

Diego Ximenes Macedo

**Osciladores Harmônicos Acoplados
Dependentes do Tempo.**

Fortaleza-CE, Brasil

Fevereiro de 2012.

Diego Ximenes Macedo

Osciladores Harmônicos Acoplados

Dependentes do Tempo.

Dissertação de mestrado apresentada
ao Departamento de Física da
Universidade Federal do Ceará.

Orientador:

Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
MESTRADO EM FÍSICA

Fortaleza-CE, Brasil

Fevereiro de 2012.

M12o **Macedo, Diego Ximenes**
 Osciladores Harmônicos Acoplados Dependentes do Tempo / Diego
 Ximenes Macedo. - Fortaleza, 2012.
 65 f.: il. color., enc.; 30cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de
Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2012.

Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.

1. Mecânica Quântica. 2. Física Matemática. 3. Mecânica I. Título.

CDD 530.12

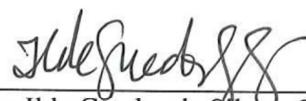
Diego Ximenes Macedo

Osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo

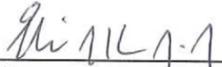
Dissertação submetida à Coordenação do
Curso de Pós-Graduação em Física, da
Universidade Federal do Ceará, como
requisito parcial para a obtenção do grau
de Mestre em Física.

Aprovada em 23/02/2012

BANCA EXAMINADORA



Dr. Ilde Guedes da Silva - Orientador
UFC


Dr. João Milton Pereira Junior
UFC
Dr. Eudenilson Lins de Albuquerque
UFRN

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer os meus pais Gessia Ximenes de Araújo e Vilemar Ximenes Macedo pela dedicação que tiveram comigo durante toda a minha vida. A minha namorada, a minha irmã e a minha sobrinha pela alegria que proporcionam em minha vida. Por isso, este trabalho é dedicado a elas.

Não menos importante para a realização deste trabalho foi meu orientador Ilde Guedes de Silva ao qual agradeço pela paciência que teve em me orientar durante o mestrado. Gostaria, também, de agradecer a alguns professores do ensino médio que são: Fernando, Nira e Moacir pelas vezes que me ajudaram em momentos de dificuldades. Gostaria de agradecer também a todos os professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará. No mestrado fiz muitos amigos que são: Bruno Rafael Ximenes, Daniel Gomes, Daniel Marchesi, Davi Dantas, Diego Lucena, Diego Rabelo, Hygor Piaget, Kauã Monteiro, Leandro Jader, Levi Leite, Rafael Alencar, Saulo Dantas e Vagner Bessa e a eles agradeço pelas vezes que me ajudaram. Agradeço, também, a todos os funcionários do Departamento de Física da UFC e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Finalmente gostaria de agradecer toda a minha família, mas em especial aos meus tios Gerardo, Maria do Carmo, Maria Eliene e Maria Elieuda pelo muito que me ajudaram. Por fim gostaria de dar o maior agradecimento de todos: à Deus nosso criador.

“Honestidade é o primeiro capítulo
do livro da sabedoria.”

(Thomas Jefferson).

Resumo

Neste trabalho apresentamos soluções clássicas e quânticas de osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Nesses sistemas as massas (m), frequências (ω) e o parâmetro de acoplamento (k) são funções do tempo. Quatro sistemas são investigados, a saber: (i) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$ e $k = k_0$; (ii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$, e $k = k_0 e^{\gamma t}$; (iii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{-\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{-\gamma t/2}$ e $k = k_0$; e (iv) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{\gamma t/2}$ e $k = k_0 e^{\gamma t}$, onde m_0 , ω_{0i} ($i = 1,2$), k_0 e γ são constantes.

Para obter as soluções clássicas usamos uma transformação de coordenada e momento juntamente com uma transformação canônica para escrever o Hamiltoniano original como a soma de dois Hamiltonianos de osciladores harmônicos desacoplados dependentes do tempo com frequências modificadas dependentes do tempo e massas unitárias. Encontramos soluções analíticas para a posição e a velocidade para cada oscilador de todos os sistemas.

Para obter as soluções quânticas exatas usamos uma transformação unitária e o método invariante de Lewis e Riesenfeld. As funções de onda são escritas em termos de uma quantidade escalar a qual é solução da equação de Milne-Pinney. Para cada sistema resolvemos a respectiva equação de Milne-Pinney e discutimos como as flutuações quânticas e o produto de incerteza evoluem no tempo.

Abstract

In this work we present the classical and quantum solutions of time-dependent coupled harmonic oscillators. In these systems the masses (m), frequencies (ω) and coupling parameter (k) are functions of time. Four systems are investigated, namely: (i) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$ and $k = k_0$; (ii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$, and $k = k_0 e^{\gamma t}$; (iii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{-\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{-\gamma t/2}$ and $k = k_0$; and (iv) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{\gamma t/2}$ and $k = k_0 e^{\gamma t}$, where m_0 , ω_{0i} ($i = 1, 2$), k_0 , and γ are constants.

To obtain the classical solutions we use a coordinate and momentum transformations along with a canonical transformation to write the original Hamiltonian as the sum of two Hamiltonians of uncoupled harmonic oscillators with modified time-dependent frequencies and unitary masses. We find the analytical expression for position and velocity of each oscillator of the systems.

To obtain the exact quantum solutions we use a unitary transformation and the Lewis and Riesenfeld invariant method. The wave functions obtained are written in terms of a c-number quantity (ρ) which is solution of the Milne-Pinney equation. For each system we solve the respective Milne-Pinney equation and discuss how the quantum fluctuations and the uncertainty product evolve with time.

Sumário

1	Introdução	01
2	Osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo: tratamento clássico	08
2.1	Transformações canônicas	08
2.2	Osciladores harmônicos acoplados	10
2.3	Exemplos de osciladores acoplados	15
3	Osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo: tratamento quântico	28
3.1	Oscilador harmônico simples com frequência dependente de tempo	29
3.2	Função de onda	34
3.3	Produtos de incerteza	37
3.4	Soluções da equação de Milne-Pinney	41
4	Conclusões e perspectivas	49
4.1	Conclusões	49
4.2	Perspectivas	51
Referências		52

Lista de Figuras

2.1 Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (i). Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2)	23
2.2 Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (ii). Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2)	23
2.3 Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (iii). Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2)	24
2.4 Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (iv). Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2)	24
2.5 Dependência temporal da função $A(t)$ (veja eq. (2.83))	26
2.6 Dependência temporal da função $B(t)$ (veja eq. (2.84))	27
3.1 Incerteza na posição para o oscilador 1 em função do tempo . Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv))	44
3.2 Incerteza na posição para o oscilador 2 em função do tempo . Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv))	44
3.3 Incerteza no momento para o oscilador 1 em função do tempo . Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso i(v))	45
3.4 Incerteza no momento para o oscilador 2 em função do tempo . Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv))	45

3.5 Produto de incerteza para o oscilador 1 em função do tempo. Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv))	47
3.6 Produto de incerteza para o oscilador 2 em função do tempo. Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv))	47

Capítulo 1

Introdução

As primeiras evidências que se tem do estudo do oscilador harmônico (OH) datam do século XVIII [1]. Provavelmente um dos primeiros estudos do OH foi feito pelo físico e matemático suíço Leonhard Euler em 1739 [1-3], onde ele resolveu a equação diferencial $m\ddot{x} + kx = 0$ através do método das quadraturas (um método numérico para resolução de equações diferenciais). Nestes trabalhos Euler estudou a equação do OH do ponto de vista puramente matemático.

Depois destes estudos iniciais feito por Euler, o OH passou a ser objeto de estudo de muitos autores. Com efeito, no começo do século XIX foi proposta a seguinte questão: dada uma equação de movimento, qual o Lagrangeano (função matemática introduzida em 1809 pelo matemático Poisson [1]) que a produz? Para sistemas conservativos, como o oscilador harmônico simples (OHS), a resposta é muito simples: o Lagrangeano é definido como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial. Entretanto, para sistemas não conservativos ou dissipativos, como o oscilador harmônico amortecido (OHA), esta questão é muito mais complicada e até hoje é discutida.

Devido à dificuldade de encontrar um Lagrangeano para sistemas dissipativos, Lord Rayleigh introduziu em 1878 [1] de forma “ad hoc” nas equações de Euler-Lagrange, uma função dissipativa que quando escolhida convenientemente reproduz a equação de movimento do OHA. Apesar da equação de Euler-Lagrange-Rayleigh reproduzir a equação de movimento correta para sistemas dissipativos, ela não representa uma descrição satisfatória destes sistemas, pois ela não vem de nenhum princípio variacional. Para contornar tal problema, Bateman em 1931 [4], Caldirola em 1941 [5], Kanai em 1948 [6] e Denman em 1966 [7], propuseram um Lagrangeano diferente para tratar o OHA. Eles consideraram o Lagrangeano como o

produto do Lagrangeano de um OHS por uma função exponencial do tempo. Quando calculamos a equação de Euler-Lagrange para este novo Lagrangeano (função explícita do tempo) obtemos a equação de movimento do OHA.

Durante muito tempo o Lagrangeano de Kanai-Caldirola-Bateman (LKCB) foi usado para descrever sistemas dissipativos, pois o Hamiltoniano associado a este Lagrangeano depende explicitamente do tempo. Porém, em 1979, Ray [8] concluiu que o Hamiltoniano de Kanai-Caldirola-Bateman (HKCB) representa na verdade um OHS com massa variando exponencialmente no tempo e que o seu valor médio é constante, logo ele não poderia ser usado para descrever o OHA, apesar de gerar a equação de movimento correta. Ray [8] observou também que para este sistema o momento canônico é diferente do momento cinético, sendo o primeiro uma função explícita do tempo e o segundo não apresentando nenhuma dependência temporal explícita. A diferença entre os dois momentos reside no fato que a HKCB descreve um sistema de massa variável no tempo. Para sistemas dependentes do tempo os dois momentos coincidem. Com isso, o estudo de Lagrangeano para sistemas dissipativos continuou sendo pesquisado.

Assim, Herrera em 1986 [9] propôs um novo princípio variacional, que é semelhante ao princípio variacional de Hamilton, mas com o Lagrangeano multiplicado por uma função exponencial do tempo. Este novo princípio variacional reproduz novamente a equação de movimento do OHA e o valor médio do Hamiltoniano de Herrera sobre qualquer período decresce no tempo, indicando que, sistemas dissipativos podem ser descrito por esse Hamiltoniano. Porém, apesar dessas evidências não há uma boa justificativa para acrescentar a função exponencial e, por isso, esse novo princípio variacional pode não estar correto. Ainda no mesmo ano Kobe, Reali e Sieniutycz [10] demonstraram que a igualdade entre energia e Hamiltoniano só é válida para sistemas conservativos. Para sistemas dissipativos as duas quantidades devem ser diferentes. Eles chegaram a esse resultado usando o LKCB, e, por isso, essa demonstração não é completamente satisfatória. Portanto, como já dizemos anteriormente, o problema de encontrar um Lagrangeano para sistemas dissipativos continua objeto de estudo até hoje e de certo modo é um problema que continua em aberto.

Por outro lado, uma das maneiras de tratar sistemas quânticos conservativos ou dissipativos é encontrar o Hamiltoniano associado ao sistema, quantizá-lo e em seguida resolver a equação de Schrödinger. Os primeiros autores que tentaram introduzir dissipaçāo na mecānica quāntica foram Caldirola e Kanai [5-6], através da HKCB, mas como já dissemos nāo obtiveram sucesso, pois seu Hamiltoniano descreve um OHS cuja massa varia exponencialmente no tempo. Além do mais, o HKCB viola o Princípāo de Incerteza de Heisenberg (PIH) [11] quando ele é utilizado para descrever o OHA. Para este sistema o produto de incerteza decresce exponencialmente no tempo [12-13] e para tempos suficientemente longos pode ser menor que $\hbar/2$. Porém, quando ele é utilizado para descrever o OHS com massa variando exponencialmente no tempo o produto de incerteza satisfaz o PIH.

Continuando com o estudo de sistemas dissipativos, Lewis em 1967 [14], demonstrou que para o oscilador harmônico dependente do tempo (OHDT) existe um invariante (constante de movimento), que já tinha sido encontrado por Ermakov em 1880 [15], e por isso, ficou conhecido como invariante de Ermakov-Lewis. Um ano depois, Lewis e Riesenfeld [16] desenvolveram uma teoria geral de invariantes explicitamente dependentes do tempo. Eles encontraram uma relação simples entre os autoestados do invariante e as soluções da equação de Schrödinger (ES). Eles ainda usaram o invariante de Ermakov-Lewis e aplicaram o método ao estudo do OH com frequência dependente do tempo e ao movimento de uma partícula carregada em um campo magnético dependente do tempo. Entretanto, para encontrar a função de onda pelo método de Lewis e Riesenfeld (LR) [16] é preciso resolver a equação de autovalor para o operador invariante e essa tarefa é muito difícil. Porém, Hartley e Ray (HR) [17] contornaram este problema, aplicando uma transformação unitária na equação de autovalor para o operador invariante e a reduziram a uma equação de Schrödinger independente do tempo cuja solução pode ser encontrada facilmente. O sistema que Hartley e Ray estudaram foi o OHS com frequência dependente do tempo e massa unitária. Em seguida, Pedrosa [18] usando o método de LR e uma generalização da transformação unitária de Hartley e Ray encontrou a função de onda exata para o OHS com massa e frequência dependente do tempo.

Em virtude do exposto acima, o método de LR juntamente com a transformação unitária de Hartley e Ray tem proporcionado uma ferramenta poderosa para a solução da ES para Hamiltonianos quadráticos dependentes do tempo. O único problema é que o invariante, e consequentemente a função de onda, depende de uma solução particular da equação de Milne-Pinney [19-21], que é uma equação diferencial não-linear e, por isso, em muitas situações não possui solução analítica. Assim, mesmo depois de todo esse estudo em sistemas dissipativos, podemos afirmar que quer classicamente na solução da equação de movimento ou quanticamente na solução da equação de Schrödinger a maioria dos sistemas não-conservativos (sistemas cujo Hamiltoniano depende explicitamente do tempo) não possuem soluções analíticas ou são muito complicados de resolver.

Assim como o OH, os osciladores acoplados (OA) são muito importantes em Física. De fato OA representam um problema fundamental em Ótica Quântica [22]. Além do mais, estes sistemas são muito importantes no estudo de processos coletivos clássicos ou quânticos [23-25], onde é necessário achar soluções exatas para sistemas de osciladores harmônicos acoplados. O sistema de dois osciladores harmônicos acoplados tem sido muito estudado na literatura. Por exemplo, em 1988, Yeon [23] e colaboradores usando o método de integral de Feynman obtiveram o propagador para osciladores harmônicos simétricos (os dois osciladores possuem a mesma massa e a mesma frequência) independentes do tempo e encontraram o valor médio da energia. Entretanto, eles não encontraram a função de onda do sistema. Em 1999, Zhukov e Zhukova [26] também usando o método de integral de Feynman obtiveram o propagador exato para osciladores harmônicos simétricos acoplados com massa variando exponencialmente no tempo.

