



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

WILKLEY BEZERRA CORREIA

CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE SISTEMAS SISO E MIMO COM
ATRASO DE TRANSPORTE

FORTALEZA, CE

2016

WILKLEY BEZERRA CORREIA

CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE SISTEMAS SISO E MIMO COM
ATRASO DE TRANSPORTE

Tese apresentada ao curso de doutorado em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação e Controle.

Orientador: Prof. Dr. Bismark Claire Torrico

FORTALEZA, CE

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

C849c Correia, Wilkley Bezerra

Contribuições ao estudo de sistemas SISO e MIMO com atraso de transporte/
Wilkley Bezerra Correia. - 2016.
178 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Elétrica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, CE, 2016.

Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica
Orientação: Prof. Dr. Bismark Claude Torrico

1. Engenharia Elétrica. 2. Sistemas de controle. I. Título.

WILKLEY BEZERRA CORREIA

**CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE SISTEMAS SISO E MIMO
COM ATRASO DE TRANSPORTE**

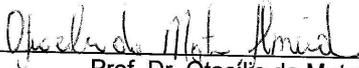
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Aprovada em: 22/01/2016

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Bismark Claire Torrico (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (PPGEE-UFC)



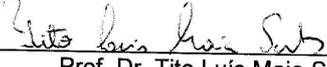
Prof. Dr. Otacílio da Mota Almeida
Universidade Federal do Ceará (PPGEE-UFC)



Prof. Dr. José Carlos Teles Campos
Universidade Federal do Ceará (DEE- UFC)



Prof. Dr. André Laurindo Maitelli
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)



Prof. Dr. Tito Luis Maia Santos
Universidade Federal da Bahia (UFBA)

Para Denise e Arthur.

AGRADECIMENTOS

À minha família: minha mulher Denise e meu filho Arthur. Pelo amor incondicional, por toda a compreensão, apoio e ternura ao longo desse tempo.

À minha mãe Rosa e à minha irmã Karol, pelo amor, amparo e acolhida em momentos de dúvida.

Ao Prof. Bismark Claure Torrico, pela orientação, pelo apoio acadêmico constante ao longo de todo o período em que este trabalho foi desenvolvido e pela confiança.

Ao Prof. Otacílio da Mota Almeida, pelo apoio acadêmico no início do doutorado, tornando possível o valioso período de aprendizado na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Aos amigos Rômulo Nunes de Carvalho Almeida e Vandilberto Pereira Pinto, agradeço a ambos pelo apoio nos estudos relacionados à máquina de relutância variável e pelas palavras de ânimo em momentos difíceis.

Aos colegas do GPAR Wellington Assunção da Silva e René Descartes Olímpio Pereira, pelo apoio nas implementações relacionadas à máquina de relutância variável e ao protótipo da incubadora neonatal, respectivamente.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo de controle de sistemas dinâmicos que exibem atraso de transporte. Nesse contexto, apresenta-se uma revisão bibliográfica que traz desde o surgimento do preditor de Smith até algumas de suas variações mais recentes. Na representação baseada em espaço de estados é comum que se tenha a abordagem em tempo discreto, em que o atraso de transporte é normalmente incluído através do aumento da ordem do estado.

No primeiro caso, este trabalho traz a proposta de uma nova estrutura de controle, de sintonia simplificada, capaz de lidar com sistemas de entrada e saída únicas, mas que apresentam múltiplos atrasos em caminhos diversificados internamente. A metodologia considerada, entretanto, permite que a estrutura proposta possa ser facilmente aplicada a sistemas com atraso simples.

O estudo é ampliado para a representação em espaço de estados no tempo discreto, em que apresenta-se uma abordagem que leva à adaptação de um preditor proposto recentemente na literatura para atuar como observador de estados. Neste caso, tem-se a vantagem de que todas as matrizes envolvidas tem a mesma ordem daquelas que descrevem o sistema, ou seja, não há aumento da ordem do estado. Assim, as técnicas conhecidas de controle robusto e ótimo para a representação em espaço de estados podem ser aplicadas a sistemas com múltiplas entradas e saídas. Apresenta-se ainda uma forma alternativa de sintonia do controle LQG, baseada no polinômio-T. Neste caso, a sintonia proposta pode ser aplicada tanto para sistemas sem atraso de transporte quanto para aqueles com atraso quando se considera a adaptação da estrutura do preditor no observador de estados. Além disso, este trabalho apresenta ainda a proposta de um novo preditor cuja estrutura é baseada no modelo CARIMA com polinômio-T, aplicado a sistemas com atraso de transporte.

O trabalho é repleto de exemplos em que aplicam-se tanto as estratégias de controle estudadas quanto as propostas, a sistemas estáveis, instáveis ou integradores em malha aberta, bem como a sistemas multivariáveis. Estudos de caso aplicados a plantas de laboratório comprovam a eficiência dos métodos discutidos.

Palavras-chaves: Atraso de transporte, polinômio-T, controle multivariável.

ABSTRACT

This work presents a contribution to the study of control of dead-time systems. Within this context, it is presented a literature review covering from the Smith predictor until its recent variations. For the state space representation dead-time is normally dealt under the discrete-time perspective, where it is included as state augmentation.

In the first case, this work proposes a novel control structure with simple tuning rules, able to deal with single input and output systems that presents multiple delays due to multiple internal paths. However, the design method allows the proposed structure to be readily applied for the single delay case.

The study is extended for the state space representation, where it is presented a modification to a predictor recently presented in literature, in order to use it as a predictor-observer within the state space representation. In this case, all the matrices involved in the observer have the same order as those of the plant, i. e., there is no need of the state augmentation to deal with dead-time. Hence, the well known techniques for the optimal and robust control may be applied for multivariable delayed systems. Besides, an alternative way of tuning for the LQG control, based on the T-polynomial approach, is proposed. In this case, the technique may be applied for both the delay free systems and dead-time systems. The latter by applying the modified predictor mentioned earlier in the observer structure. Additionally, it is also proposed a new predictor structure, based on the CARIMA model with T-polynomial, for dead-time systems.

This work is full of examples throughout the text which are suitable for both the control strategies studied herein and the proposed ones, applicable for stable, unstable or integrating systems, as well as multivariable systems. Case studies for laboratories plants validate the effectiveness of the discussed methods.

Key-words: Optimal control, time delay, T polynomial.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Resposta em frequência do atraso puro e unitário ($e^{-j\omega}$).	30
Figura 2 – Desenho básico de um trocador de calor.	32
Figura 3 – Respostas para $L = 0$, $L = 0.5$ e $L = 0.8$	33
Figura 4 – Respostas para $\alpha = 0.05$, $T_d = 0.17$ e $L = 0.8$	35
Figura 5 – Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada usando o preditor de Smith.	36
Figura 6 – Diagrama de blocos equivalente de um sistema de controle em malha fechada usando o preditor de Smith.	36
Figura 7 – Resposta temporal e diagrama de Nyquist para o sistema em malha fechada, usando PI como controlador primário na estrutura do preditor de Smith.	37
Figura 8 – Resposta temporal e diagrama de Nyquist para o sistema em malha fechada, usando PI como controlador primário na estrutura do preditor de Smith.	38
Figura 9 – Preditor de Smith modificado.	39
Figura 10 – Preditor de Smith filtrado - FSP.	40
Figura 11 – Diagrama de blocos geral de um sistema de controle hipotético para uma planta em tempo contínuo.	45
Figura 12 – Diagrama de blocos simplificado de um sistema de controle hipotético para uma planta em tempo discreto.	46
Figura 13 – Representação do compensador de atraso na forma unificada (UDTC).	47
Figura 14 – Estrutura simplificada aplicando um controlador equivalente com dois graus de liberdade.	50
Figura 15 – Diagrama de blocos do controlador GPC.	57
Figura 16 – Estrutura de controle equivalente.	57
Figura 17 – Robustez (caso estável).	62
Figura 18 – Análise do sistema estável do exemplo 2.1.	64
Figura 19 – Análise do sistema integrador do exemplo 2.2.	64
Figura 20 – Análise do sistema instável do exemplo 2.3	65
Figura 21 – Exemplo hipotético de um processo com múltiplos atrasos, com dois caminhos e três modelos.	68
Figura 22 – Estrutura DTC simplificada para sistemas com múltiplos atrasos.	71
Figura 23 – Resultados de simulação para o caso instável (exemplo 3.1)	76
Figura 24 – Resposta ao degrau para o sistema instável (exemplo 3.1): caso com incertezas.	78
Figura 25 – Estrutura equivalente do controlador SDTC para o caso FOPDT.	80

Figura 26 – Sistema estável (exemplo 3.2)	80
Figura 27 – Lugar geométrico das raízes (exemplo 3.2)	82
Figura 28 – Diagrama de blocos do sistema de controle regulador LQG.	91
Figura 29 – Janelas de tempo com as estimativas e medições necessárias no filtro de Kalman.	94
Figura 30 – Diagrama de blocos do controlador LQG com ação integral.	100
Figura 31 – Diagrama de blocos do controlador de um sistema de controle em espaço de estados baseado no modelo CARIMA.	104
Figura 32 – Análise do sistema integrador do exemplo 4.1.	106
Figura 33 – Análise de robustez do sistema instável e de fase não-mínima do exemplo 4.2.	107
Figura 34 – Resposta temporal do sistema instável e de fase não-mínima do exemplo 4.2.	108
Figura 35 – Estrutura do compensador explícito.	113
Figura 36 – Estrutura do preditor-observador para a abordagem do controle ótimo.	115
Figura 37 – Estrutura do preditor de Smith em tempo discreto considerando a nomenclatura utilizada no preditor-observador.	119
Figura 38 – Estrutura de controle proposta com modificação no compensador de atraso.	119
Figura 39 – Forma fechada da estrutura de controle proposta.	122
Figura 40 – Análise de robustez para o caso instável, considerando-se $\pm 30\%$ de erro de estimação quanto ao atraso.	123
Figura 41 – Resposta ao degrau para o sistema instável (caso nominal).	123
Figura 42 – Sistema instável com incertezas.	124
Figura 43 – Análise de robustez para o sistema integrador considerando $\pm 40\%$ de erro de estimação no atraso.	126
Figura 44 – Respostas ao degrau: caso integrador.	127
Figura 45 – Exemplo MIMO.	129
Figura 46 – Análise do sistema estável do exemplo 5.1.	132
Figura 47 – Análise do sistema estável do exemplo 5.1.	133
Figura 48 – Resposta ao degrau considerando-se $\alpha = 0,99$ e 10% de incerteza em relação ao atraso.	133
Figura 49 – Análise do sistema estável do exemplo 5.1.	134
Figura 50 – Análise do sistema integrador do exemplo 5.2.	135
Figura 51 – Modelo esquemático da coluna de destilação “Wood e Berry”.	137
Figura 52 – Resposta em frequência da coluna de destilação “Wood e Berry”.	139
Figura 53 – Resposta ao degrau da coluna de destilação (caso nominal).	139
Figura 54 – Resposta ao degrau considerando-se 20% de incerteza no ganho estático e -20% de incerteza nas constantes de tempo.	140

Figura 55 – Preditor proposto a partir do modelo CARIMA.	142
Figura 56 – Sistema instável.	147
Figura 57 – Sistema estável.	148
Figura 58 – Diagrama de blocos da máquina de relutância variável (MRV).	149
Figura 59 – Bancada experimental. 1 - conversor (circuito de acionamento). 2 - Máquina de relutância variável (MRV) 6/4.	151
Figura 60 – Análise de robustez, considerando-se 10% de incerteza no ganho e duas amostras de incerteza no atraso.	152
Figura 61 – Resposta ao degrau (simulação).	152
Figura 62 – Espectro de frequências relativo a $u_0(t)$ ($t \geq 5$) para o sinal de controla da Figura 61.	153
Figura 63 – Resposta ao degrau (resultados experimentais).	155
Figura 64 – Espectro de frequências relativo a $u_0(t)$ ($t \geq 5$) para o sinal de controle da Figura 63 (resultdos experimentais).	155
Figura 65 – Protótipo da unidade incubadora do estudo de caso experimental.	156
Figura 66 – Diagrama esquemático do protótipo da unidade incubadora.	157
Figura 67 – Resposta em frequência da planta-piloto da incubadora neonatal: con- trolador LQG/LTR.	158
Figura 68 – Resposta ao degrau para o controlador LQG/LTR com $q = 1$ e $q = 100$	159
Figura 69 – Resposta em frequência da planta-piloto da incubadora neonatal: con- trolador LQG-T.	160
Figura 70 – Resposta ao degrau para o controlador LQG-T ($\theta_{1,2} = 0^\circ$ e $\theta_1 = 118^\circ$, $\theta_2 = 124^\circ$) - caso nominal.	160
Figura 71 – Resposta ao degrau para os controladores LQG/LTR e LQG-T considerando-se 3 amostras de incerteza no atraso.	161
Figura 72 – Resultados experimentais da resposta ao degrau para o controlador LQG/LTR ($q = 1$).	161
Figura 73 – Diagrama de blocos do observador de estados de ordem plena.	178

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Índices de desempenho para o sistema instável (exemplo 3.1): caso nominal.	77
Tabela 2 – Índices de desempenho para o sistema instável (exemplo 3.1): caso com incertezas.	78
Tabela 3 – Índices de desempenho para o caso estável (exemplo 3.2).	82
Tabela 4 – Índices de robustez: exemplo 4.1	106
Tabela 5 – Índices de robustez: exemplo 4.2	108
Tabela 6 – Índices de desempenho para o sistema instável.	124
Tabela 7 – Índices de desempenho para o sistema integrador.	127
Tabela 8 – Índices de desempenho: exemplo 5.1	133
Tabela 9 – Índices de desempenho	153
Tabela 10 – Análise de potência	154
Tabela 11 – Índices de desempenho: resultados experimentais	154
Tabela 12 – Análise de potência (resultados experimentais)	154

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MPC	<i>Model-based Predictive Control</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LTR	<i>Loop Transfer Recovery</i>
DTC	<i>Dead-Time Compensation</i>
SP	<i>Smith Predictor</i>
MSP	<i>Modified Smith Predictor</i>
FOPDT	<i>First Order Plus Dead-Time</i>
IPDT	<i>Integrative Plus Dead-Time</i>
SOPDT	<i>Second Order Plus Dead-Time</i>
ZOH	<i>zero order holder</i>
UDTC	<i>Unified Dead-Time Compensation</i>
SFSP	<i>Simplified Filtered Smith Predictor</i>
CARMA	<i>Controller Auto-Regressive Moving-Average</i>
CARIMA	<i>Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average</i>
DTC-GPC	<i>Dead-Time Compensator Generalised Predictive Controller</i>
LTV	<i>Linear Time Varying</i>
LTI	<i>Linear Time Invariant</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
ARE	<i>Algebraic Riccati Equation</i>
RHC	<i>Receding Horizon Controller</i>
SDTC	<i>Simplified Dead-Time Compensator</i>
IAE	<i>integrated absolute error</i>

TV	<i>total variation</i>
SR	<i>set-point reference</i>
LDR	<i>load disturbance rejection</i>
NR	<i>noise rejection</i>
LTR	<i>loop transfer recovery</i>
MRV	<i>Máquina de Relutância Variável</i>
GPCBC	<i>GPC Based Control</i>
DEP	<i>Densidade Espectral de Potência</i>
ISE	<i>Integral Square Error</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Revisão bibliográfica	24
1.2	Motivação	25
1.3	Objetivo	26
1.4	Organização do trabalho	27
2	CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE . . .	29
2.1	Compensação do atraso	29
2.1.1	Controle PID para sistemas com atraso	31
2.1.2	Preditor de Smith - SP	35
2.2	Algumas variações do preditor de Smith	37
2.2.1	Preditor de Smith Modificado - MSP	38
2.2.2	Preditor de Smith Filtrado - FSP	40
2.2.2.1	FSP para plantas estáveis em malha aberta	41
2.2.2.2	FSP para plantas integradoras em malha aberta	42
2.2.2.3	FSP para plantas instáveis em malha aberta	43
2.3	Implementações em tempo discreto	44
2.3.1	Algoritmo FSP em tempo discreto	47
2.3.2	Variações do FSP em tempo discreto	48
2.4	O controle preditivo baseado em modelo (MPC)	51
2.4.1	O algoritmo GPC para sistemas sem atraso	52
2.4.2	O algoritmo GPC para sistemas com atraso	55
2.4.3	Polinômio-T	58
3	O CONTROLE DE SISTEMAS COM MÚLTIPLOS ATRASOS	67
3.1	O algoritmo FSP para múltiplos atrasos	67
3.2	Sistema de controle proposto	69
3.2.1	Regras de sintonia do controle primário	71
3.2.2	Sintonia do filtro de robustez $F_r(z)$	73
3.2.3	Análise de robustez	73
3.3	Simulações	74
4	CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS	83
4.1	Otimização em sistemas de controle	84
4.1.1	O problema LQR	84
4.1.2	Estimador ótimo: o filtro de Kalman	86

4.1.3	O controle LQG e o Teorema da Separação	89
4.2	Controle otimizado em tempo discreto	92
4.2.1	LQR em tempo discreto	93
4.2.2	Filtro de Kalman em tempo discreto	93
4.2.3	LQG/LTR em tempo discreto	97
4.2.4	Proposta de uso do polinômio-T na sintonia do controle LQG	99
5	CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS PARA SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE	109
5.1	Atraso de transporte em espaço de estados	109
5.1.1	Representação implícita: estado aumentado	109
5.1.2	Compensação explícita do atraso	110
5.1.3	Predição explícita do atraso	111
5.2	Preditor de compensação explícita modificado: um preditor-observador para o controle ótimo	113
5.2.1	Compensação explícita do atraso para o controle ótimo	114
5.2.2	O Teorema da separação para o preditor-observador	116
5.2.3	Diagrama esquemático em malha fechada	118
5.2.4	Análise de robustez	120
5.2.5	Resultados em sistemas SISO e MIMO	122
5.2.5.1	Sistema instável	122
5.2.5.2	Sistema integrador	125
5.2.5.3	Sistema MIMO	127
5.2.6	A inclusão do polinômio-T no preditor-observador para sistemas com atraso	129
5.3	Proposta de preditor em espaço de estados do modelo CARIMA com polinômio-T	140
5.3.1	Modelo de predições	141
5.3.2	O Teorema da Separação para o preditor proposto	142
5.3.3	Análise de robustez	144
5.3.4	Simulações	145
6	ESTUDOS DE CASOS	149
6.1	Máquina de relutância variável	149
6.2	Planta piloto de incubadora neonatal	155
7	CONCLUSÕES	163
	REFERÊNCIAS	165

ANEXOS	171
ANEXO A – ALGUNS CONCEITOS ESTATÍSTICOS	173
ANEXO B – O OBSERVADOR DE ESTADOS DE LUENBERGER . .	177

1 INTRODUÇÃO

O ato de controlar um sistema sem a necessidade da intervenção humana é algo que fascina e intriga a humanidade desde os tempos mais remotos. O livro de Morari e Zafrou (1989) em seu capítulo introdutório traz alguns exemplos que se estendem desde a antiga Grécia até a era cotidiana. Porém, lembram que foi somente em meados do séc. XIX, com a formulação através de equações diferenciais, que Maxwell realizou a primeira análise matemática de sistemas realimentados.

Atualmente, o projeto e a análise de sistemas de controle desempenham papel fundamental no desenvolvimento de várias áreas da engenharia com especial destaque para a elétrica, a mecânica e a química.

Nesse contexto, uma classe de sistemas tem despertado particular interesse de estudos desde meados do séc. XX. Tratam-se daqueles que exibem atraso de transporte, assim chamados devido à diferença temporal pertinente entre o instante de atuação e o início da mudança efetiva na resposta dinâmica. Sistemas desse tipo são comumente encontrados em processos químicos ou biológicos, em vários processos industriais, como transporte de massa ou energia ou ainda em comunicações quando há a perda de um ou mais pacotes na comunicação de dados, por exemplo, como mencionam Normey-Rico e Camacho (2007, cap. 1). Um exemplo clássico desse tipo de sistema é o controle de temperatura em ambiente fechado, onde um atuador (aquecedor ou condicionador de ar) não leva o ambiente à temperatura desejada instantaneamente. Somente após algum tempo é que pode-se começar a perceber o efeito de mudança na temperatura, decorrente do ajuste. Entretanto, sistemas que apresentam atraso de transporte podem modificar consideravelmente as características de robustez e provocar instabilidade, como ficará claro no capítulo 2.

Por outro lado, a partir de meados dos anos 1950 houve o desenvolvimento de estratégias de controle baseadas em espaço de estados, o que durante algum tempo foi tratado como controle moderno. Nelas calcula-se a lei de controle pela realimentação de estados do sistema, através de uma matriz de ganhos. Essas estratégias possuem características inerentemente robustas ao sistema de controle. No entanto, nem sempre o estado está disponível para medição e realimentá-lo pode não ser possível, fazendo-se necessário recorrer a um observador. Neste caso, pode ocorrer degradação da robustez, como será explicado no capítulo 4.

1.1 Revisão bibliográfica

Atribui-se a Smith (1957) a proposição de uma estrutura que torna possível lidar com o atraso de transporte de maneira simples e eficaz. Inicialmente baseada em um arranjo matemático da função de transferência do sistema, essa estrutura é capaz de prever nominalmente ou estimar a saída do sistema de forma a compensar o atraso, razão pela qual ficou conhecida como preditor de Smith (*Smith Predictor-SP*). Mas foi somente com o crescente uso do controle digital a partir do final dos anos 1970 que o preditor de Smith passou a ser mais popularmente implementado, como menciona Åström (1977) que também incluiu uma análise em frequência, onde explica o mecanismo de avanço de fase.

Ao longo das últimas décadas várias modificações do preditor de Smith foram propostas, com um resumo das principais apresentadas por Palmor (1996). O livro de Normey-Rico e Camacho (2007) traz um estudo especificamente direcionado para sistemas com atraso, além de também apresentar modificações no preditor de Smith inclusive no âmbito do controle preditivo baseado em modelo (MPC- *Model-based Predictive Control*). Uma dessas variações que merece destaque é o preditor de Smith filtrado - FSP (*Filtered Smith Predictor*) que pode ser encontrado nos trabalhos de Normey-Rico e Camacho (2009), Santos, Botura e Normey-Rico (2010). Nessa sequência, surge o FSP simplificado proposto por Torrico et al. (2013), que caracteriza-se pelas regras de sintonia simplificadas para o filtro de robustez, embora tenha sido proposto para sistemas de primeira ordem apenas. O trabalho de Normey-Rico, Flesch e Santos (2014) estende o preditor de Smith filtrado para o caso em que a planta exhibe múltiplos atrasos entre a entrada e a saída.

Diferentemente dos sistemas baseados em função de transferência, onde o projeto e análise de controle é realizada no domínio da frequência, a abordagem por espaço de estados é fundamentada no domínio do tempo. Essa abordagem tem uma matriz de ganhos calculada a partir da solução analítica de um problema de otimização, o que ficou conhecida como o problema do regulador linear quadrático (LQR - *Linear Quadratic Regulator*), e possui características de robustez bem conhecidas, assunto que pode ser encontrado mais detalhadamente nos livros-texto de Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009), Nise (2011), Kuo e Golnaraghi (2005).

Quando o estado não está disponível para medição ou possui informações sem significado físico, se faz necessário a implementação de um observador de estados para estimar o estado do sistema, sendo a lei de controle nesse caso formada em função desse estado estimado. Dessa forma destacam-se os modelos de controle que utilizam otimização tanto na estimação do estado (através do filtro de Kalman) quanto na realimentação do estado (LQR), chamados de regulador ou controlador gaussiano linear quadrático (LQG - *Linear Quadratic Gaussian*) com recuperação de malha (*Loop Transfer Recover-LTR*) que incrementam a robustez do LQG tradicional (DOYLE, 1978), (DOYLE; STEIN, 1979), surgido ao final dos anos 1970.

Durante os anos 1980 o incremento de robustez passou a ser tema dominante, surgindo as otimizações baseadas nas normas H_2 e H_∞ com destaque para os trabalhos de Zames (1981), Glover e Doyle (1988) e Doyle et al. (1989). Uma abordagem objetiva desse assunto pode ser encontrada no livro de Skogestad e Postlethwaite (2005).

No âmbito do controle preditivo (MPC), Kothare, Balakrishnan e Morari (1996), a partir de uma função custo com horizonte infinito, propuseram um sistema de controle por realimentação de estados, onde o problema de otimização é resolvido no campo da otimização convexa, a partir de desigualdades lineares matriciais (LMI - *Linear Matrix Inequalities*). Essa abordagem tornou-se bastante popular, embora, de acordo com Camacho e Bordons (2004, pág. 237), a otimização através de programação linear ou de programação quadrática especializada é numericamente mais eficiente.

1.2 Motivação

Os trabalhos de Mita (1985) e Ishihara e Takeda (1986) já mencionam a estimação baseada em predição para o projeto de um controlador LQG/LTR, embora tratem para o caso de atraso unitário, mas já em tempo discreto. Ishihara (1988) considerou uma extensão desse estudo para atrasos maiores que um. Entretanto, esses trabalhos levam em consideração que o atraso de transporte deve-se ao fato de o tempo demandado para cálculo da lei de controle ser maior do que múltiplos inteiros do período de amostragem. A extensão para plantas que de fato possuem atraso de transporte aparece no trabalho de Kinnaert e Peng (1990), onde um controlador LQG/LTR é proposto a partir de um aumento do estado para levar em consideração o atraso. Talvez o considerável desenvolvimento de modificações do preditor de Smith e a popularização das estratégias de controle preditivo a partir dos anos 1990 possam ser apontados como razões pelas quais não se veem muitas publicações que relacionam o atraso de transporte com o controle LQG/LTR.

Sob o ponto de vista da implementação, o aumento da ordem das matrizes envolvidas sempre foi considerado um ponto negativo, devido ao esforço computacional envolvido. Pensando nisso, de modo a evitar o aumento de estado, Zhang, Duan e Xie (2006) propõem uma estratégia de dualidade em que o problema do LQR é resolvido a partir de uma equação de Riccati com a mesma ordem da planta, ignorando o atraso. Baseando-se nessa ideia e na reorganização da sequência de inovação (ZHANG et al., 2004), o trabalho de Song e Yan (2014) propõe um LQG para sistemas com atraso, embora apresentem-se resultados de simulação somente para a etapa de estimação.

Por outro lado, Mirkin e Raskin (2003) exploram a estrutura de compensação de atraso sob a perspectiva das transformações lineares fracionárias (LFT). Apesar de haver sido considerado para sistemas com atraso único, o estudo leva à conclusão que todo controlador que estabiliza a planta com atraso possui uma estrutura preditor-observador.

Posteriormente, esse estudo fora estendido para o caso de múltiplos atrasos (MIRKIN; PALMOR; SHNEIDERMAN, 2011), com uma proposta de implementação apresentada por Mirkin, Palmor e Shneiderman (2012).

Aplicações utilizando um preditor em espaço de estados são comumente encontradas no âmbito do controle preditivo, como por exemplo os trabalhos de Gonzalez et al. (2012) e Santos et al. (2012). Nesse contexto, o trabalho de (GARCIA; ALBERTOS, 2010) apresenta uma proposta de preditor que aplica-se ao caso multivariável, aplicável a plantas integradoras e instáveis. No trabalho de Normey-Rico, Garcia e Gonzalez (2012) apresenta-se uma análise de estabilidade robusta no âmbito do atraso variável, em que o FSP é abordado em espaço de estados, embora traga exemplos de casos monovariáveis apenas. O FSP para sistemas multivariáveis é apresentado por Flesch et al. (2011).

1.3 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo geral apresentar propostas de estratégias de controle para sistemas com atraso que simplifiquem o projeto e a sintonia do controle primário, tanto para o caso monovariável quanto para o caso multivariável. A simplificação da sintonia ora mencionada significa tornar o ajuste de resposta ao seguimento de referência do tipo degrau mais intuitivo, ou seja, dependendo do valor escolhido de um ganho estático.

De forma mais específica, os objetivos desse trabalho podem ser enumerados conforme apresentado na sequência.

- Apresentar a proposta de um sistema de controle com compensação de atraso, com regras simples de sintonia para sistemas com múltiplos atrasos. Dessa forma, pela metodologia considerada, a proposta de controle pode ser aplicada a sistemas com atraso simples de ordem maior que um, em que o FSP simplificado torna-se um caso particular;
- No âmbito do controle multivariável para sistemas com atraso de transporte, utilizar uma estrutura de estimação com preditor para a compensação do atraso, incorporando os elementos dos controladores. Neste caso, a ideia básica consiste em compensar o atraso de transporte no observador de estados, considerando uma estrutura de estimação de estado predito (estimador-preditor de estados). Assim, pode-se realizar um projeto de controle para a representação da planta sem considerar o atraso de transporte, em que técnicas de controle ótimo e controle robusto podem ser consideradas;
- Aplicar o polinômio-T já bastante popular na área de controle preditivo a sistemas em espaço de estados. Nesse contexto, propõe-se utilizar um processo de estimação ótima de estados (filtro de Kalman) que incorpora o polinômio-T como parâmetro de

sintonia para o incremento da robustez. Essa ideia é inicialmente aplicada a sistemas sem atraso de transporte, porém, utilizando-se a estrutura do preditor-observador do item anterior, pode-se aplicá-la ao caso de sistemas com atraso de transporte.

- Aplicar o modelo CARIMA com polinômio-T para obter a estrutura de um preditor em espaço de estados com robustez dada pela sintonia direta do polinômio-T, estendendo a abordagem do item anterior, em que a sintonia do polinômio-T tem efeito indireto no incremento da robustez.

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado conforme apresentado na sequência.

O Capítulo 2 apresenta de forma mais detalhada a abordagem de tratamento do atraso de transporte. Aspectos de robustez e a representação do atraso em tempo discreto são também abordados. A fundamentação teórica deste capítulo é baseada na representação de sistemas através de funções de transferência e fundamenta-se na revisão de técnicas já conhecidas. Ao final, o capítulo apresenta uma proposta de sintonia do polinômio-T, a qual permite acelerar a rejeição a perturbações do tipo degrau, sem a necessidade de alterar o algoritmo do controlador preditivo.

O Capítulo 3 apresenta a proposta de uma nova estratégia de controle baseada na ideia de simplificação das regras de sintonia do controle primário. A estrutura proposta é direcionada a sistemas monovariáveis com abordagem teórica para o caso de sistemas com múltiplos atrasos, embora possa ser facilmente aplicada ao caso de sistemas com atraso simples.

O Capítulo 4 aborda os principais aspectos relacionados aos sistemas de controle em espaço de estados. Nesse contexto, aspectos de robustez são tratados seguindo a cronologia de aparecimento com a apresentação das principais estratégias de controle ótimo: LQR e LQG. O assunto é abordado no âmbito dos tempos contínuo e discreto. O capítulo finaliza com a proposta de sintonia do filtro de Kalman baseada no polinômio-T, aplicado a sistemas sem atraso.

No Capítulo 5 a questão do atraso de transporte em espaço de estados é apresentada. Dessa forma, esse capítulo traz a modificação em um preditor a fim de incorporá-lo na estrutura de um observador de estados, levando à obtenção de um preditor-observador. Assim, pode-se compensar o atraso garantindo-se a robustez, a qual é dada pelo projeto dos polos do observador que pode ser por alocação de polos ou otimização da estimação (filtro de Kalman), em que neste último caso, a sintonia através do polinômio-T apresentada no capítulo 4 pode ser aplicada, estendendo sua aplicação para sistemas com atraso de transporte. Dessa forma, podem-se aplicar estratégias de projeto de realimentação de estados já conhecidas no controle primário, como por exemplo, alocação de polos, reali-

mentação otimizada do estado (LQR). O capítulo finaliza com a proposta de um preditor baseado no modelo CARIMA, cuja robustez é dada pelo polinômio-T. Neste caso, trata-se de um preditor novo, descrito em função das variações do sinal de controle. Mostra-se que o *Princípio da Separação* aplica-se a esse preditor, o que torna possível o projeto de uma lei de controle por realimentação de estados por alocação de polos ou via problema LQR, com a garantia de estimação dada pelo posicionamento do polo do polinômio-T.

O Capítulo 6 concentra os estudos de casos em nível de simulação, além de implementações em laboratório. Nesse contexto, considera-se a aplicação das estratégias de controle propostas em uma máquina de relutância variável e na planta-piloto de uma incubadora neo-natal.

No Capítulo 7 apresentam-se as conclusões.

2 CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE

Este capítulo traz uma abordagem geral sobre o atraso de transporte e considerações sobre a implementação em tempo discreto de sistemas de controle entre as seções 2.1 e 2.3. Abordam-se ainda aspectos relacionados à robustez de sistemas quanto ao atraso e a forma comumente utilizada para análise. A seção 2.4 propõe-se a apresentar uma revisão básica sobre o algoritmo do controle preditivo generalizado e a inclusão do polinômio-T como elemento de incremento da robustez, tanto para sistemas sem atraso de transporte quanto para sistemas com atraso. Ao final, na subseção 2.4.3, apresenta-se uma pequena contribuição no âmbito do controle preditivo, baseada em uma forma alternativa de sintonia do polinômio-T. Nessa proposta, a rejeição a perturbações do tipo degrau é acelerada, mantendo-se o mesmo algoritmo.

2.1 Compensação do atraso

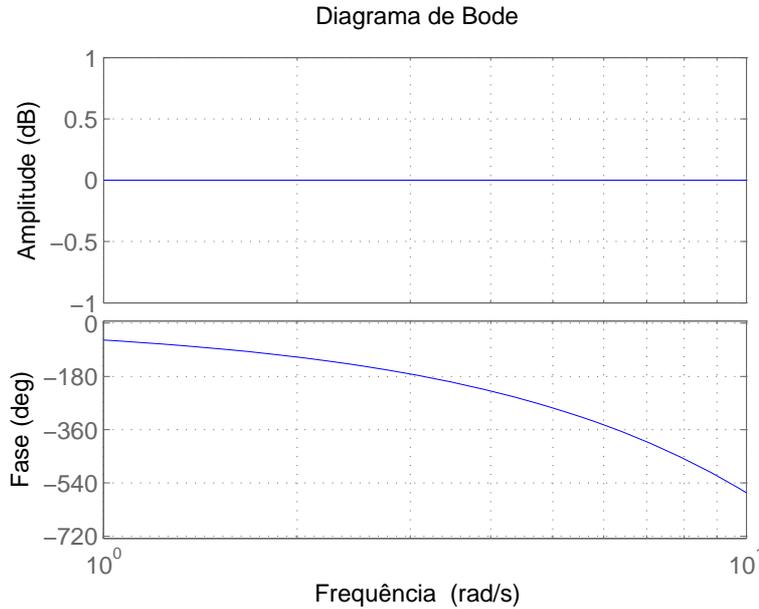
Para que se possa analisar o efeito do atraso de transporte no sistema, é preciso que se conheça *a priori* o modelo matemático que o descreve. Recorre-se então à Transformada de Laplace de um sinal $u(t)$, cuja representação temporal com atraso L é $u(t - L)$. Consultando-se uma Tabela de Transformadas, vê-se que

$$\begin{aligned} u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) \\ u(t - L) &\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)e^{-Ls}. \end{aligned}$$

Estendendo essa análise a um sistema $G(s)$, sua representação com atraso será simplesmente $G(s)e^{-Ls}$. Dessa forma, ao se analisar a resposta em frequência do termo e^{-Ls} , fica fácil perceber o efeito do atraso no modelo $G(s)$. Assim, as componentes de amplitude e fase de $e^{-Ls}|_{s=j\omega}$ desse sistema são

$$\begin{aligned} |e^{j\omega L}| &= 1, \text{ para todo } \omega; \\ \angle e^{j\omega L} &= -\omega L. \end{aligned}$$

A Figura 1 apresenta o diagrama de Bode associado a $e^{j\omega L}$, com $L = 1$. A partir da análise gráfica, vê-se que a amplitude do sistema com atraso permanece inalterada quando comparada com o sistema sem atraso, já que o incremento é de 0 dB . A resposta de fase, porém, sofre um decremento com a frequência. Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009, pág. 381), baseando-se nesse gráfico, observam que estabilizar um sistema para o caso de frequências maiores que $\omega \approx \frac{3}{L}$ pode ser uma tarefa difícil, já que nesse caso o desvio de fase é maior que 180° .

Figura 1 – Resposta em frequência do atraso puro e unitário ($e^{-j\omega}$).

Fonte: (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2009) - adaptado.

O atraso puro de tempo pode ser aproximado matematicamente em frequência de diferentes formas, sendo a representação de Padé a mais usual. Nesse tipo de modelo o atraso é aproximado por uma função de transferência própria, já que o termo e^{-Ls} não pode ser escrito com um número finito de polinômios, como menciona Aguirre (2004, pág.108), mas aproximado por:

$$e^{-Ls} = \frac{Q_n(-Ls)}{Q_n(Ls)} \quad (2.1)$$

sendo

$$Q_n(s) = \sum_{j=0}^n \frac{(n+j)!}{j!(n-j)!} (Ls)^{n-j},$$

e n a ordem desejada da aproximação. Em termos de implementação prática, as aproximações mais usadas são as de primeira e segunda ordem (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, pág. 22), que aplicadas à equação (2.1), produzem:

$$e^{-Ls} = \frac{Q_1(-Ls)}{Q_1(Ls)} = \frac{-Ls + 2}{Ls + 2}, \quad e^{-Ls} = \frac{Q_2(-Ls)}{Q_2(Ls)} = \frac{(-Ls)^2 - 6Ls + 12}{(Ls)^2 + 6Ls + 12}.$$

Sistemas de controle estáveis em malha aberta são comumente encontrados em aplicações práticas. Normalmente esses sistemas são descritos por funções de transferência de primeira ou de segunda ordem. Quando a constante de tempo de um processo de ordem maior ou igual a dois é considerada muito maior (cerca de dez vezes) que as demais, então comumente esse sistema é representado por um modelo de primeira ordem do tipo:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls}. \quad (2.2)$$

Esse tipo de modelo é comumente conhecido como modelo de primeira ordem com adição de tempo morto ou simplesmente FOPDT (*first order plus dead-time*). Pode-se recorrer à análise gráfica da Figura 1 a fim de se perceber o efeito do termo e^{-Ls} nesse sistema.

Nesse contexto, Åström e Häglund (2006, pág. 26) citam o *atraso normalizado* como parâmetro dado em função do atraso L e da constante de tempo T do sistema, sendo dado por:

$$\tau_c = \frac{L}{L + T}.$$

O parâmetro τ_c varia entre 0 e 1, sendo que valores mais próximos de um indicam sistemas com maior dificuldade em controlar, enquanto valores mais próximos de zero indicam sistemas mais fáceis de serem controlados. Normey-Rico e Camacho (2007, pág.39) mencionam que uma regra básica consiste em considerar um sistema com atraso de tempo dominante se $\tau_c > 2/3$, o que corresponde a $L > 2T$.

Nesse contexto, Åström e Häglund (2006, pág. 89) destacam os sistemas com atraso longo como aqueles em que um controle mais sofisticado é necessário. De modo a analisar o controle nesse tipo de sistema, as duas próximas subseções trazem uma planta com atraso de transporte com dois tipos de controle: PID e o preditor de Smith (SP), com respostas observadas tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

2.1.1 Controle PID para sistemas com atraso

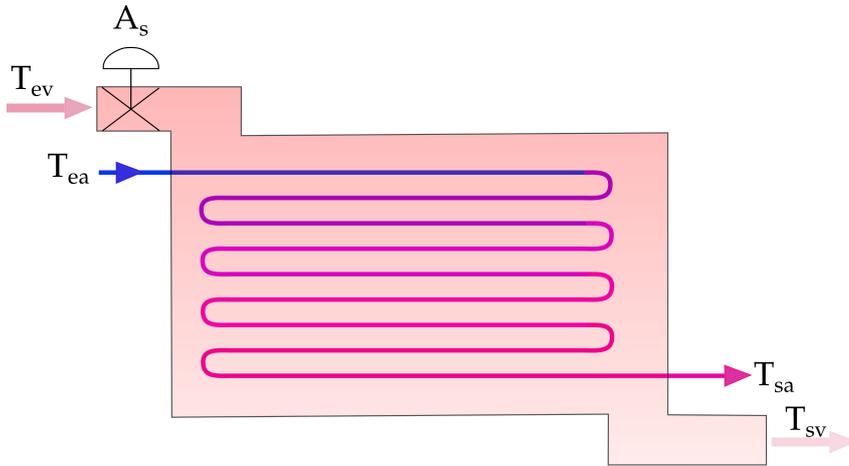
Conforme já mencionado anteriormente, um dos processos clássicos de sistemas com atraso de transporte está relacionado com o controle de temperatura. Nesse contexto, o trocador de calor constitui uma planta largamente mencionada, cujo princípio básico de operação é brevemente descrito na sequência, a partir de uma descrição mais detalhada dada por Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009, pág. 52).

O trocador de calor é composto basicamente por uma câmara por onde flui vapor d'água, cujo fluxo é controlado por uma válvula. No interior da câmara é disposta uma serpentina, feita a partir de material com boa condutividade térmica, por onde flui o líquido a ser aquecido (normalmente água). A Figura 2 traz um esquema básico simplificado desse processo. Nesse sistema a válvula A_s controla a vazão de vapor que entra na câmara à temperatura T_{ev} . A água entra à temperatura T_{ea} e troca calor com o vapor ao longo da serpentina. O vapor d'água sai da câmara à temperatura T_{sv} , menor que T_{ev} enquanto na água o comportamento é inverso, ou seja, a temperatura de saída $T_{sa} > T_{ea}$.

Um modelo matemático que descreve esse sistema pode ser obtido a partir da descrição fenomenológica que leva em consideração capacidades térmicas, calores específicos, resistência térmica e massa de fluido, levando a uma função de transferência do tipo

$$\frac{T_m}{A_s} = \frac{K e^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad (2.3)$$

Figura 2 – Desenho básico de um trocador de calor.



Fonte: (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2009, pág. 52) - adaptado

onde K é um ganho estático, τ_1 e τ_2 são as constantes de tempo associadas e T_m é a temperatura medida no ponto desejado, que normalmente se localiza distante do trocador de calor, levando à relação $T_m = T_{sa}(t - t_d)$, incluindo assim o atraso de transporte t_d no processo.

Apesar do trocador de calor ser descrito por um modelo de segunda ordem, conforme mostrado na equação (2.3), uma verificação mais detalhada deixa claro que uma das constantes de tempo é muito maior que a outra, por exemplo, $\tau_1 \gg \tau_2$. Dessa forma, é comum que se encontre um modelo de primeira ordem do tipo

$$\frac{T_m}{A_s} = \frac{K e^{-Ls}}{\tau s + 1},$$

sendo L o atraso e τ a constante de tempo do processo de primeira ordem equivalente.

Nesse contexto, um modelo dado por

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} e^{-Ls} \quad (2.4)$$

pode ser usado para representar a função de transferência de um trocador de calor com constante de tempo $\tau = 1$ s e ganho estático unitário $K = 1$. O valor do atraso L pode ser variado de modo a representar um ponto de controle mais próximo ou mais afastado da planta.

De acordo com a análise apresentada por Åström e Häglund (2006, pág. 268) para esse sistema, pode-se projetar um controle PI para o modelo sem atraso, dado por

$$C(s) = \frac{KT_i s + 1}{T_i s}, \quad (2.5)$$

resultando em uma equação característica do tipo

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

onde ξ é o coeficiente de amortecimento e ω_0 é a frequência natural de oscilação, ambos são parâmetros de projeto. Os parâmetros do controlador são então dados por (ÅSTRÖM; HÄGLUND, 2006)

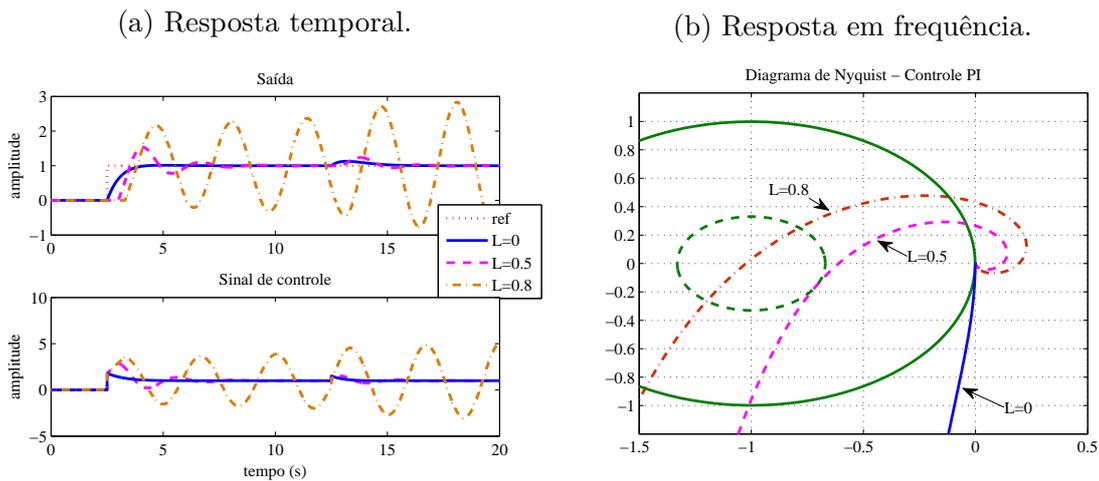
$$K = \frac{2\xi\omega_0 T - 1}{K_p}; \quad (2.6)$$

$$T_i = \frac{K_p K}{\omega_0^2 T}, \quad (2.7)$$

onde K_p é o ganho estático da planta, igual a 1 neste caso.

Assim, três cenários de simulação diferentes foram considerados: $L = 0$, $L = 0.5$ e $L = 0.8$. As Figuras 3a e 3b mostram as respostas temporais e em frequência (diagramas de Nyquist), respectivamente.

Figura 3 – Respostas para $L = 0$, $L = 0.5$ e $L = 0.8$.



Fonte: Autor

Fonte: Autor

A partir do gráfico da resposta temporal (ver Figura 3a) percebe-se que quanto maior o valor do atraso mais o sistema tende à desestabilização. Os gráficos de Nyquist mostrados na Figura 3b corroboram o comportamento temporal, já que as curvas da função de transferência em malha aberta ($L(j\omega)$), incluindo o controlador, aproximam-se do ponto crítico $(-1, j0)$ e o englobam uma vez no sentido anti-horário quando $L = 0.8$, indicando que o sistema é instável em malha fechada.

A norma infinita $\|F\|_\infty$ representa o máximo valor singular da função de variável complexa F . Os círculos concêntricos no ponto $(-1, j0)$ tem raios dados por $\|S\|_\infty^{-1}$, ou seja, o inverso da norma infinita da função de sensibilidade (WOLOWICH, 1994, pág. 221) e representam a menor distância euclidiana entre a curva de $L(j\omega)$ e o ponto $(-1, j0)$. Trata-se de uma medida de robustez comumente utilizada. Percebe-se que quanto maior o valor do atraso, menor fica o raio do círculo, indicando que o sistema fica menos robusto.

Em processos estáveis em malha aberta, a ação proporcional conduz o sistema às vizinhanças do ponto de operação desejado, dado pela referência. O erro de regime permanente é corrigido com a ação integral. Por essa razão, o controle PI é de longe o mais utilizado em aplicações práticas, onde a maioria dos sistemas é estável. Quando se trata ainda de um sistema de primeira ordem, então um controle PI é suficiente (ÅSTRÖM; HÄGLUND, 2006, pág. 87).

Entretanto, a ação derivativa desempenha papel importante quanto à estabilidade dos sistemas em malha fechada. A derivada de uma função representa graficamente uma reta tangente a um ponto. Sendo assim, a ação derivativa representa uma predição por extrapolação linear T_d instantes de tempo à frente. Uma explicação mais detalhada sobre esse assunto é dada por Åström e Häglund (2006, pág. 68).

Nesse contexto, Normey-Rico e Camacho (2007, pág. 87) chamam a atenção para o fato de que o tempo derivativo pode ser escolhido igual ao atraso de transporte ($T_d = L$), permitindo assim uma predição que compense o atraso, mas alertam que essa condição é satisfeita somente quando as variações no sinal de erro $e(t)$ são suaves no intervalo $(t, t + T_d)$ e quando o atraso L é menor que constante de tempo em malha fechada. Sendo assim, a ação derivativa passa a desempenhar papel importante na estabilidade do sistema, quando o processo exhibe atraso de transporte.

Dessa forma, a equação (2.5) passa a incluir a ação derivativa com a inclusão de um polo distante para torná-la realizável, sendo dada por

$$C(s) = \frac{KT_i s + 1}{T_i s} \frac{(KT_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)}, \quad (2.8)$$

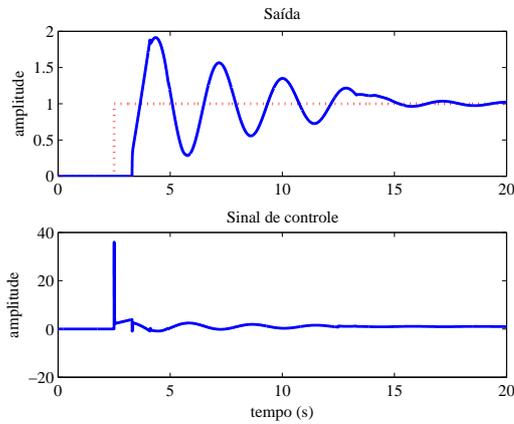
onde $\alpha \in (0, 1)$, mas tipicamente assumindo valores entre 0.05 e 0.5 (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, pág. 88). Assim, a função de transferência dada pela equação (2.8) será própria, e, portanto, realizável, com a inclusão do polo $s = -1/\alpha T_d$ localizado distante do zero $s = -1/KT_d$.

Nesse caso, considerando $\alpha = 0.05$ e $T_d = 0.17$, é possível estabilizar o sistema dado equação (2.4) com $L = 0.8$, conforme se vê nas Figuras 4a e 4b.

Apesar de ter levado o sistema à estabilidade, a resposta dinâmica continua bastante oscilatória. Claro que é possível sintonizar o controlador PID com novos valores de K , T_i e T_d . No entanto, essa sintonia tem que ser realizada para cada valor diferente do atraso L . Deve-se observar ainda que a limitação mencionada anteriormente sobre a relação entre o atraso e a constante de tempo do sistema em malha fechada impõe um limite máximo para o atraso L , ou seja, não será possível o uso de um controlador PID caso o atraso seja dominante. A próxima subseção traz uma estrutura que lida especificamente com o atraso de transporte, posicionada paralelamente à planta que se deseja controlar, cuja saída do modelo é comparada com a saída real. Esse tipo de estrutura é comumente chamada de observador.

