UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ EDERSON MELO BRAGA

PROBLEMAS VARIACIONAIS DE FRONTEIRA LIVRE COM DUAS FASES E RESULTADOS DO TIPO PHRAGMÉM-LINDELÖF REGIDOS POR EQUAÇÕES ELÍPTICAS NÃO LINEARES SINGULARES/DEGENERADAS

FORTALEZA
2015

JOSÉ EDERSON MELO BRAGA

PROBLEMAS VARIACIONAIS DE FRONTEIRA LIVRE COM DUAS FASES E RESULTADOS DO TIPO PHRAGMÉM-LINDELÖF REGIDOS POR EQUAÇÕES ELÍPTICAS NÃO LINEARES SINGULARES/DEGENERADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

B794p Braga, José Ederson Melo
Problemas variacionais de fronteira livre com duas fases e resultados do tipo Phragmén-Lindelof regidos por equações elípticas não lineares singulares/degeneradas / José Ederson Melo Braga. – 2015
126 f. : il., enc. ; 31 cm

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Análise.
Orientação: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira.

1. Problemas de fronteira livre. 2. Regularidade Lipschitz. 3. Estimativas de densidade. I. Título.

CDD 515

JOSÉ EDERSON MELO BRAGA

PROBLEMAS VARIACIONAIS DE FRONTEIRA LIVRE COM DUAS FASES E RESULTADOS DO TIPO PHRAGMÉM-LINDELÖF REGIDOS POR EQUAÇÕES ELÍPTICAS NÃO LINEARES SINGULARES/DEGENERADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 06 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Diego Ribeiro Moreira

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Alberto Giulio Setti

Prof. Dr. Alberto Giulio Setti
Universitá dell'Insunbria - Itália

Paulo D. Cordaro

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
Universidade de São Paulo (USP)

Prof. Dr. Boyan Slavchev Sirakov
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a meu bom Deus, Criador de todas as coisas. A Ele a primazia. A minha amada esposa Silvânia e meu querido filho Arthur presentes de Deus para minha vida. Finalmente aos meus pais e irmãos, Maria Auxiliadora, José Edson, Edson Júnior, Aline e Amanda os quais amo com todas as minhas forças.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, porque a Ele pertence toda a primazia.

A Silvânia da Silva Santos Braga, minha esposa, por incondicionalmente permanecer ao meu lado, ajundando-me a vencer as dificuldades que a vida nos impõe. Que Deus continue abençoando nossa vida juntos e nos ensine a criar nosso pequeno Arthur.

A minha família. Que, a cada dia, me incentiva a lutar e buscar por meus objetivos e, por mais difíceis que sejam os caminhos a serem trilhados, me ensina a jamais desistir. A vocês, muito obrigado!

A meu orientador, professor Diego Ribeiro Moreira, que tem se tornado para mim muito mais que um conselheiro para a vida acadêmica, senão um amigo muito querido. A ele fica aqui registrado o meu muito obrigado pelas palavras animadoras que me mantiveram confiante até o término deste trabalho e por suas lições e ajuda que foram e serão relevantes durante toda minha vida.

Agradeço também aos caros professores Jorge Herbert Soares de Lira, Gregório Pacelli Feitosa Bessa, Alberto Giulio Setti, Boyan Slavchev Sirakov e Paulo Domingos Cordaro que, em detrimento aos seus compromissos, aceitaram cordialmente nosso convite para participar desta banca examinadora.

Agradeço ainda a meu caro amigo e irmão Lucas Santos pela ajuda com a Figura 1.3 deste trabalho. Sua habilidade e presteza me foram muitíssimo úteis.

A todos os excelentes amigos que Deus me proporcionou, tanto os que fiz na Universidade dos quais não poderia deixar de citar: Antônio Wilson, Rondinelle Marcolino, Adriano Medeiros, Disson Soares e José Gleison, quanto aos de minha amada igreja que me tornaram seu moderador. Aos amados irmãos da Primeira Igreja Batista em Messejana fica aqui o meu muito obrigado, pois, estiveram sempre a meu lado nos momentos bons e também nos ruins.

“Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo propósito debaixo do céu: Eclesiastes 3.1.”

RESUMO

Neste trabalho de tese discutimos resultados recentes sobre a regularidade e propriedades geométricas de soluções variacionais de problemas de fronteira livre de duas fases regidos por equações elípticas não lineares degeneradas/singulares. Discutimos também resultados do tipo Phragmém-Lindelöf para tais equações classificando essas soluções em semi-espaços.

Palavras-chave: Problemas Variacionais de Fronteira Livre. Minimizantes com duas fases. Equações elípticas não lineares singular/degeneradas. Regularidade Lipschitz. Estimativas de densidade. Princípio da Reflexão de Schwarz. Desiguladade de Harnack até a Fronteira. Estimativa de Carleson.

ABSTRACT

In this work of thesis we discuss recent results on the regularity and geometric properties of variational solutions of two phase free boundary problems governed by singular/degenerate nonlinear elliptic equations. We also discuss Phragmém-Lindelöf type results for such equations classifying those solutions in half-spaces.

Keywords: Variational Problems of Free Boundary. Two phase minimizers. Singular/degenerate nonlinear elliptic equations. Density estimate. Schwarz Reflection Principle. Boundary Harnack Principle. Carleson estimate.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano de dimensão n.
Ω	Um conjunto aberto e conexo do $\mathbb{R}^n$.
H_n^+	Denota o conjunto $\Big\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\Big\}$.
x'	Denota $x' = (x_1, x_2, , x_{n-1})$ para um $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dado.
Ω^+	Denota o conjunto $\Big\{x = (x', x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : x_n > 0\Big\}$.
Ω^-	Denota o conjunto $\Big\{x = (x', x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : x_n < 0\Big\}$.
Ω'	Denota o conjunto $\Big\{x = (x', x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : x_n = 0\Big\}$.
$F(u)$	Denotam o conjunto $\partial\{u > 0\} \cap \Omega$
$F^-(u)$	Denota o conjunto $\partial\{u < 0\} \cap \Omega$
$F^\pm(u)$	Denota o conjunto $(\partial\{u > 0\} \cup \partial\{u < 0\}) \cap \Omega$.
$B_r(x_0)$	Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, denota o conjunto $\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x - x_0\rvert < r\Big\}$.
$\mathcal{A}_{r,R}(x_0)$	Denota o anel $B_R(x_0) \setminus \overline{B}_r(x_0)$.
$S(n)$	Espaço das matrizes simétricas $n \times n$.
c, ε, ϵ	Representam contantes positivas pequenas.
C, C_0, M	Representam constantes positivas grandes.
μ	Limitante superior das funções de fase f_1 e f_2.
I_n	e a matriz identidade de ordem n.
$\lvert D\rvert$	Medida n-dimensional de Lebesgue do conjunto D.
w_n	Denota $\lvert B_1(0)\rvert$.
χ_D	Função característica do conjunto D.
G	Representa uma N-função.
$C_G(\Omega)$	Classe de Orlicz definida por G sobre Ω.
ε_0	Constante de não-degenerescência de $G(1)$.
(CP)	G satisfaz a condição $G'(t) = g(t), g \in C^0([0, +\infty)) \cap C^1((0, +\infty))$.
(CQ)	G satisfaz a condição $0 < \delta \leq Q_g(t) := \dfrac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \quad \forall\, t > 0$.
(MC - β)	G satisfaz a condição $\displaystyle\int_t^{t+\kappa} \lvert Q_g'(s)\rvert ds \leq \frac{C_0}{t^\beta} \cdot \kappa^\beta, \quad \forall\, t, k \geq 0$.
(C - Lip)	G satisfaz a condição $0 \leq \dfrac{t^2\lvert g''(t)\rvert}{g(t)} \leq \mathcal{C}(\delta, g_0), \text{ para q.t.p. } t > 0$.
$\mathcal{G}(\delta, g_0)$	Conjunto de N-funções $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ que satisfazem (CP) e (CQ).
$\mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0)$	Denota o conjunto $\Big\{G \in \mathcal{G}(\delta, g_0); \quad G(1) \geq \varepsilon_0\Big\}$.
$\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0)$	Denota o conjunto $\Big\{G \in \mathcal{G}(\delta, g_0); \quad G \text{ satisfaz a condição (MC-}\beta)\Big\}$.
$\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$	Denota o conjunto $\Big\{G \in \mathcal{G}(\delta, g_0); \quad G \text{ satisfaz a condição (C-Lip)}\Big\}$.
$\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0)$	Denota o conjunto $\Big\{G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0); \quad G(1) \geq \varepsilon_0\Big\}$.
$\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0, \varepsilon_0)$	Denota o conjunto $\Big\{G \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0); \quad G(1) \geq \varepsilon_0\Big\}$.

E_G	Funcional do tipo $E_G(\cdot,\Omega)=\int_\Omega[G(\lvert\nabla\cdot\rvert)+\lambda(f_1,f_2)(\cdot)]dx$.
$\Theta_u^-(x_0,r)$	Denota a densidade $\frac{\lvert\{u<0\}\cap B_r(x_0)\rvert}{\lvert B_r(x_0)\rvert}$ com $x_0\in F^\pm(u)$.
$\Theta_u^+(x_0,r)$	Denota a densidade $\frac{\lvert\{u>0\}\cap B_r(x_0)\rvert}{\lvert B_r(x_0)\rvert}$ com $x_0\in F^\pm(u)$.
$[u]_{\alpha,\Omega}$	$\sup_{x,y\in\Omega}\frac{\lvert u(x)-u(y)\rvert}{\lvert x-y\rvert^\alpha}$.
$\displaystyle⨍_{B_r} G(\lvert u\rvert)dx$	$\frac{1}{\lvert B_r\rvert}\int_{B_r} G(\lvert u\rvert)dx$.
$(u)_W$	Denota $\displaystyle⨍_W u(x)dx$, para um conjunto $W\subset\mathbb{R}^n$.
$(u)_{x_0,r}$	$\displaystyle⨍_{B_r(x_0)} u(x)dx$.
$BMO(\Omega)$	$\left\{v:\Omega\to\mathbb{R}:\sup\limits_{B\subset\Omega}⨍_B\lvert v-v_B\rvert dx<\infty\right\}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo introdutório desejamos explanar de forma a tornar claro o entendimento sobre os problemas contidos neste trabalho de tese. Tal Capítulo está dividido apenas em duas seções, onde cada uma delas versa sobre um dos problemas resolvidos durante o período doutoral. Aqui apresentaremos um pouco da história destes problemas, assim como o processo evolutivo destes no decorrer dos anos. Isto será colocado em perspectiva com os resultados que obtivemos e o uso das ferramentas que se fizeram necessárias para alcançar nossos intentos.

1.1 Regularidade Lipschitz e estimativas de densidade para Problemas de Fronteira Livre com duas fases em classes sob pequena densidade da fase negativa

Desde o ínicio da década de 80, problemas de optimização do tipo Alt-Caffarelli tem sido constantemente investigados. Durante os últimos 30 anos, rigorosos estudos foram feitos e significativos avanços alcançados no intento de estender a teoria desenvolvida por Hans Alt e Caffarelli (1981). Neste paper os autores trabalharam inicialmente com um problema de mínimos associados ao operador Laplaciano. Bom, resumidamente, problemas de optimização dessa natureza procuram abordar questões sobre mínimos de certos funcionais descontínuos, com descontinuidades da ordem da função característica, sobre conjuntos específicos de funções em espaços de Sobolev apropriados. Questões relevantes sobre este tipo de problema giram em torno da regularidade ótima e propriedades geométricas dos mínimos, assim como a regularidade ótima e total de certos conjuntos especiais chamados fronteiras livres. Em trabalho pioneiro Alt e Caffarelli (1981), essencialmente mostraram que tais mínimos eram soluções (fracas) de um Problema de Fronteira Livre (PFL). De fato, minimizantes de um problema do tipo Alt-Caffarelli

$$\min_{u \in K_\varphi} \left\{ \int_\Omega [|\nabla u|^2 + Q(x)\chi_{\{u>0\}}]dx \right\}, \quad K_\varphi := \Big\{ u \in H^1(\Omega) : u - \varphi \in H_0^1(\Omega) \Big\}, \tag{1}$$

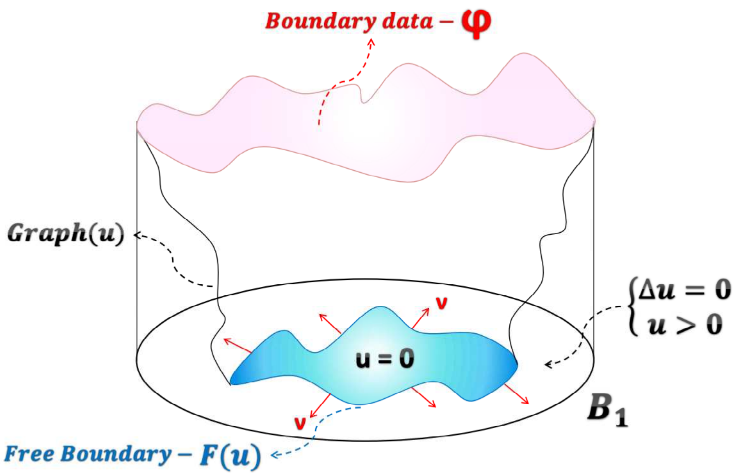
são funções localmente Lipschitz contínuas, não-negativas e soluções (fracas) do seguinte Problema de Fronteira Livre:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \ \{u > 0\} \cap \Omega, \\ u_\nu^2 = Q & \text{on } \ F(u) := \partial\{u > 0\} \cap \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $0 \leq \varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ e $0 < \lambda \leq Q(x) \leq \Lambda$. Por serem não-negativas, as soluções de (1) são chamadas de *soluções de uma fase* do problema. Sobre a fronteira livre eles mostraram que, em geral, se Q é suficientemente regular então $F(u)$ é uma superfície de regularidade $C^{1,\alpha}$ na vizinhança de *flat free boundary points*.

Os autores verificaram ainda que, quando o problema era resolvido em dimensão $n = 2$ então a fronteira livre era, de fato, analítica e, portanto, minimizantes são soluções clássicas de (2). Este resultado foi estendido para dimensão $n = 3$ duas décadas depois em Cafarelli, Jerison e Kenig (2004).

Figura 1 – Protótipo de solução para um PFL de uma fase.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sobre a regularidade de mínimos de uma fase vale ainda ressaltar que, pelo menos heuristicamente, Lipschitz continuidade é o melhor que podemos obter. De fato, Lema de Hopf garante que a derivada normal u_ν "bate" na fronteira livre formando um ângulo positivo. Isto nos leva a concluir que o gradiente de um minimizante u, dá um salto sobre $F(u)$ impossibilitando que ∇u seja contínuo. Um outro argumento heurístico (argumento de barreira) pode ser descrito se assumirmos, por um instante, que $F(u)$ é suave e que u_v é, de fato, limitada sobre $F(u)$. Sob estas circunstâncias, é suficiente provar que ∇u é limitado em qualquer ponto de $\{u > 0\} \cap \Omega$. O argumento é o seguinte: para um ponto $x_0 \in \{u > 0\} \cap \Omega$ consideramos $r = \operatorname{dist}(x_0, F(u))$. Por Harnack

$$u(x) \geq c \cdot u(x_0), \quad \forall\, x \in B_{r/2}(x_0).$$

Agora, tomamos um truncamento da solução fundamental Γ para o Laplaciano no anel $\mathcal{A}_{r/2,r}(x_0)$ tal que $\Gamma = 0$ sobre $\partial B_r(x_0)$ e $\Gamma = cu(x_0)$ sobre $\partial B_{r/2}(x_0)$. Princípio da Comparação nos dá que

$$u \geq \Gamma, \quad \text{em} \;\; \mathcal{A}_{r/2,r}(x_0).$$

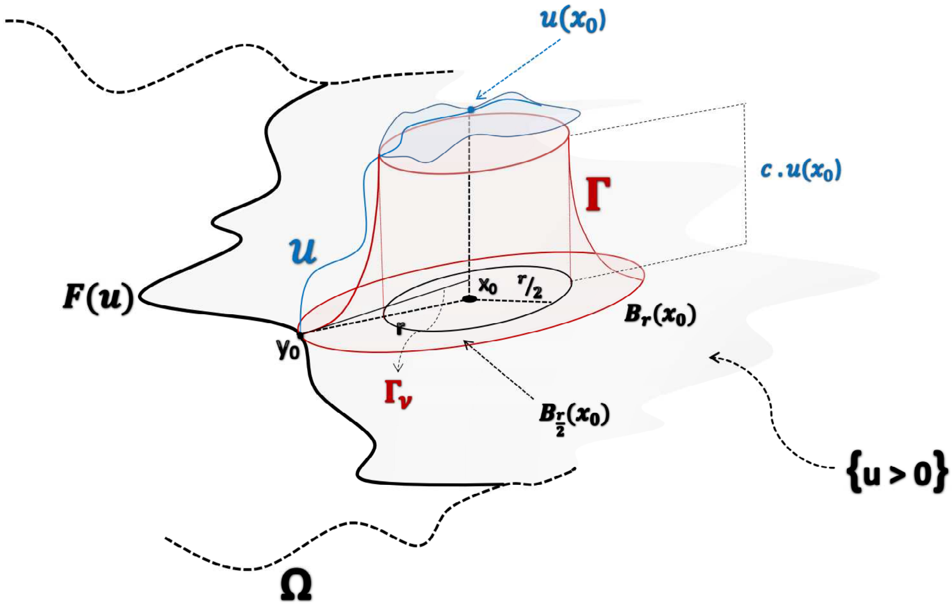
Se $y_0 \in F(u)$ é tal que $\operatorname{dist}(x_0, y_0) = \operatorname{dist}(x_0, F(u))$ segue pelo Lema de Hopf que

$$\sqrt{\Lambda} \geq \sqrt{Q(y_0)} \geq u_\nu(y_0) \geq \Gamma_\nu(y_0) \geq C \cdot \frac{u(x_0)}{\operatorname{dist}(x_0, F(u))}.$$

Finalmente, combinando a estimativa acima com uma estimativa de Schauder concluímos que

$$|\nabla u(x_0)| = u_\nu(x_0) \leq C_0 \cdot \frac{u(x_0)}{\operatorname{dist}(x_0, F(u))} \leq \overline{C} \cdot \sqrt{\Lambda}.$$

Figura 2 – Heurística para regularidade de mínimos de uma fase.



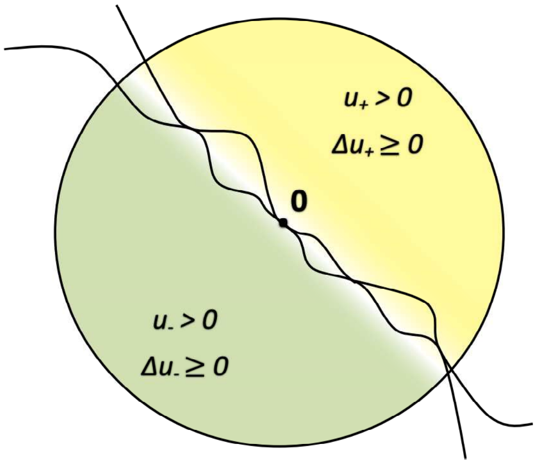
Fonte: Elaborado pelo autor.

Alguns anos depois, H. Alt e L. Caffarelli, em colaboração com A. Friedman, estenderam o problema de optimização (1) para equações do tipo quaselinear assim como para problemas que permitiam que mínimos pudessem mudar de sinal, chamados portanto, *soluções de duas fases*. Soluções de duas fases surgem sempre que se considera a condição de bordo (φ) mudando de sinal. Naturalmente, tais problemas geram Problemas de Fronteira Livre de duas fases do seguinte tipo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{u \neq 0\} \cap \Omega, \\ (u_\nu^+)^2 - (u_\nu^-)^2 = 1 & \text{on } F(u) := \partial\{u > 0\} \cap \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Observe agora que, mesmo heuristicamente, a condição de fronteira livre não nos dá um controle das derivadas normais sobre a fronteira livre, apenas um controle para a diferença é indicado, isto nos impede, por exemplo, de usar o argumento heurístico anterior para provar que a regularidade Lipschitz é o melhor que podemos esperar quando o problema de optimização é de duas fases. Em 1984, os três matemáticos acima citados conseguiram desenvolver uma poderosa ferramenta que fosse capaz de sanar esta lacuna. Tal maquinária tornou-se conhecida pelo nome *Fórmula de monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedman* cuja gama de aplicações é considerável e profunda (para algumas aplicações veja Capítulo 12 de Caffarelli e Salsa (2005)). O Teorema pode ser posto nos seguintes termos:

Figura 3 – Condições para o uso da Fórmula de Monotonicidade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 1.1 (ACF Fórmula de Monotonicidade) *Sejam* $u_+, u_- \in C^0(B_1)$ *tais que*

$$u_+, u_- \geq 0, \quad \Delta u_+, \Delta u_- \geq 0, \quad u_+(0) = u_-(0) = 0, \quad u_+ \cdot u_- = 0 \ \text{ in } B_1.$$

Então a função

$$J(r) = J(r, u_+)J(r, u_-) = \frac{1}{r^2}\int_{B_r} \frac{|\nabla u_+|^2}{|x|^{n-2}} dx \cdot \frac{1}{r^2}\int_{B_r} \frac{|\nabla u_-|^2}{|x|^{n-2}} dx$$

é monótona crescente para $r \in (0,1]$ *e satisfaz a seguinte estimativa*

$$J(r) \leq c(n) \cdot ||u_+||^2_{L^2(B_1)} \cdot ||u_-||^2_{L^2(B_1)}.$$

Agora notificamos que tal fórmula de monotonicidade implica em estimativas do tipo

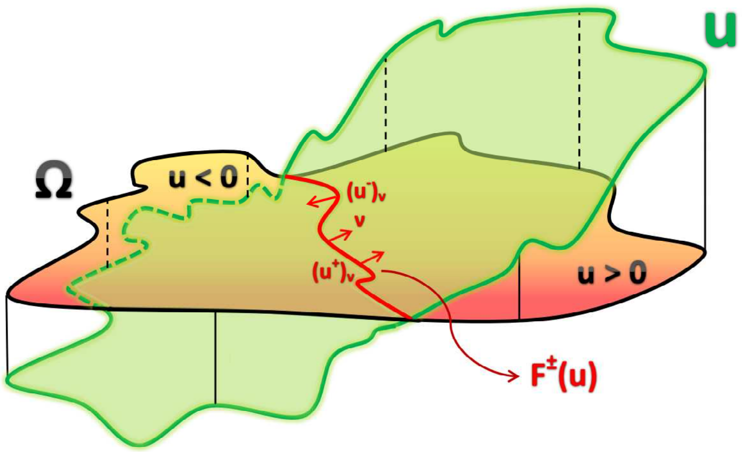
$$c(n)|\nabla u_+(0)|^2 \cdot |\nabla u_-(0)|^2 = J(0^+) \leq J(r) \leq C(n)\|u_+\|^2_{L^2(B_1)}\|u_-\|^2_{L^2(B_1)}.$$

Portanto, como heuristicamente mínimos satisfazem

$$(u_\nu^+)^2 - (u_\nu^-)^2 = 1 \quad \text{ ao longo de } F(u),$$

somos capazes de concluir que u_ν^+, u_ν^- são limitadas sobre a fronteira livre.

Figura 4 – Protótipo de um minimizante de duas fases.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste momento explicitaremos nosso objetivo na primeira parte deste trabalho expondo um pouco da dificuldade de atacar um problema de minimização de duas fases (como em Alt-Caffarelli-Friedmam) em outros cenários onde não estão envolvidas funções harmônicas.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com regularidade de fronteira apropriada, digamos Lipschitz, investigamos a regularidade ótima de funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que minimizam funcionais do tipo

$$E_G(w, \Omega) = \int_\Omega [G(|\nabla w|) + \lambda(f_1, f_2)(w)]dx, \tag{4}$$

onde $G : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é uma N-função satisfazendo certas condições de regularidade e comportamento de derivadas e $\lambda(f_1, f_2)(w)$ uma função dada por

$$\lambda(f_1, f_2)(w)(x) := f_2(x) \cdot \chi_{\{w>0\}} + f_1(x) \cdot \chi_{\{w<0\}} + \min(f_1(x), f_2(x)) \cdot \chi_{\{w=0\}}$$

com f_1 e f_2 satisfazendo

$$0 \leq f_1, f_2 \leq \mu.$$

Discorrendo heuristicamente, isto é, sem a formalidade dos cálculos, acreditamos que tais minimizantes são soluções de um Problema de Fronteira Livre (PFL) de duas fases com um dado de fronteira prescrito que toma a seguinte forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}_g u := \operatorname{div}\left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot \nabla u\right) = 0 & \text{in } \{u \neq 0\} \\ H(|\nabla u^+|) - H(|\nabla u^-|) = f_2(x) - f_1(x) & \text{on } F(u)^{\pm} \\ g(t) = G'(t), \quad H(t) = g(t)t - G(t), \end{cases} \tag{5}$$

onde denotamos $F(u)^{\pm} := (\partial\{u > 0\} \cup \partial\{u < 0\}) \cap \Omega$.

Assim como em Alt, Caffarelli e Friedman (1984), o máximo que podemos garantir como regularidade ótima para u é $C^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Esta é uma das principais questões sobre a qual nos debruçaremos no Capítulo 3.

Em busca de atacar de forma satisfatória o problema assumiremos as condições apropriadas para N-funções introduzidas por G. Lieberman (veja Lieberman 1991) no estudo da teoria de regularidade interior para equações elípticas singular/degeneradas do tipo $\mathcal{L}_g u = B(x, u, \nabla u)$. Precisamente temos

- *Condição de Primitiva*:

$$G'(t) = g(t), \quad \text{onde} \quad g \in C^0([0, +\infty)) \cap C^1((0, +\infty)); \tag{CP}$$

- *Condição Quociente*: para $0 < \delta \leq g_0$ constantes fixadas,

$$0 < \delta \leq Q_g(t) := \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \quad \forall\ t > 0. \tag{CQ}$$

Como apontado por Martinez e Wolanski (2008) as condições assumidas por Lieberman garantem que $\mathcal{L}_g u = 0$ são equivalentes a uma equação uniformemente elíptica (da forma não-divergente) com constantes de elipticidade dependendo apenas de δ, g_0 em subconjuntos de Ω tal que $\nabla u \neq 0$. De fato, se definirmos $A(p) = g(|p|)\frac{p}{|p|}$ e considerarmos $a_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial p_j}$ teremos

$$\min\{\delta, 1\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{g_0, 1\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2. \tag{6}$$

Vale ressaltar que este fato não implica em qualquer tipo de homogeneidade para a função G. Observamos até que a condição (CQ) permite diferentes comportamentos para G e sua derivada quando $|\nabla u|$ é muito pequeno ou muito grande (Veja Lema 2.1). Este fato por si só torna o estudo de PFL's como (5) mais interessantes e desafiadores do que os problemas de minimização envolvendo operadores que possuem uma certa homogeneidade como o Laplaciano e até mesmo o p-Lapaciano.

De agora em diante, para fins didáticos, as constantes $0 < \delta \leq g_0 < \infty$ serão fixadas como as constantes de elipticidade (singular/degeneradas) para operadores associados aos funcionais E_G.

Com respeito a quantitade de N-funções que satisfzem as condições (CP) e (CQ) podemos verificar que este número é bastante expressivo. Para tanto, considere funções $G' = g$ tais que: $g(t) = t^p$ com $\delta = g_0 = p$, $g(t) = at^p + bt^q$ com $a, b, p, q > 0$ com $\delta = \min\{p, q\}$ e $g_0 = \max\{p, q\}$ e $g(t) = t^p log(at + b)$ com $p, a, b > 0$ onde, neste caso, $\delta = p$ e $g_0 = p + 1$. Muitos outros exemplos serão discutidos no Capítulo 3.

Problemas de Fronteira Livre como (5) aparecem em muitas aplicações tais como: o estudo do fluxo em cavidades para um ou dois fluidos em uma configuração de equilíbrio, fluxo de fluidos em canos (modelo de jatos), problemas de design ótimo, problemas envolvendo propagação de chamas e problemas envolvendo otimização do calor ou de energia eletrostática.

A regularidade Lipschitz para minimizantes de E_G tem sido averiguada em diversas circunstâncias. Como mencionamos anteriormente, o caso modelo para uma e duas fases, isto é, quando $G(t) = t^2$, foi provado em Alt e Caffarelli (1981) e em Alt, Caffarelli e Friedman (1984). Em (1983) os mesmos autores estenderam o problema de uma fase para equações do tipo quaselinear onde $g(t) \sim t$. Nestes trabalhos resultados e ferramentas clássicas da teoria do potencial realizam um papel fundamental. Recentemente no paper Martinez e Wolanski (2008) as autoras estudaram o caso geral para o problema de uma fase em Espaços de Orlicz sob as condições (CP) e (CQ). Estes resultados estenderam o problema de uma fase para o caso p-Laplaciano ($G(t) = t^p$) considerado em Danielli e Pertrosyan (2005). Em Danielli e Petrosyan (2005) e Martinez e Wolanski (2008) os autores não puderam contar com a teoria do potencial a seu favor, sendo que seus argumentos para provar regularidade Lipschitz baseavam-se em técnicas de compacidade para mínimos.

Especialistas na teoria sabem que a situação para o caso de duas fases é muito mais delicado e menos compreendido. O único resultado essencialmente conhecido é o paper de Alt, Caffarelli e Friedman (1984) uma vez que a Fórmula de Monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedman é desconhecida no cenário não-linear. Como mencionado anteriormente tal ferramenta matemática garante que $|\nabla u^+|$ e $|\nabla u^-|$ estão relacionados de tal modo que ambos são limitados na vizinhança da fronteira livre e, portanto, a regularidade Lipschitz para mínimos é obtida. Diante do que conhecemos hoje, a regularidade Lipschitz para minimizantes de duas fases permanece como um problema em aberto quando se trata de funcionais mais gerais. Tal regularidade só é conhecida em dois cenários: quando o funcional está associado ao Laplaciano ou a operadores da forma divergente onde vale um variante da fórmula de monotonicidade (veja, por exemplo, Caffarelli (1989a)).

Em 2008, cerca de 24 anos depois da publicação de (1984), foi provado por A. Karakhanyan um resultado bem interessante sobre a regularidade ótima para o problema de duas fases para o caso onde o operador é o p-Laplaciano (veja Kharakhanyan (2008)). Karakhanyan mostrou a existência de uma constante universal $C > 0$ dependendo apenas de p, n e de $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ tal que, se a densidade de Lebesgue da fase negativa ao longo da fronteira livre é, no máximo C, então minimizantes são (localmente) Lipschitz contínuos.

Na primeira parte deste trabalho de tese nosso objetivo é estender o resultado obtido por A. Karakhanyan para o contexto de Espaços de Orlicz. Note, todavia, que tal resultado é apenas um critério para que a regularidade Lipschitz em mínimos apareça. Caso isto não ocorra, isto é, não possamos garanitr que todos os mínimos são localmente Lipschitz, somos capazes de fornecer, mesmo na ausência de regularidade Lipschitz, nova informação sobre a fronteira livre, informação esta, antes, conhecida apenas na presença de regularidade $C^{0,1}$. Precisamente, caso a regularidade Lipschitz para minimizantes falhe, desejamos apresentar novas estimativas de densidade para a fase negativa em pontos das fronteiras livres $F(u) = \partial\{u > 0\}$ e $F(u)^- = \partial\{u < 0\}$. Ressaltamos ainda que se um minimizante de E_G não é localmente Lipschitz, as fronteiras livres $F(u)$ e $F(u)^-$ se tocam e u não é localmente Lipschitz exatamente nos pontos de $F(u) \cap F(u)^-$.

Gostaríamos, todavia, de obter estimativas universais para minimizantes de duas fases para (a maior classe possível de) funcionais que compartilham a mesma elipticidade, ao invés de nos concentrar em um caso particular. A fim de fazer isso, introduzimos a seguinte classe de N-funções:

$$\mathcal{G}(\delta, g_0) := \Big\{G : [0, \infty) \to [0, \infty); \quad G \text{ é uma N-função satisfazendo (CP) e (CQ)}\Big\}.$$

Dois fatos importantes devem ser frisados aqui. O primeiro deles é que, em momento opotuno, mostraremos que o gráfico de minimizantes de uma fase para funcionais do tipo E_G com $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ atinge a fronteira livre com inclinação comparável a potências negativas de $G(1)$. Mais precisamente, se $G(1)$ é pequeno o suficiente, existem constantes universais $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \cdot \left(\frac{1}{G(1)}\right)^{\frac{1}{1+g_0}} \;\leq\; |\nabla u| \;\leq\; C_2 \cdot \left(\frac{1}{G(1)}\right)^{\frac{1}{1+\delta}}, \tag{7}$$

ao longo de $F(u)$.

Isto mostra, em particular, que a regularidade Lipschitz para minimizantes só pode ocorrer em subclasses não-degeneradas de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$, i.e, em subconjuntos de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$ onde $G(1)$ é estritamente positivo, digamos $G(1) \geq \varepsilon_0 > 0$. Neste caso, ε_0 é considerada uma constante de não-degenerescência de G.