O modelo de osciladores harmônicos acoplados também tem sido usado para estudar efeitos quânticos em circuitos elétricos mesoscópicos [27-38]. A palavra mesoscópico é usada para sistemas que se encontram em uma escala de tamanho intermediária, entre macroscópico (sistemas que podem ser descritos pelas equações de Newton ou de Hamilton) e microscópico (sistemas que podem ser descritos pela mecânica ondulatória ou matricial) [39]. O tamanho do sistema mesoscópico ainda não é completamente definido, podendo variar de dezenas a centenas de nanômetros [40].

Um sistema mesoscópico é um sistema em que o livre caminho médio de um elétron (distância média percorrida pelo um elétron entre duas colisões consecutivas [41]) é maior do que o tamanho do sistema, ou seja, o elétron propaga-se praticamente sem sofrer colisões [39]. O atual interesse nestes sistemas deve-se à miniaturização cada vez maior dos dispositivos eletrônicos em direção à escala atômica [42].

Em 2001, Zhang [43] investigou as incertezas quânticas de cargas e correntes em um circuito mesoscópico acoplado por um capacitor. O sistema em estudo consiste de dois circuitos RLC (R-resistência, L-indutância e C-capacitância) acoplados por um capacitor e pode ser modelado por um Hamiltoniano dependente do tempo. O Hamiltoniano é a soma de dois Hamiltonianos de dois osciladores harmônicos (massa variando exponencialmente no tempo e frequência constante) com um termo de acoplamento entre as coordenadas (que representam as cargas elétricas). Eles usaram a teoria quântica de LR [16] e uma transformação unitária para obter a autofunção do operador invariante. A função de onda do sistema difere somente por um fator de fase dependente do tempo da autofunção do operador invariante. Eles observaram que as relações de incerteza para cargas e correntes não satisfazem a relação de mínima incerteza, mesmo para o caso em que a resistência do sistema é nula. Um ano depois, os autores estudaram este mesmo sistema na presença de uma fonte [44]. Novamente, o sistema pode ser modelado por um Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. O que os autores concluíram foi que, as incertezas quânticas de cargas e correntes não dependem da fonte.

O modelo de osciladores acoplados dependentes do tempo tem sido usado também para investigar a dinâmica do movimento de partículas carregadas na presença de um campo magnético dependente do tempo. Este sistema tem sido usado em diferentes áreas da Física, como Física da Matéria Condensada e Física de Plasma [45-52]. Recentemente, Menouar e colaboradores [53-54] encontraram a função de onda “exata” para dois diferentes sistemas de osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo na presença de um campo magnético variável no tempo. Na Ref. [53] eles consideraram um termo de ligação nas coordenadas, enquanto na Ref. [54] eles incluíram também um termo de ligação nos momentos.

Em ambos os artigos, eles consideraram Hamiltonianos quadráticos dependentes do tempo, supondo que os parâmetros dos sistemas, como as massas das duas partículas e o campo magnético, dependem do tempo. Eles realizaram várias transformações unitárias para escrever os Hamiltonianos acoplados dependentes do tempo como a soma de dois Hamiltonianos desacoplados dependentes do tempo com diferentes frequências dependentes do tempo e massas unitárias. Para obter os estados quânticos, eles usaram a método de LR. Para os dois sistemas as funções de onda dependem de uma quantidade que é solução da equação de Milne-Pinney [19-21]. De acordo com os autores, um conhecimento completo do comportamento do sistema dentro da mecânica quântica só é obtido quando se conhece uma solução particular da equação de Milne-Pinney (EMP). Nos dois trabalhos os autores não encontraram nenhuma solução da EMP.

Pelo exposto acima ficou claro que o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados independentes ou dependentes do tempo é muito importante em Física. Assim, neste trabalho estudaremos um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes e independentes do tempo, tanto classicamente quanto quanticamente. Para isto, vamos considerar que as massas, frequências e o parâmetro de acoplamento são funções arbitrárias do tempo.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, estudaremos o sistema de dois osciladores harmônicos clássicos acoplados dependentes do tempo. Através de uma transformação de escala e uma transformação canônica reescreveremos o Hamiltoniano destes dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo como o Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos desacoplados dependentes do tempo. Após isto, estudaremos quatro tipos de osciladores harmônicos acoplados, obtendo as posições e as velocidades. No Capítulo 3, estudaremos o mesmo sistema do ponto de vista da mecânica quântica. Inicialmente, encontraremos a função de onda de um oscilador harmônico simples com frequência dependente do tempo e massa unitária usando o método de LR [16] e a transformação unitária de HR [17]. Depois, com esta função de onda, encontraremos a função de onda do sistema de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Além disso, encontraremos os valores médios, as

incertezas na posição e no momento e os produtos de incerteza do sistema. Para finalizar, encontraremos a solução da equação de Milne-Pinney [19-21] para os quatro osciladores harmônicos acoplados considerados no Capítulo 2. No Capítulo 4 apresentaremos os principais resultados obtidos.

Capítulo 2

Osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo: tratamento clássico.

Neste Capítulo, estudaremos classicamente o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados, cujos parâmetros do sistema massas (m), frequências (ω) e o termo de acoplamento (k) são funções do tempo. A partir de uma transformação de escala e uma transformação canônica, escreveremos o Hamiltoniano do sistema de dois osciladores acoplados como a soma de dois Hamiltonianos de dois osciladores desacoplados dependentes do tempo. Estudaremos quatro tipos de osciladores, a saber: (i) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$ e $k = k_0$; (ii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$, e $k = k_0 e^{\gamma t}$; (iii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{-\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{-\gamma t/2}$ e $k = k_0$; e (iv) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{\gamma t/2}$ e $k = k_0 e^{\gamma t}$. Em todos os casos m_0 , ω_{01} , ω_{02} , k_0 e γ são constantes. Para cada sistema encontraremos a posição e a velocidade exata dos dois osciladores.

2.1 Transformações canônicas

Uma transformação de coordenadas no espaço de fase (espaço cartesiano cujos eixos são as variáveis canônicas [55]) será canônica se preservar a forma canônica das equações de Hamilton [55-56]. Considere as variáveis canônicas (q_i, p_i) , $(i = 1, 2, \dots, n)$, onde q_i são as coordenadas e p_i são os momentos, que satisfazem as equações de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.1)$$

e

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.2)$$

Queremos encontrar uma transformação de coordenadas inversível

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \quad P_i = P_i(q_i, p_i, t), \quad (2.3)$$

de tal forma que exista uma nova função, $K(Q_i, P_i, t)$, que satisfaça as equações abaixo

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad (2.4)$$

e

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (2.5)$$

Assim, a nova função deve satisfazer as equações de Hamilton nas novas coordenadas. Isso é possível se, e somente se, existir uma função Φ , tal que

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.6)$$

A função Φ é chamada de função geratriz, e ela funciona como uma ligação entre as coordenadas iniciais e as coordenadas finais. Existem vários tipos de funções geratrizes, mas neste trabalho usaremos apenas um tipo que é

$$\Phi = \Phi(q_i, P_i, t), \quad (2.7)$$

que relaciona as coordenadas pelas equações abaixo [55]

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad (2.8)$$

e

$$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}. \quad (2.9)$$

Portanto, para se transformar um Hamiltoniano em outro Hamiltoniano, cujas equações de Hamilton tenham uma solução mais fácil, primeiro encontramos

uma transformação inversível, depois a função geratriz e, por fim, o novo Hamiltoniano.

Usaremos esse procedimento na próxima seção para transformar o Hamiltoniano de dois osciladores acoplados dependentes do tempo em um Hamiltoniano de dois osciladores desacoplados dependentes do tempo.

2.2 Osciladores harmônicos acoplados

Considere o seguinte Hamiltoniano

$$H(x_1, x_2, t) = \frac{p_{1x}^2}{2m_1(t)} + \frac{p_{2x}^2}{2m_2(t)} + \frac{m_1(t)\omega_1^2(t)x_1^2}{2} + \frac{m_2(t)\omega_2^2(t)x_2^2}{2} + \frac{k(t)(x_2 - x_1)^2}{2}, \quad (2.10)$$

que representa o Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Nesta equação x_i ($i = 1, 2$) representa as coordenadas dos dois osciladores, p_{ix} ($i = 1, 2$) o momento dos dois osciladores, m_i ($i = 1, 2$) é a massa de cada oscilador, ω_i ($i = 1, 2$) a frequência de cada oscilador e $k(t)$ o termo de acoplamento. Para encontrar a posição dos dois osciladores usaremos as equações de Hamilton, para obter

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d\ln[m_1(t)]}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2(t)x_1 = \frac{k(t)}{m_1(t)}(x_2 - x_1), \quad (2.11)$$

e

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{d\ln[m_2(t)]}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2(t)x_2 = -\frac{k(t)}{m_2(t)}(x_2 - x_1). \quad (2.12)$$

Estas duas últimas equações constituem um sistema de duas equações diferenciais lineares acopladas, que na maioria dos casos é muito complicado de se resolver. Assim, o que podemos dizer é que partindo do Hamiltoniano inicial, eq. (2.10), é difícil encontrarmos a posição dos dois osciladores. Portanto, realizaremos algumas transformações no Hamiltoniano dado pela eq. (2.10) a fim de deixá-lo na

forma de um Hamiltoniano cujas equações de movimento sejam mais fáceis de resolver. Para isto, consideremos primeiro a seguinte transformação de coordenadas

$$q_1 = \left(\frac{m_1(t)}{m_2(t)} \right)^{1/4} x_1, \quad (2.13)$$

$$q_2 = \left(\frac{m_2(t)}{m_1(t)} \right)^{1/4} x_2, \quad (2.14)$$

$$p_1 = \left(\frac{m_2(t)}{m_1(t)} \right)^{1/4} p_{1x}, \quad (2.15)$$

e

$$p_2 = \left(\frac{m_1(t)}{m_2(t)} \right)^{1/4} p_{2x}. \quad (2.16)$$

Com essa transformação de escala, reescrevemos o Hamiltoniano dado pela eq. (2.10) na forma

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{b_1(t)q_1^2}{2} + \frac{b_2(t)q_2^2}{2} + \frac{b_3(t)q_1q_2}{2}, \quad (2.17)$$

onde,

$$m(t) = [m_1(t)m_2(t)]^{1/2}, \quad (2.18)$$

$$b_1(t) = \left(\frac{m_2(t)}{m_1(t)} \right)^{\frac{1}{2}} [m_1(t)\omega_1^2(t) + k(t)], \quad (2.19)$$

$$b_2(t) = \left(\frac{m_1(t)}{m_2(t)} \right)^{\frac{1}{2}} [m_2(t)\omega_2^2(t) + k(t)], \quad (2.20)$$

e

$$b_3(t) = -2k(t). \quad (2.21)$$

Agora, para eliminar o termo de acoplamento q_1q_2 , realizaremos uma transformação canônica dependente do tempo. Considere que

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{m(t)}} [\cos(\theta(t)) Q_1 + \sin(\theta(t)) Q_2], \quad (2.22)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{m(t)}} [-\sin(\theta(t)) Q_1 + \cos(\theta(t)) Q_2], \quad (2.23)$$

$$p_1 = \sqrt{m(t)}[\cos(\theta(t))P_1 + \sin(\theta(t))P_2] - \frac{1}{2}\frac{dm(t)}{dt}q_1, \quad (2.24)$$

e

$$p_2 = \sqrt{m(t)}[-\sin(\theta(t))P_1 + \cos(\theta(t))P_2] - \frac{1}{2}\frac{dm(t)}{dt}q_2, \quad (2.25)$$

onde, θ é uma função qualquer do tempo.

Com esta transformação de coordenadas podemos encontrar a função geratriz através das eqs. (2.8) e (2.9), com isso temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} = p_1 = \sqrt{m(t)}[\cos(\theta(t))P_1 + \sin(\theta(t))P_2] - \frac{1}{2}\frac{dm(t)}{dt}q_1, \quad (2.26)$$

da qual encontramos

$$\Phi = \sqrt{m(t)}[\cos(\theta(t))P_1 + \sin(\theta(t))P_2]q_1 - \frac{1}{4}\frac{dm(t)}{dt}q_1^2 + C(q_2, P_1, P_2, t), \quad (2.27)$$

onde, C é uma função arbitrária do seu argumento. Aplicando mais uma vez a eq. (2.8), encontramos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} = p_2 = \sqrt{m(t)}[-\sin(\theta(t))P_1 + \cos(\theta(t))P_2] - \frac{1}{2}\frac{dm(t)}{dt}q_2, \quad (2.28)$$

e usando as eqs. (2.27) e (2.28) obtemos

$$C = \sqrt{m(t)}[-\sin(\theta(t))P_1 + \cos(\theta(t))P_2]q_2 - \frac{1}{4}\frac{dm(t)}{dt}q_2^2 + C'(P_1, P_2, t), \quad (2.29)$$

onde, mais uma vez, C' é uma função arbitrária do seu argumento. Para encontrar a função C , primeiro invertermos as eqs. (2.22) e (2.23), obtendo

$$Q_1 = \sqrt{m(t)}[\cos(\theta)q_1 - \sin(\theta)q_2], \quad (2.30)$$

e

$$Q_2 = \sqrt{m(t)}[\sin(\theta)q_1 + \cos(\theta)q_2], \quad (2.31)$$

e, por fim, usamos as eqs. (2.9), (2.30) e (2.31) para obtermos

$$\frac{\partial C'}{\partial P_1} = \frac{\partial C'}{\partial P_2} = 0. \quad (2.32)$$

Logo, $C' = C'(t)$, que podemos, sem perda de generalidade, tomar como sendo zero [56]. Assim, usando esse valor para C' , juntamente com as eqs. (2.29) e (2.27), obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(q_1, q_2, P_1, P_2, t) &= \sqrt{m(t)}[\cos(\theta(t))P_1 + \sin(\theta(t))P_2]q_1 + \\ &+ \sqrt{m(t)}[-\sin(\theta(t))P_1 + \cos(\theta(t))P_2]q_2 - \frac{1}{4}\frac{dm(t)}{dt}(q_1^2 + q_2^2),\end{aligned}\quad (2.33)$$

que é a função geratriz da transformação canônica dependente do tempo. Com ela podemos encontrar o novo Hamiltoniano que é

$$\begin{aligned}K &= \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \dot{\theta}(Q_1P_2 - Q_2P_1) + Q_1Q_2\left[\frac{\sin(2\theta(t))}{2m(t)}(b_1 - b_2) + \frac{\cos(2\theta(t))}{2m(t)}b_3\right] + \\ &+ \left[\frac{\dot{m}^2}{4m^2} - \frac{\ddot{m}}{2m} + \frac{b_1}{m}\cos^2(\theta) + \frac{b_2}{m}\sin^2(\theta) - \frac{b_3}{2m}\sin(2\theta)\right]\frac{Q_1^2}{2} + \\ &+ \left[\frac{\dot{m}^2}{4m^2} - \frac{\ddot{m}}{2m} + \frac{b_1}{m}\sin^2(\theta) + \frac{b_2}{m}\cos^2(\theta) + \frac{b_3}{2m}\sin(2\theta)\right]\frac{Q_2^2}{2},\end{aligned}\quad (2.34)$$

onde, usamos as eqs. (2.6), (2.22) á (2.25) e (2.33), e o ponto representa a derivado no tempo.