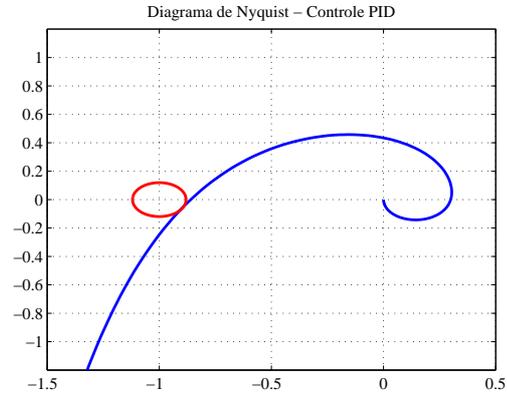
Figura 4 – Respostas para $\alpha = 0.05$, $T_d = 0.17$ e $L = 0.8$.

(a) Resposta temporal.



Fonte: Autor

(b) Resposta em frequência.



Fonte: Autor

2.1.2 Preditor de Smith - SP

O preditor de Smith (SMITH, 1957) baseia-se em uma ideia simples e eficiente para lidar com o problema do atraso de transporte. Nesse contexto, considera-se uma planta com atraso dada por

$$P(s) = P_0(s)e^{-Ls}. \quad (2.9)$$

Considera-se ainda um modelo $\hat{P}(s)$ do processo escrito a partir de um modelo dinâmico sem atraso \hat{P}_0 seguido de um bloco de atraso puro e^{-Ls} , ou seja

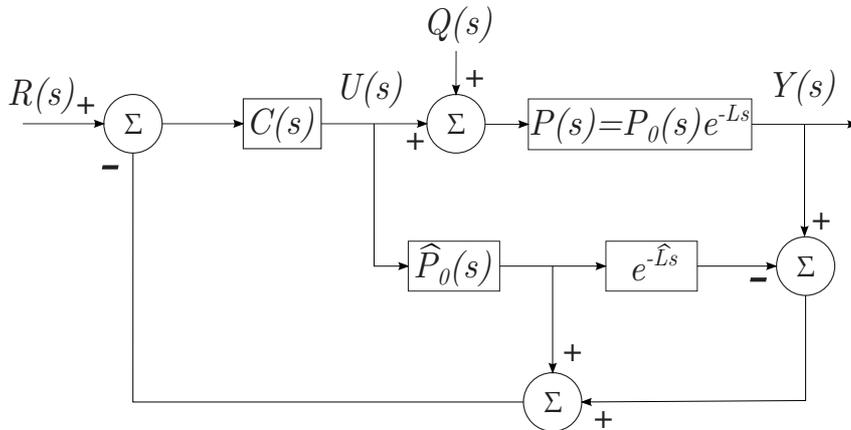
$$\hat{P}(s) = \hat{P}_0(s)e^{-Ls}. \quad (2.10)$$

Dessa forma o processo real e o modelo desse processo podem ser dispostos na forma de um diagrama esquemático como mostrado na Figura 5, que constitui o diagrama de blocos em malha fechada do preditor de Smith com um controlador primário $C(s)$, que pode ser um PI ou um PID, por exemplo. Nessa Figura, percebe-se que a saída $y_p(t)$ representa a saída antecipada em L unidades de tempo, também conhecida como saída predita. Dessa forma, a saída da planta $y(t)$ será zero se $t \in (t, t + L)$, já que não haverá resposta do processo à excitação $u(t)$ antes de L instantes de tempo. Assim, a saída $y_p(t)$ será igual à saída real $y(t)$ do processo antecipada em L unidades de tempo, se $\hat{P}_0(s) = P_0(s)$, ou seja, se não há erros de modelagem. Porém, caso $y(t)$ e $y_p(t)$ sejam diferentes, devido a uma perturbação em $u(t)$ ou $y(t)$, por exemplo, então essa diferença será percebida pelo controlador. Logo, o sistema de controle em malha fechada será dado por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_0(s)C(s)}{1 + P_0(s)C(s)}e^{-Ls}, \quad (2.11)$$

o que permite ver que o controlador $C(s)$ pode ser projetado para o sistema sem atraso de transporte.

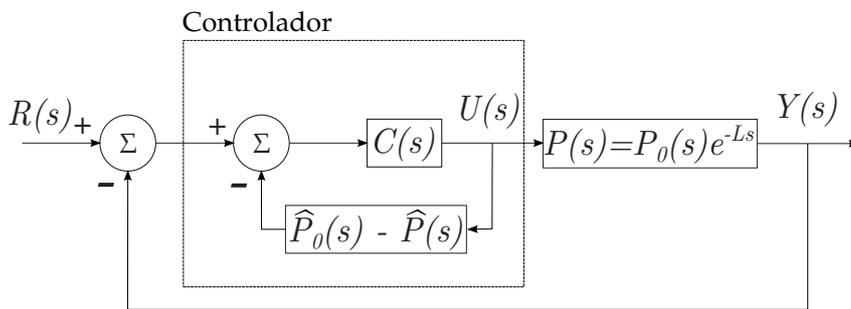
Figura 5 – Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada usando o preditor de Smith.



Fonte: Autor

De acordo com a Figura 5 o modelo da planta, dado por $\hat{P}_0 e^{-\hat{L}s}$, é incluído na malha de controle em uma estrutura posicionada paralelamente à planta que se deseja controlar, cujo modelo é dado por $P_0 e^{-Ls}$. Esse tipo de arranjo caracteriza o que se chama de modelo interno ou ainda um observador, porque compara-se a saída do modelo com a saída real a fim de se observar variações que porventura ocorrem no sistema (devido a erros de modelagem ou perturbações, por exemplo).

A partir do diagrama de blocos mostrado na Figura 5, Åström e Häglund (2006, pág. 267) apresentam o diagrama de blocos equivalente que se vê na Figura 6, com duas malhas, uma interna e outra externa, que torna mais fácil a obtenção de uma expressão específica para o controlador equivalente. Observando-se a Figura 6 percebe-se que a



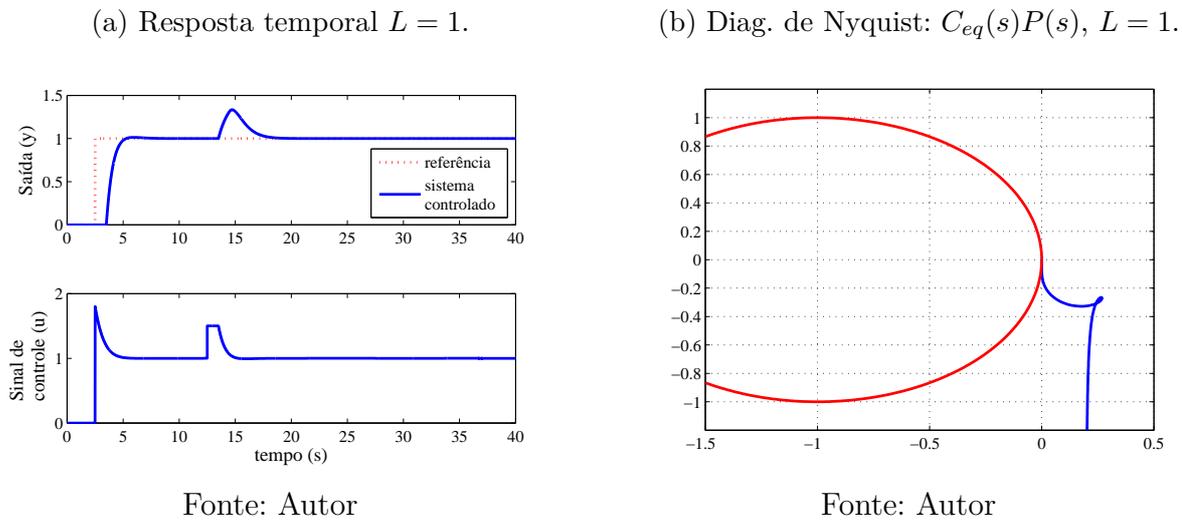
Fonte: (ÅSTRÖM; HÄGLUND, 2006, pág. 268)

função de transferência do controlador é dada por:

$$C_{eq}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)(\hat{P}_0(s) - \hat{P}(s))} = \frac{C(s)}{1 + C(s)\hat{P}_0(s)(1 - e^{-Ls})}. \quad (2.12)$$

Dessa forma, combinando a equação (2.12) do controlador equivalente com a equação (2.9) do processo, pode-se traçar os gráficos de Nyquist e, assim, analisar a robustez

Figura 7 – Resposta temporal e diagrama de Nyquist para o sistema em malha fechada, usando PI como controlador primário na estrutura do preditor de Smith.



do sistema controlado com o preditor de Smith.

Nesse contexto, considera-se novamente o problema da subseção anterior, onde se deseja controlar o sistema dado pela equação (2.4), usando o controlador PI dado pela equação (2.5) como controlador primário. Nesse caso foram considerados dois valores distintos para o atraso: $L = 1$, para o caso de um atraso simples e $L = 2, 5$ para simular o caso do atraso dominante. As Figuras 7a a 8b mostram as respostas temporais e os gráficos de Nyquist associados à planta em estudo. Percebe-se que com a inclusão do preditor de Smith passou a ser possível controlar o sistema mantendo a resposta dinâmica em malha fechada como se atraso não existisse (comparar com o caso $L = 0$ na Figura 3a), independentemente do atraso L . Além disso, deve-se atentar para o fato de que o círculo de robustez não foi alterado com a modificação de L , já que toda modificação no diagrama de Nyquist ocorre no semiplano direito.

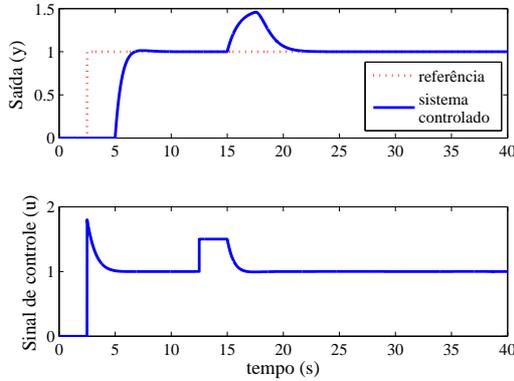
Apesar do desempenho evidenciado pelas respostas, deve-se atentar para o fato de que o preditor de Smith foi aplicado a uma planta estável em malha aberta. Porém, há desvantagens quando se tenta aplicá-lo a plantas integradoras e instáveis, ou ainda quando há erros de modelagem ($P(s) \neq \hat{P}(s)$). Nesse contexto algumas modificações na estrutura básica do preditor foram então propostas para contornar essas questões, como será abordado na próxima seção.

2.2 Algumas variações do preditor de Smith

Já é bastante conhecido que surgem problemas de estabilidade quando se tenta utilizar o preditor de Smith, em sua estrutura básica, para o controle de plantas com integradores (ÅSTRÖM; HANG; LIM, 1994), ou instáveis em malha aberta (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009). Dessa forma algumas modificações na estrutura do preditor

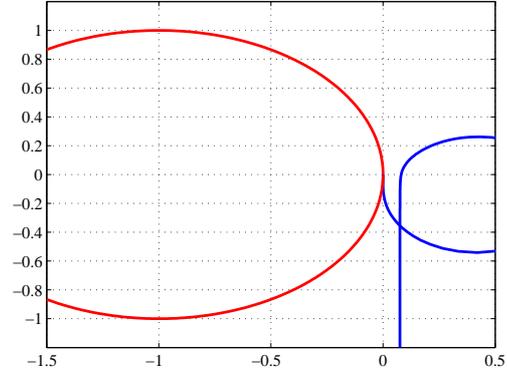
Figura 8 – Resposta temporal e diagrama de Nyquist para o sistema em malha fechada, usando PI como controlador primário na estrutura do preditor de Smith.

(a) Resposta temporal $L = 2, 5$.



Fonte: Autor

(b) Diag. de Nyquist: $C_{eq}(s)P(s)$, $L = 2, 5$.



Fonte: Autor

tem sido propostas ao longo das últimas décadas, a fim de superar essas desvantagens. As subseções apresentadas na sequência trazem algumas dessas modificações.

2.2.1 Preditor de Smith Modificado - MSP

Na estrutura convencional do preditor de Smith (ver Figura 5), considerando-se que não há incertezas paramétricas de modelo, então $P(s) = \hat{P}(s)$, a função de transferência $H_q(s)$ que relaciona a saída $y(t)$ com a perturbação $q(t)$ é dada por:

$$H_q(s) = P(s) \left(1 - \frac{P_0(s)C(s)}{1 + P_0(s)C(s)} e^{-Ls} \right) \quad (2.13)$$

onde $C(s)$ é um controlador primário. Supondo que a planta é do tipo integrador com adição de atraso de transporte IPDT (*Integrative Plus Dead-Time*), sendo dada por

$$P(s) = \frac{K_p}{s} e^{-Ls}, \quad (2.14)$$

então, a expressão de $H_q(s)$ é dada por

$$H_q(s) = \frac{K_p}{s} e^{-Ls} \left(\frac{s + K_p C(s) (1 - e^{-Ls})}{s + K_p C(s)} \right). \quad (2.15)$$

Considerando-se uma perturbação $q(t)$ do tipo degrau unitário, aplica-se então o Teorema do Valor Final à equação (2.15) a fim de se observar o comportamento dinâmico do sistema em regime permanente com relação à perturbação $q(t)$. Contudo, isso leva a uma indeterminação, sendo necessário que se aplique o Teorema de L'Hopital, de onde se obtém

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s) = \frac{1 + LK_p C(s)}{C(s)}.$$

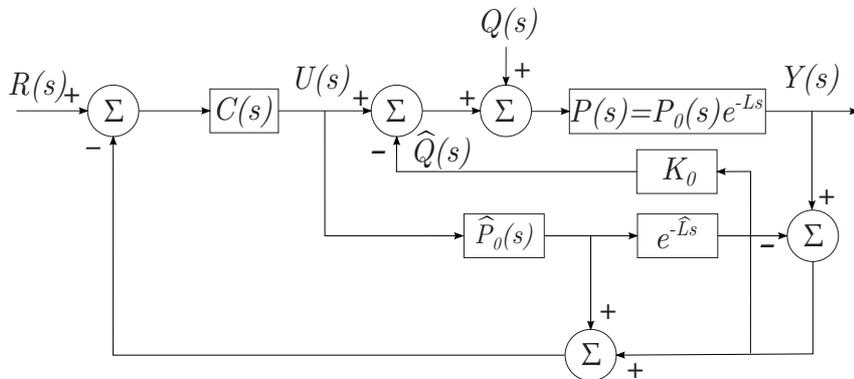
Supondo, por exemplo, um controlador $C(s)$ do tipo PI, dado pela equação (2.5), então

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s) = LK_p.$$

Resultado semelhante será obtido se o controlador $C(s)$ for do tipo PID. Portanto, haverá erro de regime permanente após a aplicação de uma perturbação do tipo degrau unitário.

Para contornar esse problema, Matausek e Micic (1996) sugeriram uma modificação no preditor de Smith, conhecida como preditor de Smith modificado MSP (*Modified Smith Predictor*), conforme mostrado na Figura 9 para lidar com plantas integradoras. Nessa estrutura modificada, $\hat{q}(t)$ é uma estimativa da perturbação em degrau $q(t)$, e as

Figura 9 – Preditor de Smith modificado.



Fonte: (MATAUSEK; MICIC, 1996) com modificações.

funções de transferência que relacionam a saída $y(t)$ com a referência $r(t)$ e com a perturbação $q(t)$ são dadas por (MATAUSEK; MICIC, 1996)

$$H_r(s) = \frac{K_p C(s)}{s + K_p C(s)} e^{-Ls}; \quad (2.16)$$

$$H_q(s) = \frac{K_p [s + K_p C(s)(1 - e^{-Ls})]}{(s + K_p C(s))(s + K_0 K_p e^{-Ls})} e^{-Ls}. \quad (2.17)$$

Deve-se observar que se $K_0 = 0$ na Figura 9, então se obtém o preditor de Smith tradicional. No caso de se fazer $K_0 = 0$, aplicando $\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s)$ e usando equação (2.17) se obtém o mesmo resultado obtido anteriormente, ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s) = \frac{1 + LK_p C(s)}{C(s)}.$$

Porém, se $K_0 \neq 0$, então o sistema em malha fechada será estável com

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s) = 0,$$

ou seja, não há erro de regime permanente.

Portanto, dependendo da escolha de K_0 , a estrutura mostrada na Figura 9 é capaz de lidar tanto com plantas estáveis quanto integradoras em malha aberta que exibem atraso de transporte. A sintonia adequada que leva à obtenção do parâmetro K_0 para plantas integradoras é discutida detalhadamente por Matausek e Micic (1996).

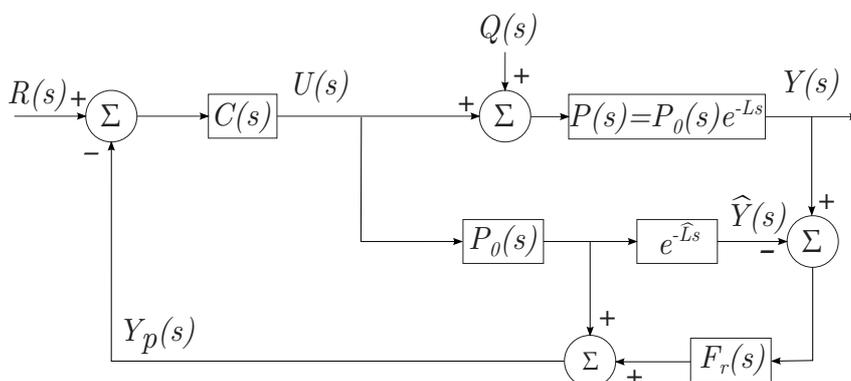
Devido ao fato de se realimentar uma estimativa $\hat{q}(t)$ da perturbação $q(t)$, a estrutura MSP apresenta melhores resultados relacionados a incertezas paramétricas de modelo do que a estrutura tradicional do preditor de Smith. Esse comportamento é mostrado através de exemplos por Matausek e Micic (1996).

Apesar de se tratar de uma modificação simples na estrutura básica do preditor e matematicamente consistente, o MSP mostrado na Figura 9 é capaz de lidar adequadamente com plantas integradoras, porém, a estrutura modificada não lida com polos no semiplano direito. Assim, esse arranjo não é adequado para plantas instáveis em malha aberta. Porém, uma modificação dessa estrutura, proposta por Matausek e Ribic (2012), torna a estrutura de controle primário do sistema composta por um PID e por um filtro. Neste caso, resultados experimentais em nível de simulação mostram que a modificação proposta é capaz de lidar com plantas estáveis, integradoras e instáveis.

2.2.2 Preditor de Smith Filtrado - FSP

O preditor de Smith filtrado constitui uma modificação na estrutura básica do preditor, onde se propôs a inclusão de um filtro na malha de realimentação (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007), conforme mostrado na Figura 10. A escolha adequada de polos e zeros desse filtro, chamado de filtro de robustez $F_r(s)$, torna possível lidar com sistemas estáveis, integradores ou instáveis em malha aberta. O projeto para cada um desses casos é discutido na sequência de forma sucinta para processos de primeira ordem. Entretanto, uma abordagem mais profunda é dada por Normey-Rico e Camacho (2009), onde se discute sobre questões relacionadas à implementação.

Figura 10 – Preditor de Smith filtrado - FSP.



Fonte: (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009).

2.2.2.1 FSP para plantas estáveis em malha aberta

Os resultados do preditor de Smith para plantas estáveis, discutidos na seção 2.1.2, levam em consideração que não há erros de modelagem, ou seja, $P(s) = \hat{P}(s)$. Porém, Normey-Rico e Camacho (2007, pág. 167) apresentam um exemplo de sistema de primeira ordem com incerteza paramétrica no atraso, onde percebe-se que o erro entre a saída real $y(t)$ e a saída estimada $\hat{y}(t)$ é realimentado na forma de um sinal periódico. Nesse caso, pode-se incluir um filtro passa-baixa para eliminar as oscilações indesejadas, incrementando a robustez de sistemas estáveis em malha aberta, conforme discutido por Normey-Rico, Bordons e Camacho (1997).

Como a análise do sistema em malha fechada gira em torno da robustez, neste caso torna-se importante obter as funções de transferência que relacionam a saída $y(t)$ com a referência $r(t)$ e com a perturbação $q(t)$. Dessa forma, a partir do diagrama de blocos mostrado na Figura 10, tem-se (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009):

$$H_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)\hat{P}_0(s)}; \quad (2.18)$$

$$H_q(s) = \frac{Y(s)}{Q(s)} = P(s) \left[1 - \frac{C(s)P(s)F_r(s)}{1 + C(s)\hat{P}_0(s)} \right]. \quad (2.19)$$

Considerando que $P(s)$ é a planta que se deseja controlar, dada por

$$P(s) = \frac{K_p}{T_s + 1} e^{-Ls} \quad (2.20)$$

e que $C(s)$ é um controlador PI dado pela equação (2.5), então definindo-se o comportamento desejado para o sistema controlado em malha fechada dado por

$$F(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P_0(s)} = \frac{1}{T_r s + 1} e^{-Ls}, \quad (2.21)$$

pode-se projetar $C(s)$ adequadamente para a planta sem atraso, uma vez que o atraso é compensado pela estrutura do preditor, seguindo os mesmos passos da subseção 2.1.2. Vale a pena observar que a inclusão do filtro $F_r(s)$ tem influência na expressão de $H_q(s)$, que pode ser percebido comparando-se as expressões das equações (2.19) e (2.13). Porém, não há qualquer influência direta na relação entre a saída $y(t)$ e a referência $r(t)$, que pode ser percebido observando-se que a expressão de $H_r(s)$ dada pela equação (2.18) e a mesma daquela obtida para o preditor de Smith convencional, dada pela equação (2.11).

A fim de se garantir a rejeição de perturbações, deseja-se que $\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s) = 0$. Nesse contexto, substituindo-se a equação (2.21) na equação (2.19), tem-se

$$H_q(s) = \frac{K_p}{T_s + 1} \left[1 - \frac{F_r(s)e^{-Ls}}{T_r s + 1} \right] e^{-Ls}.$$

Neste caso, uma das possibilidades consiste em definir

$$F_r(s) = \frac{(T_r s + 1)(1 + as)}{(T_0 s + 1)^2}.$$

Neste caso, o termo $T_r s + 1$ é cancelado na expressão de $H_q(s)$ e T_0 é o parâmetro de ajuste do filtro, normalmente modificado para acelerar a rejeição a perturbações do sistema controlado. O zero a do filtro é, então, um parâmetro que se deseja encontrar. Nesse contexto, a expressão de $H_q(s)$ passa a ser dada por

$$H_q(s) = K_p \left[\frac{(T_0 s + 1)^2 - (1 + as)e^{-Ls}}{(T s + 1)(T_0 s + 1)^2} \right] e^{-Ls}.$$

Se o polinômio do numerador dessa expressão tem raiz em $s = -1/T$, então o comportamento dinâmico da rejeição a perturbações será completamente determinado por T_0 , conforme desejado. Isso ocorre ao se fazer

$$\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{T}\right) e^{L/T} = 0$$

o que leva a se obter

$$a = T \left[1 - \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)^2 e^{-L/T} \right].$$

2.2.2.2 FSP para plantas integradoras em malha aberta

Para o caso de plantas com integrador, o procedimento é semelhante. Considerando novamente o modelo descrito pela equação (2.14), apresentado novamente para facilitar a leitura

$$P(s) = \frac{K_p}{s} e^{-Ls}.$$

Então, a expressão de $H_q(s)$ dada pela equação (2.19) será dada por

$$H_q(s) = \frac{K_p}{s} \left[\frac{T_r s + 1 - F_r e^{-Ls}}{T_r s + 1} \right] e^{-Ls},$$

onde T_r é a constante de tempo do sistema controlado em malha fechada. Neste caso, como a planta já possui um integrador, pode-se escolher um controlador dado simplesmente por um ganho K_c que estabiliza o sistema sem atraso, resultando em um comportamento desejado em malha fechada dado por

$$F(s) = \frac{1}{T_r s + 1} e^{-Ls}.$$

Assim, fazendo-se

$$F_r(s) = \frac{(T_r s + 1)(1 + as)}{(T_0 s + 1)^2},$$

onde T_0 é o parâmetro de ajuste do filtro, que determina a velocidade da resposta, então,

$$H_q(s) = K_p \frac{(T_0s + 1)^2 - (1 + as)e^{-Ls}}{s(T_0s + 1)^2} e^{-Ls}.$$

Neste caso, a expressão $\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s)$ resulta em uma indeterminação, sendo necessário que se aplique o Teorema de L'Hopital. Assim, para se garantir a rejeição a perturbações tem-se

$$\frac{d}{ds} \left[K_p \left((T_0s + 1)^2 - (1 + as)e^{-Ls} \right) \right] = 0,$$

o que leva à obtenção de

$$a = 2T_0 + L.$$

2.2.2.3 FSP para plantas instáveis em malha aberta

A sintonia do filtro $F_r(s)$ para plantas instáveis em malha aberta segue os mesmos passos descritos na subseção 2.2.2.1. Assim, sendo o modelo da planta dado por

$$P(s) = \frac{K_p}{Ts + 1} e^{-Ls},$$

definindo-se que o comportamento desejado em malha fechada é dado pela equação (2.21), então pode-se sintonizar um controlador $C(s)$, dado pela equação (2.5) como controlador primário para o sistema sem atraso, conforme mencionado nas seções anteriores. Assim, tem-se

$$H_q(s) = \frac{K_p}{Ts - 1} \left[1 - \frac{F_r(s)e^{-Ls}}{T_r s + 1} \right] e^{-Ls}.$$

Daí, define-se

$$F_r(s) = \frac{(T_r s + 1)(1 + as)}{(T_0 s + 1)^2},$$

o que leva a se obter

$$H_q(s) = \frac{K_p}{Ts - 1} \left[\frac{T_0 s + 1 - (1 + as)e^{-Ls}}{T_0 s + 1} \right] e^{-Ls}.$$

Assim como na análise do sistema estável em malha aberta, fazendo o numerador de $H_q(s)$ igual a zero em $s = 1/T$ (para cancelar o polo instável da planta), tem-se

$$\left(\frac{T_0}{T} + 1 \right) - \left(1 + \left(\frac{a}{T} \right) \right) e^{-L/T} = 0$$

o que leva a

$$a = T \left[\left(\frac{T_0}{T} + 1 \right) e^{L/T} - 1 \right].$$

2.3 Implementações em tempo discreto

Sistemas de controle em tempo contínuo, como aqueles apresentados nas seções precedentes, são implementados a partir de circuitos envolvendo resistores, capacitores, indutores e dispositivos semicondutores (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1997). Dessa forma poderia tornar-se impraticável o projeto ou ajuste de um circuito de controle para cada planta específica que se desejasse controlar.

Entretanto, a partir de meados dos anos 1980 com a popularização dos microprocessadores e microcontroladores, a implementação de técnicas avançadas de controle tornou-se mais versátil. Isso tornou possível substituir um circuito às vezes complexo de ser implementado, por uma equação descritiva do modelo, implementável através de linhas de código.

Nesse contexto, torna-se imprescindível o conhecimento da representação matemática de sistemas em tempo discreto e a relação que mantém com as representações em tempo contínuo. Assim, pode-se adequar a teoria de controle de tempo contínuo ao tempo discreto, tornando possível a implementação de algoritmos complexos.

Dessa forma, conversores analógico-digitais (A/D) e digital-analógicos (D/A) desempenham papel fundamental em sistemas digitais. Tratam-se de dispositivos que convertem valores de tensão ou corrente em uma sequência simples. A leitura desses valores lidos são realizadas a intervalos regulares de tempo onde uma amostra da variável de interesse é convertida em informação digital e armazenada em memória. Esses intervalos regulares de tempo definem o período de amostragem do sistema, normalmente caracterizado por T ou T_s .

A digitalização ou discretização, como é mais comumente abordada na literatura, implica na aproximação da diferenciação e integração em tempo discreto (considerando-se o caso ideal). Sendo assim, equações diferenciais que descrevem sistemas de controle em tempo contínuo são escritas na forma de equações a diferenças no tempo discreto. Por conseguinte, funções de transferência em tempo contínuo, obtidas a partir da aplicação da transformada de Laplace às equações diferenciais, tem seu dual em tempo discreto dado pela transformada \mathcal{Z} aplicada às equações a diferenças.

A relação entre o plano- s (derivado a partir da transformada de Laplace) e o plano- z (obtido a partir da transformada- \mathcal{Z}) é detalhada por Kuo (1992, pp. 75 a 77), apresentada de forma resumida na sequência. Portanto, considerando-se uma função temporal $f(t)$, pode-se escrever a função discretizada $f^*(t)$, em que $f^*(t) = f(kT_s)$, sendo $k = 0, 1, 2, \dots$, que, por conveniência de escrita, é comum omitir T_s . Então, aplicando-se a transformada de Laplace à função $f^*(t)$, chega-se à transformada- \mathcal{Z} (unilateral) da função

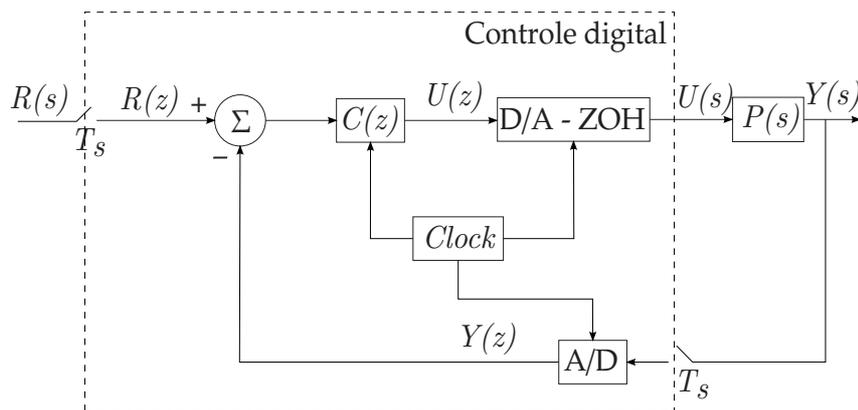
$f(t)$, amostrada em $t = kT_s$, sendo dada por:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k},$$

o que define a

Assim como no tempo contínuo, é útil que se represente um sistema em tempo discreto na forma de diagrama de blocos, sendo um arranjo possível aquele mostrado na Figura 11, em que a planta é representada em tempo contínuo. Nesse caso, torna-se imprescindível o uso de um conversor digital para analógico (D/A) que torne possível a conversão de um valor digital em um valor a ser aplicado ao sistema. Porém, esse valor precisa permanecer inalterado durante T_s instantes de tempo, o que é conseguido através de um circuito “segurador”. Circuitos desse tipo são baseados na ordem do modelo aplicado para a aproximação de duas amostras consecutivas em tempo discreto. Assim, pode-se aplicar o modelo de ordem zero, ZOH (*zero order holder*), de ordem um, FOH (*first order holder*), de ordem dois, SOH (*second order holder*) e assim sucessivamente. Desses, o mais comumente utilizado é o ZOH, devido à sua simplicidade de implementação, além de melhor desempenho da resposta em frequência quando comparada com os circuitos de ordem mais elevada. Uma explicação bem detalhada sobre o comportamento em frequência dos circuitos seguradores é dada por Kuo (1992, pp. 55 a 64).

Figura 11 – Diagrama de blocos geral de um sistema de controle hipotético para uma planta em tempo contínuo.

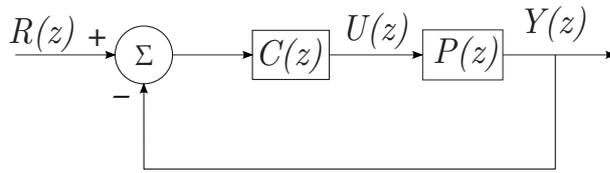


Fonte: Autor.

Entretanto, a forma descritiva mais comumente encontrada no projeto de sistema de controle discreto considera uma planta $P(z)$ escrita no domínio do tempo discreto. Nesse caso o diagrama de blocos toma uma forma mais simplificada, conforme mostrado na Figura 12.

A discretização de uma planta $P(s)$ para uma planta $P(z)$ deve levar em consideração o bloco ZOH, cuja função de transferência é dada por (FRANKLIN; POWELL;

Figura 12 – Diagrama de blocos simplificado de um sistema de controle hipotético para uma planta em tempo discreto.



Fonte:Autor.

WORKMAN, 1997, pág. 97)

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s},$$

o que leva à obtenção de

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\}.$$

Nesse contexto, a discretização de um sistema é obtida em função do período de amostragem T_s escolhido.

A escolha do período de amostragem T_s pode ser dada em função da robustez ou do desempenho do sistema, onde uma explicação detalhada é apresentada por Torrico (2008, pág. 26). Entretanto, uma regra de aspecto prático apresentada por Åström e Wittenmark (1997, pág. 66) considera a escolha de T_s em função do tempo de subida T_r desejado, sendo dada por

$$N_r = \frac{T_r}{T_s} \approx 4 \text{ a } 10, \quad (2.22)$$

sendo N_r é o número de períodos de amostragem T_s contidos em T_r . Entretanto, a escolha de T_s tem efeito mais sensível quando se considera a inclusão de perturbações no sistema imediatamente antes e após o bloco ZOH. Neste caso, pode-se recorrer a uma análise comparativa de resultados em nível de simulação afim de se selecionar T_s adequadamente. Nesse contexto, Åström e Wittenmark (1997, pág. 130) sugerem que uma regra de escolha pode ser dada por

$$\omega_{cl} T_s \approx 0,1 \text{ a } 0,6, \quad (2.23)$$

sendo ω_{cl} a frequência natural em malha fechada.

Associado ao período de amostragem está a frequência de amostragem ω_s que é a frequência com que as chaves da Figura 11 operam. Portanto, definindo-se a frequência ω_s obtém-se o período T_s e vice-versa. A frequência de amostragem é importante porque define a frequência de corte ω_{al} do filtro de anti-sobreposição espectral (*anti-alias*) que deve ser adicionado antes de se amostrar o sinal de saída, tal que $\omega_{al} < \omega_s$. Uma discussão

sobre o efeito da sobreposição de espectro é detalhada por Franklin, Powell e Workman (1997, pág. 162), onde se vê que a faixa de frequência ω de operação do sistema discreto deve obedecer à regra

$$\omega < \frac{\pi}{T_s}, \quad (2.24)$$

primeiramente reportada por H. Nyquist (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1997), razão pela qual é comum que se utilize o termo critério de Nyquist ou teorema da amostragem.

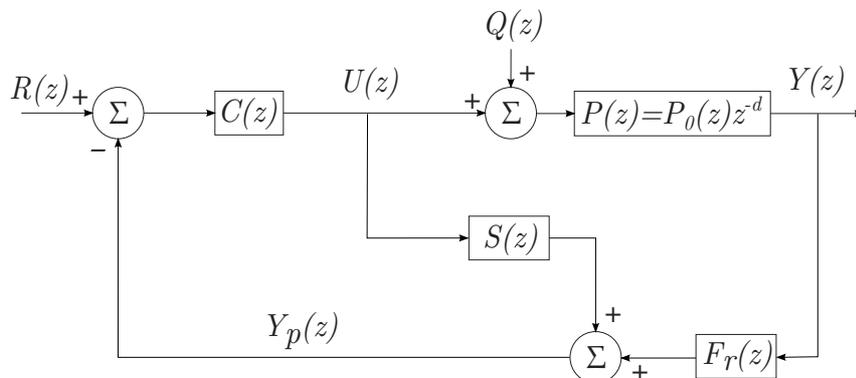
Uma vez que os fundamentos básicos de controle digital foram apresentados, pode-se proceder com a análise e projeto de sistemas de controle em tempo discreto, como será abordado ao longo do restante deste trabalho. Dessa forma, o algoritmo do preditor de Smith filtrado apresentado na subseção 2.2.2 e uma de suas variações recentes são apresentados na sequência das próximas subseções, no âmbito do controle discreto.

2.3.1 Algoritmo FSP em tempo discreto

O algoritmo FSP leva à obtenção de um controlador equivalente, em que a inclusão de um filtro na malha de realimentação, projetado de tal forma que zeros incluídos na expressão em malha fechada cancelem polos indesejados (lentos ou instáveis). Em tempo contínuo, porém, esse cancelamento não ocorre de forma exata já que o termo referente ao atraso e^{-Ls} não possui uma expressão racional.

Por outro lado, a estrutura de compensação de atraso unificada UDTC (*Unified Dead-Time Compensation*) mostrada na Figura 13, corresponde à forma como os algoritmos de controle com compensação de atraso são implementados em tempo discreto (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009).

Figura 13 – Representação do compensador de atraso na forma unificada (UDTC).



Fonte: (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009).

Nessa representação tem-se

$$S(z) = P_0(z) [1 - F_r(z)z^{-d}], \quad (2.25)$$

onde pode-se escrever

$$F_r(z) = \frac{N_r(z)}{D_r(z)}, \quad (2.26)$$

e a planta $P(z)$ como

$$P(z) = \frac{N_n(z)}{D_n(z)} z^{-d} = \frac{N_n(z)}{D_n^-(z)D_n^+(z)} z^{-d}, \quad (2.27)$$

em que $D_n^+(z)$ representa o polinômio que contém os polos indesejados por serem lentos ou instáveis.

Por outro lado, substituindo-se expressão de $F_r(z)z^{-d}$ dada pela equação (2.26) na expressão de $1 - F_r(z)z^{-d}$, tem-se

$$\begin{aligned} 1 - F_r(z)z^{-d} &= \frac{D_r(z) - z^{-d}N_r(z)}{D_r(z)}; \\ &= \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n)p(z)}{D_r(z)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $p(z)$ é um polinômio desconhecido e escolhido de modo que se possa escrever

$$D_n^+(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

como a expressão polinomial que possui os polos indesejados da planta, $z = z_1 \cdots z = z_n$. Então, substituindo-se a expressão (2.28) na equação (2.25) obtém-se uma expressão estável para $S(z)$ dada por

$$S(z) = \frac{N_n(z)}{D_n^-(z)} \frac{(z - z_0)p(z)}{D_r(z)}. \quad (2.29)$$

Dessa forma o cancelamento dos polos lentos ou instáveis ocorre antes que se implemente a expressão de $S(z)$, diferentemente do caso de tempo contínuo.

2.3.2 Variações do FSP em tempo discreto

A análise de sistemas de controle com atraso leva frequentemente em consideração a ocorrência de perturbações do tipo degrau e mais raramente do tipo rampa ou senoidais. Dessa forma, torna-se compreensível que seja dada mais atenção para o primeiro tipo, já que é aquele que ocorre mais comumente em aplicações de aspecto prático, sobretudo as industriais.

Entretanto, alguns processos podem produzir perturbações que são mais caracterizadas por suas variáveis estocásticas, devido à característica aleatória que apresentam, além do fato de que ruídos de medida são comuns devido à presença de sensores para medição de variáveis. Em ambos os casos tem-se a presença de perturbações em alta frequência.

Um dos problemas de lidar com altas frequências em sistemas de controle está no fato que as variações da saída podem se refletir no sinal de controle, o que pode levar a um aumento considerável nas variações de operação de atuadores, podendo reduzir a vida útil dessas unidades a longo prazo. O problema fica mais difícil de se contornar quando as plantas em questão são do tipo integradoras ou instáveis em malha aberta.

Nesse contexto, Santos, Botura e Normey-Rico (2010) propuseram uma variação no filtro de robustez $F_r(z)$ a fim de lidar com o problema das perturbações em alta frequência para plantas estáveis, integradoras ou instáveis. A ideia fundamental consiste em definir

$$F_r(z) = F_c(z)F_p(z), \quad (2.30)$$

onde $F_c(z)$ é uma componente de cancelamento que garante a estabilidade interna, definida por um filtro do tipo FIR dado por

$$F_c(z) = \frac{b_{cn}z^n + b_{cn-1}z^{n-1} + \dots + b_{c1}z + b_{c0}}{z^n}.$$

Por outro lado, a fim de se rejeitar perturbações do tipo degrau, a expressão dada pela equação (2.28) deve ser zero em cada raiz de $D^+(z)$, ou seja, em $z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_n$. Daí, tem-se

$$\begin{aligned} 1 - F_r(z)z^{-d}|_{z=z_j} &= 0; \\ F_r(z)z^{-d}|_{z=z_j} &= 1; \\ [F_c(z)z^{-d}F_p(z)]|_{z=z_j} &= 1; \\ \frac{1}{F_p(z_j)} &= b_{cn}z_j^{-d} + b_{cn-1}z_j^{-d-1} + \dots + b_{c1}z_j^{-d-n+1} + b_{c0}z_j^{-d-n}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

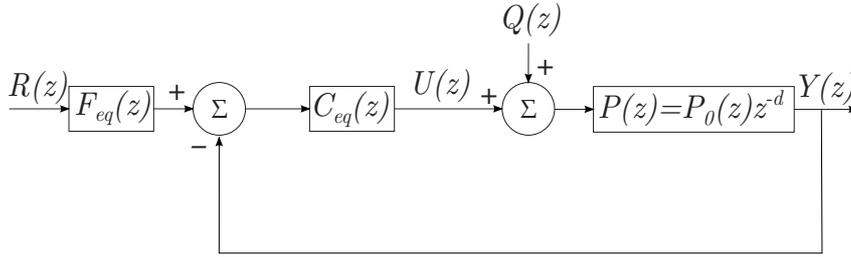
onde $j = 1, \dots, n$. Assim, a partir da equação (2.31) pode-se escolher $F_p(z)$ como um filtro passa baixa para garantir a robustez desejada. Porém, a parcela $F_c(z)$ pode levar ao acoplamento entre a dinâmica de resposta do sistema e a dinâmica de rejeição a perturbações. Nesse caso, convém definir

$$F_p(z) = F_{pp}(z)F_{pb}(z), \quad (2.32)$$

de modo que $F_{pp}(z)$ tem os polos posicionados de modo a cancelar o efeito dos zeros de $F_c(z)$, ficando a parcela $F_{pb}(z)$ livremente escolhida para rejeitar sinais de alta frequência.

Apesar de matematicamente elaborado e bastante intuitivo no aspecto prático, essa metodologia de projeto aumenta a complexidade do filtro de robustez $F_r(z)$. Nesse contexto, Torrico et al. (2013) propuseram uma metodologia bastante útil para sistemas de primeira ordem que simplifica a escolha do filtro de robustez, denominada SFSP (*Simplified Filtered Smith Predictor*).

Figura 14 – Estrutura simplificada aplicando um controlador equivalente com dois graus de liberdade.



Fonte: Autor.

Assim, a estrutura apresentada na Figura 13 pode ser reescrita de modo a se obter um controlador equivalente em série com a planta, em uma estrutura clássica e simplificada de realimentação em dois graus de liberdade, conforme apresentado na Figura 14.

No caso do algoritmo FSP em tempo discreto, a partir da estrutura UDTC apresentada na Figura 13, a expressão do controlador equivalente fica dada por:

$$C_{eq}(z) = \frac{F_r(z)C(z)}{1 + C(z)S(z)};$$

$$F_{eq}(z) = \frac{F(z)}{F_r(z)}.$$

Após algumas manipulações algébricas, o controlador equivalente pode ser escrito por:

$$C_{eq}(z) = \frac{F_r(z)}{P_0(z) \left[\frac{1+C(z)P_0(z)}{C(z)P_0(z)} - F_r(z)z^{-d} \right]}. \quad (2.33)$$

Considerando uma planta de primeira ordem dada por

$$P(z) = \frac{b_0}{z - a_1} z^{-d}, \quad (2.34)$$

e considerando ainda que se deseja uma resposta em malha fechada regida por uma função de transferência de primeira ordem do tipo

$$H_{yr} = \frac{(1 - z_c)}{z - z_c} z^{-d},$$

então, Torrico et al. (2013) propuseram que o controlador $C(z)$ e o filtro de robustez $F_r(z)$ sejam dados por

$$C(z) = k_c = \frac{a_1 - z_c}{b_0}; \quad (2.35)$$

$$F_r(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z}{(z - \alpha)^2}, \quad (2.36)$$

onde b_1 e b_2 são projetados para garantir a rejeição a perturbações do tipo degrau unitário e para o propósito de eliminação de polos indesejados de modo a garantir a estabilidade

interna do sistema, e α é um parâmetro de ajuste do filtro que regula a velocidade de rejeição à perturbação.

A partir de um raciocínio análogo àquele apresentado por Santos, Botura e Normey-Rico (2010), encontram-se os parâmetros do filtro para o caso não integrador ($a_1 \neq 1$)

$$b_1 = \frac{1}{1 - a_1} \left[(1 - \alpha)^2 - a_1^{d-1} (a_1 - \alpha)^2 \right],$$

$$b_2 = \frac{1}{a_1 - 1} \left[a_1 (1 - \alpha)^2 - a_1^{d-1} (a_1 - \alpha)^2 \right],$$

e para o caso integrador ($a_1 = 1$)

$$b_1 = (1 - \alpha)^2 \left[d - 1 + \frac{1}{k_c b_0} \right] + 2(1 - \alpha),$$

$$b_2 = (1 - \alpha)^2 \left[2 - d - \frac{1}{k_c b_0} \right] - 2(1 - \alpha).$$

Assim, o projeto do filtro é simplificado em relação à abordagem proposta por Santos, Botura e Normey-Rico (2010), embora nesta última seja possível direcionar o projeto de $F_r(z)$ para a rejeição de sinais em alta frequência. Entretanto, apesar de simplificar o projeto para sistemas de primeira ordem, o SFSP não foi proposto para plantas de ordem mais elevada.

2.4 O controle preditivo baseado em modelo (MPC)

Na definição de Rossiter (2002), o controle preditivo possui uma filosofia semelhante ao comportamento humano, no sentido de que selecionam-se ações de controle que levem aos melhores resultados esperados, em um horizonte de tempo finito.

Um dos primeiros trabalhos onde o termo “preditivo” parece ter sido aplicado é o da publicação de Richalet et al. (1978), quando propuseram o MPHC (*Model Predictive Heuristic Control*) com foco na simplicidade de sintonia como contraponto aos casos em que o ajuste do PID convencional pode tornar-se difícil (MACIEJOWSKI, 2001).

Utilizando programação linear e com foco na otimalidade, surgiu o trabalho de Cutler e Ramarker (1980), denominado DMC (*Dynamic Matrix Controller*) que veio a se tornar o controlador preditivo comercial mais conhecido (MACIEJOWSKI, 2001).

Ao final dos anos 1980 surge o GPC (*Generalized Predictive Control*) (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987) que, provavelmente é hoje a estratégia de controle preditivo linear mais discutida, e sobre a qual essa seção é direcionada.

2.4.1 O algoritmo GPC para sistemas sem atraso

A ideia básica do algoritmo GPC é apresentada na sequência de forma resumida à descrição de Camacho e Bordons (2004). Assim, considera-se um sistema descrito por um modelo discreto linear dado por:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})e(k), \quad (2.37)$$

que constitui um modelo CARMA (*Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average*), onde $y(k)$ é a saída da planta, $u(k)$ é a entrada e $e(k)$ representa uma perturbação do tipo ruído branco. Os polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$ descrevem a dinâmica de comportamento do sistema, sendo dados por:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}; \quad (2.38)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}; \quad (2.39)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{nc}z^{-nc}. \quad (2.40)$$

Entretanto, o modelo considerado por Clarke, Mohtadi e Tuffs (1987) inclui um integrador para as perturbações, onde foi argumentado ser mais adequado a aplicações industriais, devido à característica não-estacionária desses sinais. Assim, considera-se o modelo CARIMA (*Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average*) dado por

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\frac{e(k)}{\Delta}, \quad (2.41)$$

sendo $\Delta = 1 - z^{-1}$. Dessa forma o polinômio $C(z^{-1})$ descreve a dinâmica de perturbações sendo normalmente definido como o modelo de perturbações.

A ideia básica do GPC consiste na aplicação de um sinal de controle que minimiza a função custo

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(k+j|k) - w(k+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(k) [\Delta u(k+j-1)]^2, \quad (2.42)$$

em que $\hat{y}(k+j|k)$ representa uma predição da saída do sistema j passos à frente, quando se conhece a saída no instante de tempo atual k . As variáveis N_1 , N_2 e N_u representam os horizontes sobre os quais função J é minimizada. Para o caso de sistemas sem atraso de transporte é conveniente que se defina $N_1 = 1$, $N_2 = N_u = N$. Assim, a predição da saída é feita a partir da iteração imediatamente posterior à atual, k , além de tornar mais didático o desenvolvimento apresentado na sequência. A variável $\lambda(k)$ é o peso atribuído à sequência de controle que, apesar de considerada variável em função do tempo k , é normalmente tomada como valor constante sobre todo o horizonte. Por fim, o sinal $w(k+j)$ representa a referência desejada j passos à frente do instante k atual, ou seja, a referência futura.

Dessa forma, a minimização da equação (2.42) leva à obtenção de uma sequência futura de ações de controle $u(k)$, $u(k+1)$, ..., porém somente a primeira dessas variáveis,

ou seja $u(k)$, é aplicada à planta. Assim, a cada iteração é necessário a atualização dos horizontes a fim de que se efetue o cálculo de otimização para se obter a respectiva lei de controle. Por essa razão, essa técnica é também conhecida como estratégia de controle por horizonte deslizante.

Para que as predições de saída do sistema possam ser calculadas, se faz necessário a obtenção de uma expressão da saída $y(k)$, que pode ser obtida a partir da equação (2.41), sendo dada por:

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \Delta u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\tilde{A}(z^{-1})} e(k), \quad (2.43)$$

sendo $\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$ de ordem $n_a = n + 1$. Na equação (2.43) o termo $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ é a função de transferência discreta da planta e, portanto, conhecido. Comumente considera-se $C(z^{-1}) = 1$ para o caso mais simples, onde a perturbação tem aspecto de ruído de medida. Assim, o termo $\frac{C(z^{-1})}{\tilde{A}(z^{-1})}$ é resultado de uma divisão polinomial, com $C(z^{-1}) = 1$, calculado através da equação de Diophantine:

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}), \quad (2.44)$$

em que $E_j(z^{-1})$ e $z^{-j}F_j(z^{-1})$ são o quociente e o resto da divisão polinomial, respectivamente.

