UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

PRÓ–REITORIA DE PESQUISA E PÓS–GRADUAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS

MESTRADO PROFISSIONAL NO ENSINO

DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Francisco Tavares da Rocha Neto

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM OPERATÓRIA DE NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Fortaleza
2010

Francisco Tavares da Rocha Neto

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM OPERATÓRIA DE NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

Fortaleza

2010

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes que me orientou neste trabalho, dando sugestões valiosas, criticando quando necessário e por sua constante disponibilidade.

À Universidade Federal do Ceará, onde trabalho e que me deu oportunidade de realizar este mestrado, concedendo-me uma bolsa de estudos.

À Secretaria de Educação do Estado do Ceará, da qual sou professor, por ter concedido meu afastamento, criando assim, a disponibilidade de tempo para os estudos realizados.

Às professoras das escolas: EEFM. Figueiredo Correia, EEF. Manoel Cordeiro Neto, EEFM. Otacílio Colares e EEFM. João Mattos pela colaboração na aplicação das avaliações e dos questionários sobre suas metodologias de ensino.

Às Professoras Márcia Cristina Silva Brito e Maria Gisélia Vasconcelos pela orientação nos pontos da seleção do mestrado e pela ajuda nos trabalhos realizados durante o curso.

Às Professoras Jacqueline Amorim Tavares (minha irmã) e Maria Lanir Barbosa de Sousa por terem feito a correção da escrita e pelas observações apresentadas.

À minha família pelo incentivo e compreensão, que me permitiram ter tempo e tranqüilidade, para a execução deste trabalho.

Aos colegas de curso pela amizade sincera, ficarão na memória as conversas de intervalos, a companhia dos almoços e a realização dos trabalhos de grupo.

RESUMO

O presente trabalho teve como finalidade identificar as causas que levam os alunos a terem dificuldades com o estudo dos números inteiros, verificando até que ponto eles operam adequadamente com o sistema desses números, bem como conhecer erros e acertos mais frequentes cometidos pelos alunos. Numa primeira parte temos uma fundamentação teórica, onde constam as opiniões de alguns autores sobre o assunto. Nela apresentamos uma breve história da evolução dos números inteiros, como sugiram e em que época começaram a serem usados, como os matemáticos organizaram o sistema dos inteiros, a origem dos sinais (+) positivo e (-) negativo. Consta ainda nessa parte, o que os autores comentam sobre o ensino de matemática, onde estes tentam justificar as causas da baixa aprendizagem dessa disciplina. Nela comentamos sobre os possíveis responsáveis pelo baixo rendimento dos alunos em sala de aula e a quem seria atribuída a responsabilidade: Ao professor? Ao aluno? Ao sistema? A escola? Para alguns autores, a aprendizagem depende um pouco de cada um destes, onde professor, aluno, sistema e escola, devem fazer sua parte. Através das propostas didáticas sugeridas, podemos compreender como se dá a aprendizagem e em que situação o aluno tem a aquisição do conhecimento. Numa segunda parte é feita uma pesquisa com 100 alunos de quatro escolas de Fortaleza com a utilização de duas avaliações, onde os alunos são levados a ordenar, classificar e operar com números inteiros. Ainda nessa parte mostramos a metodologia dos professores, os obstáculos encontrados nas operações com números inteiros, a análise das dificuldades, verificando que o uso de regras se mostra como o grande causador dos erros. O objetivo da pesquisa foi de conhecer as causas das dificuldades no estudo dos inteiros, com o levantamento dos erros de forma a se conhecer os tipos mais encontrados em cada escola e em seguida, confrontá-los. No final do trabalho, foram feitas algumas conclusões a respeito dos dados obtidos e apresentados alguns recursos metodológicos.

Palavras – Chave: Dificuldades. Números inteiros. Ensino. Aprendizagem.

ABSTRACT

The present works aimed to identify the causes that make students to have difficulties in the study of integer numbers, verifying accurately the up to what level they manage property that number system, as well to seize the most popular mistakes made by students. In the first part, we offer theoretical bases supported by opinions of authors about the subject. Included in the first part is also a brief history about the evolution of the integer number system, in particular who it appeared, when it started being used, who mathematicians organized the integer numbers system, the origin of the symbols (+) plus and (-) minus. Also in this first part there are comments by authors regarding mathematics education, where they try to justify the low rate of learning in such a discipline. We comment on possible causes of the low performance of students in class and to whom one should blame: Teacher? Student? Educational system? School? For some authors, the success of learning depends a bit on all of these factors, thus teachers, students, educational system and school ought to do their part. Through the didactical strategies suggested, we can understand how the learning process happens and in which situation a student seize the knowledge. In the second part of this work, we perform a research with 100 students from four schools in Fortaleza, making use of two different evaluations. Students are required to ordinate, classify and operate integer numbers. We show the teacher’s methodology, the obstacle faced by students when operating with integer numbers, an analysis of the difficulties in the study of integer numbers, keeping track of the mistakes in order to identify the most often ones in each school and afterwards combat them. Some conclusions, based on the sample data, are delivered at the end of this work, offering also some methodological tools.

Key Words: Difficulties, Integer Numbers, Teaching, Learning.

SUMÁRIO

“O estudo da Matemática é o mais indicado para desenvolver as faculdades, fortalecer o raciocínio e iluminar o espírito."

Sócrates

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer."

Albert Einstein

Dedico este trabalho aos meus familiares.

PARTE I – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

CAPITULO 1

DA ORIGEM DOS NÚMEROS NATURAIS À FORMALIZAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS.

Neste primeiro capítulo faremos um relato histórico da origem dos números naturais e dos números inteiros, desde a utilização pelos primeiros povos até a formalização dos inteiros na forma que utilizamos hoje em dia.

1.1 A origem dos números naturais e inteiros

Hoje sabemos que a origem dos algarismos chamados “arábicos” vem da Índia. Há mais ou menos quinze séculos os indianos reuniram as ideias existentes para compor o que hoje conhecemos como algarismos.

As etapas que se sucederam para a descoberta da numeração de posição (aquela em que o algarismo tem valor diferente dependendo da posição em que é colocado) foram desenvolvidas por quatro povos: primeiro pelos Babilônios no começo do segundo milênio antes de Cristo; em seguida pelos Chineses um pouco antes da era cristã e pelos Maias entre os séculos III e V depois de Cristo e, finalmente, pelos Indianos, mais ou menos no século V da era cristã.

Segundo Ifran (1997, p.1) "*desde o início do século XX, a partir de uma rica e sólida documentação, por setores e por especialidades, obtiveram-se provas completas de que nossa numeração atual é de origem indiana”.* Desta forma podemos observar que foram os matemáticos indianos que desenvolveram a formalização, que utilizamos atualmente, de nossa numeração.

Durante muitos milênios a humanidade trabalhou com sistemas inadequados, com a falta de um símbolo para o zero (vazio) e também de uma simbologia para os números negativos que hoje usamos para expressar, por exemplo, um saldo devedor de uma conta bancária ou representar uma profundidade de um submarino em relação ao nível do mar. Sabe-se que com o advento do zero estes obstáculos foram superados o que permitiu o prolongamento dos números “naturais” aos números “relativos” pela incorporação a estes de seus “simétricos” com relação ao zero.

Dentro da cronologia dos algarismos os números negativos surgiram em primeiro lugar na China antiga, pois este povo calculava usando coleções de barras vermelhas para os números positivos e barras pretas para os números negativos, contudo não aceitavam que um número negativo fosse solução de uma equação. Coube aos matemáticos indianos descobrirem os números negativos quando da tentativa de formular soluções de equações quadráticas. De acordo com Fedrigo (2001, p.101) “*são exemplo disso as contribuições de Brahomagupta, pois a aritmética sistematizada dos números negativos encontra-se pela primeira vez na sua obra*”.

Ainda na cronologia dos números negativos, segundo Ifran (1997, p.568), em 1484 o matemático Francês Nicolas Chuquet começa a utilizar com destreza o zero e também os números negativos, e em 1489 o matemático alemão Johann Widmann de Eger introduz os sinais + e – em substituição as letras “p” inicial de piu (mais) e de “m” inicial de minus (menos).

Mais adiante, de acordo com Ifran (1997, p.568), em 1582 o matemático Belga Simon Stévin elaborou um sistema de notação unificando o domínio de aplicação das regras aritméticas, que é uma aproximação das regras que hoje são aplicadas aos números inteiros.

1.2 A formalização dos números inteiros

A formalização dos números inteiros veio a ocorrer na metade do século XIX na Alemanha nas obras de Weierstrass (1815 – 1897) e Hankel (1839 – 1873). Foi Hankel, em 1867, que pode compreender e formalizar as operações com os números relativos em sua obra “Teoria dos sistemas complexos”, onde a partir das propriedades aditivas de $\Re$ e multiplicativas de $\Re^+$, propôs estender estas propriedades de $\Re^+$ a $\Re$.

Hankel estabeleceu a regra de sinais da seguinte forma:

$0 = a.0 = a(b + op.b) = a.b + a\ (op.b)$ (1)

$0 = 0\ (op.b) = (a + op.a)\ .\ (op.b) = a.(op.b) + (op.a)\ .\ (op.b)$ (2)

$0 = 0.b = (a + op.a).(b) = a.b + (op.a).b$ (3)

A notação op.a indica o oposto de a

Comparando as igualdades (1) e (2) termo a termo, conclui-se que (op.a).(op.b) = a . b. Logo, (-) . (-) = (+) ou (-a).(-b) = ab.

Comparando as igualdades (1) e (3) termo a termo, conclui-se que a.(op.b) = (op.a). b. Logo; (+) . (-) = (-) . (+) ou a.(-b) = (-a).b.

Atualmente pode-se demonstrar e justificar a regra de sinais através de noções de grupo e de anel, pois estas estruturas nos dão o suporte para a construção dos números inteiros.

Fedrigo (2001, p.106) afirma que Bezout definiu a multiplicação algébrica, de inteiros positivos, como uma operação em que se repete uma grandeza chamada **multiplicando** tantas vezes quantas indica uma outra grandeza chamada **multiplicador**. Por exemplo (3) . (4) = 4 + 4 + 4. O número 4 será o multiplicando e 3 o multiplicador e o resultado é chamado de **produto**. Assim a regra dos sinais é justificada da seguinte forma:

1) (+a).(+b) = b + b + b +...+ b = + ab, (este caso não apresenta problemas, pois é a soma da quantidade positiva b a vezes).
2) (+a).(-b) = - b – b – b - ... – b = - ab, (este caso também não apresenta problemas, pois é a soma da quantidade negativa –b a vezes, por conseguinte o produto é uma quantidade negativa).
3) (-a).(+b) = 0 – (b + b + b + ... + b) = 0 – (+ab) = - ab, (neste caso usa-se o fato de que +ab – ab = 0, que implica em – ab = 0 – (+ab), então (+a).(-b) = - ab.
4) (-a).(-b) = 0 – (- b – b – b - ... – b) = 0 – (-ab) = + ab (neste caso usa-se o fato de que +ab – ab = 0, que implica em +ab = - (-ab).

Caraça (1958, p.95) utiliza a reta orientada para introduzir o conceito de número relativo, estabelecendo uma correspondência entre pontos de uma reta e os elementos do conjunto dos números relativos. Ele considera 0 (zero) como ponto de origem, colocando o sinal positivo em todos os pontos à direita de 0 e o sinal negativo em todos os pontos à esquerda de 0. Desta forma é possível estabelecer neste conjunto uma relação de ordem, tornando-o assim um conjunto ordenado. Assim, Caraça (1958, p.99) ordena os números reais relativos da seguinte forma:

> *"Dado dois números reais relativos a e b aos quais correspondem biunivocamente os pontos P e Q, diz-se que a > b, a = b ou a < b conforme P está à direita de Q, P coincide com Q ou P está à esquerda de Q na reta orientada."*

Quanto a igualdade, Caraça considera, pela definição acima, que dois números relativos são iguais sempre que têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal. Um mesmo número relativo pode ser definido por uma infinidade de diferenças p – q de números reais. Assim, dado um número negativo qualquer, podemos escrevê-lo da seguinte forma: p – q = 0 – r = - r, onde r é a diferença q – p, portanto segundo Caraça (1958, p.100): "*todo número negativo pode ser considerado como uma diferença em que o aditivo é zero e o subtrativo é o número real igual ao seu módulo".* Ele ainda define número negativo como a diferença entre 0 e uma quantidade positiva, ou seja – a = 0 – (+a), pois +a – a = 0.

O produto de dois números relativos é definido pelo autor da seguinte forma: "*sejam p – q e r – s dois números relativos quaisquer (p – q).(r – s) = p.(r – s) – q. (r – s) = pr – ps – (qr – qs) = pr – ps + qs – qr = pr + qs – ps – qr = (pr + qs) – (ps + qr)*". A partir desta definição, Caraça justifica a regra dos sinais. Vejamos:

1) (+a).(+b) = (a – 0).(b - 0) = (a.b + 0.0) – (a.0 +0.b)= ab – 0 = +ab.

2) (+a).(- b)=(a – 0).(0 – b)= (a.0 + 0.b) - (ab + 0.0) = 0 – (ab) = -ab.

3) (-a).(+b)=(0 – a). (b – 0)= (0.b + a.0) - (0.0 + ab) = 0 – (ab) = -ab.

4) (-a).(-b) = (0 – a).(0 - b) = (0.0 + ab) - (0.b + a.0) = ab – 0 = +ab.

Griffiths (1976, p.341 e 342) relata que para formalizarmos o sistema Z é necessário introduzirmos os números negativos, pois como sabemos a subtração a – b nem sempre é possível em Z^+ e, por conseguinte uma equação do tipo a + x = b também nem sempre é possível de ser resolvida em Z^+. Ele estabelece uma formalização de Z considerando um elemento n de Z^+ como um operador aditivo que converte qualquer número a$\in Z^+$ em a + n. Assim n se toma uma função $Z^+ \to Z^+$ cujo gráfico é um subconjunto de Z^+ x Z^+, ou seja, o subconjunto que consiste dos pares ordenados (a, b) tais que b = a + n. Vemos que dois pares (a, b) e (c, d) pertencem à mesma função se, e só se, a + d = b + c. De fato, por cancelamento em $\mathbb{Z}^+$, se b = a + n e d = c + m então a + d = a + c + m, b + c = a + c + n, de modo que m = n se, e só se, a + d = b + c .

Se tivéssemos um número – n certamente desejaríamos associá-lo ao subconjunto de $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que consiste dos pares (a, b) tais que a = b + n. Diante disto temos a seguinte definição: No conjunto $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ estabelecemos uma relação de equivalência (~) declarando que (a, b) ~ (c, d) se a + d = b + c. É lógico que essa relação é de fato uma relação de equivalência; escrevemos [a, b] para denotar a classe de equivalência contendo (a, b). Chamamos uma tal classe [a, b] um inteiro e escrevemos $\mathbb{Z}$ para denotar o conjunto dos inteiros, isto é $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+) / (\sim)$.

Usando o conjunto $\mathbb{Z}$ acima primeiro achamos nele uma cópia de $\mathbb{Z}^+$. Pois entre os elementos $[a, b] \in \mathbb{Z}$ ocorrem em particular às classes [a, b] contendo pares (a, 0) com segundo elemento $0 \in \mathbb{Z}^+$. Portanto definimos uma função f: $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ por f (a) = [a, b], e afirmarmos que f é injetiva pois (a, 0) ~ (b, 0) se e só se a = b. Assim $\mathbb{Z}^+$ está “imerso” em $\mathbb{Z}$ no sentido de que $\mathbb{Z}$ contém uma cópia a = [a, b] de cada inteiro $a \in \mathbb{Z}^+$, Essas cópias são chamadas de inteiros “positivos” e incluem **0** = [0, 0].