Analisando o novo Hamiltoniano K , vemos que para uma função qualquer de θ , ele é, em geral, mais complicado que o Hamiltoniano inicial. Porém se tomarmos θ como constante, e considerarmos que o termo que aparece multiplicado por Q_1Q_2 é zero, encontramos que

$$K = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\Omega_1^2(t)}{2}Q_1^2 + \frac{\Omega_2^2(t)}{2}Q_2^2,\quad (2.35)$$

e

$$\tan(2\theta) = \frac{b_3}{b_2 - b_1} = constante,\quad (2.36)$$

onde,

$$\Omega_1^2 = \frac{\dot{m}^2}{4m^2} - \frac{\ddot{m}}{2m} + \frac{b_1}{m}\cos^2(\theta) + \frac{b_2}{m}\sin^2(\theta) - \frac{b_3}{2m}\sin(2\theta),\quad (2.37)$$

e

$$\Omega_2^2 = \frac{\dot{m}^2}{4m^2} - \frac{\ddot{m}}{2m} + \frac{b_1}{m} \operatorname{sen}^2(\theta) + \frac{b_2}{m} \operatorname{cos}^2(\theta) + \frac{b_3}{2m} \operatorname{sen}(2\theta). \quad (2.38)$$

Como vemos o novo Hamiltoniano, K , representa dois osciladores harmônicos desacoplados com massas unitárias e frequências modificadas, porém sujeito ao vínculo que $\operatorname{tan}(2\theta)$ seja constante, eq. (2.36). Ou seja, podemos variar os parâmetros do sistema, mas de tal forma que a razão da eq. (2.36) se mantenha constante. Para esse novo Hamiltoniano, as equações de movimento são bem mais simples e dadas por

$$\frac{d^2Q_1}{dt^2} + \Omega_1^2(t)Q_1 = 0, \quad (2.39)$$

e

$$\frac{d^2Q_2}{dt^2} + \Omega_2^2(t)Q_2 = 0, \quad (2.40)$$

que são duas equações diferenciais lineares desacopladas. Ou seja, com estas duas transformações e o vínculo imposto pela eq. (2.36), reduzimos o Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos acoplados a um Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos desacoplados.

Agora que temos duas equações de movimento mais simples, podemos encontrar a posição em função do tempo dos dois osciladores para alguns casos particulares. Na próxima seção, consideraremos os seguintes casos: (i) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$ e $k = k_0$; (ii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$, e $k = k_0 e^{\gamma t}$; (iii) $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{-\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{-\gamma t/2}$ e $k = k_0$; e (iv) $m_1 = m_2 = m_0$, $\omega_1 = \omega_{01} e^{\gamma t/2}$, $\omega_2 = \omega_{02} e^{\gamma t/2}$ e $k = k_0 e^{\gamma t}$, com m_0 , ω_{01} , ω_{02} , k_0 e γ constantes. Para cada caso, resolveremos a equação de movimento para as coordenadas transformadas Q_1 e Q_2 , e utilizando as eqs. (2.13), (2.14), (2.22) e (2.23) encontraremos

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{m_1(t)}} [\cos(\theta) Q_1 + \operatorname{sen}(\theta) Q_2], \quad (2.41)$$

e

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{m_2(t)}} [-\sin(\theta) Q_1 + \cos(\theta) Q_2], \quad (2.42)$$

que são as coordenadas originais.

2.3 Exemplos de osciladores acoplados

Consideremos inicialmente o caso (i), que representa o sistema de dois osciladores acoplados independentes do tempo, para este oscilador, usando a eq. (2.36), obtemos que

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \left[\frac{2k_0}{m_0(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)} \right]. \quad (2.43)$$

que é a mesma expressão para os outros três osciladores.

Voltando ao estudo do caso (i), utilizando as eqs. (2.37) e (2.38) temos

$$\Omega_1^2 = \omega_{01}^2 \cos^2(\theta) + \omega_{02}^2 \sin^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 + \sin(2\theta)], \quad (2.44)$$

e

$$\Omega_2^2 = \omega_{01}^2 \sin^2(\theta) + \omega_{02}^2 \cos^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 - \sin(2\theta)], \quad (2.45)$$

que são constantes, como deveriam ser, pois os parâmetros do sistema são todos independentes do tempo. Assim, para esse caso as eqs. (2.39) e (2.40) são exatamente as equações de osciladores harmônicos simples, cujas soluções são

$$Q_i(t) = a_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i), \quad (i = 1 \text{ e } 2), \quad (2.46)$$

onde, $a_i, (i = 1,2)$ e $\varphi_i, (i = 1,2)$ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. Usando as eqs. (2.41) e (2.42) obtemos

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} [a_1 \cos(\theta) \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\theta) \sin(\Omega_2 t + \varphi_2)], \quad (2.47)$$

e

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} [-a_1 \sin(\theta) \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\theta) \sin(\Omega_2 t + \varphi_2)], \quad (2.48)$$

que são as equações que descrevem as posições dos dois osciladores. Derivando estas equações no tempo, encontramos que as velocidades são dadas por

$$v_1(t) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} [\Omega_1 a_1 \cos(\theta) \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \Omega_2 a_2 \sin(\theta) \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)], \quad (2.49)$$

e

$$v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} [-\Omega_1 a_1 \sin(\theta) \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \Omega_2 a_2 \cos(\theta) \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)]. \quad (2.50)$$

Analisaremos agora o segundo caso em que as massas dos dois osciladores e o parâmetro de acoplamento são funções do tempo. As frequências modificadas são agora dadas por

$$\Omega_1^2 = \frac{-\gamma^2}{4} + \omega_{01}^2 \cos^2(\theta) + \omega_{02}^2 \sin^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 + \sin(2\theta)], \quad (2.51)$$

e

$$\Omega_2^2 = \frac{-\gamma^2}{4} + \omega_{01}^2 \sin^2(\theta) + \omega_{02}^2 \cos^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 - \sin(2\theta)], \quad (2.52)$$

que são independentes do tempo. Logo, este sistema apresenta a mesma solução que o caso anterior, mas com as frequências modificadas. Assim, da eqs. (2.41) e (2.42) encontramos que as posições e velocidades dos osciladores são

$$x_1(t) = \frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} [c_1 \cos(\theta) \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + c_2 \sin(\theta) \sin(\Omega_2 t + \varphi_2)], \quad (2.53)$$

$$x_2(t) = \frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} [-c_1 \sin(\theta) \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + c_2 \cos(\theta) \sin(\Omega_2 t + \varphi_2)], \quad (2.54)$$

e

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \left(\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} \right) [\Omega_1 c_1 \cos(\theta) \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \Omega_2 c_2 \sin(\theta) \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)] + \\ &+ \left(-\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{2\sqrt{m_0}} \gamma \right) [c_1 \cos(\theta) \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + c_2 \sin(\theta) \sin(\Omega_2 t + \varphi_2)], \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \left(\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} \right) [-\Omega_1 c_1 \sin(\theta) \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \Omega_2 c_2 \cos(\theta) \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)] + \\ &+ \left(-\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{2\sqrt{m_0}} \gamma \right) [-c_1 \sin(\theta) \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + c_2 \cos(\theta) \sin(\Omega_2 t + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Para o terceiro caso as frequências modificadas são

$$\Omega_1^2(t) = \frac{-\gamma^2}{4} + \left\{ \omega_{01}^2 \cos^2(\theta) + \omega_{02}^2 \sin^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 + \sin(2\theta)] \right\} \exp(-\gamma t), \quad (2.57)$$

e

$$\Omega_2^2(t) = \frac{-\gamma^2}{4} + \left\{ \omega_{01}^2 \sin^2(\theta) + \omega_{02}^2 \cos^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 - \sin(2\theta)] \right\} \exp(-\gamma t), \quad (2.58)$$

que, agora, são explicitamente dependentes do tempo. Assim, as equações diferenciais (2.39) e (2.40) são dadas por

$$\ddot{Q}_i + [a_i + b_i \exp(-\gamma t)] Q_i = 0, \quad (i = 1 \text{ e } 2), \quad (2.59)$$

onde,

$$a_1 = a_2 = -\frac{\gamma^2}{4}, \quad (2.60)$$

$$b_1 = \omega_{01}^2 \cos^2(\theta) + \omega_{02}^2 \sin^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 + \sin(2\theta)] , \quad (2.61)$$

e

$$b_2 = \omega_{01}^2 \sin^2(\theta) + \omega_{02}^2 \cos^2(\theta) + \frac{k_0}{m_0} [1 - \sin(2\theta)] . \quad (2.62)$$

Logo, temos que resolver a seguinte equação diferencial

$$\ddot{x} + [a + b \exp(-\gamma t)]x = 0 . \quad (2.63)$$

Para resolvê-la consideremos o seguinte procedimento. Primeiro fazemos a transformação, $x(t) = u(z)$ com $z = \exp(-\gamma t)$. Com isso eq. (2.59) torna-se

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{a}{\gamma^2} + \frac{b}{\gamma^2} z \right) u = 0 . \quad (2.64)$$

Agora fazemos uma segunda transformação de variável, $u(z) = zu^1(z)$, para obter

$$z^2 \frac{\partial^2 u^1}{\partial z^2} + 3z \frac{\partial u^1}{\partial z} + \left[\left(1 + \frac{a}{\gamma^2} \right) + \frac{b}{\gamma^2} z \right] u^1 = 0 . \quad (2.65)$$

Finalmente, fazendo, $u^1 = \frac{A(z')}{z}$, com $z' = 2\sqrt{\frac{bz}{\gamma^2}}$, encontramos

$$\ddot{A} + \frac{\dot{A}}{z'} + \left(1 + \frac{4a}{\gamma^2 z'^2} \right) A = 0 , \quad (2.66)$$

que é a equação diferencial de Bessel [57]. Usando as eqs. (2.60)-(2.66) encontramos que a solução da eq. (2.59) é

$$Q_i(t) = d_i H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_i}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + e_i H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_i}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] , \quad (i = 1 \text{ e } 2) , \quad (2.67)$$

onde, $H_1^{(1)}$ e $H_1^{(2)}$ são as funções de Hankel de primeira ordem tipo 1 e tipo 2 [58], respectivamente, e d_i e e_i são constantes determinadas pelas condições iniciais. Usando este resultado nas eqs. (2.41) e (2.42) encontramos que as posições e as velocidades dos dois osciladores são dadas por

$$x_1(t) = \left(\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} \right) \cos(\theta) \left\{ d_1 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + e_1 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\} + \\ + \left(\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} \right) \sin(\theta) \left\{ d_2 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + e_2 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\}, \quad (2.68)$$

$$x_2(t) = \left(\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} \right) [-\sin(\theta)] \left\{ d_1 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + e_1 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\} + \\ + \left(\frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{\sqrt{m_0}} \right) \cos(\theta) \left\{ d_2 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + e_2 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\}, \quad (2.69)$$

e

$$\begin{aligned}
v_1(t) = & \left(\frac{\cos(\theta)}{2\sqrt{m_0}} \right) \left\{ \sqrt{b_1} e^{-\gamma t} d_1 \left[H_2^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
& + \sqrt{b_1} e^{-\gamma t} e_1 \left[H_2^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \\
& + \left. \left(-\gamma e^{\frac{-\gamma t}{2}} \right) \left[d_1 H_1^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + e_1 H_1^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\} + \\
& + \left(\frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{m_0}} \right) \left\{ \sqrt{b_2} e^{-\gamma t} d_2 \left[H_2^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
& + \sqrt{b_2} e^{-\gamma t} e_2 \left[H_2^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \\
& \left. + \left(-\gamma e^{\frac{-\gamma t}{2}} \right) \left[d_2 H_1^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + e_2 H_1^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\}, \quad (2.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(t) = & \left(-\frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{m_0}} \right) \left\{ \sqrt{b_1} e^{-\gamma t} d_1 \left[H_2^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
& + \sqrt{b_1} e^{-\gamma t} e_1 \left[H_2^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \\
& + \left. \left(-\gamma e^{\frac{-\gamma t}{2}} \right) \left[d_1 H_1^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + e_1 H_1^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\} + \\
& + \left(\frac{\cos(\theta)}{2\sqrt{m_0}} \right) \left\{ \sqrt{b_2} e^{-\gamma t} d_2 \left[H_2^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
& \left. \left(\frac{\cos(\theta)}{2\sqrt{m_0}} \right) \left[d_2 H_1^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + e_2 H_1^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{b_2} e^{-\gamma t} e_2 \left[H_2^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) - H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] + \\
& + \left(-\gamma e^{\frac{-\gamma t}{2}} \right) \left[d_2 H_1^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + e_2 H_1^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \} . \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Por fim, vamos analisar o quarto caso. Para este sistema as frequências modificadas são

$$\Omega_i^2(t) = b_i e^{\gamma t}, (i = 1 \text{ e } 2), \quad (2.72)$$

onde, b_i é dado pelas eqs. (2.61) e (2.62). Para estas frequências modificadas as eqs. (2.39) e (2.40) são

$$\ddot{Q}_i + b_i \exp(\gamma t) Q_i = 0, (i = 1 \text{ e } 2). \quad (2.73)$$

Analizando esta equação vemos que ela é semelhante a eq. (2.59), mas com $a = 0$ e $\gamma \rightarrow -\gamma$. Logo, utilizando o mesmo procedimento anterior, encontramos

$$Q_i(t) = t_i H_0^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_i}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + r_i H_0^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_i}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right], (i = 1 \text{ e } 2), \quad (2.74)$$

onde, como nos casos anteriores, t_i e r_i são constantes determinadas pelas condições iniciais. As posições e as velocidades dos dois osciladores são dadas por

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & \left(\frac{1}{\sqrt{m_0}} \right) \left\{ \cos(\theta) \left[t_1 H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + r_1 H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\} + \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{m_0}} \right) \left\{ \sin(\theta) \left[t_2 H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + r_2 H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\}, \quad (2.75)
\end{aligned}$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{m_0}} \right) \left\{ -\sin(\theta) \left[t_1 H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + r_1 H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{m_0}} \right) \left\{ \cos(\theta) \left[t_2 H_0^{(1)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) + r_2 H_0^{(2)} \left(2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right) \right] \right\}, \quad (2.76)$$

e

$$v_1(t) = \left(-\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{m_0}} \sqrt{b_1} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right) \left\{ t_1 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + r_1 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\} + \\ + \left(-\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{m_0}} \sqrt{b_2} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right) \left\{ t_2 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + r_2 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\}, \quad (2.77)$$

$$v_2(t) = \left(\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{m_0}} \sqrt{b_1} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right) \left\{ t_1 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + r_1 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_1}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\} + \\ + \left(-\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{m_0}} \sqrt{b_2} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right) \left\{ t_2 H_1^{(1)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + r_2 H_1^{(2)} \left[2 \frac{\sqrt{b_2}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\}. \quad (2.78)$$

Analisando as soluções encontradas, vemos que para o primeiro caso a posição dos dois osciladores corresponde à superposição de dois movimentos harmônicos simples com diferentes amplitudes, frequências e fases todas constantes. O segundo caso, também, corresponde à superposição de dois movimentos harmônicos simples de diferentes frequências e fases, porém, para este caso, a amplitude dos dois osciladores decresce exponencialmente no tempo. Este decaimento exponencial da amplitude deve-se ao fato de que as massas dos dois osciladores crescem exponencialmente no tempo. Já os outros dois casos não correspondem à superposição de dois movimentos harmônicos simples, mas, mesmo assim, temos um movimento oscilatório, pois as funções de Hankel são funções oscilantes dos seus argumentos.