O segundo fato importante refere-se a estratégia de atacar o problema. Ora, desde que uma ferramenta como a fórmula de monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedmam é desconhecida em nosso contexto, torna-se extremamente difícil capturar qualquer informação quantitativa para controlar o gradiente dos minimizantes quando nos aproximamos da fronteira livre. Por esta razão, somos levados a considerar também argumentos de compacidade. Neste ponto e, ao contrário dos casos anteriores, a situação é mais complicada, visto que é preciso não só estudar a compacidade de mínimos mas também a compacidade da classe de operadores elípticos singular/degenerados $\mathcal{L}_g$ representados aqui pelas classes $\mathcal{G}(\delta, g_0)$. Observamos também que as condições (CP) e (CQ) são insuficientes para providenciar um resultado de compacidade apropriado (veja o Exemplo 3.2 do Capítulo 3). A principal razão para esta falha é a ausência de um módulo uniforme de continuidade para o quociente Q_g em (CQ).

Em busca de uma ferramenta capaz de fechar a lacuna acima mencionada averiguamos que um controle do tipo Morrey dado por

$$\int_t^{t+\kappa} |Q_g'(s)|ds \leq \frac{C_0}{t^\beta} \cdot \kappa^\beta \quad \forall\, t, \kappa > 0, \tag{8}$$

supre de forma satisfatória a necessidade de se obter compacidade em classes não-degeneradas com respeito as topologias $C^{2,\gamma}_{loc}(0, \infty), \gamma < \beta$ e $C^1_{loc}[0, \infty)$. Acreditamos que esse resultado de compacidade possa ser de interesse independente.

Nosso Teorema principal é uma combinação de resultados de compacidade, invariância de subclasses não-degeneradas de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$ e do controle do tipo Morrey acima por normalizações via escalonamentos não-lineares, estimativas de estabilidade de Martinez e Wolanski (Teorema 2.3 em Martinez e Wolanski (2008)) e a teoria de regularidade $C^{1,\alpha}$ para equações elípticas singular/degeneradas desenvolvidas em Lieberman (1991).

Os resultados do Capítulo 3 deste trabalho podem ser resumidos da seguinte forma: Teorema 2.7 providencia uma estimativa Lipschitz pontual para qualquer minimizante de qualquer funcional do tipo E_G com $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ satisfazendo $G(1) \geq \varepsilon_0$ e (8) em qualquer ponto da fronteira livre cuja densidade da fase negativa nestes pontos é menor que uma apropriada constante universal $c = c(n, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, \beta) > 0$. Como conseqüência deste fato obtemos que se a densidade da fase negativa mantém-se abaixo desta constante universal ao longo de uma vizinhança da fronteira livre $\Gamma \subset F(u)$, a estimativa pontual se propaga em uma vizinhança de Ω em torno de Γ e portanto, uma estimativa Lipschitz uniforme local é obtida. Este é o conteúdo do Corolário 2.1.

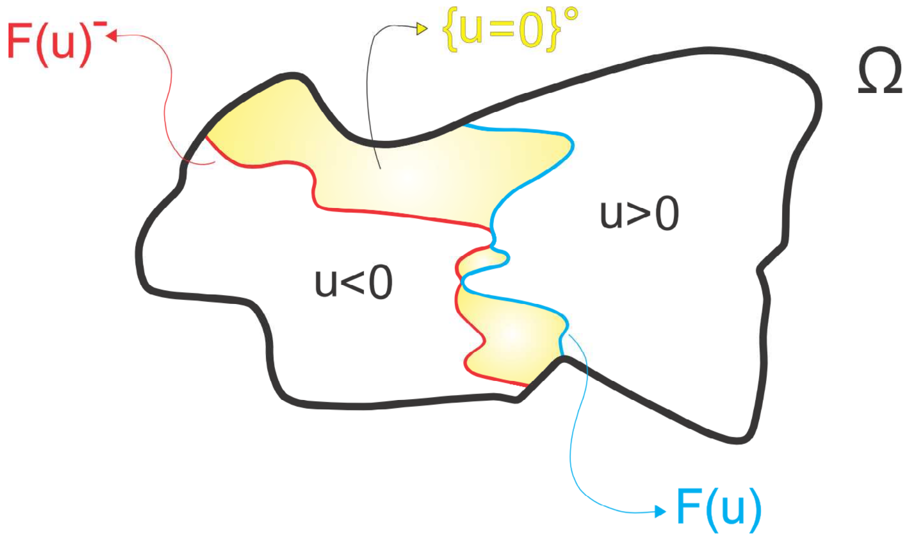
Claramente não podemos garantir a validade do Corolário 2.1 para todo e qualquer minimizante u de E_G (de fato, Teorema 2.7 e Corolário 2.1 nos dão critérios para a continuidade Lipschitz de mínimos). Portanto, desde que a regularidade ótima permanece incerta, olhamos, com o intuito de investigar, a região de Ω onde a regularidade Lipschitz pode falhar. Resaltamos neste ponto a generalidade assumida para as "funções de fase" f_1 e f_2 observando que não há nenhuma ordenação para elas. Assim, ao contrário do caso estudado por Alt-Caffarelli-Friedman (1984), a fronteira livre do conjunto de negatividade pode, a princípio, separar-se da fronteira livre do conjunto de positividade, i.e,

$$(F(u)^- \setminus F(u)) \cap \Omega \neq \varnothing.$$

Usando uma delicada versão escalonada do Teorema 2.7 (Proposição 3.4 e Observação 3.6), mostramos que a região onde a regularidade Lipschitz falha está contida no conjunto de contato entre as fronteiras livres dos conjuntos de positividade e negatividade. Além disso, em qualquer ponto dessa região, a fase negativa goza de uma estimativa de densidade universal por baixo. Em particular, se a regularidade ótima falha em um ponto, então este pertence ao conjunto de contato $F(u) \cap F(u)^-$ e a fase negativa é livre de cúspides. Este fato será provado na Proposição 2.2.

Os resultados que aqui desenvolvemos complementam aqueles obtidos em Alt,

Figura 5 – Gráfico trazendo a separação entre as Fronteiras livres.



Fonte: Elaborado por Lucas Santos.

Caffarelli e Friedman (1984), onde as estimativas de densidade para a fase não-negativa foram verificadas na presença de regularidade Lipschitz e propriedades de não-degenerescência de mínimos, as quais são ausentes aqui. Eles também reforçam a idéia de que as fronteiras livres de minimizantes para os funcionais do tipo fluxo em cavidade são um pouco mais amenas do que as fronteiras livres das soluções para o problema de obstáculo, uma vez que cúspides aqui não pode se desenvolver.

Vale também resaltar que nossa maneira de abordar o problema é substancialmente diferente da adotada em Kharakhanyan (2008). No trabalho de A. Karakhanyan minimizantes são subsoluções e neste caso, estimativas de energia de Cacciopoli valem, permitindo assim um controle da p-energia de minimizantes. Em nosso caso, diante dos diferentes comportamentos de G próximo do zero e do infinito, nenhuma espécie de controle para a G-energia é alcançado. Além disso, por falta de ordenação das funções f_1 e f_2 não podemos garantir nada a respeito de minimizantes serem subsoluções ou supersoluções de $\mathcal{L}_g$ em Ω.

O Capítulo 3 deste trabalho está organizado como segue. A Seção 3.1 é dedicada ao estudo da existência e limitação de minimizantes globais. Na Seção 3.2 estudamos a regularidade $C^{0,\alpha}$ para a classe de todos os minimizantes de funcionais não-degenerados, ou seja, aqueles em que $G(1) \geq \varepsilon_0 > 0$. Seção 3.3 é dedicada a estimativa Log-Lipschitz para o caso em que o operador $\mathcal{L}_g$ é degenerado. Na Seção 3.4 motivamos a necessidade das classes não-degeneradas de N-funções G argumentando sobre as estimativas em (7), também provamos um resultado de compacidade e resultados de invariância de escalonamentos. A Seção 3.5 tem por finalidade apresentar os mais diversos exemplos de N-funções em subclasses especiais não-degeneradas de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$. Nesta Seção ainda discutimos a falta de compacidade de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$ (veja Exemplo 3.2). Seção 3.6 é destinada a prova do Teorema 2.7 e de sua versão escalonada Proposição 3.4. Na Seção 3.7, apresentamos a prova da regularidade Lipschitz local sob a condição de pequena densidade da fase negativa (Corolário 2.1). Finalmente, na Seção 3.8, discutimos o contato entre as fronteiras livres dos conjuntos de positividade e negatividade e as estimativas de densidade nos pontos do conjunto de contato.

1.2 Teoremas do tipo Phragmém-Lindelöf para Equações quaselineares singular/degeneradas e Totalmente não Lineares em semi-espaços

Dedicamos esta Seção para falarmos sobre resultados de classificação de soluções em problemas elípticos do tipo Phragmém-Lindelöf. Falando de forma bem ampla e geral, a teoria de Phragmém-Lindelöf para Equações Diferenciais Parciais Elípticas refere-se ao estudo do comportamento de soluções para tais tipo de equações em domínios ilimitados. A validade do Princípio do Máximo em circunstâncias gerais é violada e portanto, uma compreensão delicada da solução no infinito torna-se muitas vezes inexoravelmente inevitável. Um simples exemplo disso acontece no semi-espaço quando consideramos, por exemplo, $H_n^+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. é um fato simples e bem conhecido que se v é uma função harmônica limitada que se anula na fronteira ∂H_n^+ então v deve ser identicamente nula. Caso removamos a condição de ser v uma função limitada, então $v(x) = x_n$ é sem dúvida um exemplo que viola o Princípio do Máximo. Na verdade, com esse sinal de restrição ($v \geq 0$), este é essencialmente o único tipo de exemplo possível. Isto é mostrado por um resultado clássico em funções harmônicas que diz o seguinte:

Teorema 1.2 *Seja $0 \leq u$ uma função harmônica em H_n^+ tal que $u \in C^0(\overline{H_n^+})$ e se anula na fronteira ∂H_n^+. Então,*

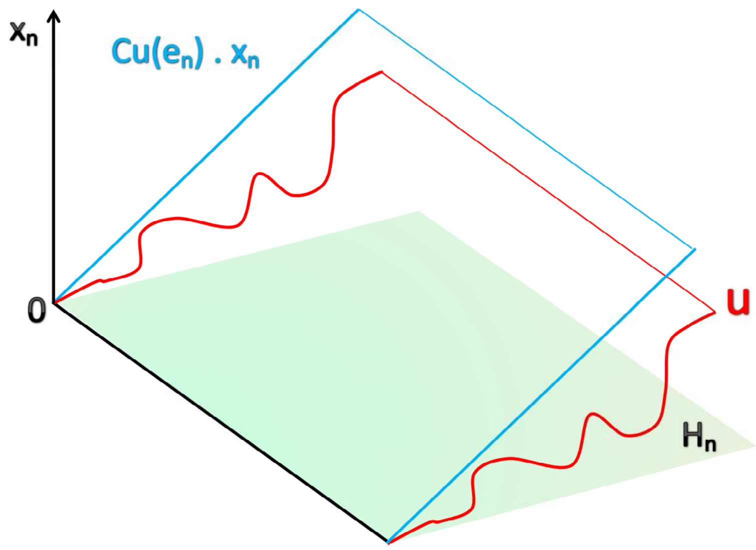
$$u(x) = u(e_n) \cdot x_n, \quad \forall\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in H_n^+.$$

Ressaltamos ainda que a condição sobre o sinal de soluções no Teorema acima não pode ser removida. De fato, basta considerar, por exemplo, o polinômio harmônico $u(x) = x_1 \cdot x_n$. Os primeiros resultados obtidos nessa direção foram, provavelmente, verificados por Gilbarg (1952), Hopf (1952) e Serrin (1954) no estudo de Teoremas do tipo Phragmén-Lidelöf no plano. Nesses artigos, os autores investigaram o problema para equações elípticas lineares da forma não-divergente. Uma excelente referência que trata de uma classe de equações singulares das quais está incluído o caso do operador Laplaciano é Huber (1953). Há também uma prova bem elegante para este tipo de resultado no Teorema 7.22 em Axler, Bourdon e Ramey (2001). Lá, os autores usam os resultados da caracterização do núcleo de Poisson e argumentos da transformada de Kelvin.

Classificação de soluções para equações elípticas é um tópico importante em muitas áreas da Matemática. Especialmente em Geometria, Análise Geométrica e Equações Diferenciais Parciais. Elas desempenham um papel crucial, por exemplo, na classificação de perfis globais em problemas geométricos. Entre eles, podemos citar os problemas de fronteira livre digamos, problemas do tipo obstáculo ou do tipo fluxo em cavidade. O Blow-up das soluções, de acordo com condições de regularidade (em geral ótima), convergem para soluções de equações elípticas globalmente definidas, ou às vezes, definidas em semi-espaços (quando a geometria da situação o permitir). Teoremas do tipo Liouville e Phragmém-Lindelöf são fundamentais para se classificar soluções globais e inferir um parecer sobre a regularidade da fronteira livre original (antes do blow-up). Existem muitos outros exemplos desse tipo de problema em Teoria Geométrica da Medida, Problema de Yamabe, Aplicações Harmônicas, etc.

Há pouco tempo atrás em Aikawa et al. (2007), o Teorema 1.2 foi estendido para o operador p-Laplaciano. A prova é bela e involve importantes ingredientes relacionados ao comportamento na fronteira de funções p-harmônicas tais como estimativas de Carleson, Desigualdade de Harnack até a fronteira, Regularidade Lipschitz até a fronteira, Princípio da Reflexão de Schwarz, entre outros. Na verdade, a teoria do comportamento na fronteira para funções $p-$harmônicas testemunhou recentemente um desenvolvimento extraordinário. A não-linearidade da equação e a geometria complicada da fronteira promovem, sem dúvida, dificuldades não triviais para estudar este assunto. Isto pode ser visto, por exemplo, nos trabalhos extremamente não-triviais de K. Nyström e J. Lewis (2011) (e suas referências), onde eles estudam o comportamento de funções p-harmônicas em domínios com baixa regularidade como Reifenberg flat, NTA, starlike e domínios Lipschitz.

Figura 6 – Comportamento alusivo de uma solução no semi-espaço.



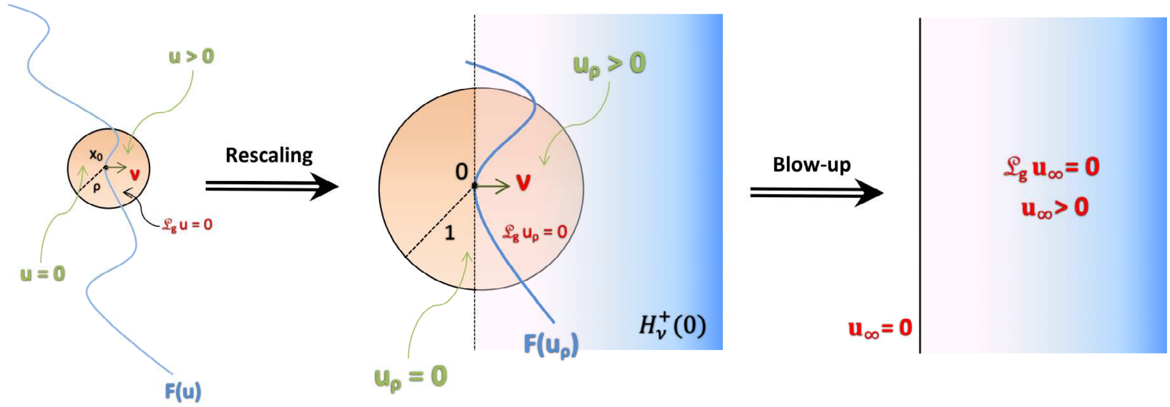
Fonte: Elaborado pelo autor.

A proposta do Capítulo 4 desta tese é estender o Teorema 1.2 para a classe $S_{\lambda,\Lambda}$ estabelecida em Caffarelli (1989b) e uma classe de equações quasilineares singular/degeneradas do tipo

$$\mathcal{L}_g u := \operatorname{div}\Big(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\cdot \nabla u\Big) = 0 \quad \text{in } H_n^+, \tag{9}$$

onde este operador satisfaz também as condições introduzidas em Lieberman (1991) (veja Seção anterior para ver precisamente tais condições e exemplos). Como observado anteriormente, em geral, g não goza de propriedades de homogeneidade como o p-Laplaciano, podendo ter comportamento diferentes em vizinhança do zero e para valores suficientemente grandes. Muitos problemas de fronteira livre são governados por tal operador (veja, por exemplo, Capítulo 3 ou Martinez e Wolanski (2008)). Tanto no Capítulo 3 como no paper Martinez e Wolanski (2008), alguns resultados da teoria Alt-Caffarelli foram estendidas para esse contexto. Na verdade, o nosso interesse no problema tratado neste trabalho surgiu a partir da análise de comportamento (os blow-ups de) tais soluções em torno de um ponto pertencente a fronteira livre reduzida (isto é, pontos da fronteira livre que possuem vetor normal no sentido da Teoria Geométrica da Medida). De fato, ao considerar um minimizante de uma fase u de um problema de fronteira livre e um ponto $x_0 \in \partial_{red}F(u)$, sabemos que blow-ups do tipo $u_r(x) := \dfrac{u(x_0+rx)}{r}$ convergem para uma função u_∞ que é solução de um operador elíptico em um semi-espaço (neste semi-espaço $u_\infty > 0$) e que se anula na fronteira desse semi-espaço.

Figura 7 – Motivação para o problema do tipo Phragmém-Lindelöf.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que o estudo do comportamento de soluções na fronteira para (9) em domínios gerais ainda não se desenvolveu. Na verdade, aproveitamos a suavidade da nossa fronteira (que é plana) para fazer a nossa análise e abster-se de entrar na teoria do potencial não-linear. Ou seja, a nossa idéia é olhar a equação (9) de uma forma totalmente não-linear. Construímos barreiras radialmente simétricas com alguma geometria específica usando operadores extremais de Pucci. Princípio da Comparação, em seguida, permite-nos provar o comportamento linear de soluções para (9), perto da fronteira. No que diz respeito a geometria, tais barreiras funcionam como os p-capacitores de potência no caso do operador $p-$Laplaciano e que permitem provar desigualdade de Harnack até a fronteira por comparar soluções com a distância até a fronteira.

Mostramos também o decaimento da constante da desigualdade de Harnack como uma potência negativa da distância até a fronteira via um esquema de iteração bastante direto. Este é um refinamento da desigualdade Harnack em Lieberman (1991). Desta forma, podemos provar estimativa de Carleson com a ajuda de um tipo de Lema da oscilação de De Giorgi. Provamos também um Princípio da Reflexão Schwarz para as equações (9).

Finalizamos este capítulo informando que a peça fundamental par a a validade do Teorema 1.2 no contexto totalmente não-linear, a saber, quando $u \in S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$, é um Teorema de controle universal entre hiperplanos para u. Os resultados precisos serão enunciados no capítulo Preliminares.

2 PRELIMINARES

Em Preliminares temos por meta estabelecer os resultados básicos e fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho de Tese assim como apresentar os resultados que obtivemos com este aparato matemático. Iniciamos com algumas definições e conceitos sobre N-funções, Espaços de Orlicz e Espaços de Orlicz-Sobolev. Nesse ínterim, verificamos algumas estimativas especiais sob as condições (CP) e (CQ), uma estimativa para a norma em Espaços de Orlicz que consideramos apropriados e provamos um refinamento de um Teorema do tipo Morrey que determina um critério para funções serem Hölder contínuas. A segunda seção deste Capítulo destina-se a um lema puramente de análise envolvendo o conceito de funções BMO e estimativas do tipo Log-Lipschitz. Seção 3 trata essencialmente dos resultados provados por G. Lieberman, S. Martinez e N. Wolanski na Teoria de regularidade para operadores $\mathcal{L}_g$. Quarta e quinta seções tratam de uma série de definições técnicas assim como os resultados centrais dos Capítulos 3 e 4.

2.1 Kit de Sobrevivência em Espaços de Orlicz

2.1.1 *N-Funções Apropriadas*

Começamos esta seção por relembrar a definição de uma N-função. N-funções são as ferramentas básicas para definirmos os Espaços de Orlicz. Uma N-função $G : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função do tipo

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds$$

onde $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função não-negativa, não-decrescente satisfazendo as seguintes condições:

a) $g(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$;

b) g é contínua Ã direita, isto é, se $t \geq 0$ então $\lim\limits_{s\to t+} g(s) = g(t)$.

Tais condições implicam que G é uma função convexa, contínua e estritamente positiva com $G(0) = 0$. De agora em diante, nos dedicaremos a provar algumas estimativas para N-funções que satisfazem as condições (CP) e (CQ). Estas serão as N-funções que chamamos "apropriadas".

Lema 2.1 *Seja G uma N-função satisfazendo as condições (CP) e (CQ). Então:*

$(g-1)$ $\min\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t) \leq g(st) \leq \max\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t), \ \forall\ s,t > 0$;

$(g-2)$ $\dfrac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t) \leq tg(t), \ \forall\ t \geq 0$;

$(G-1)$ *G é convexa e C^2*;

$(G-2)$ $\quad \dfrac{1}{1+g_0}\min\{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\}G(t) \leq G(st) \leq (1+g_0)\max\{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\}G(t), \ \forall \ s,t > 0;$

$(G-3)$ $\quad G(a+b) \leq 2^{g_0}(1+g_0)(G(a)+G(b)), \forall \ a,b > 0.$

Prova:

(g - 1)] Para $s \geq 1$ é suficiente mostrar que

$$s^{\delta}g(t) \leq g(st) \leq s^{g_0}g(t), \quad t > 0.$$

Para tanto considere a função $h(t) = t^{-g_0}g(t)$. Por (CQ) temos

$$h'(t) = -g_0 t^{-(g_0+1)}g(t) + t^{-g_0}g'(t) \leq 0,$$

isto é, h é decrescente. Portanto, $h(st) \leq h(t)$, ou seja, $g(st) \leq s^{g_0}g(t)$. Similarmente, se definirmos $h_0(t) = t^{-\delta}g(t)$ a condição (CQ) nos garante que h_0 é crescente, donde $h_0(st) \geq h_0(t)$ implicando em $s^{\delta}g(t) \leq g(st)$. A prova para $0 < s < 1$ é análoga e verificamos que

$$s^{g_0}g(t) \leq g(st) \leq s^{\delta}g(t), \quad t > 0.$$

(g - 2)] Com efeito, $\forall \ t \geq 0$,

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \ \leq \ \int_0^t g(t)ds \ \leq \ tg(t)$$

e por (CQ)

$$G(t) = \frac{1}{g_0}\int_0^t g_0 g(s)ds \ \geq \ \frac{1}{g_0}\int_0^t sg'(s)ds \ = \frac{tg(t)-G(t)}{g_0}.$$

Logo,

$$\frac{tg(t)}{1+g_0} \ \leq \ G(t).$$

(G - 1)] Segue da definição e de (CP).

(G - 2)] Segue por combinação de (g - 1) e (g - 2).

(G - 3)] De fato, por convexidade e (G - 1) temos

$$G(a+b) \leq \frac{1}{2}(G(2a)+G(2b)) \leq 2^{g_0}(g_0+1)(G(a)+G(b)).$$

■

Concluímos esta Subseção com a seguinte observação: Seja G uma N-função satisfazendo (CP) e (CQ) para as constantes δ e g_0. Uma N-função $\widetilde{G}$ é dita ser a N-função complementar de G se

$$\widetilde{G}(t) = \int_0^t \widetilde{g}(s)ds,$$

onde $\widetilde{g}(s) = \sup_{g(t)\leq s} t$. Como g é diferenciável e crescente, segue que $\widetilde{g} = g^{-1}$. Além disso, de acordo com Lema 2.2 em Martinez e Wolanski (2008), $\widetilde{G}$ satisfaz as condições (CP) e (CQ) para constantes g_0^{-1} e δ^{-1}. Em particular, a seguinte estimativa é satisfeita:

$$(G-4) \quad \widetilde{G}(g(t)) \leq g_0 G(t), \quad \forall\ t > 0.$$

De fato, temos

$$\widetilde{G}(g(t)) + G(t) = tg(t).$$

Agora, aplicando $(g-2)$ obtemos

$$\widetilde{G}(g(t)) = tg(t) - G(t) \leq g_0 G(t).$$

2.1.2 *Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev Apropriados*

Antes de definirmos o que vem a ser um Espaço de Orlicz Apropriado segundo nossos interesses, um conceito preliminar se faz necessário.

Definição 2.1 (Classe de Orlicz) *Seja G uma N-função. Definimos a classe de Orlicz de G como sendo o conjunto*

$$C_G(\Omega) := \Big\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{mensurável}\ : \int_\Omega G(|u|)dx < \infty \Big\}.$$

Observe que se $G(t) = |t|^p, 1 < p < \infty$, então $C_G(\Omega) = L^p(\Omega)$. Todavia, para uma N-função G qualquer, o máximo que podemos garatir é que $C_G(\Omega)$ é um conjunto convexo de funções mensuráveis. é conhecido que para que $C_G(\Omega)$ seja um espaço vetorial é necessário e suficiente que existam constantes $k > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$G(2t) \leq kG(t), \quad \forall\ t \geq t_0. \tag{10}$$

Essa condição é chamada de Δ-regular na teoria de N-funções (para mais detalhes veja Adams e Fournier (2003)). Note que para o caso $G(t) = |t|^p$ temos $k = 2^p$ e $t_0 = 0$. Um outro fato que observamos é que se G satisfaz as condições (CP) e (CQ), então G é Δ-regular. De fato, por (G - 2)

$$G(2t) \leq 2^{1+g_0} G(t), \quad \forall\ t \geq 1.$$

Em particular, se definirmos em $C_G(\Omega)$ a norma

$$\|u\|_G = \|u\|_{C_G(\Omega)} := \inf\left\{M > 0 : \int_\Omega G\left(\frac{|u|}{M}\right) dx \leq 1\right\},$$

então $(C_G(\Omega), \|\cdot\|_{C_G(\Omega)}) = L^G(\Omega)$ será um espaço de Banach reflexivo (veja, por exemplo, Adams e Fournier (2003) e Teorema 2.1 de Martinez e Wolanski (2008)). Logo, os espaços $L^G(\Omega)$ com G satisfazendo (CP) e (CQ) são aqueles que chamamos Espaços de Orlicz Apropriados. Em geral, dado A uma N-função qualquer, um espaço de Orlicz $L^A(\Omega)$ é o menor espaço vetorial determinado por $\|\cdot\|_{L^A(\Omega)}$ que contém $C_A(\Omega)$.

Um Espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,G}(\Omega)$ consiste de todas as funções $u \in L^G(\Omega)$ tais que suas derivadas distribucionais ∇u existem e pertencem também a $L^G(\Omega)$. Definimos

$$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} := \max\left\{\|u\|_{L^G(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^G(\Omega)}\right\},$$

como sendo a norma neste espaço. Teorema 2.1 de Martinez e Wolanski (2008) garante que $W^{1,G}(\Omega)$ também é um espaço reflexivo.

Traçamos agora alguns comentários sobre resultados de caracterização de funções em Espaços de Orlicz-Sobolev $W^{1,G}$ com respeito a funções absolutamente contínuas. Primeiramente observamos que as propriedades da Aproximação da Identidade com bons núcleos (simétricos, suaves, positivos e com valor de integral igual a 1) comportam-se da mesma maneira que na teoria regular para os espaços L^p e $W^{1,p}$ (veja por exemplo, Teorema 8.21 de Adams e Fournier (2003)). Este fato nos permite provar a caracterização análoga de funções em $W^{1,p}$ acerca da absoluta continuidade sobre q.t.p. linhas paralelas aos eixos coordenados. As provas são essencialmente idênticas Ã s que figuram nos Teoremas 1 e 2 em Evans e Gariepery (1992), páginas 163-165. Por esta razão, apenas recordamos o conceito de representante preciso e enunciamos os resultados omitindo suas provas. Os detalhes são deixados a cargo do leitor.

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ o *representante preciso* de f é definido por

$$f^*(x) = \begin{cases} \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f(y)dy, & \text{se este limite existe} \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, enunciamos os resutados de caracterização.

Teorema 2.1 *Seja G uma N-função e $u \in L^G_{loc}(\mathbb{R})$. Então $u \in W^{1,G}_{loc}(\mathbb{R})$ se, e somente se seu representante preciso u^* é absolutamente contínuo em cada intervalo de $\mathbb{R}$ e $u^{*\prime} \in L^G_{loc}(\mathbb{R})$.*

Teorema 2.2 *Seja G uma N-função e $u \in L^G_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então, $u \in W^{1,G}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se u tem um representante u^* que é absolutamente contínuo sobre quase todos os segmentos* *de reta em $\mathbb{R}^n$ paralelos aos eixos coordenados e cujas derivadas parciais (no sentido clássico) pertencem a $L^G_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Para o que segue toda N-função G satisfaz as condições (CP) e (CQ).

Lema 2.2 *$L^G(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$ e $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1+\delta}(\Omega)$ continuamente.*

Prova:

Veja Teorema 2.2 em Martinez e Wolanski (2008).

■

Lema 2.3 *Existe uma constante $C = C(g_0, \delta) > 0$ tal que,*

$$\|u\|_G \leq C \max\Big\{\Big(\int_\Omega G(|u|)\,dx\Big)^{1/(\delta+1)}, \Big(\int_\Omega G(|u|)\,dx\Big)^{1/(g_0+1)}\Big\}.$$

Prova:

Se $\int_\Omega G(|u|)\,dx = 0$ então $u = 0$ q.t.p e o resultado segue. Caso tenhamos $\int_\Omega G(|u|)\,dx \neq 0$, definimos

$$M = \max\Big\{\Big(2(1+g_0)\int_\Omega G(|u|)\,dx\Big)^{1/(\delta+1)}, \Big(2(1+g_0)\int_\Omega G(|u|)\,dx\Big)^{1/(g_0+1)}\Big\}.$$

Por (G - 2) temos,

$$\int_\Omega G\Big(\frac{|u|}{M}\Big)\,dx \leq (1+g_0)\max\Big\{\frac{1}{M^{\delta+1}}, \frac{1}{M^{g_0+1}}\Big\}\int_\Omega G(|u|)\,dx \leq 1.$$

Logo, $\|u\|_G \leq M$ e o resultado segue.

■

Lema 2.4 (Desigualdade do tipo Poincaré) *Seja $u \in W^{1,G}(\Omega)$ tal que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ no sentido do traço. Então*

$$\int_\Omega G\left(\frac{|u|}{d}\right)dx \leq \int_\Omega G(|\nabla u|)dx,$$

onde $d = diam(\Omega)$.

Prova:

Veja Lema 2.2 de Lieberman (1991).

■

O resultado que provaremos a seguir é uma versão do Lema de Morrey no contexto de Espaços de Orlicz-Sobolev. Parte da prova que apresentaremos aparece em Lieberman (1991) inserida na prova do Teorema 1.7. Todavia, precisamos de uma versão mais fina do que a que consta neste paper. Diante do exposto na Introdução, precisamos que fique explícita a relação entre a semi-norma Hölder $[u]_{\alpha,\Omega}$ e o valor de $G(1)$, uma vez que esta estimativa será fundamental para os argumentos de compacidade utilizados a posteriori.

Lema 2.5 (Lema do tipo Morrey) *Seja* $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ *e* $0 < \alpha < 1$. *Suponha* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *tal que*

$$\fint_{B_r(x_0)} G(|\nabla u|)dx \leq Lr^{\alpha-1} \textit{ para todo } x_0 \in \Omega' \text{ com } 0 < r \leq R_0 \leq \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Então, existem constantes $C_1 = C_1(\alpha, n, g_0) > 0$ *e* $C_2 = C_2(\alpha, n, g_0, R_0) > 0$ *tais que*

$$|u(x) - u(y)| \leq \left(C_1 \cdot \max\left\{\frac{L}{G(1)}, 1\right\}\right) \cdot |x-y|^\alpha, \quad \text{para } x, y \in \Omega' \text{ com } |x-y| \leq \frac{R_0}{2},$$

$$||u||_{L^\infty(\Omega')} \leq C_2\Big(L + ||u||_{L^1(\Omega)}\Big),$$

$$[u]_{\alpha,\Omega'} \leq \max\left(C_1 \cdot \max\left\{\frac{L}{G(1)}, 1\right\}, \ \frac{2^{\alpha+1} \cdot ||u||_{L^\infty(\Omega')}}{R_0^\alpha}\right). \tag{11}$$

Prova:

Pela desigualdade de Poincaré, existe uma constante dimensional, a qual podemos supor $C \geq 1$, tal que

$$r^{-1} \fint_{B_r(x_0)} |u(x) - (u)_{x_0,r}|dx \leq C \cdot \fint_{B_r(x_0)} |\nabla u(x)|dx \quad \text{para } x_0 \in \Omega', \ r \leq R_0. \tag{12}$$

Claramente podemos assumir $R_0 \leq 1$. Para $0 < r \leq R_0$ considere a função

$$\rho(r) = r^{-1} \fint_{B_r(x_0)} |u(x) - (u)_{x_0,r}|dx.$$

Desde que G é não-decrescente, convexa e satisfaz (G - 2), (12) garante que

$$G(\rho(r)) \leq (1+g_0) \cdot C^{1+g_0} \cdot \fint_{B_r(x_0)} G(|\nabla u(x)|)dx \leq (1+g_0) \cdot C^{1+g_0} \cdot L \cdot r^{\alpha-1}.$$

Se tivermos $\rho(r) \geq 1$ então

$$G(\rho(r)) \geq G(1) \cdot \min\left\{\rho(r)^{1+\delta}, \rho(r)^{1+g_0}\right\} \geq G(1) \cdot \rho(r).$$

Assim, combinando as desiguladades acima, obtemos

$$\rho(r) \leq \frac{(1+g_0) \cdot C^{1+g_0} \cdot L}{G(1)} \cdot r^{\alpha-1}$$

que nos levam a

$$\fint_{B_r(x_0)} |u(x) - (u)_{x_0,r}|dx \leq \frac{\widetilde{C}(g_0)}{G(1)} \cdot L \cdot r^\alpha \quad \text{para } 0 < r \leq R_0. \tag{13}$$

Agora, caso $\rho(r) \leq 1$ e desde que $0 < \alpha \leq 1$ temos

$$\fint_{B_r(x_0)} |u(x) - (u)_{x_0,r}|dx \leq r \leq r^\alpha \quad \text{para } 0 < r \leq R_0. \tag{14}$$

Finalmente, combinando as estimativas (13) e (14) obtemos

$$\fint_{B_r(x_0)} |u(x) - (u)_{x_0,r}|dx \leq \max\left\{\frac{\widetilde{C}(g_0)}{G(1)} \cdot L, 1\right\} \cdot r^\alpha \quad \text{para } x_0 \in \Omega' \text{ com } 0 < r \leq R_0.$$

As estimativas desejadas seguem pelo Teorema de Campanato como no Teorema 1.1 em Han e Lin (2011).