Agora dado o par (m, n) tal que m < n, então existe um $a \in \mathbb{Z}^+$ não nulo tal que m + a = n, assim (m, n) ~ (0, a), donde pela lei da tricotomia em $\mathbb{Z}^+$ toda classe [c, d] em $\mathbb{Z}$ é de uma e uma só das formas: [a,0], [0, 0], [0, a], a ≠ 0.

Se escrevermos (temporariamente) – a para denotar o inteiro [0, a] estamos introduzindo os inteiros negativos. Podemos observar, então que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é a união dos subconjuntos dos inteiros positivos e negativos respectivamente, e que, de acordo com a definição dada, esses dois subconjuntos têm por intersecção o conjunto que consiste do inteiro positivo **0.** Observe também, que podemos interpretar [a, b] como a – b se a ≥ b e como – (b – a) se b ≥ a (estando essas desigualdades em $\mathbb{Z}^+$).

Agora temos que estender a adição e a multiplicação na cópia f ($\mathbb{Z}^+$) de $\mathbb{Z}^+$ a todo $\mathbb{Z}$. Podemos fazer o problema, de dois modos: no primeiro definimos antes a adição e multiplicação em $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ por equações cujo significado ficará claro para o leitor se ele pensar em [a, b] como a – b . Assim definimos (a, b) + (c, d) =

(a + c, b + d) e (a, b).(c,d) = (ac + bd, ad + bc). Observamos que, com essas definições se (a', b') ~ (a, b) e (c', d') ~ (c, d) então (a', b') + (c', d') ~ (a, b) + (c, d) e (a', b') . (c', d') ~ (a, b) . (c, d).

Temos que a definição acima determina uma adição e uma multiplicação em Z pelas regras (independentes de representantes das classes).
[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] e [a, b] . [c, d] = [ac + bd, ad + bc].

Como conseqüência das igualdades acima, temos:

[a, 0] + [b, 0] = [a + b, 0] , [a, 0] . [b, 0] = [ab, 0].

[a, b] + [0, 0] = [a, b], [a, b].[0, 0] = [0, 0] , [a, b] . [1, 0] = [a, b]

As duas primeiras igualdades mostram que a aritmética de Z^+ é considerada como subconjuntos de Z pela identificação de a com [a, 0]; isto é, a imersão f em f: $Z^+ \to Z$ é um homomorfismo*. Além disso, as três últimas igualdades mostram que os números particulares **0 e 1** desempenham o mesmo papel algébrico em Z que na cópia f (Z^+) de Z^+. Outra conseqüência que observamos é que a equação [a, b] + x = [c, d] em Z tem solução única x = [b + c, a + d], de modo que realizamos nosso objetivo de poder efetuar a subtração; e a notação – a introduzida para [0,a] se justifica pois

a + (- a) = [a, 0] + [0, a] = [a, a] = [0, 0] = 0. Também [a, b] = a = (- b).

Finalmente verificamos que as leis da aritmética valem em Z como em Z^+, portanto voltamos a escrever a para **a** quando a $\in Z^+$, pois f : $Z^+ \to$ f(Z^+) é um isomorfismo**.

* Transformação unívoca de um grupo sobre outro que preserva as operações dos grupos.
** Correspondência biunívoca entre os elementos de dois grupos que preserva as operações de ambos.

CAPÍTULO 2

OS OBSTÁCULOS E A APRENDIZAGEM OPERATÓRIA DOS NÚMEROS INTEIROS.

Neste capítulo abordaremos os obstáculos e dificuldades do conteúdo dos números inteiros relatados pelos teóricos e a justificativa de alguns autores para o baixo desempenho no ensino de matemática.

2.1 Obstáculos e dificuldades encontrados nas operações com os números inteiros

Sabemos pela história que os números naturais sem o zero apareceram em primeiro lugar; em seguida os racionais positivos e os irracionais. Segundo Teixeira (1992, p.43), após a descoberta do zero pelos hindus surgiram os negativos seguidos dos números complexos. Então podemos afirmar que os números negativos aparecem da necessidade que o homem teve de efetuar a subtração para todos os números naturais, ou seja, se a e b $\in \mathbb{N}$, a subtração a - b é valida tanto para a > b como para b > a.

Quem ensina matemática nos anos do Ensino Fundamental maior sabe que os alunos sentem dificuldade nas operações com os números inteiros, principalmente com os negativos e que esta dificuldade permanece ao longo dos anos seguintes. As razões que levam alguns a aprenderem e outros não estão contidas, segundo Baldino (1993, p.42), na apresentação da disciplina, na organização da sala de aula para situação de aprendizagem e na organização da instituição de forma a incentivar o desejo de aprender do aluno.

A apresentação da disciplina está ligada ao campo da didática, onde há uma nítida preocupação com o ensino, sem considerar o aspecto social. Já a organização de situação de aprendizagem está ligada ao campo da pedagogia, cuja preocupação é com a educação, ou seja, com o social. Finalmente, a preocupação com o desejo do aluno aprender está ligada ao campo da psicanálise, cujo interesse é com o sujeito.

No caso dos números inteiros, Glaeser (*apud* Teixeira 1992, p.49) aponta seis obstáculos para a compreensão dos números inteiros relativos:

> *1) Inaptidão para manipular quantidades isoladas;*
>
> *2) Dificuldades em dar um sentido a quantidades negativas isoladas;*
>
> *3) Dificuldades em unificar a reta numérica manifesta pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas, pela concepção da reta como mera justaposição de duas semi-retas opostas;*
>
> *4) A ambiguidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem;*
>
> *5) Dificuldade de afastar-se de um sentido "conceito" atribuído aos seres numéricos: fixação no estágio das operações concretas por oposição ao formal;*
>
> *6) Desejo de um modelo unificador: utilização de um modelo aditivo para o campo multiplicativo, ao qual não se aplica.*

É fácil ver, principalmente para quem leciona, que estes obstáculos estão intimamente ligados às operações com os números inteiros onde temos que fazer uso de regras para comparar inteiros, tal como podemos observar na regra descrita por Andrini (1988, p.12): "*dados dois números inteiros, o que está à direita é o maior deles, e o que está à esquerda é o menor deles*". Para se operar com adição e com a subtração de inteiros, usam-se regras de sinais e as dificuldades aparecem devido a não compreensão e a não utilização correta dessas regras. O não domínio dos conceitos para efetuar multiplicações e divisões, a não execução dos procedimentos corretos para resolver expressões numéricas, como eliminar parênteses, colchetes e chaves e a sequência das operações, são os fatores que geram confusão por parte dos alunos na hora de operar com os números inteiros.

Já para Brousseau (*apud* Teixeira, 1992, p.56) os obstáculos têm três tipos de origem atrelados ao ensino da matemática:

> *1) Origem Ontogenética: correspondendo aos obstáculos ligados às limitações das capacidades cognitivas dos alunos;*
>
> *2) Origem Didática: obstáculos devido ao sistema de ensino;*
>
> *3) Origem Epistemológica: os obstáculos devido às resistências de saber mal adaptado.*

Podemos observar que nos obstáculos citados acima há uma clara preocupação com o ensino, onde se pode buscar elementos que possibilitem a identificação dos obstáculos encontrados pelos alunos, assim como é nele que se encontram métodos e situações pelos quais se pode sanar as barreiras colocadas por estes obstáculos.

Temos a observar ainda que a aprendizagem não se reduz a uma mera repetição de regras e exercícios. É necessário entender que existem respostas diferentes de cada aluno, em que uns conseguem assimilar com maior eficiência do que outros, não se podendo dizer que estes são mais capazes que os outros.

Podemos afirmar que para a aprendizagem operatória dos números inteiros se realizar é necessário um conjunto de valores, onde as propriedades que governam os inteiros devem ser assimiladas vagarosamente, partindo-se das extremidades para o centro, ou seja, no começo a compreensão se dá parcialmente, cada aluno aprende à medida que vai exercitando e vivenciando situações do seu dia-a-dia, para aos poucos ir se aprofundando nas regras do conteúdo.

Através de esquemas de assimilação a aprendizagem dos números inteiros se torna programada e se desenvolve de acordo com as ações dos alunos, sendo possível a absorção, a abstração e a generalização, respeitando o nível interno de cada um.

Para Teixeira (1992, p.94), a construção do conceito de números inteiros, do ponto de vista da matemática, é uma ampliação dos naturais. Os obstáculos aparecem quando a subtração (a - b) é aplicada a casos em que (b > a) não sendo entendida de imediato pelos alunos que estão acostumados a verem a subtração como uma operação de tirar, como vista nos números naturais. Eles só passarão a tomar consciência da existência dos números inteiros negativos quando passarem a conhecer o conjunto desses números. As maiores dificuldades nas operações com números inteiros surgem quando se utiliza: a adição e a subtração com números de sinais contrários; as operações de multiplicação e divisão (uso das regras de sinais); a comparação de números inteiros (colocados em ordem crescente, principalmente quando comparam números negativos); o zero como origem e não como ausência de quantidade e a dificuldade de se trabalhar e imaginar a reta numerada.

Parece-nos visível que muitos dos alunos ficam confusos com tantas regras: *"sinais iguais soma-se e conserva-se o sinal e sinais diferentes subtrai-se e conserva-se o sinal do número de maior valor*" para citar apenas duas, conforme Timoni (1985, p.26). Para compreender melhor as operações com números inteiros é preciso que os alunos, dentro de suas estruturas mentais, construam um esquema de assimilação de modo a conseguir a ultrapassagem de um nível a outro, através da abstração e da generalização. Assim, por exemplo, o número -3 representa 3 unidades à esquerda do zero na reta. Portanto, o aluno constrói internamente regras para suprir as diferenças de operação nos conjuntos dos números naturais (já conhecidas) e dos inteiros (desconhecida até então).

Para operar com números inteiros é fundamental que os meios de assimilação da subtração estejam dispostos ordenadamente na ideia da inversão e não no conceito de tirar. É preciso identificar claramente a operação que se está efetuando, principalmente com números negativos. Na multiplicação de valores positivos a assimilação é fácil, pois é a mesma dos números naturais, até mesmo para um valor positivo e outro negativo, pois é entendida sem problemas já que 3.(+4) ou 3.(-4) significa repetir três vezes o número que está dentro dos parênteses, conservando-se o seu sinal. O obstáculo se mostra quando o operador multiplicativo é negativo, pois a operação muda de sinal como no caso (-2).(-3) = +6.

A utilização de situação que exemplifique a aplicação do esquema dos inteiros é necessária para a compreensão de valores negativos e positivos. Tais situações aparecem quando se mostra o exemplo relativo a dinheiro (crédito e débito), saldo de gols para jogos ou quando se usa o exemplo da temperatura negativa e positiva, do deslocamento no espaço e no tempo. Estes recursos são de fácil assimilação porque estão ligados a experiências de vida dos alunos.

O conjunto dos números inteiros é transmitido para os alunos como uma ampliação dos números naturais, entretanto, para eles, nesta apresentação aparecem muitas dificuldades e obstáculos, pois não se trata apenas de compreender as propriedades e regras, mas de utilizá-las dentro de um contexto. Essa compreensão, do ponto de vista cognitivo, requer uma reorganização do conceito de número de modo que sejam incorporadas a eles as operações desconhecidas até então.

O aluno sente dificuldades nas operações com números inteiros à medida que o significado se amplia; assim nos naturais, os sinais usados são de natureza operatória e indicam: (+) (acrescentar algo a) e o (-) (tirar de), enquanto que no conjunto dos inteiros a adição pode representar três situações: a de acréscimo, ex.: (+2)+(+3) = +5; a de decréscimo, ex.: (+2) + (-3) = - 1, e a situação onde a soma resulta em zero, ex.: (+2) + (-2) = 0. Do mesmo modo a subtração deixa de ter a idéia de tirar e requer a assimilação como inversa da adição, assim a subtração deve estar estruturada com base na abstração da inversão, tarefa mais complexa que o conceito de tirar, pois é necessário o aluno identificar a operação que está em jogo.

Na multiplicação é preciso entender que existe a operação com os sinais, de acordo com os valores dos números, assim também temos três situações: a do produto com números positivos, a do produto com números de sinais contrários e a do produto com números negativos.

Nos números inteiros, a aprendizagem operatória requer do aluno construir esquemas de assimilação com condições de resolver problemas relativos a experiência cotidiana, pois não há uma interligação dos números inteiros com o mundo físico como nos números naturais. Devemos imaginar ainda, que aprender a operar com os números inteiros requer a construção de diversos esquemas com significados diferentes, o que não é uma tarefa simples, por isso o aluno encontra vários obstáculos e deve superar muitas dificuldades.

2.2 O ensino de matemática e a aprendizagem operatória

Vários autores tentam justificar os baixos rendimentos dos alunos nas salas de aula principalmente na disciplina de matemática. Podemos observar que cada um tem uma parte da razão, sem, contudo, nenhum chegar à raiz do problema. A culpa é colocada inicialmente nos professores, já que a maior parte dos alunos afirma que não entendem matemática porque os professores são autoritários e não tiram dúvidas. Observa-se que muitos dos professores recém formados não estão preparados para de imediato enfrentar turmas do Ensino Fundamental maior, pois possuem uma habilitação de pouco conteúdo didático e muito pouco de prática escolar.

Polya (1984, p.1) com sua vasta experiência em proferir palestras a professores secundários e ministrar cursos práticos para tarefas diárias, enunciou dez mandamentos que poderiam ser incorporados pelos professores no seu dia-a-dia. São eles:

> *1) Tenha interesse por sua matéria;*
>
> *2) Conheça sua matéria;*
>
> *3) Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles;*
>
> *4) Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo;*
>
> *5) Dê aos seus alunos não apenas informação, mas KNOW-HOW, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico;*
>
> *6) Faça-os aprender a dar palpites;*
>
> *7) Faça-os aprender a demonstrar;*
>
> *8) Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão;*
>
> *9) Não desvende o segredo de uma vez, deixe os alunos darem palpites antes, deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível;*
>
> *10) Sugira; não os faça engolir a força.*

Podemos fazer um breve comentário sobre estes mandamentos, pois sabemos que em quase tudo na vida é necessário que se tenha interesse pelo que se faz para que o sucesso venha com segurança. É lógico que atrelado ao interesse está o conhecimento por parte do professor de sua matéria; condição fundamental para se explicar com clareza cada ponto a seus alunos.

É do nosso conhecimento que não basta o professor dominar integralmente a sua disciplina, sem que tenha um conhecimento razoável de seus alunos. Para isto é preciso se estabelecer um contato entre professor e alunos de tal forma que o mestre possa "enxergar suas expectativas e suas dificuldades".

Segundo Polya (1984, p.2) as três primeiras regras contêm a essência do bom ensino "*se você tem interesse e conhecimento, e é capaz de perceber o ponto* *de vista do aluno, você já é um bom professor, ou logo se tornara um; só precisa de experiência*".

Os mandamentos de Polya podem ser configurados como orientações aos professores, no sentido de contribuir para a melhoria da prática de ensino, uma vez que oferece ao professor referenciais para analisar muitas das decisões que toma no planejamento e no decorrer do ensino. Quando ele diz que os alunos devem fazer suas descobertas na medida do possível, pressupomos que existe a necessidade da intervenção do professor atribuindo significado à tarefa ou conteúdo da aprendizagem, pois o processo de aprender pressupõe uma mobilização cognitiva desencadeada por um interesse, por uma necessidade do saber. Naturalmente, se um aluno não conhece o propósito de uma tarefa e não vê significado nela, muito dificilmente poderá realizar aquilo que está sendo solicitado. A aprendizagem será possível se as atividades desenvolvidas pelos professores forem dotadas de significado e possibilitarem aos alunos a observação, a superação dos obstáculos, o trabalho em grupo e a expressão de opinião.