A seguir mostraremos, para cada caso, a dependência temporal da posição dos osciladores 1 (oscilador associado a coordenada x_1) e 2 (oscilador associado a coordenada x_2). Em todos os casos consideraremos $m_0 = 1$, $\omega_{01} = 2$, $\omega_{02} = 1$, $k_0 = 1$, $\gamma = 1$ e as seguintes condições iniciais: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ e $v_1(0) = v_2(0) = 0$. Sendo que as unidades são tomadas em unidades do sistema Internacional de Unidades.

As funções de Hankel de ordem n ($H_n^j(t), j = 1 \text{ e } 2$) são combinações lineares das funções de Bessel de ordem n ($J_n(t)$) e das funções de Neumann de ordem n ($N_n(t)$), como mostrado abaixo [58]

$$H_n^{(1)}(t) = J_n(t) + iN_n(t) , \quad (2.79)$$

e

$$H_n^{(2)}(t) = J_n(t) - iN_n(t) . \quad (2.80)$$

Assim, nos gráficos usamos uma combinação linear de funções de Bessel e de Neumann, em lugar de funções de Hankel tipo 1 e 2, respectivamente.

Nas figuras 2.1-2.4 mostramos gráficos de $x_j(t) \times t$ para os quatro casos (i), (ii), (iii) e (iv), respectivamente.

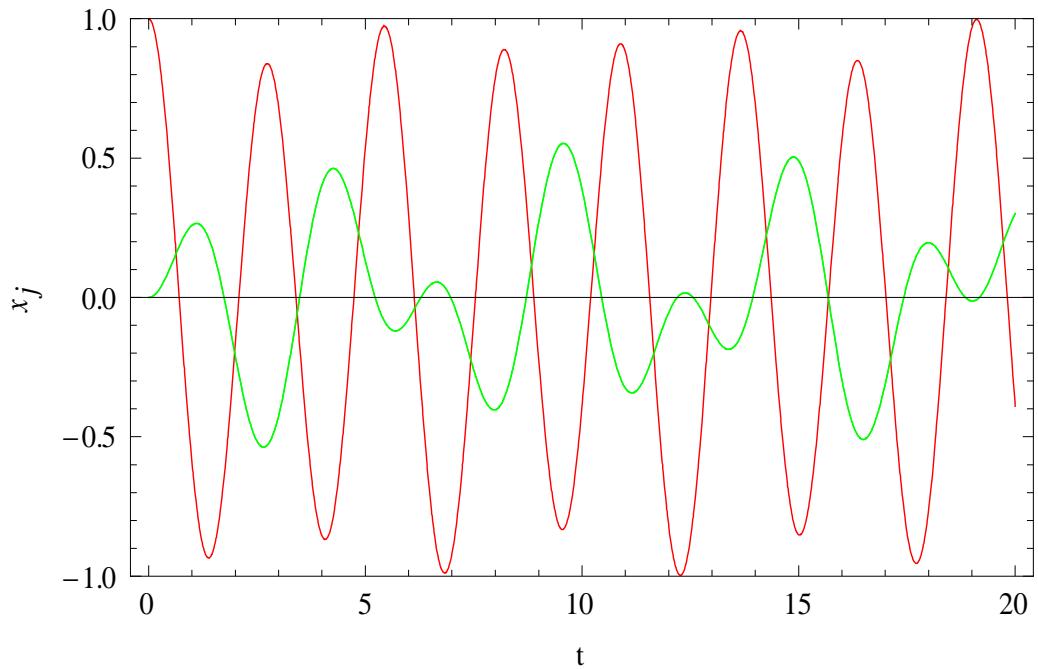


Figura 2.1: Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (i). Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2).

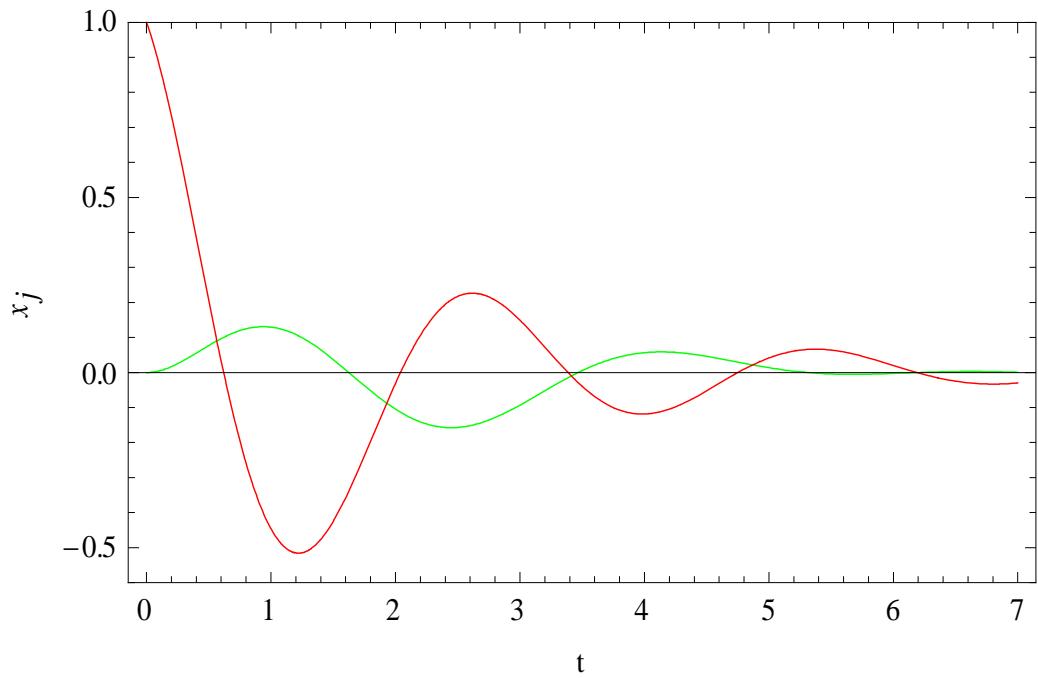


Figura 2.2: Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (ii).
Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2).

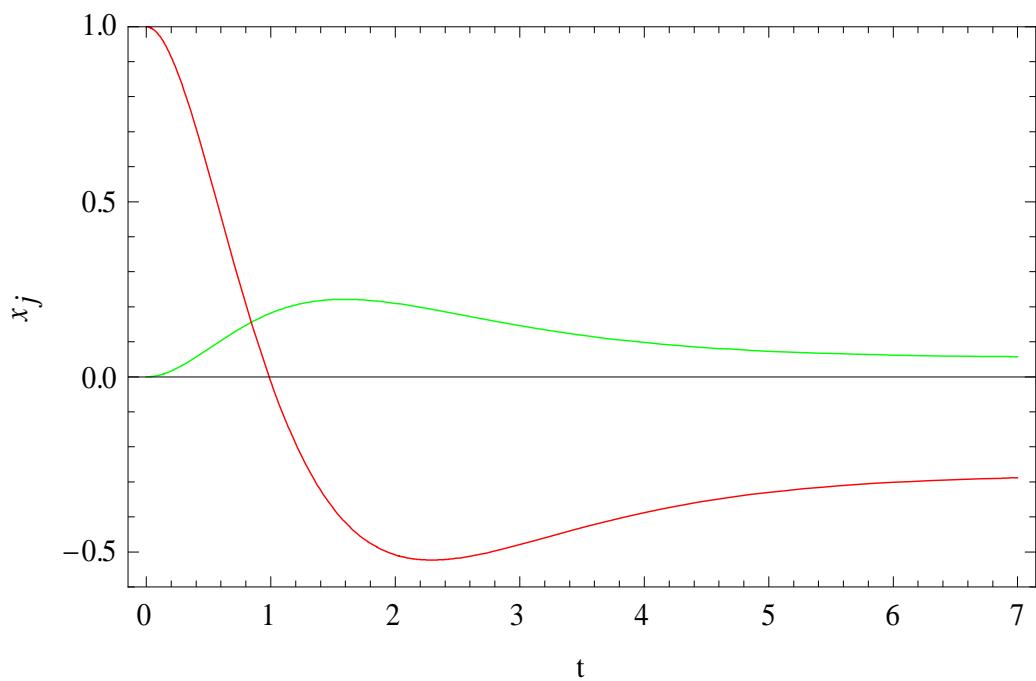


Figura 2.3: Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (iii).
Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2).

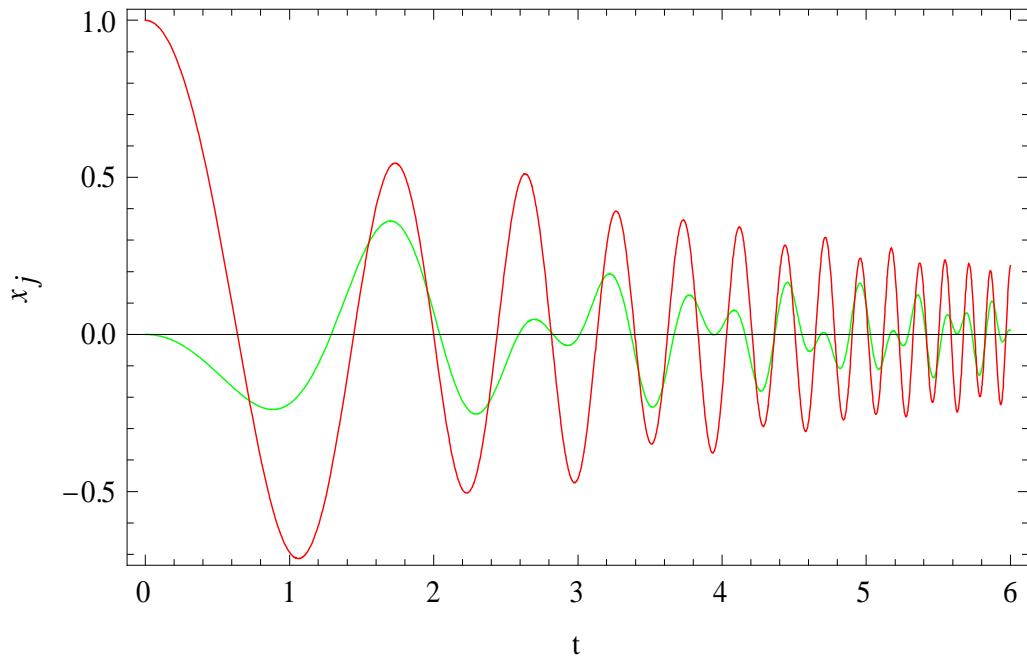


Figura 2.4: Dependência temporal da posição, para os dois osciladores, para o caso (iv).
Curva vermelha (oscilador 1), curva verde (oscilador 2).

Em todos os gráficos vemos que a amplitude do oscilador 1 é maior do que a do oscilador 2. Isso se deve ao fato que a posição inicial do oscilador 1 é 1, enquanto do oscilador 2 é 0. Se invertermos as condições iniciais, ou seja, $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 1$, a amplitude do oscilador 2 passa a ser maior do que a amplitude do oscilador 1.

No primeiro caso a amplitude oscila no decorrer do tempo, crescendo e decrescendo, um comportamento típico do sistema de dois osciladores harmônicos acoplados independentes do tempo. Mas, em média, a amplitude não decresce no tempo, isso ocorre, porque, este sistema é conservativo, já que todos os parâmetros do sistema são independentes do tempo.

Para o segundo caso, temos, também, que as amplitudes dos dois osciladores oscilam no tempo, mas, decrescem com o decorrer do tempo. Este decaimento deve-se ao fato que a massa dos dois osciladores aumenta exponencialmente no tempo. A posição dos dois osciladores, para este sistema, tem um comportamento análogo a um oscilador harmônico subcrítico.

Da Fig. 2.3 vemos que o terceiro caso não oscila no tempo. Neste sistema, os dois osciladores têm um comportamento semelhante a um oscilador harmônico supercrítico.

Por fim, o quarto caso é análogo ao segundo caso, ou seja, os osciladores comportam-se como osciladores harmônicos subcríticos. Porém, para este sistema a amplitude cresce e decresce no tempo, mas, em média decresce no tempo. Este comportamento pode ser explicado da seguinte forma. A posição dos dois osciladores, eqs. (2.75) e (2.76), pode ser escrita como

$$x_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{m_0}} \right) (\cos(\theta) A(T) + \sin(\theta) B(t)), \quad (2.81)$$

e

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{m_0}} \right) (-\sin(\theta) A(T) + \cos(\theta) B(t)), \quad (2.82)$$

onde,

$$A(t) = t_1 H_0^{(1)} \left(\frac{2\sqrt{b_1}}{\gamma} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right) + r_1 H_0^{(2)} \left(\frac{2\sqrt{b_1}}{\gamma} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right), \quad (2.83)$$

e

$$B(t) = t_2 H_0^{(1)} \left(\frac{2\sqrt{b_2}}{\gamma} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right) + r_2 H_0^{(2)} \left(\frac{2\sqrt{b_2}}{\gamma} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right). \quad (2.84)$$

A variação no tempo de $A(t)$ e $B(t)$ é mostrada nas figuras 2.5 e 2.6, respectivamente.

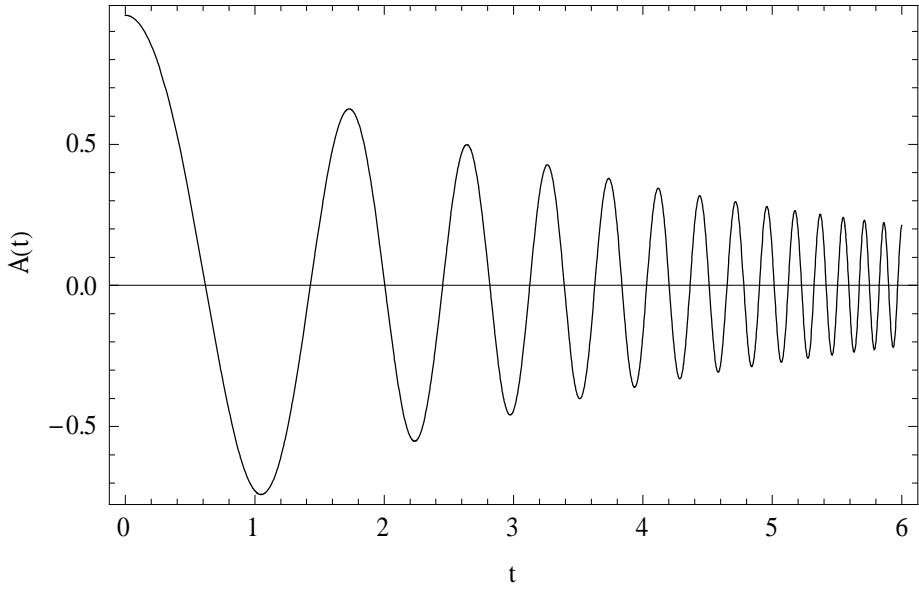


Figura 2.5: Dependência temporal da função $A(t)$ (veja eq. (2.83)).