Multiplicando-se a equação (2.41) por $\Delta E_j(z^{-1})z^j$, e usando a equação (2.44), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(k+j) &= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + E_j(z^{-1})e(k); \\ (1 - z^{-j}F_j(z^{-1}))y(k+j) &= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + E_j(z^{-1})e(k); \\ y(k+j) &= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + F_j(z^{-1})y(k) + E_j(z^{-1})e(k). \end{aligned}$$

Porém, como a ordem de $E_j(z^{-1}) = j - 1$, então todos os termos de $e(k)$ estão no futuro, cuja melhor estimativa é o valor médio, ou seja, zero. Dessa forma, as predições de saída ficam dadas por:

$$y(k+j|k) = G_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + F_j(z^{-1})y(k), \quad (2.45)$$

sendo $G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})$. Entretanto, convém observar que

$$G_1 = e_0b_0 + (e_0b_1)z^{-1} + \dots + (e_0b_m)z^{-m} \quad (2.46)$$

$$G_2 = e_0b_0 + (e_0b_1 + e_1b_0)z^{-1} + \dots + (e_0b_m + e_1b_{m-1})z^{-m} + e_1b_mz^{-m-1} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} G_3 &= e_0b_0 + (e_0b_1 + e_1b_0)z^{-1} + (e_0b_2 + e_1b_1 + e_2b_0)z^{-2} + \dots \\ &\quad + (e_0b_m + e_1b_{m-1} + e_2b_{m-2})z^{-m-2} + (e_1b_m + e_2b_{m-1})z^{-m-1} + (e_2b_m)z^{-m-2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\vdots = \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Aplicando-se a expressão obtida para G_1 à equação (2.45), percebe-se que os termos $(e_0b_1)z^{-1} + \dots + (e_0b_m)z^{-m}$ estão todos no passado e somente o termo e_0b_0 está no futuro (ainda não se tem calculado o valor de $\Delta u(k)$). Aplicando o mesmo raciocínio à expressão de G_2 e G_3 , o mesmo comportamento é observado. Além disso, considerando $p_j(z^{-1})$ como sendo um polinômio composto pelos termos localizados no passado associado a cada G_j , percebe-se que a ordem de p_j é a mesma para qualquer valor de j . Assim, é possível separar as variáveis e matrizes associadas ao passado (antes do instante de tempo k) e ao futuro (no instante de tempo k e após), obtendo-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{F}(z^{-1})y(k) + \mathbf{G}'(z^{-1})\Delta u(k-1), \quad (2.49)$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_2-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} (G_1(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_2(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1})z^2 \\ \vdots \\ (G_N(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1} - \cdots - g_{N-1}z^{-N+1})z^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_1(z^{-1}) \\ F_2(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_N(z^{-1}) \end{bmatrix},$$

sendo $g_0 = e_0b_0$, $g_1 = e_0b_1 + e_1b_0$ e assim sucessivamente, obtidos de cada expressão G_j conforme as equações (2.46) a (2.48).

É comum que na equação (2.49) a parte da resposta $y(k)$ que depende dos termos de valores passados da saída ($y(k-1), y(k-2), \dots$) e das variações do sinal de controle ($\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \dots$) recebam a denominação de *resposta livre*, enquanto os termos futuros sejam chamados de *resposta forçada*. Dessa forma, pode-se escrever

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.50)$$

sendo $\mathbf{f} = \mathbf{F}(z^{-1})y(k) + \mathbf{G}'(z^{-1})\Delta u(k-1)$. Isso facilita a escrita da função custo J e, conseqüentemente, o cálculo da derivada associada à minimização. Assim, a equação (2.42) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$J = (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u}, \quad (2.51)$$

sendo $\mathbf{w} = [w(k+1) \ w(k+2) \ \cdots \ w(k+N)]^T$. A minimização da equação (2.51) é obtida calculando-se $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} = 0$, para funções convexas como é o caso da equação (2.51), levando a

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{w} - \mathbf{f}).$$

Porém, como somente o primeiro valor do vetor \mathbf{u} obtido é necessário, ou seja, apenas $\Delta u(k)$, então pode-se escrever

$$\Delta u(k) = \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{f}),$$

sendo \mathbf{K} a primeira linha da matriz $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$.

2.4.2 O algoritmo GPC para sistemas com atraso

Um modelo CARIMA que descreve um processo com atraso de transporte d , é dado por:

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\frac{e(k)}{\Delta}. \quad (2.52)$$

Esse tipo de sistema apresenta desenvolvimento idêntico àquele apresentado na seção 2.4.1 para sistemas sem atraso, porém com a adequação dos horizontes $N_1 = d + 1$, $N_2 = N_u = N$, conforme apresentado por Camacho e Bordons (2004, pág. 50).

A expansão do modelo dado pela equação (2.52), é dada por

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+d+j|k) &= \overbrace{(1-a_1)}^{\tilde{a}_1} \hat{y}(k+d+j-1|k) + \overbrace{(a_1-a_2)}^{\tilde{a}_2} \hat{y}(k+d+j-2|k) + \dots \\ &+ \tilde{a}_n \hat{y}(k+d+j-n-1|k) + b_0 \Delta u(k+j-1) + \dots + b_m \Delta u(k+j-m-1), \end{aligned} \quad (2.53)$$

que aplicado recursivamente leva a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d+1|k) \\ \hat{y}(k+d+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+d+N|k) \end{bmatrix} &= \mathbf{G} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} + \mathbf{H} \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-m) \end{bmatrix} + \\ &\mathbf{S} \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d|k) \\ \hat{y}(k+d-1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+d-n|k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

sendo as matrizes \mathbf{G} , \mathbf{H} e \mathbf{S} dadas por (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, Apêndice A):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N & g_{N-1} & \dots & g_1 \end{bmatrix}, \quad g_j = \sum_{i=0}^{j-1} b_i - \sum_{i=1}^j a_i g_{j-i}, \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad (2.55)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{Nm} \end{bmatrix},$$

$$h_{ij} = \begin{cases} b_j, \text{ se } i = 1, \text{ com } j = 1, 2, \dots, m \\ -\sum_{k=1}^{i-1} \tilde{a}_k h_{(i-k)j} + h_1(i+j-1), \text{ } i = 2, \dots, N \text{ } j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.56)$$

em que \tilde{a}_i são os coeficientes do polinômio $\tilde{A}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})A(z^{-1})$.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n-1} \\ s_{21} & \cdots & s_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{N1} & \cdots & s_{Nn-1} \end{bmatrix}, \quad s_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} s_{ik} s_{(i-k)j}, \quad i = 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (2.57)$$

A equação (2.54) pode ser resumidamente escrita por

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\mathbf{y}_1, \quad (2.58)$$

sendo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d|k) \\ \hat{y}(k+d-1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+d-n|k) \end{bmatrix}.$$

Assim, a função custo J é dada por

$$J = (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\mathbf{y}_1 - \mathbf{w})^T (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\mathbf{y}_1 - \mathbf{w}) + \mathbf{Q}_\lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u}. \quad (2.59)$$

Minimizando essa expressão em relação a \mathbf{u} , tem-se

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{P}_0 \mathbf{y}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{w}, \quad (2.60)$$

em que $\mathbf{M} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathbf{Q}_\lambda$, $\mathbf{P}_0 = -\mathbf{G}^T \mathbf{S}$, $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{G}^T \mathbf{H}$ e $\mathbf{P}_2 = \mathbf{G}^T \mathbf{Q}_\lambda$. Assim como no desenvolvimento apresentado na seção 2.4.1, apenas o primeiro valor do vetor \mathbf{u} , ou seja $\Delta u(k)$, é necessário, portanto,

$$\Delta u(k) = \mathbf{m} \mathbf{P}_0 \mathbf{y}_1 + \mathbf{m} \mathbf{P}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{m} \mathbf{P}_2 \mathbf{w}, \quad (2.61)$$

sendo \mathbf{m} a primeira linha da matriz \mathbf{M}^{-1} .

A partir da equação (2.61), pode-se compor o diagrama esquemático mostrado na Figura 15 em que as previsões $\hat{y}(k+d|k), \dots, \hat{y}(k+d-n|k)$ são obtidas pela otimização da função custo dada pela equação (2.59), razão pela qual comumente se menciona que as previsões são obtidas a partir de um preditor ótimo.

pág. 286) mostram que

$$C(z^{-1}) = \frac{ly_1 + ly_2z^{-1} + \dots + ly_{n+1}z^{-n}}{(1 - z^{-1})(1 - lu_1z^{-1} - lu_2z^{-2} - \dots - lu_mz^{-m})}; \quad (2.63)$$

$$F(z^{-1}) = -\frac{f_1z^{d+1} + f_2z^{d+2} + \dots + f_Nz^{d+N}}{ly_1 + ly_2z^{-1} + \dots + ly_{n+1}z^{-n}}; \quad (2.64)$$

$$F_r(z^{-1}) = \frac{ly_1F_d(z^{-1}) + ly_2F_{d-1}(z^{-1}) + \dots + ly_{n+1}F_{d-n}(z^{-1})}{ly_1 + ly_2z^{-1} + \dots + ly_{n+1}z^{-n}}. \quad (2.65)$$

O diagrama de blocos mostrado na Figura 16 constitui a versão em tempo discreto de uma estrutura de controle com compensação de atraso e dois grau de liberdade (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, pág, 287), em que o controlador $C(z)$ o filtro de realimentação $F_r(z)$ e o filtro de referência são obtidos a partir do processo de otimização da função custo J dada pela equação (2.59). Entretanto, calculando-se $C(z)$ e $F(z)$ para a planta sem atraso $P_0(z)$ e fazendo $F_r(z) = 1$, tem-se a estrutura do preditor de Smith.

Nesse contexto, as características de robustez do controlador podem ser alteradas modificando-se o projeto do filtro de robustez $F_r(z)$, e calculando-se o controlador primário conforme apresentado pelas equações (2.63) e (2.64). Nesse caso, abre-se mão da otimalidade da solução em prol do incremento na robustez. Assim, os critérios de projeto do filtro $F_r(z)$ apresentados na seção 2.3.1 podem ser utilizados nesse caso. Uma discussão mais detalhada sobre esse assunto é apresentada por Normey-Rico e Camacho (2007, pp. 324 a 332), onde a estrutura de controle resultante é chamada DTC-GPC (*Dead-Time Compensator Generalised Predictive Controller*).

2.4.3 Polinômio-T

O polinômio $C(z^{-1})$ no modelo CARIMA das equações (2.41) e (2.52) define o modelo de perturbações, conforme mencionado anteriormente. Entretanto, o processo de identificação não é fácil, uma vez que a dinâmica associada pode apresentar características variantes no tempo, além da dificuldade do modelo CARIMA em lidar com perturbações determinísticas (CAMACHO; BORDONS, 2004).

Nesse contexto, é comum que se substitua o polinômio $C(z^{-1})$ por um polinômio definido como parâmetro de projeto, chamado polinômio-T. Substituindo-se $C(z^{-1})$ por $T(z^{-1})$ nas equações (2.41) e (2.52), o modelo CARIMA passa a ser escrito por

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + T(z^{-1})\frac{e(k)}{\Delta}. \quad (2.66)$$

para a qual, Camacho e Bordons (2004, pp. 58 a 60) mostram que o polinômio-T não aparece na função de transferência que relaciona a saída $y(k)$ com a referência $r(k)$, mas está presente na função de transferência que relaciona a saída $y(k)$ com a perturbação $e(k)$. Sendo assim, o polinômio-T é utilizado para incrementar a robustez quanto à rejeição

de perturbações não tendo efeito algum sobre o seguimento de referência, quando não há dinâmicas não-modeladas (CAMACHO; BORDONS, 2004).

A abordagem apresentada na sequência leva em consideração a reescrita do modelo de predições dado pela equação (2.45), de modo a facilitar a análise da inclusão do polinômio-T no algoritmo do GPC. Assim, a partir da equação (2.44) tem-se

$$E_j(z^{-1}) = \frac{1 - z^{-j}F_j(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})}.$$

Substituindo-se essa expressão na equação (2.45), obtém-se

$$y(k + j|k) = F_j(z^{-1})y(k) + \left[1 - z^{-j}F_j(z^{-1})\right] \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k + j - 1),$$

que aplicada à planta com atraso dada pela equação (2.52), tem-se

$$y(k + j|k) = F_j(z^{-1})y(k) + \left[1 - z^{-j}F_j(z^{-1})\right] \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k - d + j - 1), \quad (2.67)$$

Matematicamente, a inclusão do polinômio-T associa ao modelo CARIMA dado pela equação (2.66) a equação de Diophantine dada por

$$T(z^{-1}) = E_j(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}), \quad (2.68)$$

a partir da qual tem-se a relação

$$E_j(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1}) - z^{-j}F_j(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})}. \quad (2.69)$$

Seguindo o mesmo raciocínio apresentado na seção 2.4.1, ou seja, multiplicando-se a equação (2.66) por $\Delta E_j(z^{-1})z^j$ e usando-se a equação (2.68), obtém-se o modelo de predições

$$y(k + j|k) = \frac{F_j}{T(z^{-1})}(z^{-1})y(k) + \frac{E_j(z^{-1}B(z^{-1}))}{T(z^{-1})}\Delta u(k + j - 1).$$

Substituindo-se a equação (2.69) nessa expressão, tem-se

$$y(k + j|k) = \frac{F_j}{T(z^{-1})}(z^{-1})y(k) + \left[1 - \frac{z^{-j}F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})}\right] \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k + j - 1).$$

Para o caso de sistemas com atraso, o modelo de predições será dado por

$$y(k + j|k) = \frac{F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})}y(k) + \left[1 - \frac{z^{-j}F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})}\right] \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k - d + j - 1). \quad (2.70)$$

Comparando-se as equações (2.67) e (2.70) percebe-se que se trata da mesma expressão, mas com o uso do filtro

$$F'_j(z^{-1}) = \frac{F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})} \quad (2.71)$$

na equação (2.70).

Nesse contexto, controlador primário $C(z)$ e o filtro de referência $F(z)$ dependem de λ , do horizonte N e do polinômio $T(z^{-1})$, mas em especial, o filtro de realimentação será dado por (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, pág. 318)

$$\begin{aligned} F_r(z^{-1}) &= \frac{ly_1 F'_d(z^{-1}) + ly_2 F'_{d-1}(z^{-1}) + \dots + ly_{n+1} F'_{d-n}(z^{-1})}{ly_1 + ly_2 z^{-1} + \dots + ly_{n+1} z^{-n}}; \\ &= \frac{1}{T(z^{-1})} \frac{ly_1 F_d(z^{-1}) + ly_2 F_{d-1}(z^{-1}) + \dots + ly_{n+1} F_{d-n}(z^{-1})}{ly_1 + ly_2 z^{-1} + \dots + ly_{n+1} z^{-n}}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

A Figura 15 mostra que a estrutura equivalente do GPC quando se aplica o preditor ótimo é a mesma estrutura do preditor de Smith filtrado, mostrada na Figura 10, adaptada ao tempo discreto. Portanto, as equações (2.18) e (2.19) podem ser escritas no domínio- z

$$H_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)\hat{P}_0(z)}; \quad (2.73)$$

$$H_q(z) = \frac{Y(z)}{Q(z)} = P(z) \left[1 - \frac{C(z)P(z)F_r(z)}{1 + C(z)\hat{P}_0(z)} \right], \quad (2.74)$$

sendo $z = e^{j\omega T_s}$.

Para se analisar a robustez de um sistema não se pode considerar que a planta real e a planta nominal são iguais, ou seja, $P(z) \neq P_0(z)z^{-d}$. Neste caso, se a incerteza paramétrica ocorre no atraso, então é restrita ao termo z^{-d} na descrição de $P(z)$ e, portanto, um termo multiplicativo da função de transferência nominal da planta. Uma forma de levar em consideração as incertezas multiplicativas pode ser aquela descrita por Doyle, Francis e Tannenbaum (1990), dada por

$$\tilde{P} = (1 + \Delta W_2) P, \quad (2.75)$$

em que \tilde{P} é o modelo da planta perturbada, W_2 é uma função de transferência estável e Δ é uma função de transferência variável que atua como peso, e que satisfaz a $\|\Delta\|_\infty < 1$, ou seja, o máximo valor do módulo de Δ é menor que um. Assim, a partir da equação (2.75) pode-se escrever

$$\frac{\tilde{P}}{P} - 1 = \Delta W_2,$$

definindo-se então $|\overline{\delta P}| = \left| \frac{\tilde{P}}{P} - 1 \right|$, tem-se

$$|\overline{\delta P}| = \left| \frac{\tilde{P}}{P} - 1 \right| \leq |W_2|. \quad (2.76)$$

Dessa forma, ao se considerar a incerteza apenas no atraso, a planta que se deseja controlar é dada por

$$\tilde{P}(z) = P_0(z)z^{-(d+x)} = P(z)z^{-x},$$

e, portanto, a equação (2.76) pode ser escrita por

$$|\overline{\delta P}(j\omega)| = |e^{-j\omega T_s x} - 1|. \quad (2.77)$$

Por outro lado, quando se consideram as incertezas, a expressão do ponto 1 na Figura 15 é

$$C(j\omega)P_0(j\omega)e^{-j\omega T_s(d+x)},$$

o que leva o ponto 2 à expressão:

$$C(j\omega)P_0(j\omega) + F_r(j\omega)C(j\omega)P_0(j\omega)e^{-j\omega T_s(d+x)}.$$

Neste caso, a equação característica do sistema em malha fechada é dada por

$$1 + C(j\omega)P_0(j\omega) + F_r(j\omega)C(j\omega)P_0(j\omega)e^{-j\omega T_s(d+x)} = 0. \quad (2.78)$$

O termo exponencial na equação (2.78) depende do termo x que representa a incerteza no atraso. Assim, pode-se definir $I_r(j\omega) = e^{-j\omega T_s(d+x)}$ como um índice de medida de robustez da incerteza multiplicativa no atraso. De fato, pode-se escrever $e^{-j\omega T_s(d+x)} = \Delta W_2$ na equação (2.76), quando se considera P sendo o modelo da planta sem atraso. Assim, em termos de valores absolutos da equação (2.78), pode-se escrever

$$I_r(j\omega) = \frac{|1 + C(j\omega)P_0(j\omega)|}{|F_r(j\omega)C(j\omega)P_0(j\omega)|}.$$

Então, de acordo com a equação (2.76), tem-se

$$|\overline{\delta P}(j\omega)| \leq I_r(j\omega) = \frac{|1 + C(j\omega)P_0(j\omega)|}{|F_r(j\omega)C(j\omega)P_0(j\omega)|}, \quad (2.79)$$

que mostra que o sistema de controle será robusto se a curva de $I_r(j\omega)$ apresenta valores maiores que a curva de $|\overline{\delta P}(j\omega)|$ para todo ω . A interpretação gráfica da equação (2.79) tem importância destacada porque indica o grau de robustez de um sistema controlado e será largamente utilizada ao longo deste trabalho.

Analisando-se da equação (2.79), percebe-se ainda que a robustez do sistema pode ser incrementada se $\frac{1}{T(z^{-1})}$ é um filtro passa baixa (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, pág. 318). Porém, a escolha adequada não constitui tarefa simples, tendo sido apresentadas algumas diretrizes anteriormente. Rossiter (2002, pág. 26), por exemplo, menciona que a escolha

$$T(z^{-1}) = (1 - \alpha z^{-1})^n,$$

em que n é a ordem do polinômio $A(z^{-1})$ e $\alpha = 0,8$, pode ser considerada adequada. O posicionamento de α pode variar para valores maiores que 0,8 para aumentar a robustez, porém isso leva a uma resposta mais lenta na rejeição a perturbações. Todavia é necessário cautela já que se $\alpha \rightarrow 1$ aproxima-se da inclusão de um integrador na equação (2.72) o que pode levar à diminuição da robustez do sistema, de acordo com a equação (2.19).

Camacho e Bordons (2004, pág. 61) mencionam que a escolha do polo α do polinômio não é tarefa trivial e, apesar de existirem alguns trabalhos nesse sentido, como por exemplo os trabalhos de Robinson e Clarke (1991), Yoon e Clarke (1994) e Yoon e Clarke (1995), não parece haver consenso sobre uma metodologia sistemática de seleção. Entretanto, devido à facilidade de projeto, é comum que se proceda com a seleção do polinômio baseada no posicionamento de polos reais.

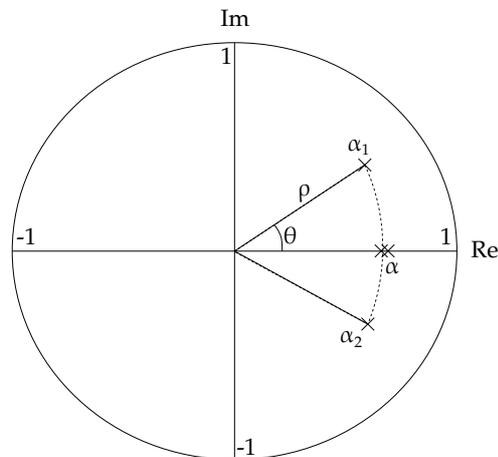
Nesse trabalho porém, considera-se

$$T(z^{-1}) = (1 - \alpha z^{-1})^{n_a}. \quad (2.80)$$

Dessa forma, o polinômio-T passa a ter ordem igual ao polinômio $\tilde{A}(z^{-1})$, com ordem mínima igual a dois, o que ocorre quando o sistema a ser controlado é de primeira ordem. Assim, considerando $\alpha \in \mathbb{R}$, então os polos são reais e iguais. Entretanto, não há qualquer restrição para que $\alpha \in \mathbb{C}$, o que leva a polos complexos conjugados.

Todavia, isso pode aumentar a complexidade do projeto, já que os polos devem ser posicionados em um plano e não em uma reta. Contudo, escrevendo-se o polo em coordenadas polares, ou seja, $\alpha = \rho e^{\pm j\theta}$, o procedimento pode ser facilitado, já que nesse caso, apenas o ângulo é modificado. A Figura 17 mostra o posicionamento hipotético de polos no interior do círculo de raio unitário, mantendo-se o módulo constante, ou seja, $\rho = \alpha$. Dessa forma, $\Re\{\alpha_{1,2}\} < \rho$, o que acelera a rejeição a perturbações devido ao

Figura 17 – Robustez (caso estável).



Fonte: Autor.

posicionamento dos polos mais internamente ao círculo de raio unitário. Entretanto, isso leva à diminuição da robustez do sistema.

Nesse contexto, buscando-se encontrar um valor adequado para θ , os exemplos apresentados na sequência consideram um método gráfico, no qual se deseja que o sistema seja robusto para uma determinada incerteza no atraso e, em função disso, escolhe-se o ângulo θ . Assim, o índice de robustez $I_r(j\omega)$ é calculado para valores de $\theta \geq 0$ e comparado com o limite $\overline{\delta_P}$. Assim, todas as simulações levam em consideração que o sistema é robusto para incertezas de 30% no atraso.

Exemplo 2.1. Neste caso analisa-se o comportamento de posicionamento de polos do polinômio-T para uma planta estável em malha aberta, cujo modelo de primeira ordem representa um sistema de tanque de aquecimento (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, pág. 287), sendo dado por

$$P(s) = \frac{1}{2s + 1} e^{-4s}.$$

A discretização desse modelo, fazendo-se $T_s = 0.2$, leva a

$$P(z) = \frac{0.095z^{-1}}{1 - 0.905z^{-1}} z^{-20}.$$

O algoritmo GPC foi sintonizado com os mesmos parâmetros definidos por Normey-Rico e Camacho (2007), ou seja, $N_u = N_y = 15$ e $\lambda = 1$.

O polinômio-T foi inicialmente ajustado com polo $\alpha = 0.85$, levando a

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}.$$

Em seguida os polos tem sua parte imaginária incrementada, com θ variando em passos de 0,1, até que o limiar de robustez é alcançado, conforme mostrado na Figura 18a. Neste caso o tem-se $\theta = 7, 2^\circ$. As respostas temporais são mostradas na Figura 18b, onde percebe-se que a resposta com a modificação no polinômio-T acelera levemente a resposta, mantendo a robustez.

Exemplo 2.2. Neste caso analisa-se o comportamento de posicionamento de polos do polinômio-T para uma planta integradora em malha aberta, cujo modelo é dado por (TORRICO et al., 2013)

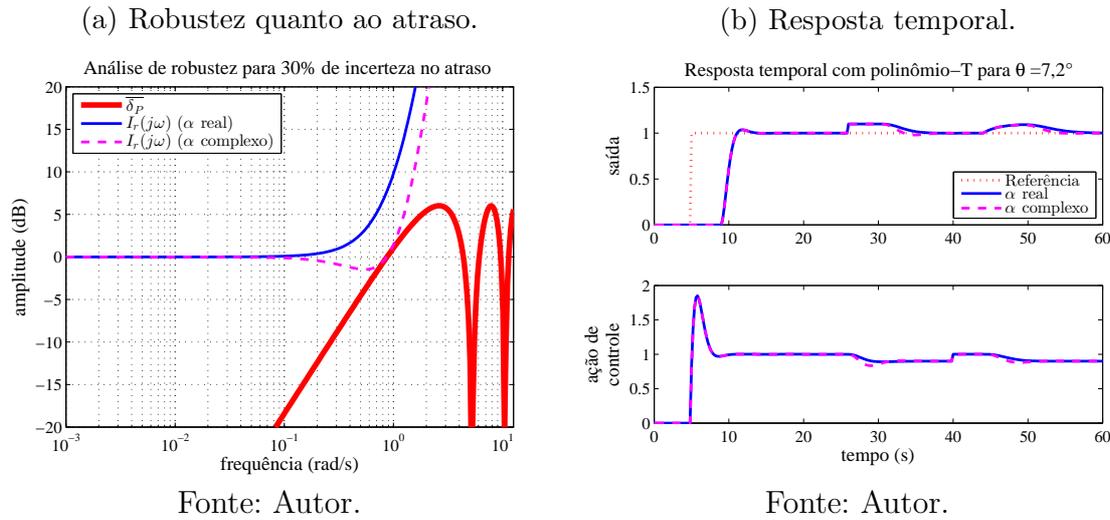
$$P(s) = \frac{0.1}{s} e^{-9.6s}.$$

A discretização desse modelo, fazendo-se $T_s = 0.1$, leva a

$$P(z) = \frac{0.1z^{-1}}{1 - 1z^{-1}} z^{-96}.$$

Trata-se, portanto, de uma planta integradora com atraso longo e dominante. O algoritmo GPC foi sintonizado considerando-se $N_u = 1$, $N_y = 48$ e $\lambda = 1$.

Figura 18 – Análise do sistema estável do exemplo 2.1.

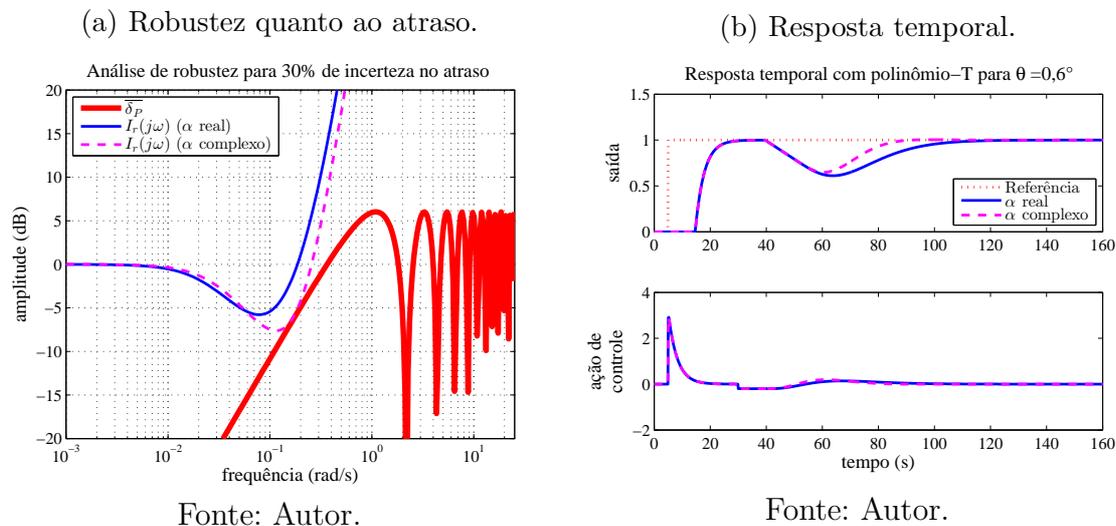


O polinômio-T foi inicialmente ajustado com polo $\alpha = 0.985$, para que a rejeição à perturbação seja semelhante àquele presente nos gráficos de resposta temporal apresentados por Torrico et al. (2013). Assim, tem-se

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.97z^{-1} + 0.97z^{-2}.$$

Em seguida os polos tem sua parte imaginária incrementada, com θ variando em passos de 0,1, até que o limiar de robustez para 30% de incerteza no atraso seja atingido, conforme mostrado na Figura 19a. Neste caso tem-se $\theta = 0,6^\circ$ apenas. Apesar de pequena, neste caso a rejeição a perturbações na resposta temporal foi significativamente acelerado, conforme se vê na Figura 19b.

Figura 19 – Análise do sistema integrador do exemplo 2.2.



Exemplo 2.3. Neste exemplo analisa-se o comportamento de posicionamento de polos do polinômio-T para uma planta instável em malha aberta, cujo modelo é dado por

(NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009)

$$P(s) = \frac{3.433}{103.1s - 1} e^{-20s}.$$

A discretização desse modelo, fazendo-se $T_s = 0.5$, leva a

$$P(z) = \frac{0.0167z^{-1}}{1 - 1.0049z^{-1}} z^{-40}.$$

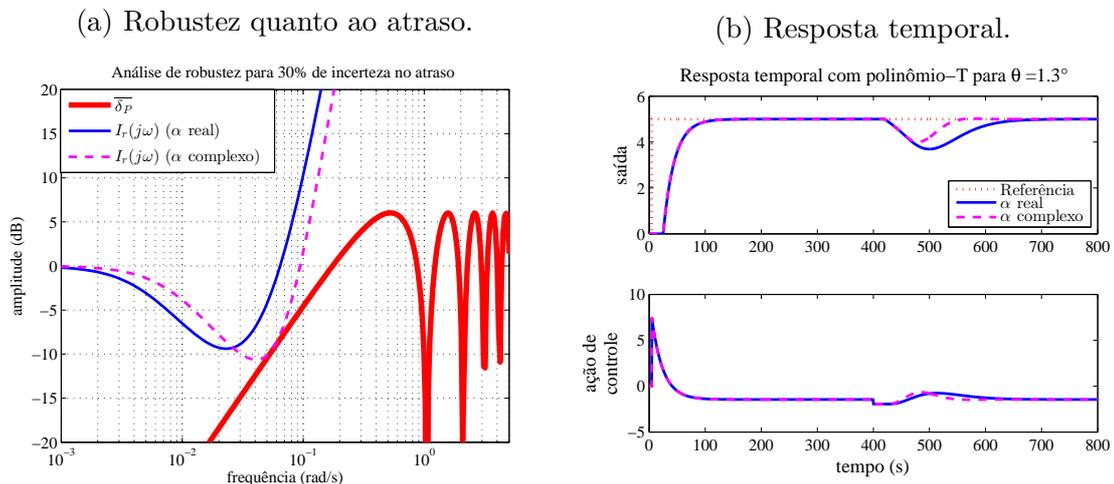
Trata-se, portanto, de uma planta instável e com atraso longo. O algoritmo GPC foi sintonizado considerando-se $N_u = 1$, $N_y = 54$ e $\lambda = 0$.

O polinômio-T foi inicialmente ajustado com polo $\alpha = 0.977$, para que a rejeição à perturbação seja semelhante àquele presente nos gráficos de resposta temporal apresentados por Normey-Rico e Camacho (2009). Assim, tem-se

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.95z^{-1} + 0.95z^{-2}.$$

Em seguida os polos tem sua parte imaginária incrementada, com θ variando em passos de 0,1, até que o limiar de robustez para 30% de incerteza no atraso seja atingido, conforme mostrado na Figura 20a. Neste caso tem-se $\theta = 1,3^\circ$ apenas. Assim como no caso da planta integradora, apesar de pequena, a rejeição a perturbações na resposta temporal também foi significativamente acelerado, conforme se vê na Figura 20b.

Figura 20 – Análise do sistema instável do exemplo 2.3



Os três exemplos analisados anteriormente constituem uma observação de caráter prático onde se verifica que a utilização de polos complexos conjugados no polinômio-T de fato aceleram a rejeição à perturbações na resposta temporal. A comparação gráfica de robustez pode ser utilizada para definir o limiar desejado, e assim o polo α do polinômio-T.

3 O CONTROLE DE SISTEMAS COM MÚLTIPLOS ATRASOS

As estratégias de controle para sistemas com atraso apresentadas no capítulo 2 são adequadas para lidar com plantas que possuem um único atraso. Isso ocorre porque há apenas um caminho na planta em que se processa o sinal de controle para produzir a saída. Entretanto, alguns sistemas podem apresentar mais de um caminho entre a entrada e a saída da planta, e, cada caminho pode exibir atrasos diferentes em seus respectivos modelos. Nesse contexto, este capítulo apresenta uma nova estratégia de controle proposta por Torrico, Correia e Nogueira (2016) com regras simplificadas de sintonia no controle primário.

Plantas desse tipo podem ocorrer quando o material que entra na planta segue por diferentes processos, cada um com seus atrasos intrínsecos, e ao final encontram-se em um ponto comum a fim de produzir a saída (NORMEY-RICO; FLESCHE; SANTOS, 2014). Outro exemplo, mais utilizado, diz respeito ao controle de congestionamento de pacotes em redes de comunicações, como estudado por Zhang, Xie e Duan (2007) e por Melo, Normey-Rico e Farines (2009), Melo, Farines e Normey-Rico (2012), os dois últimos no contexto de redes TCP.

Recentemente o problema de múltiplos atrasos foi abordado por Albertos e Garcia (2012), em que a planta é inicialmente estabilizada através de um preditor/observador e de um controlador de dois graus de liberdade. Apesar de eficiente e com resultados de simulação consistentes, essa estratégia ainda é mais complexa que o FSP para múltiplos atrasos, apresentado por Normey-Rico, Flesch e Santos (2014), descrito brevemente na próxima seção.

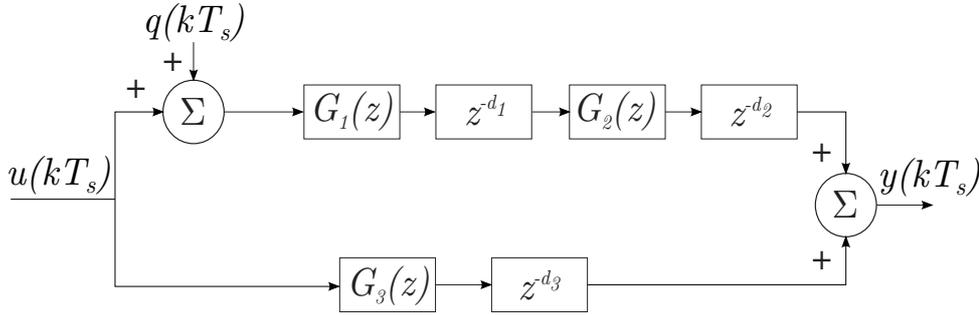
3.1 O algoritmo FSP para múltiplos atrasos

A fim de buscar uma solução de projeto simples para plantas com múltiplos atrasos, Normey-Rico, Flesch e Santos (2014) apresentaram uma variação do FSP para plantas com múltiplos atrasos - MDFSP (*multiple delay FSP*). Nessa abordagem obtém-se um modelo equivalente da planta, obtido a partir da combinação linear dos múltiplos caminhos. Nesse contexto, o algoritmo FSP pode ser aplicado ao modelo equivalente obtido. Esta seção traz uma revisão breve dessa estratégia de controle.

O desenvolvimento que se apresenta na sequência leva em consideração um modelo de dois caminhos e três modelos, de acordo com o diagrama de blocos mostrado na Figura 21.

Neste caso, primeiramente deve-se obter o modelo equivalente de cada caminho.

Figura 21 – Exemplo hipotético de um processo com múltiplos atrasos, com dois caminhos e três modelos.



De fato, trata-se simplesmente da combinação linear dos três modelos, seguindo a lógica que se vê na Figura, ou seja,

$$P_{u_1}(z) = G_1(z)G_2(z)z^{-(d_1+d_2)} = G_{u_1}z^{-(d_1+d_2)}; \quad (3.1)$$

$$P_{u_2}(z) = G_3(z)z^{-d_3} = G_{u_2}z^{-d_3}. \quad (3.2)$$

Em seguida, os modelos resultantes de cada caminho são combinados para produzir a saída do sistema. Dessa forma, para esse caso hipotético em particular, o modelo equivalente global é obtido quando se combinam $P_{u_1}(z)$ e $P_{u_2}(z)$. Entretanto, ao se considerarem N caminhos, então o modelo global é dado por:

$$P(z) = \sum_{i=1}^N P_{u_i}(z). \quad (3.3)$$

No caso em que não se consideram incertezas paramétricas de modelo, então o modelo nominal da planta equivalente $P_n(z)$ e o modelo da planta são iguais: $P(z) = P_n(z)$. Porém, a fim de aplicar-se o algoritmo FSP, faz-se necessário a obtenção de um modelo rápido (modelo nominal sem atraso), o qual é dado por (NORMEY-RICO; FLESCHE; SANTOS, 2014):

$$G_n(z) = \sum_{i=1}^N G_{u_i}(z). \quad (3.4)$$

Assim, o bloco $S(z)$ do preditor pode ser escrito:

$$S(z) = G_n(z) - P_n(z)F_r(z), \quad (3.5)$$

em que

$$G_n(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{N}_{u_i}(z)}{D_{u_i}(z)} = \frac{1}{D_g} \sum_{i=1}^N N_{u_i}(z) = \frac{N_g(z)}{D_g(z)}; \quad (3.6)$$

$$P_n(z) = \frac{1}{D_g} \sum_{i=1}^N N_{u_i}(z)z^{-d_i} = \frac{N_p(z)}{D_g(z)}, \quad (3.7)$$

sendo $D_g(z)$ o mínimo múltiplo comum de $D_{u_i}(z)$.

A função de transferência em malha fechada pode ser obtida observando-se a Figura 13, quando considera-se que a planta é $P(z) = P_n(z)$ descrito na equação (3.7) ao invés do termo $P(z) = P_0(z)z^{-d}$. Dessa forma, pode-se escrever

$$H_{yr}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{y(kT_s)}{r(kT_s)} \right\} = \frac{F(z)C(z)P_n(z)}{1 + C(z)G_n(z)}, \quad (3.8)$$

sendo $\mathcal{Z} \{ \cdot \}$ a transformada-Z do termo entre as chaves. Portanto, a equação (3.8) deixa claro que o controlador $C(z)$ pode ser projetado para o modelo da planta sem atraso.

A estratégia de controle baseada no FSP consiste em escolher $F_r(z)$ tal que $F_r(1) = 1$ e de tal modo que os polos indesejados de $P_n(z)$ não apareçam na expressão de $S(z)$. Neste caso, essa consideração leva à condição

$$1 - F_r(z_l) \frac{N_p(z_l)}{N_g(z_l)} = 0, \quad (3.9)$$

em que z_l é qualquer polo indesejado de $P_n(z)$.

O algoritmo MDFSP pode, então, seguir os mesmos passos do procedimento de projeto do FSP, em que inicialmente projeta-se o controlador primário $C(z)$ para o modelo sem atraso $G_n(z)$. Em seguida o filtro de robustez $F_r(z)$ é projetado que, para simplificar essa etapa, pode apresentar polos múltiplos reais designados por β :

$$F_r(z) = \frac{N_f(z)}{(z - \beta)^{n_f}}, \quad (3.10)$$

sendo $n_f = n_u + 1$, em que n_u é o número de raízes indesejadas de $P_n(z)$. Assim, para que se obtenha $F_r(1) = 1$, então $N_f(1) = (1 - \beta)^{n_f}$. Além disso, N_f deve ser escolhido de modo a satisfazer a equação (3.9). Com isso tem-se as diretrizes de projeto do FSP para plantas com múltiplos atrasos (MDFSP) (NORMEY-RICO; FLESCHE; SANTOS, 2014).

Apesar de tornar o projeto do controlador mais simples e de explorar aspectos de robustez e rejeição a ruídos, essa abordagem requer um novo projeto se novas especificações são desejadas. No caso do algoritmo SFSP apresentado na subseção 2.3.2 pode-se tornar a resposta ao seguimento de referência mais lenta ou mais rápida simplesmente alterando-se um valor de ganho, sem que seja necessário o projeto de um novo controlador. Entretanto, uma implementação de caráter prático limita a aplicação dessa estratégia em sistemas de primeira ordem. Na próxima subseção o conceito de simplificação de projeto do controle primário é estendido ao caso de plantas com múltiplos atrasos.

3.2 Sistema de controle proposto

É comum que se considere o comportamento desejado em malha fechada como objetivo a se alcançar no projeto de sistemas de controle. Entre as características desejadas em malha fechada destacam-se a ausência de sobressinal e o tempo de acomodação

ou de subida, normalmente considerados para o seguimento de referência. Comumente recorre-se à inclusão de um filtro de referência $F(z)$ a fim de se garantir a ausência de sobressinal ficando as demais especificações a cargo do projeto do controlador $C(z)$, em que abordagens clássicas de projeto como alocação de polos ou regras de sintonia PID, por exemplo, são frequentemente aplicadas.

Entretanto, qualquer que seja o método de projeto de controle escolhido, isso representa regras adicionais de sintonia na estrutura de compensação de atraso para o caso FSP, já que o projeto adequado do filtro de robustez $F_r(z)$ tem suas próprias regras de sintonia. Baseado na filosofia de simplificação do projeto de controle primário do SFSP, nesta seção apresenta-se uma proposta de controle como contribuição às estruturas DTC que pode ser aplicada a modelos de ordem maiores que um e, portanto, adequada a sistemas com múltiplos atrasos (TORRICO; CORREIA; NOGUEIRA, 2016).

Nesse contexto, considera-se a estrutura mostrada na Figura 22, em que k_r é um ganho, $F_1(z)$ e $F_2(z)$ são filtros FIR, $F_r(z)$ é o filtro de robustez e o bloco de saturação representa um modelo de saturação que pode ocorrer como efeito *windup* em alguns processos.

Dessa forma, considerando-se o caso nominal em que $P(z) = P_n(z)$, tem-se as funções de transferência que relacionam a saída $y(k)$ com a entrada de referência $r(k)$, a entradas de perturbações $q(k)$ e o ruído $n(k)$ dadas, respectivamente, por:

$$H_{yr}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{y(kT_s)}{r(kT_s)} \right\} = \frac{k_r P_n(z)}{1 + F_1(z) + F_2(z)G_n(z)}; \quad (3.11)$$

$$H_{yq}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{y(kT_s)}{q(kT_s)} \right\} = P_n(z) \left[1 - \frac{P_n(z)F_r(z)}{1 + F_1(z) + F_2(z)G_n(z)} \right]; \quad (3.12)$$

$$H_{yn}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{y(kT_s)}{n(kT_s)} \right\} = 1 - \frac{P_n(z)F_r(z)}{1 + F_1(z) + F_2(z)G_n(z)}. \quad (3.13)$$

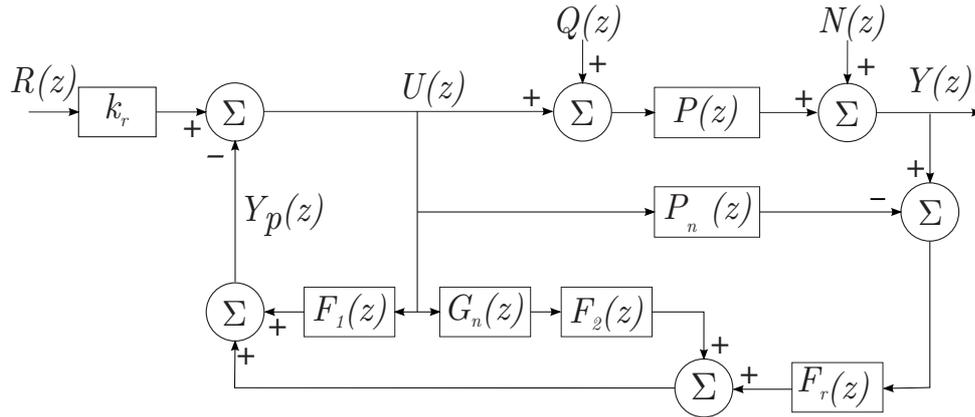
É importante ressaltar que, de acordo com o diagrama de blocos mostrado na Figura 22, os filtros $F_1(z)$ e $F_2(z)$ tem papel importante no controle primário e ambos localizam-se no caminho de realimentação. Assim, as equações (3.11), (3.12) e (3.13) são obtidas para uma região linear de operação em que a saturação do sinal de controle (se houver) não é levada em consideração. Além disso, o método proposto apresenta algumas vantagens conforme listadas na sequência:

- A estratégia de controle não inclui zeros adicionais na função de transferência em malha fechada, os quais poderiam ser dominantes e causar um sobressinal indesejado;
- Uma vez que não há necessidade de se eliminarem zeros indesejados em malha fechada, o bloco de referência reduz-se a um ganho de referência k_r , cujo valor é

calculado pela equação (3.11) do sistema em regime permanente.

- O controle proposto não exibe integrador explicitamente, portanto, no caso de saturação do sinal de controle, não há efeito cumulativo da saturação sobre o controlador, o que representa uma característica natural anti-*windup*.

Figura 22 – Estrutura DTC simplificada para sistemas com múltiplos atrasos.



3.2.1 Regras de sintonia do controle primário

O controle primário da estratégia proposta é dado pelos termos de k_r , $F_1(z)$ e $F_2(z)$, os quais podem ser ajustados de modo a se garantir o seguimento de referência de acordo as especificações desejadas. Assim, o ganho de referência k_r é calculado ao se garantir erro nulo de regime permanente quando se considera $z \rightarrow 1$ na equação (3.11). Portanto,

$$k_r = \frac{1 + F_1(1) + F_2(1)G_n(1)}{P_n(1)}. \quad (3.14)$$

Os termos $F_1(z)$ e $F_2(z)$ podem ser definidos pelos filtros FIR:

$$F_1(z) = f_{1_1}z^{-1} + f_{1_2}z^{-2} + \dots + f_{1_{n-1}}z^{-n+1}; \quad (3.15)$$

$$F_2(z) = f_{2_0} + f_{2_1}z^{-1} + f_{2_2}z^{-2} + \dots + f_{2_{n-1}}z^{-n+1}, \quad (3.16)$$

sendo n a ordem mais elevada dos modelos rápidos.

Na sequência, apresenta-se o procedimento de sintonia de $F_1(z)$ e $F_2(z)$ para um sistema de segunda ordem com atraso de transporte - SOPDT (*Second Order Plus Dead-Time*), embora sistemas de ordem mais elevada ou mesmo integradores seguem procedimento similar. Assim, considera-se o modelo:

$$P(z^{-1}) = \frac{b_0z^{-1} + b_1z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}z^{-d}.$$

Sendo $n = 2$ neste caso, então

$$F_1(z^{-1}) = f_{1_1} z^{-1} \quad \text{and} \quad F_2(z^{-1}) = f_{2_0} + f_{2_1} z^{-1},$$

o que leva à função de transferência em malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{k_r N_p(z^{-1})}{D_g(z^{-1}) (1 + f_{1_1} z^{-1}) + (f_{2_0} + f_{2_1} z^{-1}) N_g(z^{-1})}. \quad (3.17)$$

Aqui, deve-se observar que o polinômio característico em malha fechada é de terceira ordem, já que o numerador $N_g(z^{-1})$ de $G_n(z)$ é de segunda ordem. Assim, para esse sistema, a função de transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{k_r N_p(z^{-1})}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}}, \quad (3.18)$$

em que p_1 , p_2 e p_3 são escolhidos de modo a satisfazer as especificações de seguimento de referência desejadas. Comparando-se os termos equivalentes nas equações (3.17) e (3.18) obtém-se

$$1 + (a_1 + f_{1_1} + f_{2_0} b_0) z^{-1} + (a_2 + f_{1_1} a_1 + f_{2_0} b_1 + f_{2_1} b_0) z^{-2} + (f_{1_1} a_2 + f_{2_1} b_1) z^{-3} = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}, \quad (3.19)$$

que pode ser reordenado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1_1} \\ f_{2_0} \\ f_{2_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 \end{bmatrix},$$

e, portanto, os parâmetros dos filtros FIR são dados por:

$$\begin{bmatrix} f_{1_1} \\ f_{2_0} \\ f_{2_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Quando se considera um sistema de primeira com atraso de transporte (FOPDT), então tem-se $n = 1$, logo, os filtros FIR ficam dados por:

$$F_1(z^{-1}) = 0 \quad \text{and} \quad F_2(z^{-1}) = f_{2_0} = k_c.$$

Deve-se observar que k_c torna-se o único parâmetro de sintonia e que pode ser escolhido de modo a tornar a resposta ao seguimento de referência mais rápida (pelo incremento de k_c) ou mais lenta (pelo decremento de k_c). Uma vez que a estrutura de controle proposta tem o objetivo de simplificar o projeto do controle primário, assim como Torrico et al. (2013) propuseram para o SFSP, decidiu-se chamá-la SDTC (*Simplified Dead-Time Compensator*).

3.2.2 Sintonia do filtro de robustez $F_r(z)$

O filtro de robustez é incluído tanto para acelerar a rejeição a perturbações quanto para eliminar polos instáveis ou lentos do modelo $P_n(z)$, a fim de garantir a estabilidade do preditor.

Primeiramente, o filtro de robustez $F_r(z)$ deve assegurar o seguimento de referência em regime permanente, o que equivale a fazer a equação (3.12) igual a zero para $z \rightarrow 1$. Portanto,

$$F_r(1) = \frac{1 + F_1(1) + F_2(1)G_n(1)}{P_n(1)}. \quad (3.21)$$

Aqui deve-se observar que as equações (3.21) e (3.14) são iguais, e, portanto, pode-se também escrever

$$F_r(1) = k_r. \quad (3.22)$$

Apesar de bastante útil, a equação (3.21) não é suficiente para que $F_r(z)$ seja completamente determinado, uma vez que estabelece a condição de regime permanente apenas. Por outro lado, considera-se $\mathcal{U} = z_1, z_2, \dots, z_p$ como o conjunto que contém os p polos indesejados de $S(z) = G_n(z)F_2(z) - P_n(z)F_r(z)$, que devem ser cancelados de modo a garantir a estabilidade do preditor e acelerar a rejeição a perturbações. Logo, deve-se estabelecer a seguinte condição:

$$F_r(z_i) = \frac{N_g(z_i)}{N_p(z_i)}F_2(z_i), \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.23)$$

Neste caso é usual que se considere o filtro de robustez dado por (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009; TORRICO et al., 2013; NORMEY-RICO; FLESCHE; SANTOS, 2014):

$$F_r(z) = \frac{N_F(z)}{(1 - \beta z^{-1})^q},$$

sendo $N_F(z) = n_{f_0} + n_{f_1}z^{-1} + \dots + n_{f_p}z^{-p}$, β o parâmetro de sintonia do filtro e $q = p + 1$. A partir das equações (3.22) e (3.23) pode-se obter um sistema linear com $p + 1$ equações algébricas, tal que $n_{f_0}, n_{f_1}, \dots, n_{f_p}$ podem ser facilmente encontrados. Assim, completa-se a descrição de sintonia da estratégia SDTC proposta.

