Solucionar problemas envolvendo figuras planas e sólidas geométricos.
- Resolver problemas envolvendo grandezas e as respectivas unidades padronizadas de medida de comprimento, mais usuais, para efetuar cálculos de perímetro e expressar resultados.
- Compreender o uso dos múltiplos e divisores de um número natural na resolução de problemas.
- Utilizar os polígonos (triângulos e quadriláteros) em resolução de problemas.
- Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos.
- Aplicar as operações fundamentais com números racionais na forma fracionária – adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada.
- Identificar as formas circulares em sólidos geométricos (cilindro e cone) ou em objetos do cotidiano.
- Diferenciar a circunferência e o círculo, destacando seus elementos.
- Utilizar a circunferência e o círculo em resolução de problemas.
- Utilizar, no contexto social, os números racionais na forma decimal.
- Usar as operações fundamentais com números racionais na forma decimal – adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação no cotidiano.
- Utilizar o número racional na forma decimal para a resolução de problemas que envolvam o cálculo de porcentagem.
- Resolver problemas envolvendo grandezas e as respectivas unidades padronizadas de medida, mais usuais, para efetuar cálculos de comprimento, área, volume, capacidade, tempo, massa e expressar resultados.

ANEXO C – ORGANIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS POR EIXO TEMÁTICO E BIMESTRE 6° ANO – PMF

- Investigar padrões, regularidades e modelos nos problemas apresentados em discussões.
- Apropriar-se dos conceitos matemáticos por meio de atividades práticas com material concreto, manipulável e digital.

2.1.2 Organização dos conteúdos por Eixo Temático e Bimestre

EIXO				
2.1.2.1 Números e operações	1° Bim	2° Bim	3° Bim	4° Bim
a) História dos números	X			
b) Sistema de numeração decimal	X			
c) Valor posicional do número	X			
d) Decomposição	X			
e) Números naturais	X			
f) Representação na reta numérica	X			
g) Operações fundamentais com números naturais	X			
h) Aplicação das propriedades das operações	X			
i) Potenciação e raiz quadrada com números naturais (introdução)	X			
j) Múltiplos e divisores		X		
k) Critérios de divisibilidade		X		
l) Números primos e compostos		X		
m) Decomposição de um número natural em fatores primos		X		
n) Múltiplos de um número natural		X		
o) Divisores comuns de dois ou mais números naturais		X		
p) Cálculo do Maior divisor Comum (MDC)		X		
q) Calculo do Mínimo Múltiplo Comum(MMC)		X		
Números Racionais e sua forma fracionária:			X	
r) Operações fundamentais com números racionais			X	

s) Potenciação de Racionais			X	
t) Raiz quadrada exata de racionais absolutos			X	
u) Números racionais e sua forma decimal				X
v) Fração decimal				X
w) Representação na reta numérica racional				X
x) Operações fundamentais com números racionais na forma decimal				X

EIXO **2.1.2.2 Espaço e Forma**	1º Bim	2º Bim	3º Bim	4º Bim
a) Ponto, reta e plano	X			
b) Segmento de reta	X			
c) Figuras planas		X		
d) Sólidos geométricos		X		
e) Ângulos .			X	
f) Identificação, medida de ângulos (grau) e classificação			X	
g) Polígonos: Triângulos e Quadriláteros			X	
h) Circunferência e Círculo				X
i) Identificação e reconhecimento de seus elementos				X

EIXO **2.1.2.3 Grandezas e medidas**	1º Bim	2º Bim	3º Bim	4º Bim
a) Introdução a Grandezas e Unidades de Medidas	X			
b) Sistema decimal de medidas		X		
c) Unidades de comprimento e suas transformações		X		
d) Perímetro de um polígono		X		
e) Unidades de área (superfície) e suas transformações			X	
f) Área de uma figura geométrica plana			X	

Prefeitura de Fortaleza
Secretaria Municipal da Educação

g) Unidades de capacidade. Massa, tempo e volume e suas transformações				X
EIXO				
2.1.2.4 Tratamento da Informação	**1º Bim**	**2º Bim**	**3º Bim**	**4º Bim**
a) Tabelas e gráficos (colunas ou barras, segmentos ou linhas)	X	X	X	X
b) Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos	X	X	X	X

ANEXO D – AUTORIZAÇÃO DA PREFEITURA MUNICIPAL DE FORTALEZA

Assessoria Técnica de Educação Integral
Escolas Municipais de Tempo Integral de Fortaleza

Prefeitura de Fortaleza
Secretaria Municipal da Educação

AUTORIZAÇÃO

A Assessoria Técnica de Educação Integral resolve autorizar a professora Ms. Juscileide Braga a conduzir a pesquisa "PRODUÇÃO COLABORATIVA E MULTIMODALIDADE EM AMBIENTES DE MÚLTIPLAS-REPRESENTAÇÕES: ESTUDO DA COVARIAÇÃO A PARTIR DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS" na Escola de Tempo Integral Filgueiras Lima.

Fortaleza, 23 de abril de 2015.

NATALIA REBOUÇAS RIBEIRO
MAT 107264-01
ASSESSORA TÉCNICA DE EDUCAÇÃO INTEGRAL

Natália Rebouças Ribeiro

Assessoria Técnica de Educação Integral

Avenida Desembargador Moreira, 2875 • Dionísio Torres • CEP 60.170-002 Fortaleza, Ceará, Brasil
85 3459-6700