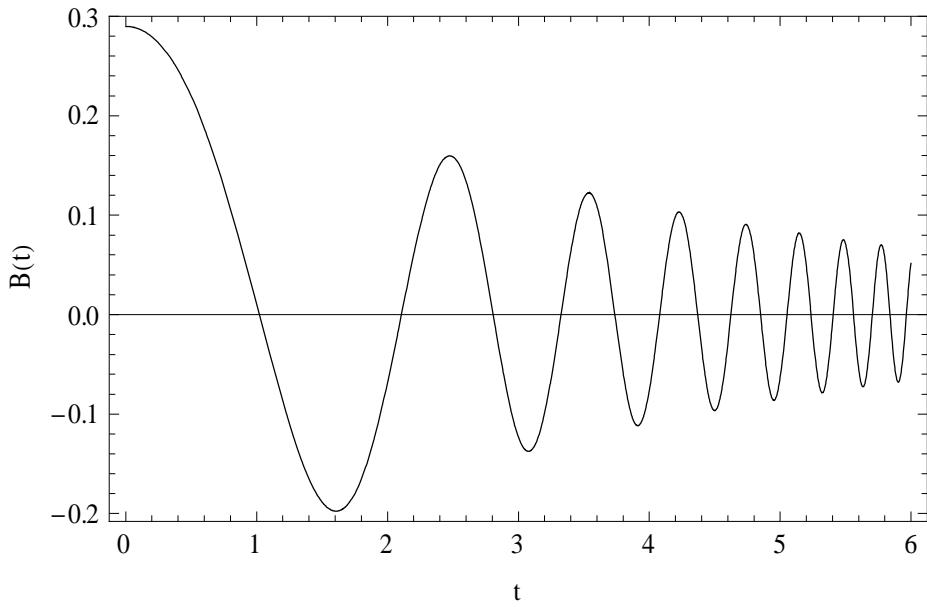


Figura 2.6: Dependência temporal da função $B(t)$ (veja eq. (2.84)).

Vemos que as funções $A(t)$ e $B(t)$ se comportam como um oscilador harmônico subcrítico, com diferentes frequências. A função $A(t)$ tem uma frequência de oscilação maior que a frequência de oscilação da função $B(t)$, pois o período de $A(t)$ é menor que o período de $B(t)$. Da eq. (2.81), vemos que $x_1(t)$ é uma

combinação linear da soma destes dois gráficos e, da eq. (2.82), vemos que $x_2(t)$ é uma combinação linear da diferença destes dois gráficos.

Capítulo 3

Osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo: tratamento quântico.

Neste Capítulo estudaremos o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados, (eq. 2.10), dependentes do tempo do ponto de vista da mecânica quântica. No caso clássico, usamos uma transformação de escala e uma transformação canônica para reduzir o Hamiltoniano do sistema ao Hamiltoniano desacoplado, eq. (2.35). No tratamento quântico partiremos do Hamiltoniano desacoplado, pois não é necessário transformá-lo novamente, porque uma transformação canônica em mecânica clássica equivale a uma transformação unitária em mecânica quântica [59-62]. Começaremos este Capítulo aplicando o método de Lewis e Riesenfeld [16] ao oscilador harmônico simples com frequência dependente do tempo e massa unitária. Depois, aplicaremos a transformação unitária de Hartley e Ray [17] nas autofunções do operador invariante com a finalidade de encontrar a solução da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico simples com frequência dependente do tempo e massa unitária. Em seguida, encontraremos a função de onda, os valores médios, os valores médios quadráticos e os produtos de incerteza do sistema em estudo, como função da solução da equação de Milne-Pinney [19-21]. Além disso, resolveremos a equação de Milne-Pinney para os quatro casos estudados no caso clássico. Por fim, com as soluções da equação de Milne-Pinney, analisaremos a dependência temporal da incerteza na posição, no momento e do produto de incerteza.

3.1 Oscilador harmônico simples com frequência dependente do tempo

Do ponto de vista da mecânica quântica é de fundamental importância o conhecimento de um conjunto completo de estados quânticos para descrever o sistema. Para sistemas não conservativos (sistemas cujo Hamiltoniano depende explicitamente do tempo), geralmente, o problema de encontrar um conjunto completo de estados quânticos é muito complicado. Existem métodos de aproximação como a teoria da perturbação dependente do tempo [63]. Porém, a maioria dos métodos de aproximação tem domínio restrito.

Por outro lado, como falamos no Capítulo 1, Lewis e Riesenfeld [16] desenvolveram uma teoria quântica de invariantes explicitamente dependentes do tempo. Nesta teoria eles demonstraram que as soluções da equação de Schrödinger (ES) e os autoestados do operador invariante diferem apenas por um fator de fase dependente do tempo. Eles demonstraram também que os autovalores do operador invariante não dependem do tempo. Assim, resolver a ES é equivalente a resolver a equação de autovalor para o operador invariante, encontrado seus autoestados e autovalores.

Nesta seção, mostraremos como LR aplicaram seu método ao oscilador harmônico simples com massa unitária e frequência dependente do tempo. Considere o Hamiltoniano abaixo

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2(t)q^2, \quad (3.1)$$

que é o Hamiltoniano de um oscilador harmônico simples com massa unitária e frequência dependente do tempo $\omega(t)$. Na eq. (3.1) q e p são os operadores posição e momento, respectivamente, que satisfazem a relação de comutação

$$[q, p] = i\hbar. \quad (3.2)$$

Consideremos agora a equação de Schrödinger para este Hamiltoniano

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi(t)\rangle. \quad (3.3)$$

Para este sistema, o operador invariante, $I(t)$, satisfaz a eq. $\frac{dI}{dt} = 0$, e é dado por [16,64-67]

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - \dot{\rho} q)^2 \right], \quad (3.4)$$

onde, ρ é uma solução particular da equação de Milne-Pinney [19-21]

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3}. \quad (3.5)$$

Para este sistema Lewis e Riesenfeld construíram um invariante da seguinte forma $I(t) = \alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)(qp + pq)$, onde $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ são funções do tempo. Partindo a hipótese que $I(t)$ é hermitiano e invariante eles deduziram as eqs. (3.4) e (3.5).

Para encontrar os autoestados e os autovalores de $I(t)$, vamos definir os operadores $b(t)$ e $b^\dagger(t)$, dependentes do tempo, da seguinte forma

$$b(t) = \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{q}{\rho} + i(\rho p - \dot{\rho} q) \right], \quad (3.6)$$

e

$$b^\dagger(t) = \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{q}{\rho} - i(\rho p - \dot{\rho} q) \right], \quad (3.7)$$

de tal forma que a seguinte relação de comutação

$$[b(t), b^\dagger(t)] = 1, \quad (3.8)$$

seja satisfeita.

Em termos de b e b^\dagger , q e p são dados por

$$q = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \rho(b + b^\dagger), \quad (3.9)$$

e

$$p = i \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{\rho} - i\dot{\rho}\right) b^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + i\dot{\rho}\right) b \right], \quad (3.10)$$

Substituindo estas equações na eq. (3.4), obtemos

$$I(t) = \hbar \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right), \quad (3.11)$$

que pode ser escrita como

$$I(t) = \hbar \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad (3.12)$$

onde, $N = b^\dagger b = N^\dagger$. Das relações

$$b|n, t\rangle = n^{1/2}|n-1, t\rangle, \quad (3.13)$$

e

$$b^\dagger|n, t\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1, t\rangle, \quad (3.14)$$

podemos escrever

$$N|n, t\rangle = n|n, t\rangle, n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.15)$$

e

$$I(t)|n, t\rangle = \lambda_n|n, t\rangle, \quad (3.16)$$

onde,

$$\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.17)$$

Como $I(t)$ é hermitiano, seus autoestados são ortogonais e normalizados

$$\langle n', t | n, t \rangle = \delta_{n'n}. \quad (3.18)$$

De acordo com LR as soluções da ES são relacionadas com os autoestados de $I(t)$ através da equação [16]

$$|n, t\rangle_s = e^{i\alpha_n(t)}|n, t\rangle, \quad (3.19)$$

onde, $|n, t\rangle_s$ é uma solução da ES e as fases $\alpha_n(t)$ são dadas por [16]

$$\alpha_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{dt'}{\rho^2(t')} . \quad (3.20)$$

Portanto, a solução geral da ES, eq. (3.3), é

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n(t)} |n, t\rangle , \quad (3.21)$$

na qual, c_n são constantes.

Logo, para encontrar a solução da ES temos que encontrar as autofunções do operador invariante. Para fazer isso, consideremos a equação de autovalor para o operador invariante, eq. (3.16), e multipliquemos por $|q\rangle$ para obter

$$I(t)\phi_n(q, t) = \lambda_n\phi_n(q, t) . \quad (3.22)$$

A seguir considere a transformação unitária de HR [17]

$$\phi'_n(q, t) = U\phi_n(q, t) , \quad (3.23)$$

onde,

$$U = \exp\left[-\left(i\frac{\dot{\rho}}{2\hbar\rho}\right)q^2\right] , \quad (3.24)$$

de tal forma que, sob esta transformação unitária a equação de autovalor, eq. (3.22), torna-se

$$I'(t)\phi'_n(q, t) = \lambda_n\phi'_n(q, t) , \quad (3.25)$$

onde,

$$I' = UIU^\dagger . \quad (3.26)$$

Após alguma álgebra, encontramos

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2} , \quad (3.27)$$

e a eq. (3.25) escreve-se

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}\right] \phi'_n(q, t) = \lambda_n\phi'_n(q, t) . \quad (3.28)$$

Definindo uma nova variável $\sigma = q/\rho$, a eq. (3.28) torna-se

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right] \varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma), \quad (3.29)$$

onde,

$$\phi'_n(q, t) = \frac{\varphi_n(q/\rho)}{\rho^{1/2}} = \frac{\varphi_n(\sigma)}{\rho^{1/2}}. \quad (3.30)$$

Nesta última equação o fator $\rho^{1/2}$ foi introduzido para que a condição de normalização seja satisfeita, ou seja,

$$\int \phi_n^{*'}(q, t) \phi'_n(q, t) dq = \int \varphi_n^*(\sigma) \varphi_n(\sigma) d\sigma = 1. \quad (3.31)$$

Analizando a eq. (3.29) vemos que ela é a ES para o oscilador harmônico simples com massa e frequência unitárias, cuja solução é [63]

$$\varphi_n(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar n! 2^n}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2\hbar} \right) H_n \left[\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \sigma \right], \quad (3.32)$$

onde, H_n é o polinômio de Hermite de ordem n . Agora, usando as eqs. (3.23), (3.24), (3.30) e (3.32), encontramos

$$\phi_n(q, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar n! 2^n \rho}} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{q}{\rho} \right]. \quad (3.33)$$

Finalmente, usando a eq. (3.19), encontramos que $\Psi_n(q, t)$ é dada por

$$\Psi_n(q, t) = e^{i\alpha_n(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar n! 2^n \rho}} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{q}{\rho} \right], \quad (3.34)$$

onde, $\alpha_n(t)$ é dado pela eq. (3.20) e ρ pela eq. (3.5). A solução geral da ES é encontrada usando a eq. (3.21), ou seja, somando sobre todos os valores de n

$$\Psi(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar n! 2^n} \rho} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{q}{\rho} \right]. \quad (3.35)$$

Na próxima seção usaremos este resultado para encontrar a função de onda de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo.

3.2 Função de onda

Considere o Hamiltoniano abaixo

$$H(x_1, x_2, t) = \frac{p_{1x}^2}{2m_1(t)} + \frac{p_{2x}^2}{2m_2(t)} + \frac{m_1(t)\omega_1^2(t)x_1^2}{2} + \frac{m_2(t)\omega_2^2(t)x_2^2}{2} + \frac{k(t)(x_2 - x_1)^2}{2}. \quad (3.36)$$

Depois das duas transformações realizadas no Capítulo 2 podemos escrever

$$K = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\Omega_1^2(t)}{2} Q_1^2 + \frac{\Omega_2^2(t)}{2} Q_2^2, \quad (3.37)$$

onde, Ω_i ($i = 1$ e 2) é dado pelas eqs. (2.51) e (2.52). O Hamiltoniano acima pode ser escrito como

$$K = K_1 + K_2, \quad (3.38)$$

com

$$K_i = \frac{P_i^2}{2} + \frac{\Omega_i^2(t)}{2} Q_i^2, (i = 1 \text{ e } 2). \quad (3.39)$$

Para o Hamiltoniano transformado, K , podemos aplicar o método de LR [16] para encontrar a função de onda. Para este Hamiltoniano o operador invariante é dado por

$$I = I_1 + I_2, \quad (3.40)$$

onde,

$$I_i = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Q_i}{\rho_i} \right)^2 + (\rho_i P_i - \dot{\rho}_i Q_i)^2 \right], (i = 1 \text{ e } 2), \quad (3.41)$$

com

$$\ddot{\rho}_i + \Omega_i^2 \rho_i = \frac{1}{\rho_i^3}, (i = 1 \text{ e } 2). \quad (3.42)$$

Como K é a soma de dois Hamiltonianos de osciladores harmônicos com massas unitárias e frequências dependentes do tempo, podemos aplicar a eq. (3.34) para encontrar a função de onda, que é dada pelo produto de duas funções de onda, uma para cada termo de K . Assim encontramos

$$\begin{aligned} \psi_{n_1 n_2}(Q_1, Q_2, t) &= \psi_{n_1}(Q_1, t) \psi_{n_2}(Q_2, t) = \exp[i\alpha(n_1, n_2, t)] \sqrt{\frac{1}{\pi \hbar n_1! n_2! 2^{n_1+n_2} \rho_1 \rho_2}} \\ &\exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} + \frac{i}{\rho_1^2} \right) Q_1^2 + \frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}_2}{\rho_2} + \frac{i}{\rho_2^2} \right) Q_2^2 \right] H_{n_1} \left[\frac{Q_1}{\sqrt{\hbar} \rho_1} \right] H_{n_2} \left[\frac{Q_2}{\sqrt{\hbar} \rho_2} \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Esta função de onda é solução da ES para o Hamiltoniano K . Para encontrar a solução da ES para o Hamiltoniano H , eq. (3.36), usamos as eqs. (2.41) e (2.42), ou seja

$$Q_1 = \sqrt{m_1(t)} \cos(\theta) x_1 - \sqrt{m_2(t)} \sin(\theta) x_2, \quad (3.44)$$

e

$$Q_2 = \sqrt{m_1(t)} \sin(\theta) x_1 + \sqrt{m_2(t)} \cos(\theta) x_2. \quad (3.45)$$

Substituindo estas duas últimas equações na eq. (3.43) encontramos que

$$\begin{aligned} \psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2, t) &= \exp[i\alpha(n_1, n_2, t)] \sqrt{\frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\pi \hbar n_1! n_2! 2^{n_1+n_2} \rho_1 \rho_2}} \\ &\exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} + \frac{i}{\rho_1^2} \right) (m_1 \cos^2(\theta) x_1^2 + m_2 \sin^2(\theta) x_2^2 - \sqrt{m_1 m_2} \sin(2\theta) x_1 x_2) \right] \end{aligned}$$

$$\exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{i}{\rho_1^2} \right) (m_1 \sin^2(\theta) x_1^2 + m_2 \cos^2(\theta) x_2^2 + \sqrt{m_1 m_2} \sin(2\theta) x_1 x_2) \right] \\ H_{n_1} \left[\frac{\sqrt{m_1} \cos(\theta) x_1 - \sqrt{m_2} \sin(\theta) x_2}{\sqrt{\hbar} \rho_1} \right] H_{n_2} \left[\frac{\sqrt{m_1} \sin(\theta) x_1 + \sqrt{m_2} \cos(\theta) x_2}{\sqrt{\hbar} \rho_2} \right]. \quad (3.46)$$

O fator $\sqrt{m_1 m_2}$ é introduzido para que a condição de normalização seja satisfeita, ou seja,

$$\int \psi_{n_1 n_2}^*(Q_1, Q_2, t) \psi_{n_1 n_2}(Q_1, Q_2, t) dQ_1 dQ_2 = \\ = \int \psi_{n_1 n_2}^*(x_1, x_2, t) \psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 = 1. \quad (3.47)$$

A eq. (3.46) é uma solução da ES para o Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Analisando-a vemos que aparecem termos com o produto das coordenadas e que os polinômios de Hermite dependem das duas coordenadas. Este é um resultado esperado, pois o Hamiltoniano tem um termo de acoplamento nas coordenadas. Outra coisa que podemos verificar é que no limite em que o parâmetro de acoplamento tende a zero, a função de onda tende ao produto de duas funções de onda de osciladores unidimensionais, sendo que cada um dos termos está em acordo com o resultado encontrado nas Refs. [18,64-65].