■

2.2 Um Lema para funções com o gradiente em BMO

Aqui apresentamos um lema que será fundamental para provar estimativa Log-Lipschitz para minimizantes de operadores E_G tais que $\delta \geq 1$. Antes de apresentarmos tal lema precisamos inserir um novo conceito a esta tese, a saber, o conceito de funções de oscilação da média limitada, chamadas funções BMO.

Seja $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função integrável. Dizemos que v pertence ao espaço $BMO(\Omega)$ (bounded mean oscillation) se

$$\sup_{B \subset \Omega} \fint_B |v - v_B|dx < \infty, \tag{15}$$

onde o *sup* acima é tomado sobre todas as bolas n-dimensionais B contidas em Ω.

Observa-se que $L^\infty(\Omega) \subsetneq BMO(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$, $\forall\ 1 < p < \infty$, cujo exemplo clássico para mostrar a inclusão estrita do espaço $L^\infty(\Omega)$ é dado por $v(x) = log|x|$ e $\Omega = B_1(0)$. Podemos assim enunciar o lema desejado. Uma prova deste lema é dada em Azzam e Bedrossian (2014), todavia apresentamos aqui uma prova mais detalhada.

Lema 2.6 *Seja $u \in L^1(\Omega)$ e assuma que $\nabla u \in BMO(\Omega)$. Então, $u \in L^\infty(\Omega)$ e satisfaz*

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)\|\nabla u\|_{BM)(\Omega)} \cdot |x - y||log|x - y||, \tag{16}$$

para uma constante $C(n) > 0$.

Prova: Escolhamos $x, y \in \Omega$ tais que $\overline{B}_r(x) \cup \overline{B}_r(y) \subset \Omega$ e $r = |x - y|$. Se $A = B_r(x) \cap B_r(y)$ temos, pela desigualdade triangular, que

$$|u(x) - u(y)| \leq \fint_A |u(x) - u(z)|dx + \fint_A |u(y) - u(z)|dx. \tag{17}$$

Além disso, sabemos que

$$\fint_A |u(x)-u(z)|dx \leq \frac{|B_r(x)|}{|A|} \fint_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dx \leq C(n) \fint_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dx. \quad (18)$$

Agora, por desigualdade encontrada em Evans (1998), pag. 267, temos

$$\fint_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dx \leq C \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz. \quad (19)$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $x=0$. Note que

$$\int_{B_r} \frac{|\nabla u(z)|}{|z|^{n-1}} dz \leq \int_{B_r} \frac{|\nabla u(z) - (\nabla u)_{B_1}|}{|z|^{n-1}} dz + n \cdot w_n (\nabla u)_{B_1} r. \quad (20)$$

Usemos agora a seguinte notação: $B_{2^{-k}}(0) = B_k$. Neste caso, como $\nabla u \in BMO(\Omega)$ temos

$$\int_{B_k} |\nabla u(z) - (\nabla u)_{B_k}|dz \leq 2^{-nk} w_n \|\nabla u\|_{BMO(\Omega)}. \quad (21)$$

Mais uma vez usando o fato de que $\nabla u \in BMO(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} |(\nabla u)_{B_k} - (\nabla u)_{B_{k+1}}| &\leq \fint_{B_{k+1}} |\nabla u(x) - (\nabla u)_{B_k}|dx + \fint_{B_{k+1}} |\nabla u(x) - (\nabla u)_{B_{k+1}}|dx \\ &\leq 2^n \fint_{B_k} |\nabla u(x) - (\nabla u)_{B_k}|dx + \fint_{B_{k+1}} |\nabla u(x) - (\nabla u)_{B_{k+1}}|dx \\ &\leq (2^n+1)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)}, \end{aligned}$$

e utilizando uma desigualdade telescópica chegamos a

$$|(\nabla u)_{B_k} - (\nabla u)_{B_1}| \leq (2^n+1)k\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)}. \quad (22)$$

Agora, combinando as estimativas (21) e (22) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \frac{|\nabla u(z) - (\nabla u)_{B_1}|}{|z|^{n-1}} dz &\leq \sum_{r \geq 2^{-k}}^{\infty} \int_{2^{-k} \leq |z| \leq 2^{-k+1}} \frac{|\nabla u(z) - (\nabla u)_{B_1}|}{2^{-k(n-1)}} dz \\ &\leq \sum_{k \geq log_2 \frac{1}{r}}^{\infty} \int_{|z| \leq 2^{-k+1}} \frac{|\nabla u(z) - (\nabla u)_{B_1}|}{2^{k(n-1)}} dz, \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}\int_{B_r} \frac{|\nabla u(z) - (\nabla u)_{B_1}|}{|z|^{n-1}} dz &\leq 2^n(2^n+1)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)} \sum_{k \geq log_2 \frac{1}{r}}^{\infty} \frac{k2^{-kn}}{2^{k(n-1)}} \\ &\leq 2^n(2^n+1)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)} \sum_{k \geq log_2 \frac{1}{r}}^{\infty} k2^{-k}.\end{aligned}$$

Computação elementar também nos diz que para todo $0 < \rho < 1$ e $0 < r < 1/2$,

$$\sum_{k \geq log_2 r}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{d}{d\rho} \sum_{k \geq log_2 \frac{1}{r}}^{\infty} \rho^k = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^{log_2 \frac{1}{r}}}{1-\rho}\right) = \frac{1}{\rho(1-\rho)}\rho^{log_2 \frac{1}{r}} log_2 \frac{1}{r} + \frac{1}{(1-\rho)^2}\rho^{log_2 \frac{1}{r}}.$$

Assim, para $\rho = 1/2$ e utilizando as duas últimas estimativas combinadas a (20) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_r} \frac{|\nabla u(z)|}{|z|^{n-1}} dz &\leq 2^{n+2}(2^n+1)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)}(r|log_2 r| + r) + n \cdot w_n (\nabla u)_{B_1} r \\ &\leq C(n)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)} r|log_2 r|.\end{aligned}$$

Portanto, combinando a última estimativa com (17), (18) e (19) chegamos a

$$|u(x) - u(y)| \leq C_0(n)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)}|x-y||log_2|x-y||.$$

O fato de u ser Log-Lipschitz contínua em todo Ω é conseqüência de um argumento padrão de cobertura.

Para provarmos a estimativa L^∞ observamos que

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq ⨍_{Br(x)} |u(x)-u(y)|dy + ⨍_{Br(x)} |u(y)|dy \\ &\leq C \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz + C(\Omega)\|u\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C_0(n)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)} r|log_2 r| + C(\Omega)\|u\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C_0(n)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega)} \max_{0<s<\text{diam}(\Omega)} s|log_2 s| + C(\Omega)\|u\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Isto conclui a prova do Lema.

∎

2.3 Ferramentas da Teoria de Regularidade para $\mathcal{L}_g u = 0$

A menos de um ou dois resultados encontrados no paper em Martinez eWolanski (2008), os resultados encontrados nesta Seção podem ser encontrados em Lieberman (1991). Neste artigo Lieberman estudou desigualdades de Harnack, regularidade $C^{0,\alpha}$, $C^{1,\alpha}$ e alguns outros tópicos interessantes. Enunciaremos aqui todos aqueles que serão cruciais neste trabalho e que usaremos no decorrer do texto. Iniciamos com uma definição básica.

Definição 2.2 *Dizemos que uma função $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca para a equação $\mathcal{L}_g v = 0$ em Ω se para toda função $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos*

$$\int_\Omega g(|\nabla v|)\frac{\nabla v}{|\nabla v|} \cdot \nabla \xi \ dx = 0.$$

Dizemos ainda que $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ é uma subsolução fraca ou uma $\mathcal{L}_g$-subsolução se para toda função $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos

$$\int_\Omega g(|\nabla v|)\frac{\nabla v}{|\nabla v|} \cdot \nabla \xi \ dx \leq 0.$$

Finalmente, dizemos ainda que $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ é uma supersolução fraca ou uma $\mathcal{L}_g$-supersolução se para toda função $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos

$$\int_\Omega g(|\nabla v|)\frac{\nabla v}{|\nabla v|} \cdot \nabla \xi \ dx \geq 0.$$

Estimativa L^∞ Interior para $\mathcal{L}_g$-subsoluções

Teorema 2.3 *Seja $u : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma subsolução limitada de*

$$\mathcal{L}_g w = 0 \quad in \ \ B_R(0).$$

Então para quaisquer $\kappa > 0$ e $0 < \sigma < 1$, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de n, δ, g_0 e κ tal que

$$\sup_{B_{\sigma R}(0)} u^+ \leq \frac{C}{(1-\sigma)^{\frac{n(g_0+1)}{\kappa}}} \left(⨍_{B_R(0)} (u^+)^\kappa dx \right)^{1/\kappa}. \tag{23}$$

Prova:

Veja Teorema 1.2 em Lieberman (1991).

■

Princípio da Comparação

Proposição 2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u, v \in C^0(\overline{\Omega})$ respectivamente uma $\mathcal{L}_g$-subsolução e uma $\mathcal{L}_g$-supersolução em Ω tal que $u \leq v$ em $\partial\Omega$. Então, $u \leq v$ em Ω.*

Prova:
Veja Lema 2.8 em Martinez e Wolanski (2008).

■

Desigualdades de Harnack

Teorema 2.4 (Weak Harnack) *Suponha $u : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma supersolução não negativa e limitada de*

$$\mathcal{L}_g w = 0 \quad in \;\; B_R(0).$$

Então, existem constantes positivas ρ e C dependendo somente de n, δ, g_0 tais que

$$\left(⨍_{B_{2R/3}(0)} u^\rho dx \right)^{1/\rho} \leq C \cdot \inf_{B_{R/2}(0)} u. \tag{24}$$

Prova:
A prova deste resultado pode ser encontrada na Seção 4 em Lieberman (1991).

■

Teorema 2.5 (Desiguldade de Harnack) *Suponha $u : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução não negativa e limitada de*

$$\mathcal{L}_g w = 0 \quad in \;\; B_R(0).$$

Então, existe constante positiva C dependendo somente de n, δ, g_0 tal que

$$\sup_{B_{R/2}(0)} u \leq C \cdot \inf_{B_{R/2}(0)} u. \tag{25}$$

Prova:
Veja Colorário 1.4 em Lieberman (1991).

■

Estimativa Integral

Lema 2.7 *Seja $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ e v uma solução de $\mathcal{L}_g v = 0$ em $B_R(0)$, onde $g = G'$. Então existem constantes $C > 0$ e $0 < \sigma < 1$ dependendo apenas de n, δ e g_0 tais que, para $o < r \leq R$,*

$$\int_{B_r} G(|\nabla v - (\nabla v)_{B_r}|)dx \leq C \left(\frac{r}{R} \right)^\sigma \int_{B_R} G(|\nabla v - (\nabla v)_{B_R}|)dx.$$

Prova:
Veja Lema 5.1 em Lieberman (1991).

■

Estimativa $C^{1,\alpha}$ e Estimativa Local do Gradiente

O Teorema que enunciaremos abaixo compila alguns resultados sobre a teoria de regularidade de soluções (fracas) para equações elípticas singular/degeneradas do tipo

$\mathcal{L}_g u = 0$. As provas dos resultados citados poderão ser encontradas no Teorema 1.7 e Lema 5.1 em Lieberman (1991) e no Lema 2.7 em Martinez e Wolanski (2008). Aqui apresentaremos uma versão mais curta destes resultados apenas para que atendam nossos propósitos. Veja ainda as **Observações 2.1 e 2.2**.

Teorema 2.6 *Seja* $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ *e* v *uma solução fraca para* $\mathcal{L}_g v = 0$ *em* Ω*, onde* G *é a primitiva de* g*. Então* v *é* $C^{1,\alpha}(\Omega)$ *para alguma constante positiva* $\alpha(n, g_0, \delta) < 1$*. Ademais, para qualquer* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$*, existe uma constante* $C_0 > 0$*, dependendo possivelmente de* $n, \delta, g_0, \mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ *e* $\sup_{\Omega_0} |v| > 0$ *tal que*

$$\|v\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_0)} \leq C_0. \tag{26}$$

Também, existe uma constante $C_1 = C_1(n, \delta, g_0) > 0$ *tal que para toda bola* $B_r \subset \Omega$*,*

$$\sup_{B_{r/2}} |\nabla v| \leq \frac{C_1}{r} \sup_{B_r} |v|. \tag{27}$$

Além disso, para todo $\overline{\beta} \in (0, n)$*, existe* $C_2 = C_2(n, \overline{\beta}, \delta, g_0, \sup_{B_r} |v|) > 0$ *tal que,*

$$\int_{B_{r/2}} G(|\nabla v|)dx \leq C_2 r^{\overline{\beta}}. \tag{28}$$

Observação 2.1 *Apesar do fato de termos o Teorema 1.7 em Liebarman (1991) enunciado com a constante* C_0 *dependendo de* $g(1)$*, observamos todavia que para equações homogêneas esta dependência pode ser suprimida. Com efeito, suponha* $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ *e* $\mathcal{L}_g u = 0$ *em* Ω*. Considere então* $\alpha > 0$ *qualquer. Observe que* $G_\alpha(t) := \alpha G(t) \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$*. Assim, para* $\alpha g(t) = G'_\alpha(t) = g_\alpha(t)$*, concluímos que* $\mathcal{L}_{g_\alpha} u = 0$ *em* Ω*. Em particular, tomando* $\alpha_0 = g(1)^{-1} > 0$*, temos* $g_{\alpha_0}(1) = 1$*, mostrando assim que não existe nenhuma dependência de* $g(1)$ *na constante* C_0 *do Theorem 1.7 em Lieberman (1991) caso a solução seja homogênea.*

Observação 2.2 *Se* C_2 *é a constante da estimativa (28) do Teorema anterior então*

$$C_2(n, \overline{\beta}, \delta, g_0, \sup_{B_r} |v|) = C_2(n, \overline{\beta}, \delta, g_0) \cdot \sup_{B_r} |v|$$

Com efeito, primeiro observamos que se v *resolve* $\mathcal{L}_g v = 0$ *em* B_r*, então considerando* $w(x) := \alpha v(\beta x)$ *com* $\alpha, \beta > 0$ *temos* $\mathcal{L}_{\overline{g}} w = 0$ *em* $B_{r/\beta}$ *onde* $\overline{g}(t) = g(\frac{t}{\alpha \cdot \beta})$*. Sendo assim consideramos* $w(x) := v(x)/S$ *onde* $S := ||v||_{L^\infty(B_r)} > 0$*. Assim,* w *é solução de* $\mathcal{L}_{\overline{g}} w = 0$ *em* B_r *com* $\overline{g}(t) = g(S \cdot t)$ *e* $||w||_{L^\infty(B_r)} = 1$*. Neste caso, vemos que* $\overline{G}(t) = \frac{G(S \cdot t)}{S}$*. Portanto,*

$$r^{\overline{\beta}} \cdot C_2(n, \overline{\beta}, \delta, g_0) \geq \int_{B_{r/2}} \overline{G}(|\nabla w|)dx = \frac{1}{S} \cdot \int_{B_{r/2}} G(|\nabla v|)dx.$$

2.4 Tecnicalidades e Resultados Principais para o Problema de Fronteira Livre com duas fases

Foi informado no Capítulo introdutório que, diante de classses de minimizantes para funcionais do tipo E_G, um módulo de continuidade para o quociente

$$Q_g(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)}$$

é fundamental. Iniciamos, portanto, esta seção definindo formalmente um módulo de continuidade Hölder para Q_g.

Definição 2.3 *Seja $0 < \beta \leq 1$. Dizemos que uma N-função G pertence a classe de funções $\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0)$ se*

(i) $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ com $G' = g \in W^{2,1}_{loc}((0, +\infty))$ e

(ii) para qualquer $t > 0$ e $\kappa > 0$ o seguinte controle é satisfeito

$$\int_t^{t+\kappa} |Q_g'(s)|ds \leq \frac{C_0}{t^\beta} \cdot \kappa^\beta, \tag{MC - β}$$

para alguma constante $C_0 > 0$ dependendo apenas de $\delta, g_0,$ e β.

Dizemos ainda que $G \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$ se (i) é satisfeito e (ii) é substituído pela seguinte condição de Lipschitz

$$0 \leq \frac{t^2|g''(t)|}{g(t)} \leq \mathcal{C}(\delta, g_0), \quad \text{para q.t.p. } t > 0. \tag{C-Lip}$$

Ressaltamos que para todo $\beta \in (0, 1]$ as seguintes inclusões são satisfeitas

$$\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0) \subset \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0) \subset \mathcal{G}(\delta, g_0).$$

Tal fato será explorado na Seção 5 do Capítulo 3.

Definição 2.4 (Subclasses não-degeneradas) *Para $\varepsilon_0 > 0$ definimos*

$$\mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0) = \Big\{G \in \mathcal{G}(\delta, g_0) : G(1) \geq \varepsilon_0\Big\},$$

$$\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0) = \Big\{G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0) : G(1) \geq \varepsilon_0\Big\},$$

$$\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0, \varepsilon_0) = \Big\{G \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0) : G(1) \geq \varepsilon_0\Big\}.$$

Estabelecida esta notação, podemos definir a principal classe de minimizantes para os quais nossos resultados mais importantes serão provados.

Definição 2.5 *Dizemos que uma função u pertence a $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu)$ se u é um mini-*

mizante de um funcional do tipo

$$E_G(u,\Omega) = \int_\Omega [G(|\nabla u|) + \lambda(f_1,f_2)(u)]dx \tag{29}$$

onde

$$\lambda(f_1,f_2)(u)(x) := f_2(x)\cdot\chi_{\{u>0\}} + f_1(x)\cdot\chi_{\{u<0\}} + \min(f_1(x),f_2(x))\cdot\chi_{\{u=0\}} \tag{30}$$

e

$$G \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0), \quad 0 \le f_1, f_2 \le \mu. \tag{31}$$

Se a condição (31) for substituída por

$$G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0), \quad 0 \le f_1, f_2 \le \mu, \tag{32}$$

diremos então que $u \in \mathcal{S}^\beta(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu)$. *Definimos ainda,*

$$\mathcal{S}(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M) := \Big\{u \in \mathcal{S}(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu): \quad \sup_\Omega |u| \le M\Big\}$$

e

$$\mathcal{S}^\beta(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M) := \Big\{u \in \mathcal{S}^\beta(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu): \quad \sup_\Omega |u| \le M\Big\}.$$

Os conjuntos

$$\mathcal{S}(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu)^+, \quad \mathcal{S}^\beta(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu)^+, \quad \mathcal{S}(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M)^+ \text{ e } \mathcal{S}^\beta(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M)^+$$

indicam funções não-negativas em Ω *com respeito as classes. Adicionalmente, denotamos*

$$F^+(u) := \partial\{u>0\}\cap\Omega, \quad F^-(u) := \partial\{u<0\}\cap\Omega, \quad F^\pm(u) := F^+(u)\cup F^-(u)$$

e para $x_0 \in \Omega$

$$\mathcal{S}^\beta(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M)(x_0) := \Big\{u \in \mathcal{S}^\beta(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M):\ x_0 \in F^\pm(u)\Big\}. \tag{33}$$

Finalmente, para o caso de uma fase

$$\mathcal{S}(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M)^+(x_0) := \Big\{u \in \mathcal{S}(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M)^+:\ x_0 \in F^+(u)\Big\}. \tag{34}$$

Para futuras referências definimos a classe "degenerada"como sendo

$$\mathcal{S}^*(\Omega,\delta,g_0,\mu,M)^+ := \bigcup_{\varepsilon_0>0} \mathcal{S}(\Omega,\delta,g_0,\varepsilon_0,\mu,M)^+.$$

Por simplicidade de notação também usamos

$$S_r^{\beta}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0) := \mathcal{S}^{\beta}(B_r(x_0), \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0),$$

$$S_r^{+}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0) := \mathcal{S}(B_r(x_0), \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)^{+}(x_0).$$

A última ferramenta a ser definida nesta seção é a função densidade do conjunto de negatividade (positividade) ao longo das fronteiras livres. Para um minimizante u e $r > 0$ definimos

$$\Theta_u^-(x_0, r) := \frac{\big|\{u < 0\} \cap B_r(x_0)\big|}{\big|B_r(x_0)\big|} \quad \text{e} \quad \Theta_u^+(x_0, r) := \frac{\big|\{u > 0\} \cap B_r(x_0)\big|}{\big|B_r(x_0)\big|} \qquad \text{com} \ \ x_0 \in F^{\pm}(u).$$

Enunciamos agora os principais resultados do Capítulo 3.

Teorema 2.7 *Existe uma constante universal* $0 < c = c(n, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, \beta) << 1$ *tal que a estimativa*

$$|u(x)| \leq \frac{2 \cdot \max\big\{M, 1\big\}}{c} \cdot |x - x_0|, \quad \forall \ x \in B_1(x_0) \tag{35}$$

vale para toda $u \in S_1^{\beta}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$ *sempre que* $\Theta_u^-(x_0, r) \leq c$ para todo $0 < r < 1$. *Além disso, a mesma estimativa é verdadeira se substituirmos a condição* $\Theta_u^-(x_0, r) \leq c$ *por* $\Theta_u^+(x_0, r) \leq c$.

A última parte do Teorema segue do seguinte fato:

$$u \in S_1^{\beta}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0) \Longrightarrow -u \in S_1^{\beta}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0),$$

uma vez que se u minimiza

$$E_G(v, \Omega) = \int_{\Omega} [G(|\nabla v|) + \lambda(f_1, f_2)(v)]dx$$

então verificação simples mostra que $-u$ minimiza

$$E_G(w, \Omega) = \int_{\Omega} [G(|\nabla w|) + \lambda(f_2, f_1)(w)]dx.$$

Corolário 2.1 *Considere* $u \in S_1^{\beta}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(0)$ *e assuma que*

$$\Theta_u^-(z, r) \leq c \ (\ ou \ \Theta_u^+(z, r) \leq c) \quad \forall \ z \in F^{\pm}(u) \cap B_{3/4} \quad \text{e para todo} \ \ 0 < r < 1/4,$$

onde $c > 0$ *é a constante dada pelo Teorema anterior. Então* u *é Lipschitz contínua em* $B_{1/2}$ *e*

$$[u]_{C^{0,1}(B_{1/2})} \leq \frac{C_0 \cdot \max\{M, 1\}}{c},$$

para alguma constante universal $C_0 = C_0(n, \delta, g_0) > 0$.

De acordo com nossa proposta, relembramos que, se a regularidade Lipschitz falhar para algum minimizante, podemos estabelecer estimativas universais, por baixo, para $\Theta_u^-(z, r)$. Para o que segue, usamos a seguinte notação:

$$[u]_{C^{0,1}(B_\rho(x))}(x) = \sup_{y \in B_\rho(x), y \neq x} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|}, \quad [u]_{C^{0,1}(B_\rho(x))} = \sup_{z, w \in B_\rho(x), z \neq w} \frac{|u(z) - u(w)|}{|z - w|}.$$

Proposição 2.2 *Seja* $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ *e considere os conjuntos*

$$\mathcal{S}_p := \left\{ x \in \overline{B_{1/2}} : [u]_{C^{0,1}(B_r(x))}(x) = \infty \ \text{ para todo } 0 < r < 1/2 \right\}.$$

$$\mathcal{S}_l := \left\{ x \in \overline{B_{1/2}} : [u]_{C^{0,1}(B_r(x))} = \infty \ \text{ para todo } 0 < r < 1/2 \right\}.$$

Então, $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_l \subset F^+(u) \cap F^-(u)$ *e*

$$\limsup_{F^\pm(u) \times (0,1) \ni (x,r) \to (x_0, 0)} \Theta_u^-(x, r) \geq c \quad \text{para todo } x_0 \in \mathcal{S}_l.$$

$$\limsup_{r \to 0} \Theta_u^-(x_0, r) \geq c \quad \text{para todo } x_0 \in \mathcal{S}_p.$$

onde $c = c(n, \delta, g_0, \beta) > 0$. *Ademais, as estimativas acima são verdadeiras se substituirmos* Θ_u^- *por* Θ_u^+.

Para minimizantes de uma fase, o resultado em classes é melhor, uma vez que a regularidade Lipschitz se verifica para a classe $S_1(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)^+(0)$. Este é, essencialmente, o Teorema 4.2 em Martinez e Wolanski (2008) reescrito em termos da classe $S_1^+(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$ introduzida nesta seção. Apresentamos o resultado abaixo.

Teorema 2.8 *Existe uma constante universal* $C = C(n, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu)$ *tal que*

$$u \in S_1(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu)^+(0) \Longrightarrow ||u||_{C^{0,1}(B_{1/6})} \leq C.$$

A prova deste resultado depende apenas do fato da estimativa $C^{0,\alpha}$ uniforme ser verdadeira para classes não-degeneradas $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ (Teorema 5.1) e de uma pequena modificação na prova do Lema 4.3 de Martinez e Wolanski (2008) posta no contexto de classes.

2.5 Tecnicalidades e Resultados Principais para o problema do tipo Phragmém-Lindelöf

Esta seção delinea tecnicalidades e os principais Teoremas do Capítulo 4. Iniciamos com uma definição básica.

Definição 2.6 *Sejam as constantes* $0 < \delta \leq g_0$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto. Dizemos que uma função* $u \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ *pertence a* $\mathcal{G}(\delta, g_0, \Omega)$ *se existe uma N-função G satisfazendo as condições (CP) and (CQ) tal que*

$$\mathcal{L}_g u = 0, \quad in \;\; \Omega,$$

onde $g = G'$.

Em relação ao caso totalmente não-linear, lembramos que para constantes de elipticidade $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, os operadores extremais de Pucci são definidos como

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) := \lambda \sum_{\mu_i > 0} \mu_i + \Lambda \sum_{\mu_i < 0} \mu_i \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M) := \Lambda \sum_{\mu_i > 0} \mu_i + \lambda \sum_{\mu_i < 0} \mu_i,$$

para $M \in \mathcal{S}(n)$ e $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ seus autovalores. Relembramos ainda as classes anteriormente introduzidas por L. Caffarelli.

$$\overline{S}_{\lambda,\Lambda}(\Omega) := \Big\{ u \in C^0(\Omega) : \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 u) \leq 0 \;\; \text{no sentido da viscosidade } \Omega \Big\},$$

$$\underline{S}_{\lambda,\Lambda}(\Omega) := \Big\{ u \in C^0(\Omega) : \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2 u) \geq 0 \;\; \text{no sentido da viscosidade } \Omega \Big\}.$$

$$S_{\lambda,\Lambda}(\Omega) := \overline{S}_{\lambda,\Lambda}(\Omega) \cap \underline{S}_{\lambda,\Lambda}(\Omega).$$

Usaremos aqui o conceito de solução no sentido da viscosidade descrito em Caffareli e Cabré (1995). De forma precisa, dizemos que $u \in \overline{S}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ se u é uma função contínua em Ω e uma supersolução no sentido da viscosidade de $\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}$, isto é, se $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tem um máximo local em x_0 então

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 \varphi) \leq 0.$$

Similarmente $u \in \underline{S}_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$ se u é uma função contínua em Ω e uma subsolução no sentido da viscosidade de $\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}$, em outros termos, se $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tem um mínimo local em x_0 então

$$\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2 \varphi) \geq 0.$$

Finalmente, a partir da teoria de regularidade para os casos de equações totalmente não-lineares e quasilineares (apresentados respectivamente em Caffarelli e Cabré

(1995) e Liberman (1991), por exemplo), não há nenhuma perda em introduzir a seguinte definição. Assuma $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_r^+(x_0))$ (ou $u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_r^+(x_0))$. Dizemos que u se anula continuamente sobre a fronteira plana $B_r'(x_0)$ se $u \in C^0(\overline{B_{r-\varepsilon}^+(x_0)})$ para qualquer $0 < \varepsilon < r$ e $u \equiv 0$ sobre $B_r'(x_0)$. Também dizemos que $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ anula-se continuamente sobre a fronteira (plana) ∂H_n^+ se u anula-se continuamente sobre $B_r'(0)$ para todo $r > 0$.

Podemos assim enunciar os principais resultados do Capítulo 4.

Teorema 2.9 *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ *anulando-se continuamente sobre* ∂H_n^+. *Então,*

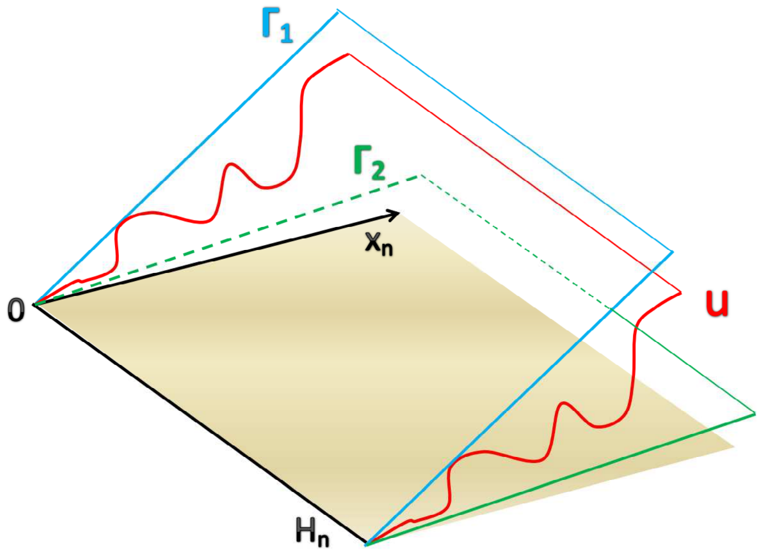
$$u(x) = u(e_n) \cdot x_n. \tag{36}$$

Teorema 2.10 *Seja* $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$ *anulando-se continuamente sobre* ∂H_n^+. *Então,*

$$u(x) = u(e_n) \cdot x_n. \tag{37}$$

A prova destes dois Teoremas passa por um resultado fundamental que pode ser essencialmente entendido por *comportamento de soluções ditado por hiperplanos universais*. Precisamente,

Figura 8 – Hiperplanos ditando o crescimento de soluções.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 2.11 (Controle universal entre hiperplanos) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ *anulando-se continuamente sobre* ∂H_n^+. *Então, existem constantes* $0 < c \leq C < \infty$, *dependendo apenas de* n, δ, g_0 *tais que*

$$cu(e_n) \cdot x_n \leq u(x) \leq C \cdot u(e_n) \cdot x_n. \tag{38}$$

Similarmente, se $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$ *anulando-se continuamente sobre* ∂H_n^+ *então a esti-*

mativa (38) se verifica para constantes c e C dependendo de n, λ, Λ.

Como mencionamos anteriormente, a suposição de que as funções são não-negativas não pode ser suprimida como podemos ver quando consideramos o polinômio harmônico $p_{in}(x) = x_i \cdot x_n$ com $i < n$. Na realidade a condição do sinal pode ser posta de lado, no caso quaselinear, se assumirmos de partida que as soluções são Lipschitz contínuas em H_n^+. Este fato será mostrado no Corolário 4.9. No Capítulo 4 obtemos ainda alguns resultados do tipo Liouville para soluções no $\mathbb{R}^n$ e em semi-espaços H_n^+. Eles serão enunciados e provados nas seções 5 e 6 do Capítulo 4.