Nas soluções dos problemas, deve-se enfatizar aspectos que possam ser úteis para os alunos e comparações em que eles vejam a relação dos problemas com aspectos vividos no seu dia-a-dia. Deve-se buscar soluções que sejam modelo. Um bom método está em deixar os alunos descobrirem sozinhos a solução, dando oportunidade a estes de tentarem resolver os exercícios, não resolvendo de imediato.

Finalmente podemos dizer que a aprendizagem se dá principalmente pelas motivações dadas pelos professores e pelos estímulos que os alunos recebem. Como Polya diz (1984, p.5) "*um pouquinho de dramatização é muito bom se você tiver uma pontinha de talento teatral*".

Ceccon et al. (1984,p.36) interrogam se a culpa do fracasso escolar é da própria criança: "*Muita gente, sobretudo professores, continua a ver o fracasso escolar como um fato psicológico, como a consequência de um problema individual próprio da criança que fracassa*". Já que problemas extraclasses, como: desajustes familiares, problemas emocionais e o fracasso da família interferem diretamente na aprendizagem. Perguntamos: a culpa será mesmo da criança? Outra interrogação que se faz é se a culpa seria dos professores, pois, segundo Ceccon et al.

(1984, p.40), os pais e mães de alunos acham que a responsabilidade é dos professores, já que os mesmos não são dedicados e interessados com os alunos.

Poderíamos citar outros fatores que contribuem para o fracasso escolar: os regulamentos das escolas, a família, a pobreza, etc. Podemos verificar que todos esses fatores têm uma pequena parcela de verdade, mas a escola também tem sua parcela de culpa, já que vemos muitos problemas não resolvidos por falta de organização, principalmente nas escolas públicas. Então podemos dizer que a escola não é a mesma para todos, visto que existem as dos ricos aparelhadas e com recursos de todos os tipos, e as dos pobres que, muitas vezes, não contam nem com o essencial.

A formação de professores de matemática é questionada por Beatriz (1993, p.35) quando comenta que as atuais propostas para o ensino da matemática exigem uma nova visão do que vem a ser o ensino dessa disciplina. A formação de professores deve ser feita com uma postura diferente da tradicional em que o mestre encoraje os alunos a proporem soluções, levantar hipóteses, justificar seu raciocínio, deixando de lado a autoridade do saber e sendo um membro integrante dos grupos de trabalho.

Para D'Ambrosio (2005, p.83) existem pontos críticos na atuação dos professores em sala de aula que estão concentrados na "*deficiência de formação e se localizam na falta de capacitação para conhecer o aluno e obsolescência dos conteúdos adquiridos nas licenciaturas".* Podemos observar, de uma forma geral, que há uma grande distância entre o trabalho realizado em sala de aula pelos professores de matemática e o resultado obtido no desempenho dos alunos no futuro. O correto é o aluno ter o prazer de aprender e isto está relacionado com a postura do professor, sua maneira de passar o conhecimento e a forma como o aluno recebe o conhecimento dentro de sua filosofia de vida.

As qualidades de um bom professor passam pela percepção que ele tem do aluno, pelo lado emocional de dedicação para com seus alunos, pelos exemplos que dá, pelo conhecimento da disciplina que leciona onde é fundamental o seu domínio e o relacionamento com o mundo em que vivemos e pela postura diante dos alunos, pois suas atitudes são guardadas por estes. Diante destas qualidades, o que pesa para o professor é a sua formação nos cursos de graduação. Segundo Beatriz *apud*

D'Ambrosio (2005, p.87), o professor de matemática deve ter as seguintes características:

> *1. Visão do que vem a ser a matemática; 2. Visão do que constitui a atividade matemática; 3. Visão do que constitui a aprendizagem da matemática e, 4. Visão do que constitui um ambiente propicio à aprendizagem da matemática.*

Percebemos que se forem incorporadas estas visões durante a formação dos professores, os cursos estarão formando bons profissionais.

O progresso do aluno em sua aprendizagem está ligado à capacidade dos professores de matemática em dar suporte afetivo e cognitivo, condições fundamentais para a aprendizagem matemática, portanto o grande desafio dos mestres é criar condições para que seus alunos possam aprender num ambiente onde haja um bom relacionamento pessoal e estes estabeleçam ligação com o conhecimento.

Devemos ressaltar que é importante a intervenção do professor de forma a possibilitar o avanço de seus alunos não se restringindo apenas a mostrar os erros e as falhas, mas agindo de maneira a provocar o questionamento e a reflexão de seus alunos.

Os professores devem abandonar a ideia de que o aluno aprenderá melhor quanto maior for a quantidade de exercícios a ele destinado. É preciso dar-lhe oportunidade de criar soluções e participar ativamente do processo ensino – aprendizagem. No planejamento de suas aulas os professores de matemática devem incluir situações onde os alunos possam investigar, explorar e descobrir os problemas propostos.

Os professores devem incorporar propostas que levem em consideração a relação dos alunos com o mundo e suas vivências, propostas como o uso do computador, a história da matemática, os jogos matemáticos, a resolução de problemas e a etnomatemática. Contudo, essas propostas requerem uma preparação por parte dos mestres de forma que saibam utilizar cada um desses recursos adequadamente.

Vale ressaltar que em todos esses casos os alunos passam a ter uma posição ativa diante da sua aprendizagem e que a melhoria do ensino de matemática envolve uma diversificação de metodologias.

2.3 Como se dá a aprendizagem

A aprendizagem contribui para o desenvolvimento na medida em que aprender não é copiar ou reproduzir a realidade. A aprendizagem entendida com construção de conhecimento pressupõe entender tanto sua dimensão como produto quanto sua dimensão como processo, isto é, o caminho pelo qual os alunos elaboram pessoalmente os conhecimentos. Ao aprender, o aluno não está só aumentando a quantidade de informações, mas a sua competência (aquilo que é capaz de fazer, de pensar, de compreender).

Piaget *apud* Teixeira (1992, p.64) afirma que a aprendizagem não se reduz a "*uma cópia funcional interior das sequências objetivas*", ou seja, ele rejeita a ideia do conhecimento cópia, ou ainda a relação estímulo e resposta é contestada, pois a assimilação se da através da acomodação de respostas ao estímulo e do estímulo aos esquemas. A aprendizagem se dá em situação específica, é provocada, sendo limitada a uma só estrutura ou problema.

Para Teixeira (1992, p.86) a aprendizagem operatória que tem como objetivo o desenvolvimento da capacidade operatória do aluno se opõe à proposta da escola tradicional nos seguintes pontos:

> - *Aprender com compreensão supõe um maior tempo;*
>
> *- Aprender operatoriamente não significa saber resolver problemas específicos apenas na escola, mas encontrar soluções extensivas à realidade;*
>
> *- Aprender não é somente dar respostas comprometidas com o êxito;*
>
> *- 0 papel do professor não é o de transmissor de conhecimentos, mas o de organizar e provocar situações nas quais certos conhecimentos se apresentam como necessários. O professor deve acompanhar as etapas de construção realizadas pelos alunos.*

Parece claro que os métodos tradicionais de ensino contêm Iimitações, pois existe muito de alienação do aluno quando não se dá oportunidade para que ele crie e pense sobre os exercícios, fazendo com que ele passe a ser um mero repetidor de exercícios, não os relacionando com suas ações cotidianas.

Cabe ao professor dominar as situações que favorecem a assimilação das ideias e os procedimentos através dos quais os conceitos iniciais possam se transformar em conceitos mais sofisticados. A consciência por parte dos mestres se faz necessária para se entender as experiências do dia-a-dia dos alunos na formação de conceitos. Eles precisam ver que as dificuldades sentidas pelos alunos em compreender relações novas são inerentes ao estágio que estes se encontram.

Nos livros didáticos encontramos modelos que ligam experiências vivenciadas pelo aluno no seu dia-a-dia com o conteúdo dos números inteiros. Estes modelos são usados como ponto de partida, pois há esta correspondência dos inteiros com os aspectos físicos do mundo, como o modelo contábil, a temperatura, o deslocamento no espaço, etc. O aluno, de posse destes modelos, vai formando diferentes sub-etapas do sistema global que é o conjunto dos números inteiros e suas operações.

O aluno realiza a adição e a subtração com base nas regras: "*Na soma de dois números de mesmo sinal somamos os valores absolutos e repetimos o sinal*" e "*a soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se os valores absolutos, dando-se o sinal do número que tiver maior valor absoluto*" Andrini, (1988, p.21). Nesse momento, o aluno toma consciência de algumas contradições nos seus resultados e constrói regras mais estáveis. Na aprendizagem de números inteiros imagina-se a construção de vários esquemas de significados diferentes, de tal forma que surgem vários obstáculos e muitas dificuldades, que para serem superados é necessário se abstrair e generalizar de tal maneira que se passe dos aspectos periféricos para os aspectos centrais da ação.

É preciso por parte dos professores uma metodologia que tenha como objetivo a passagem de um nível a outro, em outros termos, uma didática que introduza o obstáculo e planeje formas de superá-lo. Como sabemos, segundo Glaeser *apud* Teixeira (1992, p.49), há seis obstáculos: manipulação de quantidades isoladas, dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas, dificuldade em unificar a reta numérica, ambiguidade dos dois zeros, confusão entre operadores multiplicativos, estados a que se aplicam e a questão do modelo unificador (adição e multiplicação). Esses obstáculos são os causadores das principais dificuldades e erros dos alunos, portanto os professores conscientes destes obstáculos podem construir metodologias capazes de superá-los. Por outro lado, é necessário lembrar que os erros podem advir de obstáculos de ordem interna do sujeito ou intrínseca ao próprio conteúdo. Logo, a explicação do erro está ligada a dois componentes: os instrumentos cognitivos do aluno e os conteúdos do ensino e sua forma didática.

O aluno aprende a operar com os números negativos quando ele consegue ultrapassar as operações de nível concreto e compreende o porquê tais operações se realizam. O que podemos chamar de composição operatória e a compreensão se realiza por etapas, onde o aluno vai gradualmente assimilando os diversos níveis, dentro de sua estrutura mental, e integrando as ações das operações até compreender totalmente as regras do sistema.

Hoje entendemos que a aprendizagem não se realiza através de cópia ou repetição de regras e exercícios, pois segundo Teixeira (1992, p.64) *"um estímulo só se torna significativo na medida em que há uma estrutura que possa assimilá-lo, ou seja, integrá-lo e produzir uma resposta"*. Desta forma percebemos que aprender passa de alguma maneira por construir o conhecimento. A aprendizagem, portanto, está ligada aos esquemas de assimilação do indivíduo e da sua organização mental, mecanismo responsável pela construção das estruturas lógicas.

A aprendizagem só é significativa para o aluno quando os professores criam situações didáticas partindo daquilo que o aluno já sabe o que Ausubel apud Moreira (1997, p.20) chamou de "conhecimentos prévios".

Moreira (1997, p.19) relata que "*a aprendizagem significativa é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva à estrutura cognitiva do aprendiz*". Por exemplo, ao se apresentar o conceito de números inteiros "operação com os números negativos" este só terá sentido, à medida que ele for relacionado com alguma ideia relevante, que esteja clara e organizada na sua estrutura cognitiva, caso contrário o aluno não será capaz de assimilar o novo conhecimento e não terá interesse pelo assunto por considerá-lo inatingível para suas possibilidades.

O conhecimento anterior sobre operações com números naturais facilitará a construção do conceito de números inteiros, uma vez que pode funcionar como ancoradouro aos novos conceitos. Somente com o passar do tempo e com a aquisição das ideias âncoras o conceito passará a ter significado para o aluno.

A aprendizagem acontece em função do nível inicial de desenvolvimento do aluno, ou seja, a aprendizagem operatória está subordinada ao nível de desenvolvimento do sujeito. Para que possamos provocar um crescimento mais rápido nos alunos é possível aumentar as atividades destes através de situações desequilibradoras. A partir da aplicação de problemas, podemos levar o aluno à absorção dos conteúdos envolvidos, conduzindo-o, desta forma, à aprendizagem. O professor pode criar situações em que os alunos possam explorar o conteúdo e estas provoquem desequilíbrio de tal sorte que não sejam simples demais, ou complexa, acima da compreensão dos alunos, o que impediria a sua assimilação.

Os professores devem compreender que o conhecimento só tem significado para o aluno quando este é resultado da sua própria construção e que quando ele adquire o conhecimento, não significa que poderá aplicá-lo a todos os problemas possíveis, ou seja, quando o conhecimento não é construído a aprendizagem resultante acontece apenas por retenção memorística.

Para Teixeira (1992, p.85) *"a aprendizagem operatória parte do pressuposto da aprendizagem com significado operatório, ou seja, supõe a possibilidade de aplicar operações a novos contextos".* Sendo assim o aluno necessita de uma pedagogia que tenha o objetivo de desenvolver sua capacidade operatória. Os professores de matemática, por sua vez, devem acompanhar seus alunos nas etapas de construção do conhecimento de maneira a ajudá-los a tomarem consciência de seus erros e a superá-los.

Cabe ainda aos mestres oferecer situações que facilitem a acomodação das ideias e dos procedimentos a novos conceitos, bem como analisar os processos onde os conceitos prévios podem se transformar em conceitos mais sofisticados.

Os professores de matemática na abordagem do conteúdo dos números inteiros, em geral, dão ênfase à memorização das regras para efetuar os cálculos, em decorrência disso muitos alunos não conseguem reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, mesmo memorizando as regras não conseguem aplicá-las adequadamente, pois para tal é preciso que eles desenvolvam uma maior compreensão do que seja um número inteiro. Percebendo a lógica dos números negativos que é contrária a lógica dos números naturais – por exemplo, é possível "adicionar 7 a um número e obter 2 no resultado", assim como também é possível "subtrair um número de 3 e obter 8".

Por outro lado, os professores devem levar em consideração que os alunos já têm uma noção intuitiva de números inteiros que vem de experiências práticas, como comparar alturas, altitudes, constatar variações de temperaturas e saldos negativos, que servirão como uma introdução no estudo dos inteiros.

Um interessante recurso, segundo os parâmetros curriculares (Brasil, 1998: p.98 - 99), para explorar alguns aspectos dos números inteiros é a sua representação geométrica na reta orientada, pois ajuda:

- A visualização do ponto de referência (origem) a partir do qual se definem os dois sentidos;

- A identificar um número e seu oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero;

- A reconhecer a ordenação dos inteiros;

- A comparar números inteiros e identificar diferenças entre eles;

- A inferir regras para operar com a adição e a subtração.

Este recurso facilita a compreensão dos alunos por ser visual e o professor poder trabalhar uma contextualização prática. A reta orientada é na realidade bastante utilizada por sua fácil assimilação.

PARTE II - A PESQUISA

CAPÍTULO 1

OBJETIVOS, JUSTIFICATIVA, POPULAÇÃO, AMOSTRA E INSTRUMENTOS UTILIZADOS NA PESQUISA.

Apresentaremos neste capitulo os objetivos e a justificativa da pesquisa, juntamente com a população pesquisada e os instrumentos que serviram como base para o diagnóstico e análise dos dados. Esta pesquisa foi realizada durante os meses de março, abril e maio do ano letivo de 2010 em quatro escolas publicas estaduais da cidade de Fortaleza.

1.1 Objetivos e Justificativa da Pesquisa

Esta pesquisa teve como objetivo diagnosticar as causas e as dificuldades pelas quais passam os alunos do 7º ano do ensino fundamental das escolas públicas quando se submetem ao estudo dos números inteiros. As Escolas pesquisadas foram: Escola de Ensino Fundamental e Médio Figueiredo Correia, Escola de Ensino Fundamental e Médio Poeta Otacílio Colares, Escola de Ensino Fundamental General Manoel Cordeiro Neto e Escola de Ensino Fundamental e Médio João Mattos.