A solução geral é

$$\psi(x_1, x_2, t) = \sum_{n_1 n_2} \exp[i\alpha(n_1, n_2, t)] \sqrt{\frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\pi \hbar n_1! n_2! 2^{n_1+n_2} \rho_1 \rho_2}} \\ \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} + \frac{i}{\rho_1^2} \right) (m_1 \cos^2(\theta) x_1^2 + m_2 \sin^2(\theta) x_2^2 - \sqrt{m_1 m_2} \sin(2\theta) x_1 x_2) \right] \\ H_{n_1} \left[\frac{\sqrt{m_1} \cos(\theta) x_1 - \sqrt{m_2} \sin(\theta) x_2}{\sqrt{\hbar} \rho_1} \right] H_{n_2} \left[\frac{\sqrt{m_1} \sin(\theta) x_1 + \sqrt{m_2} \cos(\theta) x_2}{\sqrt{\hbar} \rho_2} \right]. \quad (3.48)$$

Na próxima seção encontraremos os valores médios, as incertezas na posição e no momento e o produto de incerteza para o oscilador 1 (oscilador associado a x_1) e o oscilador 2 (oscilador associado a x_2) usando operadores b^\dagger (criação) e b (destruição).

3.3 Produtos de incerteza

Para encontrar os valores médios podemos usar a função de onda, eq. (3.46), ou os autoestados do operador invariante. Devido à facilidade em trabalhar com operadores de criação e destruição, usaremos os autoestados do operador invariante. Sendo assim, vamos definir operadores b_j e b_j^\dagger dependentes do tempo, por

$$b_j = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\frac{Q_j}{\rho_j} + i(\rho_j P_j - \dot{\rho}_j Q_j) \right], \quad (3.49)$$

e

$$b_j^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\frac{Q_j}{\rho_j} - i(\rho_j P_j - \dot{\rho}_j Q_j) \right], \quad (3.50)$$

onde, $j = 1$ e 2 . Destas duas últimas equações encontramos que

$$[b_j, b_j^\dagger] = 1, \quad (3.51)$$

$$Q_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \rho_j (b_j^\dagger + b_j), \quad (3.52)$$

e

$$P_j = i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left[\left(\frac{1}{\rho_j} - i \dot{\rho}_j \right) b_j^\dagger - \left(\frac{1}{\rho_j} + i \dot{\rho}_j \right) b_j \right]. \quad (3.53)$$

Substituindo as eqs. (3.52) e (3.53) na eq. (3.40) obtemos

$$I = I_1 + I_2 = \hbar(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + 1), \quad (3.54)$$

que pode ser escrita como

$$I = (N_1 + N_2 + 1) , \quad (3.55)$$

onde, $N_j = b_j^\dagger b_j$. Logo, vemos que I satisfaz a mesma álgebra do oscilador harmônico bidimensional, sendo assim, sua equação de autovalor é

$$I|n_1, n_2, t\rangle = \lambda_{n_1 n_2} |n_1, n_2, t\rangle , \quad (3.56)$$

onde,

$$\lambda_{n_1 n_2} = \hbar(n_1 + n_2 + 1) . \quad (3.57)$$

Os operadores b_j (operador de destruição) e b_j^\dagger (operador de criação) atuando em um autoestado do operador invariante fornecem as relações

$$b_1 |n_1, n_2, t\rangle = \sqrt{n_1} |n_1 - 1, n_2, t\rangle , \quad (3.58)$$

$$b_2 |n_1, n_2, t\rangle = \sqrt{n_2} |n_1, n_2 - 1, t\rangle , \quad (3.59)$$

$$b_1^\dagger |n_1, n_2, t\rangle = \sqrt{n_1 + 1} |n_1 + 1, n_2, t\rangle , \quad (3.60)$$

e

$$b_2^\dagger |n_1, n_2, t\rangle = \sqrt{n_2 + 1} |n_1, n_2 + 1, t\rangle . \quad (3.61)$$

Agora, das eqs. (2.13) a (2.16) e (2.22) a (2.25) encontramos que

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{m_1(t)}} (\cos(\theta) Q_1 + \sin(\theta) Q_2) , \quad (3.62)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{m_2(t)}} (-\sin(\theta) Q_1 + \cos(\theta) Q_2) , \quad (3.63)$$

$$p_{1x}(t) = \sqrt{m_1(t)} (\cos(\theta) P_1 + \sin(\theta) P_2) - \frac{dm(t)}{dt} \frac{(\cos(\theta) Q_1 + \sin(\theta) Q_2)}{2\sqrt{m_2(t)}} , \quad (3.64)$$

e

$$p_{2x}(t) = \sqrt{m_2(t)} (-\sin(\theta) P_1 + \cos(\theta) P_2) - \frac{dm(t)}{dt} \frac{(-\sin(\theta) Q_1 + \cos(\theta) Q_2)}{2\sqrt{m_1(t)}} . \quad (3.65)$$

Substituindo os valores de Q_j e P_j das eqs. (3.52) e (3.53) nas eqs. (3.62) a (3.65), obtemos que

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{1}{\sqrt{m_1(t)}} [\cos(\theta) \rho_1 (b_1^\dagger + b_1) + \sin(\theta) \rho_2 (b_2^\dagger + b_2)] , \quad (3.66)$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{1}{\sqrt{m_2(t)}} [-\sin(\theta) \rho_1 (b_1^\dagger + b_1) + \cos(\theta) \rho_2 (b_2^\dagger + b_2)] , \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} p_{1x}(t) = & i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sqrt{m_1(t)} \cos(\theta) \left[\left(\frac{1}{\rho_1} - i \dot{\rho}_1 \right) b_1^\dagger - \left(\frac{1}{\rho_1} + i \dot{\rho}_1 \right) b_1 \right] + \\ & + i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sqrt{m_1(t)} \sin(\theta) \left[\left(\frac{1}{\rho_2} - i \dot{\rho}_2 \right) b_2^\dagger - \left(\frac{1}{\rho_2} + i \dot{\rho}_2 \right) b_2 \right] + \\ & + \left\{ -\frac{dm(t)}{dt} \frac{1}{2\sqrt{m_2(t)}} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [\cos(\theta) \rho_1 (b_1^\dagger + b_1) + \sin(\theta) \rho_2 (b_2^\dagger + b_2)] \right\} , \quad (3.68) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_{2x}(t) = & i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sqrt{m_2(t)} [-\sin(\theta)] \left[\left(\frac{1}{\rho_1} - i \dot{\rho}_1 \right) b_1^\dagger - \left(\frac{1}{\rho_1} + i \dot{\rho}_1 \right) b_1 \right] + \\ & + i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sqrt{m_2(t)} \cos(\theta) \left[\left(\frac{1}{\rho_2} - i \dot{\rho}_2 \right) b_2^\dagger - \left(\frac{1}{\rho_2} + i \dot{\rho}_2 \right) b_2 \right] \\ & + \left\{ -\frac{dm(t)}{dt} \frac{1}{2\sqrt{m_1(t)}} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [-\sin(\theta) \rho_1 (b_1^\dagger + b_1) + \cos(\theta) \rho_2 (b_2^\dagger + b_2)] \right\} . \quad (3.69) \end{aligned}$$

Finalmente, usando as eqs. (3.58) a (3.61) e (3.66) a (3.69) podemos encontrar os valores médios e os valores quadráticos médios, que são

$$\langle x_j \rangle = \langle p_{jx} \rangle = 0 , \quad (3.70)$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m_1} [(2n_1 + 1) \rho_1^2 (\cos \theta)^2 + (2n_2 + 1) \rho_2^2 (\sin \theta)^2] , \quad (3.71)$$

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m_2} [(2n_2 + 1) \rho_2^2 (\cos \theta)^2 + (2n_1 + 1) \rho_1^2 (\sin \theta)^2] , \quad (3.72)$$

$$\langle p_{1x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \{ (2n_1 + 1) (\cos \theta)^2 \left[m_1 (\rho_1^{-2} + \dot{\rho}_1^2) - \dot{m} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \rho_1 \dot{\rho}_1 + \frac{\dot{m}^2}{4m_2} \rho_1^2 \right] +$$

$$+(2n_2 + 1) (\sin\theta)^2 \left[m_2 (\rho_2^{-2} + \dot{\rho}_2^2) - \dot{m} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \rho_2 \dot{\rho}_2 + \frac{\dot{m}^2}{4m_2} \rho_2^2 \right] \} , \quad (3.73)$$

e

$$\begin{aligned} \langle p_{2x}^2 \rangle = & \frac{\hbar}{2} \{ (2n_2 + 1) (\cos\theta)^2 \left[m_2 (\rho_2^{-2} + \dot{\rho}_2^2) - \dot{m} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \rho_2 \dot{\rho}_2 + \frac{\dot{m}^2}{4m_1} \rho_2^2 \right] + \\ & +(2n_1 + 1) (\sin\theta)^2 \left[m_1 (\rho_1^{-2} + \dot{\rho}_1^2) - \dot{m} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \rho_1 \dot{\rho}_1 + \frac{\dot{m}^2}{4m_2} \rho_1^2 \right] \} . \end{aligned} \quad (3.74)$$

Destas cinco últimas equações podemos encontrar as incertezas na posição e no momento. Estas são dadas pelas raízes dos valores quadráticos médios, pois os valores médios são nulos. Podemos encontrar também os produtos de incerteza para os dois osciladores, a saber

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_1 \rangle^2 \langle \Delta P_{1x} \rangle^2 = & \frac{\hbar^2}{4} \left\{ (2n_1 + 1)^2 (\cos\theta)^4 \left[1 + \rho_1^2 \left(\dot{\rho}_1 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_1 \right)^2 \right] \right\} + \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) (\sin 2\theta)^2 \left[\rho_1^2 \left(\frac{1}{\rho_2^2} + \left(\dot{\rho}_2 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_2 \right)^2 \right) + \rho_2^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \left(\dot{\rho}_1 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_1 \right)^2 \right) \right] + \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \left\{ (2n_2 + 1)^2 (\sin\theta)^4 \left[1 + \rho_2^2 \left(\dot{\rho}_2 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_2 \right)^2 \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.75)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_2 \rangle^2 \langle \Delta P_{2x} \rangle^2 = & \frac{\hbar^2}{4} \left\{ (2n_1 + 1)^2 (\sin\theta)^4 \left[1 + \rho_1^2 \left(\dot{\rho}_1 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_1 \right)^2 \right] \right\} + \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) (\sin 2\theta)^2 \left[\rho_1^2 \left(\frac{1}{\rho_2^2} + \left(\dot{\rho}_2 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_2 \right)^2 \right) + \rho_2^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \left(\dot{\rho}_1 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_1 \right)^2 \right) \right] + \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \left\{ (2n_2 + 1)^2 (\cos\theta)^4 \left[1 + \rho_2^2 \left(\dot{\rho}_2 - \frac{\dot{m}}{2m} \rho_2 \right)^2 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Analizando estas duas últimas equações vemos que o produto de incerteza, para os dois osciladores, contém o produto $n_1 n_2$, ou seja, um termo de

acoplamento. Outra coisa que podemos constatar é que no limite que o parâmetro de acoplamento tende a zero e os demais parâmetros do sistema (massas e frequências) são constantes os produtos de incerteza tendem a incerteza do oscilador harmônico bidimensional.

Até agora, todas as grandezas analisadas (função de onda, incerteza na posição e no momento e os produtos de incerteza) dependem de uma solução particular da equação de Milne-Pinney. Assim, na próxima seção encontraremos uma solução particular desta equação para os quatro casos analisados no Capítulo anterior.