3 REGULARIDADE LIPSCHITZ E ESTIMATIVAS DE DENSIDADE PARA PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE COM DUAS FASES EM CLASSES SOB PEQUENA DENSIDADE DA FASE NEGATIVA

3.1 Existência e Estimativa L^∞ para minimizantes globais de E_G

Nesta seção estabelecemos a existência e estimativa L^∞ para minimizantes globais de funcionais do tipo E_G. Como no caso de uma fase, a teoria de existência segue um procedimento padrão conhecido para este tipo de resultado (Análise Funcional essencialmente) mais propriedades peculiares do contexto de Espaços de Orlicz conhecidas de antemão no Capítulo 2 ou delineadas em Martinez e Wolanski (2008). Para completude do trabalho apresentamos uma prova completa deste resultado. Antes, uma definição se faz necessária.

Definição 3.1 *Dizemos que $u \in W^{1,G}(\Omega)$ é um minimizante de E_G sobre K_φ se*

$$E_G(u, \Omega) = \min_{v \in K_\varphi} E_G(v, \Omega),$$

onde $\varphi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $\int_\Omega G(|\nabla \varphi|)dx < \infty$ e

$$K_\varphi = \left\{ v \in L^1(\Omega) : \int_\Omega G(|\nabla v|)dx < \infty, \quad v = \varphi \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Minimizantes sobre K_φ são os que denominamos minimizantes globais.

Proposição 3.1 (Existência) *Seja $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ e suponha que $E_G(\varphi, \Omega) < \infty$. Então, o problema de optimização*

$$\min_{v \in K_\varphi} E_G(v, \Omega)$$

tem, no mínimo, um minimizante sobre K_φ.

Prova: Seja $\{u_j\}$ uma seqüência minimizante para E_G em K_φ. Se $\tau = \inf_{v \in K_\varphi} E_G(v) < \infty$, então para $1 << j \in \mathbb{N}$ temos

$$\tau \le E_G(u_j) \le \tau + 1.$$

Pelo Lema 2.1 (G - 3) e Lema 2.3 temos

$$\|\nabla u_j\|_G \le C \left(\int_\Omega G(1 + |\nabla u_j|)dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \le C(\delta, g_0, \tau, f_1, f_2, G(1), |\Omega|). \tag{39}$$

Em particular,

$$\int_\Omega G(|\nabla(u - \varphi)|)dx \le C.$$

Agora, por estimativa do tipo Poincaré, Lema 2.4, e Lema 2.1 (G - 2) obtemos

$$\int_\Omega G(|u-\varphi|)dx \leq C(1+g_0)\cdot(1+d)^{1+g_0}.$$

Isto nos dá que $\{u_j\}$ é limitada em $W^{1,G}(\Omega)$. Assim, por reflexividade (Teorema 8.31 em Lieberman (1991)) podemos assumir que

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{em} \;\; W^{1,G}(\Omega).$$

Por estimativas acima e desde que $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$ temos $u=\varphi$ sobre $\partial\Omega$ e $u_j(x) \longrightarrow u(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Observe ainda que,

$$\lambda(f_1,f_2)(u_j)(x) \longrightarrow \lambda(f_1,f_2)(u)(x) \qquad \text{para q.t.p. } x \in \{u>0\}\cup\{u<0\}. \tag{40}$$

Para o caso em que $u=0$, notamos que

$$\lambda(f_1,f_2)(u)(x) \leq \liminf_{j\to\infty} \lambda(f_1,f_2)(u_j)(x). \tag{41}$$

Pelo Lema de Fatou combinado com (40) e por (41) temos

$$\int_\Omega \lambda(f_1,f_2)(u)dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega \lambda(f_1,f_2)(u_j)dx.$$

Por convexidade temos

$$\int_\Omega G(|\nabla u_j|)dx \geq \int_\Omega G(|\nabla u|)dx + \int_\Omega g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot\nabla(u_j-u).$$

Agora, desde que $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ em Ω concluímos que $(G-4)$ implica em $g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \in L^{\widetilde{G}}(\Omega)$. Assim, obtemos por dualidade que

$$\int_\Omega G(|\nabla u|)dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega G(|\nabla u_j|)dx.$$

Isto nos garante que $u \in K_\varphi$ e

$$E_G(u,\Omega) \leq \inf_{v\in K_\varphi} E_G(v,\Omega),$$

provando que u é um mínimo para (29).

■

Definição 3.2 *Uma função* $u \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ *é dita ser um minimizante para o funcional* $E_G(\cdot,\Omega)$ *se para qualquer* $\psi \in W^{1,G}_0(\Omega)$, *tivermos*

$$E_G(u,\Omega) \leq E_G(u+\psi,\Omega).$$

Segue da definição que u é um minimizante para $E_G(\cdot,\Omega)$ se, e somente se, $\forall\ D \subset\subset \Omega$ com fronteira Lipschitz

$$E_G(u,D) = \min_{v\in K_u} E_G(v,D),$$

onde $K_u = \Big\{v \in W^{1,G}(D) : v = u \text{ sobre } \partial D\Big\}$.

Algo que segue das definições é que todo minimizante global é também um minimizante no sentido acima.

Observação 3.1 (Equvalência de Funcionais) *Considere os seguintes funcionais:*

$$I_G^1(v) := \int_\Omega [G(|\nabla v|) + \lambda_1(f_1,f_2)(v)]dx \qquad e \qquad I_G^2(v) := \int_\Omega [G(|\nabla v|) + \lambda_2(f_1,f_2)(v)]dx,$$

onde

$$\lambda_1(f_1,f_2)(v) = (f_1 - f_2)\chi_{\{v<0\}} - (f_1 - f_2)^- \chi_{\{v=0\}}$$

e

$$\lambda_2(f_1,f_2)(v) = (f_2 - f_1)\chi_{\{v>0\}} - (f_2 - f_1)^- \chi_{\{v=0\}}.$$

Note que,

$$E_G(v) - I_G^1(v) = \int_\Omega f_2(x)dx \qquad e \qquad E_G(v) - I_G^2(v) = \int_\Omega f_1(x)dx.$$

Ora, esta simples observação nos garante que u é minimizante de E_G se, e somente se u é minimizante para os funcionais I_G^1 e I_G^2. Este tipo de informação se faz útil uma vez que permitirá a troca de funcionais convenientemente a fim de simplificar provas de resultados posteriores, começando pelo resultado a seguir.

O resultado que mostraremos abaixo garante que minimizantes para E_G são limitados. O interesante nele é que a dependência das estimativas dependem única e esclusivamente da condição de fronteira.

Proposição 3.2 (Estimativa L^∞) *Seja $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ e u um minimizante para E_G sobre K_φ. Então, $u \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo as seguintes estimativas*

$$\inf_\Omega \varphi \leq u(x) \leq \sup_\Omega \varphi \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Prova: Primeiramente observe que podemos assumir, sem perda, que $\inf_\Omega \varphi < 0 \leq \sup_\Omega \varphi$. Do contrário, $u \geq 0$ q.t.p. em Ω e a estimativa segue como no Lema 3.2 em Martinez e Wolanski (2008), uma vez que o problema se reduz ao caso de uma fase. Para verificar a estimativa inferior consideramos a seguinte perturbação de u:

$$u_\varepsilon^- = u + \varepsilon(u-m)^-,$$

com $0 < \varepsilon < 1$ e $m = \inf_\Omega \varphi < 0$. Usando, portanto, a minimalidade de u com respeito a I_G^2, chegamos a

$$\int_{\Omega_m^-} [G(|\nabla u|) + \lambda_2(f_1,f_2)(u)]dx \leq \int_{\Omega_m^-} [(1+g_0)(1-\varepsilon)^{1+\delta} G(|\nabla u|) + \lambda_2(f_1,f_2)(u_\varepsilon)]dx,$$

onde $\Omega_m^- := \Big\{u < m\Big\}$. Uma vez que u e u_ε^- são estritamente negativas em Ω_m^-, temos

$$\int_{\Omega_m^-} G(|\nabla u|)dx \leq (1+g_0)(1-\varepsilon)^{1+\delta} \int_{\Omega_m^-} G(|\nabla u|)dx.$$

Logo, para ε suficientemente próximo de 1 segue que $\int_\Omega G(|\nabla(u-m)^-|)dx \leq 0$, o que, mediante condição de fronteira, implica $u \geq m$ q.t.p. em Ω. A estimativa superior pode ser verificada de forma similar por considerar a perturbação

$$u_\varepsilon^+ = u - \varepsilon(u-M)^+$$

e o funcional I_G^1 ao invés de I_G^2.

■

Observação 3.2 *Como conseqüência da minimialidade de u e da estimativa L^∞ obtemos um controle universal para a norma $W^{1,G}(\Omega)$ de minimizantes. Com efeito, por minimalidade,*

$$\int_\Omega G(|\nabla u|)dx \leq E_G(\varphi) + 2\mu|\Omega| =: M_0.$$

Logo,

$$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} \leq M_0 + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Isto nos permite assumir um controle universal para a norma $W^{1,G}(\Omega)$ de minimizantes em $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$.

Observação 3.3 *Se as funções de fase são ordenadas, digamos, $f_2 \geq f_1$ em Ω, então minimizantes são subsoluções globais, isto é, são subsoluções em todo Ω. Em outros termos,*

$$\mathcal{L}_g u \geq 0, \quad em \;\; \Omega$$

para a correspondente função g. Deixamos a verificação deste fato para o momento adequado (Veja Observação 3.8). Analogamente, $f_2 \leq f_1$ implica que $\mathcal{L}_g u \leq 0$ em Ω.

3.2 Regularidade Hölder uniforme na classe $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$

Nesta seção estamos interessados em provar que, localmente, funções minimizantes na classe $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ são Hölder contínuas. Mais precisamente, provaremos que funções em $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ são $C^{0,1^-}_{loc}(\Omega)$. A prova deste fato segue de perto os argumentos utilizados no Teorema 4.1 em Martinez e Wolanski (2008). Enfatizamos, todavia que, este resultado, é muito importante ante as nossas pretensões. Sua prova é delicada e um tanto quanto longa, no entanto, a apresentaremos completamente. Como nosso resultado será provado em classes de minimizantes a condição de não-degeneracidade, isto é, a limitação de G(1) por baixo, será fundamental para a estimativa Hölder uniforme obtida.

Gostaríamos de frisar que existem estimativas desenvolvidas no resultado a seguir que desenvolverão um papel chave na prova do principal resultado deste Capítulo, a saber, Teorema 2.7.

Teorema 3.1 (Estimativa $C^{0,1^-}$ local) *Seja $u \in \mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ e $\alpha \in (0,1)$. Então, $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$. Precisamente, para qualquer $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ existe uma constante universal $\overline{C} = \overline{C}(\delta, g_0, n, \alpha, M, \mu)$ tal que*

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq C := \max\left(C_1 \cdot \max\left\{\frac{\overline{C}}{\varepsilon_0}, 1\right\}, \ \frac{2^{\alpha+1}\cdot M}{\min\left\{(\frac{1}{2})^{1+1/\varepsilon}, \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)\right\}^{\alpha}}\right).$$

onde

$$\varepsilon := \frac{1}{2}(1-\alpha)/(n+\alpha-1),$$

e $C_1 = C_1(\delta, g_0, n)$. De fato, $C = C(n, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M, \alpha, \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)) > 0$.

Prova: Por definição de $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ existe uma funcional do tipo

$$E_G(u, \Omega) = \int_\Omega [G(|\nabla u|) + \lambda(f_1, f_2)(u)]dx$$

tal que u é um minimizante de E_G, $\sup_\Omega |u| \leq M$ e $0 \leq f_1, f_2 \leq \mu$. Pelo Lema 2.5, é suficiente mostrar que para qualquer $0 < \alpha < 1$ e $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, existe $0 < \rho_0 \leq \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ tal que

$$\int_{B_\rho(y)} G(|\nabla u|)dx \leq C\rho^{n+\alpha-1} \ \text{ para todo } y \in \Omega_0, \ \text{ e para todo } \ 0 < \rho \leq \rho_0 \leq \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega).$$

Assim, seja $\alpha \in (0,1)$ e fixe $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ com $y \in \Omega_0$. Considere $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset \Omega$. Por simplicidade de notação assumiremos $y = 0$. Seja w a solução para o seguinte problema de Dirichlet

$$\mathcal{L}_g w = 0 \ \text{ em } \ B_r \quad \text{e} \quad w - u \in W^{1,G}_0(B_r).$$

Pelo Teorema 2.3 em Martinez e Wolanski (2008) temos

$$\int_{B_r}[G(|\nabla u|)-G(|\nabla w|)]dx \geq$$
$$C(g_0,\delta)\left(\int_{A_2} G(|\nabla u-\nabla w|)dx+\int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u-\nabla w|^2 dx\right), \tag{42}$$

onde

$$A_1=\Big\{x\in B_r : |\nabla u-\nabla w|\leq 2|\nabla u|\Big\}, \qquad A_2=\Big\{x\in B_r : |\nabla u-\nabla w|> 2|\nabla u|\Big\}$$

e $F(t)=g(t)/t$. Por outro lado, pela minimalidade de u segue que

$$\int_{B_r}[G(|\nabla u|)-G(|\nabla w|)]dx \leq \int_{B_r}[\lambda(f_1,f_2)(w)-\lambda(f_1,f_2)(u)]dx \leq C(n)\mu r^n. \tag{43}$$

Agora, combinando as estimativas (42) e (43) concluímos que

$$\int_{A_2} G(|\nabla u-\nabla w|)dx \leq C(n,g_0,\delta)\mu r^n \tag{44}$$

e

$$\int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u-\nabla w|^2 dx \leq C(n,g_0,\delta)\mu r^n. \tag{45}$$

Seja $\varepsilon>0$ e suponha que $r^\varepsilon\leq 1/2$. Desde que a função $\frac{G(t)}{t}$ é crescente, $(g-2)$ e (45) garantem que

$$\begin{aligned}
&\int_{A_1\cap B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u-\nabla w|)dx\\
&\quad = \int_{A_1\cap B_{r^{1+\varepsilon}}} \frac{G(|\nabla u-\nabla w|)}{|\nabla u-\nabla w|}|\nabla u-\nabla w|dx\\
&\quad \leq C(g_0)\int_{A_1\cap B_{r^{1+\varepsilon}}} \frac{G(|\nabla u|)^{1/2}}{|\nabla u|}|\nabla u-\nabla w|G(|\nabla u|)^{1/2}dx\\
&\quad \leq C(g_0)\left(\int_{A_1}\frac{G(|\nabla u|)}{|\nabla u|^2}|\nabla u-\nabla w|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx\right)^{1/2}\\
&\quad \leq C(g_0)\left(\int_{A_1}\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}|\nabla u-\nabla w|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx\right)^{1/2}\\
&\quad \leq C\mu^{1/2}r^{n/2}\left(\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx\right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{46}$$

onde $C=C(n,\delta,g_0)$. Combinando agora as estimativas (44) e (46) chegamos novamente a $C = C(n, \delta, g_0) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u - \nabla w|)dx &= \int_{A_1 \cap B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u - \nabla w|)dx + \int_{A_2 \cap B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u - \nabla w|)dx \\ &\leq C\mu^{1/2}\left[\mu^{1/2}r^n + r^{n/2}\left(\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx\right)^{1/2}\right]. \end{aligned} \tag{47}$$

Note agora que pelo Princípio do Máximo (Lema 2.8 em Martinez e Wolanski (2008)), temos,

$$\|w\|_{L^\infty(B_r)} = \|u\|_{L^\infty(B_r)} \leq M. \tag{48}$$

Portanto, para $r \leq 1$, segue pela propriedade (28), Observação 2.2 e $(G-3)$ que para qualquer $\overline{\beta} \in (0, n)$

$$\begin{aligned} &\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx \\ &\leq C(\delta, g_0)\left(\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u - \nabla w|)dx + \int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla w|)dx\right) \\ &\leq C\mu^{1/2}\left[\mu^{1/2}r^n + r^{n/2}\left(\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx\right)^{1/2}\right] + Cr^{\overline{\beta}} \\ &\leq C\left\{(1+\mu)r^{\overline{\beta}} + (1+\mu)^{\frac{1}{2}}r^{\overline{\beta}/2}\left(\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx\right)^{1/2}\right\}, \end{aligned} \tag{49}$$

onde $C = C(\delta, g_0, n, \overline{\beta}, M)$. Observe agora que se definirmos

$$A := \int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx$$

então, pelo que verificamos acima temos

$$\begin{aligned} A &\leq C\left[(1+\mu)r^{\overline{\beta}} + (1+\mu)^{\frac{1}{2}}r^{\overline{\beta}/2}A^{1/2}\right] \\ &\leq C\left[(1+\mu)r^{\overline{\beta}} + 2(1+\mu)^{\frac{1}{2}}r^{\overline{\beta}/2}A^{1/2}\right] \\ &\leq C\left[(r^{\overline{\beta}/2}(1+\mu)^{1/2} + A^{1/2})^2 - A\right]. \end{aligned}$$

Logo teremos

$$(C+1)A \leq C(r^{\overline{\beta}/2}(1+\mu)^{1/2} + A^{1/2})^2 \Rightarrow (C+1)^{1/2}A^{1/2} \leq C^{1/2}(r^{\overline{\beta}/2}(1+\mu)^{1/2} + A^{1/2}).$$

E portanto,

$$A^{1/2} \leq \left[(C+1)^{1/2} + C^{1/2}\right]C^{1/2}r^{\overline{\beta}/2}(1+\mu)^{1/2}.$$

Assim, enquanto $r^\varepsilon \leq 1/2$, obtemos

$$\int_{B_{r^{1+\varepsilon}}} G(|\nabla u|)dx \leq [(C+1)^{1/2} + C^{1/2}]^2 C(1+\mu) r^{\overline{\beta}}. \tag{50}$$

Desde que $0 < \alpha < 1$ considere $\overline{\beta} := (1+\varepsilon)(n-(1-\alpha))$ e $\rho_0 := \min\left\{(\frac{1}{2})^{1+1/\varepsilon}, \mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)\right\}$. Agora, escolhemos ε tal que $0 < \varepsilon < (1-\alpha)/(n+\alpha-1)$. Isto nos dá, $0 < \overline{\beta} < n$. Logo, para $0 < \rho < \rho_0$ com $r = \rho^{1/(1+\varepsilon)}$ temos que $r^\varepsilon \leq 1/2$ e portanto (50) transcreve-se como,

$$\int_{B_\rho} G(|\nabla u|)dx \leq [(C+1)^{1/2} + C^{1/2}]^2 C(1+\mu)\rho^{n+\alpha-1} = \overline{C}\rho^{n+\alpha-1},$$

onde $\overline{C} = \overline{C}(\delta, g_0, n, \alpha, M, \mu)$. Finalmente pela estimativa (11) obtida no Lema do tipo Morrey concluímos para

$$\varepsilon := \frac{1}{2}(1-\alpha)/(n+\alpha-1) \quad \text{que}$$

$$[u]_{\alpha,\Omega_0} \leq \max\left(C_1 \cdot \max\left\{\frac{\overline{C}}{\varepsilon_0}, 1\right\},\ \frac{2^{\alpha+1}\cdot M}{\min\left\{(\frac{1}{2})^{1+1/\varepsilon}, \mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)\right\}^\alpha} \right).$$

■

O Corolário a seguir é conseqüência da continuidade de minimizantes.

Corolário 3.1 *Seja u um minimizante de $E_G(\cdot, \Omega)$ então*

$$\mathcal{L}_g u = 0 \text{ in } \Omega \setminus \{u = 0\}.$$

Prova: Desde que $u \in C^\alpha_{loc}(\Omega)$ temos que $\Omega \setminus \{u=0\}$ é um conjunto aberto. Considere $\eta \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{u=0\})$e assuma que $K =$ supp η. Sejam $m_0 = \inf_K |u|$ e $M_0 = \max_K |\eta|$. Para $0 < |\varepsilon| < m_0/M_0$, vemos que

$$\{u > 0\} \cap K = \{u + \varepsilon\eta > 0\} \cap K \quad \text{and} \quad \{u < 0\} \cap K = \{u + \varepsilon\eta < 0\} \cap K.$$

Portanto,

$$E_G(u+\varepsilon\eta) = \int_\Omega [G(|\nabla(u+\varepsilon\eta)|) + \lambda(f_1, f_2)(u)]dx.$$

Assim,

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}(E_G(u+\varepsilon\eta) - E_G(u)) = \int_{\Omega\setminus\{u=0\}} g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla\eta dx$$

■

3.3 Estimativa Log-Lipschitz em $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ para o caso degenerado

Esta seção é motivada em virtude do que mostramos na seção anterior pela seguinte questão: Será que $C^{0,1^-}$ é a regularidade ótima para qualquer minimizante em $\mathcal{S}(\Omega, \delta,\ g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ quando consideramos δ e g_0 com toda generalidade? Sabemos que para o caso particular em que $\delta = g_0 = 1$, a regularidade ótima é $C^{0,1}$. Aqui mostraremos que para o caso em que o operador $\mathcal{L}_g$ é "genuinamente degenerado" temos uma pequena melhora quanto ao que já mostramos com respeito a regularidade de minimizantes em $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$. Como estamos lidando com uma condição nova para os operadores $\mathcal{L}_g$ acreditamos que uma explicação sobre ser genuinamente degenerado seria de bom tom. Sabemos que os operadores $\mathcal{L}_g$ têm dependência em dois parâmetros (δ, g_0). Quando lidamos com o caso particular em que $G(t) = t^p$, sabemos que o operador é degenerado se $2 \leq p < \infty$ e é singular se $1 < p < 2$. Definimos assim um conceito similar para operadores onde $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$.

Definição 3.3 *Seja $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$, $G' = g$ e $Q_g(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)}$, $t > 0$. Dizemos que o operador elíptico $\mathcal{L}_g$ é (fortemente) singular quando*

$$(g_0)_{min} := \min_{Q_g(t) \leq g_0} g_0 < 1.$$

Similarmente, $\mathcal{L}_g$ é (fortemente) degenerado quando

$$(\delta)_{max} := \max_{Q_g(t) \geq \delta} \delta \geq 1.$$

Diremos ainda que $\mathcal{L}_g$ é fracamente singular se $0 < (\delta)_{max} < (g_0)_{min} = 1$.

Por simplicidade chamaremos os casos (fortemente) singular e (fortemente) degenerado apenas de singular e degenerado. O Lema abaixo nos fornece critérios para o novo conceito definido.

Lema 3.1 (Critério para $\mathcal{L}_g$ fracamente singular/singular/degenerado) *Seja $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ e $G' = g$. Então,*

1. *$\mathcal{L}_g$ é singular se $\frac{g(t)}{t}$ é decrescente para todo $t > 0$.*
2. *$\mathcal{L}_g$ é fracamente singular se, e somente se, $\mathcal{L}_g$ não é singular, G não é uma potência e $\frac{g(t)}{t}$ é não-crescente para todo $t > 0$.*
3. *$\mathcal{L}_g$ é degenerado se, e somente se, $\frac{g(t)}{t}$ é não-decrescente para $t > 0$.*

Prova: (i) Como $\mathcal{L}_g$ é singular temos,

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} < 1,\ t > 0.$$

Assim,

$$tg'(t) \leq g(t) \Longrightarrow \left(\frac{g(t)}{t}\right)' = \frac{g'(t)}{t} - \frac{g(t)}{t^2} < 0,$$

provando que $\frac{g(t)}{t}$ é decrescente.

(ii) Se $\mathcal{L}_g$ é fracamente singular, temos $(g_0)_{min} = 1$ e portanto, $\mathcal{L}_g$ não pode ser singular. Ainda, temos que

$$\left(\frac{g(t)}{t}\right)' \leq 0,$$

implicando que $\frac{g(t)}{t}$ é não-crescente para $t > 0$. Além disso, como $(\delta)_{max} < 1$, $\frac{tg'(t)}{g(t)}$ não pode ser constante.

Afirmo agora que, G é, a menos de produto por uma constante, uma potência de t se, e somente se, $\frac{tg'(t)}{g(t)}$ é constante. De fato, se G é potência, obviamente $\frac{tg'(t)}{g(t)}$ é constante. Suponha agora que

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = p > 0, \forall\ t > 0.$$

Neste caso $h(t) = t^{-p}g(t)$ é tal que $h'(t) = 0, \forall\ t > 0$. Logo, h é constante, g é uma potência, donde $G(t) = c(p+1)t^{p+1}$, uma vez que $G(0) = 0$. Assim, como $\frac{tg'(t)}{g(t)}$ não é constante, G não é potência de t.

Suponha agora que $\mathcal{L}_g$ não é singular, G não é uma potência e $\frac{g(t)}{t}$ é não-crescente para todo $t > 0$. Isto implica que $0 < (\delta)_{max} < (g_0)_{min}$, $(g_0)_{min} \geq 1$ e $\frac{tg'(t)}{g(t)} \leq 1$, ou seja, $(g_0)_{min} \leq 1$. Logo, $(g_0)_{min} = 1$, provando que $\mathcal{L}_g$ é fracamente singular.

(iii) Ora,

$$\frac{g(t)}{t} \text{ é não-decrescente } \forall\ t > 0 \text{ se, e somente se } \left(\frac{g(t)}{t}\right)' \geq 0, \quad \forall t > 0.$$

Em continuidade temos que, para todo $t > 0$

$$\left(\frac{g(t)}{t}\right)' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{t} \geq \frac{g(t)}{t^2} \Leftrightarrow \frac{tg'(t)}{g(t)} \geq 1 \Leftrightarrow (\delta)_{max} \geq 1,$$

ou seja, $\mathcal{L}_g$ é degenerado.

■

A partir do Lema acima obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.2 *Seja u um minimizante para um funcional do tipo E_G tal que G satisfaz (CQ) com $(\delta)_{max} \geq 1$. Assuma $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ e v solução de*

$$\mathcal{L}_g v = 0 \quad in \ \ B_r(x_0) \quad e \quad u = v \quad sobre \ \ \partial B_r(x_0).$$

Então, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de δ, g_0 e μ tal que

$$\int_{B_r(x_0)} [G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)]dx \geq C \int_{B_r(x_0)} G(|\nabla u - \nabla v|)dx. \tag{51}$$

Prova: Seja

$$A_1 = \Big\{x \in B_r : |\nabla u - \nabla w| \leq 2|\nabla u|\Big\} \quad \text{e} \quad F(t) = g(t)/t.$$

Assim, como $\delta \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla w|^2 dx &\geq 2^{1-g_0} \int_{A_1} F(|\nabla u - \nabla v|)|\nabla u - \nabla v|^2 \\ &\geq 2^{1-g_0} \int_{A_1} G(|\nabla u - \nabla v|)dx. \end{aligned}$$

O Lema agora é conseqüência imediata de (42) combinada com a estimativa acima.

■

Observação 3.4 *A estimativa acima será extremamente útil para demonstrarmos a estimativa Log-Lipschitz para minimizantes de funcionais cujo operador associado é degenerado. Notamos, todavia, que para os casos em que E_G está associado a operadores singulares e fracamente singulares temos*

$$\int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla w|^2 dx \leq 2^{1-g_0} \int_{A_1} G(|\nabla u - \nabla v|)dx.$$

o que impede de usarmos a técnica aqui desenvolvida para provar estimativa Log-Lipschitz para os dois casos acima citados.

O Lema a seguir será útil para nossos propósitos posteriores. Ele é um tipo de comparação integral entre funções em $W^{1,G}$ e $\mathcal{L}_g$-soluções.

Lema 3.3 *Seja $u \in W^{1,G}(B_R(x_0))$ e v solução fraca de*

$$\mathcal{L}_g v = 0 \quad em \quad B_R(x_0).$$

Então, existem constantes $C > 0$ e $0 < \sigma < 1$ dependendo apenas de n, δ, g_0 tais que, para cada $0 < r \leq R$,

$$\int_{B_r} [G(|\nabla u - (\nabla v)_r|)]dx \leq C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma} \int_{B_R} G(|\nabla u - (\nabla v)_R|)dx + \int_{B_R} G(|\nabla u - \nabla v|)dx\right], \tag{52}$$

Prova: Ora, por (G - 3) obtemos

$$\int_{B_r} [G(|\nabla u - (\nabla u)_r|)]dx \leq 2^{g_0}(1+g_0)\left[\int_{B_r} G(|\nabla u - (\nabla v)_r|)dx + \int_{B_r} G(|(\nabla u)_r - (\nabla v)_r|)dx\right], \tag{53}$$

e

$$\int_{B_r} [G(|\nabla u - (\nabla v)_r|)]dx \leq$$

$$2^{g_0}(1+g_0)\left[\int_{B_r} G(|\nabla u - \nabla v|)dx + \int_{B_r} G(|\nabla v - (\nabla v)_r|)dx\right]. \tag{54}$$

Agora, pela desigualdade de Jensen,

$$\begin{aligned}\int_{B_r} G(|(\nabla u)_r - (\nabla v)_r|)dx &\leq |B_r| G(|(\nabla u)_r - (\nabla v)_r|) \\ &\leq \int_{B_r} G(|\nabla u - \nabla v|)dx. \end{aligned} \tag{55}$$

Logo, por (53), (54) e (55)

$$\begin{aligned}&\int_{B_r} [G(|\nabla u - (\nabla u)_r|)]dx \leq \\ &\qquad C(g_0)\left[\int_{B_r} G(|\nabla u - \nabla v|)dx + \int_{B_r} G(|(\nabla v - (\nabla v)_r|)dx\right],\end{aligned} \tag{56}$$

De forma inteiramente similar, para $r = R$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{B_R} [G(|\nabla h - (\nabla h)_R|)]dx \leq \\ &\qquad C(g_0)\left[\int_{B_R} G(|\nabla u - \nabla v|)dx + \int_{B_r} G(|(\nabla u - (\nabla u)_R|)dx\right],\end{aligned} \tag{57}$$

Agora, pelo Lema 2.6, concluímos a partir de (56) que

$$\begin{aligned}&\int_{B_r} [G(|\nabla u - (\nabla u)_r|)]dx \leq \\ &\qquad C(g_0)\left[\int_{B_r} G(|\nabla u - \nabla v|)dx + \left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma}\int_{B_R} G(|(\nabla v - (\nabla v)_r|)dx\right],\end{aligned} \tag{58}$$

onde $0 < \sigma = \sigma(n, \delta, g_0) < 1$.

Assim, combinação de (57) e (58) chegamos a

$$\begin{aligned}&\int_{B_r} [G(|\nabla u - (\nabla u)_r|)]dx \leq \\ &\leq C\left\{\left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma}\int_{B_r} G(|\nabla u - (\nabla u)_R|)dx + \left[1+\left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma}\right]\int_{B_R} G(|(\nabla u - \nabla v|)dx\right\} \\ &\leq 2C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma}\int_{B_r} G(|\nabla u - (\nabla u)_R|)dx + \int_{B_R} G(|(\nabla u - \nabla v|)dx\right],\end{aligned} \tag{59}$$

finalizando a prova do Lema.

■

O próximo resultado garante estimativa Log-Lipschitz para minimizantes em $\mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ quando $(\delta)_{max} \geq 1$. A estimativa obtida no Teorema a seguir nos permite constatar a necessidade de se considerar classes em que $G(1) \geq \varepsilon_0 > 0$.

Teorema 3.2 (Estimativa Log-Lipschitz para minimizantes - caso degenerado) *Seja $u \in \mathcal{S}(\Omega, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ e assuma que $\delta \geq 1$. Então $\nabla u \in BMO_{loc}(\Omega)$. Precisamente, dado $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, existem constantes $C_1, C_2 > 1$, dependendo apenas de n, δ, g_0, μ,* *tais que*

$$\|\nabla u\|_{BMO(\Omega_0)} \leq \frac{(1+g_0)}{\varepsilon_0} \cdot \left[C_1 \cdot dist(\Omega_0, \partial\Omega)^{-n} + C_2\right]^{\frac{1}{1+\delta}}. \tag{60}$$

Em particular, u é localmente Log-Lipschitz contínua e vale a seguinte estimativa

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)\|\nabla u\|_{BMO(\Omega_0)}|x-y||log|x-y|| \tag{61}$$

para quaisquer $x, y \in \Omega_0$. *Conseqüentemente,* $u \in C^{0,1^-}_{loc}(\Omega)$.