Foi ainda objetivo dessa pesquisa mapear os erros e acertos mais frequentes cometidos por esses alunos. Para isso aplicou-se duas avaliações em sala de aula, realizando-se dessa forma um estudo exploratório sobre o processo de compreensão dos números inteiros por que passam os alunos dessas escolas. A pesquisa foi realizada dentro de dois contextos: o aspecto cognitivo dos alunos que aprendem e o contexto pedagógico através das metodologias utilizadas.

Neste estudo visamos relatar os procedimentos usados pelos alunos ao realizarem as operações com os números inteiros, bem como descrever os obstáculos e as dificuldades encontradas. Pretende-se ainda descrever as situações de ensino e os meios utilizados por cada professor para a aprendizagem dos conceitos trabalhados de forma a relacionar os procedimentos usados pelos alunos com os métodos de ensino usados pelos professores.

Esse trabalho justifica-se como consulta para professores de Matemática, como informativo sobre estratégias usadas por alunos durante a aprendizagem de um conceito e ainda como determinação da origem dos erros cometidos por eles. Se estariam nos próprios alunos, nos métodos usados pelo professores, ou seriam intrínsecos ao próprio conteúdo.

Outra justificativa é de ordem pessoal, pois trabalhando há vinte e cinco anos como professor da disciplina de matemática nos ensinos fundamental e médio, pude observar que os alunos sentem dificuldades em operar com números inteiros, mesmo após o ensino fundamental concluído. Dessa forma sentimos a necessidade de investigar os mecanismos que envolvem o processo de aprendizagem deste conteúdo.

Procuramos verificar a maneira de assimilação dos conceitos, descrevendo a linha de raciocínio utilizada pelos alunos ao operarem com os números negativos, ao compararem os números inteiros e ao utilizarem as regras de sinais, justificando os procedimentos utilizados.

Em relação à metodologia usada pelos professores, procuramos identificar os métodos usados por eles, levando em consideração os livros didáticos no que se referem aos capítulos que abordam os números inteiros. A partir daí levantamos questões sobre as ligações entre os métodos de ensino e os procedimentos dos alunos na aprendizagem.

1.2 População, Amostra e Instrumentos Utilizados

A população que compõe esta amostra é de 100 alunos do 7º ano de quatro escolas públicas da cidade de Fortaleza: EEFM Figueiredo Correia, situada no bairro do Benfica, que doravante denominaremos de escola E_1; EEFM Poeta Otacílio Colares, situada no bairro Santa Maria que denominaremos de escola E_2; EEF. General Manoel Cordeiro Neto, situada no bairro da Vila União, que denominaremos de escola E_3 e EEFM. João Mattos, situada no bairro do Montese que denominaremos de escola E_4.

Na amostra foi possível tomar como base 100% dos alunos avaliados do 7º ano, tendo realizado as avaliações as seguintes quantidades de alunos por escola: escola E_1, 27 alunos do turno da manhã; escola E_2, 30 alunos do turno da tarde;

escola E_3, 24 alunos do turno da manhã e escola E_4, 19 alunos do turno da manhã, perfazendo um total de 100 alunos.

Os instrumentos utilizados para a pesquisa foram duas avaliações (anexos I e II). A primeira teve como objetivo identificar o nível dos alunos quando comparam e colocam em ordem crescente os números inteiros e na solução de dois problemas envolvendo adição e subtração de números inteiros. Na segunda, o objetivo foi de identificar os erros mais frequentes cometidos pelos alunos quando operam a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, e explorar os procedimentos por eles realizados para resolver expressões numéricas.

A primeira avaliação (anexo I) foi composta de três questões, onde a primeira questão continha oito itens e arguia os alunos sobre a comparação entre dois números inteiros dados, de forma que eles completariam as sentenças com um dos sinais: > ou <, com o objetivo de se analisar como estes comparam os números inteiros, procurando identificar as estratégias utilizadas por eles. Na segunda questão, os alunos foram levados a colocar os elementos de três conjuntos, de números inteiros, em ordem crescente, onde tínhamos números inteiros misturados, com a finalidade de observar a capacidade de cada um de visualização da reta numerada e, na terceira questão, tivemos dois problemas de adição de números inteiros onde o aluno era levado a trabalhar, no primeiro, o significado de dívida e crédito e, no segundo, o significado de saldo positivo e saldo negativo, já que eles usam estes significados nas suas vidas cotidianas.

A segunda avaliação (anexo II) foi também composta de três questões. A primeira questão constava de quatro itens e testava os alunos sobre as operações de adição e subtração de números inteiros, de forma que eles operassem utilizando as regras de sinais da adição trabalhadas em sala de aula. A segunda questão contava com seis itens sobre as operações de multiplicação e divisão de números inteiros com o objetivo de verificar a assimilação dos alunos no uso das regras de sinais da multiplicação e divisão de números inteiros. E uma terceira questão, composta de quatro itens, sobre expressões numéricas onde aparece a junção das quatro operações com o objetivo de verificar como os alunos trabalham as quatro operações simultaneamente. Na segunda avaliação, pretendia-se identificar os procedimentos usados pelos alunos para resolverem expressões numéricas, procurando verificar se aplicavam corretamente as regras de sinais aprendidas, assim como as diferenças de resultados e de resolução nas operações.

CAPITULO 2
METODOLOGIA DOS PROFESSORES

As metodologias que citaremos agora foram observadas em conversas do pesquisador com cada professor, em que cada um relatou como transmitiu o conteúdo e como fez uso do livro didático. Cada um mencionou ainda a sua conduta durante as aulas, descrevendo a participação dos alunos no processo e a forma de avaliação aplicada.

Relatos das metodologias aplicadas pelos professores

Nas escolas E_1, E_3 e E_4 foi adotado o livro "*Matemática fazendo a diferença",* de Bonjorno e Ayrton da Editora FTD e na escola E_2 foi adotado o livro "*Tudo é Matemática",* de Luiz Roberto Dante da Editora Ática. Nas quatro escolas o livro é fornecido pela escola.

Na escola E_1 o professor relatou que começou mostrando a seus alunos que dentro do conjunto dos números naturais existem subtrações que não podem ser efetuadas, pois não se pode tirar 5 de 3 (3 - 5). Para isso era necessário ampliar o conjunto dos números Naturais (N), com a criação de um novo conjunto, o dos números inteiros ($\mathbb{Z}$). Neste novo conjunto os seus elementos passam a ter sinais de (+) ou de (-), exemplificando: +1, +2, +3, +4,... são os números inteiros positivos e -1, -2, -3, -4,... são os números inteiros negativos e da união desses números positivos e negativos com o número zero obtém-se o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$).

Depois da construção do conjunto $\mathbb{Z}$, o professor relatou que passou a explorar a utilidade de seus elementos, dando exemplos de situações práticas em que seus valores são representados por temperaturas positivas (maiores que 0º C) e negativas (menores que 0º C), movimento financeiro, saldo positivo e saldo negativo e outras situações reais que fazem a ligação dos conhecimentos prévios dos alunos com os conteúdos a eles transmitidos.

No relato de sua metodologia, o professor da escola E_1 disse que era importante para os alunos que eles resolvessem os exercícios sozinhos de forma a desenvolver o raciocínio e para ficarem mais confiantes no que estavam aprendendo. Disse ainda que o livro adotado continha bastantes exercícios, mas era um pouco carente na parte de exemplos práticos.

Em relação aos objetivos do ensino dos números inteiros foram registrados pelo professor os seguintes pontos: 1 - Verificar o significado dos símbolos (+) e (-) e reconhecer sua existência; 2 – Localizar e representar números inteiros na reta numérica; 3 – Utilizar o conhecimento de números inteiros para localização de pontos no plano cartesiano; 4 – Realizar operações com números inteiros e 5 - Calcular expressões numéricas envolvendo a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de inteiros.

O conteúdo dos números inteiros foi transmitido na escola E_1 em 26 aulas, sendo utilizado somente o livro texto, sem o uso de nenhum recurso fora o quadro branco, pois segundo o professor a escola não dispunha de nenhum material que lhe permitisse mostrar de maneira prática as operações com os números inteiros.

O professor da escola E_2 relatou que começou fazendo uma discussão com os alunos sobre problemas que envolviam os números negativos, através de situações vivenciadas na prática. Em seguida, explorou os recursos da reta numerada, do termômetro e dos níveis de altitude do relevo terrestre para esclarecer a utilização dos números negativos.

Na abordagem das operações de números inteiros foram desenvolvidas atividades em sala de aula e domiciliares, com a utilização de exercícios do livro didático e um trabalho de pesquisa sobre a história dos números inteiros.

O professor da escola E_2 relatou que procurou desenvolver o hábito de estudo nos alunos através de pesquisas sobre o assunto, atividades diversificadas para desenvolver a capacidade de analisar, relacionar, comparar e generalizar.

Os objetivos registrados pelo professor foram: 1 – Identificar um número inteiro relativo; 2 – Identificar os subconjuntos de $\mathbb{Z}$; 3 – Representar números inteiros na reta numerada; 4 – Comparar dois números inteiros; 5 – Ordenar números inteiros; 6 – Determinar a soma, a subtração, o produto e o quociente entre dois números inteiros e 7 – Resolver expressões numéricas.

O conteúdo foi ministrado pelo professor da escola E_2 em 36 aulas, sendo utilizados o livro texto e alguns recursos como uma pesquisa (sobre a história dos números inteiros) e uma disputa entre os alunos envolvendo a tabuada para incentivar a aprendizagem.

O professor da escola E_3 relatou que iniciou o conteúdo do conjunto dos números inteiros com a utilização de medidas de temperaturas para introduzir os números negativos. Em seguida, fez o uso da representação geométrica na reta numerada, mostrando o conceito de números opostos e o valor absoluto para depois fazer a comparação de dois números inteiros através de suas imagens na reta numerada. A partir deste ponto iniciou as operações com os números inteiros.

O emprego da reta numérica inteira foi explicada como uma estrada onde o ponto de partida é o elemento zero e para a direita temos os valores positivos, enquanto que para a esquerda temos os valores negativos, mostrando assim que um número inteiro é maior que o outro, quando este está a direita do outro na reta numerada (comparação de números inteiros).

O relato das operações com inteiros, segundo o professor da escola E_3, foi baseado na utilização das regras contidas no livro texto. Ele relatou que fez uso de bastantes exercícios, tirando as dúvidas individualmente na sala de aula. Na escola E_3, o professor seguiu o livro texto, com acréscimo de alguns exercícios de outros livros.

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros foram transmitidas primeiramente com exemplos numéricos no quadro branco para depois os alunos resolverem os exercícios do livro.

Em relação aos objetivos de ensino foram registrados pelo professor os seguintes pontos: 1 – Conhecer os números inteiros; 2 – Representar geometricamente os números inteiros; 3 – Comparar números inteiros usando os símbolos $<$ ou $>$; 4 – Efetuar as operações de números inteiros e 5 – Resolver expressões numéricas que envolvam números inteiros.

O conteúdo dos números inteiros na escola E_3 foi transmitido em 34 aulas, sendo utilizados, além do livro texto, alguns recursos didáticos, tais como: uma pesquisa sobre a história da matemática e uma gincana entre os alunos envolvendo a tabuada de números inteiros.

O professor da escola E_4 introduziu o conteúdo dos números inteiros usando exemplos de valores positivos e negativos, aplicados no dia a dia pelos alunos. A matéria foi exposta durante as aulas através de situações problemas e realizando atividades do livro texto para avaliar a aprendizagem dos alunos.

As operações dos números inteiros foram trabalhadas passo a passo no transcorrer das aulas dadas, procurando contextualizá-las com o cotidiano dos alunos. Para isto, estimulou a participação dos alunos nas aulas através de atividades individuais e de grupos.

Foi uma preocupação constante do professor da escola E_4 a dificuldade de aprendizagem dos alunos. Ele justificou citando alguns pontos: a indisciplina dos alunos, o desinteresse pela matéria e a falta de domínio dos conteúdos dos anos anteriores. Em razão disso, ele teve que revisar, algumas vezes, o conteúdo visto anteriormente.

Em relação aos objetivos do conteúdo o professor registrou os seguintes pontos: 1 – Identificar um número inteiro; 2 – Representar a reta numerada dos números inteiros; 3 – Comparar dois números inteiros; 4 – Realizar as quatro operações básicas com inteiros e 5 – Resolver expressões numéricas.

O conteúdo dos números inteiros foi ministrado na escola E_4 em 46 aulas, sendo transmitido através das orientações do livro texto e com a participação dos alunos em sala de aula, aplicando exercícios no quadro branco e realizando trabalhos domiciliares.

CAPÍTULO 3
ANÁLISE DOS DADOS.

Neste capítulo será feita a análise dos dados e a descrição dos resultados das duas avaliações realizadas pelos alunos das quatro escolas que serviram como objeto de pesquisa.

3.1 Descrição dos resultados obtidos na avaliação 1

A coleta dos dados deste trabalho foi obtida nas próprias salas de aulas de cada escola, após consentimento da direção e entendimento com os professores das disciplinas de matemática.

A descrição dos resultados obtidos na aplicação das avaliações sobre números inteiros foi feita de acordo com a sequência de aplicação das mesmas, ou seja, em primeiro lugar a avaliação 1 (anexo I) sobre comparação de números inteiros, colocação na ordem crescente e resolução de problemas que envolvem adição e subtração de números inteiros. Em segundo lugar, a avaliação 2 (anexo II) sobre soluções de expressões numéricas que envolvem adição, subtração multiplicação e divisão de números inteiros.

A tabela 1 a seguir nos mostra, de um modo geral, os percentuais de acertos e erros das quatro escolas em relação à avaliação 1 que serão analisados em comparação com os percentuais obtidos por cada uma das escolas individualmente com a ajuda dos anexos III, IV, V e VI.

A primeira questão da avaliação 1 que trata da comparação de números inteiros (anexo 1) apresentou um percentual médio de acertos de 75,4%, (ver tabela 1) sendo os itens: h) com 85%, (b) e (c) ambos com 84% os que tiveram os maiores índices de acertos e os itens (a) e (e) os que tiveram os menores índices de acertos 63% e 64% respectivamente.

TABELA 1

Percentuais de acertos e erros das quatro escolas na avaliação 1			
Questão	**Item**	**% de acertos**	**% de erros**
1	A	63	37
	B	84	16
	C	84	16
	D	73	27
	E	64	36
	F	78	22
	G	72	28
	H	85	15
Média da	**Questão 1**	75,4	24,6
2	A	52	48
	B	47	53
	C	46	54
Média da	**Questão 2**	48,3	51,7
3	A	84	16
	B	66	34
Média da	**Questão 3**	75	25
Média Geral		69,1	30,9

Observamos que estes resultados se deram pelo fato de que, no item (b) os alunos compararam dois números de sinais contrários, sendo de fácil constatação pelo fato de entre dois números inteiros o positivo é sempre maior que o negativo e no item (c) onde, também se constata que, o zero é maior que qualquer negativo. Já em relação aos itens (a) e (e) observamos que o maior número de erros deu-se devido a comparação de dois números negativos e a ideia errônea de que o maior é aquele de maior valor absoluto sem se considerar o sinal de menos (-).

Dentre as escolas pode-se perceber no item (a) que a escola E_1 teve a menor percentual de acertos 40,7%, seguido do item (e) 48,1% (ver anexo III), o mesmo acontecendo com a escola E_3 que teve 41,7% de acertos no item (a) e 37,5% de acertos no item (e) (ver anexo V). Já no item (b) tivemos a escola E_3 com 95,8% de acertos (anexo V) e no item (c) aparece a escola E_2 com a maior percentual de acertos 90% (anexo IV).

A segunda questão da avaliação 1, onde o aluno era levado a colocar em ordem crescente os elementos de conjuntos de números inteiros, apresentou um percentual médio de acertos de 48,3% (tabela 1), sendo o item (a) o que teve o maior índice de acertos 52% e o item (c) o que apresentou o menor índice de acertos 46% (tabela I).