3.2.3 Análise de robustez

De acordo com a equação (3.7) o modelo da planta é dado pela combinação linear dos múltiplos $P_i(z)$. No caso de perturbações aditivas, considerando-se o multipercorso com múltiplos atrasos, tem-se o modelo global da planta dado por (NORMEY-RICO; FLESCHE; SANTOS, 2014):

$$P(z) = \sum_{i=1}^N P_i(z) + \sum_{i=1}^N \Delta P_i(z) = P_n(z) + \Delta P(z).$$

Deve-se atentar, no entanto, que no caso da análise gráfica de robustez, as curvas são obtidas para uma faixa contínua de valores, em que é necessário levar em conta a relação $z = e^{j\omega T_s}$.

Por outro lado, as incertezas podem ser dadas por:

$$P(z) = P_n(z) [1 + \delta P(z)], \quad z = e^{j\omega T_s}, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_s},$$

em que T_s é o período de amostragem e $\Delta P(z) = P_n(z)\delta P(z)$. Assim, as perturbações podem ser dadas pelo modelo de incertezas multiplicativas a partir do modelo da planta. Isso permite que se encontre o valor da norma $\overline{\delta P}(e^{j\omega T_s})$ (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007) para $\delta P(e^{j\omega T_s})$, no âmbito da análise de robustez apresentada na equação (2.79).

A fim de se mostrar que a estrutura do SDTC proposto é robusto, então o índice de robustez $I_r(\omega)$ e a norma de robustez $\delta P(e^{j\omega T_s})$ mantém a relação:

$$\overline{\delta P}(\omega) < \frac{|1 + F_1(e^{j\omega T_s}) + F_2(e^{j\omega T_s})G_n(e^{j\omega T_s})|}{|F_r(e^{j\omega T_s})P_n(e^{j\omega T_s})|} = I_r(\omega). \quad (3.24)$$

Portanto, a resposta em frequência baseada na análise gráfica da robustez é útil para que se possa sintonizar $F_r(z)$ a fim de garantir a condição da equação (3.24).

3.3 Simulações

Nesta subseção consideram-se dois exemplos, um sistema instável e um sistema estável, em que a estratégia SDTC proposta é comparada com o MDFSP (NORMEY-RICO; FLESCHE; SANTOS, 2014) proposto recentemente. Nesse contexto, analisam-se aspectos relacionados à simplicidade de sintonia mantendo-se aspectos de desempenho e robustez.

Exemplo 3.1. Neste exemplo analisa-se o caso instável previamente considerado por Albertos e Garcia (2012), Normey-Rico, Flesch e Santos (2014), cujo modelo em tempo contínuo é dado por:

$$P(s) = \frac{5(0.1s + 1)}{(2s + 1)(-1.5s + 1)} e^{-0.6s} + \frac{(s + 1)}{(2s + 1)(-1.5s + 1)} e^{-2s}.$$

Este sistema pode ser separado em duas funções de transferência, a saber:

$$P_1(s) = \frac{5(0.1s + 1)}{(2s + 1)(-1.5s + 1)} e^{-0.6s};$$

$$P_2(s) = \frac{(s + 1)}{(2s + 1)(-1.5s + 1)} e^{-2s}.$$

O equivalente em tempo discreto desses modelos, discretizado considerando-se $T_s = 0.1$ s (ALBERTOS; GARCIA, 2012) e já incluindo o segurador de ordem zero, é dado por:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \frac{-0.02520z + 0.00839}{z^2 - 2.02z + 1.017} z^{-6} = G_1(z)z^{-6}; \\ P_2(z) &= \frac{-0.03531z + 0.03195}{z^2 - 2.02z + 1.017} z^{-20} = G_2(z)z^{-20}. \end{aligned}$$

Portanto, o modelo rápido pode ser escrito

$$G_n(z) = G_1(z) + G_2(z) = \frac{-0.0615z + 0.04033}{z^2 - 2.02z + 1.017}.$$

O modelo nominal da planta em tempo discreto é obtido quando os atrasos são levados em conta:

$$P_n(z) = \frac{-0.02520z^{-5} + 0.00839z^{-6} - 0.03531z^{-19} + 0.03195z^{-20}}{z^2 - 2.02z + 1.017}$$

No caso deste exemplo, considera-se que as especificações de projeto desejadas em malha fechada incluem o tempo de acomodação máximo em torno de 4.2 s e 2% de máximo sobressinal, no que diz respeito ao seguimento de referência. A fim de alcançar esses objetivos, o MDFSP foi ajustado com os parâmetros de sintonia mencionados por Normey-Rico, Flesch e Santos (2014), em que o controlador primário é do tipo PID em tempo discreto, dado por:

$$C(z) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_s}{z-1} + T_d \frac{1}{N + \frac{T_s}{z-1}} \right), \quad (3.25)$$

sendo K_c , T_i e T_d os parâmetros do controlador cujos valores definem o posicionamento dos polos e zeros. Todavia, a inclusão do controlador pode levar o sistema em malha fechada a apresentar sobressinal no seguimento de referência, devido ao efeito de zeros dominantes. Esse tipo de comportamento pode ser compensado pela inclusão de um filtro de referência do tipo:

$$F(z) = \frac{f_{n_0}z + f_{n_1}}{z + f_{d_1}}. \quad (3.26)$$

Para este caso particular, os parâmetros de sintonia são: $K_c = -0.044$, $T_i = 11.5$, $T_d = 1.3$ e $N = 2.77$. Dessa forma, os parâmetros do filtro de referência são: $f_{n_0} = 0.4385$, $f_{n_1} = -0.4284$ e $f_{d_1} = -0.9899$. Os parâmetros do filtro de robustez são apresentados Normey-Rico, Flesch e Santos (2014). Portanto, o filtro de referência, o controle primário e o filtro de robustez em tempo discreto são dados por:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{0.4385 - 0.4284z^{-1}}{1 - 0.9899z^{-1}}; \\ C(z) &= \frac{-8.9527 + 17.3788z^{-1} - 8.4305z^{-2}}{5.3971 - 9.6442z^{-1} + 4.2471z^{-2}}; \\ F_r(z) &= \frac{0.5768z^{-1} - 0.5668z^{-2}}{1 - 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o ganho de referência k_r , os filtros FIR, e os filtros de robustez do controlador SDTC são dados por:

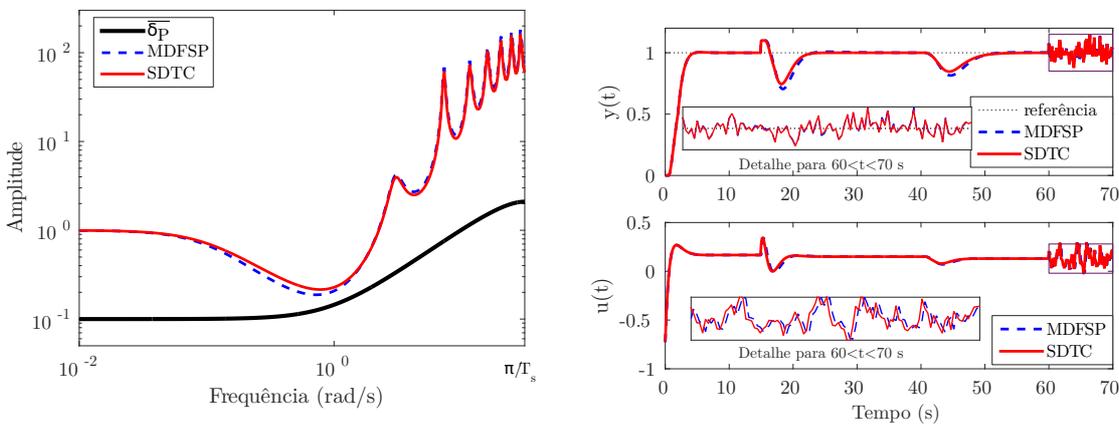
$$\begin{aligned} k_r &= -0.7220; \\ F_1(z) &= -0.3618z^{-1}; \\ F_2(z) &= -9.9493 + 9.1209z^{-1}; \\ F_r(z) &= \frac{-1.0458 + 1.0354z^{-1}}{1 - 1.76z^{-1} + 0.7744z^{-2}}, \end{aligned}$$

em que o filtro de robustez $F_r(z)$ foi sintonizado seguindo as regras apresentadas na subseção 3.2.2.

A análise de robustez em comparam-se os controladores SDTC e MDFSP é mostrada na Figura 23a, em que pode-se observar um leve incremento de robustez a favor do SDTC. Observa-se que nessa figura, o gráfico do índice de robustez $I_r(e^{j\omega T_s})$ relativo ao controlador MDFSP fica mais próximo do gráfico $\overline{\delta P}(e^{j\omega T_s})$ que aquele relativo ao SDTC, na faixa de frequências em que a condição de robustez é mais próxima de ser violada (em torno de 1 *rad/s*).

Figura 23 – Resultados de simulação para o caso instável (exemplo 3.1)

- (a) Análise de Robustez para o caso instável (b) Resposta ao degrau para o sistema instável (exemplo 3.1): caso nominal.



O desempenho dos controladores no que diz respeito ao seguimento de referência é mostrado na Figura 23b. Para esta simulação, a referência em degrau foi aplicada em $t = 0$ s. Perturbações do tipo degrau de amplitudes 0.1 and 0.02 foram aplicadas em $t = 15$ s e $t = 40$ s na saída e na entrada do sistema, respectivamente. Além disso, adicionou-se ruído branco em $t = 60$ s a fim de analisar o comportamento dos controladores com relação ao ruído em alta frequência, normalmente considerado como ruído de medida.

A Tabela 1 mostra a integral do erro quadrático - ISE (*Integral Square Error*), como um índice de medição da saída, e a variação total de controle (TCV), como um ín-

dice de medida da entrada, a fim de quantificar a resposta mostrada na Figura 23b. Para esta tabela a coluna “Referência” mostra que os dois controladores considerados (SDTC e MDFSP) foram ajustados para que o comportamento relacionado ao seguimento de referência seja semelhante. Por outro lado, quanto à rejeição a perturbações do tipo degrau, percebe-se que a recuperação do SDTC é levemente melhorada em relação à recuperação do MDFSP. Portanto, pode-se argumentar que ambos os controladores apresentam comportamento semelhante, porém, as colunas “Perturbação na saída” e “Perturbação na entrada” que se veem na Tabela 1 quantificam uma redução significativa do índice IAE em favor do SDTC, enquanto os índices do sinal de controle mantêm comportamento similar, como indicam os valores de TCV.

Tabela 1 – Índices de desempenho para o sistema instável (exemplo 3.1): caso nominal.

Índice	Controlador	Referência	Perturbação na saída	Perturbação na entrada
ISE	MDFSP	0.1583	0.0147	0.0118
	SDTC	0.1584	0.0147	0.0081
IAE	MDFSP	2.0580	1.0923	0.9280
	SDTC	2.0604	0.8755	0.7737
TCV	MDFSP	1.8257	0.8410	0.1414
	SDTC	1.8147	0.8220	0.1221

Apesar do fato de que os controladores analisados nesta seção são capazes de lidar com o seguimento de referência e a rejeição a perturbações atendendo às especificações de projeto propostas, o procedimento de sintonia do algoritmo SDTC é consideravelmente mais simples que aquele relacionado ao MDFSP. Deve-se observar que os termos $F_1(z)$, $F_2(z)$ e k_r presentes no SDTC são expressões muito simples se comparadas com $C(z)$ e $F(z)$ para o caso do MDFSP.

Em complemento, a Figura 24 apresenta a resposta ao degrau quando considera-se que o modelo da planta $P(s)$ tem seu ganho acrescido em 10%. Além disso, considera-se ainda que o atraso efetivo (real) de cada caminho é aumentado em T_s . A sintonia do caso nominal é preservada. Neste caso, a recuperação quanto à rejeição a perturbações é levemente acelerada para o SDTC. A Tabela 2 quantifica o comportamento de ambos os controladores quando essas incertezas são levadas em conta. No caso da perturbação na saída (ver $t = 15$ s na Figura 24) o SDTC mostra um comportamento menos oscilatório que o MDFSP, o que se reflete em valores menores dos índices de saída ISE e IAE, e, por consequência, no índice de entrada TCV. Para o caso da perturbação na entrada (ver $t = 40$ s na Figura 24) os controladores apresentam desempenho semelhante, com uma melhora pequena a favor do algoritmo SDTC, conforme observa-se através dos índices

ISE, IAE e TCV.

Figura 24 – Resposta ao degrau para o sistema instável (exemplo 3.1): caso com incertezas.

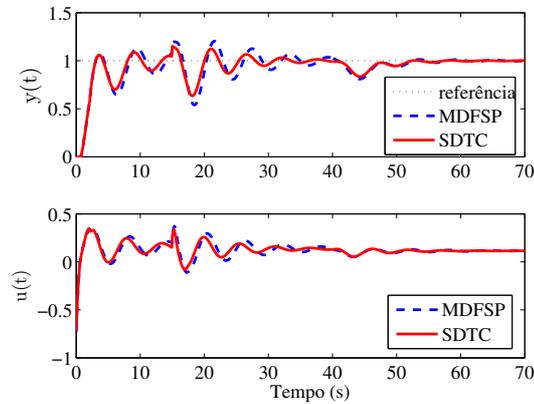


Tabela 2 – Índices de desempenho para o sistema instável (exemplo 3.1): caso com incertezas.

Índice	Controlador	Referência	Perturbação na saída	Perturbação na entrada
ISE	MDFSP	0.19028	0.039978	0.011429
	SDTC	0.17787	0.025906	0.007685
IAE	MDFSP	3.9661	2.3496	1.0300
	SDTC	3.285	1.6378	0.8065
TCV	MDFSP	2.8204	1.7602	0.3992
	SDTC	2.7343	1.5081	0.2994

Exemplo 3.2. Neste exemplo analisa-se um caso estável que refere-se ao problema de congestionamento de redes TCP, também estudado previamente por Normey-Rico, Flesch e Santos (2014). O modelo correspondente depende do comprimento da fila, resultando em uma soma de modelos FOPDT, dado por (MELO; NORMEY-RICO; FARINES, 2009):

$$P(s) = \frac{p_m(s)}{s_r(s)} = \frac{1}{30s + 1}e^{-18s} + \frac{1}{10s + 1}e^{-24s} + \frac{1}{12s + 1}e^{-20s},$$

sendo $p_m(s)$ o número de pacotes TCP na fila e $s_r(s)$ a taxa de transmissão de pacotes do emissor. Todas as medidas de tempo envolvidas (constante de tempo e atraso) estão em milissegundos. Vale salientar que considera-se um perturbação de entrada para o emissor 1, ou seja,

$$P_q(s) = \frac{1}{30s + 1}e^{-18s}.$$

O sistema foi discretizado considerando-se $T_s = 2 \text{ ms}$, o que resulta no modelo em tempo discreto dado por

$$P_n(z) = \frac{0.06449}{z - 0.9355}z^{-9} + \frac{0.1813}{z - 0.8187}z^{-12} + \frac{0.1535}{z - 0.8465}z^{-10},$$

em que o modelo rápido é obtido retirando-se a componente relacionada ao atraso da função de transferência de cada caminho, resultando em:

$$G_1(z) = \frac{0.06449}{z - 0.9355};$$

$$G_2(z) = \frac{0.1813}{z - 0.8187};$$

$$G_3(z) = \frac{0.1535}{z - 0.8465},$$

levando finalmente a

$$G_n(z) = G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) = \frac{0.3993z^2 - 0.6997z + 0.3058}{z^3 - 2.6007z^2 + 2.2509z - 0.6483}.$$

As especificações de projeto para a abordagem MDFSP consideram um tempo de acomodação máximo em torno de 45 ms e 2% de sobressinal máximo. Neste caso, considera-se um controlador primário do tipo PI, sendo $K_c = 1$, $T_i = 10$ and $T_d = 0$. O filtro de referência tem $f_{n_1} = 0.5$, $f_{n_2} = -0.3$ e $f_{d_1} = 0.8$. Logo, o controlador primário e o filtro de robustez em tempo discreto são (NORMEY-RICO; FLESCHE; SANTOS, 2014):

$$F(z) = \frac{0.5 - 0.3z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}};$$

$$C(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - z^{-1}};$$

$$F_r(z) = \frac{3.154 - 2.804z^{-1}}{1 - 0.65z^{-1}}.$$

Por outro lado, o algoritmo SDTC foi sintonizado para que a rejeição a perturbações seja similar àquela observada para o caso do MDFSP, porém, com resposta mais rápida quanto ao seguimento de referência. Entretanto, essa sintonia leva à saturação do sinal de controle, já que a taxa máxima de transmissão é limitada a 100% . Assim, essa sintonia leva a um exemplo em que pode-se verificar a característica natural *anti-windup* da estratégia SDTC, mencionada anteriormente na subseção 3.2.1.

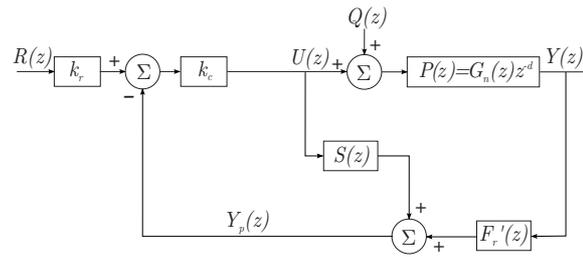
Para este exemplo o projeto do SDTC é mais simples que aquele do exemplo anterior, já que $F_1(z) = 0$ e $F_2(z) = k_c$. Neste caso, tem-se $k_c > 0$ como um parâmetro de projeto cujo valor pode levar ao seguimento de referência mais lento (através do decréscimo

de k_c) ou mais rápido (através do acréscimo de k_c). Portanto,

$$\begin{aligned} k_r &= 1.2778; \\ F_1(z) &= 0; \\ F_2(z) &= k_c = 1.2; \\ F_r(z) &= \frac{2.146z^{-1} - 1.942z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.36z^{-2}}. \end{aligned}$$

No caso de um sistema FOPDT, como o apresentado neste exemplo, o controlador primário é reduzido a um simples ganho k_c . Logo, é possível encontrar uma estrutura de controle equivalente, conforme apresentado na Figura 25, em que $S(z) = G_n(z)F_2(z) - P_n(z)F_r(z)$ e $F_r'(z) = \frac{F_r(z)}{k_c}$. Deve-se destacar que neste caso, o SDTC apresenta a mesma estrutura do SFSP (TORRICO et al., 2013), ou seja, o controlador SFSP é um caso particular da estratégia SDTC proposta.

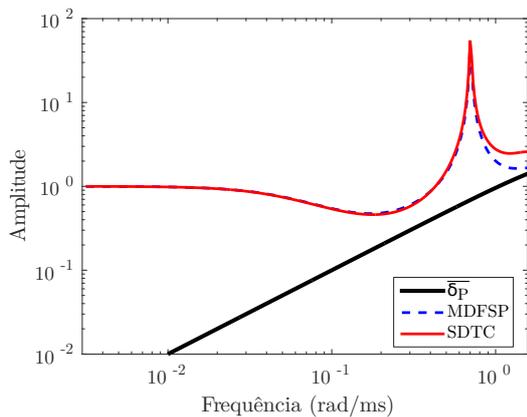
Figura 25 – Estrutura equivalente do controlador SDTC para o caso FOPDT.



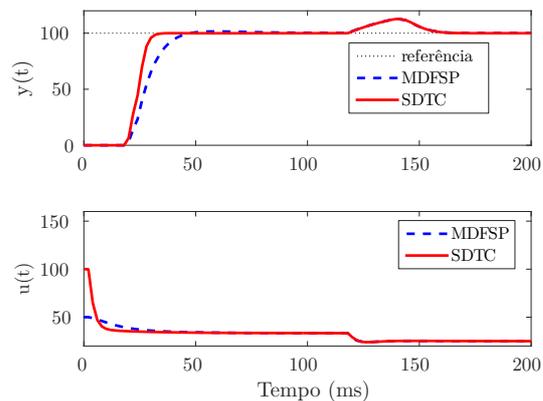
A análise de robustez apresentada na Figura 26a considera $\overline{\delta P}(\omega)$ para uma incerteza de uma amostra apenas no atraso. Percebe-se que o índice de robustez $I_r(\omega)$ para ambos os controladores tem comportamento semelhante para as frequências críticas, em torno de 0.2 rad/ms .

Figura 26 – Sistema estável (exemplo 3.2)

(a) Análise de robustez.



(b) Resposta ao degrau.



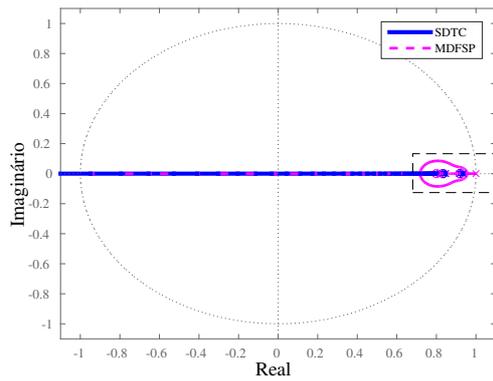
Por outro lado, a resposta ao degrau apresentada na Figura 26b mostra claramente que o SDTC pode acelerar significativamente o seguimento de referência sem a ocorrência de sobressinal em comparação com o controlador MDFSP, que poderia ser reajustado, mas às custas da modificação do filtro de referência. Além disso, a rejeição a perturbações permanece com o mesmo comportamento, já que é determinada pelo filtro de robustez. Entretanto, o preço a ser pago por acelerar a resposta está na saturação do sinal de controle, que foi limitado a 100% da taxa de transmissão. É importante salientar que caso deseje-se uma resposta ao seguimento de referência mais rápida para o caso do algoritmo MDFSP, então deve-se considerar um novo projeto de controlador primário, levando invariavelmente a um PID. O efeito dessa mudança reflete-se no filtro de referência que deverá ter sua ordem elevada também. O algoritmo SDTC ao contrário, tem a resposta dinâmica acelerada ou retarda simplesmente variando-se o ganho k_c .

De fato, o procedimento de projeto descrito nesta seção e que leva o SDTC à não necessidade de se incluir um integrador na malha direta, tem como consequência a ausência de inclusão do polo em $z = 1$ na malha fechada. Assim, quando comparam-se os gráficos relacionados ao lugar geométrico das raízes de ambos os controladores, considerando-se o modelo rápido como a planta que deseja-se controlar, percebe-se que o diagrama relacionado ao SDTC posiciona-se mais interno ao círculo de raio unitário quando comparado com aquele relacionado ao MDFSP. Dessa forma, conclui-se que o algoritmo SDTC será mais rápido que o MDFSP. As Figuras 27a e 27b ilustram essa observação para o sistema estável desse exemplo, em que percebe-se claramente que a ausência do polo integrador para o caso SDTC leva ao posicionamento mais interno do diagrama, conforme mencionado. Deve-se observar que a aceleração da resposta ao seguimento de referência no caso MDFSP leva invariavelmente à inclusão de novos zeros no diagrama, ou seja, o controlador primário passará a ser do tipo PID ao invés do PI considerado. Consequentemente, o filtro de robustez também deverá ser projetado para o novo controlador, aumentando sua ordem.

A Tabela 3 exhibe os índices de desempenho para o caso estável. A coluna “Referência” desta tabela mostra que o seguimento de referência é incrementado para o SDTC proposto em comparação ao MDFSP, para os parâmetros de sintonia considerados, apesar do fato de que a saturação do sinal de controle tenha levado a um esforço de controle maior, conforme verifica-se no índice TCV. Por outro lado, a coluna “Perturbação na entrada” claramente mostra que ambos os controladores são equivalentes no que diz respeito a rejeição a perturbações.

Figura 27 – Lugar geométrico das raízes (exemplo 3.2)

(a) Diagrama do lugar das raízes.



(b) Detalhe.

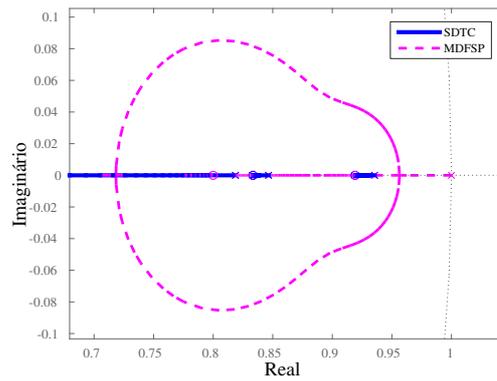


Tabela 3 – Índices de desempenho para o caso estável (exemplo 3.2).

Índice	Controlador	Referência	Perturbação na entrada
ISE	MDFSP	$5.2361 \cdot 10^5$	$0.0532 \cdot 10^5$
	SDTC	$4.7253 \cdot 10^5$	$0.0532 \cdot 10^5$
IAE	MDFSP	$3.0102 \cdot 10^3$	$0.2958 \cdot 10^3$
	SDTC	$2.5421 \cdot 10^3$	$0.2933 \cdot 10^3$
TCV	MDFSP	66.6318	10.5307
	SDTC	166.5851	11.0300

4 CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS

Sistemas dinâmicos são normalmente descritos por equações diferenciais ordinárias. A aplicação da transformada de Laplace nessas equações transforma um modelo descrito na representação temporal em uma representação em frequência. A análise e o projeto clássico de sistemas de controle é tomada nessa representação, o que leva invariavelmente a um modelo de relação entre entrada e saída do sistema. Dessa forma, o desenvolvimento apresentado no capítulo 2 é baseado em técnicas de controle clássico.

Entretanto, nem sempre a relação entrada-saída de um sistema é suficiente, sendo necessário que se conheça o comportamento dinâmico de elementos internos. Em processos físicos, tais componentes estão normalmente associados a acumuladores de energia, como molas, capacitores, líquidos, entre outros. Todavia, nem sempre é possível uma associação física a tais elementos, sendo comum que se encontrem representações com certas variáveis que, apesar de matematicamente consistentes, não possuem significado físico. O conjunto de variáveis que ajudam a explicar o comportamento dinâmico do sistema em estudo são chamados de estados. Dessa forma, em alguns casos a escolha das variáveis de estado podem parecer óbvias, mas há casos em que não se pode assim considerar (FRIEDLAND, 2005, cap. 2).

Nesse contexto, as equações descritivas do modelo são dadas pelas próprias equações diferenciais, comumente obtidas a partir da descrição fenomenológica. Portanto, a representação em espaço de estados é fundamentalmente uma representação temporal, em que as equações diferenciais são de primeira ordem. Dessa forma, conhecendo-se a condição inicial dos estados é possível perceber como o sistema evolui, descobrindo assim sua solução, considerando-se a ausência de entradas externas. Assim, o número de equações diferenciais de primeira ordem agrupadas corresponde à ordem do sistema (FRIEDLAND, 2005, cap. 2).

O conhecimento dos estados de um modelo são importantes na teoria de controle moderno porque a maioria das técnicas de projeto são baseadas na realimentação dos estados. Assim, é fundamental que se conheça o valor das variáveis de estados que podem ser medidos diretamente do sistema (através de sensores). Neste caso tem-se acesso aos modos internos e a realimentação é direta. Porém, nos casos em que os estados não possuem significado físico, ou quando a medição dos estados não é possível, torna-se necessário estimá-los, ou seja, a realimentação de estados se dá de forma indireta.

Qualquer que seja a forma que se dá a realimentação dos estados, é comum que obtenha a lei de controle a partir da minimização de uma função custo ou por alocação de polos. Porém, quando se leva em consideração o uso de um estimador otimizado, pode

haver degradação na robustez do sistema, caso que pode ser contornado com técnicas de incremento de robustez que se vê nas seções ?? e 4.2.

4.1 Otimização em sistemas de controle

No sistema de controle por realimentação de estados, baseado no posicionamento de polos, os polos desejados da malha fechada são posicionados no plano complexo a fim de satisfazer às especificações de projeto previamente conhecidas. Normalmente são critérios de desempenho temporal, podendo-se citar como alguns exemplos: tempo de subida, máximo sobressinal ou tempo de acomodação. Porém, o conhecimento dessas especificações determina a região no plano complexo onde os polos de malha fechada devem estar posicionados e, assim, pode-se calcular a matriz de ganho de realimentação.

O posicionamento desses polos independe do fato de os estados do sistema estarem acessíveis para medição ou se há necessidade de um observador de estados, em que a realimentação neste caso se dá indiretamente. Observadores de estado seguem a ideia de que o erro de estimação deve ser idealmente nulo ou suficientemente pequeno e, nesse contexto, calcular o valor da matriz de ganho do observador.

Entretanto, o posicionamento de polos para escolha da matriz de ganhos, no caso da realimentação de estados, não garante que se obtém a otimalidade da solução. Assim, o sinal de controle $u(t)$ e o estado do sistema $\mathbf{x}(t)$ não são necessariamente otimizados, apesar das especificações de projeto serem atendidas satisfatoriamente. Tampouco se observa que o observador de estados é levado à obtenção de um ganho ótimo de realimentação, apesar de se desejar a minimização do erro de estimação, já que em sua escolha não se aplica qualquer processo de otimização. Nesta seção discute-se a otimização em ambos os casos: na realimentação de estados e no observador ou estimador ótimo.

4.1.1 O problema LQR

A ideia da otimização na realimentação de estados consiste em se buscar uma matriz de ganhos \mathbf{K} tal que o problema de controle otimiza algum tipo de medida, geralmente a energia associada à saída do sistema. Nesse contexto, é plausível que os elementos que tem efeito ativamente na formação da lei de controle, o estado $\mathbf{x}(t)$ e o sinal de controle $\mathbf{u}(t)$, sejam otimizados de acordo com algum critério. O sinal de controle aparece aqui na notação matricial para caracterizar sistema multivariáveis. É comum que se encontre um critério quadrático para otimização das variáveis desejadas, definindo-se

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt, \quad (4.1)$$

sendo \mathbf{Q} e \mathbf{R} as matrizes de peso de dimensões apropriadas para a compatibilidade dimensional com $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$, respectivamente. Assim, a equação (4.1) constitui uma combinação

linear de termos quadráticos das variáveis envolvidas na formação da lei de controle

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \quad (4.2)$$

Assim, o problema de encontrar um ganho \mathbf{K} que otimiza a função custo (4.1) ficou conhecido como o problema do regulador linear quadrático - LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Considerando que se tem acesso aos estados do sistema e que, para facilitar a análise, se trata de um sistema regulador (sem entradas externas de referência), então o sistema em malha fechada tem a equação de estado dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t); \\ &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

A solução da equação (4.3) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0), \quad (4.4)$$

sendo $\Phi(t, t_0)$ a matriz de transição de estados, aplicada para se calcular o valor do estado em um instante de tempo qualquer t , $\mathbf{x}(t)$, a partir do estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, conhecido no instante de tempo t_0 .

Substituindo-se as equações (4.4) e (4.2) na equação (4.1), e seguindo os passos apresentados por Friedland (2005, cap. 9), chega-se à equação :

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}_c^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_c + \mathbf{L}_P, \quad (4.5)$$

sendo $\mathbf{L}_P = \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} + \mathbf{Q}$ e \mathbf{P} , definida por:

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty \Phi^T(t, 0)\mathbf{L}_P\Phi(t, 0)dt, \quad (4.6)$$

é a solução única da equação (4.5). Entretanto, a matriz de transição de estados é dada por $\Phi(t, 0) = e^{\mathbf{A}_c t}$. Como \mathbf{A}_c depende de \mathbf{K} , que ainda não é conhecida, então a matriz \mathbf{P} deve ser encontrada como a solução da equação (4.5) ao invés de se usar a equação (4.6).

Dessa forma, supondo que \mathbf{P} e \mathbf{K} são valores não ótimos da matriz de covariância e da matriz de ganho, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_o + \mathbf{P}_a; \quad (4.7)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_o + \mathbf{K}_a, \quad (4.8)$$

sendo \mathbf{P}_o e \mathbf{K}_o os valores ótimos, com os quais se pode associar a equação:

$$-\dot{\mathbf{P}}_o(t) = (\mathbf{A}^T - \mathbf{K}_o^T\mathbf{B}^T)\mathbf{P}_o(t) + \mathbf{P}_o(t)(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_o) + \mathbf{K}_o^T\mathbf{R}\mathbf{K}_o + \mathbf{Q}. \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.7) e (4.8) na equação (4.5) e, aplicando a equação (4.9), chega-se à equação

$$-\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{c}}^T \mathbf{P}_{\mathbf{o}}(t) + \mathbf{P}_{\mathbf{o}}(t) \mathbf{A}_{\mathbf{c}} + \mathbf{K}_{\mathbf{a}}^T (\mathbf{R} \mathbf{K}_{\mathbf{o}} - \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{\mathbf{o}}) + (\mathbf{K}_{\mathbf{o}}^T \mathbf{R} - \mathbf{P}_{\mathbf{o}} \mathbf{B}) \mathbf{K}_{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_{\mathbf{a}}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{\mathbf{a}}. \quad (4.10)$$

em que a equação (4.10) está escrita na mesma forma da equação (4.5), com

$$\mathbf{L}_{\mathbf{p}} = \mathbf{K}_{\mathbf{a}}^T (\mathbf{R} \mathbf{K}_{\mathbf{o}} - \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{\mathbf{o}}) + (\mathbf{K}_{\mathbf{o}}^T \mathbf{R} - \mathbf{P}_{\mathbf{o}} \mathbf{B}) \mathbf{K}_{\mathbf{a}} \quad (4.11)$$

Aqui, vale a pena destacar a análise de Friedland (2005, cap. 9), em que é observado que se $\mathbf{K}_{\mathbf{a}}$ é suficientemente pequeno os termos lineares dominam o termo quadrático $\mathbf{K}_{\mathbf{a}}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{\mathbf{a}}$ e, dependendo do valor de $\mathbf{K}_{\mathbf{a}}$, a matriz $\mathbf{L}_{\mathbf{p}}$ pode vir a se tornar definida negativa. Assim, uma forma de se contornar essa questão consiste em considerar que os termos lineares não estão presentes na equação (4.11), o que pode ser conseguido fazendo-os iguais a zero, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{K}_{\mathbf{o}} - \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{\mathbf{o}} &= 0 \\ \mathbf{K}_{\mathbf{o}} &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{\mathbf{o}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

que constitui a equação do ganho ótimo de realimentação de estados. Substituindo esse valor na equação (4.9) se obtém

$$-\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{o}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\mathbf{o}}(t) + \mathbf{P}_{\mathbf{o}}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}_{\mathbf{o}} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{\mathbf{o}} + \mathbf{Q}, \quad (4.13)$$

que é uma das equações mais conhecidas em controle ótimo, chamada de equação de Riccati. Assim, a solução da equação (4.13) leva à obtenção do ganho ótimo dado pela equação (4.12). Apesar de ser uma equação matematicamente complexa, sua solução numérica pode ser facilmente encontrada utilizando-se pacotes computacionais disponíveis em *softwares* como MATLAB[®] ou Scilab[®].

4.1.2 Estimador ótimo: o filtro de Kalman

Partir do princípio que todos os estados de um sistema estão ou deveriam estar disponíveis para medição é premissa falha. O custo de aplicação de alguns sensores pode se tornar proibitivo ou até mesmo impraticável, como é o caso que pode ocorrer em plantas de energia nuclear, como lembram Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009, pág. 466). Neste caso, se faz necessário estimar os estados do sistema com determinada precisão tal que torne possível o uso desses estados estimados para os propósitos de controle. Nesse contexto, pode-se utilizar um modelo de sistema dinâmico paralelo ao sistema que se deseja controlar, a fim de estimar os estados não acessíveis. Um modelo possível é o observador de Luenberger (FRIEDLAND, 2005), que tem como princípio básico encontrar

uma expressão para o ganho do estimador tal que o erro cometido ao se tentar explicar o comportamento do estado real do sistema com uma estimativa, seja suficientemente pequeno (ver Anexo B para detalhes desse observador). Nesse contexto, o posicionamento de polos consiste em uma técnica plausível para projeto do estimador. Deve-se observar ainda que o observador de Luenberger se baseia em um modelo determinístico, que ajuda a compreender a ideia de observador.

Porém, sinais que atuam como perturbação do estado ou como ruído de medida na saída do sistema, tem normalmente características gaussianas, sobre o qual se debruça a teoria de processos estocásticos. Nesse contexto, Friedland (2005, cap. 7) lembra que antes de Luenberger, Kalman (1960) propôs uma estrutura de estimação capaz de lidar tanto com a otimização do erro de estimação quanto com a presença de sinais estocásticos. Porém, neste caso, o sistema a ser considerado é do tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t); \quad (4.14)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (4.15)$$

sendo $w(t)$ e $v(t)$ sinais do tipo ruído branco. Esse tipo de sinal é comumente encontrado em caráter prático como sinal de ruído, na entrada ou na saída da planta. Observando-se a equação (4.14) percebe-se que $\mathbf{w}(t)$ é um sinal de perturbação na entrada da planta.

Sinais com espectro denominado “branco” apresentam densidade espectral de potência em uma faixa teoricamente infinita (na realidade, uma faixa muito ampla) do espectro de potências. Entretanto, os sistemas tem resposta espectral finita, bem mais limitada que a faixa espectral desses sinais. Então, utilizá-los como sinais de entrada apresenta a vantagem de se excitar todos os modos do sistema em estudo, geralmente para efeito de identificação do sistema ou na estimação de parâmetros (AGUIRRE, 2004, pág. 408).

Portanto, de acordo com a análise de sinais estocásticos apresentada no Anexo A, é fundamental que se conheçam os dois primeiros momentos estocásticos dos sinais envolvidos, ou seja, o valor médio

$$E\{\mathbf{w}(t)\} = 0; \quad (4.16)$$

$$E\{\mathbf{v}(t)\} = 0, \quad (4.17)$$

e as covariâncias

$$E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\} = R_w\delta(0); \quad (4.18)$$

$$E\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)\} = R_v\delta(0); \quad (4.19)$$

$$E\{\mathbf{v}(t)\mathbf{w}^T(t)\} = 0, \quad (4.20)$$

sendo $\delta(t_0)$ a função impulso unitário cuja ocorrência se dá em $t = t_0$. A equação (4.20) é zero porque assume-se que os sinais $w(t)$ e $v(t)$ são descorrelacionados.

Por outro lado, o estimador deve incluir uma parcela do erro de estimação, resultando na equação de estado estimado:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_f\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)). \quad (4.21)$$

Subtraindo as equações (4.14) e (4.21) tem-se

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C})\mathbf{e}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_f\mathbf{v}(t). \quad (4.22)$$

Definindo $\xi(t) = \mathbf{B}\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_f\mathbf{v}(t)$, percebe-se que $\xi(t)$ é uma combinação linear de dois processos do tipo ruído branco e, portanto, é também ruído branco, com matriz de covariância R_ξ dada por (FRIEDLAND, 2005, cap. 11):

$$\begin{aligned} R_\xi &= E \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_f\mathbf{v}(t)) (\mathbf{B}\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_f\mathbf{v}(t))^T \right\}; \\ &= E \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{B}^T) - (\mathbf{B}\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(t)\mathbf{K}_f^T) - \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{K}_f\mathbf{v}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{B}^T) + (\mathbf{K}_f\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)\mathbf{K}_f^T) \right\}; \\ &= \mathbf{B}E \left\{ (\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)) \right\} \mathbf{B}^T + \mathbf{K}_f E \left\{ (\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)) \right\} \mathbf{K}_f^T; \\ &= \mathbf{B}R_w\mathbf{B}^T + \mathbf{K}_fR_v\mathbf{K}_f^T. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Assim como no caso do regulador linear quadrático, neste caso também pode-se chegar a uma equação diferencial semelhante à equação (4.5), conforme apresentado por Friedland (2005, cap. 10), sendo dada por:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}\mathbf{A}_c^T(t) + R_\xi; \quad (4.24)$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C})\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K}_f^T) + R_\xi; \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

Assim como no caso determinístico, considerando-se que

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_o + \mathbf{P}_a; \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{K}_{f_o} + \mathbf{K}_{f_a}, \quad (4.28)$$

então, convém observar que

$$\dot{\mathbf{P}}_o(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{f_o}\mathbf{C})\mathbf{P}_o(t) + \mathbf{P}_o(t) (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K}_{f_o}^T) + R_\xi. \quad (4.29)$$

Portanto, seguindo os mesmos passos da subseção 4.1.1, chega-se à equação

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_a(t) &= \mathbf{A}_c\mathbf{P}_o(t) + \mathbf{P}_o(t)\mathbf{A}_c + \mathbf{K}_{f_a} \left(R_v\mathbf{K}_{f_o}^T - \mathbf{C}\mathbf{P}_o \right) + \\ &\quad \left(\mathbf{K}_{f_o}R_v - \mathbf{P}_o\mathbf{C}^T \right) \mathbf{K}_{f_a}^T + \mathbf{K}_{f_a}R_v\mathbf{K}_{f_a}^T. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Assim como no caso determinístico, para que os termos lineares $(\mathbf{K}_{f_o} R_v - \mathbf{P}_o \mathbf{C}^T) \mathbf{K}_{f_a}^T$ não dominem o termo quadrático $\mathbf{K}_{f_a} R_v \mathbf{K}_{f_a}^T$, podendo causar problema de positividade na solução de \mathbf{P}_a , então

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{f_o} R_v - \mathbf{P}_o \mathbf{C}^T &= 0; \\ \mathbf{K}_{f_o} &= \mathbf{P}_o \mathbf{C}^T R_v^{-1}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo esse resultado na equação (4.29), tem-se a equação de Riccati associada ao problema do estimador ótimo:

$$\dot{\mathbf{P}}_o(t) = \mathbf{A} \mathbf{P}_o(t) + \mathbf{P}_o(t) \mathbf{A}^T - \mathbf{P}_o \mathbf{C}^T R_v^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_o + \mathbf{B} R_w \mathbf{B}^T. \quad (4.32)$$

A solução da equação (4.32) é obtida através de métodos numéricos para os quais *softwares* como MATLAB[®] ou Scilab[®] possuem pacotes computacionais específicos. Assim, uma vez que se obtém \mathbf{P}_o como solução da equação (4.32), então pode-se calcular \mathbf{K}_{f_o} pela equação (4.31).

4.1.3 O controle LQG e o Teorema da Separação

A descrição de um sistema linear e invariante no tempo, com a presença de sinais de ruído do tipo branco no estado e na saída, é dado pelas equações (4.14) e (4.15), escritas na sequência para facilitar a leitura:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B} \mathbf{w}(t); \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \end{aligned}$$

sendo $w(t)$ e $v(t)$ processos aleatórios com média nula e covariâncias $E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\} = R_w \delta(t-\tau)$ e $E\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)\} = R_v \delta(t-\tau)$. Porém, o sinal de entrada do sistema é corrompido por $\mathbf{w}(t)$, através da matriz \mathbf{B} - e nesse caso $\mathbf{w}(t)$ é aditivo a $\mathbf{u}(t)$ -, ou considerado como referência. Neste último caso o termo $\mathbf{B} \mathbf{u}(t)$ poderia ser substituído por $\mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t)$, por exemplo. Em qualquer dos casos, o efeito sobre o problema de otimização tem relação direta com a função a ser otimizada na obtenção do ganho de realimentação de estados, a fim de formar a lei de controle dada pela equação (4.2).

Nesse contexto, não é possível apresentar um problema de controle ótimo pela minimização da função custo dada pela equação (4.1), porque neste caso J é uma variável aleatória cujos valores dependem de $\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ e do estado inicial \mathbf{x}_{t_0} (ANDERSON; MOORE, 1989, pág. 218). Assim, a função custo a ser considerada neste caso é dada por (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, pág. 376):

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \right\}. \quad (4.33)$$

A solução para uma lei de controle otimizada para $\mathbf{u}(t)$ a partir da minimização da equação (4.33), ficou conhecida como a solução do problema Linear Quadrático Gaussiano - LQG (*Linear Quadratic Gaussian*). A solução desse problema é baseada no *Princípio da Equivalência à Certeza* e fundamentada no *Teorema da Separação*.

A ideia básica consiste em considerar que a lei de controle é otimizada para o sistema sem ruído, dada pela equação (4.2) e o estimador ótimo cuja equação de estado é dada pela equação (4.21).

Por uma questão de conveniência no acompanhamento matemático que segue, as equações de estado do sistema e do estimador são rerepresentadas. Portanto, o sistema é descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t); \quad (4.34)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (4.35)$$

e a equação de estado do estimador é dada por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_f\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)). \quad (4.36)$$

sendo \mathbf{K}_f o ganho de Kalman obtido pela equação (4.31).

Por outro lado, a lei de controle otimizada obtida para o sistema não perturbado, dado pela equação (4.2), é obtida considerando-se que o estado do sistema está disponível para medição. No entanto, se a estimativa do estado, dada pela equação (4.36), é otimizada de modo que o erro de estimação $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ tende assintoticamente a zero, então é plausível que se considere uma lei de controle dada por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_{lqr}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (4.37)$$

sendo \mathbf{K}_{lqr} a matriz de ganho \mathbf{K} obtida pela equação (4.12). Dessa forma, a Figura 28 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle regulador em malha fechada.

Nesse contexto, substituindo-se a equação (4.37) na equação (4.34), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t); \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t); \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{e}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Subtraindo a equação (4.34) da equação (4.36), obtém-se uma equação de estado para o erro de estimação $\mathbf{e}(t)$, dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{K}_f\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_f\mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C})\mathbf{e}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_f\mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{f_o} R_v \mathbf{K}_{f_o}^T &\rightarrow q^2 \mathbf{B} R_w \mathbf{B}^T; \\ \mathbf{K}_{f_o} &\rightarrow q \mathbf{B} \left(R_w R_v^{-1} \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Com essa consideração a malha de controle LQG é assintoticamente aproximada para a malha de controle LQR quando $q \rightarrow \infty$. Uma discussão mais detalhada sobre o procedimento LTR é dada por Maciejowski (1989).

4.2 Controle otimizado em tempo discreto

Esta seção aborda o controle e a estimação otimizados, sob a perspectiva do tempo discreto. Ao final, na última subseção, apresenta-se uma sugestão de ajuste LQG/LTR em tempo discreto através de um polinômio.

A representação em espaço de estados de um sistema em tempo discreto é bastante semelhante àquela em tempo contínuo, dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad (4.42)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (4.43)$$

sendo t a variável temporal em uma faixa contínua de valores. A solução da equação (4.42) é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (4.44)$$

sendo $\Phi(t - t_0)$ a matriz de transição de estados dada por:

$$\begin{aligned}\Phi(t - t_0) = \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot (t - t_0) + \frac{\mathbf{A}^2}{2} \cdot (t - t_0)^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{6} \cdot (t - t_0)^3 + \dots \\ + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \cdot (t - t_0)^n + \dots = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

A equação (4.44) é uma generalização da equação (4.4) quando o sistema não é autônomo ($\mathbf{u}(t) \neq 0$).

Nesse contexto, considerando que se deseja discretizar esse sistema com período de amostragem T_s e que se utiliza um circuito segurador de ordem zero - ZOH na discretização, então o modelo em tempo discreto é dado por (PHILLIPS; NAGLE, 1984, pág. 126):

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(k); \quad (4.46)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(k), \quad (4.47)$$

em que

$$\mathbf{A}_d = \Phi(T_s) = e^{\mathbf{A}_d T_s}; \quad (4.48)$$

$$\mathbf{B}_d = \left[\int_0^{T_s} \Phi(t - \sigma) d\sigma \right] \mathbf{B}; \quad (4.49)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \quad (4.50)$$

e k representa a variável temporal em uma faixa discreta de valores.

4.2.1 LQR em tempo discreto

O problema de controle otimizado para um sistema descrito em tempo discreto é semelhante àquele apresentado na subseção (4.1.1) para o tempo contínuo. A literatura que trata desse tema é bastante rica em detalhes, omitidos aqui para não tornar esta seção demasiadamente extensa. Porém, uma busca mais específica pode ser realizada nos trabalhos de Phillips e Nagle (1984, cap. 10), Phillips e Nagle (1995, cap. 10), Franklin, Powell e Workman (1997, cap. 9) e Kuo (1992, cap. 11). Na sequência, apenas os resultados das equações envolvidas são apresentados.

Dessa forma, a equação da função custo do problema é dada por

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k). \quad (4.51)$$

Se o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, então $\mathbf{P}(k)$ torna-se igual a $\mathbf{P}(k+1)$, e ambos podem ser chamados simplesmente de \mathbf{P} . Portanto, a equação de Riccati passa a ser dada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q}, \quad (4.52)$$

conhecida como equação algébrica de Riccati (ARE), para o tempo discreto.

Dessa forma, o ganho da realimentação de estados será estático, dado por:

$$\mathbf{K}_d = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (4.53)$$

4.2.2 Filtro de Kalman em tempo discreto

Para o desenvolvimento do filtro de Kalman em tempo discreto apresentado nesta subseção, considera-se um sistema descrito por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{E} \mathbf{w}(k); \quad (4.54)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (4.55)$$

sendo $\mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{v}(k)$ processos gaussianos, descorrelacionados, tais que

$$E\{\mathbf{w}(k)\} = 0;$$

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = 0;$$

$$E\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)\} = R_w;$$

$$E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} = R_v;$$

$$E\{\mathbf{w}(k)\mathbf{v}^T(k)\} = 0.$$

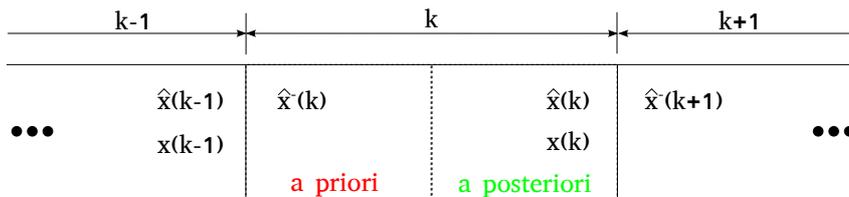
Considerando que o estado $\mathbf{x}(k)$ é não acessível, então se faz necessário estimá-lo através do estimador:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k); \quad (4.56)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k). \quad (4.57)$$

A filtragem em tempo discreto consiste em atualizar o valor do estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$, a partir de uma estimativa prévia $\hat{\mathbf{x}}^-(k)$ e da medição $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$, ambas tomadas no instante de tempo $k-1$, além da informação $\mathbf{y}(k)$, disponível no instante de tempo k . A estimativa $\hat{\mathbf{x}}^-(k)$ corresponde à aplicação da equação (4.56) em $k-1$, sendo então dada por: $\hat{\mathbf{x}}^-(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$. Para facilitar a compreensão, a Figura 29 dispõe as variáveis mencionadas anteriormente em janelas de tempo.

Figura 29 – Janelas de tempo com as estimativas e medições necessárias no filtro de Kalman.