Prova: Considere $y \in \Omega_0$ e $0 < r < R = \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$. Por simplicidade façamos $y = 0$. Tomemos então $v : B_R \to \mathbb{R}^n$ solução de

$$L_g v = 0 \text{ em } B_R, \; u = v \text{ sobre } \partial B_R.$$

Agora, combinando (52), (51) e (43) - (para a bola B_R), concluímos que, existe uma constante universal $C > 1$ tal que,

$$\int_{B_r} G(|\nabla u - (\nabla u)_r|)dx \leq C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma}\int_{B_R} G(|\nabla u - (\nabla u)_R|)dx + R^n\right]. \tag{62}$$

Defina

$$\wp(s) := \int_{B_s} G(|\nabla u - (\nabla u)_s|)dx.$$

Temos que $\wp$ é não-decrescente e para quaisquer $0 < r < R$ satisfaz

$$\wp(r) \leq C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma}\wp(R) + R^n\right].$$

Suponha inicialmente que existe uma constante universal $0 < \kappa_0 < 1$ tal que $\kappa_0 R \leq r$, então, pela desigualdade acima chegamos a

$$\begin{aligned} \wp(r) &\leq C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+\sigma}\wp(R) + \left(\frac{R}{r}\right)^n \cdot r^n\right] \\ &\leq C\left[R^{-n} + \kappa_0^{-n}\right] \cdot r^n. \end{aligned} \tag{63}$$

Considere agora uma constante $0 < \kappa < 1$ e façamos $r = \kappa R$. Então,

$$\wp(\kappa R) \leq C\kappa^{n+\sigma}\wp(R) + CR^n. \tag{64}$$

Escolhendo $\kappa = C^{-\frac{2}{\sigma}}$ obtemos

$$\wp(\kappa R) \leq \kappa^{n+\frac{\sigma}{2}}\wp(R) + CR^n. \tag{65}$$

Processo de iteração do argumento nos dá que, $\forall\ j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\wp(\kappa^{j+1}R) &\leq \kappa^{n+\frac{\sigma}{2}}\wp(\kappa^{j}R) + C\kappa^{jn}R^{n} \\
&\leq \kappa^{2(n+\frac{\sigma}{2})}\wp(\kappa^{j-1}R) + C\kappa^{jn}R^{n}(1+\kappa^{\frac{\sigma}{2}}) \\
&\leq \kappa^{(j+1)(n+\frac{\sigma}{2})}\wp(R) + C\kappa^{jn}R^{n}\cdot\sum_{i=0}^{j}(\kappa^{\frac{\sigma}{2}})^{i} \\
&\leq \kappa^{(j+1)(n+\frac{\sigma}{2})}\wp(R) + C_0\kappa^{jn}R^{n},
\end{aligned}$$

onde $C_0 = C\cdot\sum_{i=0}^{\infty}(\kappa^{\frac{\sigma}{2}})^{i}$. Finalmente, por (63), podemos encontrar $j \geq 0$ tal que $\kappa^{j+2}R \leq r \leq \kappa^{j+1}R$ e, desde que $\kappa < 1$,

$$\begin{aligned}
\wp(r) &\leq \kappa^{(j+1)(n+\frac{\sigma}{2})}\wp(R) + C_0\kappa^{jn}R^{n} \\
&\leq \kappa^{(n+\frac{\sigma}{2})}\left(\frac{r}{R}\right)^{(n+\frac{\sigma}{2})}\wp(R) + C_0\kappa^{jn}\left(\frac{R}{\kappa^{(j+2)}R}\right)^{n} r^{n} \\
&\leq \left[\kappa^{(n+\frac{\sigma}{2})}R^{-n}\wp(R) + C_0\kappa^{-2n}\right]\cdot r^{n}
\end{aligned}$$

Agora, pela propriedade (G - 3), desigualdade de Jensen e Observação 3.2 temos

$$\wp(R) \leq 2^{1+g_0}(1+g_0)\int_{\Omega} G(|\nabla u|)dx \leq \widetilde{C}.$$

Portanto,

$$⨍_{B_r} G(|\nabla u - (\nabla u)_r|)dx \leq \left[\widetilde{C}\kappa^{(n+\frac{\sigma}{2})}\mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)^{-n} + C_0\kappa^{-2n}\right].$$

Mais uma vez pela desigualdade de Jensen,

$$G\left(⨍_{B_r}|\nabla u - (\nabla u)_r|dx\right) \leq \left[\widetilde{C}\kappa^{(n+\frac{\sigma}{2})}\mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)^{-n} + C_0\kappa^{-2n}\right] =: C_1.$$

Agora, usando (G - 2) concluímos que

$$⨍_{B_r}|\nabla u - (\nabla u)_r|dx \leq \frac{(1+g_0)}{\varepsilon_0}\cdot\max\left\{C_1^{\frac{1}{1+g_0}}, C_1^{\frac{1}{1+\delta}}\right\}. \tag{66}$$

Isto prova que ∇u está no espaço BMO. De fato, assumindo que $C_1 \geq 1$ temos

$$\|\nabla u\|_{BMO(\Omega_0)} \leq \frac{(1+g_0)}{\varepsilon_0}\cdot C_1^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

O resultado agora é conseqüência imediata do Lema 2.6.

■

3.4 Classes não-degeneradas: Motivação via Inclinação do Gráfico de Minimizantes ao longo da Fronteira Livre, Compacidade e Escalonamentos Apropriados

3.4.1 *Motivando as classes não-degeneradas de* $\mathcal{G}(\delta, g_0)$

Na primeira parte desta Seção temos por meta motivar a necessidade de se estabelecer classes não-degeneradas de N-funções do tipo $\mathcal{G}(\delta, g_0)$ as quais foram apresentadas no Capítulo 2 (Preliminares). Procederemos inicialmente por argumentos heurísticos explanando sobre o contexto geral dos espaços de Orlicz-Sobolev, todavia, se a regularidade ótima de minimizantes e da fronteira livre forem conhecidas (isto é, quando minimizantes são Lipschitz e a Fronteira Livre é $C^{1,\alpha}$) o argumento tornar-se-á rigoroso.

Começamos observando heuristicamente que se a regularidade Lipschitz é conhecida para, pelo menos, uma solução de um problema de Fronteira Livre como (5) então precisaremos, de fato, nos concentrar em subconjuntos especiais de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$. Sob esta perspectiva suponha que temos uma solução ótima (no que tange a regularidade) para o seguinte problema de Fronteira Livre

$$\begin{cases} \mathcal{L}_g u = 0 & \text{in } \ \{u > 0\} \\ H(|\nabla u|) = \lambda > 0 & \text{on } \ F(u) := \partial\{u > 0\} \cap B_1 \\ u \geq 0 & \text{in } B_1 \end{cases} \tag{67}$$

onde

$$H(t) = g(t)t - G(t) \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Neste caso, afirmo que o gradiente desta solução, ao longo da fronteira livre, é controlada por cima e por baixo por potências negativas de $G(1)$, desde que $G(1)$ seja suficientemente pequeno. De forma precisa, existem constantes positivas $C_1 = C_1(\lambda, g_0)$ e $C_2 = C_2(\lambda, \delta, g_0)$ tais que

$$C_1 \cdot \left(\frac{1}{G(1)}\right)^{\frac{1}{1+g_0}} \ \leq \ |\nabla u| \ \leq \ C_2 \cdot \left(\frac{1}{G(1)}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \ \text{ao longo de } \ F^+(u), \tag{68}$$

sempre que $G(1) < \min\left\{\lambda(1+g_0)^{-1}, 1\right\}$ e a solução u assim como sua fronteira livre $F^+(u)$ forem suficientemente regulares.
Com efeito, suponha $x_0 \in F(u)$ e seja $\wp = |\nabla u(x_0)| > 0$ (pelo Lema de Hopf). Então,

$$\wp = \frac{\lambda + G(\wp)}{g(\wp)} \geq \frac{\lambda}{g(\wp)} \geq \frac{\lambda}{g(1) \cdot \max\left\{\wp^\delta, \wp^{g_0}\right\}} \geq \frac{\lambda}{1+g_0} \cdot \frac{1}{G(1)} \cdot \frac{1}{\max\left\{\wp^\delta, \wp^{g_0}\right\}}.$$

Agora, desde que $G(1) < \lambda(1+g_0)^{-1}$ temos

$$\wp \geq \left(\frac{\lambda}{1+g_0}\right)^{\frac{1}{1+g_0}} \cdot \left(\frac{1}{G(1)}\right)^{\frac{1}{1+g_0}}.$$

Para provar a outra desigualdade, observamos que $H'(t) = g'(t) \cdot t \geq \delta g(t)$ para $t > 0$ por (CQ). Assim, pela continuidade de g temos $H(t) \geq \delta G(t)$ para $t \geq 0$. Isto implica,

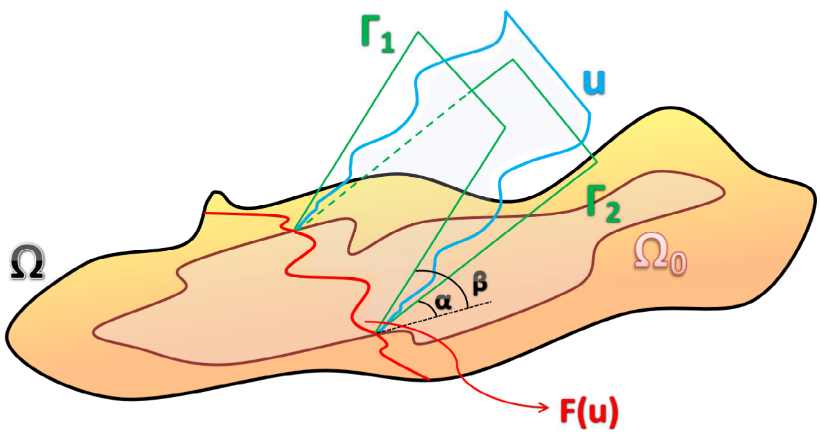
$$\lambda = H(\wp) \geq \delta \cdot G(\wp) \geq \frac{\delta \cdot G(1)}{1+g_0} \cdot \min\left\{\wp^{1+\delta}, \wp^{1+g_0}\right\}.$$

Assim, como $G(1) < 1$ obtemos

$$\wp \leq \max\left\{\left(\frac{(1+g_0)\cdot\lambda}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+g_0}}, \left(\frac{(1+g_0)\cdot\lambda}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}}\right\} \cdot \left(\frac{1}{G(1)}\right)^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

Isso mostra heuristicamente a desigualdade desejada.

Figura 9 – Gráfico de u entre os planos de inclinação determinados pelas constantes em (68).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que a primeira desigualdade em (68) sugere fortemente que soluções do PFL como (67) não podem satisfazer uma estimativa Lipschitz (local) uniforme com respeito a classe $\mathcal{G}(\delta, g_0)$, uma vez que é permitido a $G(1)$ ser tão pequeno quanto se deseje na classe $\mathcal{G}(\delta, g_0)$. Neste caso, $|\nabla u|$ pode se tornar tão grande ao longo de $F^+(u)$ quanto se deseje.

Assim, uma vez que, as conclusões acima obtidas para PFL's como (67) são, no mínimo, heurísticas (veja Martinez e Wolanski (2008)), não devemos esperar um controle (local) Lipschitz uniforme para minimizantes de funcionais do tipo

$$E_G(u, B_1) = \int_{B_1} [G(|\nabla u|) + \lambda \cdot \chi_{\{u>0\}}]dx,$$

a menos que se imponha um controle por baixo para $G(1)$ restringindo $\mathcal{G}(\delta, g_0)$, uma vez que tais minimizantes são também soluções de um PFL como (67). Vale ressaltar que podemos realmente fazer esta discussão heurística rigorosa, se a regularidade ótima da fronteira livre está disponível. Isto é feito no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1 *Considere os seguintes funcionais*

$$E_j(u, B_1) = \int_{B_1} [G_j(|\nabla u|) + \chi_{\{u>0\}}]dx,$$

onde $G_j(t) = \alpha_j^2 \cdot t^2$ *e* $\alpha_j > 0$. *Neste caso,* $\delta = g_0 = \mu = 1$. *Temos claramente* $G_j \in \mathcal{G}(1,1)$ *e* $G_j(1) = \alpha_j^2$. *Observe que,*

$$E_j(u) = \alpha_j^2 \cdot F_j(u) := \alpha_j^2 \left\{ \int_{B_1} [|\nabla u|^2 + \frac{1}{\alpha_j^2}\chi_{\{u>0\}}]dx \right\}.$$

Isto garante que u *é um minimizante de* E_j *se, e somente se,* u *é um minimizante de* F_j. *Seja* u_j *um minimizante para* E_j *tal que* $0 \leq u_j \leq M$. *Isto pode ser obtido muito simplesmente por considerar um processo de minimização com alguma função que prescreva o dado de fronteira e esta seja não-negativa e limitada por* M. *Assim, concluímos que*

$$u_j \in \mathcal{S}^*(B_1, 1, 1, 1, M)^+(0) \text{ para todo } j \geq 1.$$

Desde que as u_j*'s são também mínimos de* F_j, *segue pelos resultados de Alt e Caffarelli (1981)e Caffarelli, Jerison e Kenig (2004) que em dimensões* $n = 2$ *ou* $n = 3$ *a fronteira livre é uma superfície analítica e pela teoria de regularidade elíptica as* u_j*'s são soluções clássicas do seguinte PFL*

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \textit{in } \{u > 0\}, \\ |\nabla u| = \frac{1}{\alpha_j} & \textit{on } \ F(u) := \partial\{u > 0\} \cap B_1 \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Logo, se existe uma estimativa Lipschitz (local) uniforme com respeito a $\mathcal{S}^*(B_1, 1, 1, 1, M)^+(0)$ *então temos*

$$\frac{1}{\sqrt{G_j(1)}} = \frac{1}{\alpha_j} = |\nabla u_j(0)| \leq [u_j]_{C^{0,1}(B_{1/8})} < \infty.$$

Isto necessariamente implica em uma limitação uniforme por baixo e estritamente positiva para $G_j(1)$.

Este exemplo mostra que, para a estimativa Lipschitz uniforme ser válida, devemos limitar-nos a lidar com alguns subconjuntos não-degenerados de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$, a saber, subconjuntos de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$ onde $G(1)$ é estritamente maior que uma constante positiva fixada, estes conjuntos são, na realidade, as classes não-degeneradas apresentadas no Capítulo 2.

3.4.2 *Um resultado de Compacidade para Subclasses não degeneradas de* $\mathcal{G}(\delta, g_0)$

Não é difícil se convencer da existência de seqüências em $\mathcal{G}(\delta, g_0)$ e $\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0)$ que convergem uniformemente para a função nula em quaisquer subconjuntos compactos de $[0, +\infty)$. Quando nos restringimos a classes não-degeneradas tal fenômeno jamais ocorre. O próximo Teorema estabelece um resultado de compacidade em topologias apropriadas para subclasses não-degeneradas de $\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0)$.

Teorema 3.3 (Compacidade em $\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0)$) *Seja* $0 < \beta \leq 1$ *e* $\tau, L > 0$. *Defina*

$$\mathcal{F}_\tau(\varepsilon_0, L) := \Big\{ G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0) : G(\tau) \leq L \Big\}.$$

Se $\{G_j\} \subset \mathcal{F}_\tau(\varepsilon_0, L)$ *então existe uma subseqüência, ainda denotada por* $\{G_j\}$, *e* $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0) \cap C^{2,\beta}(0, \infty)$ *tal que* G_j *converge para* G *na topologia* $C^{2,\gamma}$ *sobre quaisquer subconjuntos compactos de* $(0, +\infty)$ *para todo* $\gamma \in (0, \beta)$ *e na topologia* C^1 *sobre quaisquer subconjuntos compactos de* $[0, +\infty)$.

Prova: Considere $\{G_j\}_{j \geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{F}_\tau(\varepsilon_0, L)$. Desde que cada G_j é crescente, podemos assumir que $0 < \tau \leq 1$. Por $(G-2)$, $G_j(1) \leq (1+g_0)L\tau^{-(1+g_0)} =: L_0$. Portanto, a condição de não-degeneracidade $G(1) \geq \varepsilon_0$ implica que

$$\frac{\varepsilon_0}{(g_0+1)} \min\{t^{1+\delta}, t^{1+g_0}\} \leq G_j(t) \leq L_0(g_0+1) \max\{t^{1+\delta}, t^{1+g_0}\} \quad \forall\, t \geq 0 \tag{69}$$

e por $(g-1)$, $(g-2)$ e (CQ)

$$\varepsilon_0 \min\{t^\delta, t^{g_0}\} \leq g_j(t) \leq (1+g_0)L_0 \max\{t^\delta, t^{g_0}\} \quad \forall\, t \geq 0, \tag{70}$$

$$0 < g_j'(t) \leq g_0(1+g_0)^2 L_0 \max\{t^{\delta-1}, t^{g_0-1}\} \quad \forall\, t > 0. \tag{71}$$

Uma vez que G_j satisfaz a condição (MC - β), observa-se que g' é uma função β-Hölder contínua. Com efeito, afirmamos que para qualquer intervalo fechado $K \subset\subset (0, +\infty)$ existe uma constante positiva C_1 dependendo apenas de $\delta, g_0, \beta, \tau, L$ e K tal que

$$[g_j']_{C^{0,\beta}(K)} \leq C_1.$$

De fato, seja $Q_j(t) = \frac{t g_j'(t)}{g_j(t)}$. Então, desde que $g_j > 0$ em K por (70), $Q_j \in W^{1,1}(K)$ e

$$\forall\ t,\ t+\kappa \in I_K = \left[\frac{1}{2}\inf_K t,\ \sup_K t + \frac{1}{2}\inf_K t\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_t^{t+\kappa} |Q_j'(s)| ds \leq \frac{C_0(\delta, g_0, \beta)}{t^\beta} \cdot \kappa^\beta \leq \frac{C_0(\delta, g_0, \beta)}{(\frac{1}{2}\inf_K t)^\beta} \cdot \kappa^\beta.$$

Então, pelo Lema de Morrey (veja Teorema 1.1 em Han e Lin (2011)) obtemos

$$[Q_j]_{C^{0,\beta}(K)} \leq \frac{\widetilde{C_0}(\delta, g_0, \beta)}{(\frac{1}{2}\inf_K t)^\beta}. \tag{72}$$

Assim, por ser $\frac{g_j(t)}{t}$ uma função Lipschitz contínua em K (uma vez que tem derivada localmente limitada) concluímos que $g_j'(t) = \frac{Q_j(t)\cdot g_j(t)}{t}$ é β-Hölder contínua em K e (70), (71) e (72) implicam

$$\begin{aligned}
[g_j']_{C^{0,\beta}(K)} &= [Q_j \cdot g_j/t]_{C^{0,\beta}(K)} \\
&\leq (\mathrm{diam}(K))^{1-\beta} \|Q_j\|_{L^\infty(K)} \cdot [g_j/t]_{C^{0,1}(K)} + \|g_j/t\|_{L^\infty(K)} \cdot [Q_j]_{C^{0,\beta}(K)} \\
&\leq L_0 \cdot \left(\overline{C}(\delta, g_0, \beta, K) + \frac{\widetilde{C}(\delta, g_0, \beta, K)}{(\frac{1}{2}\inf_K t)^\beta} \right) \\
&\leq C_1(\delta, g_0, \beta, L, \tau, K).
\end{aligned}$$

Assim, todas as estimativas anteriores implicam que para qualquer intervalo fechado $K \subset\subset (0, \infty)$ temos

$$\|G_j\|_{C^{2,\beta}(K)} \leq C_2, \quad C_2 = C_2(\delta, g_0, \beta, L, \tau, K). \tag{73}$$

Portanto, existe uma subseqüência ainda denotada por $\{G_j\}$ e uma função $G \in C^{2,\beta}((0, +\infty))$ tal que

$$G_j \to G \ \text{ em } C^{2,\gamma}_{loc}(0, \infty) \ \text{ para todo } \gamma \in (0, \beta) \quad \text{onde } G \text{ satisfies (CQ)}.$$

Considere agora $g := G'$ em $(0, \infty)$. Para finalizar a prova, precisamos extender G de tal forma que $G \in C^1[0, \infty)$ e mostrar que $G_j \to G$ em $C^1_{loc}[0, \infty)$. Assim teremos G pertencendo a $\mathcal{G}(\delta, g_0)$. Para tanto, o caminho natural é definirmos $\overline{G}(0) = 0$ e $\overline{G}(t) = G(t)$ se $t > 0$. Observamos que $\overline{G} \in C^0[0, \infty)$ uma vez que (69) implica para $0 < t < 1$,

$$G_j(t) \leq L_0(1 + g_0) \cdot t^{1+\delta}.$$

Passando o limite, temos $G(t) \leq L_0(1+g_0)\cdot t^{1+\delta}$ para $0<t<1$ que nos dá $\lim_{t\to 0^+} \overline{G}(t)=0$. Argumentando da mesma forma com as estimativas

$$0 \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)}{t} \leq L_0(1+g_0) \lim_{t\to 0^+} t^\delta = 0,$$

$$0<t<1 \Longrightarrow g_j(t) \leq (1+g_0)L_0 t^\delta,$$

vemos que $\overline{G} \in C^1[0,\infty)$ e $G_j \to \overline{G}$ em $C^1_{loc}[0,\infty)$. Isto finaliza a prova.

■

3.4.3 *Escalonamentos Apropriados*

Encerramos esta Seção com algumas observações sobre escalonamentos. Muitas estimativas para minimizantes de funcionais do tipo E_G envolvem constantes universais, ou seja, constantes em função das constantes de ellipticidade δ, g_0, de μ, o limitante das funções de fase, da constante de Hölder continuidade de Q_g e da dimensão n. Algumas vezes acontecerá destas constantes universais também dependerem de $G(1)$.

Desta forma, é importante que nossos minimizantes admitam um reescalonamento que normalize os valores de $G(1)$. Este fato é o que nos permite executar um argumento de compacidade usando o Teorema provado na Subseção anterior para realizar uma análise de blow-up na próxima seção. Para $s>0$ definimos os seguintes escalonamentos não lineares

$$G_s(t) := \frac{G(st)}{sG'(s)} \quad \text{and} \quad G^*_s(t) := G(st). \tag{74}$$

Abaixo registramos importantes fatos sobre estes escalonamentos em uma Proposição.

Proposição 3.3 (Propriedades dos Escalonamentos)

$$G \in \mathcal{G}(\delta, g_0) \Longrightarrow G_s \in \mathcal{G}(\delta, g_0, (1+g_0)^{-1}) \text{ e } G_s(1) \leq 1. \tag{S-1}$$

$$G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0) \Longrightarrow G_s \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, (1+g_0)^{-1}) \text{ e } G_s(1) \leq 1. \tag{S-2}$$

$$G \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0),\ s \geq 1 \Longrightarrow G^*_s \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0). \tag{S-3}$$

$$G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0),\ s \geq 1 \Longrightarrow G^*_s \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0). \tag{S-4}$$

Prova Seja $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$. Observe que as reescalas em (74) preservam regularidade. Defina

$$Q(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)}, \quad g = G', \quad Q_s(t) = \frac{tg'_s(t)}{g_s(t)}, \quad g_s = G'_s \text{ and } \quad Q^*_s(t) = \frac{t\dot{g}^*_s(t)}{g^*_s(t)}, \quad g^*_s = \dot{G}^*_s.$$

(S-1) e (S-3) seguem do fato que G é uma função crescente, de $(g-2)$ e por

$$Q_s(t) = Q_s^*(t) = Q(st) \quad \forall t \geq 0,$$

$$G_s^*(1) = G(s) \geq G(1) \geq \varepsilon_0.$$

Para provar (S-2) e (S-4), colocamos $H_s(t) := Q_s(t) = Q_s^*(t)$ para $G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0)$ e portanto

$$\int_\tau^{\tau+\kappa} |H_s'(t)|dt = s\int_\tau^{\tau+\kappa} |Q'(st)|dt = \int_{s\tau}^{s\tau+s\kappa} |Q'(\zeta)|d\zeta \leq \frac{C_0}{\tau^\beta} \cdot \kappa^\beta.$$

Isto completa a prova da Proposição.

$\blacksquare$

3.5 Exemplos nas Classes não-degeneradas de $\mathcal{G}(\delta, g_0)$

Esta Seção é dedicada especialmente a apresentação de exemplos de N-funções pertecentes a classes não-degeneradas de $\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$ e $\mathcal{G}_\beta(\delta, g_0)$. Verificamos ainda que se a constante de controle $\mathcal{C}(\delta, g_0)$ para a estimativa adicional satisfeita por N-funções em $\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$ é escolhida de forma apropriada, então a classe $\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$ permanece invariante por uma variedade de operações elementares, tais como combinações lineares (positivas), produtos, composição e colagens de ordem C^2. Isto mostra, de fato, que as classes não-degeneradas são consideravelmente grandes.

O primeiro fato que observamos aqui é que as condições (CP) e (CQ) estudadas em Lieberman (1991) não são suficientes para assegurar compacidade nas classes do tipo $\mathcal{G}(\delta, g_0)$. O exemplo a seguir mostra isto.

Exemplo 3.2 [Falta de Compacidade em $\mathcal{G}(\delta, g_0)$] *Para cada* $0 < \varepsilon < 1$ *consideramos a família de funções definidas a um parâmetro e dadas por*

$$G_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & se \;\; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{6\varepsilon}t^3 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\varepsilon})t^2 + \frac{1}{2\varepsilon}t - \frac{1}{6\varepsilon} & se \;\; 1 \leq t \leq 1+\varepsilon \\ t^2 - (1 + \frac{1}{2}\varepsilon)t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2 & se \;\; 1+\varepsilon \leq t. \end{cases}$$

Por construção G_ε é uma N-função de classe $C^2([0,\infty))$ para cada $0 < \varepsilon < 1$. Além disso temos:

$$G_\varepsilon'(t) := g_\varepsilon(t) = \begin{cases} t & se \;\; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2\varepsilon}t^2 + (1 - \frac{1}{\varepsilon})t + \frac{1}{2\varepsilon} & se \;\; 1 \leq t \leq 1+\varepsilon \\ 2t - (1 + \frac{1}{2}\varepsilon) & se \;\; 1+\varepsilon \leq t. \end{cases}$$

e

$$g_\varepsilon'(t) = \begin{cases} 1 & se \;\; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\varepsilon}t + 1 - \frac{1}{\varepsilon} & se \;\; 1 \leq t \leq 1+\varepsilon \\ 2 & se \;\; 1+\varepsilon \leq t. \end{cases}$$

Considere agora o quociente

$$Q_\varepsilon(t) = \frac{tg'_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(t)}.$$

Vemos que para $0 < t < 1 \Longrightarrow Q_\varepsilon(t) = 1$, *para* $[1, 1+\varepsilon]$ *concluímos que* Q_ε *é crescente de tal modo que*

$$1 = Q_\varepsilon(1) \leq Q_\varepsilon(1+\varepsilon) \leq 2.$$

Finalmente, se $t \in [1+\varepsilon, \infty)$ *o quociente* Q_ε *é decrescente e tal que*

$$1 \leq \frac{2}{2 - (1 - \frac{1}{2}\varepsilon)/t} = Q_\varepsilon(t) \leq Q_\varepsilon(1+\varepsilon) \leq \frac{2(1+\varepsilon)}{\frac{3}{2}\varepsilon + 1} \leq 2.$$

Portanto, $1 \leq Q_\varepsilon(t) \leq 2, \ \forall \ t > 0$, *garantindo que* $G_\varepsilon \in \mathcal{G}(1, 2, 1/2)$ *para todo* $0 < \varepsilon < 1$.

Não é difícil verificar que $G_\varepsilon \to G_0$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* $[0, +\infty)$ *quando* $\varepsilon \to 0$ *onde*

$$G_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & se \ \ 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 - t + \frac{1}{2} & para \ \ t \geq 1. \end{cases}$$

Também notamos que $G_0 \in C^{1,1}([0, \infty)) \setminus C^2[0, \infty)$ *e, portanto* $G_0 \notin \mathcal{G}(\delta, g_0)$ *quaisquer que sejam* $0 < \delta \leq g_0$.

Um outro fato que observamos é que $\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0) \subsetneq \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0)$ para todo $\beta \in (0,1)$. Com efeito, seja $G \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$ com $g = G'$. Assim,

$$\begin{aligned} |Q'(t)| &\leq \frac{g'(t)}{g(t)} + \frac{t|g''(t)|}{g(t)} + t\left(\frac{g'(t)}{g(t)}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{t}\big(g_0 + \mathcal{C}(\delta, g_0) + g_0^2\big) \\ &\leq \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(\delta, g_0)}{t}. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $t, \kappa > 0$ temos

$$\int_t^{t+\kappa} |Q'(s)| ds \leq \widetilde{\mathcal{C}}(\delta, g_0) \int_t^{t+\kappa} \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta} ds \leq \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(\delta, g_0)}{\beta \cdot t^\beta} \cdot [(t+\kappa)^\beta - t^\beta] \leq \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(\delta, g_0, \beta)}{t^\beta} \cdot \kappa^\beta$$

A inclusão estrita é verificada no próximo exemplo.

Exemplo 3.3 *Seja* $\beta \in (0, 1]$ *fixado e defina* $G_{(\beta)} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *por*

$$G_{(\beta)}(t) = \begin{cases} -\frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6}, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}(t-1)^{\beta+2} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t + \frac{1}{24}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Cálculo direto mostra que $G_{(\beta)} \in C^2(0,\infty)$ *com derivadas:*

$$G'_{(\beta)}(t) := g_{(\beta)}(t) = \begin{cases} -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{(\beta+1)}(t-1)^{\beta+1} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}, & t \ge 1. \end{cases}$$

e

$$g'_{(\beta)}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + t, & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)^{\beta} + \frac{1}{2}, & t \ge 1. \end{cases}$$

Afirmo que existem $0 < \delta \le g_0$ *dependendo apenas de* β *tal que*

$$\delta \le Q_{(\beta)}(t) = \frac{t g'_{(\beta)}(t)}{g_{(\beta)}(t)} \le g_0.$$

Com efeito, para $t \in (0,1]$ *temos*

$$1 \le Q_{(\beta)}(t) = \frac{6-3t}{3-t} \le 3. \tag{75}$$

Considerando agora $t \in (1,\infty)$ *temos:*

$$Q_{(\beta)}(t) = 3(\beta+1)\frac{2(t-1)^{\beta+1} + t + 2(t-1)^{\beta}}{6(t-1)^{\beta+1} + 3(\beta+1)t - \beta - 1} = 3(\beta+1)T_{(\beta)}(\xi),$$

onde $\xi = t - 1$ *e*

$$T_{(\beta)}(\xi) = \frac{2\xi^{\beta+1} + \xi + 2\xi^{\beta} + 1}{6\xi^{\beta+1} + 3(\beta+1)\xi + 2\beta + 2}.$$

Uma verificação simples mostra, por exemplo, que

$$\frac{1}{6} \le T_{(\beta)}(\xi) \le 2.$$

Logo,

$$\frac{3(\beta+1)}{6} \le Q_{(\beta)}(t) \le 6(\beta+1). \tag{76}$$

Afirmo agora que $G_{(\beta)}$ *satisfaz a condição (MC -* β*). De fato, em* $(0,1]$ *temos*

$$|Q'_{(\beta)}(s)| \le \frac{2g_0^2}{s} = \frac{18}{s}.$$

Para $s \in (1,\infty)$ *temos*

$$|Q'_{(\beta)}(s)| \le \frac{6(\beta+1)}{s} + \frac{36(\beta+1)^2}{s} + \frac{s g''_{(\beta)}(s)}{g_{(\beta)}(s)}.$$

Todavia notamos que

$$\frac{s g''_{(\beta)}(s)}{g_{(\beta)}(s)} = \frac{1}{s^{\beta}} \cdot \Im_{(\beta)}(s) \cdot (s-1)^{\beta-1},$$

onde

$$\Im_{(\beta)}(s) = \frac{6(\beta+1)s^{\beta+1}}{6\beta(s-1)^{\beta+1} + 3\beta(\beta+1)(s-1) + 2\beta^2 + 2\beta}.$$

Notamos ainda que a função $\Im_{(\beta)}(s)$ *é estritamente positiva e seu valor de máximo ocorre em* $s = 1$. *Logo, temos que*

$$\Im_{(\beta)}(s) \leq \frac{3}{\beta}.$$

Portanto, para $s \in [1, \infty)$ *temos*

$$|Q'_{(\beta)}(s)| \leq \frac{6(\beta+1)}{s} + \frac{36(\beta+1)^2}{s} + \frac{3}{\beta} \cdot \frac{1}{s^\beta}(s-1)^{\beta-1}.$$

Assim, para quaisquer $t, k > 0$ *temos*

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+k} |Q'_{(\beta)}(s)|ds &\leq [36\beta^2 + 78\beta + 50]\int_t^{t+k} \frac{1}{s}ds + \frac{3}{\beta}\int_t^{t+k} \frac{1}{s^\beta}(s-1)^{\beta-1}ds \\
&\leq P(\beta)\int_t^{t+k} \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta}ds + \frac{3}{\beta t^\beta}\int_t^{t+k} (s-1)^{\beta-1}ds \\
&\leq \frac{P(\beta)}{\beta t^\beta}[(t+k)^\beta - t^\beta] + \frac{3}{\beta^2 t^\beta}\{[(t-1)+k]^\beta - (t-1)^\beta\} \\
&\leq \frac{C(\beta)}{t^\beta}k^\beta.
\end{aligned}$$

Diante de tudo que mostramos temos que para qualquer $\beta \in (0, 1)$,

$$G_{(\beta)} \in \mathcal{G}_\beta(1/6, 12, 1/8).$$

Por fim, note que para qualquer $0 < \beta < \gamma \leq 1$ *e qualquer compacto* $K \supset [1, 1+\epsilon]$ *temos*

$$[g'_{(\beta)}]_{\gamma,K} \geq lim_{t\to 1^+}\frac{|g'_{(\beta)}(t) - g'_{(\beta)}(1)|}{|t-1|^\gamma} = \lim_{t\to 1^+}(t-1)^{\beta-\gamma} = +\infty,$$

Provando assim via prova do Teorema 3.3 que $G_{(\beta)} \notin \mathcal{G}_\gamma(\delta, g_0)$ *para qualquer* $\beta < \gamma \leq 1$.