Nesta questão observamos que o obstáculo maior estava no aluno imaginar a reta numerada e a posição de cada número sobre a reta. Verificou-se ainda uma ligeira confusão por parte dos alunos quando colocavam em ordem os números negativos, pois os mesmos colocaram pela ordem do valor absoluto, não considerando o sinal de (-). Erros como colocar a sequencia do item (c) em ordem crescente na forma: - l, - 4, - 8, - 12, - 20 foram comuns, talvez por isto os percentuais de acertos tenham diminuído.

Em relação às escolas, pode-se notar, de uma forma geral, a diminuição dos percentuais de acertos dos itens, o que se justificaria pelo obstáculo citado por Glaeser (*apud* Teixeira 1992, p.49) "*Dificuldade em unificar a reta numérica pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas*". Observa-se ainda que os alunos da escola E_4 conseguiram um bom percentual de acertos nos três itens 73,7% (anexo VI) o que se deu pelo fato de apenas três alunos não terem resolvido e dois resolverem de forma errada. Por outro lado, na escola E_1 o resultado foi insatisfatório nos três itens 37%, 37% e 33,3% (anexo III), por muitos terem resolvido colocando a ordem dos números negativos de forma decrescente, o que mostra a não assimilação adequada da transposição do conteúdo da reta numérica.

A terceira questão da avaliação 1 propunha a solução de dois problemas onde os alunos foram levados a operar com a adição e a subtração de números inteiros. É importante salientar que os problemas são exemplos práticos do dia a dia de cada aluno. No primeiro exemplo temos uma subtração de valores que representam dinheiro e no segundo, valores que representam números de gols feitos e números de gols sofridos, procurando-se saber o saldo. O item (a) apresentou um índice alto de acertos 84% (tabela 1), embora os alunos no momento de realizarem a conta de subtração -500 + 150 = - 350 tenham efetuado como uma operação de tirar (500 – 150 = 350). Em grande parte das avaliações encontramos a seguinte operação:

$$\begin{array}{r} 500 \\ \underline{-\ 150} \\ 350 \end{array} \quad \text{ao invés de} \quad \begin{array}{r} -\ 500 \\ \underline{+150} \\ -\ 350 \end{array}$$

Ao responderem a questão, boa parte dos alunos escreveu que João devia ainda R$ 350,00. É importante salientar que, embora a maioria tenha efetuado a subtração não como uma conta de inversão, e sim, como uma operação de tirar, mostra que houve compreensão do problema e eles conseguiram resolver a questão satisfatoriamente.

O item (b) teve um índice de acertos de 66% (tabela 1), considerado dentro da normalidade, pois a operação de subtração envolvia uma conta onde o resultado era positivo (+25 – 8 = + 17).

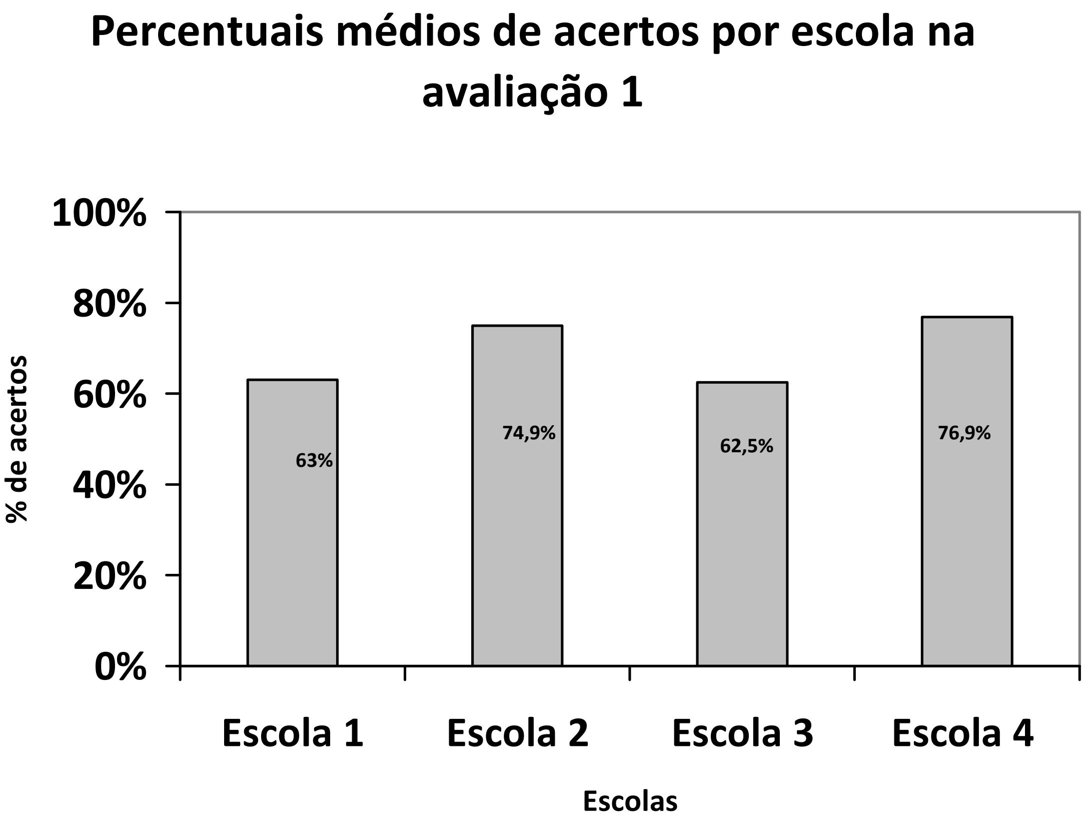
Comparando as escolas, constatamos um percentual de acertos mais baixo na escola E_3 70,8% para o item (a) e 45,8% para o item (b) (anexo V). Enquanto que, os melhores percentuais, foram obtidos pela escola E_4 com 94,7% para o item (a) (anexo IV) e pela escola E_1 com 88,9% para o item (b) (anexo III)

Resumindo, podemos dizer que em relação à primeira avaliação aplicada, verificamos que os alunos, no geral, souberam comparar, colocar em ordem crescente e solucionar problemas de adição e subtração com o conteúdo a eles transmitidos, já que os percentuais de acertos foram maiores que os de erros e com uma boa diferença de percentuais 69.1% de acertos contra 30.9% de erros (tabela 1) nas quatro escolas.

O gráfico I, abaixo, mostra o percentual de acertos por escola da avaliação 1.

Observamos uma equivalência da aprendizagem do conteúdo entre as quatro escolas com uma ligeira margem de superioridade para a escola E_4 (76,9%) e E_2 (74,9%) sem, contudo ser significativo para podermos dizer que o nível de aprendizagem dos alunos destas escolas tenha sobressaído.

GRÁFICO I



3.2 Descrição dos resultados obtidos na avaliação 2

A tabela 2 abaixo nos mostra, de um modo geral, os percentuais de acertos e erros das quatro escolas em relação à avaliação 2 que serão analisados em comparação com os percentuais obtidos por cada uma das escolas individualmente, com a ajuda dos anexos VII, VIII, IX e X.

TABELA 2

Percentuais de acertos e erros das quatro escolas na avaliação 2			
Questão	**Item**	**% de acertos**	**% de erros**
1	A	33	67
	B	22	78
	C	25	75
	D	18	82
Média da	**questão 1**	24,5	75,5
2	A	66	34
	B	59	41
	C	29	71
	D	60	40
	E	53	47
	F	43	57
Média da	**questão 2**	51,7	48,3
3	A	49	51
	B	02	98
	C	05	95
	D	02	98
Média da	**questão 3**	14,5	85,5
Médias	**gerais**	33,3	66,7

A primeira questão, que colocava os alunos para determinar a soma algébrica de números inteiros, apresentou um percentual médio de acertos de apenas 24,5% (tabela 2) o item d) 0 – 14 – 7 + 11 + 15 – 13 teve o menor índice de acertos, 18%, e o item a) (+5) + (-3) + (- 6) o maior percentual de acertos, 33%. Observamos, de forma geral, que o nível de acertos foi muito baixo, talvez pelo fato de os alunos não saberem aplicar corretamente as regras de adição de números inteiros que diz, segundo Bonjorno (2006, p.31), *‘para adicionar dois números inteiros de sinais diferentes, subtraímos seus valores absolutos (o maior menos o menor) e atribuímos ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto’.*

Pode-se perceber para o item (a) que a escola E_4 obteve o maior percentual de acertos 47,4% (ver anexo X). O item (b) teve maior percentual de acertos na escola E_1 (29,6%) (ver anexo VII) e a escola E_3 foi a de maior índice de acertos para os itens (c) 33,3% e (d) 25% (ver anexo IX).

A segunda questão da avaliação 2 foi composta por seis itens; os itens (a), (b) e (c) envolviam a operação de multiplicação e os itens (d), (e) e (f) envolviam a operação de divisão. Esta questão apresentou um percentual médio de acertos das quatro escolas de 51,7% (tabela 2) com o item (a) tendo o maior índice de acertos 66% e o item (c) com o menor índice de acertos 29% (tabela 2). É valido ressaltar que a maioria dos alunos erraram na colocação do sinal, pondo (+) em vez de (-) no resultado do item (c), sendo que (- 5) x (+4) x (- 4) x (- 1) = - 80. Isto mostra a não utilização correta da regra de sinais para a multiplicação “*o produto de dois números inteiros, diferentes de zero é positivo (+), se os dois tiverem o mesmo sinal e negativo (-), se os dois tiverem sinais contrários*” por Bonjorno (2006, p.49)

Observamos que os alunos da escola E_1 obtiveram um maior percentual de acertos dos itens (a) 70,4% e (d) 74,1% (ver anexo VII), enquanto que os alunos da escola E_4 alcançaram o maior percentual nos itens (e) 78,9% e (f) 68,4% (ver anexo X).

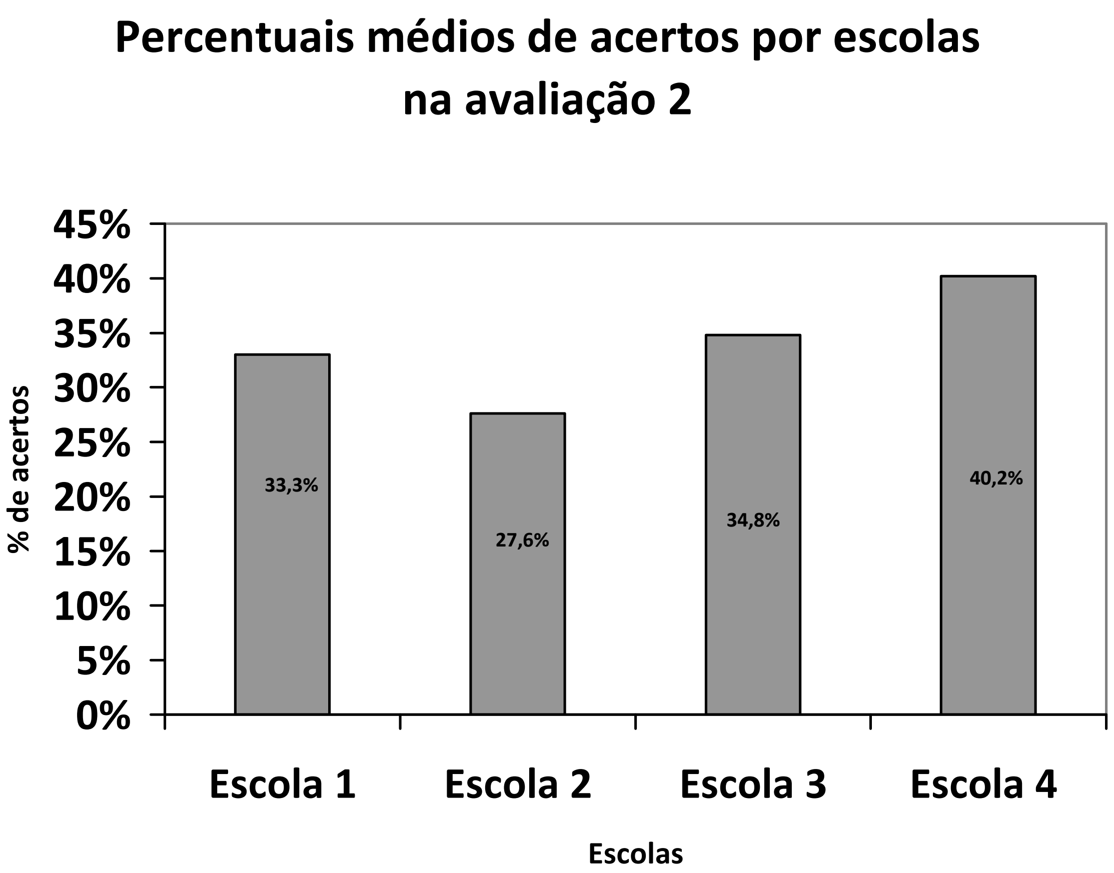
A terceira questão da avaliação 2 propunha a solução de quatro expressões numéricas sendo que nos itens (c) e (d) aparecia a operação de potenciação. Pelo índice de erros nestes quatro itens que foi de 85,5% (tabela 2) constatamos que os alunos não assimilaram corretamente a solução de expressões, visto que só conseguiram resolver a contento o primeiro item 14:7 + 5:5 = 2 + 1 = 3, pois neste caso não houve operação com números negativos. Nos outros três itens, onde havia uma quantidade maior de operações, envolvendo números negativos, o percentual de erros foi significativamente grande: item (b) (98%) de erros, item (c) (95%) de erros e item (d) (98%) de erros (ver tabela 2). É fácil constatar que os alunos sentiram dificuldades na solução de expressões por estas apresentarem um grau maior de complexidade e um maior número de passagens para o resultado final.

Embora os alunos já tivessem trabalhado com expressões numéricas nos anos anteriores, os obstáculos passaram a ser maiores porque além de todos os passos para a solução de uma expressão, ainda seria necessário acrescentar as regras de sinais dos números inteiros.

Dentre as quatro escolas é válido ressaltar que os alunos da escola E_1 obtiveram um percentual alto de acertos no item (a) 77,8% (ver anexo VII) e os alunos da escola E_2 não conseguiram resolver nenhum dos itens (b), (c) e (d) obtendo 0% de acertos nestes itens, (ver anexo VIII).

O gráfico II abaixo mostra o percentual de acertos por escola da avaliação 2.

GRÁFICO II



Observamos que não houve um desenvolvimento adequado da aprendizagem do conteúdo de operações com números inteiros nas quatro escolas.

Vemos ainda que a escola E_4 apresentou a melhor porcentagem de acertos 40,2% entre as quatro escolas.

Finalmente, pelo total geral de acertos 33,3% (tabela 2) conclui-se que existe uma dificuldade por parte dos alunos em operarem com os números inteiros. Conclui-se ainda que esta dificuldade deve-se à confusão feita por estes quando utilizam as regras de adição e de multiplicação, onde na maioria dos casos trocam as regras de adição pelas regras de multiplicação.

CAPITULO 4

Conjuntos de dificuldades e Localização dos obstáculos

Esta pesquisa teve o caráter de explorar as dificuldades de aprendizagem dos números inteiros e com base nas avaliações aplicadas nas quatro escolas foi possível analisar o elo entre o ensino ministrado e as dificuldades de compreensão do conteúdo. Para isto explicitaremos os procedimentos utilizados pelos alunos e os erros detectados nas respostas dadas no momento da correção das duas avaliações.

4.1 Conjuntos de dificuldades

Um primeiro conjunto de dificuldades é relativo às operações com os números naturais, tendo os alunos apresentado as seguintes dificuldades: a) não compreensão da subtração como inversa da adição. b) não domínio dos procedimentos para efetuar multiplicação e divisão. c) não domínio da tabuada. d) não domínio das técnicas para resolver expressões numéricas, por não compreenderem o uso correto dos parênteses, colchetes e chaves.