Fonte: (GELB, 1974, pág. 110) com modificações

Nesse contexto, conforme apresentado por Gelb (1974, pág. 107), a busca por uma estimativa linear para $\hat{\mathbf{x}}(k)$, a partir das medições de $\hat{\mathbf{x}}^-(k)$ e de $\mathbf{y}(k)$, pode ser escrita por uma combinação linear desses elementos, sendo dada por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{K}'(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k) + \mathbf{K}(k)\hat{\mathbf{y}}(k). \quad (4.58)$$

Nesse contexto, duas medidas de erro dentro do mesmo instante de tempo são definidas:

$$\mathbf{e}^-(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k) - \mathbf{x}(k); \quad (4.59)$$

$$\mathbf{e}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k). \quad (4.60)$$

Ambas são erros de estimação. Entretanto, neste trabalho, a equação (4.59) é chamada erro de estimação *a priori* e a equação (4.60) é chamada simplesmente de erro de estimação. Assim, substituindo-se as equações (4.55), (4.59) e (4.60) na equação (4.58), tem-se a equação

$$\hat{\mathbf{e}}(k) = (\mathbf{K}'(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{C} - \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}'(k)\mathbf{e}^-(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{v}(k),$$

que, aplicando-se $E\{\cdot\}$ e considerando que $E\{\mathbf{e}^-(k)\} = E\{\mathbf{e}(k)\} = 0$ para que estimador seja não polarizado, então obrigatoriamente deve-se ter (GELB, 1974, pág. 107):

$$\mathbf{K}'(k) = \mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}. \quad (4.61)$$

Então, substituindo-se a equação (4.61) na equação (4.58), tem-se a expressão

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k) + \mathbf{K}(k) [\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}^-(k)], \quad (4.62)$$

que constitui a equação que se aplica para atualização do estado estimado do filtro de Kalman. Portanto, torna-se imprescindível que se obtenha também uma expressão para atualização do ganho $\mathbf{K}(k)$, chamado de ganho de Kalman.

Nesse contexto, deve-se lembrar que a ideia de otimização no estimador ótimo consiste em minimizar a covariância do erro de estimação dada por

$$\mathbf{P}(k) = E\{\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\}. \quad (4.63)$$

Assim, seguindo o princípio apresentado por Gelb (1974, pp. 108 e 109) se obtém

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v]^{-1}; \quad (4.64)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}^-(k), \quad (4.65)$$

sendo $\mathbf{P}^-(k)$ a covariância *a priori* do erro de estimação. Assim, a expressão (4.65) fornece uma forma de se atualizar $\mathbf{P}(k)$, conhecendo-se $\mathbf{P}^-(k)$. Portanto, é necessário que se obtenha também uma expressão para $\mathbf{P}^-(k)$. Assim, sendo $\mathbf{P}^-(k) = E\{\mathbf{e}^-(k)\mathbf{e}^{-T}(k)\}$, em que $\mathbf{e}^-(k)$ é dado pela equação (4.59), $\mathbf{x}(k)$ é dado pela equação (4.54) e

$$\mathbf{x}^-(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1),$$

então

$$\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T. \quad (4.66)$$

Em resumo, o procedimento completo relacionado ao filtro de Kalman, a cada iteração, pode ser descrito na sequência:

1. Calculam-se as variáveis *a priori*:

- $\mathbf{x}^-(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$;
- $\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T$;

2. Calcula-se o ganho de Kalman e atualizam-se as variáveis calculadas na etapa anterior:

- $\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v]^{-1}$;
- $\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k) + \mathbf{K}(k) [\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}^-(k)]$;
- $\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}^-(k)$;

3. Faz-se $k = k + 1$ e volta-se ao passo 1.

O mesmo argumento utilizado no problema do regulador ótimo quadrático em tempo discreto aplica-se a este caso, ou seja, o filtro de Kalman é descrito recursivamente, com incremento da variável temporal. Portanto, os passos acima podem se tornar ineficientes do ponto de vista da implementação prática, sendo desejável que se busque uma solução fechada para o ganho de Kalman \mathbf{K} , com um único valor constante.

As medidas de covariância consideradas na sequência de implementação anteriormente são definidas no mesmo instante de tempo k . Pode-se encontrar uma relação entre $\mathbf{P}(k)$ e $\mathbf{P}(k-1)$ por substituição das equações envolvidas, no entanto, ao substituir a equação (4.66) na equação (4.64), a manipulação matemática envolvida torna-se extensa. Uma relação mais fácil de se encontrar que relaciona a covariância do erro em dois instantes de tempo consecutivos pode ser encontrada considerando-se

$$\mathbf{P}^-(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T \quad (4.67)$$

Substituindo a equação (4.63) na equação (4.67), tem-se:

$$\mathbf{P}^-(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T - \mathbf{A}\mathbf{K}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{A}^T. \quad (4.68)$$

Substituindo agora a equação (4.64) na equação (4.68), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^-(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v]^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{A}^T; \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v]^{-1} \times \\ &\quad [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v] [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v]^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{A}^T; \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T - \bar{\mathbf{K}} [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v] \bar{\mathbf{K}}^T, \end{aligned} \quad (4.69)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{A}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T + R_v]^{-1}. \quad (4.70)$$

A equação (4.69) constitui a equação de Riccati em tempo discreto associada ao problema do filtro de Kalman (KAILATH; SAYED; HASSIBI, 2000, pág. 7). Se o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável e o sistema a ser controlado é detectável, então existe uma matriz de ganhos \mathbf{K}_g tal que os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_g\mathbf{C}$ tem parte real no interior do círculo de raio unitário. Assim, em regime permanente, $\mathbf{P}^-(k+1)$ e $\mathbf{P}^-(k)$ são iguais, podendo serem expressos simplesmente por \mathbf{P} , por exemplo, e a equação (4.69) é chamada de equação algébrica de Riccati (ARE). Neste caso, o valor do ganho de Kalman \mathbf{K} é dado pelo valor ótimo $\bar{\mathbf{K}}$ da equação (4.70), substituindo-se $\mathbf{P}^-(k)$ por \mathbf{P} .

4.2.3 LQG/LTR em tempo discreto

O algoritmo de recuperação de malha (LTR) é aplicado ao problema do LQG em tempo contínuo garantido pelo Teorema da Separação, conforme discutido na subseção (??). Entretanto, Anderson e Moore (1989, pág. 220) mencionam que o Teorema da Separação é também aplicável ao caso do tempo discreto, desde que se utilize informação do estado no instante de tempo atual com a informação disponível até o instante de tempo imediatamente anterior, ou seja, $\mathbf{x}(t|t-1)$ no lugar de $\mathbf{x}(t)$. De fato, ao se utilizar o bloco *ZOH* na discretização do sinal de controle e os valores das variáveis de interesse lidos a cada T_s instantes de tempo, tem-se essa restrição atendida. Entretanto, há que se destacar que a variável temporal em tempo discreto é descrita usualmente por k ao invés de t - reservado para a variável temporal em tempo contínuo - e, portanto, o estado $\mathbf{x}(t|t-1)$ é representado por $\mathbf{x}(k)$.

Dessa forma, considerando um sistema dado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}\mathbf{w}(k); \quad (4.71)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (4.72)$$

sendo $\mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{v}(k)$ processos aleatórios do tipo ruído branco, e covariâncias $R_w = E\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)\}$, $R_v = E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\}$. Assume-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável e o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável.

A solução do problema LQG é tomada primeiramente calculando-se o ganho ótimo da realimentação de estados \mathbf{K}_d . Assim, para o caso regulador a lei de controle é dada por:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_d\mathbf{x}(k). \quad (4.73)$$

Para o caso rastreador, convém observar se o modelo do sistema, dado pelas equações (4.71) e (4.72) possui integrador, a fim de garantir erro nulo em regime permanente no caso de referência do tipo degrau. A inclusão de um integrador pode ser incluída na equação

de um modelo conforme descrito na sequência. A ação integral consiste na atualização de um estado do sistema com a informação de erro do instante atual, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(k+1) &= \mathbf{x}_i(k) + e(k); \\ &= \mathbf{x}_i(k) + r(k) - y(k); \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$= \mathbf{x}_i(k) + r(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \quad (4.75)$$

Dessa forma, incluindo a equação (4.75) na equação (4.71), tem-se o modelo em estado aumentado dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(k), \quad (4.76)$$

em que os termos relacionados às variáveis estocásticas $w(k)$ e $v(k)$ foram removidos já que o problema de otimização é resolvido para o caso determinístico. De fato, o problema do regulador linear quadrático é resolvido considerando-se que todas as entradas externas são nulas, inclusive a referência $r(k)$ na equação (4.76). Portanto, definindo

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

o problema de otimização para o ganho de realimentação de estados pode ser resolvido a partir da equação (4.53) na subseção (4.2.1), considerando

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}'^T \mathbf{S} \mathbf{B}' + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{S} \mathbf{A}', \quad (4.77)$$

sendo \mathbf{S} a solução única da equação algébrica de Riccati:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}'^T \mathbf{S} \mathbf{A}' - \mathbf{A}'^T \mathbf{S} \mathbf{B}' [\mathbf{B}'^T \mathbf{S} \mathbf{B}' + \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{S} \mathbf{A}' + \mathbf{Q}. \quad (4.78)$$

Portanto, a lei de controle para o caso rastreador fica dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k); \\ &= -[\mathbf{K}_d \quad \mathbf{K}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix} + \mathbf{r}(k). \end{aligned} \quad (4.79)$$

O próximo passo consiste em encontrar o observador ótimo e estável, dado pelo filtro de Kalman. Porém, como não há necessidade de estimar o estado relacionado à ação integral, a equação do estimador fica dada por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{K}_{f_d}[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)], \quad (4.80)$$

lembrando que $\hat{\mathbf{x}}(k)$ corresponde à estimação do estado do sistema, $\mathbf{x}(k)$, no instante de tempo k e \mathbf{K}_{f_d} é o ganho de Kalman, calculado conforme apresentado na subseção (4.2.2),

reproduzido na sequência para facilitar a leitura. Assim, considerando o erro de estimação dado pela equação (4.60):

$$\mathbf{e}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k).$$

O problema é resolvido a partir da minimização da covariância do erro de estimação, dado pela equação (4.63):

$$\mathbf{P}(k) = E\{\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\}.$$

Este procedimento leva à obtenção da equação algébrica de Riccati, semelhante à equação (4.69), dada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T - \mathbf{K}_{f_d} [\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + R_v] \mathbf{K}_{f_d}^T.$$

sendo \mathbf{K}_{f_d} o ganho de Kalman na equação (4.80), dado por:

$$\mathbf{K}_{f_d} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + R_v]^{-1}.$$

Portanto, seguindo o raciocínio da seção ?? , o procedimento LQG/LTR deve adotar as matrizes de covariância dadas por

$$R_w = q^2\mathbf{B}\mathbf{B}^T; \tag{4.81}$$

$$R_v = \mathbf{I}, \tag{4.82}$$

sendo q um valor real positivo, tal que $q \rightarrow \infty$ a robustez do sistema é incrementada, garantido para sistemas de fase não-mínima. Para o caso de sistemas em tempo discreto, uma recuperação perfeita é possível se o sistema a ser controlado é de fase mínima e se $\det(\mathbf{C}\mathbf{B}) \neq 0$ (MACIEJOWSKI, 1985).

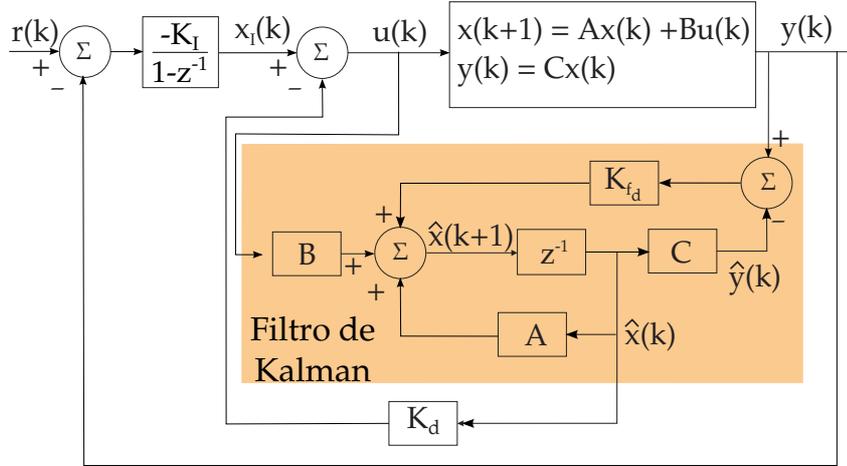
A Figura 30 apresenta um diagrama de blocos da estratégia de controle LQG/LTR com ação integral, do tipo rastreador. A partir desse arranjo, o problema regulador pode ser obtido fazendo-se $r(k) = 0$ e atribuindo-se condições iniciais não nulas ao sistema.

4.2.4 Proposta de uso do polinômio-T na sintonia do controle LQG

No capítulo 2 o conceito do polinômio-T foi abordado como ferramenta de incremento de robustez do sistema controlado. Apesar da abordagem ter sido aplicada a sistemas com atraso, o polinômio-T foi aplicado inicialmente para sistemas sem atraso, como pode-se verificar já no trabalho de Clarke, Mohtadi e Tuffs (1987) ou ainda nos trabalhos referenciais de Camacho e Bordons (2004) e Rossiter (2002), por exemplo.

A princípio, a abordagem de robustez no âmbito do controle robusto e do controle preditivo não parecem resguardar relação direta. Porém, o trabalho de Park, Han e

Figura 30 – Diagrama de blocos do controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor

Kwon (2008) mostra que o algoritmo GPC, quando se considera o polinômio-T, pode ser separado em um controlador de horizonte deslizante RHC (*Receding Horizon Controller*) e um filtro de Kalman em regime permanente.

Nesse contexto, surge a ideia de se aplicar o polinômio-T no algoritmo LQG, a fim de se analisar as características de robustez do sistema controlado. Entretanto, o modelo de sistema considerado no 2 é do tipo CARIMA, dado pela equação 2.66, que possui um integrador em sua equação descritiva. Porém, o algoritmo LQG tem o integrador incluído pelo aumento da ordem do sistema em espaço de estados, a fim de se obter o ganho da realimentação de estado, através do algoritmo LQR. Todavia, a etapa de estimação obtida através do filtro Kalman pode ser realizada sem a necessidade de se estimar o estado adicional incluído pelo integrador. Assim, o modelo mais adequado a se considerar no algoritmo LQG é o modelo CARMA que, com a inclusão do polinômio-T, é dado por:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + T(z^{-1})w(k), \quad (4.83)$$

em que

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}; \quad (4.84)$$

$$B(z^{-1}) = b_0z^{-1} + b_1z^{-2} + \dots + b_mz^{-n}, \quad (4.85)$$

são polinômios que descrevem o modelo, tal que $n = m + 1$. O termo $T(z^{-1})$ é um polinômio cujo posicionamento dos polos são caracterizados como parâmetro de projeto. Seguindo a metodologia apresentada no capítulo 2, define-se:

$$\begin{aligned} T(z^{-1}) &= (1 - \alpha z^{-1})^n; \\ &= 1 + t_1z^{-1} + t_2z^{-2} + \dots + t_nz^{-n}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Para que se possa aplicar o algoritmo LQG, se faz necessário escrever o modelo do sistema, dado pela equação (4.83), em espaço de estados. Assim, uma realização na forma canônica observável é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{E}w(k); \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + w(k),\end{aligned}$$

ou, de forma mais genérica,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{E}w(k); \quad (4.87)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}w(k), \quad (4.88)$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} t_1 - a_1 \\ t_2 - a_1 \\ \vdots \\ t_n - a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{F} = 1$ neste caso.

Considerando a presença do ruído branco $v(k)$ na saída do sistema, então as equações (4.87) e (4.88) são dadas por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{E}w(k); \quad (4.89)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}w(k) + v(k), \quad (4.90)$$

sendo $w(k)$ e $v(k)$ processos aleatórios com média nula, descorrelacionados entre si e covariâncias dadas por:

$$R_w = E\{w(k)w^T(k)\}; \quad (4.91)$$

$$R_v = E\{v(k)v^T(k)\}. \quad (4.92)$$

O modelo dado pelas equações (4.89) e (4.90), apesar de semelhante àquele dado pelas equações (4.54) e (4.55), não é exatamente o mesmo, já que a perturbação do estado $w(k)$ aparece também na saída. Portanto, mesmo que $w(k)$ e $v(k)$ sejam descorrelacionados, a perturbação total na saída $\xi(k) = w(k) + v(k)$ não pode ser considerada descorrelacionada de $w(k)$. Assim, a abordagem da subseção 4.2.2 não é adequada neste caso.

Porém, seguindo o mesmo princípio apresentado por Kailath, Sayed e Hassibi (2000, pp. 5 a 9), é possível chegar a uma expressão para o ganho de Kalman e a equação de Riccati associada, para o sistema dado pelas equações (4.89) e (4.90). Assim, considerando-se o estimador dado por

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{K}_{f_d}(y(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)). \quad (4.93)$$

Substituindo a equação (4.90) na equação (4.93), tem-se

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{F}w(k) + \mathbf{K}_{f_d}v(k).$$

Subtraindo essa equação da equação de estado (4.89) do sistema, tem-se então a expressão do erro de estimação $\mathbf{e}(k)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{x}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{F}w(k) + \mathbf{K}_{f_d}v(k) - \\ &\quad [\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{E}w(k)]; \\ \mathbf{e}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C})\mathbf{e}(k) + [(\mathbf{K}_{f_d}\mathbf{F} - \mathbf{E}) \quad \mathbf{K}_{f_d}] \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A partir dessa equação e considerando $\mathbf{P}(k) = E\{\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C})\mathbf{P}(k)(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C})^T + \\ &\quad [(\mathbf{K}_{f_d}\mathbf{F} - \mathbf{E}) \quad \mathbf{K}_{f_d}] \begin{bmatrix} R_w & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{f_d}\mathbf{F} - \mathbf{E})^T \\ \mathbf{K}_{f_d}^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Porém, em regime permanente $\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k)$ e a expressão da covariância fica escrita na forma algébrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{K}_{f_d}^T - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{K}_{f_d}^T + \\ &\quad (\mathbf{K}_{f_d}\mathbf{F} - \mathbf{E})R_w(\mathbf{K}_{f_d}\mathbf{F} - \mathbf{E})^T + \mathbf{K}_{f_d}R_v\mathbf{K}_{f_d}^T. \quad (4.94) \end{aligned}$$

O desenvolvimento da equação (4.94), seguindo os mesmos passos de Kailath, Sayed e Hassibi (2000, pp. 5 a 9), leva à equação

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T - \mathbf{M}(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{F}^T)^T + \\ &\quad (\mathbf{M} - \mathbf{K}_{f_d})(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + R_v + \mathbf{F}R_w\mathbf{F}^T)(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{f_d})^T, \quad (4.95) \end{aligned}$$

em que $\mathbf{M} = (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{F}^T)(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + R_v + \mathbf{F}R_w\mathbf{F}^T)^{-1}$. Para que os termos quadráticos não dominem a resposta sobre os termos lineares, então, para garantir a positividade de \mathbf{P} , deve-se ter $\mathbf{M} = \mathbf{K}_{f_d}$, portanto,

$$\mathbf{K}_{f_d} = (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{F}^T)(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + R_v + \mathbf{F}R_w\mathbf{F}^T)^{-1}. \quad (4.96)$$

A equação de Riccati é obtida substituindo-se a equação (4.96) de volta na equação (4.95), obtendo-se:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{E}^T - \left(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{F}^T\right) \left(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + R_v + \mathbf{F}R_w\mathbf{F}^T\right)^{-1} \left(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}R_w\mathbf{F}^T\right)^T. \quad (4.97)$$

Assim, pode-se resolver numericamente a equação algébrica de Riccati (4.97) para encontrar o valor \mathbf{P} e, em seguida, aplicar o resultado na equação (4.96) para encontrar o valor de \mathbf{K}_{f_d} .

É importante destacar que nessa abordagem, ao se modificar a posição do polo α do polinômio-T dado pela equação (4.86), modifica-se a matriz \mathbf{E} e, conseqüentemente, o ganho do filtro \mathbf{K}_{f_d} . Dessa forma, a modificação na matriz \mathbf{E} tem o efeito de reposicionar os polos do filtro de Kalman. Portanto, trata-se de um algoritmo LQG com sintonia dada pelo polinômio-T escolhido, razão pela qual é chamado neste trabalho de LQG-T.

A função de transferência do controlador LQG resultante não possui termos diferentes daquela obtida para o caso em tempo contínuo dada pelas equações (??) e (??). Nesse contexto, substituindo-se $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_d\hat{\mathbf{x}}(k)$ na equação (4.93), então, para o caso regulador, a função de transferência do bloco compensador pode ser obtida a partir do modelo em espaço de estados:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_d - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}_{f_d}y(k); \quad (4.98)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_d\hat{\mathbf{x}}(k). \quad (4.99)$$

Quando se inclui a ação integral, então se deve substituir a lei de controle $\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{K}_d \ \mathbf{K}_i] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix}$ na equação (4.93), levando a:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_d - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{K}_{f_d}y(k). \quad (4.100)$$

Considerando o problema rastreador, então pode-se associar as equações (4.100) e (4.74), a fim de se obter o modelo em espaço de estados aumentado:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_d - \mathbf{K}_{f_d}\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_i \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{f_d} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{K}_d \ \mathbf{K}_i] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

a partir do qual pode-se obter a função de transferência do controlador LQG associada ao caso rastreador e com ação integral.

Nesse contexto, percebe-se que a matriz \mathbf{E} não modifica os polos do controlador diretamente, mas o faz através da modificação do ganho de Kalman $\mathbf{K}_{\mathbf{f}_a}$. Dessa forma, considerando que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável e o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável, então o sistema em malha fechada é estável.

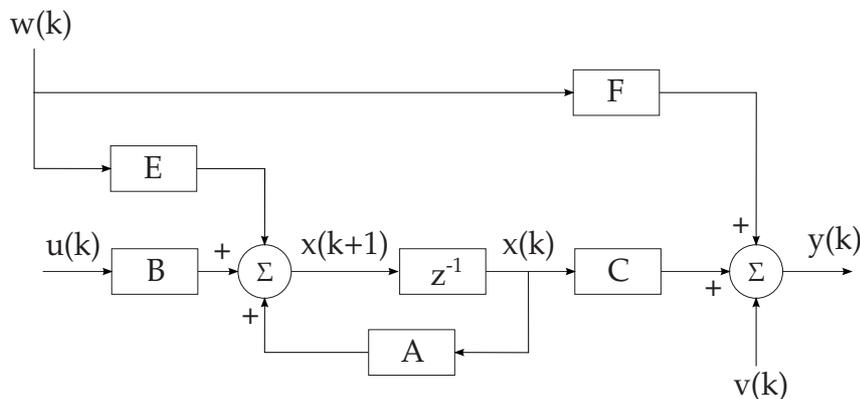
Portanto, o parâmetro de sintonia do controlador LQG-T passa a ser o posicionamento do polo α do polinômio-T. O capítulo 2, traz uma discussão sobre esse posicionamento, em que se apresentaram resultados satisfatórios de rejeição a perturbação quando se considera a presença de polos complexos conjugados. No caso do controlador aqui considerado esse posicionamento só não será possível se o sistema for de primeira ordem, uma vez que a ordem do polinômio-T é igual à ordem do polinômio $A(z^{-1})$. Em todos os demais casos é possível que se considere

$$T(z^{-1}) = (1 - \alpha z^{-1})^n, \text{ tal que } \alpha = \rho e^{\pm j\theta}, \quad (4.103)$$

sendo n a ordem do polinômio $A(z^{-1})$ e α é dado em coordenadas polares com amplitude ρ e ângulo θ . Quanto mais próximo ρ está do polo dominante do processo, mais lentamente se dá a rejeição a perturbações, já que nesse caso $\mathbf{E} \rightarrow 0$.

Por outro lado, pode-se representar as equações (4.89) e (4.90) na forma de diagrama de blocos, conforme mostrado na Figura 31. Observando-se essa figura, percebe-se

Figura 31 – Diagrama de blocos do controlador de um sistema de controle em espaço de estados baseado no modelo CARIMA.



Fonte: Autor

que as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{E} podem ser vistas como vetores de espaços vetoriais relacionados a $u(k)$ e $w(k)$. Assim, a influência desses sinais sobre o estado $\mathbf{x}(k)$ é minimizada se

$$\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{B} \rightarrow 0. \quad (4.104)$$

A equação (4.104) estabelece uma condição possível de sintonia do polinômio-T e, portanto, um critério objetivo. Porém, o incremento no valor de θ , fixando-se ρ , também acelera a resposta, então outra possibilidade de sintonia pode ser considerar ρ igual ao polo

rápido do estável do processo (se existir), e variar θ até que se obtenha o comportamento desejado. Se a escolha de ρ já torna a resposta suficientemente rápida, então nesse caso pode-se fazer $\theta = 0$ e aumentar o valor de ρ . Na sequência apresentam-se dois exemplos de aplicação dessa abordagem, com suas respectivas sintonias. Os resultados são comparados com o algoritmo LQG/LTR a fim de fornecer um parâmetro de análise.

Exemplo 4.1. Controle do sistema integrador duplo

Este sistema é descrito pela equação:

$$G(s) = \frac{1}{s^2},$$

discretizada com período de amostragem $T_s = 0,1$ s, resultando no modelo discreto:

$$G(z^{-1}) = \frac{0,005z^{-1} + 0,005z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}.$$

O problema do ganho de realimentação de estados é resolvido através do algoritmo LQR, considerando-se $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{R} = 1$. A estimação de estados é realizada através do filtro de Kalman, cujo ganho é obtido seguindo o procedimento mostrado na subseção 4.2.4. Inicialmente o polinômio-T considerado tem polo $\alpha = 0.99$, posicionado bastante próximo do círculo de raio unitário já que o sistema não apresenta polos estáveis, sendo dado por:

$$T(z^{-1}) = (1 - 0.99z^{-1})^2.$$

Em seguida, considera-se o posicionamento para o caso de polos complexos conjugados, em que se faz $\alpha = 0.99 \angle \pm 20^\circ$, sendo dado por:

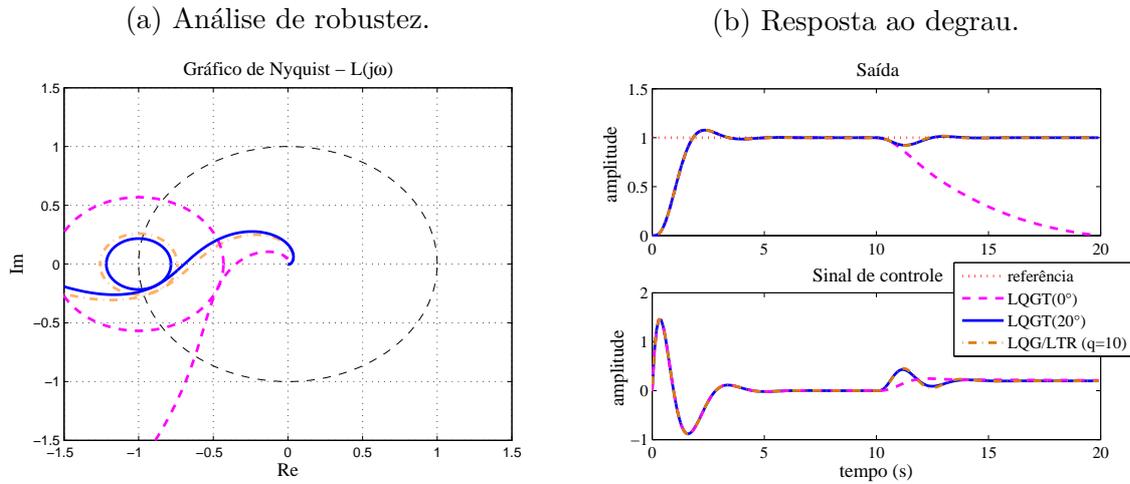
$$T(z^{-1}) = 1 - 1.86z^{-1} + 0.98z^{-2}.$$

Os resultados são comparados com o algoritmo LQG/LTR, aplicado em tempo discreto, de acordo com a subseção 4.2.3, sintonizado com $q = 10$.

As Figuras 32a e 32b mostram os resultados obtidos para os controladores considerados. A resposta ao degrau para o caso do controlador LQGT com ângulo polo $\alpha = 0.99 \angle 0^\circ$, não significa instabilidade. De fato, a perturbação é rejeitada, porém muito lentamente. Porém, ao se modificar apenas a componente complexa conjugada de α , ou seja, mantém-se o módulo em 0,99 mas com ângulo $\pm 20^\circ$, consegue-se obter resultado semelhante ao do controlador LQG/LTR com $q = 10$.

A Tabela 4 apresenta medidas adicionais de robustez dos controladores considerados. A medida $\|S\|_\infty^{-1}$ é a inversa da norma infinita da função de sensibilidade e corresponde ao raio dos respectivos discos de robustez mostrados na Figura 32a. As medidas **MG** e **MF** são as margens de ganho e fase, respectivamente. As medidas ω_f e ω_g são as frequências de cruzamento de fase e ganho, respectivamente.

Figura 32 – Análise do sistema integrador do exemplo 4.1.



Fonte: Autor.

Fonte: Autor.

Tabela 4 – Índices adicionais de robustez do exemplo 4.1.

Controlador	MG(dB)	ω_f (rad/s)	MF(dB)	ω_g (rad/s)	$\ S\ _{\infty}^{-1}$
LQG-T ($\alpha = 0.99 \angle 0^\circ$)	2,87	2,68	51,53	1,05	0,57
LQG-T ($\alpha = 0.99 \angle 20^\circ$)	1,44	3,62	13,20	2,40	0,22
LQG/LTR ($q = 10$)	1,58	3,88	15,61	2,38	0,26

Fonte: Autor.

Exemplo 4.2. Controle de um sistema instável e de fase não mínima

Este sistema é descrito pela equação (LIN, 2007, pág. 275):

$$G(s) = \frac{3s^3 + 3s^2 - 5s - 9}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 7} = \frac{(s - 1,48)(s + 1,24 \pm j0,69)}{(s + 2,32)(s + 1,6)(s - 0,46 \pm j1,3)},$$

discretizada com período de amostragem $T_s = 0,06$ s, resultando no modelo discreto:

$$G(z^{-1}) = \frac{0,17 - 0,50z^{-1} - 0,49z^{-2} - 0,16z^{-3}}{1 - 3,83z^{-3} + 5,49z^{-2} - 3,50z^{-1} + 0,84}.$$

O problema do ganho de realimentação de estados é resolvido através do algoritmo LQR, considerando-se $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{R} = 1$. A estimação de estados é realizada através do filtro de Kalman, cujo ganho é obtido seguindo o procedimento mostrado na subseção 4.2.4. Inicialmente o polinômio-T considerado tem polo $\alpha = 0.87$, coincidente com o polo rápido do processo, sendo dado por:

$$T(z^{-1}) = (1 - 0,87z^{-1})^4.$$

Em seguida, considera-se o posicionamento para o caso de polos complexos conjugados, em que se faz $\alpha = 0,87 \angle \pm 7^\circ$, sendo dado por:

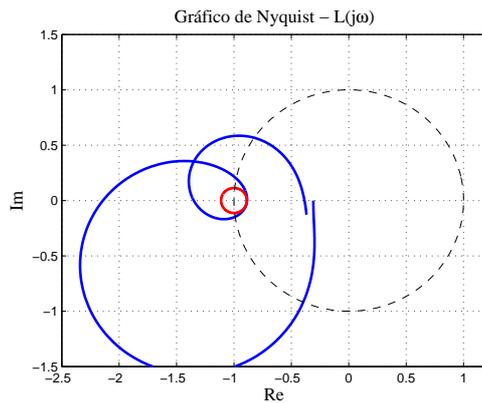
$$T(z^{-1}) = 1 - 3.27z^{-1} + 4.19z^{-2} - 2.48z^{-3} + 0.57z^{-4}.$$

Os resultados são comparados com o algoritmo LQG/LTR, aplicado em tempo discreto, de acordo com a subseção 4.2.3, sintonizado com $q = 100$.

As Figuras 33a, 33b e 33c mostram os resultados de robustez obtidos para os controladores considerados. A Figura 34 apresenta o resultado da resposta temporal.

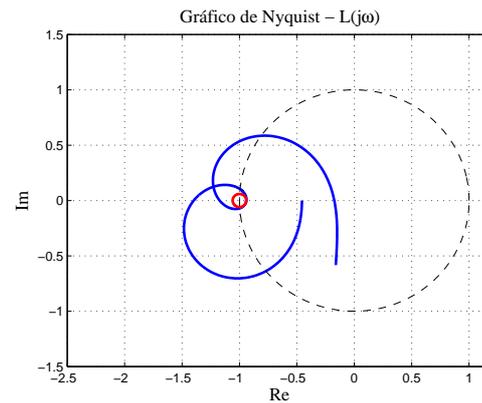
Figura 33 – Análise de robustez do sistema instável e de fase não-mínima do exemplo 4.2.

(a) LQG-T: $\theta = 0^\circ$.



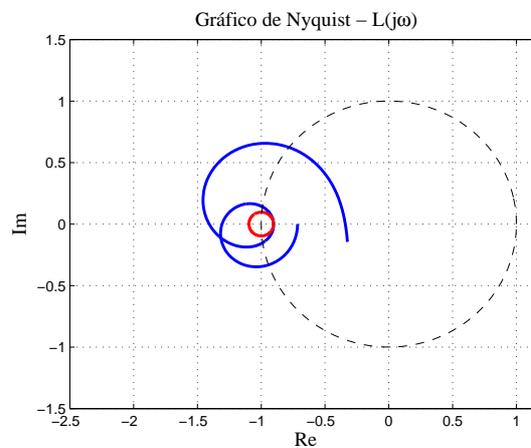
Fonte: Autor.

(b) LQG-T: $\theta = 7^\circ$.



Fonte: Autor.

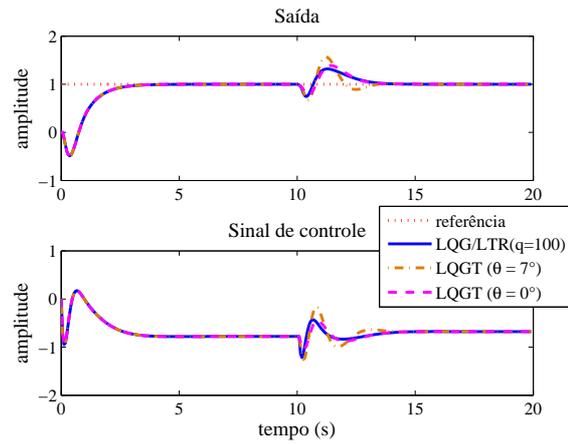
(c) LQG/LTR: $q = 100$.



Fonte: Autor.

A Tabela 5 apresenta medidas adicionais de robustez dos controladores considerados. A medida $\|S\|_\infty^{-1}$ é a inversa da norma infinita da função de sensibilidade e corresponde ao raio dos respectivos discos de robustez mostrados nas Figuras 33a a 33c. As medidas **MG** e **MF** são as margens de ganho e fase, respectivamente. As medidas ω_f e ω_g são as frequências de cruzamento de fase e ganho, respectivamente.

Figura 34 – Resposta temporal do sistema instável e de fase não-mínima do exemplo 4.2.



Fonte: Autor.

Tabela 5 – Índices adicionais de robustez do exemplo 4.2.

Controlador	MG(dB)	ω_f (rad/s)	MF(dB)	ω_g (rad/s)	$\ \mathbf{S}\ _\infty^{-1}$
LQG-T ($\alpha = 0.87\angle 0^\circ$)	1,13	4,95	8,43	2,83	0,11
LQG-T ($\alpha = 0.87\angle 7^\circ$)	1,06	5,18	4,04	3,22	0,06
LQG/LTR ($q = 100$)	1,10	6,53	8,05	12,56	0,10

Fonte: Autor.

5 CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS PARA SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE

Neste capítulo, o atraso de transporte é abordado sob a ótica de variáveis de estado, em tempo discreto. A seção 5.1 apresenta as abordagens comumente utilizadas para se incluir o atraso em espaço de estados. A seção 5.2 apresenta o uso de uma estrutura de predição, afim de aplicar o controle LQG/LTR. Por fim, observa-se que o polinômio-T, conforme aplicado no capítulo 4, pode ser aplicado também para o caso de sistemas com atraso.

5.1 Atraso de transporte em espaço de estados

Nesta seção, apresentam-se as abordagens utilizadas para lidar com o atraso de transporte. A subseção 5.1.1 apresenta uma representação na qual o atraso é incluído por aumento da ordem, ou seja, aumento do número de estados do sistema. Na subseção 5.1.2 discute-se a representação mais voltada para predição do estado.

5.1.1 Representação implícita: estado aumentado

No âmbito de sistemas descritos por funções de transferência, o atraso de transporte é dado por um termo exponencial, tanto no tempo contínuo quanto no tempo discreto. Isso ocorre porque funções de transferência são uma representação do sistema no domínio da frequência, conforme discutido no capítulo 2. Porém, sistemas em espaço de estados são descritos no tempo, contínuo ou discreto e, portanto, o atraso de transporte não é representado por um único termo. Assim, um sistema estritamente próprio e com atraso de transporte d pode ser escrito em variáveis de estado pelas equações:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k - d); \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \quad (5.2)$$

$$(5.3)$$

onde d é um inteiro não negativo, $d = 1, 2, \dots$. Porém, esse modelo fornece informação da saída $y(k)$ quando sujeito à entrada $u(k - d)$. Entretanto, em $k - d + 1$ a saída $y(k + 1)$ será da por uma parcela que corresponde ao efeito da entrada $u(k - d + 1)$ mais o efeito da entrada $u(k - d)$. Portanto, a representação dada pelas equações (5.1) e (5.2) explica o comportamento do sistema quando se conhecem as variáveis nos instante de tempo terminais. Entretanto, a dinâmica interna só será completamente conhecida se houver descrição de estados intermediários entre o instante de tempo $k - d$ e k .

Uma ideia simples e intuitiva, consiste em incorporar os sinais $\mathbf{u}(k-1)$, $\mathbf{u}(k-2)$, \dots , $\mathbf{u}(k-d)$ como estados adicionais do sistema. Então, pode-se escrever o sistema na forma de espaço de estados aumentado, encontrado em (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k-d+1) \\ \mathbf{u}(k-d+2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-d) \\ \mathbf{u}(k-d+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix} u(k). \quad (5.4)$$

Apesar de simples e eficaz, essa representação apresenta um inconveniente: a ordem das matrizes cresce com aumento do atraso. Isso pode se tornar um problema quando o algoritmo de controle utiliza métricas computacionais tais que o uso de matrizes de ordem elevada aumentem significativamente o esforço computacional.

Um problema semelhante foi encontrado ao se tentar aplicar uma estratégia de controle baseada em LMIs a um motor de relutância variável. Neste caso, a planta não possui atraso, mas a solução *online* do conjunto de LMIs é inviável. A solução foi, então, calcular os ganhos *offline* da realimentação e repassar ao controlador embarcado em DSP apenas os valores do ganho de realimentação (ALMEIDA et al., 2013).

5.1.2 Compensação explícita do atraso

Considerando um sistema com atraso, a aplicação do sinal de controle $\mathbf{u}(k-d)$ terá efeito somente na saída $\mathbf{y}(k)$, ou seja, após d amostras, em tempo discreto. Nesse contexto, Santos et al. (2012) citam uma ideia discutida por Rao, Wright e Rawlings (1998), e mencionam que um modelo de predições pode ser encontrado aplicando-se a equação (5.1) recursivamente, conforme apresentado na sequência

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-d); \\ \mathbf{x}(k+2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-d+1); \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-d) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-d+1); \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k+n) &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-d) + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-d+1) + \\ &\quad \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-d+n-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-d+n-1), \end{aligned}$$

daí, pode-se escrever

$$\mathbf{x}(k+d) = \mathbf{A}^d\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^d [\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-j)]. \quad (5.5)$$

A equação (5.5) fornece uma estimativa do estado $\mathbf{x}(k)$ no instante de tempo $k+d$, ou seja, uma predição d amostras após o instante de tempo atual. Essa representação apresenta a vantagem de que todas as matrizes envolvidas tem as mesmas dimensões das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} do sistema. Mesmo o termo do somatório, que envolve matrizes diferentes para cada iteração, pode ser implementado facilmente através de um laço de repetição simples e com variáveis do sinal de entrada que dependem apenas de amostras passadas ao instante k ($\mathbf{u}(k-1)$, $\mathbf{u}(k-2)$, \dots , $\mathbf{u}(k-d)$). Além disso, a lei de formação do modelo de predição é dado por uma expressão que depende explicitamente do atraso d .

5.1.3 Predição explícita do atraso

Nesta subseção discute-se, resumidamente, o preditor proposto por (SANTOS et al., 2012), o qual oferece uma estimativa de estado d amostras à frente do instante de tempo atual k , em sistemas com atraso de transporte. Nesse contexto, considera-se um sistema com atraso de transporte tem modelo em espaço de estados dado pela equação:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-d) + \mathbf{w}(k); \quad (5.6)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (5.7)$$

onde $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ e $\mathbf{u}(k)$ são o estado, a saída e a entrada, respectivamente; $\mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{v}(k)$ são processos aleatórios gaussianos com média nula; a variável k indica o instante de tempo atual em tempo discreto; e d é um inteiro não negativo que representa o atraso nominal ou atraso de transporte. Assim como no caso sem atraso, considera-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável e o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável.

O estado predito do sistema dado pelo modelo da equação 5.6, pode ser descrito por:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \tilde{\mathbf{w}}(k), \quad (5.8)$$

onde o símbolo $\tilde{}$ denota a respectiva variável, escrita d amostras à frente, com informação disponível até o instante de tempo k , ou seja,

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k+d|k); \quad (5.9)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{y}(k+d|k). \quad (5.10)$$

Deve-se observar que $\tilde{\mathbf{w}}(k)$ corresponde ao efeito da perturbação $\mathbf{w}(k)$ sobre o estado predito $\tilde{\mathbf{x}}(k)$.

O termo $\tilde{\mathbf{w}}(k)$ pode ser isolado na equação (5.8), sendo então dado por:

$$\tilde{\mathbf{w}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k). \quad (5.11)$$

Entretanto, esse modelo de perturbações depende da descrição do estado d amostras no futuro ($\tilde{\mathbf{x}}(k)$). É preciso, então, que o modelo de perturbações seja escrito em função de $\mathbf{x}(k)$. Assim, deve-se observar que:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}^d \mathbf{x}(k+1) + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-j+1). \quad (5.12)$$

Portanto, substituindo as equações (5.5) e (5.12) na equação (5.11) tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(k) &= \mathbf{A}^d \mathbf{x}(k+1) + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-j+1) - \dots \\ &\quad \mathbf{A} \left[\mathbf{A}^d \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-j) \right] - \mathbf{B} \mathbf{u}(k); \\ &= \mathbf{A}^d \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{u}(k-2) + \dots \\ &\quad \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-d+1) - \dots \\ &\quad \mathbf{A}^{d+1} \mathbf{x}(k) - \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-1) - \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{u}(k-2) + \dots \\ &\quad - \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-d+1) - \mathbf{A}^d \mathbf{B} \mathbf{u}(k-d) - \mathbf{B} \mathbf{u}(k); \\ &= \mathbf{A}^d [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A} \mathbf{x}(k) - \mathbf{B} \mathbf{u}(k-d)]. \end{aligned}$$

Porém, a partir da equação (5.6) tem-se $\mathbf{w}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A} \mathbf{x}(k) - \mathbf{B} \mathbf{u}(k-d)$. Daí,

$$\tilde{\mathbf{w}}(k) = \mathbf{A}^d \mathbf{w}(k). \quad (5.13)$$

Todavia, ao se manipular com variáveis preditas não se tem certeza sobre o quão precisa é a estimativa. Dessa forma, é conveniente que se defina um sinal de erro associado à predição, chamado erro de predição, dado por:

$$\mathbf{e}_p(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k-d). \quad (5.14)$$

A equação (5.14) pode ser interpretada como o erro que se comete ao se tentar escrever a variável de estado $\mathbf{x}(k)$, d amostras no futuro. Observa-se que $\tilde{\mathbf{x}}(k-d)$ corresponde à estimativa de predição do estado no instante tempo atual, sendo dada por:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k-d) = \mathbf{A}^d \mathbf{x}(k-d) + \sum_{j=1}^d [\mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-j-d)]. \quad (5.15)$$

A substituição da equação (5.15) na equação (5.14) não leva a uma expressão simplificada do erro de predição, porque depende do estado do sistema em diferentes instantes de tempo: k e $k-d$. Entretanto, pode-se encontrar uma expressão do estado $\mathbf{x}(k)$ em função de seus valores atrasados, $\mathbf{x}(k-d)$, aplicando-se recursivamente a equação (5.6), sendo dada por:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^d \mathbf{x}(k-d) + \sum_{j=1}^d [\mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-j-d)] + \sum_{j=1}^d [\mathbf{A}^{j-1} \mathbf{w}(k-j)]. \quad (5.16)$$

fim de se obter um preditor-observador para aplicação às técnicas de controle ótimo foi submetido à revista *DYNA*.

5.2.1 Compensação explícita do atraso para o controle ótimo

No que diz respeito a sistemas de controle ótimo, é comum que se considere um estimador de estados. Considerando-se o sistema com atraso descrito pela equação (5.6), pode-se escrever um estimador dado por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-d) + \hat{\mathbf{w}}(k), \quad (5.19)$$

sendo $\hat{\mathbf{w}}(k)$ uma estimativa da perturbação de estado $\mathbf{w}(k)$.

Assim como no caso da subseção 5.1.2 em que se aplicou a equação (5.1) recursivamente, pode-se obter uma predição de estado estimado aplicando-se recursivamente a equação (5.19). Neste caso, a princípio deseja-se obter um modelo analítico do estado sem considerar o efeito das perturbações $\mathbf{w}(k)$, e, portanto, o modelo predito que se obtém é dado por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+d) = \mathbf{A}^d \hat{\mathbf{x}}(k) + \sum_{j=1}^d \mathbf{B}\mathbf{u}(k-j). \quad (5.20)$$

Assim, convém que se defina

$$\mathbf{x}'(k) = \hat{\mathbf{x}}(k+d|k); \quad (5.21)$$

$$\mathbf{y}'(k) = \hat{\mathbf{y}}(k+d|k). \quad (5.22)$$

Portanto, aplicando as equações (5.21) e (5.20) ao observador descrito pela equação (5.19), obtém-se o modelo do preditor-observador dado por:

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}'(k), \quad (5.23)$$

sendo $\mathbf{w}'(k)$ o efeito da perturbação estimada $\hat{\mathbf{w}}(k)$ sobre o estado observado e predito $\mathbf{x}'(k)$. Assim, a equação (5.13) torna-se

$$\mathbf{w}'(k) = \mathbf{A}^d \hat{\mathbf{w}}(k). \quad (5.24)$$

A perturbação de estado $\mathbf{w}(k)$ na equação (5.6) é definido sob a ótica dos conjuntos invariantes no trabalho de Santos et al. (2012) para se obter a estrutura apresentada na Figura 35. Por outro lado, observando-se a ótica do controle ótimo, propõe-se aqui que considere-se

$$\hat{\mathbf{w}}(k) = \mathbf{K}_e[\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)], \quad (5.25)$$

sendo $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)$ e \mathbf{K}_e o ganho do estimador, que pode ser encontrado a partir de qualquer técnica conhecida, como por exemplo, alocação de polos ou estimação otimizada do erro de predição (filtro de Kalman). Deve-se observar, entretanto, que essa consideração já leva em conta o fato de que $\hat{\mathbf{w}}(k)$ é limitado em amplitude e que o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) do sistema sem atraso é observável. Assim, garante-se que os polos de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ permanecem no interior do círculo de raio unitário.

Entretanto, faz-se necessário garantir que $\mathbf{w}'(k)$ no preditor-observador dado pela equação (5.23) também seja limitado em amplitude. Logo, deve-se considerar o erro de predição descrito pela equação (5.14), para a estrutura do preditor-observador, o qual será dado por:

$$\mathbf{e}'_p(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}'(k-d). \quad (5.26)$$

Por outro lado, adaptando-se a equação (5.17) ao preditor-observador obtém-se a expressão do erro de predição-estimação dada por:

$$\mathbf{e}'_p(k) = \hat{\mathbf{w}}(k-1) + \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}(k-2) + \dots + \mathbf{A}^{d-1}\hat{\mathbf{w}}(k-d). \quad (5.27)$$

Neste caso, a equação (5.23) define o preditor cuja estrutura é mostrada na Figura 36.

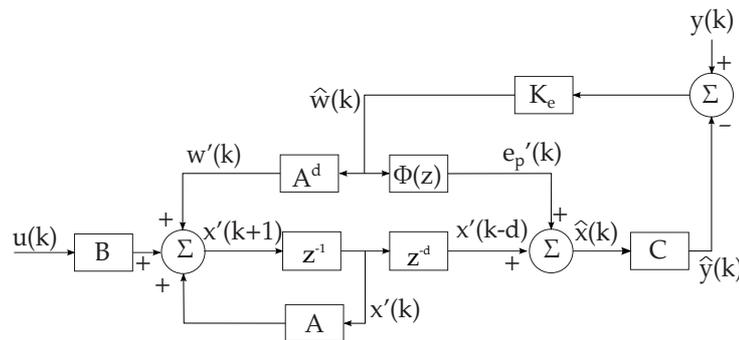


Figura 36 – Estrutura do preditor-observador para a abordagem do controle ótimo.

É importante destacar que, de acordo com a equação (5.27), este erro depende apenas de valores passados da perturbação estimada $\hat{\mathbf{w}}(k)$, que pode ser escrita no domínio- z pela expressão

$$\mathbf{E}'_p(z) = \mathbf{\Phi}(z)\hat{\mathbf{W}}(z), \quad (5.28)$$

em que

$$\mathbf{\Phi}(z) = \mathbf{I}z^{-1} + \mathbf{A}z^{-2} + \dots + \mathbf{A}^{j-1}z^{-d}. \quad (5.29)$$

Portanto, escrevendo-se a equação (5.26) no domínio- z e levando-se em consideração as equações (5.29) e (5.28), tem-se

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{E}'_p(z) + \mathbf{X}'(z)z^{-d}. \quad (5.30)$$

Deve-se observar que a equação (5.29) define um filtro FIR, que é sempre estável, cuja entrada é dada pela equação (5.25). Dessa forma, se o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável e os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ tem parte real negativa, então $\hat{\mathbf{w}}(k)$ será um sinal limitado em amplitude. Portanto, o termo $\mathbf{E}'_p(z) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, garantindo assim, a convergência do estado predito $\mathbf{x}'(k)$.

Substituindo-se a equação (5.25) na equação (5.24) tem-se $\mathbf{w}'(k) = \mathbf{A}^d \mathbf{K}_e [\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)]$, ou seja, o efeito do erro de estimação sobre o estado predito $\mathbf{x}'(k)$ depende da saída do sistema e do atraso d . Assim, quando considera-se um único atraso d , como no caso de sistemas SISO, então não ha necessidade de observações adicionais para se obter $\mathbf{w}'(k)$ além das descritas anteriormente.