De agora em diante redirecionamos nosso foco sobre as classes $\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$. Com respeito a estimativa (C-Lip) iremos considerar o caso particular em que a constante de controle é dada por $\mathcal{C}(\delta, g_0) = g_0(g_0 - 1)$ com $g_0(g_0-1) \geq 1/4$. Ou seja, quando $g_0 \geq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Primeiramente informamos que tal particularidade não é restritiva, com efeito, observamos que tal escolha torna a classe $\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$ invariante por muitas operações elementares (apontadas abaixo) e é natural uma vez que associada a esta estimativa estão N-funções do tipo $G(t) = t^p$ ou ainda $G(t) = t^p + t^q$. Além disso, desde que $g_0(g_0-1) \to \infty$ quando $g_0 \to \infty$, podemos considerar g_0 uma constante eventualmente grande a fim de comtemplar mutias situações concretas.

No que segue, citamos alguns exemplos concretos que pertencem a $\mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$.

1. O primeiro exemplo que gostaríamos de citar é o caso em que $g(t) = t^p, p > 0$. Em

ordem, para $t > 0$, temos

$$Q(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)} = p \quad \text{e} \quad \frac{t^2|g''(t)|}{g(t)} = |p(p-1)|.$$

Logo, $\delta = p$ e $g_0 = \max\{p, (1+\sqrt{2})/2\}$.

2. Um outro exemplo simples é quando temos $g(t) = at^p + bt^q$ com $a, b > 0$, $0 < p \neq q$. Para $t > 0$ temos

$$Q(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)} \geq \min\{p, q\} \quad \text{e} \quad \frac{t^2|g''(t)|}{g(t)} = max\{|p(p-1)|, |q(q-1)|\}.$$

Assim, $\delta = \min\{p, q\}$ e $g_0 = \max\{p, q, (\sqrt{2}+1)/2\}$.

3. Considere agora $g(t) = t^p \log_c(at+b)$, para $p, a > 0$ e $b, c > 1$. Temos

$$p \leq Q(t) = p + \frac{at}{(at+b)ln(at+b)} \leq p + \frac{1}{lnb}.$$

Cálculo direto nos mostra que

$$-|p(p-1)| - \frac{1}{lnb} \leq \frac{t^2 g''(t)}{g(t)} \leq |p(p-1)| + \frac{2p}{lnb}.$$

Logo,

$$0 \leq \frac{t^2|g''(t)|}{g(t)} \leq |p(p-1)| + \max\left\{\frac{2p}{lnb}, \frac{1}{lnb}\right\}.$$

Assim, é suficiente considerarmos $\delta = p$ e $g_0 = p + 1 + \frac{1}{lnb}$.

4. Considere $g(t) = t^p/\log_c(at+b)$, para $a > 0$, $c, b > 1$ e $p > (\ln b)^{-1}$. Veja que

$$p - \frac{1}{lnb} \leq Q(t) = p.$$

Derivando agora $g'(t)$ chegamos a

$$-|p(p-1)| - \frac{2p}{lnb} \leq \frac{t^2 g''(t)}{g(t)} \leq |p(p-1)| + \frac{1+2p}{lnb} + \frac{2}{(lnb)^2}.$$

Portanto,

$$0 \leq \frac{t^2|g''(t)|}{g(t)} \leq |p(p-1)| + \frac{1+2p}{lnb} + \frac{2}{(lnb)^2}.$$

O resultado segue se considerarmos, por exemplo, $\delta = p - \frac{1}{lnb}$ e $g_0 = p + \frac{\sqrt{2}}{lnb} + 2$.

5. Podemos ainda considerar funções tal que $g \in C^1(0, +\infty)$ e são da forma: $g(t) = at^p$ para $0 \leq t \leq t_0$ e $g(t) = bt^q + c$ com $t \geq t_0$. Tomamos $a, b, p, q > 0$ e $d \neq 0$. Uma

conta simples mostra que

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = \begin{cases} p & \text{se } \ 0 \le t \le t_0 \\ q - \dfrac{qc}{bt^q + c} & \text{se } \ t_0 \le t. \end{cases}$$

Veja que se $c > 0$ então para $t \ge t_0$ temos

$$q > q - \frac{qc}{bt^q + c} \ge p.$$

Caso $c < 0$ temos

$$q < q - \frac{qc}{bt^q + c} \le p.$$

Isto nos leva a considerar a priori $\delta = \min\{p, q\}$ e $g_0 = \max\{p, q, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\}$.
Também temos,

$$\frac{tg''(t)}{g(t)} = \begin{cases} p(p-1) & \text{se } \ 0 \le t \le t_0 \\ q(q-1) - \dfrac{q(q-1)c}{bt^q + c} & \text{se } \ t_0 \le t. \end{cases}$$

Notamos agora que para $t = t_0$

$$q(q-1) - \frac{q(q-1)c}{bt_0^q + c} = p(q-1). \tag{77}$$

Logo, se $q > 1$, $c > 0$ e $t \ge t_0$ chegamos a

$$q(q-1) \ge p(q-1)$$

que nos dá $q \ge p$ e conseqüentemente

$$\max\{q(q-1), 1/4\} \ge |p(p-1)|.$$

Caso, $c < 0$ então por conta análoga

$$q(q-1) \le p(q-1)$$

donde $p \ge q$ e daí

$$q(q-1) \le q(p-1) \le p(p-1).$$

Suponhamos agora $0 < q \le 1$, $d > 0$ e $t \le t_0$. Neste caso, por argumento anterior

$$q(q-1) \le p(q-1)$$

nos levando a $q \geq p$. Em particular,

$$-1 \leq \min\{q(p-1), p(p-1), q(q-1)\}.$$

Portanto, diante de (77)

$$-1 \leq \frac{tg''(t)}{g(t)}. \tag{78}$$

Para $c < 0$ concluímos que $q \leq p$. Assim, se $p \leq 1$ ainda temos (78). Todavia se $p > 1$

$$-p \leq \frac{tg''(t)}{g(t)}.$$

Uma vez que $p > p(p-1)$ apenas se $p < 2$ segue que podemos tomar $\delta = \min\{p, q\}$ e $g_0 = \max\{p, q, 2\}$.

6. Semelhantemente ao caso anterior, para quaiquer constantes positivas t_0, a_i, c_j, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$, existem únicas constantes $c > 0$ e $d \neq 0$ tais que a função diferenciável dada por

$$g(t) = ct^{a_1}, \quad \text{para} \;\; 0 \leq t \leq t_0 \quad \text{e} \quad g(t) = c_1 t^{a_2} + c_2 t^{a_3} + d, \quad \text{para } t \geq t_0,$$

satisfaz a condição (C-Lip) para

$$\delta = \min_{i \in \{1,2,3\}} \{a_i\} \;\; \text{e} \;\; g_0 = \max_{i \in \{2,3\}} \{a_1, a_i + (1+\sqrt{2})/2\} \cdot r,$$

para $r = 1 - d/g(t_0)$ e caso $d < 0$ e

$$\delta = \min\left\{ \left(1 - \frac{d}{g(t_0)}\right) \min_{i \in \{2,3\}} \{a_i\}, \;\, a_1 \right\} \;\; \text{e} \;\; g_0 = \max_{i \in \{1,2,3\}} \{a_i, (\sqrt{2}+1)/2\},$$

caso tenhamos $d > 0$.

7. Um outro exemplo similar que satisfaz a condição (C-Lip) é dado por uma função diferenciável g definida por

$$g(t) = c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2}, \quad \text{para} \;\; 0 \leq t \leq t_0 \quad \text{e} \quad g(t) = c_3 t^{a_3} + d \quad \text{para } t \geq t_0,$$

onde a_i, c_i, t_0 são constantes positivas. Temos

$$\delta = \min_{i \in \{1,2,3\}} \{a_i\} \;\; \text{e} \;\; g_0 = \max\{a_1, a_2, 2a_3, (1+\sqrt{3})/2\}, \qquad \text{se } d < 0 \text{ e}$$

$$\delta = \{a_1, a_2, (1 - d/g(t_0))\, a_3\} \text{ e } g_0 = \max_{i \in \{1,2,3\}} \{a_i, (\sqrt{2}-1)/2\}, \qquad \text{caso } d > 0.$$

Como mencionado previamente, as seguintes operações elementares deixam invariantes a condição (C-Lip).

- **Combinações lineares finitas por coeficientes positivos:** Sejam $G_1, \cdots, G_m$ N-funções tais que $G_j \in \mathcal{G}_2(\delta_j, g_{0,j})$ e seja $g_j = G_j'$, $1 \leq j \leq m$, então para $\lambda_j > 0$ definamos
$$g = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j.$$
Temos
$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$$
para $\delta = \min\{\delta_j\}$ e $g_0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{0,j}$;
- **Produto de N-funções:** Seja
$$G_i = \int_0^t g_i(s)ds$$
para $i = 1, 2$ onde $G_j \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta_j, g_{0,j}), j = 1, 2$, então
$$G = \int_0^t g_1(s)g_2(s)ds \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$$
com $\delta = \delta_1 + \delta_2$ e $g_0 = g_{0,1} + g_{0,2}$;
- **Composição de N-funções:** Se $G_j = g_j', j = 1, 2$ com $G_j \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta_j, g_{0,j})$, então
$$G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$
onde $g(t) = g_1(g_2(t))$, pertence a $\mathcal{G}_2(\delta, g_0)$ com $\delta = \delta_1 \cdot \delta_2$ e $g_0 = g_{0,1} \cdot g_{0,2}$;
- **Colagens finitas de ordem C^2 de N-funções:** Sejam $G_1, \cdots, G_m$ N-funções tais que $G_j \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta_j, g_{0,j})$, com $G_j' = g_j$ e suponha que existam $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < \infty$ tais que:
$$G_j(t_j) = G_{j+1}(t_j), \quad g_j(t_j) = g_{j+1}(t_j) \quad \text{e} \quad g_j'(t_j) = g_{j+1}'(t_j).$$
Então, $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds \in \mathcal{G}_{Lip}(\delta, g_0)$, onde
$$g(t) = g_i(t), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad \text{e} \quad g(t) = g_m(t), \quad t_{m-1} \leq t$$
com $i = 0, 1, ..., m-1$, $t_0 = 0$, $\delta = \min\{\delta_j\}$ e $g_0 = \max\{g_{0,j}\}$.

3.6 Caráter Lipschitz Pontual sob Condição de Pequena Densidade - (Prova do Teorema 2.7)

Esta seção é devotada a prova de um dos principais resultados deste Capítulo, o Teorema 2.7. Na direção de prová-lo apresentaremos um Lema que providencia uma estimativa colocando em perspectiva o caráter da continuidade Hölder e/ou Lipschitz de funções. Uma vez enunciado e provado este Lema o usaremos na seqüência.

Lema 3.4 (Caráter da Continuidade Hölder/Lipschitz) *Seja* $w : (0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função não-negativa e não-decrescente tal que* $w(1) \leq L$ *para alguma constante* $L > 0$. *Suponha* $0 < \tau < 1$ *e* $0 < \alpha \leq 1$ *tais que*

$$w(\tau^{k+1}) \leq \max_{0 \leq m \leq k} \left\{ L \cdot \tau^{\alpha(k+1)}, \ \tau^{\alpha(m+1)} \cdot w(\tau^{k-m}) \right\} \text{ para todo } \ k \geq 0. \tag{79}$$

Então,

$$w(r) \leq \tau^{-\alpha} L r^{\alpha} \quad \text{ para } 0 < r \leq 1.$$

Em particuar, se u *é uma função limitada em* B_1 *tal que* $\sup_{B_1} |u| \leq L$ *e*

$$\sup_{B_{\tau^{k+1}}} |u| \leq \max_{0 \leq m \leq k} \left\{ L \cdot \tau^{\alpha(k+1)}, \quad \tau^{\alpha(m+1)} \cdot \sup_{B_{\tau^{k-m}}} |u| \right\} \text{para todo } \ k \geq 0, \tag{80}$$

temos a seguinte estimativa,

$$|u(x)| \leq \tau^{-\alpha} L |x|^{\alpha} \quad \text{ para todo } \quad x \in B_1.$$

Prova: Com efeito, afirmamos que $w(\tau^k) \leq \tau^{\alpha k} L$ para todo $k \geq 0$. Provemos isto via processo de indução sobre k. Por condição inicial a afirmação é verdadeira para $k = 0$. Assuma agora que nossa afirmativa continue sendo verdadeira para todo $k \leq k_0 \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Assim, por hipótese de indução, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ com $0 \leq m \leq k_0$

$$w(\tau^{k_0 - m}) \tau^{\alpha(m+1)} \leq \tau^{\alpha(k_0 - m)} L \tau^{\alpha(m+1)} = L \tau^{\alpha(k_0+1)}.$$

Esta estimativa e (79) implicam em

$$w(\tau^{k_0+1}) \leq \max_{0 \leq m \leq k_0} \left\{ L \cdot \tau^{\alpha(k_0+1)}, \tau^{\alpha(m+1)} \cdot w(\tau^{k_0-m}) \right\} \leq L \tau^{\alpha(k_0+1)}$$

provando a afirmação. Se $0 < r \leq 1$, podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^{k_0+1} \leq r < \tau^{k_0}$. Logo, pela afirmação e pela monotonicidade de w concluímos que

$$w(r) \leq w(\tau^{k_0}) \leq \tau^{\alpha k_0} L = \frac{\tau^{\alpha(k_0+1)} L}{\tau^{\alpha}} \leq \tau^{-\alpha} L r^{\alpha}.$$

A segunda parte do Lema segue simplesmente por observar que $w(r) = \sup_{B_r} |u|$ satisfaz as hipóteses da primeira parte do Lema.

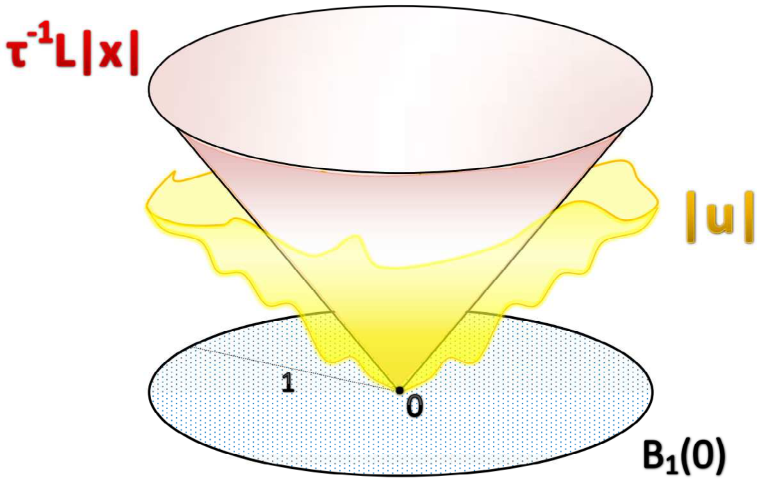
$\blacksquare$

Observação 3.5 *Observamos que as condições $w(1) \leq L$ ou $\sup_{B_1} u \leq L$ não podem ser suprimidas do Lema anterior. De fato, considere a função $u(x) = \mu\tau L|x|^\alpha$ em B_1 onde $\mu\tau^{\alpha+1} > 1$, de modo que $\sup_{B_1} u > L$. Veja que a estimativa (80) é satisfeita. Com efeito, $\sup_{B_{\tau^{k+1}}} u = \mu L \tau^{\alpha(k+1)+1}$ e uma vez que $\mu\tau^{\alpha+1} > 1$ obtemos que*

$$\max_{0\leq m\leq k}\left\{L\cdot\tau^{\alpha(k+1)}),\quad \tau^{\alpha(m+1)}\cdot\sup_{B_{\tau^{k-m}}}|u|\right\} = \max\left\{L(\tau^{k+1})^\alpha,\quad \mu\tau^{\alpha(k+1)+1}L\right\} = \mu\tau^{\alpha(k+1)+1}L.$$

Todavia, a desigualdade $|u(x)| \leq \tau^{-\alpha}L|x|^\alpha$ não se verifica qualquer que seja $x \in B_1 \setminus \{0\}$.

Figura 10 – Gráfico quando consideramos $\alpha = 1$ no Lema anterior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Somos enfim detentores de todos os ingredientes necessários para provar o Teorema 2.7. Por comodidade vamos reenunciá-lo.

Teorema (Teorema 2.7) Existe uma constante universal $0 < c = c(n, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, \beta) << 1$ tal que a estimativa

$$|u(x)| \leq \frac{2\cdot\max\{M,1\}}{c}\cdot|x-x_0|, \quad \forall\, x \in B_1(x_0) \tag{81}$$

vale para toda $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$ sempre que $\Theta_u^-(x_0, r) \leq c$ para todo $0 < r < 1$. Além disso, a mesma estimativa é verdadeira se substituirmos a condição $\Theta_u^-(x_0, r) \leq c$ por $\Theta_u^+(x_0, r) \leq c$.

Prova: Sem perda de generalidade podemos assumir que $x_0 = 0$. De fato, suponha que o Teorema seja verdadeiro para minimizantes em $S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(0)$ e considere $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$. Então $\overline{u}(x) = u(x + x_0) \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(0)$. Aplicando portanto o Teorema para $\overline{u}$ e retornando para u obtemos

$$|u(x)| \leq \frac{2 \cdot \max\{M, 1\}}{c} \cdot |x - x_0|, \quad \forall x \in B_1(x_0). \tag{82}$$

A prova será dividida em dois casos:

__**Caso 1:**__ $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, 1)(0)$.
Desde que $0 < c < 1$ (de fato, ela é uma constante suficientemente pequena), Lema 3.4 aplicado com $L = 1/c, \tau = 1/2$ e $\alpha = 1$ mostra que em ordem para provar (82) neste caso, é suficiente verificarmos que existe uma constante universal $c > 0$ tal que para qualquer $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, 1)(0)$ satisfazendo $\Theta_u^-(0, r) \leq c$ para todo $0 < r < 1$ tenhamos

$$\sup_{B_{2^{-(k+1)}}} |u(x)| \leq \max_{0 \leq m \leq k} \left\{ \frac{1}{c \cdot 2^{k+1}}, \frac{S(k-m)}{2^{m+1}} \right\}, \quad \forall\, k \geq 0 \tag{83}$$

onde $S(j) := \sup_{B_{2^{-j}}} |u|$. Assim, supomos por contradição que a condição (83) não possa ser verificada. Portanto, para cada $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, podemos encontrar números inteiros $k_j \geq 0$ e funções $u_j \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, 1)(0)$ tais que

$$\sup_{B_1} |u_j| \leq 1,$$

$$\Theta_{u_j}^-(0, 2^{-k_j}) \leq \frac{1}{j} \to 0 \quad \text{quando } j \to \infty, \tag{84}$$

mas

$$\sup_{B_{2^{-(k_j+1)}}} |u_j(x)| > \max_{0 \leq m \leq k_j} \left\{ \frac{j}{2^{k_j+1}}, \frac{S_j(k_j - m)}{2^{m+1}} \right\} \tag{85}$$

onde

$$S_j(k_j - m) = \sup_{B_{2^{-(k_j - m)}}} |u_j|, \ 0 \leq m \leq k_j.$$

Além disso, note que (85) implica em $k_j \geq \log_2 j - 1 \to \infty$.
Para o que segue consideramos a seguinte família de funções auxiliares

$$v_j(x) := \frac{u_j(2^{-k_j} x)}{S_j(k_j + 1)}, \quad x \in B_{2^{k_j}}. \tag{86}$$

Uma vez que a densidade é invariante pelo reescalonamento acima, (84) implica que

$$\frac{|\{v_j < 0\} \cap B_1|}{|B_1|} \leq \frac{1}{j}. \tag{87}$$

Temos ainda que, para cada u_j, existem $G_j \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0)$ e $0 \le f_{1,j}, f_{2,j} \le \mu$ em B_1 tais que u_j é um minimizante de

$$E_{G_j}(u_j) = \int_{B_1} [G_j(|\nabla w|) + \lambda(f_{1,j}, f_{2,j})(u_j)]dx.$$

Por outro lado, via Observação 3.1, u_j minimiza E_{G_j} se e somente se u_j minimiza o funcional

$$I^2_{G_j}(u_j) := \int_{B_1} [G_j(|\nabla u_j|) + f_j(u_j)]dx,$$

onde $f_j(u_j) := \lambda_2(f_{1,j}, f_{2,j})(u_j)$. Pondo $g_j = G'_j$ podemos considerar a seguinte família de reescalonamentos não-lineares

$$\overline{G}_j(t) := G_{\sigma_j}(t) = \frac{G_j(\sigma_j t)}{\sigma_j g_j(\sigma_j)}, \quad \text{onde} \quad \sigma_j := 2^{k_j} \cdot S_j(k_j + 1). \tag{88}$$

Nestas condições, Proposição (3.3) implica em

$$\overline{G}_j \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, (1 + g_0)^{-1}) \ \text{ e } \ \overline{G}_j(1) \le 1. \tag{89}$$

Novamente por (85),

$$\sigma_j \ge \frac{j}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } j \to \infty. \tag{90}$$

Definimos agora, para cada j, o seguinte funcional

$$\mathcal{F}_j(w) := \int_{B_{2^{k_j}}} [\overline{G}_j(|\nabla w|) + \overline{f}_j(w)]dx,$$

onde $\overline{f}_j(w)(x) = \lambda_2(\overline{f}_{1,j}, \overline{f}_{2,j})(w)(x)$ e para $i = 1, 2$,

$$\overline{f}_{i,j}(x) = \frac{f_{i,j}(2^{-k_j}x)}{\sigma_j g_j(\sigma_j)}.$$

Afirmamos que v_j é um minimizante para $\mathcal{F}_j$. Com efeito, para qualquer $\psi \in W^{1,\overline{G}_j}_c(B_{2^{k_j}})$ temos

$$\widehat{\psi}(x) := S_j(k_j + 1) \cdot \widehat{\psi}(2^{k_j}x) \in W^{1,G_j}_c(B_1).$$

Portanto,

$$\mathcal{F}_j(v_j + \psi, B_{2^{k_j}}) = \frac{2^{k_j n}}{\sigma_j g(\sigma_j)} I^2_{G_j}(u_j + \widehat{\psi}, B_1) \ge \frac{2^{k_j n}}{\sigma_j g(\sigma_j)} I^2_{G_j}(u_j, B_1) = \mathcal{F}_j(v_j, B_{2^{k_j}}).$$

Nos valendo mais uma vez de (85), por (90), pela condição de não-degenerescência, $G_j(1) \geq \varepsilon_0$, e por $(G-2)$ concluímos que

$$\|v_j\|_{L^\infty(B_8)} \leq \frac{S_j(k_j-3)}{S_j(k_j+1)} \leq 16 \tag{91}$$

e

$$\|\overline{f}_j(w)\|_{L^\infty(B_8)} \leq \frac{1+g_0}{\varepsilon_0} \cdot 2^{1+\delta} \cdot \frac{\mu}{j^{1+\delta}} \to 0 \quad \text{quando } j \to \infty, \tag{92}$$

para qualquer função $w : B_{2^{k_j}} \to \mathbb{R}$.
Esta informação, juntamente com (89) implicam que para j suficientemente grande $v_j \in \mathcal{S}(B_8, \delta, g_0, (1+g_0)^{-1}, 1, 16)$.
Desta forma, a estimativa Hölder uniforme - Teorema 3.1 com $\alpha = 1/2$ - nos garante que

$$\|v_j\|_{C^{0,1/2}(B_4)} \leq 16 + C(n, \delta, g_0).$$

Assim, podemos concluir que existe uma função $v_\infty \in C^{0,1/2}(B_4)$ tal que

$$v_j \longrightarrow v_\infty \quad \text{uniformemente em} \quad B_4. \tag{93}$$

Prosseguindo o argumento consideramos agora $\{w_j\}_{j\geq 1}$ uma seqüência de soluções em $W^{1,\overline{G}_j}(B_4)$ para a seguinte seqüência de problemas de Dirichlet

$$\mathcal{L}_j w_j = 0 \quad \text{em} \quad B_4 \quad \text{e} \quad w_j = v_j \quad \text{on} \quad \partial B_4,$$

onde os operadores $\mathcal{L}_j$ são dados por

$$\mathcal{L}_j w := div\left(\overline{g}_j(|\nabla w|)\frac{\nabla w}{|\nabla w|}\right), \qquad \overline{g}_j = \overline{G}_j'.$$

Agora, usamos uma versão ligeiramente modificada das estimativas de estabilidade ((47), (49), (50)) desenvolvidas na prova do Teorema 3.1. Uma inspeção cuidadosa dessas estimativas revela que todas as estimativas que trabalhamos com $B_{r^{1+\varepsilon}}$ podem ser substituidas por B_r e a constante μ substituida por $\|\overline{f}_j(w)\|_{L^\infty(B_8)}$. Também, (49) e (50) valem quando substituimos $\overline{\beta}$ por n na situação em que $r \geq 1$.
Dessa forma, uma combinação dessas estimativas em conjunto para $r = 4$, encontramos por (92) que

$$\int_{B_4} \overline{G}_j(|\nabla v_j - \nabla w_j|)dx \leq C(n, \delta, g_0).\left(\|\overline{f}_j(v_j)\|_{L^\infty(B_8)}\right)^{1/2} \leq C(n, \delta, g_0, \varepsilon_0, \mu) \cdot j^{-1/2}. \tag{94}$$

Além disso, para todo j, $(G-2)$ e (89) garantem que

$$\frac{1}{(g_0+1)^2}\min\{t^{1+\delta},t^{1+g_0}\} \le \overline{G}_j(t) \le (g_0+1)\max\{t^{1+\delta},t^{1+g_0}\} \quad \forall\ t \ge 0. \tag{95}$$

Logo, ao colocarmos

$$B_4^- := B_4 \cap \{|\nabla v_j - \nabla w_j| < 1\} \text{ and } B_4^+ := B_4 \cap \{|\nabla v_j - \nabla w_j| \ge 1\},$$

chegamos, mediante (94) e (95), em

$$\frac{C}{j^{1/2}} \ \ge\ (1+g_0)^{-2}\left(\int_{B_4^-}|\nabla v_j - \nabla w_j|^{g_0+1}dx + \int_{B_4^+}|\nabla v_j - \nabla w_j|^{\delta+1}dx\right),$$

e pela desigualdade de Hölder

$$\int_{B_4^-}|\nabla v_j - \nabla w_j|^{1+\delta}dx \le |B_4|^{\frac{g_0-\delta}{1+g_0}}\left(\int_{B_4^-}|\nabla v_j - \nabla w_j|^{1+g_0}dx\right)^{(1+\delta)/(1+g_0)}.$$

Portanto,

$$\frac{C}{j^{1/2}} \ge (1+g_0)^{-2}\left[|B_4|^{\frac{\delta-g_0}{1+\delta}}\left(\int_{B_4^-}|\nabla v_j - \nabla w_j|^{\delta+1}dx\right)^c + \int_{B_4^+}|\nabla v_j - \nabla w_j|^{\delta+1}dx\right],$$

onde $c = (1+g_0)/(1+\delta) \ge 1$. Assim, para $\widetilde{C} = \widetilde{C}(n,\delta,g_0,\varepsilon_0)$

$$\frac{\widetilde{C}}{j^{1/2c}} \ge \int_{B_4}|\nabla v_j - \nabla w_j|^{1+\delta}dx.$$

Agora, segue pela desigualdade de Poincaré que

$$h_j := v_j - w_j \longrightarrow 0 \quad \text{em} \ \ W_0^{1,\delta+1}(B_4). \tag{96}$$

Pelo Princípio do Máximo e estimativa (91) temos

$$\|w_j\|_{L^\infty(B_4)} = \|v_j\|_{L^\infty(B_4)} \le 16.$$

Ainda, Teorema 2.6 garante que existe uma constante $C = C(n,\delta,g_0) > 0$ tal que $\|w_j\|_{C^{1,\alpha}(B_2)} \le C$. Logo, podemos encontrar $w_\infty \in C^{1,\alpha/2}(B_2)$ tal que, a menos de subseqüência,

$$w_j \longrightarrow w_\infty \quad \text{uniformly in} \ \ B_2.$$
$$\nabla w_j \longrightarrow \nabla w_\infty \quad \text{uniformly in} \ \ B_2.$$

Desta foram concluímos que $v_\infty = w_\infty$ em B_2 via (96). Uma vez que dispomos de (89), podemos usar nosso resultado de compacidade - Teorema 3.3 - para concluir que existe uma N-função $G_\infty \in \mathcal{G}(\delta, g_0) \cap C^{2,\beta}(0,\infty)$ tal que, novamente a menos de subseqüência,

$$\overline{G}_j \longrightarrow G_\infty \text{ e } \overline{G}_j{}' \longrightarrow G'_\infty \quad \text{uniformemente em subconjuntos compactos de} \quad [0,\infty),$$

e

$$\overline{G}_j{}'' \longrightarrow G''_\infty \quad \text{uniformemente em subconjuntos compactos de} \quad (0,\infty).$$

Para o que segue afirmamos que v_∞ é um minimizante(global) do funcional dado por $I(v, B_1) := \int_{B_1} G_\infty(|\nabla v|)dx$, i.e,

$$I(v_\infty) \leq I(v_\infty + \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_1).$$

De fato, desde que v_j é um minimizante de $\mathcal{F}_j$, para qualquer função $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$ dada, temos que

$$\int_{B_1} [\overline{G}_j(|\nabla v_j|) + \overline{f}_j(v_j)]dx \leq \int_{B_1} [\overline{G}_j(|\nabla (v_j + \varphi)|) + \overline{f}_j(v_j + \varphi)]dx. \tag{97}$$

Desde que ∇w_j é uniformemente limitada em B_1 pela estimativa $C^{1,\alpha}$, segue por convergência uniforme que

$$\int_{B_1} |\overline{G}_j(|\nabla w_j|) - G_\infty(|\nabla v_\infty|)| dx \longrightarrow 0. \tag{98}$$

Uma vez que

$$\overline{G}_j(|\nabla v_j|) \leq 2^{g_0}(1+g_0)[\overline{G}_j(|\nabla (v_j - w_j)|) + \overline{G}_j(|\nabla w_j|)],$$

concluímos por (94), (98) e pelo Teorema 4.9 em Brezis (2010) que existe $h \in L^1(B_1)$ tal que

$$\overline{G}_j(|\nabla v_j|) \leq h \quad \text{q.t.p. em} \quad B_1.$$

Portanto, como $\nabla v_j \to \nabla v_\infty$ q.t.p. em B_1, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que

$$\int_{B_1} \overline{G}_j(|\nabla v_j|)dx \longrightarrow \int_{B_1} G_\infty(|\nabla v_\infty|)dx.$$

Passando a uma subseqüência, se necessário, encontramos

$$|\overline{G}_j(|\nabla (v_j + \varphi)(x)|)| \leq h_\varphi(x) \quad \text{para } q.t.p.\ x \in B_1,$$

para

$$h_{\varphi} := C(g_0)\left[h + (|1 + \sup_{B_1}|\nabla\varphi|)^{1+g_0}\right] \in L^1(B_1).$$

Novamente pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_{B_1} \overline{G}_j(|\nabla(v_j+\varphi)|)dx \longrightarrow \int_{B_1} G_{\infty}(|\nabla(v_{\infty}+\varphi)|)dx. \tag{99}$$

Em adição, por (92) encontramos

$$\int_{B_1} \overline{f}_j(v_j)dx \longrightarrow 0 \text{ e } \int_{B_1} \overline{f}_j(v_j+\varphi)dx \longrightarrow 0.$$

Portanto, passando o limite em (97), vemos, como afirmado, que $\forall\varphi \in C_0^{\infty}(B_1)$

$$\int_{B_1} G_{\infty}(|\nabla v_{\infty}|)dx \leq \int_{B_1} G_{\infty}(|\nabla(v_{\infty}+\varphi)|)dx.$$

Isto implica que para $g_{\infty} := G'_{\infty}$, v_{∞} é uma solução fraca para

$$\mathcal{L}_{\infty}v_{\infty} := div\left(g_{\infty}(|\nabla v_{\infty}|)\frac{\nabla v_{\infty}}{|\nabla v_{\infty}|}\right) = 0 \qquad \text{em} \qquad B_1,$$

$$\text{com} \qquad G_{\infty} \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$$

$$\text{e} \qquad v_{\infty}(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad 0 \leq v_{\infty} \leq 2 \qquad \text{e} \qquad \sup_{B_{1/2}} v_{\infty} = 1,$$

onde o primeiro fato na última linha acima segue pela estimativa de decaimento da densidade dado por (87), o segundo fato segue por

$$\sup_{B_1}|v_j| = \frac{\sup_{B_1}|u_j(2^{-k_j}x)|}{S_j(k_j+1)} = \frac{S_j(k_j)}{S_j(k_j+1)} < 2$$

e para o último fato observamos que

$$\sup_{B_{1/2}} v_{\infty} = \lim_j \sup_{B_{1/2}}|v_j| = \lim_j \frac{S_j(k_j+1)}{S_j(k_j+1)} = 1.$$

Portanto, pela desigualdade de Harnack (Corolário 1.4 em Lieberman (1991)) temos para $C_0 = C_0(\delta, g_0, n) > 0$

$$1 = \sup_{B_{1/2}} v_{\infty} \leq C_0 \cdot v_{\infty}(0) = 0,$$

que é uma contradição. Desta forma, (83) se verifica e o mesmo acontece com (82).