Para iniciar o estudo dos números inteiros, sugerimos aos professores fazer uma sondagem de conhecimento do conteúdo dos números naturais para, se for o caso, iniciar com uma revisão, onde se vejam as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e os procedimentos de solução de expressões numéricas.

Um segundo conjunto de dificuldades detectadas está relacionado às primeiras noções do conjunto $\mathbb{Z}$, tendo os alunos apresentado: a) dificuldade em compreender o conjunto $\mathbb{Z}$ como composto por valores numéricos ordenados em direções opostas a partir de um ponto de referência (origem). Aqui se encontram as dificuldades relativas à comparação entre inteiros, tais como: a_1) comparar valores numéricos quando o maior tem menor módulo – exemplo +4 e – 5 a_2) dificuldade em comparar valores numéricos quando os dois são negativos – exemplo - 3 e - 5 e a_3) dificuldade em comparar valores numéricos com o zero – exemplo 0 e – 2. b) dificuldade em ordenar corretamente os inteiros negativos, como por exemplo - 1, - 3, - 9 ou - 3, - 5, - 8 ao invés de – 9, - 3, - 1 e – 8, - 5, - 3 respectivamente.

Para este conjunto de dificuldades é possível trabalhar com recursos vividos no cotidiano dos alunos como: temperatura, altitude, crédito – débito e saldo positivo e saldo negativo, além da reta numerada onde os alunos terão as condições necessárias para assimilar o conteúdo. Vale ressaltar que para os alunos compreenderem o conteúdo é preciso que a transposição se realize por etapas e com um suporte maior de tempo.

O terceiro conjunto de dificuldades relaciona-se à aplicação das regras de sinais que aparecem nos cálculos de expressões numéricas tais como: a) – 3 – 8 = - 5 (subtraem e conservam o sinal). b) (- 3) + (+ 4) = + 7 (somam porque o sinal é de mais). c) troca entre as regras de sinais da adição e da multiplicação e divisão – exemplos: 1) (+ 2) x (- 7) x (- 1) = - 14 (número impar de fatores). 2) (- 5) x(+ 4) x (- 4) x (- 1) = + 80 (número par de fatores). 3) (- 12): (- 3) = - 4 (sinais iguais conserva o sinal).

Este conjunto de obstáculos decorre da troca feita, pelos alunos, nas regras de sinais e deve ser trabalhado utilizando-se um contexto prático para que este conteúdo seja de fácil compreensão. Os professores devem entender que, para que a aprendizagem aconteça não basta somente propor exercícios específicos, mas também propor situações-problema que envolvam o cotidiano dos alunos, estimulando-os a buscar as soluções.

Finalmente, o quarto conjunto de dificuldades está relacionado às operações e procedimentos de solução de expressões numéricas. Constatamos as seguintes dificuldades: a) não domínio da seqüência das operações a serem efetuadas: 1º as multiplicações e divisões e 2º as adições e subtrações. Exemplos: 1) 14: 7 + 6 : 2 = 2 + 6 : 2 = 8 : 2 = 4. 2) (4 : 2 + 2) = 4 : 4 = 1. b) não domínio dos procedimentos de eliminar parênteses, colchetes e chaves. c) quando da eliminação dos parênteses ou colchetes ou chaves que eram antecedidos por sinal de menos, os alunos invertem apenas o sinal do primeiro número – exemplo: 10 – [1 – (4 : 2 + 2)] = 10 – [1 – (2 + 2)] = 10 – [1 – 4] = 10 – 1 – 4.

O uso das regras de adição e subtração através do significado contábil mostra-se mais eficiente que a aplicação das regras de sinais diretamente e deve ser usado como mais um recurso de assimilação. Outro recurso que pode ser usado pelos professores é fazer cada aluno trabalhar na construção do seu aprendizado, para isto vale aplicar três dos mandamentos sugeridos por Polya (1984, p.1): "*6) faça-os aprender a dar palpites, 7) faça-os aprender a demonstrar e 10) sugira, não os faça engolir a força".*

Mais que apresentar recursos de ensino pretende-se chamar a atenção dos professores de que a garantia da aprendizagem, por parte dos alunos, passa pela compreensão operatória dos conceitos e pela construção, por estes, de suas aprendizagens.

4.2 Localizações dos Obstáculos

Os resultados da avaliação 1 revelaram uma assimilação superficial por parte dos alunos, pois, constatamos que não dominaram as propriedades básicas do sistema de ordenação de números inteiros. O nível de abstração foi baixo e a aprendizagem se apresentou incompleta quando compararam inteiros, nos casos onde um número era positivo e outro negativo ou os dois negativos. Apenas quando fizeram uso da reta numerada para comparar e ordenar inteiros tiveram uma compreensão mais técnica.

A utilização de várias regras para comparar números inteiros colaborou para dificultar o entendimento dos alunos. As seguintes regras: 1) entre dois números na reta, o maior é o que fica à direita do outro; 2) de dois números positivos o maior é o que possui maior valor absoluto; 3) entre dois números negativos o maior é aquele que possui o menor valor absoluto e 4) todo número negativo é menor que qualquer positivo. Se observarmos bem, bastaria a utilização da primeira regra por ser a mais geral e englobar as demais. As outras regras são usadas em casos particulares, assim como nos casos onde temos: a) -3 e -5 uso da regra 3; b) +4 e -5 uso da regra 4; e +2 e +6 uso da regra 2. Cabe aos professores restringirem o uso para a regra 1 de forma que os alunos trabalhem apenas com uma regra. O uso das quatro regras direciona para uma situação de aprendizagem que é vincular cada regra a um contexto, fazendo com que o aluno tenha que diferenciar a qual contexto se aplica cada regra.

Outro ponto de dificuldade por parte dos alunos é a resolução de problemas envolvendo a adição e a subtração de inteiros. As dificuldades aparecem quando o aluno tem de formular a sentença matemática para montar a operação do problema.

No problema (a) da questão três (avaliação 1) os procedimentos usados na formulação da sentença matemática indicaram que o uso do sinal da operação foi posto errado em 84% dos casos. Embora o modelo contábil seja de fácil entendimento para o aluno e a operação tenha sido realizada “mentalmente” (grifo nosso) correta a resposta final estava errada. A grande quantidade de erros deu-se pela dificuldade de traduzir a operação realizada “cálculo mental” (grifo nosso) numa sentença matemática correta.

Na resolução das expressões numéricas da avaliação 2 os alunos mostraram algumas tendências e dificuldades que destacaremos agora como um alerta aos professores, de forma a apoiar suas ações em sala de aula. Na expressão a) (+5) + (- 3) + (- 6) (1ª questão) houve maior frequência de acertos 33% devido o sinal da operação coincidir com a operação a ser realizada. Nas expressões: b), c) e d) onde existe uma mistura dos sinais (+) e (-) houve um número menor de acertos 22%, 25% e 18%, respectivamente. Estes resultados advêm da falta de compreensão das propriedades que regem o sistema dos inteiros e são manifestadas pelo não domínio da linguagem matemática que expressam as operações, assim como no nível das operações exigidas.

Essa dificuldade na aprendizagem operatória das expressões numéricas deve-se a um ensino pautado em repetição de procedimentos e regras sem levar em consideração a contextualização.

PARTE III

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONCLUSÃO

Com os resultados da pesquisa, percebemos que as dificuldades do ensino dos números inteiros, e porque não dizer da matemática no ensino fundamental, são devido a uma não adequação do trabalho à realidade vivenciada pelos alunos. Os professores quando saem dos cursos de graduação não estão preparados para trabalharem com os alunos no sentido de levá-los a pensar, abstrair, classificar, ordenar e raciocinar, procurando dar enfoques diferentes dos tradicionalmente utilizados.

Sabe-se que de um modo geral os alunos não têm o hábito de pensar, exercitar e abstrair, pois procuram resolver apenas os exercícios que não trazem dificuldades; cumprem apenas a obrigação escolar, resolvendo com pressa e sem vontade. Isto acontece porque a metodologia aplicada para o ensino de matemática não apresenta subsídios que os motivem a exercitarem e desenvolverem o raciocínio, portanto é de se esperar que eles não tenham interesse.

Os exercícios passados em sala de aula que despertem curiosidades nos alunos podem ajudar a erradicar suas deficiências, bem como a correção de uma má utilização de regras e conceitos. Os alunos estando estimulados certamente cometerão menos erros, criarão o hábito de resolver problemas, principalmente aqueles que trazem a vivência de cada um, e assim, certamente terão um melhor desenvolvimento.

Espera-se que esse trabalho sirva, pelo menos, para alertar professores de matemática para a importância de se trabalhar o conjunto dos números inteiros de forma a estimular os alunos e envolvê-los num conteúdo prático a fim de que os mesmos superem as dificuldades inerentes a este assunto.

Podemos concluir que os fatores que levam os alunos a sentirem dificuldades na aprendizagem operatória dos números inteiros são: a falta de base dos alunos devido a um ensino fundamental menor mal feito (passam de uma serie para outra sem que a aprendizagem seja suficiente para o êxito seguinte), a dificuldade intrínseca do próprio conteúdo e a falta de recursos nas escolas que permita uma melhoria das aulas, de forma a movimentar todos os alunos e melhorar o interesse dos mesmos.

É importante ressaltar que, do ponto de vista da didática, deve-se incentivar o estudo em grupo, procurando-se usar o construtivismo, onde os alunos poderão construir seus próprios conhecimentos, obtendo assim um melhor rendimento.

Em relação aos livros vê-se que são pouco atrativos para os alunos, pois a linguagem apresentada não é facilmente assimilada, não despertando o interesse dos mesmos. É preciso que o professor use o livro como fonte de pesquisa e discuta com os alunos as qualidades e defeitos dos mesmos, motivando assim o aluno a participar em sala de aula.

É necessário que o professor tenha conhecimento das dificuldades dos alunos de maneira que possa ajudá-los a superar os obstáculos no processo de construção da aprendizagem. Com a dedicação de um maior tempo nas explicações dos pontos de dificuldades se obtém um rendimento mais eficaz, superando assim a resistência, por parte dos alunos, em compreenderem as regras e procedimentos.

Constatamos que as dificuldades apresentadas pelos alunos estão, em parte, relacionadas com os procedimentos e métodos usados pelos professores que priorizam o ensino para a memorização de regras e o predomínio de solução de exercícios mais que a compreensão dos conceitos por parte dos alunos, condição essencial para a aprendizagem.

Um conjunto de ações pode melhorar a aprendizagem do conteúdo dos números inteiros, por parte dos alunos do ensino fundamental, são elas: hábito de fazer lição de casa, revisão pelos professores de conceitos matemáticos necessários ao desenvolvimento dos números inteiros; escolha de um livro didático consistente; levar em consideração as atividades de sala de aula dos alunos; estímulo à criatividade e a realização de atividades em grupo.

É importante que os professores reavaliem a sua prática, planejem suas aulas de acordo com o desenvolvimento de seus alunos e que possam elaborar um material com contextos diversificados para a obtenção de melhores resultados.

Por fim, vale salientar que não existe um único caminho para o ensino de matemática, contudo, é fundamental que os professores conheçam várias estratégias de ensino de maneira a construir sua prática em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDRINI, A.; *Praticando Matemática*, 6ª série, São Paulo: Editora do Brasil 1988.
2. BALBINO e BEATRIZ, REVISTA PRO-POSIÇÕES, VOL. 4, 1993.
3. BONJORNO J. R.; OLIVARES A. *Matemática fazendo a diferença, 7º ano*, 1ª edição São Paulo: Ed. FTD, 2006.
4. CARAÇA, B. de J.; *Conceitos Fundamentais da Matemática,* Lisboa, Tipografia Matemática Ltda, 1958.
5. CECCON.; CLAUDIUS e outros: *A vida na escola e a escola na vida*, Petrópolis – RJ: Ed. Vozes, 1984.
6. COSTA, L.Q. *Um jogo em grupo co-operativos – alternativa para a construção do conceito de números inteiros e para a abordagem dos conteúdos: procedimentos, condutas e normas.* Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Unicamp, 2000.
7. D'AMBROSIO, U.; *Educação Matemática da teoria à prática*, Papirus Editora, 12ª edição, 2005.
8. DANTE, L. R.; *Tudo é Matemática,* 7º ano, 2ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2008.
9. FEDRIGO, RAYMUNDI e JONIS, NERVIS; *Epistemologia dos Números Relativos*, Monografia em Ensino da Matemática, vol. I (2001), No 01, PP 101-110.
10. FREIRE, PAULO; *Educação e Mudança*: Rio de Janeiro, Ed. Paz e Terra, 1992.
11. GLAESER, G. *Epistemologia dos números relativos*, Boletim, GEPEM, 1985, 17:29 – 124 (tradução : Lauro Tinoco da publicação original, 1981).
12. GRIFFITHS e HILTON; *Matemátíca Clássica uma interpretação contemporânea,* Volume 3, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1976

13. IFRAN, GEORGES. *Historia Universal dos Algarismos*. Tomo I e II. Rio de Janeiro: Ed. Nova Fronteira,1997.

14. MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade*. 3ª edição, São Paulo, Cortez Editora, 1993.

15. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (6º ao 9º anos), Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC. 1998.

16. MOREIRA, M. A. CABALLERO, "*Aprendizagem significativa: um conceito Subjacente"*. Actas Del Encuentro Internactonal sobre El Aprendizaje Significativa, Espanha PP 19-44, 1997.

17. POLYA, GEORGE, *Dez Mandamentos para professores*, Texto mimeografado. Artigo publicado no "Journal of Education". University of British Columbia, 1984.

18. SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. *Jogos de matemática do 6º ao 9º ano.* Cadernos do Mathema. Porto Alegre: Artmed 2007.

19. TEIXEIRA, LENY R. M.; "*Aprendizagem escolar de números inteiros: análise do processo na perspectiva construtivista Piagetiana*, Tese de doutorado. São Paulo 1992.

20. TIMONI, J. *Nos Domínios da Matemática*. 6ª série, São Paulo: Editora F.T.D, 1985.

ANEXO I

AVALIAÇÃO 1

Com esta avaliação quer-se identificar o nível dos alunos quando comparam, colocam em ordem crescente os números inteiros, e sua capacidade de abstração na solução de problemas envolvendo os números inteiros.

1) Utilizando os símbolos: > ou < complete as sentenças abaixo:

a) – 3 _____ - 5	e) – 8 _____ - 7
b) – 2 _____ + 4	f) + 5 _____ - 5
c) 0 _____ - 2	g) 0 _____ + 3
d) + 5 _____ + 6	h) – 5 _____ 0

2) Coloque os elementos dos conjuntos abaixo em ordem crescente:

   a) A = { -3, +4, 0, +8, -5, -8 }

   b) B = { -1, -9, +4, +2, +7, -7, -3 }

   c) C = { -4, +2, 0, -1, -8, -20, -12, +12 }

3) Resolva os problemas abaixo, usando os números inteiros como resposta:

   a) João deve R$ 500,00 a Pedro. Se João tem R$ 150,00 e der por conta, quanto ficará devendo ainda?

   b) O time do Vasco fez, no campeonato de 1990, 25 gols e levou 8 gols. Qual foi o saldo de gols do time do Vasco?

ANEXO II

AVALIAÇÃO 2

Procura-se, na avaliação abaixo, identificar os erros mais freqüentes cometidos pelos alunos quando operam a adição, a subtração, a divisão e a multiplicação. Ver-se ainda como os alunos se saem na solução de expressões que envolvem potências e as quatro operações conjuntamente.