Por outro lado, quando considera-se um sistema MIMO quadrado de ordem n com múltiplos atrasos, tem-se uma matriz de transferência dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(z) \\ \mathbf{Y}_2(z) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}z^{-d_{11}} & G_{12}z^{-d_{12}} & \dots & G_{1n}z^{-d_{1n}} \\ G_{21}z^{-d_{21}} & G_{22}z^{-d_{22}} & \dots & G_{2n}z^{-d_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}z^{-d_{n1}} & G_{n2}z^{-d_{n2}} & \dots & G_{nn}z^{-d_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(z) \\ \mathbf{U}_2(z) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n(z) \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Neste caso, cada saída $\mathbf{Y}_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$ é descrita pela combinação linear das funções de transferência $G_{ij}z^{-d_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Assim, o sistema que deseja-se controlar é descrito para os casos em que $i = j$, enquanto os casos $i \neq j$ descrevem funções de transferência que relacionam a saída desejada com as demais entradas e, portanto, podem ser vistas como “perturbações”. Portanto, para o caso do controle multivariável, considera-se a perturbação que ocorre na diagonal principal, ou seja

$$\mathbf{w}'(k) = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}'_i(k),$$

sendo

$$\mathbf{w}'_i(k) = \mathbf{A}^{d_{ii}} \mathbf{K}_e [y_i(k) - \hat{y}_i(k)]. \quad (5.32)$$

Observando-se a equação (5.32) fica claro que a técnica proposta leva em consideração o atraso de cada saída que deseja-se controlar, ou seja, não há necessidade de se considerar um modelo rápido, como no caso do FSP.

5.2.2 O Teorema da separação para o preditor-observador

O estado predito dado pela equação (5.23) depende da predição de perturbações $\mathbf{w}'(k)$ que, como mencionado anteriormente, é o efeito da perturbação estimada $\hat{\mathbf{w}}(k)$ sobre o estado futuro estimado $\mathbf{x}'(k)$. Entretanto, o estado estimado é definido pela equação

(5.25), que se aplica ao instante de tempo $k + d$. Assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{w}'(k) &= \mathbf{K}_e[\tilde{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{y}'(k)]; \\ &= \mathbf{K}_e\mathbf{C}[\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}'(k)]; \\ &= \mathbf{K}_e\mathbf{C}[\mathbf{x}(k + d) - \hat{\mathbf{x}}(k + d)],\end{aligned}\tag{5.33}$$

em que $\mathbf{x}(k + d)$ e $\hat{\mathbf{x}}(k + d)$ são dados pelas equações (5.19) e (5.20), respectivamente. Logo, substituindo-se a equação (5.33) na equação (5.23), o estado predito é dado por

$$\mathbf{x}'(k + 1) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k),\tag{5.34}$$

o qual é estável se os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ localizam-se no interior do círculo de raio unitário. Essa é uma conclusão importante para a estrutura do preditor-observador considerado porque se $\hat{\mathbf{x}}(k + d)$ tem convergência garantida, então $\hat{\mathbf{x}}(k)$ também terá, de acordo com a equação (5.30).

O problema da estimação de estado observado anteriormente mostra que a variável $\mathbf{x}'(k)$ dada pela equação (5.34) é uma predição adequada do estado estimado, d amostras no à frente. Apesar disso, não pode-se considerar uma lei de controle de realimentação desse estado predito se o erro de predição

$$\tilde{\mathbf{e}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}'(k)\tag{5.35}$$

não é convergente (tende a zero quando $k \rightarrow \infty$).

Por outro lado, o sistema que deseja-se controlar é dado pelo modelo de predição

$$\mathbf{x}'(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k).\tag{5.36}$$

Porém, a equação (5.35) pode ser reescrita a fim de obter-se

$$\tilde{\mathbf{e}}(k + 1) = \tilde{\mathbf{x}}(k + 1) - \mathbf{x}'(k + 1),$$

neste caso, a substituição das equações (5.36) e (5.34) na equação acima leva a

$$\tilde{\mathbf{e}}(k + 1) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{e}}(k)\tag{5.37}$$

Assim, considerando-se uma lei de controle do tipo

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_c\mathbf{x}'(k),\tag{5.38}$$

tem-se o caso regulador aplicado à equação (5.36), o que permite escrever

$$\mathbf{x}'(k + 1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}_c\tilde{\mathbf{e}}(k).\tag{5.39}$$

Portanto, pode-se analisar o comportamento em malha fechada unindo-se as equações (5.37) e (5.39), levando à equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'(k+1) \\ \tilde{\mathbf{e}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_c & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(k) \\ \tilde{\mathbf{e}}(k) \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Aqui, deve-se observar que o ganho do estimador na equação (5.25) é aplicado às medições tomadas no instante de tempo k , enquanto a equação (5.38) é uma lei de controle que realimenta a estimativa futura do estado no instante de tempo $k + d$. Entretanto, observando-se a equação (5.40) percebe-se que ela define o princípio da Separação aplicado ao preditor-observador da Figura 36, ou seja, os polos do estimador e da lei de controle podem ser alocados separadamente. A equação (5.39) mostra, ainda, que o sistema controlado é estável se os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}_c$ localizam-se no interior do círculo de raio unitário, ou seja, se o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) do sistema sem atraso é controlável. Portanto, o ganho de realimentação \mathbf{K}_c que se vê na equação (5.38) pode ser encontrado através de qualquer método conhecido, como por exemplo, alocação de polos ou realimentação otimizada do estado (obtida a partir do problema do regulador linear quadrático - LQR).

5.2.3 Diagrama esquemático em malha fechada

O preditor-observador mostrado na Figura 36 pode ser visto como uma estrutura que fornece uma predição confiável $\mathbf{x}'(k)$ da estimação $\hat{\mathbf{x}}(k)$ do estado do processo $\mathbf{x}(k)$. À luz disso, a aplicação da lei de controle dada pela equação (5.38) estabiliza o sistema com atraso, se o sistema sem atraso é controlável.

Por outro lado, observando-se atentamente a estrutura do preditor de Smith tradicional, mostrado na Figura 37, percebe-se que a saída do sistema, considerada na malha de realimentação, é dada por

$$y_r(k) = y(k) - \tilde{y}(k-d) + \tilde{y}(k).$$

aplicando-se a representação em espaço de estados a essa equação, pode-se escrever

$$y_r(k) = y(k) + \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{x}}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k-d)]. \quad (5.41)$$

Neste caso, as variáveis do lado direito da equação (5.41) podem ser obtidas pelo preditor-observador descrito na subseção 5.2.1, como pode ser visto na Figura 36.

Porém, a fim de obter-se um diagrama de blocos para o método de controle proposto, pode-se substituir as equações (5.24), (5.25) e (5.38) na equação (5.23), levando o estado predito a ser dado por:

$$\mathbf{x}'(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_c)\mathbf{x}'(k) + \mathbf{A}^d\mathbf{K}_e [y(k) - \hat{y}(k)]. \quad (5.42)$$

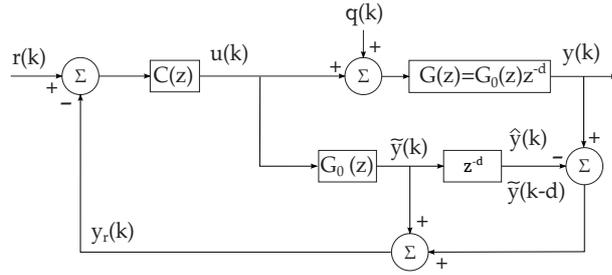


Figura 37 – Estrutura do preditor de Smith em tempo discreto considerando a nomenclatura utilizada no preditor-observador.

Para o caso do problema rastreador (servo), pode-se escrever o sinal de controle o sinal de controle com a adição do estado relacionado ao integrador $\mathbf{x}_i(k)$, sendo então dado por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}'(k) - \mathbf{K}_i \mathbf{x}_i(k), \tag{5.43}$$

em que

$$\mathbf{x}_i(k + 1) = \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}_r(k),$$

Substituindo-se a equação (5.41) na equação acima, tem-se

$$\mathbf{x}_i(k + 1) = \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) + \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{x}}(k - d) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]. \tag{5.44}$$

Assim, substituindo-se a equação (5.43) na equação (5.42), o modelo de estado predito torna-se

$$\mathbf{x}'(k + 1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_x) \mathbf{x}'(k) - \mathbf{BK}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{A}^d \mathbf{K}_e [\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)]. \tag{5.45}$$

Portanto, a predição de estado estimado e a saída de realimentação dadas pelas equações (5.45) e (5.41), respectivamente, podem ser incluídas no diagrama de blocos da estrutura de controle conforme mostrado na Figura 38.

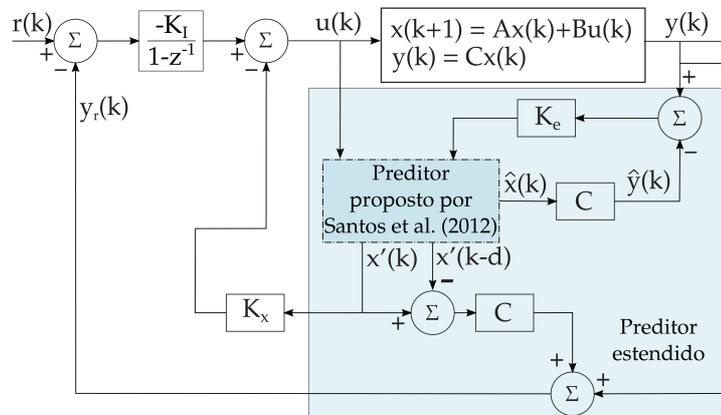


Figura 38 – Estrutura de controle proposta com modificação no compensador de atraso.

É importante destacar que nessa abordagem todas as matrizes envolvidas para compensação do atraso tem a mesma ordem das matrizes do modelo da planta. Logo, a

implementação digital dessa estratégia leva a um menor esforço computacional quando se compara com a implementação baseada no aumento do estado (representação implícita apresentada na seção 5.1.1).

Outro ponto importante e que também merece destaque, está no fato de que a estrutura mostrada na Figura 38 aplica-se tanto ao caso SISO quanto ao caso MIMO.

5.2.4 Análise de robustez

A estratégia de controle mostrada na Figura 38 apresenta a facilidade da implementação computacional, porém não torna fácil a obtenção das funções de sensibilidade e sensibilidade complementar, necessárias para a análise de robustez. Nesse contexto, torna-se essencial a obtenção de matrizes em malha fechada que mostrem claramente as matrizes de um controlador equivalente e as matrizes da planta. Nesta seção apresenta-se uma abordagem em que as matrizes da estratégia de controle proposta são escritas em um modelo equivalente, tornando possível análise de robustez.

Então, a partir da equação (5.26) tem-se

$$\mathbf{x}'(k-d) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{e}'_p(k),$$

em que a aplicação da equação (5.27) leva a

$$\mathbf{x}'(k-d) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \hat{\mathbf{w}}(k-1) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}(k-2) - \dots - \mathbf{A}^{d-1}\hat{\mathbf{w}}(k-d),$$

e, considerando-se a equação (5.25), tem-se

$$\mathbf{x}'(k-d) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{e}_e(k-1) - \mathbf{A}\mathbf{K}_e\mathbf{e}_e(k-2) - \dots - \mathbf{A}^{d-1}\mathbf{K}_e\mathbf{e}_e(k-d), \quad (5.46)$$

sendo $\mathbf{e}_e(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)$ o erro de estimação do modelo sem atraso.

Logo, substituindo-se a equação (5.46) na equação (5.44) o estado do integrador é, então, dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{x}_i(k) + r(k) - \mathbf{y}'(k) - \hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{C}\mathbf{K}_e\mathbf{e}_e(k-1) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{K}_e\mathbf{e}_e(k-2) - \dots \\ - \mathbf{C}\mathbf{A}^{d-1}\mathbf{K}_e\mathbf{e}_e(k-d). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Portanto, definindo-se o estado aumentado

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = [\mathbf{x}'(k) \ \mathbf{x}_i(k) \ \mathbf{e}_e(k-1) \ \mathbf{e}_e(k-2) \ \dots \ \mathbf{e}_e(k-d)]^T,$$

o vetor de entrada

$$\bar{\mathbf{m}}(k) = [\mathbf{r}(k) \ \mathbf{y}(k) \ \hat{\mathbf{y}}(k) \ \mathbf{y}'(k)]^T,$$

e o vetor de controle

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = [\mathbf{u}(k) \ \mathbf{x}'(k) \ \mathbf{e}'_p(k)]^T,$$

então as equações (5.45), (5.47) e (5.43) podem ser escritas em uma representação unificada. Assim, obtém-se um controlador equivalente para o modelo em espaço de estados baseado no estado aumentado, dado por:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{m}}(k) \quad (5.48)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{m}}(k), \quad (5.49)$$

em que

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_x & -\mathbf{BK}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{CK}_e & \cdots & -\mathbf{CA}^{d-1}\mathbf{K}_e \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}^d\mathbf{K}_e & -\mathbf{A}^d\mathbf{K}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_x & -\mathbf{K}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_e & \cdots & \mathbf{A}^{d-1}\mathbf{K}_e \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}.$$

A fim de facilitar a análise de robustez, as equações (5.48) e (5.49) para obter a representação em funções de transferência do controlador equivalente:

$$K_L(z) = \bar{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}. \quad (5.50)$$

Dessa forma, as funções de sensibilidade e sensibilidade complementar podem ser encontradas mais facilmente, sendo dadas por (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005):

$$S(z) = (\mathbf{I} + G(z)K_L(z))^{-1} \quad (5.51)$$

$$C(z) = G(z)K_L(z) (\mathbf{I} + G(z)K_L(z))^{-1}. \quad (5.52)$$

A estrutura equivalente do controlador proposto é mostrada na Figura 39. A análise de robustez baseada nas curvas de sensibilidade e sensibilidade complementar constitui um método gráfico de análise de robustez comumente empregado em sistemas de controle ótimo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005; WOLOWICH, 1994). É este o método aplicado para analisar a robustez dos sistemas apresentados nas simulações da próxima

subseção. Entretanto, deve-se destacar que o fato dos controladores apresentarem um bom desempenho em um conjunto de exemplos, não significa necessariamente que também apresentarão em outros, mesmo que de mesma classe (estáveis, instáveis, ou multivariáveis). Essa conclusão deve pressupor um detalhamento analítico completo de forma genérica (para qualquer classe de problemas).

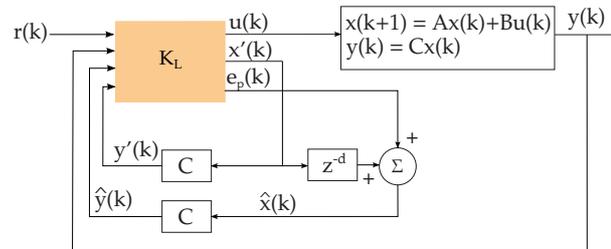


Figura 39 – Forma fechada da estrutura de controle proposta.

5.2.5 Resultados em sistemas SISO e MIMO

Nesta seção apresentam-se resultados em nível de simulação da estratégia de controle proposta para sistemas instáveis e integradores. As primeiras subseções tratam de casos SISO, enquanto a última aborda um problema MIMO cuja matriz de transferência possui funções de transferência instáveis, integradoras e estáveis.

5.2.5.1 Sistema instável

Neste caso revisita-se o reator químico apresentado no exemplo 2.3 do capítulo 2 quando analisou-se o posicionamento de polos complexos conjugados para o polinômio-T. Aqui, o algoritmo proposto no preditor-observador é comparado com o SFSP, também estudado para essa planta por Torrico et al. (2013). Neste último mostrou-se um desempenho quanto à robustez do controlador SFSP superior ao FSP. Portanto, analisa-se a capacidade da estratégia de controle proposta em lidar com sistemas integradores com longo atraso, cujos resultados são comparados com o SFSP. O modelo dessa planta é dado por

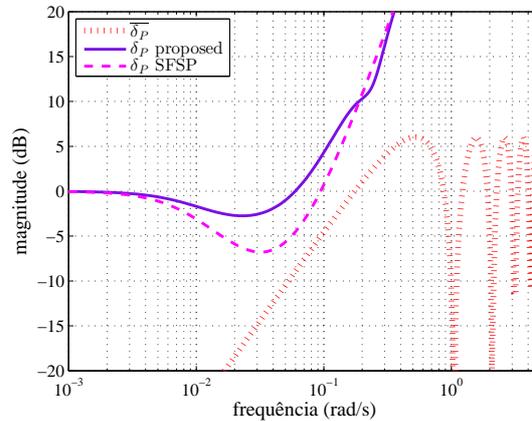
$$G(s) = \frac{3.433}{103s - 1} e^{-20s}, \quad (5.53)$$

que foi discretizado considerando-se $T_s = 0.5$ s.

A robustez quanto ao atraso é analisada com base no índice de robustez $I_r(e^{j\omega})$ tanto para o caso do SFSP quanto para a estratégia de controle proposta. A barreira de robustez das incertezas $\overline{\delta P}(e^{j\omega})$ é considerada para $\pm 30\%$ de erro de estimação no atraso. Os resultados de simulação são mostrados na Figura 40, em que pode-se ver que a estratégia proposta incrementa de forma significativa a robustez quanto ao atraso. Essa conclusão deve-se ao fato de que a curva do índice de robustez $I_r(j\omega)$ do controlador

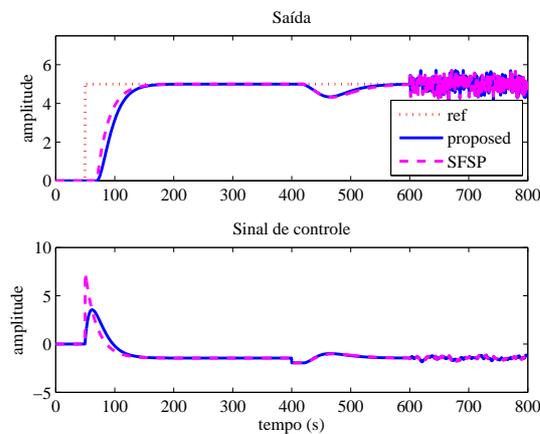
proposto é mais distante que aquela referente ao SFSP em relação à curva de $\overline{\delta P}(e^{j\omega})$, para toda a faixa de frequências.

Figura 40 – Análise de robustez para o caso instável, considerando-se $\pm 30\%$ de erro de estimação quanto ao atraso.



Os resultados de simulação temporal consideram a sintonia do SFSP conforme apresentado por Torrico et al. (2013). No caso da estratégia proposta, considera-se que os polos desejados do sistema em malha fechada sejam $d_{fp} = [0.965 \ 0.965]$, a fim de garantir ausência de sobressinal e tempo de acomodação no seguimento de referência semelhante àquele apresentado pelo SFSP. Assim, considerando-se a técnica de alocação de polos, tem-se $\mathbf{K}_c = [4.49 \ -0.07]$, sendo $\mathbf{K}_x = 4.49$ e $\mathbf{K}_i = -0.07$. Para o caso do estimador, considera-se que o polo desejado é $P_{obs} = 0.98$, a fim de se obter resposta temporal quanto ao rejeição a perturbações semelhante à do SFSP. Assim, tem-se $\mathbf{K}_e = 0.0249$. Os resultados com a sintonia proposta é mostrado na Figura 41.

Figura 41 – Resposta ao degrau para o sistema instável (caso nominal).



Uma vez que o comportamento temporal é bastante semelhante para ambos os controladores, é conveniente que analisar-se o desempenho baseado em índices objetivos, capazes de quantificar o comportamento temporal observado na Figura 41. Assim,

consideraram-se os índices de integral do erro absoluto - IAE (*integrated absolute error*), como medida de desempenho da saída e a variação total da entrada - TV (*total variation*), como medida de desempenho relacionada ao sinal de controle. Tanto IAE quanto TV são medidos em relação ao seguimento de referência - SR (*set-point reference*), rejeição à perturbação de carga - LDR (*load disturbance rejection*), e rejeição a ruído - NR (*noise rejection*). Os resultados são mostrados na Tabela 6 em que percebe-se um leve incremento do método proposto no índice relacionado à rejeição a perturbações (ver as colunas IAE-LDR and TV-LDR na Tabela 6). Entretanto, o desempenho em altas frequências, caracterizado pela coluna TV-NR, é significativamente melhorado quando se aplica a estratégia proposta.

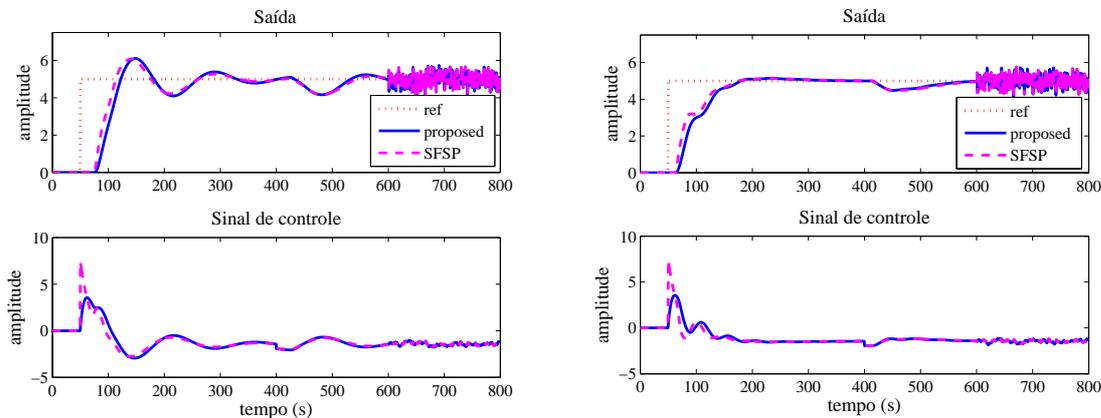
Tabela 6 – Índices de desempenho para o sistema instável.

Controlador	IAE			TV		
	SR	LDR	NR	SR	LDR	NR
SFSP	200.05	55.37	48.79	8.86	1.37	18.00
Proposto	241.61	47.72	48.99	8.19	1.44	15.87

Para comprovar a efetividade do controlador proposto quanto às incertezas no atraso, consideraram-se simulações em que a incerteza no atraso é +30% e -30%, respectivamente. Os resultados são mostrados nas Figuras 42a e 42b, em que se vê comportamento semelhante para ambos os controladores.

Figura 42 – Sistema instável com incertezas.

- (a) Resposta aodegrau para +30% de incer- (b) Resposta ao degrau para -30% de incer-
teza no atraso. teza no atraso.



Apesar de se perceber apenas um leve incremento em alguns índices, esse exemplo tem o intuito de apresentar resultados satisfatórios do método proposto, para sistemas de baixa ordem (FOPDT neste caso).

5.2.5.2 Sistema integrador

Este exemplo completa a análise de sistemas SISO, considerando-se uma planta integradora previamente considerada por Torrico et al. (2013), cujo modelo é dado por:

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)} e^{-8s}. \quad (5.54)$$

Esse sistema pode ser representado por um modelo IPDT dado por:

$$G(s) = \frac{0.1}{s} e^{-9.6s}, \quad (5.55)$$

o qual é adequado para que se possa aplicar o controlador SFSP. Por outro lado, o modelo dado pela equação (5.54) pode ser aplicado diretamente no controlador proposto sem qualquer restrição. Dessa forma, esse exemplo mostra a habilidade da estratégia proposta para lidar com sistemas com atraso de transporte de ordem elevada. Considera-se um período de amostragem $T_s = 0.1$ s para a discretização tanto da equação (5.54) quanto da equação (5.55).

Neste caso, se a estratégia de alocação de polos é considerada, então deve-se lidar com o posicionamento de cinco polos para obtenção do ganho de realimentação K_c do estado predito, além do posicionamento de quatro polos para obtenção do ganho de estimação. Portanto, de modo a reduzir a quantidade total de parâmetros a serem sintonizados, optou-se pela otimização do ganho de realimentação, em que K_c é obtido a partir do problema do regulador linear quadrático (LQR), sintonizado com:

$$\mathbf{R} = 75 \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a,$$

em que \mathbf{R} e \mathbf{Q} são os pesos relacionados ao sinal de controle e ao estado, respectivamente, e $\mathbf{C}_a = [\mathbf{C} \ \mathbf{I}]$ advém do modelo aumentado que se considera para inclusão do integrador. Os polos do observador são alocados em $P_{obs} = [0.99 \ 0.9 \ 0.82 \ 0.6]^T$. Essa sintonia leva a um comportamento temporal semelhante àquele observado pelo SFSP quando se consideram os parâmetros de sintonia descritos por Torrico et al. (2013), no que diz respeito ao seguimento de referência e rejeição a perturbações. Tem-se, portanto,

$$\mathbf{K}_c = [444.59 \ 434.64 \ 424.72 \ 414.84 \ -0.11]$$

e

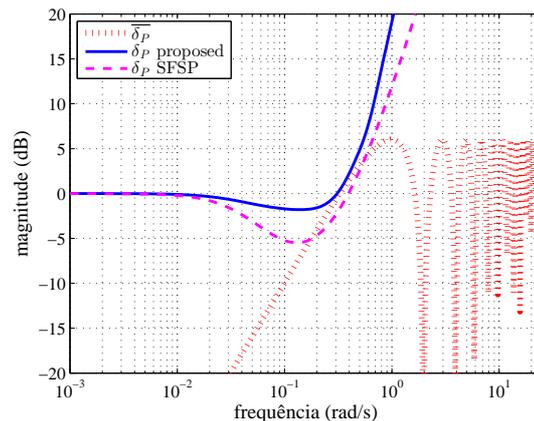
$$\mathbf{K}_e = [-0.22 \ 0.60 \ -0.55 \ 0.17]^T,$$

sendo $\mathbf{K}_x = [444.59 \ 434.64 \ 424.72 \ 414.84]$ e $\mathbf{K}_i = -0.11$.

A análise de robustez em relação ao atraso é novamente realizada em termos do índice de robustez $I_r(e^{j\omega})$ para ambos os controladores. A barreira de robustez quanto às incertezas $\overline{\delta_P}(e^{j\omega})$ é considerada para $\pm 40\%$ de erro de estimação quanto ao atraso, que

corresponde a um atraso efetivo de 11.2 s na planta. Os resultados de comparação são mostrados na Figura 43, em que percebe-se que o gráfico de $I_r(e^{j\omega})$ para o controlador proposto não viola o índice $\overline{\delta P}$, enquanto o mesmo gráfico para o SFSP indica a perda de desempenho para esse tipo de incerteza.

Figura 43 – Análise de robustez para o sistema integrador considerando $\pm 40\%$ de erro de estimação no atraso.

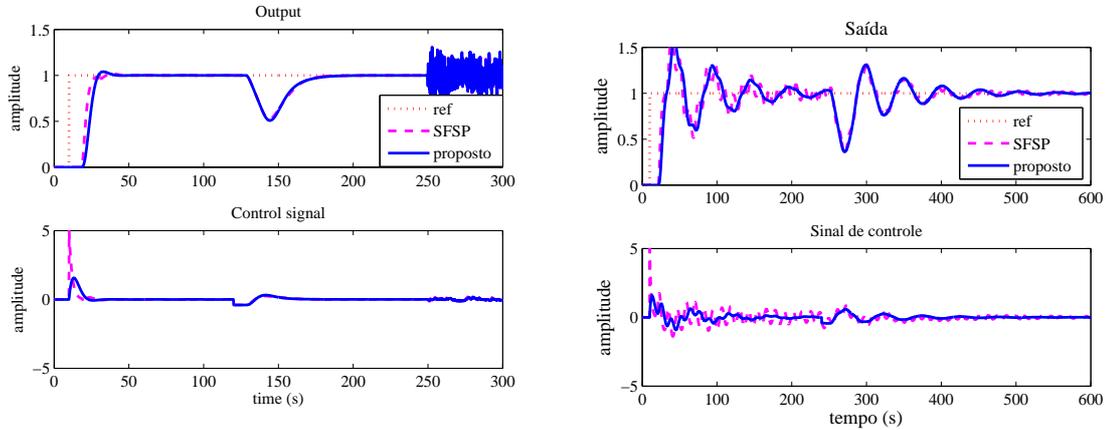


A simulação temporal considera um degrau unitário como referência desejada, aplicado em $t = 10$ s. Uma perturbação de carga do tipo degrau de intensidade -0.4 é aplicada em $t = 120$ s. Adiciona-se ainda um sinal do tipo ruído branco com potência de ruído 0.001 em $t = 250$ s. A Figura 44a mostra os resultados de comparação dessa simulação para o caso nominal (quando não se considera a incerteza quanto ao atraso na planta), o que mostra que ambos os controladores são sintonizados para desempenho semelhante. A Figura 44b porém, exibe a resposta temporal quando o atraso da planta é modificado para 11.2 s, ou seja, 40% maior que os 8 s do caso nominal. O tempo total de simulação foi modificado para 600 s e o instante de tempo de aplicação do degrau de entrada foi modificado para $t = 240$ s, a fim de se melhorar o aspecto visual do gráfico mostrado. Neste caso, torna-se claro que o SFSP apresenta perda de robustez, conforme indicado pelo gráfico da Figura 43, se comparado com a estratégia proposta.

Assim como no caso do exemplo da planta instável, tanto IAE quanto TV foram calculados para o seguimento de referência (SR), rejeição a perturbações de carga (LDR) e rejeição a ruído (NR). Neste caso, os resultados mostrados na Tabela 7 mostram um incremento significativo na rejeição ao ruído (ver índice NR na coluna TV) em favor do algoritmo proposto sobre o SFSP, com uma redução percentual superior a 50 %. Isso representa um comportamento robusto em altas frequências, ou seja, ruídos de medida afetam o sinal de controle com menor intensidade. Entretanto, ao se calcular o ganho de realimentação a partir do problema do regulador linear (problema LQR) não se tem controle sobre a alocação de polos da realimentação do estado e, neste caso, percebe-se a presença de sobressinal, o que leva a uma leve piora do índice IAE-SR em relação

Figura 44 – Respostas ao degrau: caso integrador.

- (a) Resposta nominal ao seguimento de referência do tipo degrau para o sistema integrador.
- (b) Resposta ao seguimento de referência do tipo degrau para o sistema integrador, quando considera-se o atraso da planta $d = 11.2$ s (incremento de 40% no atraso).



ao SFSP, o que poderia ser contornado com a inclusão de um filtro de referência. Além disso, o algoritmo SFSP exibe um comportamento oscilatório no seguimento de referência, possivelmente devido ao fato de se considerar um modelo reduzido do sistema.

Tabela 7 – Índices de desempenho para o sistema integrador.

Controlador	IAE			TV		
	SR	LDR	NR	SR	LDR	NR
SFSP	11.84	10.46	4.31	5.83	0.90	12.14
LQG/LTR	14.21	10.55	4.32	3.16	1.03	5.14

As respostas ao degrau quando se consideram as incertezas de atraso tanto no caso instável quanto no caso integrador permitem que se observe que vale a pena considerar a estratégia proposta quando o sistema torna-se mais complexo, mesmo no caso de sistemas SISO de ordem mais elevada.

5.2.5.3 Sistema MIMO

O caso multivariável considerado nesta seção foi previamente considerado por Garcia e Albertos (2010), cuja matriz de transferência é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(s) \\ \mathbf{Y}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1}e^{-0.5s} & \frac{0.5}{s+1}e^{-0.7s} \\ \frac{0.1}{10s+1}e^{-0.3s} & \frac{1}{s}e^{-0.7s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(s) \\ \mathbf{U}_2(s) \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

em que $\mathbf{Y}_1(s)$ e $\mathbf{Y}_2(s)$ são as transformadas de Laplace das saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, respectivamente. Este é um exemplo de destaque no que diz respeito ao estudo de sistemas de controle no âmbito do controle multivariável, porque inclui plantas integradoras, instáveis e estáveis, além de múltiplos atrasos. Além disso, os menores atrasos de tempo não

estão todos na diagonal principal. Isso só ocorre na primeira linha, enquanto na segunda a situação se inverte e o atraso é maior no termo que não pertence à diagonal principal. Isso torna essa planta com características adequadas para que se investigue a estratégia de controle proposta.

O sistema descrito pela equação (5.56) foi discretizado considerando-se um circuito segurador de ordem zero (ZOH) com período de amostragem $T_s = 0.1$ s, levando à representação em tempo discreto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(z) \\ \mathbf{Y}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.10517}{z-1.105} z^{-5} & \frac{0.04758}{z-0.9048} z^{-7} \\ \frac{0.000995}{z-0.99} z^{-3} & \frac{0.1}{z-1} z^{-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(z) \\ \mathbf{U}_2(z) \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Aqui, $Y_1(z)$, $Y_2(z)$, $U_1(z)$ e $U_2(z)$ são a transformada- \mathcal{Z} das respectivas saídas e entradas.

Neste caso a planta exhibe quatro estados com duas saídas e duas entradas, o que significam dois estados adicionais relacionados à ação integral, ou seja, seis estados a serem realimentados e quatro estados a serem estimados. Dessa forma, torna-se inviável que se considere a alocação de polos e, portanto, optou-se pela otimização tanto na obtenção do ganho do estimador (filtro de Kalman) quanto na realimentação dos estados (problema LQR), ou seja, neste caso tem-se o problema LQG aplicado a um sistema com atraso de transporte multivariável. Para esse tipo de abordagem, a robustez é incrementada quando aplica-se o método de recuperação de malha - LTR (*loop transfer recovery*) (DOYLE; STEIN, 1979; ATHANS, 1986).

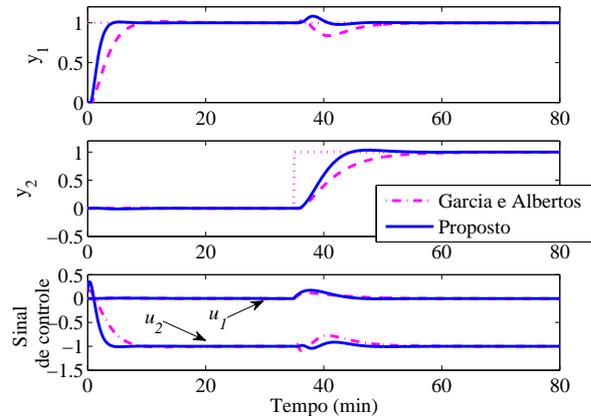
O problema LQR é resolvido considerando-se a sintonia:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 4500 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a,$$

sendo \mathbf{R} e \mathbf{Q} as matrizes de peso relacionadas ao sinal de controle e ao estado, respectivamente, e $\mathbf{C}_a = [\mathbf{C} \ \mathbf{I}]$ obtido a partir do modelo aumentado para inclusão do integrador. O filtro de Kalman considera a abordagem clássica para aplicação do procedimento LTR em que a matriz de covariância do estado é dada por $\mathbf{R}_w = q^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T$ sendo $q = 1$ e a matriz de covariância da saída é $\mathbf{R}_v = \mathbf{I}$.

A Figura 45 mostra os resultados de comparação entre a estratégia proposta e o controlador MIMO proposto por Garcia e Albertos (2010), com os mesmos parâmetros de sintonia considerados. A estratégia de controle proposta por Garcia e Albertos (2010) considera o projeto de um controlador primário tomado a partir de um problema H_∞ , embora um controlador P/PID tenha sido considerado neste exemplo. Além disso, há a inclusão de um filtro de referência a fim de evitar o efeito de zeros indesejados de malha fechada que causam sobressinal. Assim, caso uma resposta mais rápida ou mais lenta é desejada, faz-se necessário que todo o projeto de controle seja reconsiderado. Deve-se observar ainda, que nesse tipo de estratégia há duas matrizes a serem sintonizadas: a do controlador primário e a do filtro de referência.

Figura 45 – Exemplo MIMO.



A estratégia de controle proposta neste trabalho, porém, leva à resposta mais rápida ou mais lenta simplesmente modificando-se o peso da diagonal principal da matriz de pesos R . A diminuição leva àquele caso e o incremento a este. Além do mais, percebe-se claramente um desacoplamento maior favorável à estratégia proposta (basta comparar a saída y_1 em $t = 40 \text{ min}$ na Figura 45) o que faz os pesos de sintonia praticamente independentes (R_{11} para a saída y_1 e R_{22} para a saída y_2). Assim, o procedimento de sintonia é bastante intuitivo e mais simples que aquele do controlador proposto por Garcia e Albertos (2010), além de incrementar o desacoplamento entre as malhas.

5.2.6 A inclusão do polinômio- T no preditor-observador para sistemas com atraso

A estratégia de controle para sistemas com atraso apresentada na subseção anterior apresenta a vantagem de se projetar um controlador robusto, como por exemplo um LQG, para o sistema equivalente sem atraso. Nesse caso, a técnica de recuperação de malha (LTR) pode ser incluída no projeto do controlador, a fim de garantir o incremento de robustez, conforme apresentado no capítulo 4.

Neste capítulo, ao se apresentar a estrutura do preditor-observador, considerou-se ampliar a possibilidade de técnicas de projeto levando em conta também as técnicas tradicionais, como alocação de polos, tanto para a realimentação de estados quanto para o cálculo de ganho do estimador. Nesse contexto, a proposta de uso do polinômio- T , como apresentado na subseção 4.2.4 do capítulo 4, pode ser aplicada para sintonia do ganho de Kalman para sistemas com atraso, se a estrutura do preditor-observador apresentada na seção 5.2 é utilizada para compensação do atraso.

Quanto à realimentação do estado e a consequente obtenção da lei de controle, deve-se observar que, como o Teorema da Separação é garantido quando se aplica a estrutura mencionada, então os polos de realimentação do estado predito podem ser alocados

independentemente do projeto do observador. Assim, tanto pode-se optar pelo projeto de alocação de polos quando pela solução otimizada (problema LQR). Se este último caso é escolhido, então pode-se caracterizar o controle LQG-T, proposto na subseção 4.2.4 do capítulo 4, aplicado a sistemas com atraso.

Entretanto, algumas observações para o caso multivariável devem ser observadas. Nesse tipo de sistema o modelo fica descrito por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k); \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k),\end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

O vetor de entradas é dado por

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k-d_1) \\ u_2(k-d_2) \\ \vdots \\ u_n(k-d_n) \end{bmatrix},$$

sendo $u_i(k-d_i)$, tal que $i = 1, 2, \dots, n$, a entrada i com atraso correspondente d_i .

De acordo com a equação (5.32), a estimativa das perturbações se dá para os elementos da diagonal principal, ou seja, para as funções de transferência diretas, sem levar em consideração os termos cruzados. Portanto, no caso de se utilizar o polinômio-T para o caso multivariável, deve-se obter um polinômio-T para cada função de transferência $G_{ii}(z)$ da diagonal principal na equação (5.31), ou seja,

$$\begin{aligned}T_1(z^{-1}) &= (1 - \alpha_1)^{n_1} = 1 + t_{1_1}z^{-1} + \cdots + t_{1_{n_1}}z^{-n_1}; \\ T_2(z^{-1}) &= (1 - \alpha_2)^{n_2} = 1 + t_{2_1}z^{-1} + \cdots + t_{2_{n_2}}z^{-n_2}; \\ &\vdots \\ T_n(z^{-1}) &= (1 - \alpha_n)^{n_n} = 1 + t_{n_1}z^{-1} + \cdots + t_{n_{n_n}}z^{-n_n},\end{aligned}$$

sendo α_i , tal que $i = 1, 2, \dots, n$ os polos de cada polinômio-T considerado e n_1, n_2, \dots, n_n a ordem do polinômio $A(z^{-1})$ correspondente a cada $G_{ii}(z)$.

Assim, considerando-se o modelo das equações (4.87) e (4.88):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}\mathbf{w}(k); \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{w}(k),\end{aligned}$$

então,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \cdots & \mathbf{E}_n \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

em que

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} t_{11} - a_{11} \\ t_{12} - a_{12} \\ \vdots \\ t_{1n_1} - a_{1n_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} t_{21} - a_{21} \\ t_{22} - a_{22} \\ \vdots \\ t_{2n_2} - a_{2n_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} t_{n1} - a_{n1} \\ t_{n2} - a_{n2} \\ \vdots \\ t_{nn_n} - a_{nn_n} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

e $\mathbf{F} = 1$.

Na sequência desta subseção, os exemplos apresentados no capítulo 2 são revisitados, porém com uma análise comparativa entre as estratégias de controle GPC-T e a estratégia proposta quando se utiliza o polinômio-T na sintonia do filtro de Kalman para sistemas com atraso. Percebe-se que algumas restrições anteriormente consideradas para o polinômio-T no âmbito do controle preditivo são superpostas ao se aplicar a estratégia proposta.

Exemplo 5.1. Sistema de controle para uma planta estável em malha aberta, cujo modelo de primeira ordem representa um sistema de tanque de aquecimento (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, pág. 287), sendo dado por

$$P(s) = \frac{1}{2s + 1} e^{-4s}.$$

A discretização desse modelo, fazendo-se $T_s = 0.2$, leva a

$$P(z) = \frac{0.095z^{-1}}{1 - 0.905z^{-1}} z^{-20}.$$

O algoritmo GPC foi sintonizado com os mesmos parâmetros definidos por Normey-Rico e Camacho (2007), ou seja, $N_u = N_y = 15$ e $\lambda = 1$.

O algoritmo LQG foi sintonizado com $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = 1$, $R_w = 1$ e $R_v = 1$.

O polinômio-T, foi ajustado com polo $\alpha = 0.85$, para ambos GPC-T e LQG-T, a levando a

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}. \quad (5.60)$$

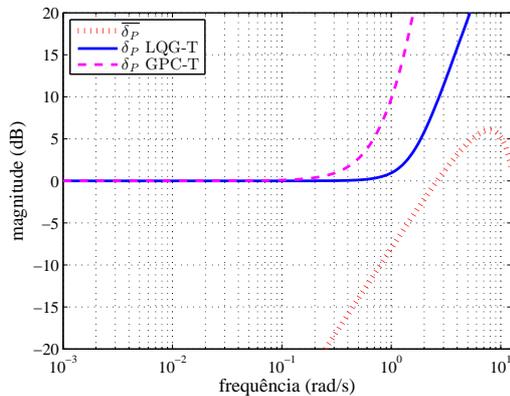
Para este exemplo, considera-se uma simulação onde se inclui uma perturbação de entrada igual a 0,1 em $t = 40$ s e uma perturbação de saída igual a 0,1 em $t = 26$ s.

Todas as simulações consideram que há um erro de modelagem quanto ao atraso igual a 10%, ou seja, os controladores são projetados para a planta nominal, no entanto, a planta real exibe um atraso de transporte efetivo 10% maior.

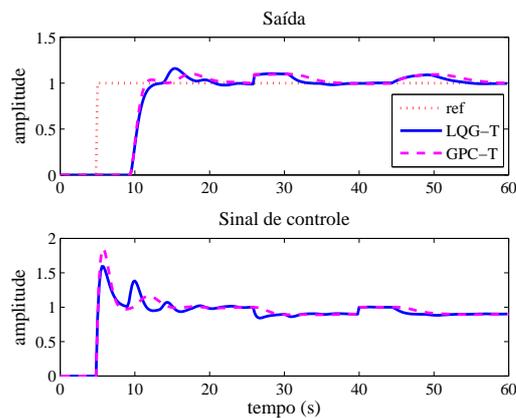
A Figura 46a mostra a resposta em frequência do sistema controlado, considerando uma incerteza de 10% em relação ao atraso. A partir dos gráficos mostrados, pode-se perceber que, para o polinômio-T dado pela equação (5.60), o GPC-T é mais robusto quanto ao atraso. Apesar disso, observando-se a resposta temporal da Figura 46b, percebe-se que o LQG-T é mais rápido quanto à rejeição a perturbações, embora apresente comportamento mais oscilatório.

Figura 46 – Análise do sistema estável do exemplo 5.1.

- (a) Robustez quanto ao atraso para $\alpha = 0,85$. (b) Resposta ao degrau considerando-se $\alpha = 0,85$ e 10% de incerteza em relação ao atraso.



Fonte: Autor.



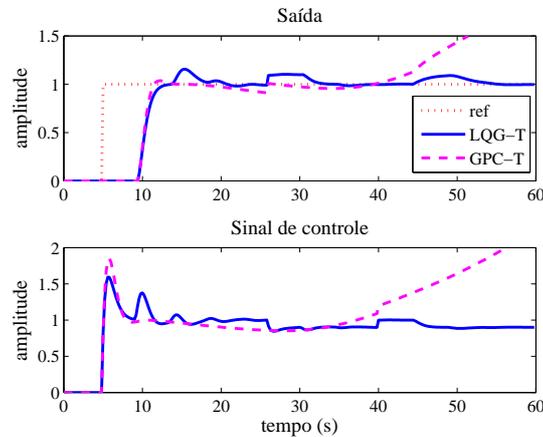
Fonte: Autor.

A Figura 48 mostra o que ocorre com a resposta temporal quando se faz $\alpha \rightarrow 1$. O algoritmo GPC-T aparenta tender à instabilidade (na verdade acomoda muito lentamente) enquanto o LQG-T torna a resposta levemente mais lenta do que a observada quando se faz $\alpha = 0,85$, mas não apresenta mudanças significativas na resposta dinâmica ou no rejeição à perturbação.

Completando a análise, ao se ajustar o polo em $\alpha = 0,7$, a fim de tornar a resposta do algoritmo GPC-T mais rápida, percebe-se então, pela Figura 49a que, neste caso, o algoritmo LQG-T passa a ser mais robusto em relação ao atraso do o GPC-T. Percebe-se ainda, a partir da resposta temporal mostrada na Figura 49b, que o controlador GPC-T passa a apresentar uma resposta mais oscilatória que a resposta temporal do controlador LQG-T.

O ajuste $\alpha = 0,7$ leva ambos os controladores a apresentarem desempenho semelhante quanto ao rejeição a perturbações em baixas frequências. Entretanto, o polinômio-T para o algoritmo LQG não leva em consideração o integrador, já que possui a mesma or-

Figura 47 – Análise do sistema estável do exemplo 5.1.

Figura 48 – Resposta ao degrau considerando-se $\alpha = 0,99$ e 10% de incerteza em relação ao atraso.

Fonte: Autor.

dem de $A(z^{-1})$ e não $\Delta A(z^{-1})$, como é o caso do algoritmo GPC. Neste caso, a fim de se obter uma análise comparativa mais ampla, decidiu-se verificar também o comportamento em altas frequências, onde se inclui ruído aditivo branco na saída do sistema controlado, em $t = 70$ s. Assim, a Tabela 8 mostra os índices de desempenho de entrada (TV) e saída (LDR), que são aqueles apresentados por Skogestad (2003), e podem ser tomados em relação ao seguimento de referência (SR - *Setpoint Reference*), à perturbação de carga (LDR - *Load Disturbance Rejection*) ou à rejeição a ruído (NR - *Noise Rejection*). Percebe-se que tanto o seguimento de referência quanto o rejeição à perturbação de carga tem índices mais reduzidos no algoritmo LQG-T indicando assim, maior robustez em relação às baixas frequências. Entretanto o rejeição a ruído é menor no algoritmo GPC-T, o que pode ser compreendido observando-se o gráfico de robustez. O gráfico de δ_P para ambos os controladores é na verdade o inverso função de transferência em malha fechada, portanto, percebe-se que o algoritmo GPC-T atenua mais as altas frequências do que o algoritmo LQG-T.

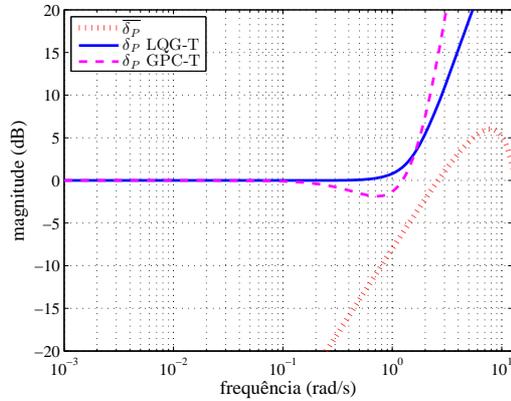
Tabela 8 – Índices de desempenho do sistema do exemplo 5.1, considerando-se $\alpha = 0,7$.

Controlador	IAE			TV		
	SR	LDR	NR	SR	LDR	NR
GPC-T	6,23	0,61	1,31	4,68	0,31	1,54
LQG-T	6,05	0,56	1,35	2,73	0,16	6,28

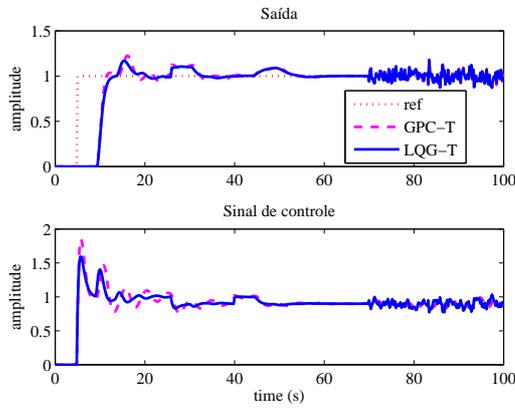
Fonte: Autor.

De fato, a resposta temporal do controlador LQG-T varia pouco neste caso porque se trata de um sistema de primeira ordem e o posicionamento do polo do polinômio ocorre apenas no eixo real. Em sistemas de ordem mais elevada pode-se posicionar o polo do

Figura 49 – Análise do sistema estável do exemplo 5.1.

(a) Robustez quanto ao atraso para $\alpha = 0,7$.

Fonte: Autor.

(b) Resposta ao degrau considerando-se $\alpha = 0,7$ e 10% de incerteza em relação ao atraso.

Fonte: Autor.

sistema sobre o plano complexo e, neste caso, as variações na resposta são mais sensíveis. Este caso é explorado no próximo exemplo.

Exemplo 5.2. Neste caso analisa-se o comportamento de posicionamento de polos do polinômio-T para uma planta integradora em malha aberta, cujo modelo é dado por (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009):

$$P(s) = \frac{-0.1}{s(5s + 1)} e^{-5s}. \quad (5.61)$$

A discretização desse modelo, fazendo-se $T_s = 0.1$, leva a

$$P(z) = \frac{(-9,9z^{-1} - 9,87z^{-2})10^{-5}}{1 - 1,98z^{-1} + 0,9802z^{-2}} z^{-50}.$$

Para este exemplo, optou-se por comparar os controladores LQG-T e LQG/LTR com o GPC, já que neste caso, por se tratar de uma planta de ordem maior que 1, percebe-se claramente o efeito do polinômio-T com polos complexos conjugados.

O algoritmo GPC-T foi sintonizado considerando-se $N_u = 50$, $N_y = 50$ e $\lambda = 1$. O polinômio-T tem polos localizados em $\rho = 0.9802 \pm \angle 20^\circ$.

O algoritmo LQG-T tem $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = 1$, $R_w = 1$ e $R_v = 1$. Porém, o polinômio-T tem polos complexos conjugados localizados em $\rho = 0.9802 \pm \angle 1,5^\circ$.