3.4 Soluções da equação de Milne-Pinney

Consideremos inicialmente o caso (i). Como para este oscilador as frequências modificadas são constantes, uma solução particular da equação de Milne-Pinney (EMP) é

$$\rho_j = 1/\sqrt{\Omega_j}, \quad (3.77)$$

onde, Ω_1 e Ω_2 são dados pelas as eqs. (2.44) e (2.45), respectivamente. Substituindo a valor de ρ_j na eq. (3.46) obtemos

$$\begin{aligned} \psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2, t) &= \exp[i\alpha(n_1, n_2, t)] \sqrt{\frac{m_0 \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}}{\pi \hbar n_1! n_2! 2^{n_1+n_2}}} \\ &\exp \left[\frac{-\Omega_1}{2\hbar} m_0 (\cos^2(\theta) x_1^2 + \sin^2(\theta) x_2^2 - \sin(2\theta) x_1 x_2) \right] \\ &\exp \left[\frac{-\Omega_2}{2\hbar} m_0 (\sin^2(\theta) x_1^2 + \cos^2(\theta) x_2^2 + \sin(2\theta) x_1 x_2) \right] \\ H_{n_1} \left[\sqrt{\frac{m_0 \Omega_1}{\hbar}} (\cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) x_2) \right] H_{n_2} \left[\sqrt{\frac{m_0 \Omega_2}{\hbar}} (\sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) x_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Para o caso (ii) as frequências modificadas também são constantes. Logo, uma solução particular da EMP é dada pela eq. (3.77), com Ω_1 e Ω_2 dado agora pelas eqs. (2.51) e (2.52), respectivamente. Assim, a função de onda é dada por

$$\begin{aligned}
\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2, t) &= \exp[i\alpha(n_1, n_2, t)] \sqrt{\frac{m_0 \exp(\gamma t) \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}}{\pi \hbar n_1! n_2! 2^{n_1+n_2}}} \\
&\exp\left[\frac{-\Omega_1}{2\hbar} m_0 \exp(\gamma t) (\cos^2(\theta) x_1^2 + \sin^2(\theta) x_2^2 - \sin(2\theta) x_1 x_2)\right] \\
&\exp\left[\frac{-\Omega_2}{2\hbar} m_0 \exp(\gamma t) (\sin^2(\theta) x_1^2 + \cos^2(\theta) x_2^2 + \sin(2\theta) x_1 x_2)\right] \\
&H_{n_1} \left[\sqrt{\frac{m_0 \Omega_1}{\hbar}} \exp\left[\frac{\gamma t}{2}\right] (\cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) x_2) \right] \\
&H_{n_2} \left[\sqrt{\frac{m_0 \Omega_2}{\hbar}} \exp\left[\frac{\gamma t}{2}\right] (\sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) x_2) \right]. \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Para os dois últimos casos as frequências modificadas dependem do tempo. Por isso, encontrar uma solução particular da EMP é mais complicado. Entretanto, nas Refs. [66-67] é mostrado que uma solução particular da EMP, eq. (3.42), é

$$\rho_j = \sqrt[4]{\frac{-4}{W_j^2}} \sqrt{x_j^1 x_j^2}, \tag{3.80}$$

onde, x_j^1 e x_j^2 são duas soluções linearmente independentes da equação de movimento homogênea

$$\ddot{x}_j + \Omega_j^2 x_j = 0, \tag{3.81}$$

e W_j é o Wronskiano destas duas soluções linearmente independentes. Assim, para o caso (iii), da eq. (2.67), encontramos que

$$W_j = \frac{2\sqrt{-1}\gamma}{\pi}, \tag{3.82}$$

e

$$\rho_j = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma} \left\{ J_1^2 \left[\frac{2\sqrt{b_j}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + N_1^2 \left[\frac{2\sqrt{b_j}}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\}}, \quad (3.83)$$

onde, b_1 e b_2 são dados pelas eqs. (2.61) e (2.62), respectivamente. As funções J_1 e N_1 são as funções de Bessel e Neumann de primeira ordem, respectivamente. Assim, substituindo o valor de ρ_j na eq. (3.46) encontramos a função de onda. Não expressamos $\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2, t)$, pois envolve derivadas de ρ_j , ($j = 1, 2$) que são grandes expressões.

Por fim, consideremos o caso (iv). Neste utilizando a eq. (2.74) encontramos que

$$W_j = -\frac{2\sqrt{-1}\gamma}{\pi}, \quad (3.84)$$

e

$$\rho_j = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma} \left\{ J_0^2 \left[\frac{2\sqrt{b_j}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] + N_0^2 \left[\frac{2\sqrt{b_j}}{\gamma} \exp \left(\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \right\}}, \quad (3.85)$$

sendo, J_0 e N_0 as funções de Bessel e Neumann de ordem zero, respectivamente. Novamente b_1 e b_2 são dados pelas eqs. (2.61) e (2.62), respectivamente. Assim, substituindo o valor de ρ_j na eq. (3.46) encontramos a função de onda. Mais uma vez a função de onda depende de derivadas de ρ_j , ($j = 1, 2$) que são expressões grandes, por isso, não expressamos $\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2, t)$.

A dependência temporal das incertezas na posição e no momento, para os osciladores 1 e 2 de cada caso são analisados no estado $n_1 = n_2 = 0$ e em unidades de $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Em todos os gráficos usamos unidades tal que $m_0 = \omega_{02} = k_0 = \gamma = \hbar = \frac{\omega_{01}}{2} = 1$.

Nas figuras 3.1-3.4 mostramos a dependência temporal da incerteza na posição para o oscilador 1 e 2 e a incerteza no momento também para o oscilador 1 e 2, respectivamente.

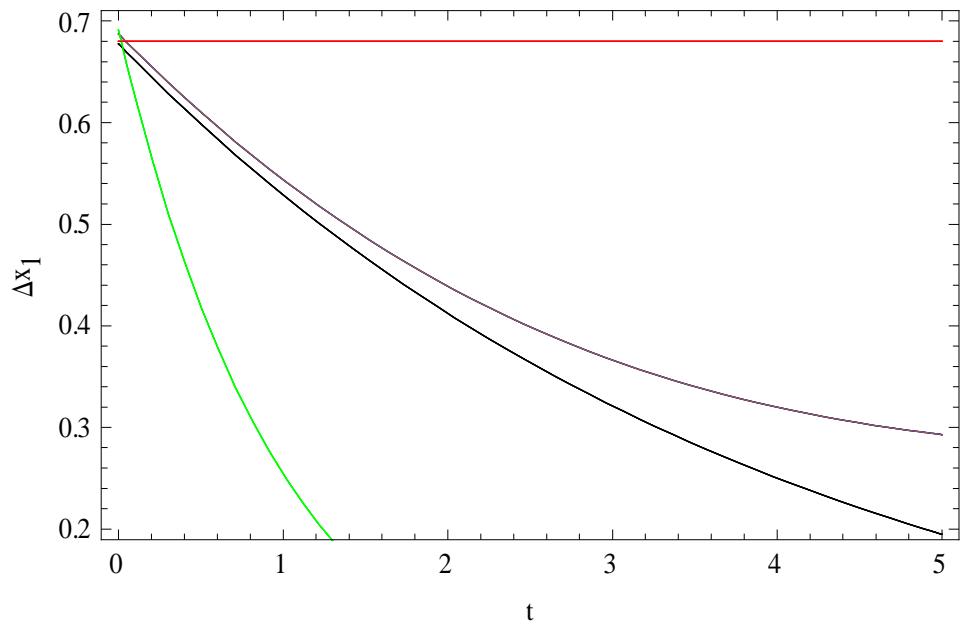


Figura 3.1: Incerteza na posição para o oscilador 1 em função do tempo . Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv)).

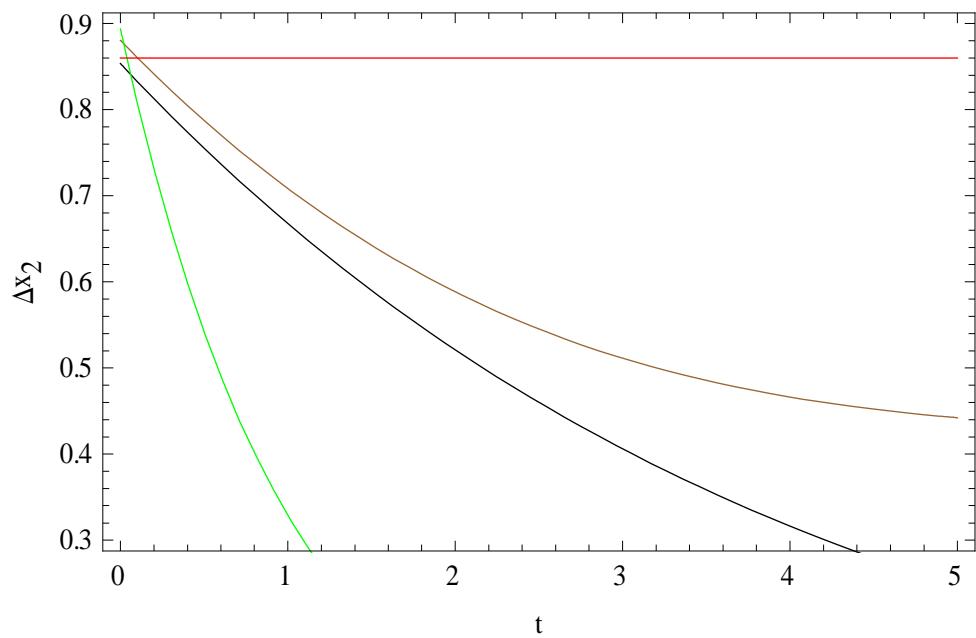


Figura 3.2: Incerteza na posição para o oscilador 2 em função do tempo. Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv)).

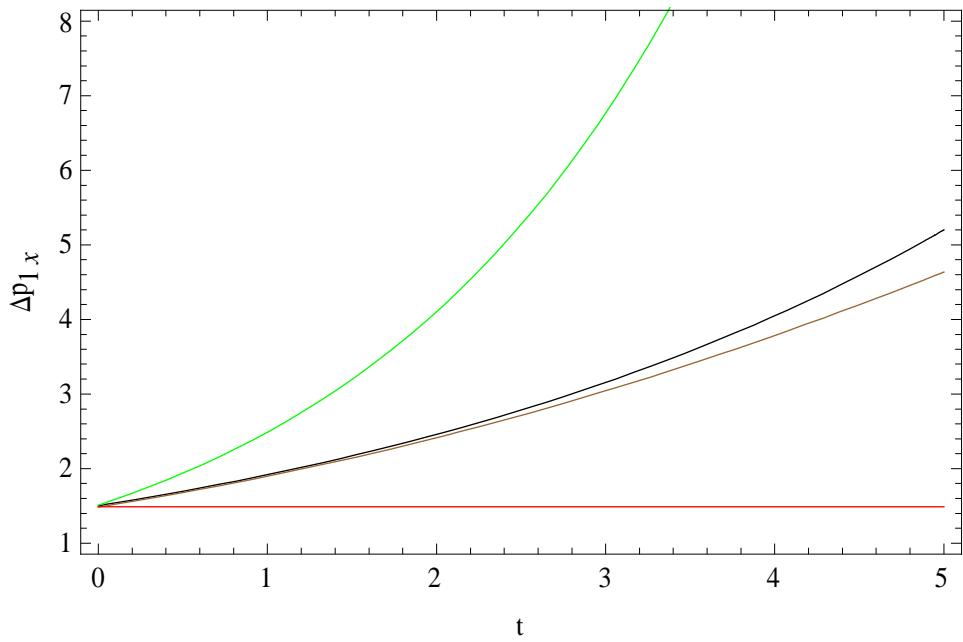


Figura 3.3: Incerteza no momento para o oscilador 1 em função do tempo. Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv)).

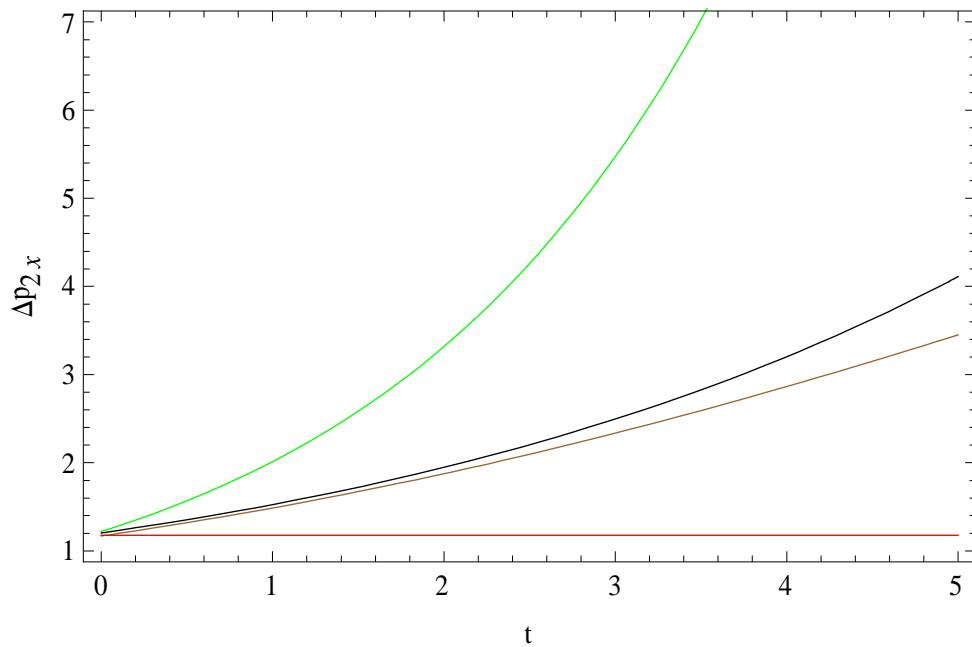


Figura 3.4: Incerteza no momento para o oscilador 2 em função do tempo. Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv)).

Para efeito de comparação consideremos também as incertezas na posição e no momento para o oscilador harmônico simples independente do tempo

em unidades de $\sqrt{\frac{\hbar}{2}}$. Para este sistema, os valores médios, as incertezas na posição e no momento e o produto de incerteza são dados, respectivamente, por [63]

$$\langle x \rangle = \langle p_x \rangle = 0 , \quad (3.86)$$

$$\langle \Delta x \rangle^2 = 1 , \quad (3.87)$$

$$\langle \Delta p_x \rangle^2 = 1 , \quad (3.88)$$

$$\langle \Delta x \rangle \langle \Delta p_x \rangle = 1 , \quad (3.89)$$

onde, estamos considerando a massa e a frequência como sendo um.

Analizando as Figs. 3.1 e 3.2 vemos que o acoplamento reduz a incerteza na posição, pois para os quatro casos estudados a incerteza na posição é menor do que a incerteza na posição do oscilador harmônico simples. Vemos também que a incerteza na posição do oscilador 2 é sempre maior do que a incerteza na posição do oscilador 1. Isso indica que o oscilador 1 é mais localizado que o oscilador 2, devido ao fato que $\omega_{01} > \omega_{02}$, ou seja, um aumento da frequência reduz a incerteza na posição. Destes gráficos vemos ainda que um aumento da massa reduz a incerteza na posição, como deveria ser, porque quanto maior a massa, mais localizado será o oscilador.

Já para a incerteza no momento ocorre o inverso, como vemos das Figs. 3.3 e 3.4. O acoplamento aumenta a incerteza no momento. Vemos também que a incerteza no momento do oscilador 1 é sempre maior que do oscilador 2, pois $\omega_{01} > \omega_{02}$. Logo, um aumento na frequência aumenta a incerteza no momento, da mesma forma que um aumento da massa.

Para finalizar este capítulo vamos estudar a dependência temporal dos produtos de incerteza. Estes são mostrados em unidades de $\frac{\hbar}{2}$ nas Figs. 3.5 e 3.6 para os osciladores 1 e 2, respectivamente.

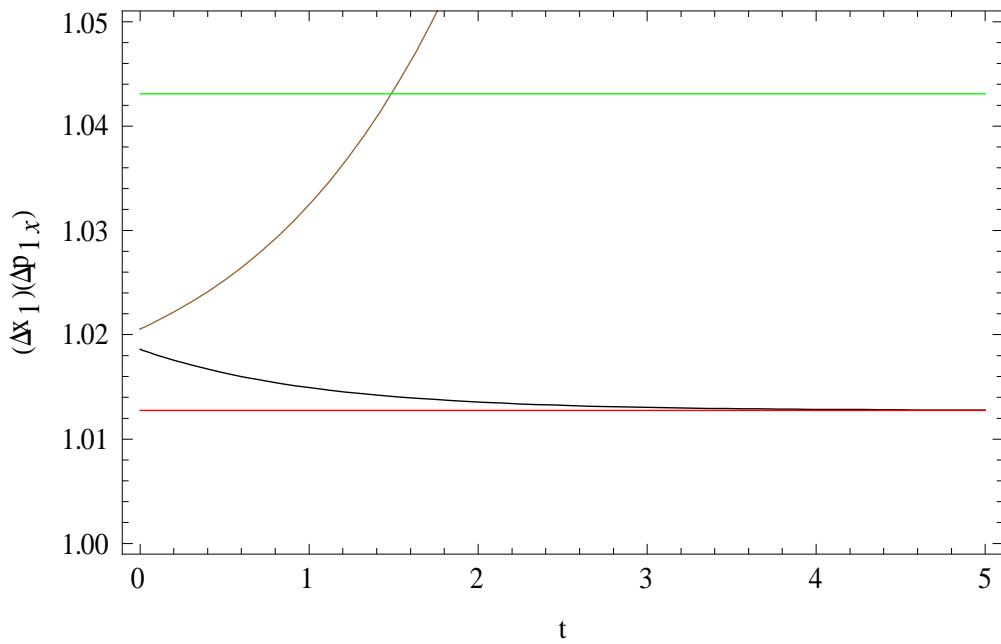


Figura 3.5: Produto de incerteza para o oscilador 1 em função do tempo. Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv)).