1. Determine as seguintes somas algébricas de números inteiros:

a) (+5) + (-3) + (-6) =

b) (-3) + (+4) + (-5) + (+8) + (-3) + (+10)=

c) -3 -8 + 15 + 8 -11 + 9 =

d) 0 -14 – 7 + 11 + 15 – 13=

2. Calcule cada produto ou divisão de números inteiros indicados:

a) (+2) x (-7) x (-1) =

b) (+2) x (-2) x (-7) =

c) (-5) x (+4) x (-4) x (-1) =

d) (-12) : (-3) =

e) (-8) : (+4) =

f) (+35) : (-7) =

3. Determine o valor de cada expressão dada abaixo:

a) 14 : 7 + 5 : 5 =

b) 10 – [1 – (4 : 2 + 2)] =

c) $-[-3^2-(-2)^3] =$

d) $15-(-45):(-1-2)^2+(-2)^3 \times (-1+2)^3 =$

ANEXO III

Escola de Ensino Fundamental e Médio Figueiredo Correia					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	11	40,7	16	59,3
	B	20	74,1	07	25,9
	C	23	85,2	04	14,8
	D	19	70,4	08	29,6
	E	13	48,1	14	51,9
	F	20	74,1	07	25,9
	G	14	51,9	13	48,1
	H	24	88,9	03	11,1
Média da	**questão 1**	144	66,7	72	33,3
2	A	10	37	17	63
	B	10	37	17	63
	C	09	33,3	18	66,7
Média da	**questão 2**	29	35,8	52	64,2
3	A	24	88,9	03	11,1
	B	24	88,9	03	11,1
Média da	**questão 3**	48	88,9	06	11,1
Médias	**Gerais**	221	63	130	37

Anexo III - Percentuais de acertos e erros da avaliação 1

ANEXO IV

Escola de Ensino Fundamental e Médio Otacílio Colares					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	25	83,3	05	16,7
	B	26	86,7	04	13,3
	C	27	90	03	10
	D	23	76,7	07	23,3
	E	24	80	06	20
	F	21	70	09	30
	G	23	76,7	07	23,3
	H	29	96,7	01	3,3
Média da	**Questão 1**	198	82,5	42	17,5
2	A	18	60	12	40
	B	13	43,3	17	56,7
	C	14	46,7	16	53,3
Média da	**Questão 2**	45	50	45	50
3	A	08	26,7	22	73,3
	B	24	80	06	20
Média da	**Questão 3**	49	81,7	11	18,3
Médias	**Gerais**	292	74,9	98	25,1

Anexo IV - Percentuais de acertos e erros da avaliação 1

ANEXO V

Escola de Ensino Fundamental Manoel Cordeiro Neto					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	10	41,7	14	58,3
	B	23	95,8	01	4,2
	C	18	75	06	25
	D	20	83,3	04	16,7
	E	09	37,5	15	62,5
	F	22	91,7	02	8,3
	G	20	83,3	04	16,7
	H	16	66,7	08	33,3
Média da	**Questão 1**	138	71,9	54	28,1
2	A	10	41,7	14	58,3
	B	10	41,7	14	58,3
	C	09	37,5	15	62,5
Média da	**Questão 2**	29	40,3	43	59,7
3	A	02	8,3	22	91,7
	B	11	45,8	13	54,2
Média da	**Questão 3**	28	58,9	20	41,7
Médias	**Gerais**	195	62,5	117	37,5

ANEXO V - Percentuais de acertos e erros da avaliação 1

ANEXO VI

Escola de Ensino Fundamental e Médio João Mattos					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	17	89,5	02	10,5
	B	15	78,9	04	21,1
	C	16	84,2	03	15,8
	D	11	57,9	08	42,1
	E	18	94,7	01	5,3
	F	15	78,9	04	21,1
	G	15	78,9	04	21,1
	H	16	84,2	03	15,8
Média da	**Questão 1**	123	80,9	29	19,1
2	A	14	73,7	05	26,3
	B	14	73,7	05	26,3
	C	14	73,7	05	26,3
Média da	**Questão 2**	42	73,7	15	26,3
3	A	03	15,8	16	84,2
	B	07	36,8	12	63,2
Média da	**Questão 3**	25	65,8	13	34,2
Médias	**Gerais**	190	76,9	57	23,1

ANEXO VI - Percentuais de acertos e erros da avaliação 1

ANEXO VII

Escola de Ensino Fundamental e Médio Figueiredo Correia					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	07	25,9	20	74,1
	B	08	29,6	19	70,4
	C	07	25,9	20	74,1
	D	03	11,1	24	88,9
Média da	**questão 1**	25	23,1	83	76,9
2	A	19	70,4	08	29,6
	B	18	66,7	09	33,3
	C	04	14,8	23	85,2
	D	20	74,1	07	25,9
	E	07	25,9	20	74,1
	F	11	40,7	16	59,3
Média da	**questão 2**	79	48,8	83	51,2
3	A	21	77,8	06	22,2
	B	01	3,7	26	96,3
	C	0	0	27	100
	D	0	0	27	100
Média da	**questão 3**	22	20,4	86	79,6
Médias	**gerais**	126	33,3	253	66,7

ANEXO VII - Percentuais de acertos e erros da avaliação 2

ANEXO VIII

Escola de Ensino Fundamental e Médio Otacílio Colares					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	07	23,3	23	76,7
	B	05	16,7	25	83,3
	C	04	13,3	26	86,7
	D	05	16,7	25	83,3
Média da	**questão 1**	21	17,5	99	82,5
2	A	20	66,7	10	33,3
	B	16	53,3	14	46,7
	C	08	26,7	22	73,3
	D	15	50	15	50
	E	18	60	12	40
	F	12	40	18	60
Média da	**questão 2**	89	49,4	91	50,6
3	A	06	20	24	80
	B	0	0	30	100
	C	0	0	30	100
	D	0	0	30	100
Média da	**questão 3**	06	5	114	95
Médias	**gerais**	116	27,6	304	72,4

ANEXO VIII - Percentuais de acertos e erros da avaliação 2

ANEXO IX

Escola de Ensino Fundamental Cel. Manoel Cordeiro Neto					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	10	41,7	14	58,3
	B	07	29,2	17	70,8
	C	08	33,3	16	66,7
	D	06	25	18	75
Média da	**questão 1**	31	32,3	65	67,7
2	A	14	58,3	10	41,7
	B	17	70,8	07	29,2
	C	05	20,8	19	79,2
	D	14	58,3	10	41,7
	E	13	54,2	11	45,8
	F	07	29,2	17	70,8
Média da	**questão 2**	70	48,6	74	51,4
3	A	12	50	12	50
	B	01	4,2	23	95,8
	C	01	4,2	23	95,8
	D	02	8,3	22	91,7
Média da	**questão 3**	16	16,7	80	83,3
Médias	**gerais**	117	34,8	219	65,2

ANEXO IX - Percentuais de acertos e erros da avaliação 2

ANEXO X

Escola de Ensino Fundamental e Médio João Mattos					
Questão	**Item**	**Nº de acertos**	**% de acertos**	**Nº de erros**	**% de erros**
1	A	09	47,4	10	52,6
	B	02	10,5	17	89,5
	C	06	31,6	13	68,4
	D	04	21,1	15	78,9
Média da	**questão 1**	21	27,6	55	72,4
2	A	13	68,4	06	31,6
	B	08	42,1	11	57,9
	C	12	63,2	07	36,8
	D	11	57,9	08	42,1
	E	15	78,9	04	21,1
	F	13	68,4	06	31,6
Média da	**questão 2**	72	63,2	42	36,8
3	A	10	52,6	09	47,4
	B	0	0	19	100
	C	04	21,1	15	78,9
	D	0	0	19	100
Média da	**questão 3**	14	18,4	62	81,6
Médias	**gerais** 107		40,2	159	59,8

ANEXO X - Percentuais de acertos e erros da avaliação 2

PRODUTO

UM MANUAL COM RECURSOS METODOLÓGICOS

UM MANUAL COM RECURSOS METODOLÓGICOS

Apresentaremos aqui alguns recursos metodológicos que podem auxiliar o professor no planejamento de suas aulas. Um desses recursos são os jogos que apresentam ótimos resultados como estratégias de ensino – aprendizagem, pois favorecem o aluno no desenvolvimento de métodos de solução de problemas e estimulam sua criatividade ao mesmo tempo em que geram motivação.

Recursos Metodológicos

1. Termômetro Maluco

O primeiro jogo a ser aplicado será o Termômetro Maluco (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007), que utiliza um tabuleiro (figura nº 1) para duas equipes, formadas cada uma por dois ou três jogadores, 2 marcadores de cores diferentes, um conjunto de 27 cartas, formados com três cartas de cada um dos números 0, - 1, - 2, - 3, - 4, +1, +2, +3 e +4 (figura nº 2).

Regras:

1. Cada dupla usa um tabuleiro com o termômetro e um conjunto de cartas que devem ser embaralhadas e colocadas no centro da mesa, formando um monte, com as faces voltadas para baixo.

2. Para iniciar o jogo, cada jogador, na sua vez, coloca seu marcador na posição Zero e retira uma carta do monte. Se a carta indicar um número positivo, o jogador avança; se indicar um número negativo, recua e, se apontar para o zero, o jogador não move o seu marcador.

3. O jogo continua, com os jogadores retirando uma carta do monte e realizando o movimento a partir do valor da casa do seu marcador.

4. O jogador que chegar abaixo de - 20 congela e sai do jogo.

5. Há três formas de ganhar o jogo:

a) O primeiro jogador que chegar em +20, ou

b) O último que ficar no termômetro, no caso de todos os outros jogadores congelarem e saírem do jogo, ou ainda;

c) O jogador que, terminado o tempo destinado ao jogo, estiver mais quente, ou seja, aquele que estiver com o seu marcador na casa com o maior número em relação aos demais.

Variações: O termômetro pode ser desenhado no chão seguindo- se as regras já estabelecidas e com os jogadores como marcadores. Essa variação pode tornar o jogo bastante dinâmico. É ainda uma boa maneira de apresentar o jogo e suas regras para todos os alunos da classe antes de dividi-los em grupos para jogar.

Acrescentando três cartas com a palavra oposto: ao retirar uma carta desta, o jogador deve deslocar o seu marcador para o oposto do número indicado na casa que se encontra. Por exemplo: se o marcador estiver na casa +5, e a carta oposto for retirada, o marcador deverá ir para a casa - 5. Com essa variação, é possível introduzir o conceito de oposto e associá-lo ao de um número inteiro e o seu oposto na reta numerada.

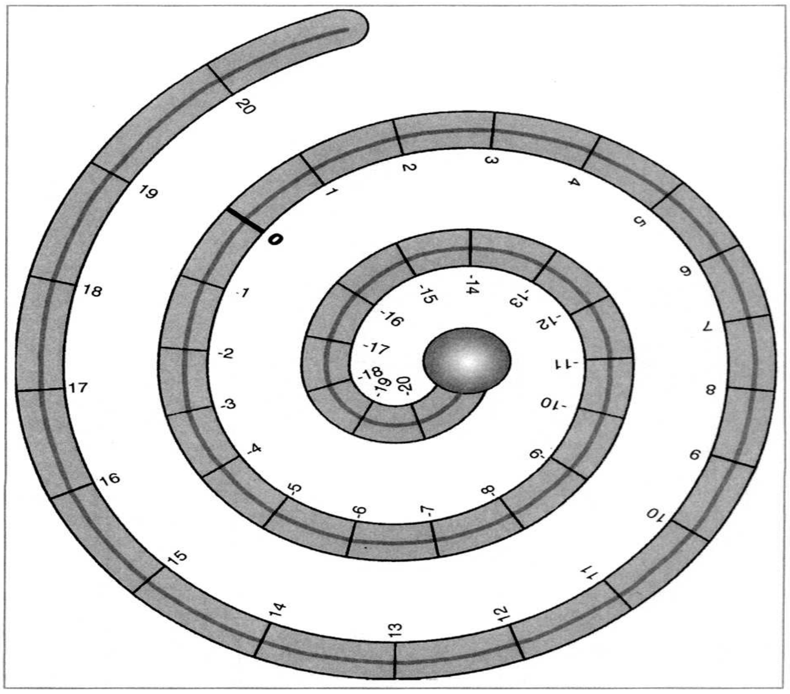
Acrescentar duas ou mais cartas, inserindo no jogo a operação potenciação. Por exemplo, inserir duas cartas, Potência 2 e Potência 3. Nesse caso, as regras devem ser parcialmente alteradas para que o jogo funcione: o jogador que retirar a carta “Potência”, deverá retirar do monte uma outra carta, cujo número será elevado ao quadrado ou ao cubo conforme indicação da carta, e efetuar a operação com esse resultado a partir da posição do seu marcador. Pode ser necessário aumentar a escala para - 50 a 50.

Exemplo de uma jogada: Início do jogo marcador no zero Começo 0

1ª Jogada Retira a carta +3 Vai para a casa +3

2ª Jogada Retira a carta - 4 O jogador recua o seu marcador 4 casas e vai para posição - 1.

Termômetro Maluco – Tabuleiro



Fonte: Smole, Diniz e Milani, 2007   Figura nº 1

Termômetro Maluco – Cartas

+1	**+2**	**+3**	**+4**
-1	**-2**	**-3**	**-4**
0	**OPOSTO**	**Potência 2**	**Potência 3**

Fonte: Smole, Diniz e Milani, 2007.   Figura nº 2

2. Soma Zero

O segundo jogo será o Soma Zero, no qual a habilidade de efetuar adições com números positivos e números negativos, o conceito de oposto de um número inteiro e o cálculo mental são explorados.

Organização da classe: em grupos de dois a quatro alunos.

Recursos necessários: para cada grupo, são necessárias 40 cartas numeradas de - 20 a +20 (sem o zero) (figura nº 3).

Este jogo pode ser utilizado logo após o início do estudo de números negativos. As regras são de fácil compreensão e é possível que os alunos joguem algumas vezes durante o período de uma aula. Sugerimos que, na primeira vez em que jogarem, os alunos não façam o registro das jogadas para enfatizar o caráter lúdico do jogo. Depois de jogarem algumas vezes, pode- se propor que registrem no caderno as operações realizadas e criem variações do jogo, por exemplo, alterando o valor da soma.

Regra: Os jogadores distribuem entre si 36 cartas e colocam as 4 restantes no centro da mesa, com as faces voltadas para cima. Na sua vez, o jogador deve tentar obter soma zero, adicionando o número de uma das cartas de sua mão com os de uma ou mais cartas sobre a mesa. Se conseguir, retira para si o conjunto utilizado na jogada, formando seu monte. Caso não consiga combinar as cartas para obter a soma zero, escolhe uma carta para descartar. Se o jogador em sua jogada levar todas as cartas da mesa, o jogador seguinte apenas coloca uma carta.

O jogo termina quando acabarem as cartas, ou quando não for mais possível obter a soma “zero”. Ganha o jogador cujo monte tiver maior número de cartas.

Variação: uma variação possível é propor que os alunos, usando as cartas do jogo, escrevam o maior número possível de somas cujo total seja, por exemplo, - 6. O registro das respostas encontradas permite que os alunos não apenas percebam várias formas equivalentes de se representar um número, como também a necessidade do uso de parênteses em expressões simples. Por exemplo: - 6 = +2 - (- 2 + 10) = - 10 - (+3 - 7). Exemplo de cartas se encontra na figura nº 3 (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007).

Soma Zero – Cartas

-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18	-19	-20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Fonte: Smole, Diniz e Milani, 2007. Figura nº 3.

3. O Matix:

Esse jogo explora o cálculo com expressões numéricas que envolvem números inteiros, possibilitando que os alunos aprendam a soma algébrica de números inteiros e desenvolvam o cálculo mental.

Organização da classe: de dois a quatro alunos; no caso de serem quatro alunos, o jogo será de dupla contra dupla.

Recursos necessários: para cada grupo, são necessários um tabuleiro quadrado com 36 casas e 36 cartas com os números inteiros escritos na tabela e nas quantidades indicadas (Figura nº 4).