O algoritmo LQG/LTR tem $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = 1$, $R_v = 1$ e $R_w = q^2 \mathbf{B}\mathbf{B}^T$, onde $q = 4$.

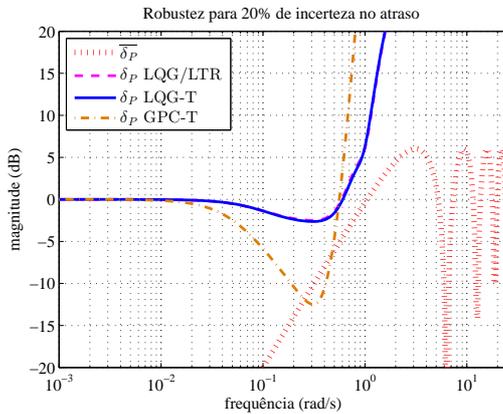
Para este exemplo, considera-se uma simulação onde se inclui uma perturbação de entrada igual a 0,2 em $t = 50$ s.

A análise de robustez em relação ao atraso é apresentada na Figura 50a, onde se considera uma incerteza de 20% no valor do atraso puro. O resultado temporal quando

não se considera a incerteza no atraso é mostrado na Figura 50b. A Figura 50c apresenta a resposta temporal quando se considera a incerteza de 20% no atraso.

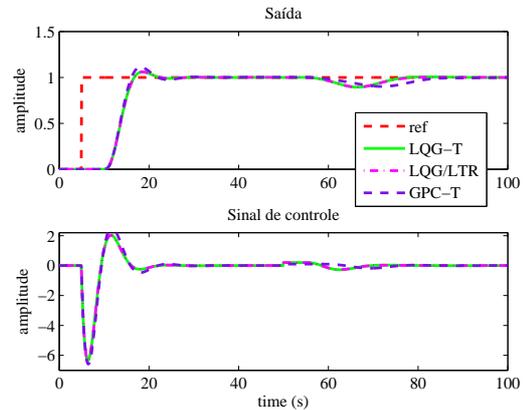
Figura 50 – Análise do sistema integrador do exemplo 5.2.

(a) Robustez quanto ao atraso.



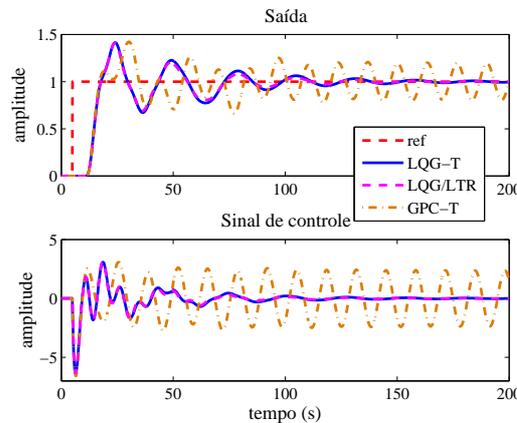
Fonte: Autor.

(b) Resposta temporal sem incerteza no atraso.



Fonte: Autor.

(c) Resposta temporal com incerteza de 20% no atraso.



Fonte: Autor.

O resultado da Figura 50c comprova a análise gráfica da Figura 50a, já que o único algoritmo a ultrapassar a barreira de robustez correspondente a 20% do valor nominal do atraso é aquele relativo ao GPC-T.

Outro ponto importante a se observar diz respeito à escolha dos polos do polinômio-T, que assume o mesmo módulo ρ mas diferentes ângulos θ para o GPC-T e para o LQG-T. A escolha $\theta = 1,5^\circ$ para o algoritmo LQG-T deve-se ao fato de buscar uma resposta próxima àquela obtida para o algoritmo LQG/LTR quando se faz $q = 4$, no que diz respeito ao rejeição à perturbação de entrada. Baseado nisso, procurou-se posicionar o

ângulo θ , para o caso GPC-T, que mais acelerasse a resposta de modo a deixar o rejeição à perturbação semelhante ao rejeição dos controladores ótimos. Entretanto, percebe-se que para valores acima de $\theta = 20^\circ$ já não se consegue acelerar a resposta. Além disso, neste ponto o algoritmo GPC-T já viola o critério de robustez quanto ao atraso, como se vê na Figura 50a.

Exemplo 5.3. MIMO estável

Neste exemplo estende-se a aplicação do polinômio-T como estratégia de sintonia do filtro de Kalman ao caso multivariável, considerando-se a realimentação ótima de estado, ou seja, tem-se uma aplicação LQG-T a um sistema estável multivariável com atraso de transporte.

O problema a ser considerado é a estrutura clássica descrita por Wood e Berry (1973) da coluna de destilação água-metanol. Essa planta é largamente utilizada no estudo de sistemas multivariáveis devido à forte interação entre as malhas, além de apresentar múltiplos atrasos. A Figura 51 mostra um diagrama esquemático simplificado desse processo, cujo modelo é dado por

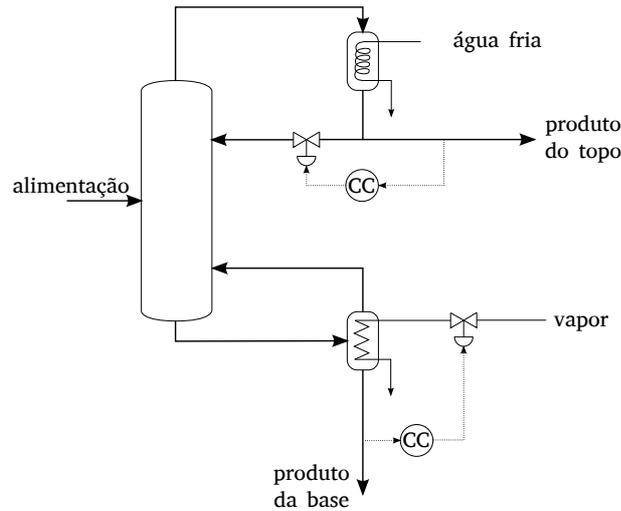
$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(s) \\ \mathbf{Y}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8}{16.7s+1}e^{-s} & \frac{-18.9}{21s+1}e^{-3s} \\ \frac{6.6}{10.9s+1}e^{-7s} & \frac{-19.4}{14.4s+1}e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(s) \\ \mathbf{U}_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3.8}{14.9s+1}e^{-8.1s} \\ \frac{4.9}{13.2s+1}e^{-3.4s} \end{bmatrix} \xi(s), \quad (5.62)$$

em que $\mathbf{Y}_1(s)$ e $\mathbf{Y}_2(s)$ são as transformadas de Laplace das saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, ou seja, o produto do topo e o produto da base, respectivamente. De modo análogo, $\mathbf{U}_1(s)$ e $\mathbf{U}_2(s)$ são as transformadas de Laplace dos sinais de controle $u_1(t)$ (que regula a válvula de refluxo, na linha do produto do topo) e $u_s(t)$ (que regula a válvula de vapor, na linha do produto de base). A variável $\xi(s)$ é um sinal de perturbação aplicado simultaneamente a ambas as malhas, cuja dinâmica é dada pelo último termo da equação (5.62). O modelo é descrito considerando-se minutos como base de tempo tanto para as constantes de tempo quanto para os atrasos. A concentração dos produtos é dada em termos de porcentagens de fração molar, enquanto as taxas de fluxo são dadas em libras por minuto ($1 \text{ lb/min} \approx 7.56 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$). A simulação considera que a coluna opera em um ponto bastante específico, em torno de $y_1 = 96.25 \text{ mol\%}$, $y_2 = 0.5 \text{ mol\%}$, $u_1 = 1.95 \text{ lb/min}$, $u_2 = 1.71 \text{ lb/min}$ e $\xi = 2.45 \text{ lb/min}$.

O modelo em tempo discreto associado ao modelo da equação (5.62), considerando um circuito segurador de ordem zero, é mostrado na equação (5.63), em que apenas a dinâmica da planta foi discretizada com $T_s = 1 \text{ s}$. Não há necessidade de se considerar a discretização do modelo de perturbações, já que sua dinâmica não é levada em consideração para o projeto dos controladores, além do fato de que a dinâmica das perturbações é da mesma ordem da dinâmica da planta.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(z) \\ \mathbf{Y}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.7440}{z-0.9419}z^{-1} & \frac{-0.8789}{z-0.9535}z^{-3} \\ \frac{0.5786}{z-0.9123}z^{-7} & \frac{-1.3015}{z-0.9329}e^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(z) \\ \mathbf{U}_2(z) \end{bmatrix}. \quad (5.63)$$

Figura 51 – Modelo esquemático da coluna de destilação “Wood e Berry”.



O ajuste de parâmetros do controlador proposto é dado por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a$, em que $\mathbf{C}_a = [\mathbf{C} \ \mathbf{I}]$. Os polinômios-T são dados por:

$$T_1(z^{-1}) = (1 - \alpha_1);$$

$$T_2(z^{-1}) = (1 - \alpha_2),$$

tal que

$$\alpha_1 = 0.9329e^{\pm j118^\circ};$$

$$\alpha_2 = 0.9535e^{\pm j126^\circ},$$

em que $\rho_1 = 0.9329$ foi escolhido porque localiza-se mais à esquerda que o polo da função de transferência da diagonal principal da primeira linha, o que leva à aceleração da rejeição a perturbações, conforme se espera da teoria que envolve o polinômio. O ângulo $\theta_1 = 118^\circ$ foi escolhido porque minimiza o produto $\mathbf{E}_1 \mathbf{B}$, sendo \mathbf{E}_1 calculado de acordo com a expressão dada na equação (5.59). No caso da segunda linha da matriz, escolheu-se $\rho_2 = 0.9535$. Neste caso o polo está no interior do círculo de raio unitário porém localizado mais à direita do que o polo do polinômio $A(z^{-1})$ da função de transferência da diagonal principal da linha. Entretanto, a diferença $T(z^{-1}) - A(z^{-1})$ leva a entradas da matriz \mathbf{E}_2 cujo módulo é maior que zero. Essa escolha destaca que, nesta técnica, pode-se acelerar a rejeição a perturbações adequadamente mesmo que α seja posiocandomais à direita do polo dominante do processo. A escolha $\theta_2 = 126^\circ$ ocorre pelas mesmas razões da escolha de θ_1 , conforme descrito anteriormente.

Considerando-se esses parâmetros, obtém-se

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} 0.2332 & -0.1143 & -0.2976 & 0.2912 \\ -0.2065 & -0.3521 & 0.2368 & 0.8219 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} -0.0338 & 0 \\ 0 & 0.1811 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 0.0489 & 0.0665 \\ -0.0097 & -0.0178 \\ -0.0100 & -0.0056 \\ -0.0176 & -0.0075 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1790 \\ 0 & -0.0443 \\ -0.0279 & 0 \\ -0.0457 & 0 \end{bmatrix}.$$

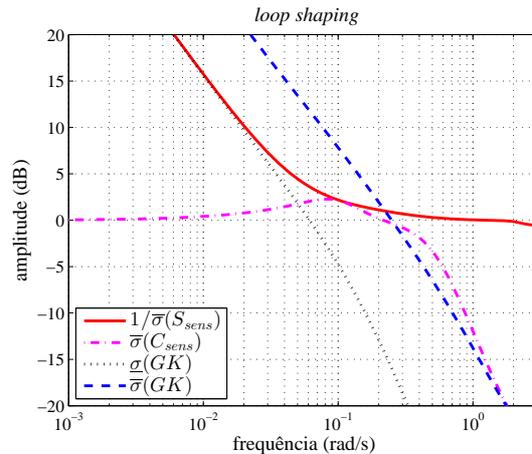
Neste caso, $T_1(z^{-1})$ e $T_2(z^{-1})$ foram sintonizados de modo a satisfazer a equação (4.104), levando a matriz \mathbf{E} ao modelo acima descrito, a fim de garantir que os termos da diagonal principal do produto interno $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{B}$ sejam iguais a zeros e que os termos cruzados sejam minimizados.

Vale ressaltar, ainda, que essa sintonia foi escolhida observando-se o compromisso entre a robustez e desempenho. Acerca disso, é comum considerar-se o procedimento gráfico comumente conhecido por *loop shaping*, e normalmente aplicado a controles ótimos (ver por exemplo os livros-texto de Wolowich (1994) ou Skogestad e Postlethwaite (2005)), cujas curvas para este exemplo são mostradas na Figura 52. Esta figura apresenta o gráfico que contém as curvas do máximo valor singular da função de sensibilidade complementar $\bar{\sigma}(C_{sens})$, da inversa do máximo valor singular da função de sensibilidade $1/\bar{\sigma}(S_{sens})$ e os máximos e mínimos valores singulares da função de transferência em malha aberta GK , $\bar{\sigma}(GK)$ e $\underline{\sigma}(GK)$, respectivamente. A análise é realizada considerando-se a faixa de frequência compreendida entre $\omega = 10^{-3} \text{ rad/s}$ até $\omega = \pi/T_s \text{ rad/s}$ (máxima frequência para sistemas de controle em tempo discreto). Nesse tipo de análise, deseja-se que $\bar{\sigma}(GK)$ e $\underline{\sigma}(GK)$ permaneçam entre as curvas de $\bar{\sigma}(C_{sens})$ e $1/\bar{\sigma}(S_{sens})$ para baixas e altas frequências, respectivamente (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Apesar do fato de que $\bar{\sigma}(GK)$ cruza a curva $\bar{\sigma}(C_{sens})$, esse evento já ocorre na vizinhança da frequência $\omega = \pi/T_s$, além do fato de que esse cruzamento é suave.

Na análise temporal considera-se a comparação de resposta ao degrau entre o controlador proposto e o controlador MIMO-FSP, que fora estudado para essa planta por Flesch et al. (2011). Naquele trabalho, a matriz de transferência do controlador primário considerado é do tipo PI diagonal, dado por $C_{jj}(z) = K_{c_j} + \frac{K_{c_j}}{T_{i_j}} + \frac{T_s z}{z-1}$, $j = 1, 2$; $C_{ij} = 0$, $i \neq j$, em que $K_{c_1} = 0.5$, $T_{i_1} = 9$, $K_{c_2} = -0.2$ e $T_{i_2} = 9$. Além disso, caso considerem-se dinâmicas não-modeladas, então sugere-se um filtro de robustez diagonal cujos elementos são dados por $F_{r_{jj}}(z) = \frac{0.2(z-0.4)}{0.6(z-0.8)}$, $j = 1, 2$; $F_{r_{ij}}(z) = 0$, if $i \neq j$.

A análise do caso nominal é mostrada na Figura 53. Neste caso, apesar do fato de que o controlador LQG-T exibe uma resposta mais lenta do que o MIMO-FSP para a saída y_1 , o desacoplamento é substancialmente incrementado, como pode-se ver pela resposta da saída y_2 . Por outro lado, em $t = 100 \text{ min}$ quando a referência em degrau é

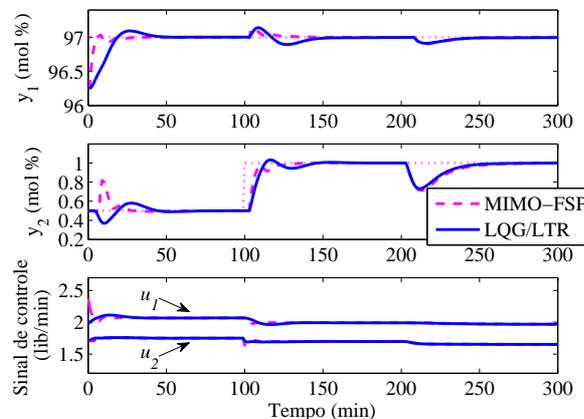
Figura 52 – Resposta em frequência da coluna de destilação “Wood e Berry”.



aplicada a y_2 , o controlador LQGT é mais rápido além de apresentar uma resposta menos oscilatória que aquela do controlador MIMO-FSP. Além disso, em $t = 200 \text{ min}$ aplica-se uma perturbação do tipo degrau unitário em ambas as malhas, em que o controlador LQGT é substancialmente mais rápido em recuperar o seguimento de referência desejado.

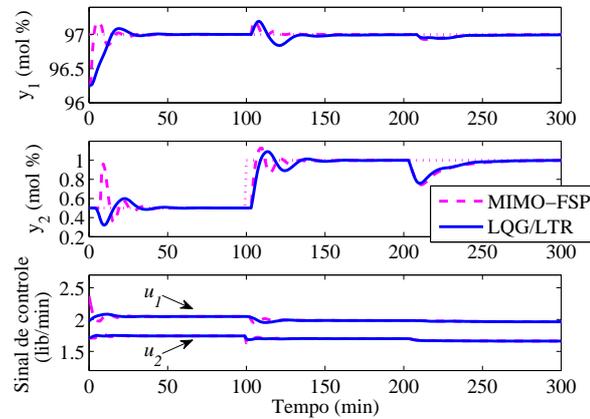
O caso de dinâmicas não-modeladas é considerado para uma variação de 20% no ganho estático e de -20% na constante de tempo de todas as funções de transferência. Esse tipo de incerteza paramétrica leva à análise do que pode-se considerar como “pior caso” quanto ao seguimento de referência já que contribuem com o aumento do máximo sobressinal. Nesse sentido, a Figura 54 mostra que o controlador LQGT é menos sensível que o controlador MIMO-FSP, no que diz respeito a esse tipo de incertezas, ou seja, o máximo sobressinal é menor para o LQGT para ambas as saídas. Além disso, a rejeição a perturbações permanece mais rápida a favor do LQGT.

Figura 53 – Resposta ao degrau da coluna de destilação (caso nominal).



O modelo do sistema a ser controlado, descrito pela equação (5.62), mostra que nessa planta os maiores atrasos não estão localizados na diagonal principal que, de fato,

Figura 54 – Resposta ao degrau considerando-se 20% de incerteza no ganho estático e –20% de incerteza nas constantes de tempo.



possui os menores atrasos para ambas as saídas. Esse tipo de planta é bastante favorável à obtenção do modelo rápido que torna o controlador MIMO-FSP adequado. Por essa razão, a resposta ao degrau para o caso nominal apresenta um comportamento mais rápido, no que diz respeito ao seguimento de referência, para o MIMO-FSP do que para o LQGT. Entretanto, na ocorrência de perturbações externas, a rejeição mais rápida do LQGT indica maior robustez desse controlador do que o MIMO-FSP quanto a incertezas paramétricas de modelo, o que fica claro na resposta ao degrau em que as incertezas são consideradas.

5.3 Proposta de preditor em espaço de estados do modelo CARIMA com polinômio-T

A inclusão do polinômio-T como elemento de sintonia de sistema para controle ótimo foi sugerido na subseção 4.2.4 do capítulo 4. A abordagem proposta é baseada no modelo CARIMA, já que o integrador é incluído por aumento da ordem do estado, técnica comumente usada no controle por espaço de estados.

Por outro lado, a abordagem do polinômio-T tem origem no controle preditivo, em que o sistema é descrito a partir do modelo CARIMA, em que o integrador é levado em conta já na descrição do modelo. Neste caso, a lei de controle é dada em função das variações do sinal de controle $\Delta u(k)$ e não em função do sinal de controle propriamente dito, $u(k)$, como na abordagem do LQG-T.

Nesta seção, apresenta-se a proposta de um preditor obtido a partir do modelo CARIMA com a inclusão do polinômio-T. Neste caso, a lei de controle é obtida em função de $\Delta u(k)$, ao contrário de $u(k)$ comumente encontrado nos controladores em espaço de estados.

5.3.1 Modelo de predições

O modelo CARIMA, com a inclusão do polinômio-T e descrito para um sistema com atraso de transporte d , é dado por:

$$\Delta A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-d) + T(z^{-1})w(k), \quad (5.64)$$

em que $T(z^{-1})$ é o polinômio-T, aplicado como parâmetro de projeto a fim de se atender a critérios desejados quanto à rejeição à perturbação $w(k)$, conforme descrito na subseção 2.4.3 do capítulo 2. Nesse contexto, é comum que considerar $w(k)$ um ruído branco gaussiano, com média nula.

Escrevendo-se o modelo da equação (5.64) em espaço de estados tem-se (PARK; HAN; KWON, 2008):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\Delta u(k-d) + \mathbf{E}w(k); \quad (5.65)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + w(k). \quad (5.66)$$

A aplicação recursiva da equação (5.65) até o instante de tempo $k = k + d$ leva ao modelo de predições:

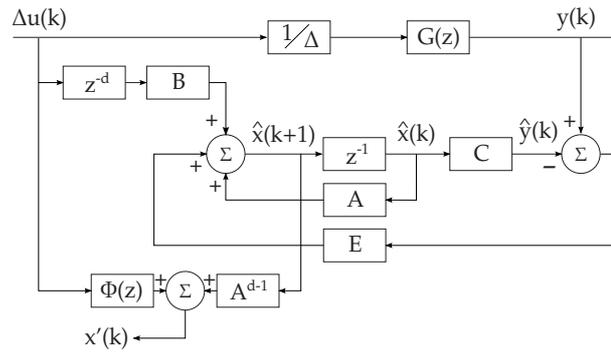
$$\mathbf{x}(k+d) = \mathbf{A}^{d-1}\mathbf{x}(k+1) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{d-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-d-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}\mathbf{E} & \dots & \mathbf{A}^{d-2}\mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k+d-1) \\ w(k+d-2) \\ \vdots \\ w(k+1) \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

A equação (5.67), porém, apresenta todos os valores da perturbação no futuro, ou seja, $w(k+1)$, $w(k+2)$, \dots , $w(k+d-1)$. Portanto, a melhor estimativa futura que pode-se obter desses valores é o valor médio no instante atual, ou seja, $E\{w(k)\} = 0$ se $w(k)$ é ergódico e estacionário. Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+d) &= \mathbf{A}^{d-1}\mathbf{x}(k+1) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{d-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-d-1) \end{bmatrix}; \\ &= \mathbf{A}^{d-1}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{\Phi}(z). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Aqui deve-se observar que o termo $\mathbf{\Phi}(z)$ na equação (5.68) define um filtro FIR, que é sempre estável. Assim, tem-se o diagrama de blocos mostrado na Figura 55.

Figura 55 – Preditor proposto a partir do modelo CARIMA.



Fonte: Autor.

Percebe-se que o preditor proposto contém, em sua estrutura, o observador definido por:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta u(k-d) + \mathbf{E}[y(k) - \hat{y}(k)]; \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta u(k-d) + \mathbf{E}y(k),\end{aligned}$$

que será estável se os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C}$ localizam-se no interior do círculo de raio unitário. Assim, tem-se um critério que define o projeto de \mathbf{E} .

5.3.2 O Teorema da Separação para o preditor proposto

Observando-se o diagrama mostrado na Figura 55, convém definirem-se as variáveis de predição:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(k) &= \hat{\mathbf{x}}(k+d); \\ y'(k) &= \hat{y}(k+d).\end{aligned}$$

Neste caso, pode-se estabelecer uma lei de controle do tipo

$$\Delta u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k+d) = -\mathbf{K}\mathbf{x}'(k). \quad (5.69)$$

Por outro lado, definindo-se

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{x}(k+d); \\ \tilde{y}(k) &= y(k+d),\end{aligned}$$

então pode-se rescrever

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta u(k); \quad (5.70)$$

$$\tilde{y}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k), \quad (5.71)$$

como sendo o sistema que efetivamente deseja-se controlar.

Nesse contexto, uma equação do preditor descrita em termos de $\mathbf{x}'(k)$ e $y'(k)$ é dada por:

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}\Delta u(k) + \mathbf{E}[y'(k) - \tilde{y}(k)]. \quad (5.72)$$

Deve-se observar que $\mathbf{x}'(k)$ é uma estimativa predita do estado do sistema, enquanto $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ pode ser visto como uma projeção do estado do sistema no instante de tempo $k+d$. Dessa forma, é natural que se considere

$$\tilde{\mathbf{e}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}'(k) \quad (5.73)$$

como sendo o erro que se comete ao tentar explicar a predição futura do estado baseado no estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$. Então, aplicando as equações (5.70) e (5.72) na equação (5.73), tem-se

$$\tilde{\mathbf{e}}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{e}}(k),$$

de onde conclui-se que, se os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C}$ localizam-se no interior do círculo de raio unitário, então o erro $\tilde{\mathbf{e}}(k)$ tende assintoticamente a zero e o estado predito $\mathbf{x}'(k)$ pode ser considerado uma medida adequada para que se aplique a lei de controle descrita na equação (5.69).

Portanto, aplicando-se a equação (5.69) na equação (5.70), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}'(k); \\ &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}'(k); \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{e}}(k). \end{aligned}$$

Logo, a equação em malha fechada fica

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{e}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \tilde{\mathbf{e}}(k) \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

que, de fato, permite que se conclua que os polos da realimentação de estados são independentes da escolha de \mathbf{E} , ou seja, a equação (5.74) é o Teorema da Separação aplicado ao preditor proposto. Assim, pode-se escolher o ganho de realimentação \mathbf{K} por qualquer técnica conhecida como alocação de polos ou através de um problema LQR, por exemplo, que estabiliza a planta sem atraso, se o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável.

Logo, escolhendo-se $T(z^{-1})$ estável, então os polos de $(\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C})$ localizam-se no interior do círculo de raio unitário, se o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável. Isso apresenta uma vantagem dessa estratégia em relação ao GPC-T, porque evita o problema restritivo de se evitar o posicionamento do polo do polinômio em valores próximos à borda do círculo,

sem que, na maioria das vezes, seja possível estabelecer um critério definido para esse limiar.

A robustez no FSP é conseguida pela sintonia do filtro de robustez $F_r(z)$, que possui critérios bem definidos de sintonia, conforme discutido no capítulo 2. No caso da estratégia baseada no preditor proposto aqui, a robustez do controlador é sintonizada alterando-se um único parâmetro, o polo do polinômio-T. Portanto, o método proposto apresenta a facilidade de simplificação de sintonia quando comparada com o FSP. No caso da comparação com o GPC-T, a estratégia proposta tem um comportamento mais intuitivo quando se posiciona o polo do polinômio mais proximamente ao círculo de raio unitário.

5.3.3 Análise de robustez

A análise gráfica da robustez requer a obtenção do índice de robustez $I_r(\omega)$, que, por sua vez, torna obrigatório encontrar a função de transferência em malha aberta da estrutura de controle proposta.

Nesse contexto, deve-se observar que o preditor mostrado na Figura 55 depende dos sinais $\Delta u(k)$ e $\hat{w}(k)$ para formar a lei de controle da equação (5.69). Dessa forma, percebe-se que $\Delta u(k)$ passa tanto pelo filtro FIR quanto pela matriz \mathbf{B} , enquanto $\hat{w}(k)$ passa apenas pela matriz \mathbf{E} . Então, torna-se essencial obter a função de transferência para $\Phi(z)$ bem como aquela que relaciona $\mathbf{x}'(k)$ com $\Delta u(k)$.

Observando-se a equação (5.68), tem-se que o filtro FIR $\Phi(z) = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{d-2}\mathbf{B}]$ pode ser escrito em espaço de estados na forma

$$\mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_f \Delta u(k); \quad (5.75)$$

$$\mathbf{y}_f(k) = \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{D}_f \Delta u(k), \quad (5.76)$$

sendo

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_f(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \\ \vdots \\ \Delta u(k-d-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_f = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{d-2}\mathbf{B}], \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{0}.$$

A partir das equações (5.75) e (5.76) pode-se obter a função de transferência equivalente $\mathbf{T}_f(z)$ que relaciona $\mathbf{x}'(k)$ com $\Delta u(k)$, dada por

$$\mathbf{T}_f(z) = \mathbf{K} \mathbf{C}_f (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_f)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{K} \mathbf{D}_f. \quad (5.77)$$

De modo análogo, e considerando a malha aberta pela desconexão de $y(k)$ do preditor, a função de transferência $\mathbf{T}_1(z)$ que relaciona $\mathbf{x}'(k)$ com $\Delta u(k)$ é dada por:

$$\mathbf{T}_1(z) = \mathbf{K}\mathbf{A}^{d-1} (z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{E}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{B}z^{-d} + \mathbf{K}\mathbf{A}^{d-1}\mathbf{B}z^{-d}. \quad (5.78)$$

Assim, a função de transferência resultante da associação entre $\mathbf{T}_f(z)$ e \mathbf{T}_1 é dada por:

$$\mathbf{T}_2(z) = \frac{1}{1 + \mathbf{T}_1(z)\mathbf{T}_f(z)}. \quad (5.79)$$

A função de transferência $\mathbf{T}_w(z)$ que relaciona $\mathbf{x}'(k)$ com $\hat{\mathbf{w}}(k)$ é dada por:

$$\mathbf{T}_w(z) = \mathbf{K}\mathbf{A}^{d-1} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} + \mathbf{K}\mathbf{A}^{d-1}\mathbf{E}. \quad (5.80)$$

Assim, a função de transferência em malha aberta, que associa o controle primário e o preditor, é dada por:

$$\mathbf{L}(z) = \mathbf{T}_2(z) \frac{z}{z-1} z^{-d} \mathbf{G}(z) \mathbf{T}_w(z), \quad (5.81)$$

sendo $z^{-d}\mathbf{G}(z)$ o modelo da planta com atraso que deseja-se controlar.

A equação (5.81) permite obterem-se as funções sensibilidade $\mathbf{S}(z)$ e sensibilidade complementar $\mathbf{C}(z)$, dadas por (WOLOWICH, 1994, pág. 228):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(z) &= (\mathbf{I} + \mathbf{L}(z))^{-1}; \\ \mathbf{C}(z) &= \mathbf{L}(z) (\mathbf{I} + \mathbf{L}(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, considerando-se $z = e^{j\omega T_s}$ pode-se chegar à relação entre o índice de robustez $I_r(\omega)$ e a norma de robustez $|\overline{\delta P}(e^{j\omega T_s})|$, em uma faixa contínua de valores, sendo dada por:

$$|\overline{\delta P}(e^{j\omega T_s})| < \frac{|\mathbf{I} + \mathbf{L}(e^{j\omega T_s})|}{|\mathbf{L}(e^{j\omega T_s})|} = I_r(\omega). \quad (5.82)$$

Portanto, a resposta em frequência baseada na análise gráfica da robustez é útil para que se possa posicionar o polo do polinômio $T(z^{-1})$ adequadamente, a fim de garantir a condição da equação (5.82).

5.3.4 Simulações

Exemplo 5.4. A planta considerada neste exemplo foi previamente estudada por Normey-Rico e Camacho (2009), em que a sintonia do FSP é apresentada para um controlador em tempo contínuo. No exemplo 2.3 do capítulo 2 e na subseção 5.2.5.1 esse sistema é novamente considerado a fim de comparação com os algoritmos propostos. No trabalho

de Santos, Botura e Normey-Rico (2010) esse exemplo é revisitado, em que apresenta-se a proposta uma sintonia do filtro de robustez discutida na subseção 2.3.2 do capítulo 2, para lidar com atenuação a ruído em altas frequências. Esta última abordagem é adotada neste exemplo para efeito de comparação com o preditor proposto nesta seção.

O modelo dessa planta que deseja-se controlar é dado por

$$G(s) = \frac{3.433}{103s - 1} e^{-20s},$$

discretizado considerando-se $T_s = 0.5$ s, resultando no modelo em tempo discreto dado por:

$$G(z) = \frac{0.01669}{z - 1.005} z^{-40}.$$

Para este exemplo, o controlador primário e o filtro de referência da estratégia de controle FSP são dados, respectivamente, por:

$$C(z) = \frac{0.1202z^2 - 0.1195z}{z^2 - 1.9265z + 0.9265}; \quad F(z) = \frac{-1.4765z^2 + 2.8851z - 1.4094}{-0.1202z^2 + 0.1195z}.$$

A fim de garantir a atenuação ao ruído em altas frequências, o filtro de robustez é dado por (SANTOS; BOTURA; NORMEY-RICO, 2010):

$$F_r(z) = 0.03535 \frac{z^2(z - 0.9968)}{(z - 0.995)(z - 0.85)^2}. \quad (5.83)$$

Por outro lado, na estratégia de controle proposta nesta subseção, considera-se que o ganho de realimentação de estados \mathbf{K} na equação (5.69) é calculado por alocação de polos, cujo polo desejado em malha fechada é $P_{mf} = 0.965$, a fim de se garantir o comportamento dinâmico no seguimento de referência semelhante ao FSP. Esse ajuste leva ao ganho

$$\mathbf{K} = [4.5808 \quad 4.4856].$$

Neste caso, o polinômio-T é dado por

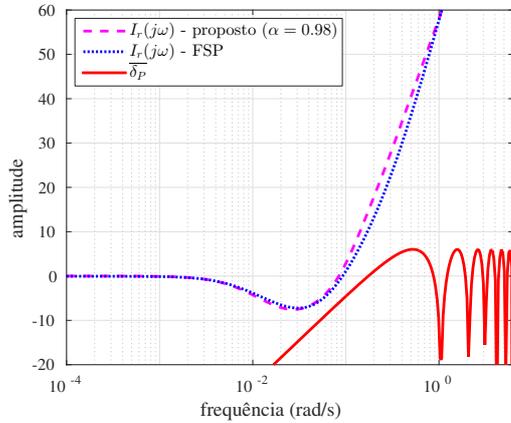
$$T(z^{-1}) = (1 - \alpha)^2 \quad (5.84)$$

em que α é o parâmetro de ajuste que pode ser modificado para tornar a rejeição a perturbações mais lenta (quando α é posicionado mais próximo do círculo de raio unitário) ou mais rápida (quando α é posicionado mais distante do círculo de raio unitário).

A Figura 56a mostra a an FSP sintonizado conforme descrito acima, análise de robustez quanto ao atraso entre o controlador proposto, com $\alpha = 0.98$ e o FSP. Percebe-se um comportamento semelhante para ambos os controladores, entretanto, o método proposto torna a sintonia mais simples, uma vez que é baseada simplesmente na sintonia

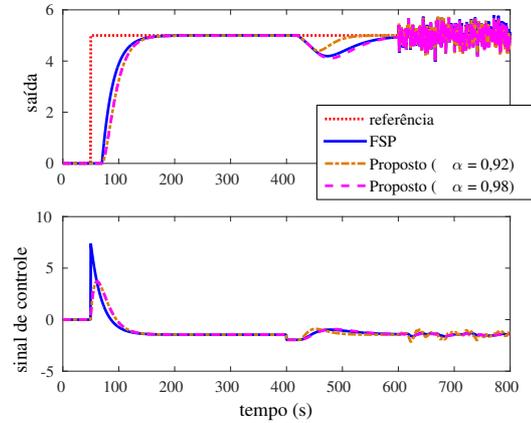
Figura 56 – Sistema instável.

(a) Análise de robustez quanto ao atraso
($\overline{\delta_P} = 30\%$).



Fonte: Autor.

(b) Resposta ao degrau.



Fonte: Autor.

intuitiva do polo do polinômio-T. A Figura 56b mostra os resultados de simulação para o controlador FSP sintonizado conforme descrito acima, e para o controlador proposto para $\alpha = 0.98$ e $\alpha = 0.92$.

Deve-se observar que no método proposto, caso deseje-se uma resposta ao seguimento de referência mais rápida, basta que o polo desejado em malha fechada P_{mf} seja reposicionado em valores mais internos no círculo de raio unitário. O controlador FSP, por outro lado, necessita de um novo projeto para obtenção do controlador primário $C(z)$ e do filtro de referência $F(z)$.

No que diz respeito à rejeição a perturbações, observa-se que é possível acelerar ou retardar esse comportamento simplesmente alterando-se o valor do polo α na equação (5.84). Para o algoritmo FSP, todavia, faz-se necessário um novo projeto para obtenção do filtro de robustez $F_r(z)$.

Portanto, tanto no que diz respeito ao seguimento de referência quanto à rejeição a perturbações, o ajuste da estratégia de controle proposta é simplificado em relação ao FSP.

Exemplo 5.5. Neste exemplo revisita-se o sistema apresentado no exemplo 5.1 para comparação do algoritmo proposto com o GPC-T. O modelo desse sistema é dado por:

$$P(s) = \frac{1}{2s + 1} e^{-4s}.$$

A discretização desse modelo, fazendo-se $T_s = 0.2$, leva a

$$P(z) = \frac{0.095z^{-1}}{1 - 0.905z^{-1}} z^{-20}.$$

A sintonia do algoritmo GPC é mantida a mesma considerada anteriormente e definida por Normey-Rico e Camacho (2007), ou seja, $N_u = N_y = 15$ e $\lambda = 1$. Entretanto, neste exemplo, considera-se o polo do polinômio-T $\alpha = 0,98$ e nenhuma incerteza paramétrica de modelo, a fim de tornar mais evidente a comparação de desempenho quanto à rejeição a perturbações, na resposta ao degrau. Assim, o polinômio-T considerado tanto para o algoritmo proposto quanto para o GPC-T é dado por:

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.96z^{-1} + 0.96z^{-2}.$$

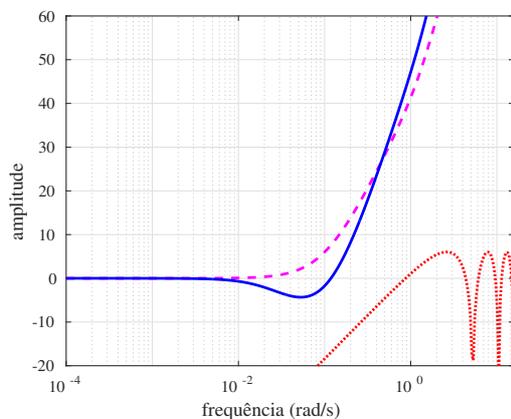
O algoritmo proposto foi sintonizado com o ganho de realimentação calculado a partir do problema LQR, cujos parâmetros são: $\mathbf{R} = 2.5$ e $\mathbf{Q} = C^T C$, resultando em:

$$\mathbf{K} = [3.0904 \quad 2.8048].$$

A Figura 57a mostra as curvas do índice de robustez para a estratégia proposta e para o GPCT, sintonizados conforme descrito acima. A análise de robustez considera uma incerteza de até 30% quanto ao atraso. Neste caso, percebe-se uma melhora considerável de desempenho nas frequências em torno de $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$ a favor do método proposto, já que a curva do índice de robustez está posicionada mais à esquerda do aquela relativa ao GPC-T e, portanto, mais distante da curva de $\overline{\delta_P}$. A Figura 56b mostra os resultados de simulação comparando-se ambos os controladores considerados. Nessa figura, fica evidente a consideração de melhoria de desempenho, quanto à rejeição a perturbações em degrau, da estratégia proposta em relação ao GPC-T.

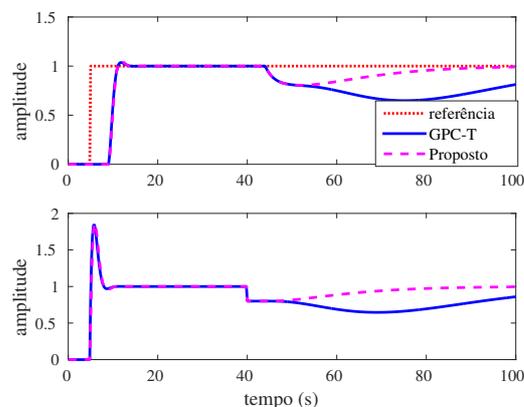
Figura 57 – Sistema estável.

(a) Análise de robustez quanto ao atraso
($\overline{\delta_P} = 30\%$).



Fonte: Autor.

(b) Resposta ao degrau.



Fonte: Autor.

6 ESTUDOS DE CASOS

Este capítulo apresenta dois estudos de casos em que os algoritmos deste trabalho são aplicados, a fim de evidenciar a eficácia das estratégias de controle propostas. Na seção 6.1 apresentam-se os resultados de comparação entre o algoritmo LQG-T e um algoritmo baseado em GPC, aplicados a uma máquina de relutância variável, tendo sido objeto de estudo do trabalho de Correia et al. (2016). Neste caso a planta não exibe atraso de transporte. A seção 6.2 traz os resultados experimentais decorrentes da implantação do algoritmo LQG/LTR para sistemas com atraso aplicado ao projeto piloto de uma incubadora neonatal.

6.1 Máquina de relutância variável

Nesta seção aplica-se a estratégia de controle ótimo LQG com sintonia dada em função do polinômio-T, conforme apresentado na subseção 4.2.4 do capítulo 4. O trabalho foi aplicado a uma Máquina de relutância variável (MRV) operando em modo motor apenas.

MRVs constituem uma classe importante de máquinas elétricas em que há enrolamento de fases somente na parte fixa, chamada de estator. O rotor é constituído de material ferromagnético que gira devido ao torque produzido pela corrente de excitação aplicada às bobinas do estator. Dessa forma, quando o rotor fica em posição alinhada com a bobina energizada do estator, o controle de corrente desliga a fase dessa bobina e energiza a fase vizinha e o ciclo se repete, garantindo assim que o rotor permaneça em movimento.

Entretanto, nesse modelo de operação o rotor pode assumir velocidades não desejadas, sendo necessário, portanto, a aplicação de um controle de velocidade. Nesse contexto, o diagrama de blocos mostrado na Figura 58 (MILLER, 2001) é frequentemente referenciado.

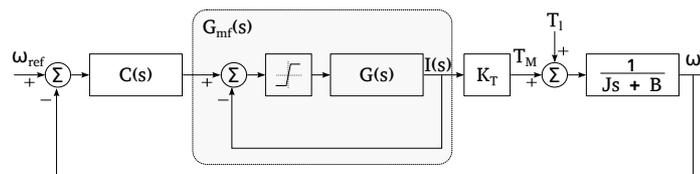


Figura 58 – Diagrama de blocos da máquina de relutância variável (MRV).

A função de transferência $G(s)$ na Figura 58, na malha interna, depende das características eletromagnéticas da máquina. A função de transferência $G_{mf}(s)$ inclui o controle

de corrente e pode ser modelado por um sistema de primeira ordem dado por:

$$G_{mf}(s) = \frac{K}{s + K} \quad (6.1)$$

A componente mecânica da máquina relaciona o momento de inércia J e o coeficiente de viscosidade B , resultando em um modelo de primeira ordem também, dado por:

$$G_{mec}(s) = \frac{1}{Js + B} \quad (6.2)$$

Portanto, o sistema a ser controlado é de segunda ordem, cujo modelo é:

$$G_{SRM}(s) = \frac{K}{(s + K)} \frac{1}{(Js + B)} \quad (6.3)$$

A saída de corrente $i(t)$ e o conjugado mecânico T_m relacionam-se entre si através do ganho K_T , conforme mostrado na Figura 58, sendo dado por (MILLER, 2001):

$$T_m = \frac{1}{2} \frac{dL(\varphi)}{d\varphi} i^2, \quad (6.4)$$

em que $\frac{dL(\varphi)}{d\varphi}$ é um termo constante, chamado de gradiente de variação da indutância, normalmente denominado κ (MILLER, 2001).

Portanto, aplicando-se a equação (6.4) na equação (6.3), o modelo da malha de velocidade da máquina fica:

$$G_{SRM}(s) = \frac{K_v}{as^2 + bs + 1}, \quad (6.5)$$

que é um modelo típico de segunda ordem cujos parâmetros a , b and K_v podem ser obtidos através de técnicas de identificação caixa-cinza. No caso particular da máquina em estudo, a identificação foi baseada em otimização linear com restrições, a fim de obter um modelo em tempo discreto, já considerando um circuito segurador de ordem zero e um período de amostragem $T_s = 0.1$ s. Assim, obtém-se

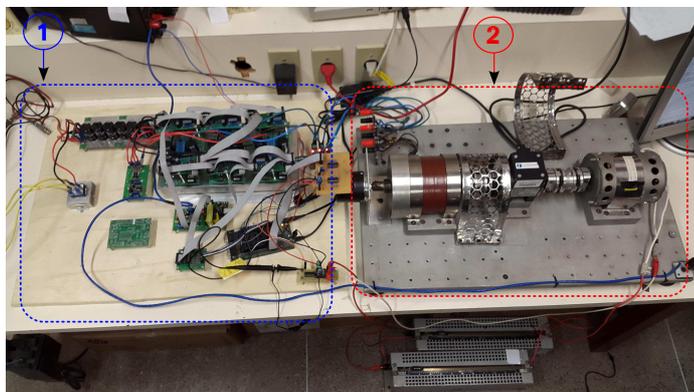
$$G_{SRM}(z) = \frac{0.3032z + 2.89 \cdot 10^{-06}}{z^2 - 0.9048z}. \quad (6.6)$$

A equação (6.6) apresenta um polo próximo ao círculo de raio unitário e um polo distante localizado próximo a zero (polo rápido). Esse tipo de posicionamento de polos claramente indica que o polo rápido deve-se à dinâmica rápida da parte eletromagnética ($z \approx 0$), enquanto a dinâmica da parte mecânica é determinada pelo polo lento ($z = 0.9048$). Logo, uma vez que o termo independente do numerador na equação (6.6) é aproximadamente zero, é mais conveniente considerar o modelo de primeira ordem:

$$G_{SRM}(z) = \frac{0.3032}{z - 0.9048}. \quad (6.7)$$

A bancada experimental é composta de uma MRV do tipo 6/4, acionada por um circuito conversor trifásico, alimentado por uma fonte de 120 V controlada por tensão, conforme apresentado na imagem da Figura 59. Tanto a MRV quanto o conversor foram projetados no Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará. A máquina é acoplada a um gerador em cascata a um reostato, que desempenha o papel de carga resistiva. Assim, variando-se a resistência, varia-se também o torque produzido pela máquina, cujo efeito operacional reflete uma perturbação de torque de carga. Portanto, considera-se uma carga resistiva de 20 W a fim de proporcionar um torque cujo efeito é sensível à velocidade de operação da máquina.

Figura 59 – Bancada experimental. 1 - conversor (circuito de acionamento). 2 - Máquina de relutância variável (MRV) 6/4.



Para esse experimento, considera-se o controlador LQGT proposto, sintonizado com $R = 20$, $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a$, em que $\mathbf{C}_a = [\mathbf{C} \ \mathbf{I}]$. Considera-se o polinômio-T

$$T_{LQGT}(z^{-1}) = (1 - 0.9048e^{j0.6981}z^{-1})(1 - 0.9048e^{-j0.6981}z^{-1}) = 1 - 1.39z^{-1} + 0.82z^{-2}.$$

O controlador escolhido para comparação com o controlador proposto é chamado GPCBC (*GPC Based Control*), inicialmente proposto para controle da malha interna de corrente (TORRICO et al., 2012). A comparação do controlador LQGT com o GPCBC é adequada porque ambos os controladores tem sua robustez determinada pelo polinômio-T. Além disso, no trabalho de Torrico et al. (2012) já se utiliza uma abordagem de posicionamento dos polos do polinômio-T no plano complexo, em que fora mostrado que o melhor posicionamento ocorre a 45° no plano-s. Porém, após a discretização, o polinômio-T para o algoritmo GPCBC fica dado por:

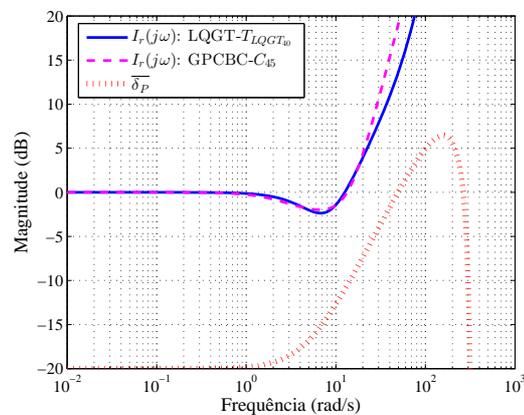
$$T_{GPCBC-45}(z^{-1}) = (1 - 0.9048e^{j0.1}z^{-1})(1 - 0.9048e^{-j0.1}z^{-1}) = 1 - 1.8z^{-1} + 0.82z^{-2},$$

que, no plano-z, corresponde a um ângulo de apenas $5, 7^\circ$.

A análise de robustez considerada para ambos os controladores é realizada em termos da incerteza multiplicativa $\overline{\delta_P}$ para 10% de incerteza no ganho estático e duas

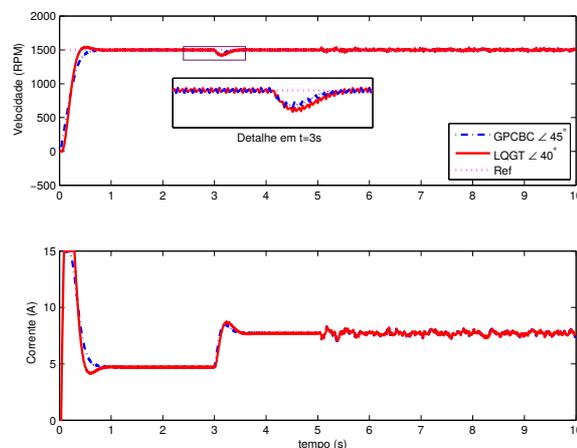
amostras de variação no atraso, em conformidade com a análise vista no trabalho de Torrico et al. (2012), e segue a mesma análise de robustez apresentada nos exemplos anteriores ao longo desse trabalho. Assim, verifica-se na Figura 60 que que o índice de robustez $I_r(j\omega)$ para ambos os controladores, GPCBC-45° e LQGT-40°, apresentam praticamente o mesmo comportamento quanto à robustez até $\omega \approx 11 \text{ rad/s}$. Para frequências maiores que essa, então as curvas de $I_r(j\omega)$ dos controladores separam-se. Em particular, a curva de $\bar{\delta}_p$ é mais próxima de ser violada em frequências entre 8 rad/s e 11 rad/s , porém nessa região, os controladores GPCBC-45° e LQGT-40° são equivalentes.

Figura 60 – Análise de robustez, considerando-se 10% de incerteza no ganho e duas amostras de incerteza no atraso.



O resultado de simulação para resposta ao degrau considerada para ambos os controladores é mostrada na Figura 61. Nessa figura percebe-se que o comportamento é similar em ambos os casos no que diz respeito a rejeição a perturbações. A análise de

Figura 61 – Resposta ao degrau (simulação).



resposta ao degrau é complementada com os dados da Tabela 9, que apresenta os índices de desempenho relacionados à saída (IAE) e ao sinal de controle (TV). Os dados apresentados nessa tabela corroboram o comportamento equivalente observado na resposta ao degrau.

Tabela 9 – Índices de desempenho

Controlador	IAE		TV	
	SR	LDR	SR	LDR
GPCBC $\angle 45^\circ$	328.04	23.34	2161.94	1851.86
LQGT $\angle 40^\circ$	328.48	28.33	3794.11	1917.57

Em complemento à análise de robustez e de resposta ao degrau, optou-se pela inclusão da análise espectral do sinal de controle. Para esse propósito, considera-se $u(t)$ para $t \geq 5$ s (a partir do instante de tempo de inclusão do ruído branco aditivo). O nível DC é retirado subtraindo-se o valor médio do sinal de controle ao longo do intervalo acima mencionado, resultando no sinal:

$$u_0(k) = u(k) - \bar{u}, \quad (6.8)$$

em que $\bar{u} = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^M u(j)$, sendo M o número total de amostras do sinal $u(k)$ sobre o intervalo considerado ($t \geq 5$ s, neste caso).