<u>Caso 2:</u> $u \in S_1^{\beta}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(0)$ para $M > 1$.

Como antes, u é um minimizante de um funcional do tipo E_G da forma

$$E_G(u, B_1) = \int_{B_1} [G(|\nabla u|) + \lambda(f_1, f_2)(u)]dx$$

com $G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0)$, $\mu \geq 0$ e $\sup_{B_1} |u| \leq M$. Agora, não é dificil ver que se definirmos $v := u/M$, então $\sup_{B_1} |v| \leq 1$ e v é um minimizante de $E_{G^*_M}(w) = \int_{B_1} [G^*_M(|\nabla w|) + \lambda(f_1, f_2)(w)]dx$. Desde que, pela Proposição 3.3, $G^*_M \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \varepsilon_0)$ temos que $v \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, 1)(0)$. A estimativa fica provada ao aplicarmos o Caso 1 a v.
A prova do Teorema fica completa quando observamos que se $\theta_u^+(x_0, r) \leq c$ para todo $0 < r < 1$ o resultado segue, pois $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0) \Longrightarrow -u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$. Assim, aplicamos o resultado provado para $-u$.

$\blacksquare$

Para o que segue apresentamos uma Proposição que é uma versão escalonada do Teorema 2.7. Particularmente, mostramos de forma precisa a dependência que existe entre a constante de Lipschitz de minimizantes e a escala onde a densidade torna-se suficientemente pequena aos nossos propósitos. Essa Proposição será útil para seção seguinte no que tange a provar a regularidade Lipschitz de minimizantes além de establecer estimativas por baixo da densidade da fase negativa nos pontos de contato entre as fronteiras livres sob condições apropriadas.

Proposição 3.4 *Existe uma constante universal $c = c(n, \delta, g_0, \beta) > 0$ (possivelmente pequena) tal que a seguinte estimativa*

$$|u(x)| \leq \frac{2 \cdot \max\{M, 1\}}{c \cdot \rho} \cdot |x - x_0|, \quad \forall x \in B_\rho(x_0) \tag{100}$$

vale para qualquer $u \in S_\rho^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$ com $\rho \leq \rho_0$ desde que $\Theta_u^-(x_0, r) \leq c$ (ou $\Theta_u^+(x_0, r) \leq c$) para todo *0 ¡ $r \leq \rho$, onde $\rho_0 = \rho_0(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu) \leq 1$ é também uma constante universal.*

Prova: Sem perda podemos assumir que $x_0 = 0$ e considerar o caso em que $\Theta_u^-(x_0, r) \leq c$. Desde que $u \in S_\rho^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(0)$ existem

$$G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0), \quad 0 \leq f_1, f_2 \leq \mu,$$

tais que u é um minimizante de

$$E_G(u) = \int_{B_\rho} [G(|\nabla u|) + \lambda(f_1, f_2)(u)]dx$$

onde $\lambda(f_1,f_2)(u)$ são dadas por (30). Considere agora a função reescalonada $v(x):=u(\rho x)$ para $x\in B_1$. Afirmamos que

$$v\in S_1^\beta(\delta,g_0,(1+g_0)^{-1},1,M)(0) \quad \text{para} \quad \rho\le\rho_0:=\min\left\{1,\left(\frac{\varepsilon_0}{(1+g_0)\mu}\right)^{(1+\delta)^{-1}}\right\}.$$

Afim de mostar este fato, vemos que é suficiente provar que para qualquer bola $B_r(y_0)\subset B_1(0)$ e $w\in W^{1,G}(B_r(y_0))$ com $w=v$ sobre $\partial B_r(y_0)$ tem-se

$$\mathcal{J}(v)\le\mathcal{J}(w), \tag{101}$$

onde

$$\mathcal{J}(\eta,B_r(y_0)):=\int_{B_r(y_0)}\Big[G_{\rho^{-1}}(|\nabla\eta|)+\frac{\lambda(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)(\eta)(x)}{\rho^{-1}g(\rho^{-1})}\Big]dx, \quad g=G'.$$

$$\widetilde{f}_i(x)=f_i(\rho x), \quad \text{para } x\in B_1 \text{ and } i=1,2.$$

Note que

$$\lambda(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)(\eta)(x)=\lambda(f_1,f_2)(\overline{\eta})(\rho x), \ \text{ onde } \overline{\eta}(x):=\eta(\rho^{-1}x),\ x\in B_1.$$

Dessa forma, se definirmos $\overline{w}(x)=w(\rho^{-1}x)$ então $\overline{w}\in W^{1,G}(B_{\rho r}(\rho y_0))$ com $\overline{w}=u$ sobre $\partial B_{\rho r}(\rho y_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(v,B_r(y_0)) &= \frac{\rho}{g(\rho^{-1})}\int_{B_r(y_0)}[G(\rho^{-1}|\nabla v(x)|)+\lambda(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)(v)(x)]dx\\
&= \frac{\rho}{g(\rho^{-1})}\int_{B_r(y_0)}[G(|\nabla u(\rho x)|)+\lambda(f_1,f_2)(u)(\rho x)]dx\\
&= \frac{1}{\rho^{n-1}g(\rho^{-1})}\int_{B_{\rho r}(\rho y_0)}[G(|\nabla u(y)|)+\lambda(f_1,f_2)(u)(y)]dy\\
&= \frac{1}{\rho^{n-1}g(\rho^{-1})}E_G(u,B_{\rho r}(\rho y_0))\\
&\le \frac{1}{\rho^{n-1}g(\rho^{-1})}E_G(\overline{w},B_{\rho r}(\rho y_0))\\
&= \mathcal{J}(w,B_r(y_0)).
\end{aligned}$$

Observe também que, pela Proposição 3.3, $G_{\rho^{-1}} \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, (1+g_0)^{-1})$. Ademais, $(g-2)$ e $(G-2)$ implicam, para $\rho \leq \rho_0$, que

$$\rho^{-1}g(\rho^{-1}) \geq G(\rho) \geq \frac{G(1)}{1+g_0}\min\{\rho^{-(1+\delta)}, \rho^{-(1+g_0)}\} \geq \frac{\varepsilon_0}{1+g_0}\rho^{-(1+\delta)} \geq \mu,$$

e portanto

$$\sup_{x\in B_1}\left\{\frac{|f_1(\rho x)|}{\rho^{-1}g(\rho^{-1})}, \frac{|f_2(\rho x)|}{\rho^{-1}g(\rho^{-1})}\right\} \leq \frac{\mu}{\rho^{-1}g(\rho^{-1})} \leq 1.$$

Sendo assim, uma vez que $||v||_{L^\infty(B_1)} \leq M$ e $0 \in F^\pm(v)$, a afirmação fica provada. Finalmente, aplicando o Teorema 2.7 para v obtemos

$$|v(x)| \leq \frac{2\max\{M,1\}}{c}\cdot|x| \quad \forall x \in B_1(0),$$

desde que $\Theta_v^-(x_0, r) \leq c$ para todo $0 < r < 1$, onde $c = c(n, \delta, g_0, (1+g_0)^{-1}, 1, \beta) > 0$ é uma constante universal possivelmente pequena. Transcrevendo estes fatos em termos da função u a prova está completa.

■

3.7 Regularidade Lipschitz Uniforme via Propagação da Condição de Pequena Densidade sobre a Fronteira Livre - (Prova do Corolário 2.1)

Nesta seção providenciamos a prova do Corolário 2.1. Novamente por comodidade enunciaremos o resultado antes de demonstrá-lo.

Corolário 3.2 (Corolário 2.1) *Considere $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(0)$ e assuma que*

$$\Theta_u^-(z,r) \leq c \text{ (} ou \text{ } \Theta_u^+(z,r) \leq c) \quad \forall\, z \in F^\pm(u) \cap B_{3/4} \quad \text{e para todo } \; 0 < r < 1/4,$$

onde $c > 0$ é a constante dada pelo Teorema 2.7. Então u é Lipschitz contínua em $B_{1/2}$ e

$$[u]_{C^{0,1}(B_{1/2})} \leq \frac{C_0 \cdot \max\{M,1\}}{c},$$

para alguma constante universal $C_0 = C_0(n, \delta, g_0) > 0$.

Prova: Suponha que $0 \in F^+(u)$ e considere $x_0 \in B_{1/2}(0)$. Desde que o caso em que $u(x_0) < 0$ pode ser tratado de forma análoga, podemos assumir que $u(x_0) > 0$. Defina $d(x_0) := dist(x_0, \partial\{u > 0\})$ e seja $z_0 \in \partial\{u > 0\}$ tal que $d(x_0) = |x_0 - z_0|$. Se $|x_0 - z_0| \geq 1/4$, então por estimativa local do gradiente, (27),

$$|\nabla u(x_0)| \leq \sup_{B_{1/8}(x_0)}|\nabla u(x)| \leq 4C_1M \leq \frac{4C_1M}{c} \leq \frac{4C_1}{c}\max\{M,1\},$$

uma vez que $0 < c < 1$. Caso $|x_0 - z_0| < 1/4$ temos $|z_0| < 3/4$. Ademais, $u \in \mathcal{S}^{\beta}_{1/4}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(z_0)$ e $\Theta^-_u(z_0, r) \leq c$ para $0 \leq r \leq 1/4$. Portanto, pelo Teorema 2.7, existe uma constante universal $c > 0$,

$$u(x_0) \leq \frac{2 \cdot \max\{M, 1\}}{c} d(x_0).$$

Desde que u é uma solução positiva para $\mathcal{L}_g(u) = 0$ em $B_{d(x_0)}(x_0)$ para alguma função $g = G'$ com $G \in \mathcal{G}_\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0)$, desiguladade de Harnack provada em Liberman (1991) implica em

$$u \leq \frac{2c_0 \cdot \max\{M, 1\}}{c} d(x_0) \quad \text{em } B_{d(x_0)/2}(x_0), \tag{102}$$

where $c_0 := c(n, \delta, g_0)$. Novamente por (27) e (102), para $r = d(x_0)/4$, temos

$$|\nabla u(x_0)| \leq \sup_{B_{r/2}(x_0)} |\nabla u| \leq \frac{C_1}{r} \sup_{B_r(x_0)} u \leq \frac{8c_0 \cdot C_1 \cdot \max\{M, 1\}}{c}.$$

O caso em que $0 \in F^-(u)$ é tratado também de forma similar.

■

Combinando a prova do Corolário acima com a prova da Proposição 3.4, obtemos o seguinte resultado escalonado.

Observação 3.6 (Versão Escalonada do Corolário 2.1) *Sejam c e ρ_0 como na Proposição 3.4, considere $u \in S^{\beta}_{\rho}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$ com $\rho \leq \rho_0$ e assuma que*

$$\Theta^-_u(z, r) \leq c \ (\text{ ou } \Theta^+_u(z, r) \leq c) \quad \forall\ z \in F^{\pm}(u) \cap B_{3\rho/4}(x_0) \quad \text{e para todo } \ 0 < r < \rho/4.$$

Então,

$$[u]_{C^{0,1}(B_{\rho/2}(x_0))} \leq \frac{C_0 \cdot \max\left\{M, 1\right\}}{c \cdot \rho} \quad \text{para} \quad C_0 = C_0(n, \delta, g_0) > 0.$$

Observação 3.7 (Minimizantes com sinal) *Sejam c e ρ_0 como na Proposição 3.4. Observamos que*

$$u \in S^{\beta}_{\rho}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0) \Longrightarrow -u \in S^{\beta}_{\rho}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0). \tag{103}$$

Também, se $u \in S^{\beta}_{\rho}(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$ com $\rho \leq \rho_0$ e $u \geq 0$ ou $u \leq 0$ em $B_\rho(x_0)$, então

$$[u]_{C^{0,1}(B_{\rho/2}(x_0))} \leq \frac{C_0 \cdot \max\left\{M, 1\right\}}{c \cdot \rho} \quad \text{para} \quad C_0 = C_0(n, \delta, g_0) > 0.$$

Com efeito, por (103), podemos assumir que $u \geq 0$. Observe que $\Theta^-_u(x, r) = 0 < c$ para todo $x \in B_{3\rho/4}(x_0)$ e $0 < r < \rho/4$. O resultado segue pela Observação 3.6. Na verdade, pode-se provar Lipschitz regularidade para uma classe maior de minimizantes quando estes tem sinal. A estimativa pode de fato ser provada para $u \in S_1(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu)(0)$ desde que $u \geq 0$ ou $u \leq 0$ usando o Teorema 2.8.

3.8 Regularidade e Comportamento de Toque entre as Fronteiras Livres $F(u)^+$ e $F(u)^-$ - (Prova da Proposição 2.2)

No paper clássico Alt, Caffarelli e Friedman (1984), os autores estudaram minimizantes de funcionais do tipo

$$J(u, B_1) = \int_{B_1} \Big\{ |\nabla u|^2 + \lambda_2 \cdot \chi_{\{u>0\}} + \lambda_1 \cdot \chi_{\{u<0\}} + \min(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \chi_{\{u=0\}} \Big\} dx,$$

onde $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Para dar continuidade ao trabalho passam a considerar $\Lambda < 0$ uma vez que o outro caso, isto é, quando $\Lambda > 0$ pode ser tratado similarmente. Fixado a condição $\Lambda < 0$ segue que minimizantes são funções globalmete subharmônicas (veja Teorema 2.3 em Alt, Caffarelli e Friedman (1984)). Este fato juntamente com o princípio do máximo restringem a geometria de toque que podem tomar as fronteiras livres $F^+(u)$ e $F^-(u)$. Essencialmente $F^-(u)$ não pode separar-se de $F^+(u)$. Mais precisamente, como apontado no inicío da Seção 6 de Alt, Caffarelli e Friedman (1984)), o conjunto $F^-(u) \setminus F^+(u)$ é vazio. Para o caso geral que tratamos aqui, se as funções de fase são ordenadas, i.e, digamos $f_2 \geq f_1$ em $B_1(0)$ então o mesmo fenômeno acontece. Este é o conteúdo de nossa próxima observação.

Observação 3.8 *Seja u um minimizante de E_G em B_1 com $f_2 \geq f_1$ e $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$. Então,*

$$\mathcal{L}_g(u) \geq 0 \ \text{ em } \mathrm{B}_1 \quad \text{e} \quad F^-(u) \setminus F^+(u) = \varnothing.$$

Prova: Com efeito, dada qualquer função $0 \leq \eta \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, segue por minimalidade que

$$I_G^1(u) \leq I_G^1(u - \varepsilon\eta),$$

para $\Lambda_0(x) = f_1(x) - f_2(x) \leq 0$. Portanto,

$$\int_{B_1} (G(|\nabla(u - \varepsilon\eta)|) - G(|\nabla u|))\, dx \geq \int_{B_1} \Lambda_0(x) \left(\chi_{\{u \leq 0\}} - \chi_{\{u - \varepsilon\eta \leq 0\}}\right) dx \geq 0,$$

desde que $\{u \leq 0\} \subset \{u - \varepsilon\eta \leq 0\}$. Assim, definindo o funcional $I(v) = \int_{B_1} G(|\nabla v|)dx$, concluímos que

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(I(u - \varepsilon\eta) - I(u)) = \frac{d}{d\varepsilon} I(u - \varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} = -\int_\Omega g(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \eta dx. \qquad (104)$$

Isto prova que u é uma $\mathcal{L}_g$-subsolução. Agora suponha que $x_0 \in F^-(u) \setminus F^+(u)$. Neste caso existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \cap F^+(u) = \varnothing$. Observe então que $\mathcal{L}_g(u) = 0$ em $\{u < 0\} \cap B_\varepsilon(x_0)$ e $u \leq 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$. Dessa forma, pelo Lema 8.1 em Martinez e Wolanski (2008) concluímos que $\mathcal{L}_g(u) \leq 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$ e portanto $\mathcal{L}_g(u) = 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$. Finalmente, desigualdade de Harnack implica que para uma constante universal $C_\varepsilon > 0$ com dependência em ε temos

$$\sup_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} (-u) \leq C \cdot \inf_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} (-u) \leq -C_\varepsilon \cdot u(x_0) = 0.$$

Isto implica em $u \equiv 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$ e assim, $x_0 \notin F^-(u)$ o que é uma contradição. Portanto, $F^-(u) \setminus F^+(u) = \varnothing$.

■

Ainda no contexto do paper de Alt, Caffarelli e Friedman (1984), mediante combinação (crucial) da regularidade Lipschitz com a propriedade de não-degenerecência (além da informação de que $\Lambda < 0$), eles foram capazes de provar que a fase não-positiva tem estimativa de densidade por baixo por uma constante positiva e universal ao longo da fronteira livre $F^+(u)$, em outros termos, existe uma constante $c \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{|B_r \cap \{u \leq 0\}|}{|B_r|} \geq c,$$

para qualquer bola $B_r \subset B_1$ com centro sobre a fronteira livre $F^+(u)$ (veja Teorema 7.1 em Alt, Caffarelli e Friedman (1984)).

No caso em questão, a situação é mais geral. Em particular, como apontado anteriormente, não há uma ordenação sobre as funções de fase f_2 e f_1 em relação aos funcionais (29). Assim, em princípio, mínimos não são nem subsoluções nem supersoluções. Portanto, sob as condições aqui estudadas, as fronteiras livres $F^+(u)$ e $F^-(u)$ podem se separar, i.e, $F^-(u) \setminus F^+(u) \neq \varnothing$. Uma situação similar ocorre mesmo no caso padrão envolvendo o operador Laplaciano quando se considera uma configuração não homogênea. Isto ocorre, por exemplo, em problemas de propagação de chamas com um termo de força estudados em Lederman e Wolanski (2006).

Diante desta discussão torna-se uma questão muito interessante compreender a condição de toque entre as fronteiras livres e, possivelmente, informações geométricas nos pontos em que há o toque. Com respeito ao melhor que nos é conhecido, existem poucos exemplos concretos na literatura que abordam estas questões geométricas para minimizantes, além disso, quase todas dizem respeito ao cenário do problema de uma fase. Nesta direção, recentemente entramos em contato com um paper bastante interessante num problema estudado por M. Allen e H. C. Lara (veja Allen e Lara (2014)). Neste trabalho os autores investigam o toque das fronteiras livres (também no caso de duas fases), em vértices de cones em um problema variacional muito relacionado. Isto é feito na esfera 2-dimensional.

Como conseqüência do Teorema 2.7, podemos mostrar que se a regularidade Lipschitz falha em ser a regularidade ótima para um minimizante $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$, digamos em um ponto, então este é certamente um ponto de contato entre as fronteiras livres $F^+(u)$ e $F^-(u)$ e, não somente isto, mas, também a fase negativa goza de uma estimativa universal por baixo estritamente positiva neste ponto. Em particular, nos pontos de contato, a fase negativa $\{u < 0\}$ é livre de cúspides. Mostramos também que se u não é localmente Lipschitz em torno de x_0, então x_0 também é um ponto de contato entre as fronteiras livres e a fase negativa é ' assintoticamente livre de cúspide" em x_0, no sentido de que há uma seqüência de pontos ao longo $F^{\pm}(u)$ convergindo para x_0 e escalas indo a zero, ao longo do qual a função densidade de Θ_u^- é limitada por baixo por uma constate universal estritamente positiva. Este é o conteúdo da Proposição 2.2 apresentada no Capítulo 2. Mais uma vez para comodidade de leitura reenunciamos aqui tal proposição.

Antes de fazermos tal coisa, cremos que seria salutar dar uma explicação para a definição dos conjuntos que colecionam os pontos onde regularidade Lipschitz pontual ou Lipschitz local falham, a saber, a definição de $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}_l$. Com respeito a $\mathcal{S}_l$ notamos que o objetivo quando definimos tal conjunto é estudar quando uma função falha em ser localmente Lipschitz. Localmente Lipchitz significa que todo ponto possui uma vizinhança tal que a função restrita a esta vizinhança é Lipschitz. Se isto falha, é porque existem pontos tais que para qualquer vizinhança que tomemos de tais pontos a função nunca é Lipschitz nestas vizinhanças. Desta forma, o conjunto $\mathcal{S}_l$ está exatamente colecionando tais pontos. Isto diz que a definição

$$\mathcal{S}_l := \left\{ x \in \overline{B_{1/2}} : [u]_{C^{0,1}(B_r(x))} = \infty \ \text{ para todo } 0 < r < 1/2 \right\}$$

esta bem posta. Quando lidamos com $\mathcal{S}_p$ nos parece, a princípio, que o mais natural é que para cada $x \in B_{1/2}$ que não é pontualmente Lipschitz, existe um $0 < \rho_x < 1/2$ tal que $[u]_{C^{0,1}(B_{\rho_x})} = \infty$. Em outros termos, temos definido o seguinte cojunto

$$S = \left\{ x \in \overline{B_{1/2}} : \exists\ \delta_x, 0 < \delta_x < 1/2 \text{ tal que } [u]_{C^{0,1}(B_{\delta_x}(x)}(x) = \infty \right\}.$$

Afirmamos que S coleciona exatamente os mesmos pontos que $\mathcal{S}_p$, onde

$$\mathcal{S}_p := \left\{ x \in \overline{B_{1/2}} : [u]_{C^{0,1}(B_r(x))}(x) = \infty \ \text{ para todo } 0 < r < 1/2 \right\}.$$

De fato, primeiro observamos que

$$0 < s < r \Longrightarrow [u]_{C^{0,1}(B_s(x)}(x) \le [u]_{C^{0,1}(B_r(x)}(x) \le \max\left\{ [u]_{C^{0,1}(B_s(x)}(x), \frac{2M}{s} \right\}.$$

Isto é claro pois a função $\rho \to [u]_{C^{0,1}(B_\rho(x)}(x)$ é monótona e

$$[u]_{C^{0,1}(B_s(x)}(x) = \max\left\{\sup_{|x-y|<s, x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}, \sup_{|x-y|\geq s}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right\}$$
$$\leq \max\left\{[u]_{C^{0,1}(B_s(x)}(x), \frac{2M}{s}\right\}.$$

Além disso, se $x_0 \in S$ então existe $0 < \delta_{x_0} < 1/2$ tal que

$$[u]_{C^{0,1}(B_{\delta_{x_0}}(x_0)}(x_0) = \infty.$$

Em particular, por monotonicidade,

$$[u]_{C^{0,1}(B_r(x_0)}(x_0) \geq [u]_{C^{0,1}(B_{\delta_{x_0}}(x_0)}(x_0) = \infty,$$

para qualquer $1/2 \geq r \geq \delta_{x_0}$. Agora, se para algum $0 < r < \delta_{x_0}$ tivésssemos

$$[u]_{C^{0,1}(B_r(x_0)}(x_0) < \infty$$

então,

$$[u]_{C^{0,1}(B_{\delta_{x_0}}(x_0)}(x_0) \leq \max\left\{[u]_{C^{0,1}(B_r(x_0))}(x_0), \frac{2M}{r}\right\},$$

uma contradição. Portanto, $S \subset \mathcal{S}_p$. Trivialmente, por definição, $\mathcal{S}_p \subset S$.

Proposição 3.5 (Proposição 2.2) *Seja $u \in S_1^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)$ e considere os conjuntos*

$$\mathcal{S}_p = \left\{x \in \overline{B_{1/2}} : [u]_{C^{0,1}(B_r(x))}(x) = \infty \text{ para todo } 0 < r < 1/2\right\}.$$

$$\mathcal{S}_l = \left\{x \in \overline{B_{1/2}} : [u]_{C^{0,1}(B_r(x))} = \infty \text{ para todo } 0 < r < 1/2\right\}.$$

Então, $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_l \subset F^+(u) \cap F^-(u)$ e

$$\limsup_{F^{\pm}(u)\times(0,1)\ni(x,r)\to(x_0,0)} \Theta_u^-(x,r) \geq c \quad \text{para todo } x_0 \in \mathcal{S}_l.$$

$$\limsup_{r\to 0} \Theta_u^-(x_0,r) \geq c \quad \text{para todo } x_0 \in \mathcal{S}_p.$$

onde $c = c(n, \delta, g_0, \beta) > 0$. Ademais, as estimativas acima são verdadeiras se substituirmos Θ_u^- por Θ_u^+.

Prova: Desde que

$$[u]_{C^{0,1}(B_r(x_0))}(x_0) \leq [u]_{C^{0,1}(B_r(x_0))}$$

concluímos que $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_l$. Considere então $x_0 \in \mathcal{S}_l$. Neste caso podemos encontrar duas seqüências $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1} \subset B_{1/2}(x_0)$ tais que:

$$x_n \to x_0, \; y_n \to x_0 \quad \text{quando } n \to \infty \quad \text{e} \quad \rho_n := \frac{|u(x_n) - u(y_n)|}{|x_n - y_n|} > n.$$

Uma vez que $B_1 = \{u > 0\} \cup \{u < 0\} \cup \{u = 0\}^\circ \cup F^{\pm}(u)$ vemos que $x_0 \notin \{u > 0\} \cup \{u < 0\} \cup \{u = 0\}^\circ$. Este fato é conseqüência de estimativa Lipschitz interior. Com efeito, no caso em questão existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset \{u > 0\}$ ou $B_\varepsilon(x_0) \subset \{u < 0\}$ ou ainda $B_\varepsilon(x_0) \subset \{u = 0\}$. Observe que o último caso é impossível, uma vez que implicaria $0 = \rho_n > n$ para n sufucientemente grande. Em quaisquer um dos outros casos temos, via Proposição 3.2, que $\mathcal{L}_g(u) = 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$. Assim, pela estimativa do gradiente (Teorema 2.6) existe uma constante universal $C_1 > 0$ e n suficientemente grande tais que,

$$n < \frac{|u(x_n) - u(y_n)|}{|x_n - y_n|} \leq \sup_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} |\nabla u| \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \sup_{B_\varepsilon(x_0)} |v| = \frac{C_1 \cdot M}{\varepsilon} < \infty,$$

o que é uma contradição. Sendo assim, $x_0 \in F^{\pm}(u) \cap \overline{B_{1/2}}$. Suponha então que $x_0 \in F^-(u) \setminus F^+(u)$. Neste caso, $x_0 \notin F^+(u) \cap \overline{B_{1/2}}$, que é um conjunto compacto, logo, existe $0 < \varepsilon < \rho_0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \cap F^+(u) \cap \overline{B_{1/2}} = \varnothing$. Desde que $u \leq 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$ e $u \in S_\varepsilon^\beta(\delta, g_0, \varepsilon_0, \mu, M)(x_0)$, Observação 3.7 garante que para n suficientemente grande,

$$n < \frac{|u(x_n) - u(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq [u]_{C^{0,1}(B_{\varepsilon/2}(x_0))} \leq \frac{C_0 \cdot \max\{M, 1\}}{c \cdot \varepsilon} < \infty,$$

novamente uma contradição. O caso em que $x_0 \in F^+(u) \setminus F^-(u)$ é tratado de forma análoga. Concluímos, portanto, que $x_0 \in F^+(u) \cap F^-(u)$. No caso em que $x_0 \in \mathcal{S}_l$ temos que para qualquer $\rho \leq \rho_0$ existem $x_\rho \in B_{\frac{3\rho}{4}}(x_0) \cap F^{\pm}(u)$ e $0 < r_\rho < \rho/4$ tal que $\Theta_u^-(x_\rho, r_\rho) > c$ pois, caso contrário, Observação 3.6 nos levaria a

$$[u]_{C^{0,1}(B_{\rho/2}(x_0))} \leq \frac{C_0 \cdot \max\{M, 1\}}{c \cdot \rho},$$

e assim implicaria que $x_0 \notin \mathcal{S}_l$. Agora, se $x_0 \in \mathcal{S}_p$, vemos também que para qualquer $0 < \rho \leq \rho_0$ existe $0 < r_\rho \leq \rho$ tal que $\Theta_u^-(x_0, r_\rho) > c$ pois, do contrário, Proposição 3.4 permitiria concluir que

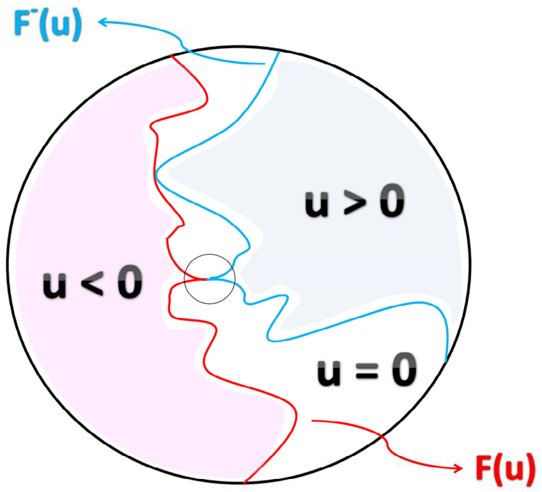
$$[u]_{C^{0,1}(B_\rho(x_0))}(x_0) \leq \frac{2 \cdot \max\{M, 1\}}{c \cdot \rho} < \infty,$$

e portanto, $x_0 \notin \mathcal{S}_p$. Isto finaliza a prova.

■

Observação 3.9 *Ao se tratar de pontos em $\mathcal{S}_p$ podemos se um pouco mais precisos. De*

Figura 11 – No gráfico abaixo u não pode ser um minimizante.



Fonte: Elaborado pelo autor.

fato,

$$\mathcal{S}_p \subset \partial_M F^+(u) \cap \partial_M F^-(u),$$

em outros termos, $\mathcal{S}_p$ está contido na interseção da "measure theoretic boundaries" de $\{u > 0\}$ e de $\{u < 0\}$. Para detalhes sobre este conceito veja pág. 208 de Evans e Gariepery (1992).

Antes de encerrar este Capítulo há mais uma coisa que é digno de nota que é a questão da existência de minimizantes específicos. Em geral, não é uma tarefa fácil mostrar que uma específica função, mesmo sendo uma solução (no sentido da viscosidade) para alguns PFL's, não é um minimizante. Existem poucos exemplos na literatura que tratam deste fato e, estamos conscientes disso. Um dos primeiros exemplos importantes foi obtido em dimensão 3 na Seção 2.7 de Alt e Caffarelli (1981). Neste paper algumas soluções de uma fase do tipo cone são apresentadas para um PFL, todavia, provadas não serem minimizantes. Muitos anos mais tarde, L. Caffarelli, D. Jerison e C. Kenig provaram que a mesma solução não é um minimizante até dimensão 6 (veja Proposição em Caffarelli, Jerinson e Kenig (2004)). Depois disso, D. de Silva e D. Jerison provaram um resultado em De Silva e Jerison (2009) mostrando que esta solução do tipo cone, na verdade, é um minimizante em dimensão 7, proporcionando o primeiro exemplo de uma fronteira livre singular para minimizantes em analogia com o cone de Simons para a teoria das superfícies mínimas. Todos esses desenvolvimentos ocorrem para o caso em que $G(t) = t^2$. Nosso resultado (Proposição 2.2), pode ser de alguma utilidade para descartar soluções no sentido da viscosidade de PFL's do tipo (5) em ser minimizantes para funcionais do tipo E_G no caso em que a regularidade Lipschitz (pontual) falha e cúspides na fase negativa desenvolvem-se nos pontos de contato entre $F^+(u)$ e $F^-(u)$.

4 TEOREMAS DO TIPO PHRAGMÉM-LINDELÖF E LIOUVILLE PARA EQUACÕES DA FORMA QUASILINEAR SINGULAR/DEGENERADA E TOTALMENTE NÃO LINEAR EM SEMI-ESPACOS

Neste Capítulo discorremos sobre um outro problema muito interressante e que versa sobre classificação de soluções de equações não-lineares singular/degeneradas do tipo $\mathcal{L}_g u = 0$ e equações totalmente não lineares em domínios ilimitados. Aqui estabelecemos uma série de resultados clássicos como Estimativa de Carleson (Carleson Estimate), Desigualdade de Harnack até a fronteira (Boundary Harnack Inequality), Princípio da Reflexão de Schwarz, Lema da Oscilasção de De Giorgi, etc.

4.1 A Geometria de Barreiras de Operadores de Pucci

Nesta seção, temos por objetivo construir funções barreira a partir de operadores extremais de Pucci. Estas barreiras são substitutos para a função capacitor de potência em anéis que estão muito relacionados com a solução fundamental para operadores como o p-Laplaciano. Uma vez que tais funções têm gradiente não-nulo, eles se tornam subsoluções ou supersoluções para o operador quasilinear da forma $\mathcal{L}_G$. Antes de prosseguirmos, precisamos da seguinte observação de álgebra Linear.