Regras:

1) Distribuir as peças aleatoriamente sobre o tabuleiro;

2) Cada participante (ou dupla), escolherá uma posição (vertical ou horizontal). Escolhida a posição, esta se manterá até o final do jogo;

3) Decidir quem começa jogando através de par ou ímpar;

4) O primeiro a jogar deve mover a peça curinga sobre a casa de uma das fichas que estiver ao seu redor e retira a ficha para si;

5) O próximo jogador procede da mesma forma, movimenta a peça curinga até a casa cuja peça deseja retirar para si;

6) O jogo segue até que todas as peças sejam retiradas do tabuleiro ou quando o curinga cair em uma linha ou coluna onde não haja mais nenhuma peça;

7) Calcular os pontos de cada jogador. Ganha o jogo quem possuir maior número de pontos.

Este não é um jogo de sorte, mas sim de estratégia, uma vez que as decisões de cada jogador têm muita interferência sobre quem vencerá e quem perderá a partida. As problematizações mais interessantes enfatizam a discussão de resultados de jogadas, visando a que os alunos reflitam sobre a soma algébrica de números inteiros. Um exemplo de problematização possível:

1. Analise a seguinte situação de uma partida de *Matix:*

. Sonia terminou o jogo com as seguintes peças: +7, - 10, +5, +3, +8, +1, +15, - 1, +6, +4, - 3, - 2, +5, 0, - 10, 0 e +3.

. Cleide terminou assim: +10, +5, - 1, +7, +10, 0, - 4, +5, +4, +2, +1, +2, - 2, +8, - 3, - 4, - 5.

Quem ganhou o jogo? Qual foi a diferença de pontos entre as duas jogadoras?

Os alunos podem ainda escrever dicas para um jogador ter bons resultados nesse jogo. O texto de dicas mostra ao professor como os alunos hipotetizaram suas jogadas, fizeram escolhas e quais problemas eles resolveram através do jogo. Esse texto auxilia os alunos a terem maior clareza das estratégias vencedoras e de como fazer para planejar e executar jogadas.

Matix -Tabuleiro

0	0	0	1	1	2
2	3	3	4	4	5
5	5	5	6	7	7
8	8	10	10	15	-1
-1	-2	-2	-3	-3	-4
-4	-5	-5	-10	-10	☺

Fonte: Smole, Diniz e Milani, 2007. Figura nº 4.

4. Eu Sei!

A habilidade de realizar multiplicações com números positivos e números negativos, o conceito de oposto de um número inteiro e o cálculo mental podem ser explorados a partir deste jogo.

Organização da classe: em trios.

Recursos necessários: para cada jogador, são necessárias 11 cartas numeradas de - 5 a +5, incluindo o zero.

Regras:

1. Dos três jogadores, dois jogam e um é o juiz.

2. Cada jogador embaralha suas cartas sem olhar.

3. Os dois jogadores que receberam as cartas sentam- se um em frente ao outro, cada um segurando seu monte de cartas viradas para baixo. O terceiro jogador fica de frente para os outros dois, de modo que possa ver seus rostos.

4. A um sinal do juiz, simultaneamente, os dois jogadores pegam a carta de cima de seus respectivos montes, segurando- as próximas de seus rostos de uma maneira que possam ver somente a carta do adversário.

5. O juiz usa os dois números à mostra, anuncia o produto e pergunta: quem sabe as cartas? Cada jogador tenta deduzir o número de sua própria carta

analisando a carta do outro. Por exemplo: se o juiz diz - 25 e um jogador vê que a carta do seu oponente é +5, ele deve deduzir que sua carta é - 5. Ele pode fazer isso dividindo mentalmente o produto pelo valor da carta do oponente, ou simplesmente pensando em qual é o número que multiplicado por 5 resulta - 25.

6. O jogador que gritar primeiro “eu sei” e disser o número correto pega as duas cartas.

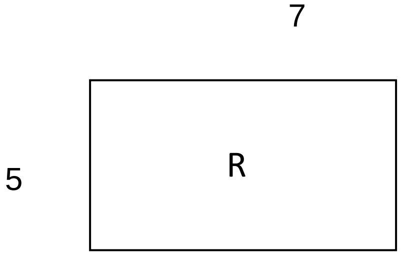
7. O jogo acaba quando acabarem as cartas e ganha o jogador que, ao final, tiver mais cartas (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007).

5. Um Problema histórico

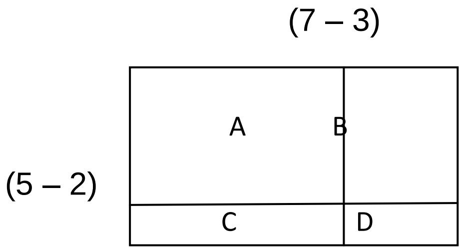
Outro recurso apresentado nos parâmetros curriculares (MEC, 1998, p.100) para trabalhar a multiplicação de inteiros negativos é o estudo de um problema histórico:

> *Os antigos perceberam em varias situações, que quantidades retiradas (números negativos) multiplicadas entre si deveriam produzir quantidades acrescidas (números positivos). Por exemplo: no caso da área de um retângulo com lados medindo 5 e 7, portanto com área 35, se fossem diminuídos os lados em 2 e 3 unidades respectivamente, obteriam um retângulo com medidas 3 e 4, portanto, com área 12. Quando pensaram na área desse retângulo como o produto dos lados 5 – 2 por 7 – 3 para poder encontrar 12, eles perceberam que deveriam subtrair de 35 os produtos de 2 por 7 e 5 por 3 e ainda adicionar ao resultado o produto de 2 por 3. Assim concluíram que a quantidade retirada 2 multiplicada pela quantidade retirada 3 produzia a quantidade acrescida 6.*

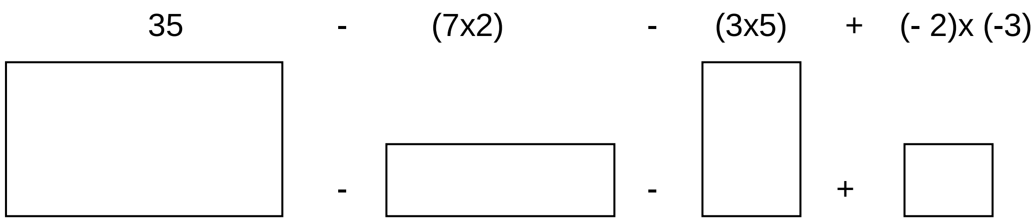
Mostraremos aqui como realizar este recurso:



Área de R = 7 x 5 = 35



Área de A= (7 – 3) x (5 – 2) = 4 x 3 = 12



Observe que, A = R – C – B – D $\rightarrow$ A = R – (C+D) – (B + D) + D ou

A = (7 – 3) x (5 – 2) = 7.5 – 7.2 – 3.5 + (- 3). (- 2) Como, C + D = 7x2 = 14,

B + D = 3x5 = 15 e D = 3x2 = 6 temos,

A = 35 – 14 – 15 + 6 = 35 – 29 + 6 = 6 + 6 = 12

Logo (-3) x (-2) = D = 3x2 = +6

Podemos ainda mostrar a multiplicação de dois números negativos através da álgebra, vejamos: seja 5.(2 - 2) = 0, pela lei distributiva vem 5.2 + 5.(- 2) = 0 ou 10 + 5.(- 2) = 0. Logo 5.(-2) = - 10. Em seguida como – 5.(2 – 2) = 0, novamente temos – 5.2 + (- 5).(- 2) = 0 ou seja - 10 + (- 5).(- 2) = 0. Logo (- 5).(- 2) = 10.

6. Maluco Por Inteiro

Maluco Por Inteiro: Primeira Fase

Objetivo: Formar a idéia de adição de números inteiros.

Material:

Um tabuleiro (Figura nº 5), 4 dados brancos e vermelhos: dois com os números pares vermelhos e ímpares brancos e dois com ímpares vermelhos e pares brancos. Pinos para marcar a posição do jogador no tabuleiro.

Desenvolvimento:

O sentido do movimento é determinado pela cor das faces superiores dos quatro dados jogados simultaneamente. O valor da soma das faces brancas indica o número de casas que o jogador deve se locomover no sentido horário e a soma das faces vermelhas indica o número de casas que o jogador deve se locomover no sentido anti - horário. Inicialmente o jogador pode fazer quatro movimentos sucessivos, um para cada valor obtido nos dados, depois, fazer o movimento da soma das faces brancas e da soma das faces vermelhas e, no final, fazer primeiro a soma das quatro faces dos dados para depois se locomover.

Após um número pré- determinado de rodadas, vence o jogador que estiver ocupando a casa mais próxima da chegada.

Maluco Por Inteiro: Segunda Fase

Objetivo: Formar as idéias iniciais da adição e subtração de Números Inteiros.

Material:

Um tabuleiro com casas vermelhas e brancas (Figura nº 6), 1 dado comum, Pinos coloridos para marcar a posição de cada jogador no tabuleiro.

Desenvolvimento:

Cada jogador, na sua vez, lança os dados e desloca seu marcador tantas casas quanto o valor obtido no dado, no sentido horário se estiver numa casa branca e anti- horário, se estiver numa casa vermelha. Como o jogo é demorado, pode- se estipular um número de jogadas e o vencedor é quem mais se aproximar da Chegada.

Maluco Por Inteiro: Terceira Fase

Objetivo: Juntar as idéias de adição e subtração de números inteiros para provocar a passagem do aluno pela etapa inter- objetal.

Material:

Um tabuleiro com muitas casas brancas e algumas coloridas (Figura nº 7), 4 dados sendo dois com as faces pares vermelhas e as ímpares brancas e dois com as ímpares vermelhas e as pares brancas, Pinos coloridos para marcar a posição de cada jogador no tabuleiro.

Desenvolvimento:

Cada jogador, na sua vez, lança os quatro dados simultaneamente, efetua a soma aritmética dos valores obtidos e procede das seguintes maneiras:

Se o jogador estiver na "Partida" ou em qualquer casa branca, move- se no sentido horário, se a soma algébrica for positiva; e no sentido anti- horário, se a soma algébrica for negativa.

Se o jogador estiver numa casa vermelha (estas casas indicam a operação inversa da adição, ou seja, a subtração); move- se no sentido anti- horário, se o valor da soma algébrica for positivo, e no sentido horário, se a soma algébrica for negativa. (Até que a regra seja assimilada, cada jogador poderá efetuar o movimento relativo a cada dado separadamente).

O ganhador é aquele que atingir ou passar pela casa Chegada. Se um jogador chegar na casa "Castigo", ele continua no jogo, porém só se movimenta quando obtiver soma positiva no lançamento dos dados.

Maluco Por Inteiro: Quarta Fase

Objetivo: Formalizar as operações de adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

Material:

Tabuleiro com operações impressas em diversas casas (Figura nº 8), 4 dados com as seguintes marcações:

Em dois deles: + 1, - 2, + 3, − 4, + 5 e – 6. Nos outros dois: − 1, + 2, − 3, + 4, − 5 e + 6, Pinos coloridos (marcadores).

Desenvolvimento:

Considerar positivo o sentido horário e negativo o sentido anti- horário.

Se o jogador estiver na partida ou numa casa em branco, fará o próximo movimento no sentido horário, como na segunda fase.

Se o jogador estiver numa casa onde há uma expressão algébrica impressa, deve substituir o resultado das somas na expressão. Para isto deve- se considerar:

1. P, soma dos valores positivos.
2. N, soma dos valores negativos acompanhados de seu sinal.
3. S soma algébrica de todos os valores das faces superiores dos dados.

O vencedor será o jogador que mais se aproximar, chegar ou ultrapassar a casa Chegada.

Maluco Por Inteiro: Quinta Fase

Objetivo: Formar as idéias iniciais do produto de um número positivo por outro, tanto positivo quanto negativo.

Material:

Tabuleiro (igual ao da primeira fase Figura nº 5), 4 dados iguais aos da quarta fase, 1 dado em cujas faces estão impressos os números; 0, - 1, +2, - 2, +3 e - 3, ou uma roleta com os mesmos valores impressos, Pinos coloridos para marcar a posição de cada jogador no tabuleiro.

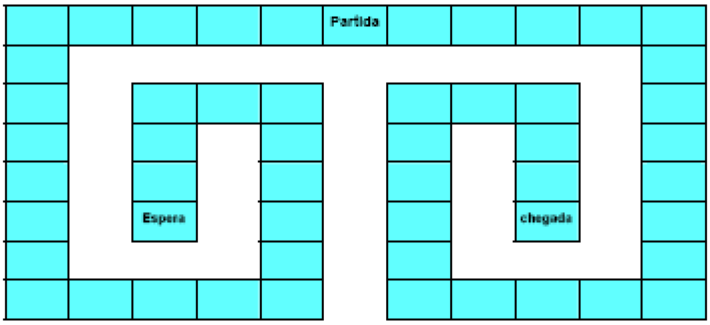
Desenvolvimento:

Cada jogador, na sua vez, lança os quatro dados do mesmo tipo e efetua a soma algébrica. A seguir, lança o 5º dado e efetua o produto do valor obtido pela soma algébrica obtida. Cada jogador desloca seu marcador tantas casas quanto o valor final calculado pelo produto anteriormente descrito.

Como o jogo é demorado, pode- se estipular um número de jogadas e o vencedor será aquele que mais se aproximar da Chegada. (COSTA, 2003).

MALUCO POR INTEIRO

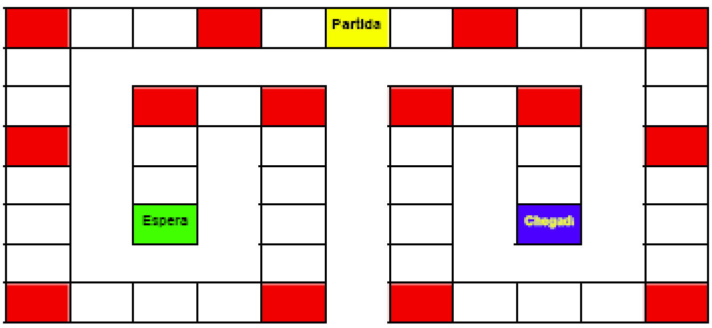
PRIMEIRA FASE



Fonte Costa, 2003 Figura nº 5

MALUCO POR INTEIRO

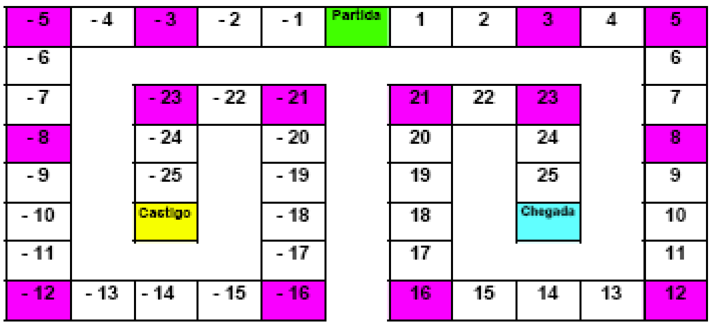
SEGUNDA FASE



Fonte Costa, 2003 Figura nº 6

MALUCO POR INTEIRO

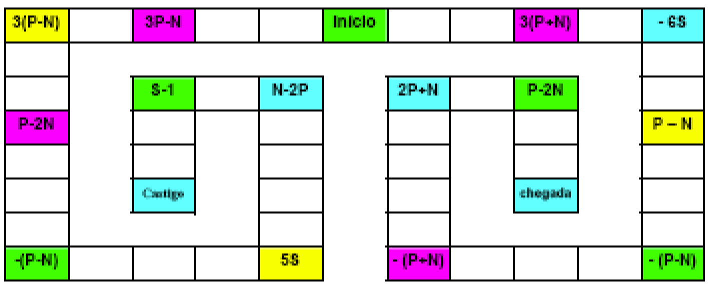
TERCEIRA FASE



Fonte Costa, 2003 Figura n º 7

MALUCO POR INTEIRO

QUARTA FASE



Fonte Costa, 2003 Figura nº 8