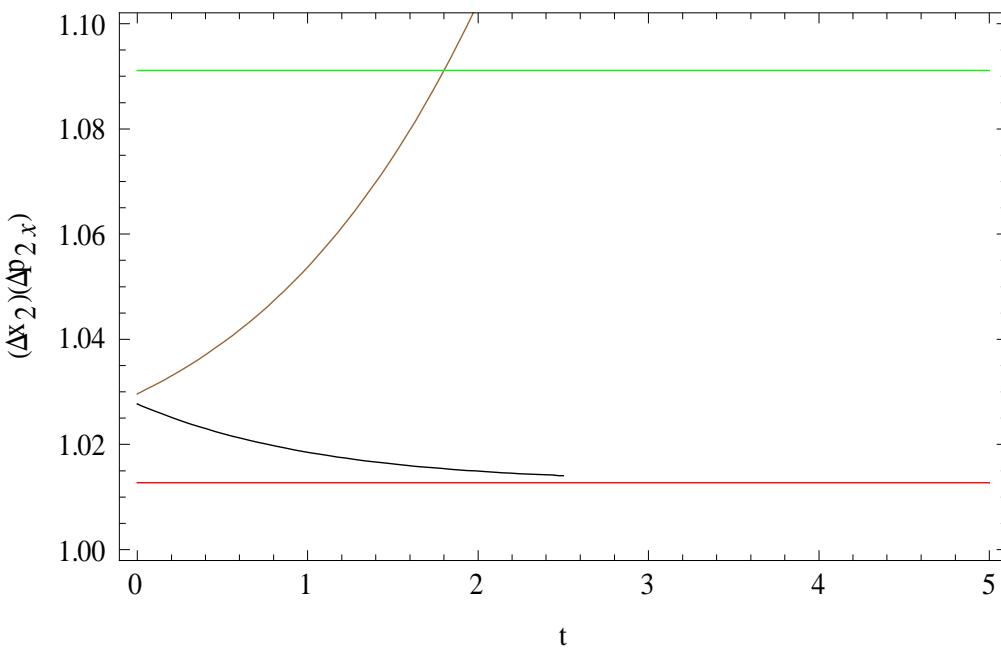


Figura 3.6: Produto de incerteza para o oscilador 2 em função do tempo. Curva vermelha (caso (i)), curva verde (caso (ii)), curva marrom (caso (iii)) e curva preta (caso (iv)).

Vemos que em nenhum dos casos é atingido à incerteza mínima, o que está de acordo com o Princípio de Incerteza de Heisenberg. Assim, uma primeira conclusão é que o acoplamento aumenta o produto de incerteza. Vemos, ainda, que o produto de incerteza no oscilador 2 é sempre maior do que o produto de incerteza do oscilador 1. Ou seja, para um sistema de osciladores acoplados, um aumento da frequência reduz o produto de incerteza.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Neste capítulo resumiremos as conclusões e perspectivas deste trabalho.

4.1 Conclusões

Neste trabalho estudamos o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes e independentes do tempo, tanto do ponto de vista da mecânica clássica quanto da mecânica quântica.

No tratamento clássico usamos uma transformação de escala e uma transformação canônica para reduzir o Hamiltoniano de dois osciladores acoplados dependentes do tempo a um Hamiltoniano de dois osciladores desacoplados dependentes do tempo. A ideia básica é transformar o Hamiltoniano da eq. (2.10) no Hamiltoniano da eq. (2.35), a qual corresponde à soma de dois osciladores harmônicos com frequências dependentes do tempo e massas unitárias. Depois de transformarmos o Hamiltoniano encontramos as posições e as velocidades de quatro diferentes casos de osciladores acoplados.

Para o caso (i), que é independente do tempo, a posição é dada pela superposição de dois osciladores harmônicos simples de diferentes frequências e amplitudes. Analisando a dependência temporal deste sistema, Fig. 2.1, vemos que a amplitude dos dois osciladores varia no tempo, correspondendo a um comportamento análogo ao fenômeno dos batimentos. Para o caso (ii) a posição também é dada pela superposição de dois osciladores harmônicos simples de diferentes frequências, mas, agora com a amplitude decrescendo exponencialmente no tempo, o que leva a um comportamento análogo a um oscilador subcrítico, Fig. 2.2. No caso (iii), os osciladores

apresentam um comportamento análogo a um oscilador supercrítico, ou seja, não oscila no tempo. No caso (iv), os osciladores se comportam de maneira semelhante a um oscilador subcrítico, oscilam no tempo, mas suas amplitudes decrescem com o tempo.

No tratamento quântico, usamos uma transformação canônica, uma transformação unitária e o método de LR para obter a função de onda do sistema de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Como no caso clássico a idéia é reduzir o Hamiltoniano acoplado, dado pela eq. (3.36), ao Hamiltoniano desacoplado, dado pela eq. (3.37). Depois, com o método de LR e a transformação unitária de HR obtemos a função de onda do sistema. Em termos das variáveis iniciais (x_1, x_2) , a função de onda é dada pela eq. (3.48). No limite que $k(t) = 0$, $\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2, t)$ corresponde exatamente a $\psi_{n_1}(x_1, t)\psi_{n_2}(x_2, t)$, como deveria ser. A função de onda é expressa em termos de ρ_1 e ρ_2 , as quais são soluções da equação de Milne-Pinney. Uma solução particular para ρ_i , eq. (3.42), é expresso em termos de x_i^1 e x_i^2 , as quais são duas soluções linearmente independentes da equação de movimento, eq. (3.81). Obtemos uma solução particular da equação de Milne-Pinney para quatro casos considerados no Capítulo 2.

Para os casos (i) e (ii) uma solução particular da EMP é dada por $\rho_i = 1/\sqrt{\Omega_i}$, pois as frequências modificadas são constantes. As funções de onda são dadas pelas eqs. (3.78) e (3.79), respectivamente. Para o caso (iii), ρ_i é dado em termos das funções de Bessel e Neumann de primeira ordem e, para o caso (iv), ρ_i é dado em termos das funções de Bessel e Neumann de ordem zero. Nós utilizamos estes valores de ρ_i para analisar a dependência temporal da incerteza na posição e no momento e o produto de incerteza para o estado fundamental. Dos gráficos mostrados nas Figs. (3.1)-(3.6), concluímos que o efeito do acoplamento é reduzir a incerteza na posição e aumentar a incerteza no momento, mas, sempre com o produto de incerteza sendo maior que $\hbar/2$. Para o oscilador acoplado independente do tempo, caso (i), $\Delta x_1 \Delta p_{1x} = \Delta x_2 \Delta p_{2x}$, essa igualdade entre os produtos de incerteza só ocorre para o estado fundamental. Porém, para os três casos $\Delta x_1 \Delta p_{1x} < \Delta x_2 \Delta p_{2x}$. Isso se deve os fato que $\omega_{01} = 2\omega_{02}$. Outra coisa que observamos é que $\Delta x_2 > \Delta x_1$ e

$\Delta p_{1x} > \Delta p_{2x}$, ou seja, um aumento da frequência reduz o produto de incerteza, diminui a incerteza na posição e aumenta a incerteza no momento. Uma coisa interessante é que, embora, o caso (ii) dependa do tempo, seu produto de incerteza independe. Isso se deve ao fato que a incerteza na posição decresce na mesma proporção que a incerteza no momento cresce. O mesmo acontece com o caso (iv) para tempos longos.

4.2 Perspectivas

Como possíveis extensões deste trabalho podemos considerar:

- 1) O estudo das órbitas dos casos considerados [68].
- 2) O estudo de osciladores acoplados na presença de um campo magnético dependente do tempo.

Referências

- [1] J. M. F. Bassalo e M. S. D. Cattani, **Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos**, Editora Livraria da Física (2009).
- [2] M. Kline, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, Oxford University Press (1972).
- [3] C. A. Truesdell, **Essays in the History of Mechanics**, Springer-Verlag (1968).
- [4] H. Bateman, *Phys. Rev.* **38**, 815 (1931).
- [5] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941).
- [6] E. Kanai, *Progress of Theoretical Physics* **3**, 440 (1948).
- [7] H. H. Denman, *Am. J. Phys.* **34**, 1147 (1966).
- [8] J. R. Ray, *Am. J. Phys.* **47**, 626 (1979).
- [9] L. Herrera, L. Nuñez, A. Patiño e H. Rago, *Am. J. Phys.* **54**, 273 (1986).
- [10] D. H. Kobe, G. Reali e S. Sieniutycz, *Am. J. Phys.* **54**, 997 (1986).
- [11] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physic* **43**, 172 (1927).
- [12] R. W. Hasse, *J. Math. Phys.* **16**, 2005 (1975).
- [13] M. C. Baldiotti, R. Fresnada e D. M. Gitman, *Phys. Lett. A* **375**, 1630 (2011).
- [14] Jr. H. R. Lewis, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 510 (1967).
- [15] V. P. Ermakov, *Univ. Izv. Kiev* **20**, 1 (1880).
- [16] Jr. H. R. Lewis e W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [17] J. R. Ray, *Phys. Rev. D* **25**, 3417 (1982).
- [18] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55**, 3219 (1997).

- [19] W. E. Milne, *Phys. Rev.* **35**, 863 (1930).
- [20] E. Pinney, *Proc. A. M. S.* **1**, 681 (1950).
- [21] J. F. Cariñena e J. Lucas, *Phys. Lett. A* **372**, 5385 (2008).
- [22] M. S. Abdalla, *Int. J. Mod. Phys. B* **16**, 2837 (2002).
- [23] K. M. Yeon, C. I. Um, W. H. Kahng e T. F. George, *Phys. Rev. A* **38**, 6224 (1988).
- [24] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **18**, 1764 (1978).
- [25] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **19**, 2888 (1978).
- [26] A. V. Zhukov e P. N. Zhukova, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 1779 (1999).
- [27] Z. Yu, D. Zhang e Y. Liu, *Int. J. Theor. Phys.* **36**, 1965 (1997).
- [28] J. Wang, T. Liu e M Zhan, *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 2013 (2000).
- [29] J. Wang, T. Liu e M Zhan, *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 2595 (2000).
- [30] L. Min-Sheng, J. Ying-Hua e X. Fang-Sen, *Chin. Phys. Lett.* **18**, 163 (2001).
- [31] J. Wang, J. Feng e M. Zhan, *Phys. Lett. A* **281**, 341 (2001).
- [32] S. Zhang, J. Choi, C. Um e K. Yeon, *Phys. Lett. A* **294**, 319 (2002).
- [33] L. Mai-Lin e Y. Bing, *Commun. Theor. Phys.* **37**, 519 (2002).
- [34] S. Zhang, J. Choi, C. Um e K. Yeon, *J. Kor. Phys. Soc.* **40**, 325 (2002).
- [35] S. Zhang, A. Zhu, Z. Jin, K. Yeon e C. Um, *J. Kor. Phys. Soc.* **43**, 773 (2003).
- [36] T. Song, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 99 (2004).
- [37] L. Jian-Xin, Y. Zhan-Yuan e S. Yong-Hua, *Commun. Theor. Phys.* **45**, 1126 (2006).
- [38] Y. Zhang, S. Cai and Y. Han, *Mod. Phys. Lett. B* **24**, 1091 (2010).
- [39] C. A. Dartora, **Tunelamento e Transporte Quântico em Sistemas Mesoscópicos: Fundamentos e Aplicações**, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, (2005).

- [40] A. P. Pinheiro, **Dinâmica Quântica de um Circuito RLC Mesoscópico**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, (2011).
- [41] H. M. Nussenzveig, **Curso de Física Básica**, Vol. 2, Editora Edgard Blücher Ltda, (2002).
- [42] Y. Li e B. Chen, *Phys. Rev. B* **53**, 4027 (1996).
- [43] S. Zhang, J. Coi, C. Um e K. Yeon, *Phys. Lett. A* **289**, 257 (2001).
- [44] Z. Shou, Z. Yong-Fang, J. Xiao-Gong, Q. Zheng-Nan e S. Wen-Hui, *Chin. Phys. Lett.* **20**, 561 (2003).
- [45] D. Han, Y. S. Kim e M. E. Noz, *Phys. Rev. A* **41**, 6233 (1990).
- [46] V. V. Dodonov, V. I. Man’ko e I. Rosa, *Phys. Rev. A* **57**, 2851 (1998).
- [47] B. Bascia, S. S. Mizrahi e M. H. Moussa, *Phys. Rev. A* **49**, 5885 (1992).
- [48] M. S. Abdalla, *Phys. Rev. A* **37**, 4026 (1988).
- [49] J. R. Choi, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, 823 (2003).
- [50] R. K. Varna, *Phys. Rep.* **378**, 301 (2003).
- [51] F. Iachello e S. Oss, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2976 (1991).
- [52] L. M. Lin e L. L. Yan, *Commun. Theor. Phys.* **43**, 1027 (2005).
- [53] S. Menouar, M. Maamache e J. R. Choi, *Phys. Scr.* **82**, 65004 (2010).
- [54] S. Menouar, M. Maamache e J. R. Choi, *Ann. of Phys.* **325**, 1708 (2010).
- [55] N. A. Lemos, **Mecânica Analítica**, 2^a Ed., Editora Livraria da Física (2007).
- [56] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1951).
- [57] E. Butkov, **Física Matemática**, Guanabara Koogan, New York (a968).
- [58] G. B. Arfken e H. J. Weber, **Física Matemática**, 6^a Ed., Editora Campus (2005).
- [59] G. I. Ghandour, *Phys. Rev. D* **35**, 1289 (1987).
- [60] A. J. Bordner, *J. Math. Phys.* **38**, 3427 (1997).
- [61] J. Lacki, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **35**, 317 (2004).

- [62] A. Anderson, *Ann. of Phys.* **232**, 292 (1994).
- [63] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, second ed., Prentice Hall, New Jersey, 2005.
- [64] C. M. Dantas, I. A. Pedrosa e B. Baseia, *Braz. J. of Phys.* **22**, 33 (1992).
- [65] I. A. Pedrosa, G. P. Serra e I. Guedes, *Phys. Rev. A* **56**, 4300 (1997).
- [66] J. R. Ray e J. L. Reid, *J. Math. Phys.* **20**, 10 (1979).
- [67] J. R. Ray e J. L. Reid, *J. Math. Phys.* **21**, 1583 (1980).
- [68] Y. F. Chen, *Phys. Rev. A* **83**, 32124 (2011).