Entretanto, $u_0(k)$ é um sinal em tempo discreto e a densidade espectral de potência (DSP) é estimada para uma faixa contínua de frequências. Assim, é necessário levar em conta a relação: $z = e^{j\omega T_s}$, $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_s}$. Dessa forma, a DSP pode ser estimada para $u_0(k)$ no intervalo $0 < \omega \leq \frac{\pi}{T_s}$. A Figura 62 mostra que o controlador LQGT exibe menores picos de DSP na maioria das frequências mais baixas e aproximadamente o mesmo pico que o GPCBC na frequência indesejada 40 Hz, que deve-se a um sinal intrínseco de acoplamento electromecânico, que pode ser visto como um sinal de perturbação em altas frequências. Esse comportamento é quantificado na Tabela 10 que mostra que a relação de potência e o índice VAR são favoráveis ao controlador LQGT, ou seja, melhor desempenho de eficiência energética.

Figura 62 – Espectro de frequências relativo a $u_0(t)$ ($t \geq 5$) para o sinal de controle da Figura 61.

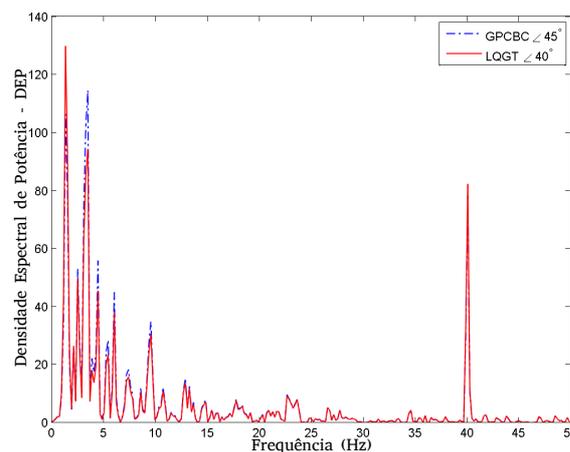


Tabela 10 – Análise de potência

Controlador	Potência total	VAR
GPCBC $\angle 45^\circ$	100.65	373.69
LQGT $\angle 40^\circ$	95.27	342.14

Na sequência, apresentam-se os resultados experimentais, obtidos em bancada, em que foram implementados os controladores discutidos na simulação. A Figura 63 apresenta os resultados de resposta ao degrau, que, conforme esperado a partir dos resultados de simulação na Figura 61, apresenta desempenho semelhante quanto ao seguimento de referência e rejeição a perturbações.

Porém, apesar do fato de que as curvas relacionadas à saída e ao sinal de controle serem similares, a Tabela 11, mostra que o controlador LQGT apresenta uma leve vantagem nos índices relacionados ao seguimento de referência (IAE-SR e TV-SR), quando comparados ao GPCBC.

Tabela 11 – Índices de desempenho: resultados experimentais

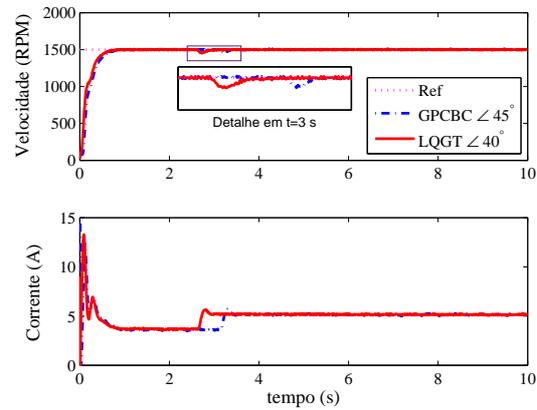
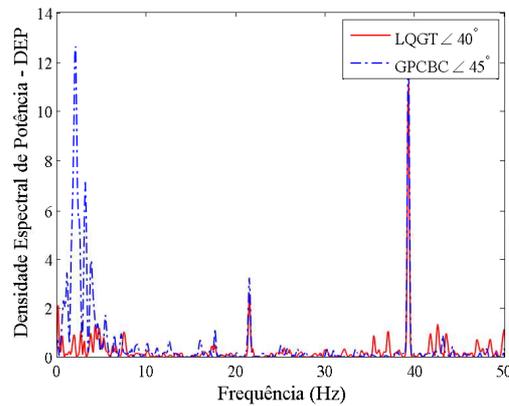
Controlador	IAE		TV	
	SR	LDR	SR	LDR
LQGT $\angle 40^\circ$	258.17	13.50	4292.00	1008.00
GPCBC $\angle 45^\circ$	321.51	10.60	4397.00	923.00

Assim como no caso das simulações, procedeu-se com a análise espectral, considerando $u_0(t)$ para $t \geq 5$ s. Os resultados podem ser vistos na Figura 64 com picos de DSP significativamente menores em baixas frequências para o LQGT. Apesar de que o sinal de perturbação em torno de 40 Hz tem aproximadamente o mesmo pico para ambos os controladores, a potência total do LQGT é cerca de metade daquela do GPCBC, conforme apresentado na Tabela 12. A análise é complementada observando-se o índice VAR, cujos valores apresentados tem a mesma ordem de relação da potência. Isso comprova o ganho de eficiência energética em favor do controlador proposto. Todavia, apesar dos resultados promissores, é recomendado proceder com em ensaio de longa duração a fim de validar a tendência de melhoria no rendimento energético observada nesse estudo. Afinal, a análise aqui considerada é limitada a um intervalo de somente 5 segundos.

Tabela 12 – Análise de potência (resultados experimentais)

Controlador	Potência total	VAR
LQGT $\angle 40^\circ$	4.61	16.06
GPCBC $\angle 45^\circ$	8.85	23.91

Figura 63 – Resposta ao degrau (resultados experimentais).

Figura 64 – Espectro de frequências relativo a $u_0(t)$ ($t \geq 5$) para o sinal de controle da Figura 63 (resultdos experimentais).

6.2 Planta piloto de incubadora neonatal

Nesta seção analisa-se o desempenho da estratégia de controle LQG/LTR aplicada a um sistema real com atraso de transporte, a fim de comprovar a eficácia do método proposto. A planta em estudo trata-se de um projeto piloto de uma incubadora neonatal, projetada e construída no departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará.

Vale ressaltar que, assim como no caso das simulações apresentadas no capítulo 5, a análise de robustez é baseada nas curvas de sensibilidade e sensibilidade complementar, comumente empregado em sistemas de controle ótimo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005; WOLOWICH, 1994). Entretanto, reforça-se aqui que o fato dos controladores apresentarem um bom desempenho em um conjunto de exemplos, não significa necessariamente que também apresentarão em outros, mesmo que de mesma classe (estáveis, instáveis, ou multiviáveis). Essa conclusão deve pressupor um detalhamento analítico completo de forma genérica (para qualquer classe de problemas).

O arranjo experimental é um protótipo composto de duas partes principais: a

unidade de processamento de dados e a unidade da incubadora.

A unidade de processamento de dados consiste de um computador pessoal, onde executa-se o código do controlador. Uma placa de aquisição de dados Nidaq-USB6009 de fabricação da *National Instruments* realiza a conexão entre o computador e a unidade da incubadora. Assim, torna-se possível a troca de informações relacionadas aos valores de umidade e temperatura do interior da incubadora, obtidos através de sensores específicos, bem como a modificação de atuadores a partir dos sinais de controle obtidos no código do controlador. Essa comunicação se dá através de um cabo USB.

A unidade da incubadora possui três estágios principais, divididos conforme apresentado na sequência. O estágio superior é um ambiente fechado com paredes de acrílico, normalmente chamado de domo, montado sobre uma placa com dois furos, por onde o ar flui entrando e saindo do domo. O estágio intermediário abriga uma resistência de aquecimento controlada por tensão, além de um pequeno ventilador, para os propósitos do controle de temperatura. Na parte inferior localiza-se um umidificador ultrasônico que controla a umidade interna do domo. A Figura 65 apresenta uma imagem da unidade incubadora descrita acima.

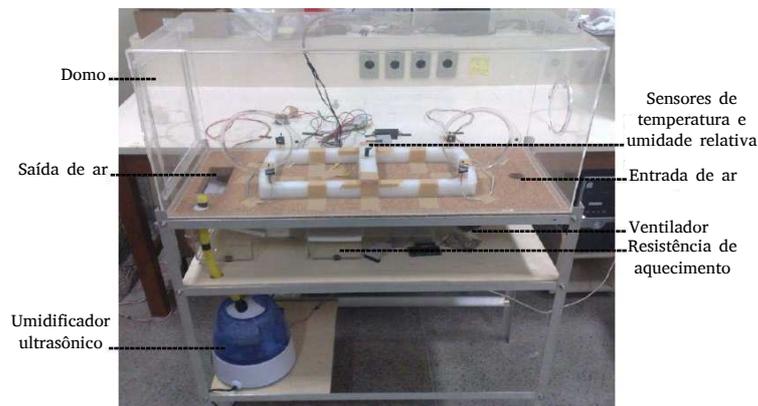


Figura 65 – Protótipo da unidade incubadora do estudo de caso experimental.

O controle de temperatura depende do ponto de operação da resistência de aquecimento, que depende diretamente da tensão aplicada em seus terminais. Essa tensão é controlada a partir de um circuito de acionamento cujo sinal de controle vem da placa de aquisição de dados e, conseqüentemente, do controlador. Um ventilador, que opera a velocidade constante e é posicionado em frente à resistência, permite a circulação de ar no interior do domo. Uma conexão semelhante para o acionamento do circuito de temperatura aciona o umidificador, cuja saída de ar é aplicada ao domo através de tubulação específica, separada da tubulação do controle de temperatura. Uma vista esquemática da unidade incubadora é apresentada na Figura 66, que ilustra o princípio de operação descrito acima. As leituras dos sensores são passadas a um microcontrolador que converte os valores lidos em sinais analógicos de tensão, a fim de permitir a conectividade com a

porta de entrada da placa Nidaq-USB6009.

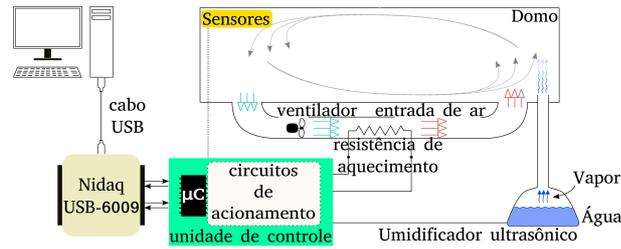


Figura 66 – Diagrama esquemático do protótipo da unidade incubadora.

Diversos processos de caráter prático, industriais ou laboratoriais, consistem no controle de uma variável em um ambiente que exibe atraso de transporte, como neste caso, em que deseja-se controlar a temperatura e a umidade no interior da incubadora. Nesse contexto, a aplicação da estratégia LQG associada ao preditor proposto no capítulo 5 é adequada a este caso. Neste caso, pode-se considerar tanto a sintonia por recuperação de malha (LQG/LTR) quanto a sintonia através do polinômio-T (LQGT). Aplicações de controle de temperatura são especialmente interessantes na área de controle de processos porque são frequentemente mencionados como um problema clássico de no que diz respeito a sistemas com atraso de transporte, conforme mencionado no capítulo 2. No caso específico da incubadora em estudo, além do controle de temperatura tem-se o controle de umidade em um mesmo ambiente.

O sistema em estudo fora identificado como um modelo de primeira ordem com adição de tempo morto (FOPDT), dado pela matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(s) \\ \mathbf{Y}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.3145}{1.753s+1}e^{-0.184s} & \frac{-0.3483}{11.29s+1}e^{-1.31s} \\ \frac{-0.01649}{0.3065s+1}e^{-0.496s} & \frac{0.2356}{26.07s+1}e^{-1.46s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(s) \\ \mathbf{U}_2(s) \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

onde onde os subíndices 1 estão associados à malha de temperatura e os subíndices 2 estão associados à malha de umidade. Apesar de tratar-se de um sistema com apenas uma amostra de atraso na malha de temperatura e quatro amostras na malha de umidade, o atraso completo do sistema é superior a um minuto, já que o período de amostragem utilizado na discretização é $T_s = 24 \text{ s}$. A discretização do atraso é dada por:

$$d = \frac{L}{T_s} \quad (6.10)$$

Considerando o aspecto prático, as simulações mostradas nesta subseção apresentam comportamento dinâmico que corresponde ao controle de temperatura 4°C acima da temperatura ambiente e da umidade 10% acima da umidade ambiente.

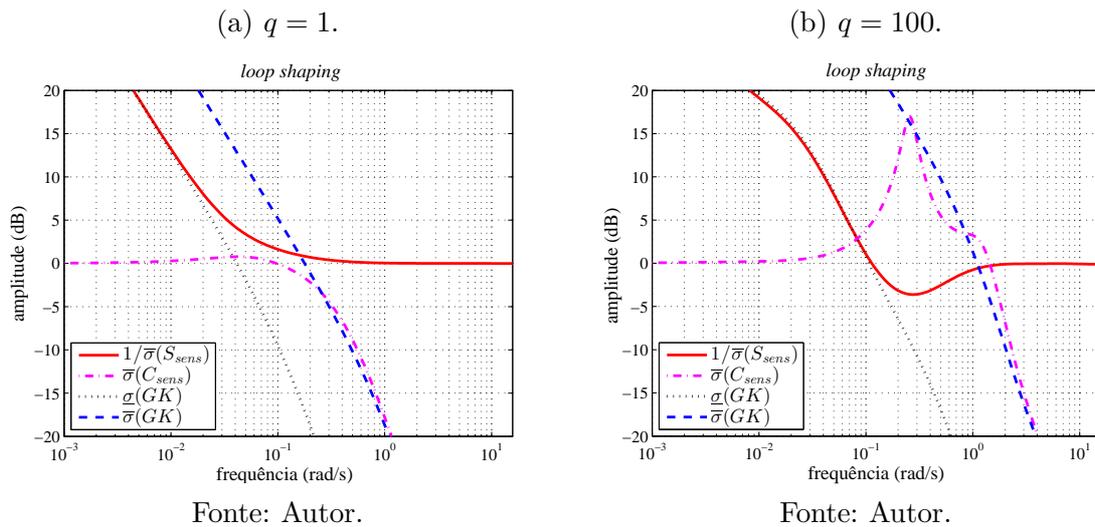
Neste estudo o controlador LQG foi ajustado com

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

com a simulação tomada em um tempo total de 200 *min*.

Para o caso do LQG/LTR, foram considerados dois diferentes valores de sintonia: $q = 1$ e $q = 100$. As Figuras 67a e 67b mostram a resposta em frequência do sistema analisando-se o gráfico de *loop shaping*, em que o controlador é ajustado para tornar a resposta do sistema controlado limitada às barreiras de robustez. A barreira mais à esquerda está associada às perturbações em baixas frequências, e é obtida a partir do inverso da função de sensibilidade complementar. A barreira mais à direita é associada às frequências mais elevadas (normalmente ruídos de medida), e é obtida a partir da função de sensibilidade. Detalhes sobre esta técnica de projeto e sobre as funções associadas podem ser encontrados nos livros-texto de Skogestad e Postlethwaite (2005, pág. 44 a 55) e Wolowich (1994, pág.231 a 237).

Figura 67 – Resposta em frequência da planta-piloto da incubadora neonatal: controlador LQG/LTR.

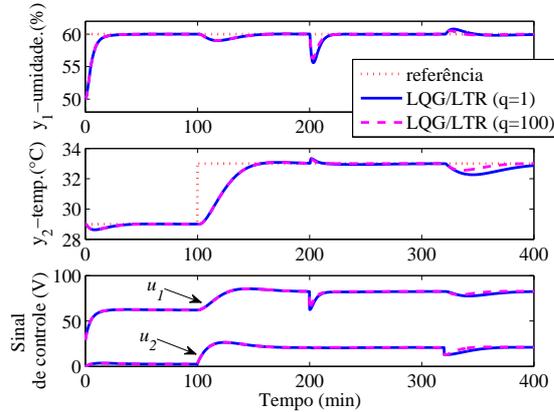


No caso nominal, quando não há variações paramétricas de modelo, os resultados de simulação relacionados à resposta ao degrau, não apresentam variações significativas no que diz respeito ao seguimento de referência ou acoplamento quando varia-se o valor de q , conforme vê-se na Figura 68. Entretanto, a rejeição a perturbações é consideravelmente acelerada quando altera-se o valor de $q = 1$ para $q = 100$.

Para o caso do controlador LQG-T considerou-se escolher os polinômios-T a fim de satisfazer a equação 4.104, sendo dados por:

$$T_1(z^{-1}) = (1 - \alpha_1);$$

$$T_2(z^{-1}) = (1 - \alpha_2),$$

Figura 68 – Resposta ao degrau para o controlador LQG/LTR com $q = 1$ e $q = 100$.

Fonte: Autor.

tal que

$$\alpha_1 = 0.85e^{\pm j\theta_1},$$

$$\alpha_2 = 0.80e^{\pm j\theta_2},$$

em que $\theta_1 = 0^\circ$ ou $\theta_1 = 118^\circ$ e $\theta_2 = 0^\circ$ ou $\theta_2 = 124^\circ$. A sintonia $\rho_1 = 0.85$ e $\rho_2 = 0.80$ foi escolhida porque leva ao posicionamento de polos dos polinômios-T mais à esquerda que os polos das funções de transferência da diagonal principal das linhas respectivas. Portanto, tem-se polinômios estáveis e que levam à aceleração da rejeição de perturbações. Os ângulos $\theta_1 = 118^\circ$ e $\theta_2 = 124^\circ$ foram escolhidos porque minimizam o produto $\mathbf{E}_1\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}_2\mathbf{B}$, respectivamente.

Os gráficos de robustez apresentados nas Figuras 69a e 69b mostram que o comportamento em frequência é suavizado quando tem-se $\theta_1 = 118^\circ$ e $\theta_2 = 124^\circ$, porém, mesmo no caso em que $\theta_1 = \theta + 2 = 0^\circ$, vê-se que a distorção nas funções envolvidas é significativamente menor que aquela referente ao LQG/LTR quando faz-se $q = 100$.

A resposta ao degrau para o caso nominal (quando não consideram-se as incertezas paramétricas de modelo), é mostrada na Figura 70, em que percebe-se que o comportamento do controlador LQGT é equivalente para ambas as sintonias ($\theta_{1,2} = 0^\circ$ e $\theta_{1,2} \neq 0$).

Por outro lado, na Figura 71a, considera-se uma incerteza no atraso que equivale a três amostras, ou seja, a planta exibe três amostras a mais em todas as funções de transferência, enquanto o controlador aplicado é projetado para o caso nominal, ou seja, considerando-se apenas os atrasos nominais da equação (6.9).

Para a implementação experimental em bancada, as referências desejadas são 10% e 4°C acima da umidade e temperatura ambientes, respectivamente. A Figura 72 mostra a resposta ao degrau quando o controlador LQG/LTR ($q = 1$) é implementado.

Figura 69 – Resposta em frequência da planta-piloto da incubadora neonatal: controlador LQG-T.

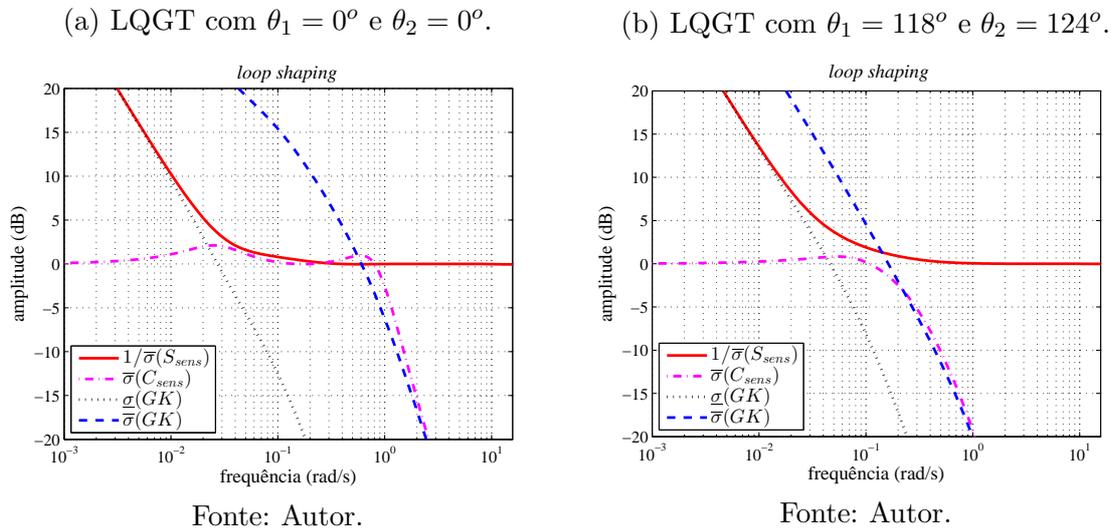
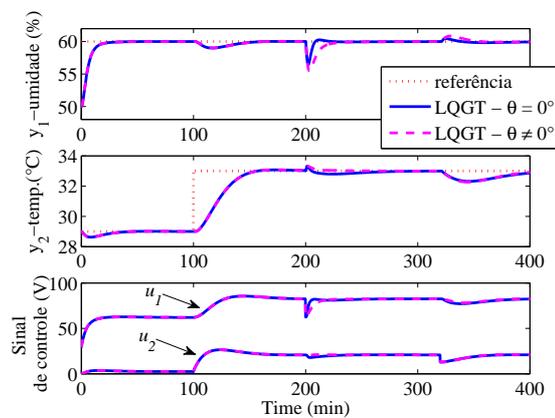


Figura 70 – Resposta ao degrau para o controlador LQG-T ($\theta_{1,2} = 0^\circ$ e $\theta_1 = 118^\circ$, $\theta_2 = 124^\circ$) - caso nominal.



Fonte: Autor.

Figura 71 – Resposta ao degrau para os controladores LQG/LTR e LQG-T considerando-se 3 amostras de incerteza no atraso.

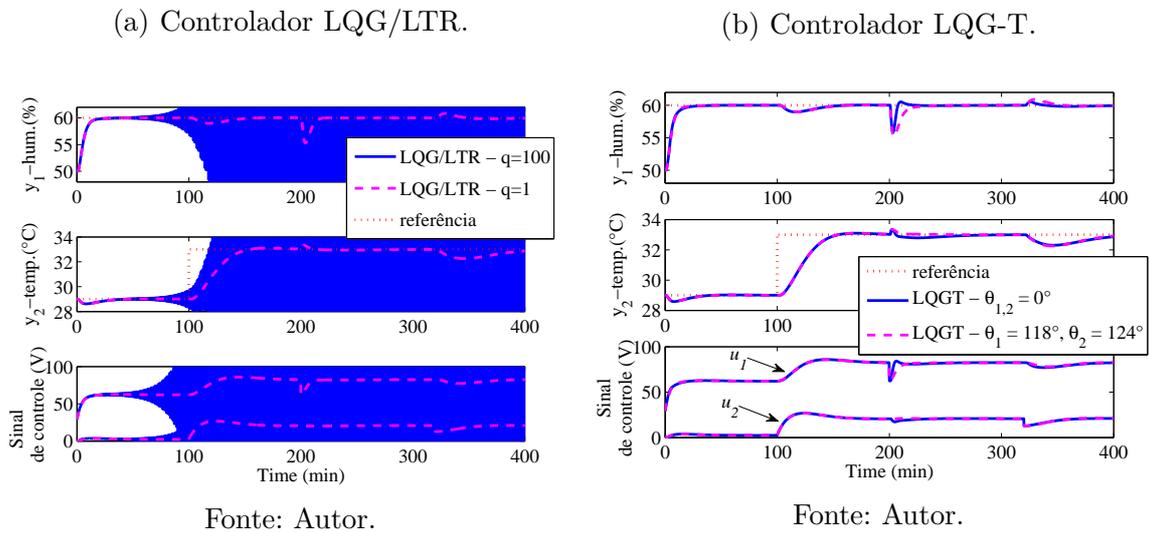
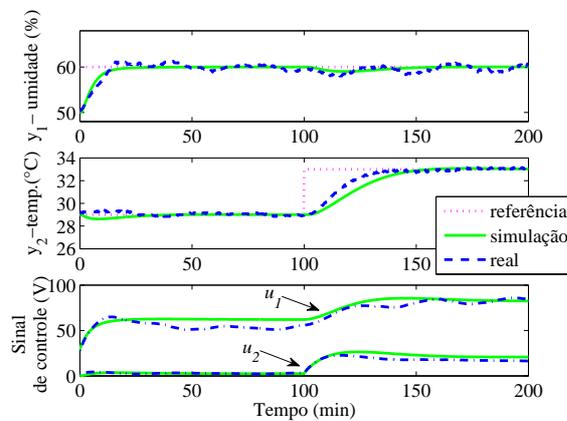


Figura 72 – Resultados experimentais da resposta ao degrau para o controlador LQG/LTR ($q = 1$).



7 CONCLUSÕES

Este trabalho tem objetivos voltados à aplicação de estratégias de controle de interesse prático, uma vez que buscam simplificar tanto o projeto quanto a sintonia, mantendo-se critérios de robustez. Nesse contexto, foram propostas estruturas de controle para esse fim, cujos resultados foram comparados com técnicas conhecidas e consolidadas. Tanto no âmbito da simulação quanto no da implementação prática em laboratório, as técnicas apresentadas mostram que os critérios de desempenho e robustez são garantidos ou, em alguns casos, incrementados.

As principais contribuições desse trabalho são enumeradas na sequência:

1. A proposta da estratégia SDTC, em que o controle primário é dado por dois filtros FIR na malha de realimentação. Nesse contexto, a ausência de integrador explícito na malha de alimentação direta leva a uma resposta que pode ser acelerada ou retardada alterando-se um simples ganho. A técnica foi aplicada a sistemas com múltiplos atrasos, e os resultados foram publicados na revista “*ISA Transactions*” (TORRICO; CORREIA; NOGUEIRA, 2016);
2. A proposta de sintonia de controle LQG baseada no polinômio-T, comumente aplicado à área de controle preditivo para incremento da robustez. Mostra-se que o posicionamento dos polos do polinômio-T no interior do círculo de raio unitário altera o desempenho de robustez do sistema, levando-o a um desempenho semelhante à tradicional técnica de recuperação de malha (LTR). Essa estratégia de controle foi aplicada a uma bancada de laboratório de um motor de relutância variável, cujos resultados foram publicados na revista “*Przegląd Elektrotechniczny*” (CORREIA et al., 2016);
3. A proposta de modificação de um preditor, proposto por Santos et al. (2012), a fim de incluir a estrutura resultante como observador de estados de um sistema de controle baseado em espaço de estados. Nesse caso, mostra-se que o Princípio da Separação pode ser aplicado à estrutura preditor-observador, tornando possível que os polos do observador e da realimentação de estado predito possam ser alocados de forma independente. Assim, podem-se utilizar técnicas conhecidas de alocação de polos, ou aplicar a otimização tanto na estimação do estado (filtro de Kalman) quanto na realimentação (problema LQR). Nesse último caso tem-se um controle LQG aplicado a uma planta com atraso de transporte. Logo, a sintonia através do polinômio-T, também proposta neste trabalho, pode ser aplicada. A vantagem dessa técnica é que pode ser aplicada tanto a sistemas monovariáveis quanto multivariáveis, com as matrizes envolvidas da mesma ordem das matrizes que descrevem

o sistema que deseja-se controlar. Essa técnica foi aplicada ao protótipo de uma incubadora neonatal;

4. A proposta de um preditor em espaço de estados baseado no modelo CARIMA com a inclusão do polinômio-T. Nesse caso, comparou-se essa estratégia com técnicas conhecidas e consolidadas de controle com robustez, obtendo-se resultados semelhantes, como no caso da comparação com o FSP, ou até melhores, como no caso da comparação com o GPC-T. A vantagem dessa técnica está na simplicidade de sintonia do polinômio-T, que atua como elemento de robustez se comparada com o filtro de robustez do FSP.

Como perspectivas de trabalhos futuros, este trabalho propõe:

1. Aplicar a adaptação da estrutura preditor-observador a sistemas com restrições de entrada e/ou a sistemas não-lineares;
2. Estender o estudo da estrutura do preditor-observador a sistemas multivariáveis não quadrados;
3. Aplicar o estudo do preditor em espaço de estados baseado no modelo CARIMA com polinômio-T a plantas multivariáveis, investigando-se o desempenho em sistemas quadrados e não-quadrados;
4. Aplicar o estudo do preditor em espaço de estados baseado no modelo CARIMA com polinômio-T aos casos de sistemas com restrições de entrada e/ou não-lineares;
5. Investigar as estratégias discutidas, ou seja, tanto o preditor-observador quanto o preditor baseado no modelo CARIMA com polinômio-T, em sistemas com atraso variável e/ou no âmbito do controle H_∞ .

A obtenção de resultados satisfatórios, conforme apresentados nos exemplos ao longo do texto ou dos estudos de caso do capítulo 6, mostram que as técnicas de controle apresentadas neste trabalho são adequadas para aplicação tanto em sistemas SISO quanto MIMO. Dessa forma, as estratégias propostas neste trabalho contribuem para a obtenção de controladores cuja sintonia é simplificada em relação a técnicas tradicionais, o que tem interesse sob o ponto de vista da implementação prática.

REFERÊNCIAS

- ÅSTRÖM, K. J. Frequency domain properties of otto smith regulators. *International Journal of Control*, v. 2, n. 26, p. 307–314, 1977. Citado na página 24.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÅGLUND, T. *Advanced PID Control*. USA, NC: ISA, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34 e 36.
- ÅSTRÖM, K. J.; HANG, C. C.; LIM, B. C. A new smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, p. 343–345, 1994. Citado na página 37.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-Controlled Systems*. Upper Sadle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 110.
- AGUIRRE, L. A. *INTRODUÇÃO À IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS: TÉCNICAS LINEARES E NÃO LINEARES APLICADAS A SISTEMAS REAIS*. 3a. ed. [S.l.]: Editora UFMG, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 87.
- ALBERTOS, P.; GARCIA, P. Predictor-observer-based control of systems with multiple input/output delays. *Journal of Process Control*, v. 22, p. 1350–1357, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 67, 74 e 75.
- ALMEIDA, R. N. C. et al. A lmi/mpc embedded controller applied to a switched reluctance machine. In *Anais do 12º Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência - Santa Maria, RS, Brasil*, Sociedade Brasileira de Eletrônica de Potência, 2013. Citado na página 110.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1989. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 97.
- ATHANS, M. A tutorial on the lqg/ltr method. In *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, p. 1289–1296, 1986. Citado na página 128.
- BISHOP, C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 175.
- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. *Model Predictive Control*. 2nd. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2004. Citado 8 vezes nas páginas 25, 52, 55, 57, 58, 59, 62 e 99.
- CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalized predictive control. part i. the basic algorithm. *Automatica*, v. 23, p. 137–148, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 99.
- CORREIA, W. B. et al. The t-polynomial approach for lqg control applied to a switched reluctance motor (srm). *PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY*, v. 92, p. 161–167, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 149 e 163.
- CUTLER, C. R.; RAMARKER, B. C. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In: . [S.l.: s.n.], 1980. Citado na página 51.

- DOYLE, J.; FRANCIS, B.; TANNENBAUM, A. *Feedback Control Theory*. [S.l.]: Mcmillan Publishing Co., 1990. Citado na página 60.
- DOYLE, J. C. A tutorial on the lqg/ltr method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-23, p. 756–757, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 91.
- DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard h_2 and h_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 8, n. 34, p. 831–847, 1989. Citado na página 25.
- DOYLE, J. C.; STEIN, G. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 24, n. 24, p. 607–611, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 24, 91 e 128.
- FLESCH, R. C. et al. Unified approach for minimal output dead time compensation in mimo processes. *Journal of Process Control*, v. 21, p. 1080–1091, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 138.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th. ed. New Jersey, USA: Prentice Hall, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 24, 29, 30, 31, 32 e 86.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital Control of Dynamic Systems*. Menlo Park, CA, USA: Addison-Wesley, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 44, 46, 47 e 93.
- FRIEDLAND, B. *Control System Design*. [S.l.]: Dover Publications, 2005. Citado 7 vezes nas páginas 83, 85, 86, 87, 88, 175 e 177.
- GARCIA, P.; ALBERTOS, P. Dead-time-compensator for unstable mimo systems with multiple time delays. *Journal of Process Control*, v. 20, p. 877–884, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 26, 127, 128 e 129.
- GELB, A. *Applied optimal estimation*. [S.l.]: MIT press, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 95.
- GLOVER, K.; DOYLE, J. C. State-space formulae for all stabilizing controller that satisfy an h_1 norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems and Control Letters*, n. 11, p. 167–172, 1988. Citado na página 25.
- GONZALEZ, A. et al. Robustness of discrete-time predictor-based controller for time varying measurement delay. *Control Engineering Practice*, n. 20, p. 102–110, 2012. Citado na página 26.
- ISHIHARA, T. Sensitivity properties of a class of discrete-time lqg controllers with computation delays. *Systems & Control Letters*, n. 11, p. 299–307, 1988. Citado na página 25.
- ISHIHARA, T.; TAKEDA, H. Loop transfer recovery techniques for discrete-time optimal regulators using prediction estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 31, p. 1149–1151, 1986. Citado na página 25.
- KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B. *Linear estimation*. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2000. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 102.

- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960. Citado na página 87.
- KINNAERT, M.; PENG, Y. Discrete-time lqg/ltr technique for systems with time delays. *Systems & Control Letters*, v. 8, p. 303–311, 1990. Citado na página 25.
- KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, v. 32, p. 1361–1379, 1996. Citado na página 25.
- KUO, B. C. *Digital Control Systems*. 2nd. ed. New York, USA: Oxford University Press, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 93.
- KUO, B. C.; GOLNARAGHI, M. F. *Automatic Control Systems*. 8th. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, 2005. Citado na página 24.
- LATHI, B. P. *MODERN DIGITAL AND ANALOG COMMUNICATION SYSTEMS*. 2nd. ed. NY USA: Oxford University Press, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 173 e 174.
- LIN, F. *Robust Control Design*. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2007. v. 1. Citado na página 106.
- MACIEJOWSKI, J. M. Asymptotic recovery for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, n. 6, p. 602–605, 1985. Citado na página 99.
- MACIEJOWSKI, J. M. *MULTIVARIABLE FEEDBACK DESIGN*. Workingham, England: Addison-Wesley Publishing Company, 1989. Citado na página 92.
- MACIEJOWSKI, J. M. *Predictive Control with constraints*. Upper Sadle River, NJ , USA: Prentice Hall, 2001. Citado na página 51.
- MATAUSEK, M. R.; MICIC, A. D. A modified smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, n. 41, p. 1199–1203, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- MATAUSEK, M. R.; RIBIC, A. I. Control of stable, integrating and unstable processes by the modified smith predictor. *Journal of Process Control*, n. 22, p. 338–343, 2012. Citado na página 40.
- MELO, R. C.; FARINES, J.-M.; NORMEY-RICO, J. E. Modelling and predictive congestion control of tcp protocols. In: SIPAHI, R. et al. (Ed.). *Time delay systems: methods, applications and new trends*. Berlin: Springer, 2012. p. 393–404. Citado na página 67.
- MELO, R. C.; NORMEY-RICO, J. E.; FARINES, J.-M. Tcp modelling and predictive congestion control. In: *8th IFAC workshop on time-delay systems*. Sinaia. [S.l.]: IFAC, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 78.
- MILLER, T. J. E. *Electronic Control of Switched Reluctance Machines*. Oxford, UK: Newnes, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 149 e 150.
- MIRKIN, L.; PALMOR, Z. J.; SHNEIDERMAN, D. Dead-time compensation for systems with multiple i/o delays: A loop-shifting approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, p. 2542–2554, 2011. Citado na página 26.

- MIRKIN, L.; PALMOR, Z. J.; SHNEIDERMAN, D. h^2 optimization for systems with adobe input delays: A loop shifting approach. *Automatica*, v. 48, p. 1722–1728, 2012. Citado na página 26.
- MIRKIN, L.; RASKIN, N. Every stabilizing dead-time controller has an observer-predictor-based structure. *Automatica*, v. 39, p. 1747–1754, 2003. Citado na página 25.
- MITA, T. Optimal digital feedback control systems counting computation time of control laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, p. 34–47, 1985. Citado na página 25.
- MORARI, M.; ZAFIROU, E. *Robust Process Control*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1989. Citado na página 23.
- NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 6. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2011. Citado na página 24.
- NORMEY-RICO, J. E.; BORDONS, C.; CAMACHO, E. F. Improving the robustness of dead-time compensating pi controllers. *Control Engineering Practice*, v. 5, p. 801–810, 1997. Citado na página 41.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. *Control of Dead-time Processes*. London, UK: Springer-Verlag, 2007. Citado 16 vezes nas páginas 23, 24, 30, 31, 34, 40, 41, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 74, 131 e 148.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control*, n. 19, p. 38–47, 2009. Citado 9 vezes nas páginas 24, 37, 40, 41, 47, 65, 73, 134 e 145.
- NORMEY-RICO, J. E.; FLESCHE, R. C.; SANTOS, T. L. Unified dead-time compensation structure for siso processes with multiple dead times. *ISA Transactions*, v. 53, p. 1865–1872, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 24, 67, 68, 69, 73, 74, 75, 78 e 79.
- NORMEY-RICO, J. E.; GARCIA, P.; GONZALEZ, A. Robust stability analysis of filtered smith predictor for time-varying delay. *Journal of Process Control*, v. 22, p. 1975–1984, 2012. Citado na página 26.
- PALMOR, Z. J. *The Control Handbook. Time Delay Compensation: Smith Predictor and its Modifications*. [S.l.]: CRC Press and IEEE Press, 1996. Citado na página 24.
- PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1965. Citado na página 173.
- PARK, J. J.; HAN, S.; KWON, W. H. Finite memory generalized predictive controls for discrete-time state space models. In: *International Conference on Control, Automation and Systems - Seoul, Korea*. [S.l.: s.n.], 2008. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 141.
- PHILLIPS, C. L.; NAGLE, H. T. *Digital Control System Analysis and Design*. 3rd. ed. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1995. Citado na página 93.
- PHILLIPS, C. L.; NAGLE, J. H. T. *Digital Control System Analysis and Design*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.

- RAO, C. V.; WRIGHT, S. J.; RAWLINGS, J. B. Applications of interior-point methods to model predictive control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 3, p. 723–757, 1998. Citado na página 110.
- RICHALET, J. et al. Model predictive heuristic control: Application to industrial processes. *Automatica*, v. 14, p. 413–428, 1978. Citado na página 51.
- ROBINSON, B. D.; CLARKE, D. W. Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control. *Proceedings IEE, Part D*, v. 138, p. 2–8, 1991. Citado na página 62.
- ROSSITER, J. A. *Model-based predictive control: a practical approach*. Boca Raton - Florida, USA: CRC Press, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 51, 61 e 99.
- SANTOS, T. L. M.; BOTURA, P. E. A.; NORMEY-RICO, J. E. Dealing with noise in unstable dead-time process control. *Journal of Process Control*, n. 20, p. 840–847, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 24, 49, 51 e 146.
- SANTOS, T. L. M. et al. On the explicit dead-time compensation for robust model predictive control. *Journal of Process Control*, n. 22, p. 236–246, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 26, 110, 111, 113, 114 e 163.
- SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. *Journal of Process Control*, n. 13, p. 291–309, 2003. Citado na página 133.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL: Analysis and design*. 2. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 25, 89, 121, 138, 155 e 158.
- SMITH, O. Closed control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, v. 53, n. 5, p. 217–219, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 35.
- SONG, X.; YAN, X. Linear quadratic gaussian control for linear time-delay systems. *IET Control Theory and Applications*, v. 8, n. 6, p. 375–383, 2014. Citado na página 25.
- TORRICO, B. C. *Contribuições ao Controle Preditivo Robusto de Sistemas com Atraso*. Tese (Doutorado) — Departamento de Automação e Sistemas - DAS, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, SC, 2008. Citado na página 46.
- TORRICO, B. C. et al. Robust control based on generalized predictive control applied to switched reluctance motor current loop. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, ASME, v. 136, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 151 e 152.
- TORRICO, B. C. et al. Simple tuning rules for dead-time compensation of stable, integrative and unstable first order dead-time processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2013. Citado 11 vezes nas páginas 24, 49, 50, 63, 64, 72, 73, 80, 122, 123 e 125.
- TORRICO, B. C.; CORREIA, W. B.; NOGUEIRA, F. G. Simplified dead-time compensator for multiple delay siso systems. *ISA Transactions*, v. 60, p. 254–261, 2016. Acesso em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2015.10.018>. Citado 3 vezes nas páginas 67, 70 e 163.

- WOLOWICH, W. A. *AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS: BASIC ANALYSIS AND DESIGN*. [S.l.]: Saunders College Publishing, 1994. Citado 6 vezes nas páginas 33, 121, 138, 145, 155 e 158.
- WOOD, R. K.; BERRY, M. W. Terminal composition control of a binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, Pergamon Press., v. 28, p. 1707–1717, 1973. Citado na página 136.
- YOON, T. W.; CLARKE, D. W. Towards robust adaptive predictive control. In: _____. *Advances in Model-Based Predictive Control*. [S.l.]: Oxford University Press, 1994. p. 402–414. Citado na página 62.
- YOON, T. W.; CLARKE, D. W. Observer design in receding-horizon control. *International Journal of Control*, v. 2, p. 151–171, 1995. Citado na página 62.
- ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverse. *IEEE Transactions on Automatic Control*, n. 26, p. 301–320, 1981. Citado na página 25.
- ZHANG, H.; DUAN, G.; XIE, L. Linear quadratic regulation for linear time-varying systems with multiple input delays. *Automatica*, v. 42, p. 1465–1476, 2006. Citado na página 25.
- ZHANG, H.; XIE, L.; DUAN, G. h_∞ control of discrete-time systems with multiple input delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, p. 271–283, 2007. Citado na página 67.
- ZHANG, H. et al. A reorganized innovation approach to linear estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n. 10, p. 1810–1814, 2004. Citado na página 25.

Anexos

ANEXO A – ALGUNS CONCEITOS ESTATÍSTICOS

Os momentos estatísticos desempenham papel importante no estudo de processos aleatórios, definidos a partir da expressão (PAPOULIS, 1965, pág. 209):

$$m_{ij} = E\{x^i y^j\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^j f_{xy}(x, y) dx dy, \quad (\text{A.1})$$

onde x e y são dois processos aleatórios e $E\{\cdot\}$ é o operador matemático que designa o valor esperado da variável entre as chaves. A função $f_{xy}(x, y)$ é chamada de função densidade de probabilidade e descreve a possibilidade de ocorrência de um evento em um experimento envolvendo as variáveis x e y conjuntamente.

Pode-se derivar a função densidade de probabilidade de uma das variáveis envolvidas, conhecendo-se sua função conjunta (LATHI, 1995, pág. 416):

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dy \quad (\text{A.2})$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dx. \quad (\text{A.3})$$

A ordem de um momento estatístico é dada por $n = i + j$, onde i e j são mostrados na equação (A.1). Então, os momentos de primeira ordem são:

$$m_{10} = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \eta_x \quad (\text{A.4})$$

$$m_{01} = E\{y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y) dy = \eta_y. \quad (\text{A.5})$$

Seguindo essa ideia, os momentos de segunda ordem são:

$$m_{20} = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = \sigma_x \quad (\text{A.6})$$

$$m_{02} = E\{y^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_y(y) dy = \sigma_y. \quad (\text{A.7})$$

Que são definidos como as variâncias dos processos x e y , respectivamente. Outro momento importante de segunda ordem é aquele obtido quando se faz $i = 1$ e $j = 1$, ou seja,

$$m_{11} = E\{xy\} = \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{xy}(x) dx = R_{xy}, \quad (\text{A.8})$$

que é definida como a covariância de x e y .

O significado físico de dois processos aleatórios está relacionado com as amplitudes nos instantes de tempo t e $t + \tau$, onde $\tau \in \mathbb{R}$. Se os processos x e y são ergódicos, então a média estatística e a média temporal são iguais. Uma discussão mais aprofundada sobre ergodicidade pode ser encontrados no texto de Lathi (1995, pág. 419).

Supondo que os processos aleatórios são matriciais, então

$$R_{xy}(\tau) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{y}^T(t + \tau)\},$$

o qual, fazendo-se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, então tem-se

$$R_x(\tau) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t + \tau)\},$$

conhecida como função de autocorrelação do processo $\mathbf{x}(t)$. Essa função desempenha papel importante na análise de processos aleatórios, porque sua transformada de Fourier fornece a densidade espectral de potência

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{A.9})$$

associada ao processo $\mathbf{x}(t)$. Nesse contexto, considerando que $\mathbf{x}(t)$ é um processo aleatório com média nula, então o produto $\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t + \tau) = 0$ para qualquer valor $\tau \neq 0$. Assim, a função de autocorrelação de $\mathbf{x}(t)$ pode ser aproximada idealmente por um impulso na origem, sendo então dada por:

$$R_x(0) = \delta(t), \quad (\text{A.10})$$

cuja transformada de Fourier leva a

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega\tau} d\tau = 1. \quad (\text{A.11})$$

Esse resultado mostra que o espectro de frequências ocupado por um sinal do tipo ruído branco é constante em toda a faixa do espectro de frequências. O aspecto prático, porém difere um pouco já que a função impulso é considerada uma idealização matemática. Portanto, o resultado mostrado na equação (A.11) deve ser interpretado como o espectro de um sinal que ocupa uma faixa muito ampla de valores de frequência, considerada infinita para a maioria dos sistemas reais que são limitados em uma banda de frequências muito menor.

A função densidade de probabilidade $f_x(x)$ indica a probabilidade de ocorrência das amplitudes de um sinal aleatório $x(t)$. Nesse caso, tendo o sinal $x(t)$ uma distribuição de probabilidades semelhante a uma variável aleatória x com distribuição normal, então a função $f_x(x)$ desse sinal será dada pela função gaussiana

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma^2}}, \quad (\text{A.12})$$

e o processo aleatório associado a $x(t)$ é chamado de processo gaussiano. Um processo gaussiano com densidade espectral de potência uniforme é chamado de processo aleatório branco gaussiano (LATHI, 1995, pág. 447).

Para o caso de um processo aleatório branco gaussiano em que \mathbf{x} tem dimensão n , a função $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ é dada por (FRIEDLAND, 2005, cap. 11):

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|R_x|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T R_x^{-1}\mathbf{x}\right\}, \quad (\text{A.13})$$

onde R_x é a matriz de covariância associada a \mathbf{x} , com dimensões $n \times n$ e $|R_x|$ é o determinante de R_x (BISHOP, 2007, pág. 78).

ANEXO B – O OBSERVADOR DE ESTADOS DE LUENBERGER

Considerando que os estados de um sistema não estão disponíveis para medição, então pode ser necessário que esses estados seja estimados, para os propósitos de controle. Nesse contexto, pode-se utilizar um sistema dinâmico paralelo ao sistema dinâmico que se deseja controlar.

O ideal seria estimar um estado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ nesse modelo dinâmico paralelo de tal forma que fosse idêntico ao estado do modelo do sistema real $\mathbf{x}(t)$. Entretanto, nem sempre isso é possível. Assim, uma estimativa plausível consiste em considerar o sistema paralelo inclui o sinal de saída $y(t)$, levando à equação do estado estimado dada por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}y(t). \quad (\text{B.1})$$

A ideia básica consiste em escolher $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ e \mathbf{L} tal que o sinal de erro

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{B.2})$$

seja suficientemente pequeno, ou idealmente nulo. De acordo com Friedland (2005, cap. 7), esse é o método de Luenberger para obtenção do observador. Devido à comparação do estado real $\mathbf{x}(t)$ com uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}(t)$ desse estado, o sinal de erro $\mathbf{e}(t)$ dado pela equação (B.2) é chamado de erro de estimação. Assim, considerando o modelo da planta dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

então, a equação diferencial descritiva desse sinal fica dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t); \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}y(t); \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}(t) + (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})\mathbf{u}(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Uma vez que se deseja que o erro $\mathbf{e}(t)$ seja independente de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$, então deve-se ter

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}; \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}. \quad (\text{B.5})$$

Além disso, como se deseja que o erro $\mathbf{e}(t)$ tenda assintoticamente a zero, então os autovalores de $\hat{\mathbf{A}}$ devem permanecer no semiplano esquerdo, ou seja, os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ devem possuir parte real negativa. Portanto, o problema é semelhante àquele da seção anterior para a escolha da matriz de realimentação de ganhos \mathbf{K} em que os polos de malha

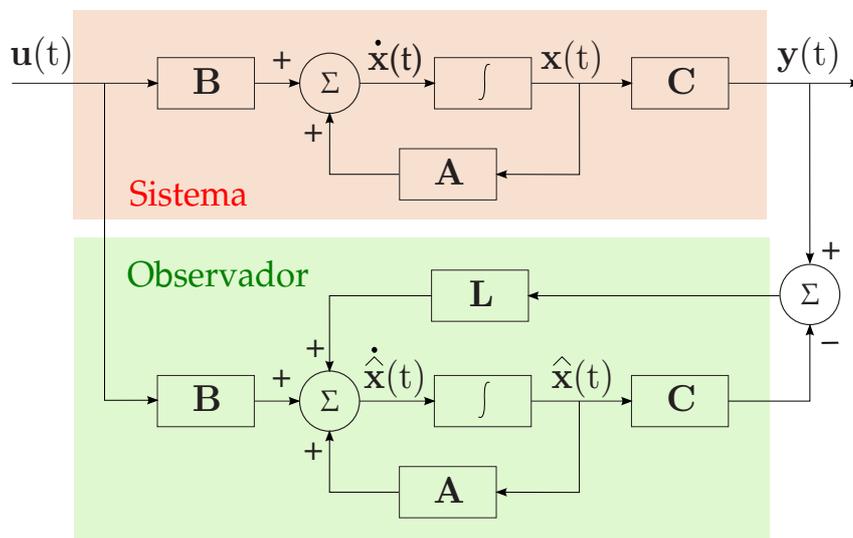
fechada podem ser arbitrariamente escolhidos se o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável. Neste caso, a escolha da matriz de ganhos \mathbf{L} segue raciocínio semelhante, com os polos do observador podendo ser arbitrariamente posicionados se o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável.

Substituindo-se as equações (B.4) e (B.5) na equação (B.1), obtém-se então

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)], \quad (\text{B.6})$$

que constitui a equação fundamental do observador de estados. A Figura 73 apresenta o diagrama de blocos do observador dado pela equação (B.6).

Figura 73 – Diagrama de blocos do observador de estados de ordem plena.



Fonte: Autor