Observação 4.1 *Seja $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ e considere a matriz simétrica $A := \eta \otimes \eta = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ onde $a_{ij} := \eta_i \cdot \eta_j$ e seja $B := I_n + \alpha A$. Se $\alpha \neq 0$ então $\mu \in \mathrm{Spec}(A) \Longleftrightarrow 1 + \alpha\mu \in \mathrm{Spec}(B)$. Também, desde que $A \cdot \xi = \langle \eta, \xi\rangle \cdot \eta$, temos que $\langle A\xi, \xi\rangle = \langle \eta, \xi\rangle^2 \geq 0$. Então, claramente $||A|| = |\eta|^2$ e desde que A é uma matriz auto-adjunta não-negativa, $|\eta|^2 \in Spec(A) \subset [0, |\eta|^2]$. Desta forma,*

$$\alpha > 0 \Longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \subset [1, \alpha|\eta|^2 + 1]$$

$$\alpha < 0 \Longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \subset [\alpha|\eta|^2 + 1, 1]$$

Em particular se $|\eta| = 1$ e $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \overline{\alpha}$, temos

$$\mathrm{Spec}(B) \subset \Big[\min\{1, \underline{\alpha} + 1\}, \max\{1, \overline{\alpha} + 1\}\Big].$$

Proposição 4.1 (Barreira de Pucci - Subsolução) *Considere o seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 v_0) & = & 0 & \text{em } \mathcal{A}_{1/2,1}(0) \\ v_0 & = & 1 & \text{sobre } \partial B_{1/2} \\ v_0 & = & 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases} \tag{105}$$

Ao definir $\gamma = \frac{\Lambda}{\lambda}(n-1)+1$, *temos que* $\gamma \geq 2$ (*desde que* $n \geq 2$) *e*

$$v_0(x) = \begin{cases} -\log_2 |x|, & se \quad \gamma = 2, \\ \dfrac{1}{2^{\gamma-2}-1}\Big(|x|^{2-\gamma}-1\Big), & se \quad \gamma > 2. \end{cases} \tag{106}$$

Em particular, existe uma constante universal $0 < \alpha_0 < 1$ *tal que*

1) $\alpha_0 \cdot dist(x, \partial B_1) \leq v_0(x) \leq \alpha_0^{-1} \cdot dist(x, \partial B_1) \quad \forall\, x \in \mathcal{A}_{1/2,1}(0)$;

2) $\alpha_0 \leq \dfrac{\partial v_0}{\partial \nu} \leq \alpha_0^{-1}$, ao longo de ∂B_1, *onde* ν *denota o vetor normal unitário interior para* ∂B_1;

3) $\alpha_0 \leq |\nabla v_0| \leq \alpha_0^{-1}$ em $\overline{\mathcal{A}}_{1/2,1}(0)$*;*

4) Para $\lambda = \lambda_\delta := \min\{1, \delta\}$ *e* $\Lambda = \Lambda_{g_0} := \max\{1, g_0\}$, v_0 *é uma* $\mathcal{L}_g$*-subsolução clássica em* $\mathcal{A}_{1/2,1}(0)$ *para todo* $g = G'$ *onde* G *satisfaz (CP) e (CQ), i.e.,*

$$\mathcal{L}_g v_0 \geq 0 \quad em \ \mathcal{A}_{1/2,1}(0)$$

no sentido clássico.

Prova: Se $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ é uma função radial onde $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, temos

$$D^2\Phi(x) = \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} \cdot I_n + \left\{ \frac{\varphi''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\varphi'(|x|)}{|x|^3} \right\} \cdot (x \otimes x).$$

Isto implica que

$$D^2\Phi(x) \cdot \frac{x}{|x|} = \varphi''(|x|)\frac{x}{|x|} \quad \text{e} \quad D^2\Phi(x)\cdot \xi = \frac{\varphi'(|x|)}{|x|}\xi \quad \forall\, \xi \perp x.$$

Desta forma $\varphi''(|x|)$ e $\varphi'(|x|)/|x|$ são autovalores de $D^2\Phi(x)$ com multiplicidade 1 e $n-1$ respectivamente. Se φ é escolhida decrescente e convexa então,

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Phi(x)) = \Lambda(n-1)\frac{\varphi'(|x|)}{|x|} + \lambda\varphi''(|x|).$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(r) = -\log_2 r \quad \text{para o caso em que } \gamma = 2$$

e

$$\varphi_2(r) = (2^{\gamma-2}-1)^{-1}(r^{2-\gamma}-1) \quad \text{para o caso em que } \gamma > 2$$

são ambas decrescentes e convexas e satisfazem a seguinte EDO

$$\Lambda(n-1)\frac{\varphi'(r)}{r} + \lambda\varphi''(r) = 0 \quad \text{para } r > 0.$$

Desta forma, pomos $v_0(x) = \varphi_1(|x|)$ (se $\gamma = 2$) ou $v_0(x) = \varphi_2(|x|)$ (se $\gamma > 2$) claramente vemos que $v_0 \in C^2(\mathcal{A}_{1/2,1}(0)) \cap C^0(\overline{\mathcal{A}_{1/2,1}(0)})$ é uma solução clássica para o problema de Dirichlet (105). Agora, pela unicidade do problema de Dirichlet acima v_0 é unicamente determinada por (106). Desde que $1/2 \leq |x| \leq 1$, claramente podemos estabelecer limitação universal por cima e por baixo para a derivada $\varphi_i^{'}(|x|)$, items 2) e 3) seguem por direta computação e 1) segue pela convexidade de φ_i $(i = 1, 2)$ e pelo caráter Lipschitz de φ_i. De fato,

$$v_0(x) = \varphi_i(|x|) \geq \varphi_i^{'}(1)(|x| - 1) = -\alpha_0(|x| - 1) = \alpha_0 \cdot \mathrm{dist}(x, \partial B_1),$$

$$v_0(x) = \varphi_i(|x|) - \varphi_i(1) \leq \alpha_0^{-1} \cdot ||x| - 1| \leq \alpha_0^{-1} \cdot \mathrm{dist}(x, \partial B_1).$$

Para mostrar 4), observamos que se $w \in C^2$ e $|\nabla w| \neq 0$, podemos fazer o cálculo da derivada (o divergente) e obtermos a seguinte estrutura da forma não-divergente para o operador $\mathcal{L}_g$,

$$\mathcal{L}_g w = \frac{g(|\nabla w|)}{|\nabla w|} T(w)$$

onde $T(w) = \text{Traço}(A(x)D^2 w)$, e $A(x)$ é dada por

$$A_w(x) = I_n + \left(\frac{g'(|\nabla w|)|\nabla w|}{g(|\nabla w|)} - 1 \right) \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \otimes \frac{\nabla w}{|\nabla w|}.$$

Em particular, pela Condição Quociente (CQ) e Observação 4.1, a matriz A_{v_0} é uniformemente elíptica com constantes de elipticidade $\lambda_\delta = \min\{1, \delta\}$ e $\Lambda_{g_0} = \max\{1, g_0\}$. Desta forma, por $(g-1)$ temos

$$\mathcal{L}_g v_0 = \frac{g(|\nabla v_0|)}{|\nabla v_0|} T(v_0) \geq g(1) \min\left\{ {\alpha_0}^{1-g_0}, {\alpha_0}^{g_0 - 1}, {\alpha_0}^{1-\delta}, {\alpha_0}^{\delta - 1} \right\} \mathcal{M}^{-}_{\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}}(D^2 v_0) = 0.$$

Isto encerra a prova da Proposição.

$\blacksquare$

Observação 4.2 (Versão Escalonada para a Barreira-Subsolução) *Sejam $M, r > 0$, $N \geq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Observe que pondo*

$$\Gamma_{x_0, r}(x) := v_0\left(\frac{x - x_0}{r} \right)$$

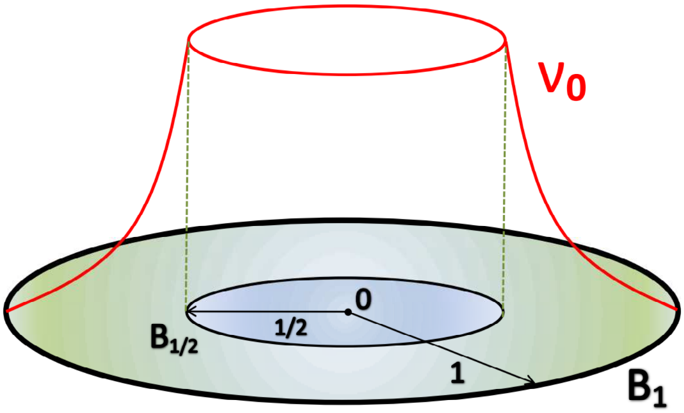
então $M \cdot \Gamma_{x_0,r}(x) + N = M + N$ sobre $\partial B_{r/2}(x_0)$, $M \cdot \Gamma_{x_0,r}(x) + N = N$ sobre $\partial B_r(x_0)$ e

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda, \Lambda}(D^2(M \cdot \Gamma_{x_0,r}(x) + N)) = 0 \quad em \quad \mathcal{A}_{r/2,r}(x_0).$$

Similarmente como 1), 2), 3) e 4) da Proposição anterior, temos:

1') $\dfrac{\alpha_0}{r} M\, dist(x, \partial B_r(x_0)) \leq M \cdot \Gamma_{x_0,r}(x) - N \leq \dfrac{\alpha_0^{-1}}{r} M\, dist(x, \partial B_r(x_0))$;

Figura 12 – olução para o operador de Pucci $\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}$ no anel $\mathcal{A}_{1/2,1}(0)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2') $\dfrac{\alpha_0}{r}M \leq \dfrac{\partial(M\cdot\Gamma_{x_0,r}+N)}{\partial\nu} \leq \dfrac{\alpha_0^{-1}}{r}M$ ao longo de $\partial B_r(x_0)$;

3') $\dfrac{\alpha_0}{r}M \leq |\nabla(M\cdot\Gamma_{x_0,r}+N)| \leq \dfrac{\alpha_0^{-1}}{r}M$ em $\overline{\mathcal{A}}_{r/2,r}(x_0)$;

4') $\mathcal{L}_g\Gamma_{x_0,r} \geq 0$ *em* $\mathcal{A}_{r/2,r}(x_0)$ *para todo* $g = G'$ *tal que* G *satisfaz (CP) e (CQ).*

Agora, enunciamos um resultado equivalente para barreiras que são $\mathcal{L}_g$-supersoluções.

Proposição 4.2 (Barreira de Pucci - Supersolução) *Considere o seguinte problema de Dirichlet*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(D^2w_0) & = & 0 & \textit{em } \mathcal{A}_{1/2,1}(0) \\ w_0 & = & 0 & \textit{sobre } \partial B_{1/2} \\ w_0 & = & 1 & \textit{sobre } \partial B_1 \end{array}\right. \tag{107}$$

Portanto, para $\gamma = \frac{\Lambda}{\lambda}(n-1)+1$, *obtemos*

$$w_0(x) = \left\{\begin{array}{lll} \log_2|x|+1, & \textit{if} & \gamma = 2, \\ \dfrac{1}{2^{\gamma-2}-1}\left(2^{\gamma-2}-|x|^{2-\gamma}\right), & \textit{if} & \gamma > 2. \end{array}\right.$$

Em particular, existe uma constante universal $0<\kappa_0<1$ *tal que*

1") $\kappa_0\cdot \mathit{dist}(x,\partial B_{1/2}) \leq w_0 \leq \kappa_0^{-1}\cdot \mathit{dist}(x,\partial B_{1/2})$ em $\mathcal{A}_{1/2,1}(0)$;

2") $\kappa_0 \leq \dfrac{\partial w_0}{\partial\nu} \leq \kappa_0^{-1}$ ao longo de $\partial B_{1/2}$;

3") $\kappa_0 \leq |\nabla w_0| \leq \kappa_0^{-1}$ em $\overline{\mathcal{A}_{1/2,1}(0)}$;

4") *se* $\lambda=\lambda_\delta$ *e* $\Lambda = \Lambda_{g_0}$, w_0 *é uma* $\mathcal{L}_g$*-supersolução clássica em* $\mathcal{A}_{1/2,1}(0)$ *para todo* $g = G'$, *tal que* G *satisfaz (CP) e (CQ), i.e.,*

$$\mathcal{L}_g w_0 \leq 0 \quad \textit{in } \mathcal{A}_{1/2,1}(0)$$

no sentido clássico.

Prova: A prova desta proposição é análoga a da Proposição 4.1. Agora, φ é escolhida para ser uma função crescente e côncava (ao invés de decrescente e convexa como na prova anterior). Neste caso, a equação homogênea para o operador extremal de Pucci $\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}$ torna-se (para soluções radiais)

$$0 = \mathcal{M}^+(D^2\Phi(x)) = \Lambda(n-1)\frac{\varphi'(|x|)}{|x|} + \lambda\varphi''(|x|).$$

Assim, a solução radial obtida é (novamente onde $\gamma = \frac{\Lambda}{\lambda}(n-1)+1$)

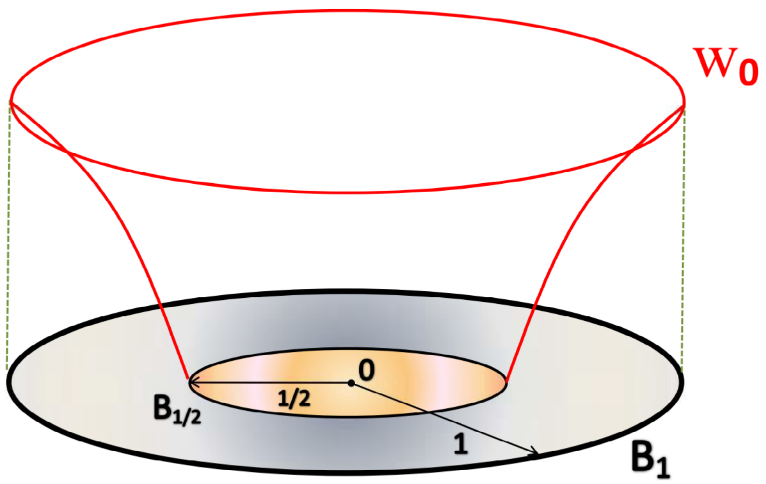
$$w_0(x) = \begin{cases} \log_2|x| + 1, & \text{se} \quad \gamma = 2, \\ \dfrac{1}{2^{\gamma-2}-1}\left(2^{\gamma-2} - |x|^{2-\gamma}\right), & \text{se} \quad \gamma > 2. \end{cases}$$

Assim como na prova da proposição anterior 2") e 3") seguem por cálculo direto e 1") segue via concavidade e regularidade Lipschitz da mesma forma como fizemos para o caso convexo. 4") segue também a partir da Observação 4.1, o fato do gradiente de w_0 ser sempre não nulo no anel (estimativa 3")) e pela estimativa $(g-1)$. Com efeito,

$$\mathcal{L}_g w_0 = \frac{g(|\nabla w_0|)}{|\nabla w_0|}T(w_0) \leq g(1)\max\left\{{\kappa_0}^{g_0-1}, {\kappa_0}^{1-g_0}, {\kappa_0}^{\delta-1}, {\kappa_0}^{1-\delta}\right\}\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2 w_0) = 0.$$

$\blacksquare$

Figura 13 – Solução para o operador de Pucci $\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}$ no anel $\mathcal{A}_{1/2,1}(0)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 4.3 *Finalizamos esta seção apontando a validade de uma versão escalonada da Proposição acima para a Barreira de Pucci - Supersolução. Assim como na Observação*

4.2 definimos

$$\Theta_{x_0,r}(x) := w_0\left(\frac{x-x_0}{r}\right).$$

Omitimos aqui o enunciado das estimativas para $\Theta_{x_0,r}$ todavia informamos que este é análogo ao que aparece na Observação 4.2.

4.2 Estimativa de Carleson

Nesta seção provamos uma estimativa de Carleson. Este resultado é um dos pontos-chave para provar a Desigualdade de Harnack até a fronteira a ser estabelecida na próxima seção. Aqui refinamos a desigualdade de Harnack obtida em Lieberman (1991) mostrando com um argumento de iteração interessante e simples que a constante na desigualdade de Harnack decai (se deteriora) como uma potência negativa da distância até fronteira (Teorema 4.2). Isto permite provar o decaimento (deterioração) da constante de Harnack no complemento de faixas dentro de semi-bolas e relacioná-la com o tamanho da faixa (Proposição 4.4). Estes fatos associados com uma proposição do tipo Lema da Oscilação de De Giorgi (Proposição 4.3) rendem a prova da estimativa de Carleson. Seguiremos principalmente as idéias desenvolvidas em Caffarelli et al (1981).

Teorema 4.1 (Estimativa de Carleson) *Seja $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$ anulando-se continuamente sobre $B_1'(0)$ tal que $u\left(\frac{1}{2}e_n\right) = 1$. Então, existe uma constante universal $C > 0$ tal que*

$$u(x) \leq C, \quad \forall\ x \in B_{1/2}^+(0).$$

A mesma estimativa é verdadeira se tivermos $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))$ ao invés de $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$.

A partir de agora desenvolveremos uma série de ferramentas que serão necessárias para provarmos o Teorema acima. Começamos por um lema sobre subsoluções.

Lema 4.1 (Lema - Subsolução) *Seja u uma solução fraca para $\mathcal{L}_g u = 0$ em $B_1^+(0)$ anulando-se continuamente sobre $B_1'(0)$ para alguma função $G' = g$ como na Definição 2.6. Considere $\overline{u}$ a extensão de u por zero para toda bola $B_1(0)$. Então,*

$$\mathcal{L}_g \overline{u} \geq 0 \quad em \quad B_1(0).$$

Similarmente, se $v \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))$ e se anula continuamente sobre $B_1'(0)$ e, $\overline{v}$ é sua extensão por zero em $B_1(0)$, então $\overline{v} \in \underline{S}_{\lambda,\Lambda}$ em $B_1(0)$ no sentido da viscosidade.

Prova: A partir das hipóteses acima sobre a função u, segue a partir da caracterização de $W^{1,G}$ (veja Teorema 2.2) que $\overline{u} \in C^0(B_1(0)) \cap W^{1,G}_{loc}(B_1(0))$. Agora, considere $0 \leq \xi \in C_0^\infty(B_1(0))$, $\varepsilon > 0$ e seja w uma função definida em $B_1(0)$ dada por

$$w = \max\Big(\min\big(1, 2 - \frac{\overline{u}}{\varepsilon}\big), 0\Big).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|}\nabla \overline{u}\cdot\nabla\xi\,dx &= \int_{B_1\cap\{0<1-w\leq 1\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\cdot\nabla(\xi(1-w))\,dx\\
&+\int_{B_1}\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\cdot\nabla(\xi w)\,dx\\
&=\int_{B_1^+\cap\{u>\varepsilon\}}\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\cdot\nabla(\xi(1-w))\,dx\\
&+\int_{B_1\cap\{0<u<2\varepsilon\}}\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\cdot\nabla(\xi w)\,dx.
\end{aligned}$$

Seja $\operatorname{supp}(\xi) = K \subset\subset B_1(0)$. Desde que $\mathcal{L}_g\overline{u} = 0$ em $B_1^+(0)$ e $\xi(1-w) \in W_0^{1,G}(B_1^+(0))$ temos,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|}\nabla \overline{u}\cdot\nabla\xi\,dx &= \int_{K\cap\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\cdot\nabla\Big(\xi\big(2-\frac{u}{\varepsilon}\big)\Big)\,dx\\
&+\int_{K\cap\{0<u<\varepsilon\}}\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\cdot\nabla\xi\,dx\\
&\leq 2\int_{K\cap\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}} g(|\nabla u|)|\nabla\xi|\,dx\\
&+\int_{K\cap\{0<u<\varepsilon\}} g(|\nabla u|)|\nabla\xi|\,dx\\
&\leq 2\int_{K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}} g(|\nabla u|)|\nabla\xi|\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, usando uma desiguladade de Hölder para Espaços de Orlicz (veja Adams e Fournier (2003) - Capítulo 8), (G - 2) e (G - 3) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}} g(|\nabla u|)|\nabla\xi|\,dx\\
&\qquad\leq C\cdot\|g(|\nabla u|)\|_{L^{\tilde{G}}(K^+)}\cdot\sup_K(1+|\nabla\xi|)^{\frac{1+g_0}{1+\delta}}\cdot|K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}|\\
&\qquad\leq C(\delta,g_0,\xi)\left(1+\int_{K^+}G(|\nabla u|)dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}}\cdot|K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}|,
\end{aligned}$$

que tende para zero quando $\varepsilon\to 0$. Isto completa a primeira parte da prova. Consideremos agora o caso totalmente não-linear. Para cada $\varepsilon>0$ definimos $w_\varepsilon = \max(v,\varepsilon)$ em $B_1^+(0)$ e tomamos $\overline{w}_\varepsilon$ para ser a extensão de w_ε por ε para toda bola $B_1(0)$. Afirmamos que $\overline{w}_\varepsilon \in \underline{S}_{\lambda,\Lambda}(B_1(0))$. A partir deste fato o Lema segue facilmente, desde que, $\overline{w}_\varepsilon \to v$ uniformemente em B_1 e a classe $\underline{S}_{\lambda,\Lambda}(B_1(0))$ é fechada para convergência uniforme (local). Para provar a afirmação acima observamos que $\overline{w}_\varepsilon \equiv w_\varepsilon$ em $B_1^+(0)$ e $\overline{w}_\varepsilon\equiv\varepsilon$ em $B_1^-(0)$ e portanto, $\overline{w}_\varepsilon \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))\cup S_{\lambda,\Lambda}(B_1^-(0))$. Resta-nos provar que $\overline{w}_\varepsilon$ pertence a classe $S_{\lambda,\Lambda}$ em vizinhaças de pontos de $B_1^{'}$. Precisamente, é suficiente mostrar que para qualquer

$x_0 \in B_1'$ temos $\overline{w}_\varepsilon \in S_{\lambda,\Lambda}(B_{\delta_0}(x_0))$ para $\delta_0 = (1 - |x_0|)/2$. Para confirmar a veracidade de tal fato, lembramos que v anula-se continuamente na fronteira plana da semi-bola de raio 1. Assim, $v \in C^0(\overline{B^+_{\delta_0}(x_0)})$ e portanto, existe $\delta > 0$ tal que $v \le \varepsilon/2$ em $\{0 \le x_n \le \delta\} \cap B^+_{\delta_0}(x_0)$. Em particular, $\overline{w}_\varepsilon \equiv \varepsilon$ in $B_{\delta_0}(x_0) \cap \{x_n \le \delta\}$. Isto conclui a prova da afirmação uma vez que, $\overline{w}_\varepsilon \in \underline{S}_{\lambda,\Lambda}(B_{\delta_0}(x_0) \cap \{x_n < \delta\}) \cap \underline{S}_{\lambda,\Lambda}(B_{\delta_0}(x_0) \cap \{x_n > \delta/2\}) \subset \underline{S}_{\lambda,\Lambda}(B_{\delta_0}(x_0))$. ■

Proposição 4.3 (Lema da Oscilação de De Giorgi) *Seja* $0 \le u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$ *anulando-se continuamente sobre* $B_1'(0)$. *Então, para* $0 < r_1 \le r_2 < 1$, *existe uma constante universal* $0 < \sigma < 1$ *tal que*

$$\sup_{B^+_{r_1}(0)} u \le \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\sigma \sup_{B^+_{r_2}(0)} u. \tag{108}$$

A mesma estimativa se verifica se $0 \le u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$.

Prova: Provamos inicialmente o caso em que $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+)$. Sem perda podemos assumir que $\sup_{B_{r_1}(0)} u = 1$. Para o caso geral basta considerar $w = u/\sup_{B_{r_1}(0)}, u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+)$. Com efeito, se g é tal que $\mathcal{L}_g(u) = 0$ como na Definição das classes $\mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+)$ e $S = \sup_{B_{r_1(0)}}$ definimos $\overline{g}(t) = g(St)$. Verificação simples mostra que $\overline{g}$ satisfaz (CP) e (CQ) e $\mathcal{L}_{\overline{g}}(w) = 0$ em $B_1^+(0)$. Agora procedemos por extender u por zero para $B_1(0)$. Para tanto considere, $v = 1 - u$ que é uma $\mathcal{L}_g$-supersolução não-negativa em $B_1(0)$. Desigualdade de Harnack fraca (Teorema 1.3 de Liberman (1991)) garante a existência de constantes universais $C > 1$ e $\rho > 0$ tais que

$$\left[r^{-n} \int_{B_{\frac{2r_1}{3}}} v^\rho dx\right]^{1/\rho} \le C \inf_{B_{\frac{r_1}{2}}(0)} v. \tag{109}$$

Uma vez que,

$$\left|\{v = 1\} \cap B_{\frac{2r_1}{3}}(0)\right| \ge \frac{1}{2}\left|B_{\frac{2r_1}{3}}(0)\right| \tag{110}$$

concluímos por (109) e (110) que existe $0 < \mu < 1$ tal que

$$\mu \le \inf_{B_{\frac{r_1}{2}}(0)} v. \tag{111}$$

Portanto, por (111),

$$\sup_{B_{\frac{r_1}{2}}(0)} u \le (1 - \mu) \sup_{B_{r_1(0)}} u.$$

Isto prova que a oscilação de u decai geometricamente, e o resultado é uma conseqüência do Lema 8.23 em Gilbarg e Trudinger (1977).

Caso tenhamos $u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))$, pelo Lema anterior segue que $\overline{u} \in \underline{S}_{\lambda,\Lambda}(B_1(0))$ e, portanto, $1 - \overline{u} \in \overline{S}_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))$. Assim, por desigualdade de Harnack fraca (veja Teorema 4.8

em Caffarelli e Cabr´e (1995)) temos

$$\|1-\overline{u}\|_{L^{p_0}(B_{\frac{r_1}{4}}(0))} \leq C \cdot \inf_{B_{\frac{r_1}{2}}(0)} (1-\overline{u}).$$

O argumento agora é análogo ao do caso anterior.

■

O próximo resultado (Teorema) é uma versão refinada da Desigualdade de Harnack.

Teorema 4.2 (Refinamento da Desigualdade de Harnack) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1(0))$. *Então, existem constantes* $C, \tau_0 > 0$*, dependendo somente de* n, δ *e* g_0 *tais que*

$$\frac{1}{C} \cdot dist(x, \partial B_1(0))^{\tau_0} \cdot u(0) \leq u(x) \leq C \cdot dist(x, \partial B_1(0))^{-\tau_0} \cdot u(0), \quad \forall\, x \in B_1(0). \quad (112)$$

Ademais,

$$\sup_{B_r(0)} u \leq C \cdot (1-r)^{-2\tau_0} \inf_{B_r(0)} u, \quad \forall\, 0 < r < 1. \quad (113)$$

As mesmas estimativas são verdadeiras se $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1(0))$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1(0))$.
Prova: Iniciamos a prova afirmando que existe uma constante universal $C_0 \geq 1$ tal que, para todo $1 \leq k \in \mathbb{N}$

$$u(x) \leq C_0^k u(0) \quad \text{e} \quad u(x) \geq C_0^{-k} u(0), \quad \forall\, x \in \overline{B_{s_k}(0)}, \quad (114)$$

onde $s_k := \displaystyle\sum_{j=1}^{k} 2^{-j} = 1 - 2^{-k} < 1$ para qualquer $1 \leq k \in \mathbb{N}$.
Nosso procedimento será por indução sobre k. De fato, pela desigualdade de Harnack usual, existe $C_0 \geq 1$ tal que

$$C_0^{-1} u(0) \leq u(x) \leq C_0 u(0), \quad \forall\, x \in \overline{B_{1/2}(0)}. \quad (115)$$

Este é o caso quando $k = 1$. Para o caso $k = 2$ peocedemos da seguinte forma:
Se $|x| \leq 1/2$ então por (115) e desde que $C_0 \geq 1$

$$C_0^{-2} u(0) \leq u(x) \leq C_0^2 u(0). \quad (116)$$

Por outro lado se $x \in \overline{\mathcal{A}_{\frac{1}{2},\frac{3}{4}}(0)}$ podemos encontrar $y_1 \in \partial B_{5/8}(0)$ e $x_1 \in \partial B_{1/2}(0)$ tais que $x, x_1 \in \overline{B_{1/8}(y_1)}$ (De fato, basta definir $y_1 = \frac{5}{8}\frac{x}{|x|}$ e $x_1 = \frac{1}{2}\frac{x}{|x|}$). Assim, usando mais uma vez a desigualdade de Harnack nas bolas $B_{1/8}(y_1)$ e $B_{1/4}(y_1)$ (ambas ainda contidas em $B_1(0)$) concluímos que

$$C_0^{-1} u(x_1) \leq u(x) \leq C_0 u(x_1) \quad \forall\, x \in \overline{\mathcal{A}_{\frac{1}{2},\frac{3}{4}}(0)}. \quad (117)$$

Assim, combinando as estimativas (115) e (117), obtemos

$$C_0^{-2}u(0) \leq u(x) \leq C_0^2 u(0), \quad \forall\, x \in \overline{\mathcal{A}_{\frac{1}{2},\frac{3}{4}}(0)}.$$

Levando-se em consideração a estimativa (116) chegamos a

$$C_0^{-2}u(0) \leq u(x) \leq C_0^2 u(0), \quad \forall\, x \in \overline{B_{3/4}(0)}.$$

Suponhamos agora que a estimativa desejada (114) seja verdadeira para todo $1 \leq k \leq k_0$. Desta forma, por hipótese de indução, para qualquer $0 < m \leq k_0$

$$C_0^{-m}u(0) \leq u(x) \leq C_0^m u(0), \quad \forall\, x \in \overline{B_{s_m}(0)}. \tag{118}$$

Se $|x| \leq s_{k_0}$ então por (118) com $m = k_0$ e usando mais uma vez o fato que $C_0 \geq 1$ obtemos

$$C_0^{-k_0-1}u(0) \leq u(x) \leq C_0^{k_0+1}u(0).$$

Se $x \in \overline{\mathcal{A}_{s_{k_0},s_{k_0+1}}(0)}$, como antes, podemos encontrar $y_{k_0} \in \partial B_{s_{k_0}+2^{-(k_0+2)}}(0)$ e $x_{k_0} \in \partial B_{s_{k_0}}(0)$ tais que $x, x_{k_0} \in \overline{B}_{2^{-(k_0+2)}}(y_{k_0})$. Agora, aplicando a Desigualdade de Harnack para as bolas $B_{2^{-(k_0+2)}}(y_{k_0})$ e $B_{2^{-(k_0+1)}}(y_{k_0})$ (que ainda estão contidas em $B_1(0)$), concluímos como anteriomente que

$$C_0^{-1}u(x_{k_0}) \leq u(x) \leq C_0 u(x_{k_0}) \quad \forall\, x \in \overline{\mathcal{A}_{s_{k_0},s_{k_0+1}}(0)}. \tag{119}$$

Combinação das estimativas (118) com $m = k_0$ e (119) chegamos a

$$C_0^{-k_0-1}u(0) \leq u(x) \leq C_0^{k_0+1}u(0), \quad \forall\, x \in \overline{B_{s_{k_0+1}}(0)},$$

provando, portanto, (114). Agora, se $x \in B_1(0)$ existe $1 \leq k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-k} \leq \operatorname{dist}(x, \partial B_1(0)) < 2^{-k+1}$. Em particular, $2^{-k} \leq 1 - |x|$ implicando que $x \in \overline{B_{s_k}(0)}$. Neste caso, estimativa (114) se verifica em x. Ainda, desde que a constante de Harnack $C_0 \geq 1$, definimos $\tau_0 > 0$ universal dado por $2^{\tau_0} = C_0$. Portanto, desde que $\operatorname{dist}(x, \partial B_1(0))^{-\tau_0} \geq (2^{-k+1})^{-\tau_0}$ podemos concluir que

$$u(x) \leq C_0^k u(0) \leq (2^{-k})^{-\tau_0}\left(\frac{C_0}{2^{\tau_0}}\right)^k u(0) \leq 2^{\tau_0} \cdot \operatorname{dist}(x, \partial B_1(0))^{-\tau_0} u(0),$$

provando a estimativa por cima que aparece em (112). A estimativa por baixo segue de forma similar,

$$u(x) \geq C_0^{-k}u(0) = (2^{-k})^{\tau_0}\left(\frac{C_0}{2^{\tau_0}}\right)^{-k} u(0) \geq 2^{-\tau_0} \cdot \operatorname{dist}(x, \partial B_1(0))^{\tau_0} u(0).$$

Finalmente seja $x \in B_r(0)$. Neste caso, $1 - r \leq \text{dist}(x, \partial B_1(0))$ e portanto,

$$\sup_{B_r(0)} u \leq 2^{\tau_0} \cdot (1-r)^{-\tau_0} u(0). \tag{120}$$

Similarmente,

$$\inf_{B_r(0)} u \geq 2^{-\tau_0} \cdot (1-r)^{\tau_0} u(0). \tag{121}$$

Agora, por combinação de (120) e (121) encontramos

$$\sup_{B_r(0)} u \leq 2^{2\tau_0} (1-r)^{-2\tau_0} \inf_{B_r(0)} u.$$

■

Desde que escalas do tipo $u_R(x) = u(Rx)$ preservam as classes $\mathcal{G}(\delta, g_0, \Omega)$ e $S_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$, segue imediatamente a versão escalonada do Teorema anterior.

Corolário 4.1 (Versão Escalonada do Teorema 4.2) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_R(0))$. *Então, existem constantes positivas* τ_0, C, *dependendo somente de parâmetros universais tais que*

$$\sup_{B_r(0)} u \leq C \cdot R^{2\tau_0} \cdot (R-r)^{-2\tau_0} \cdot \inf_{B_r(0)} u, \quad \forall\ 0 < r < R. \tag{122}$$

Em particular, para $0 < \sigma < 1$ *temos*

$$\sup_{B_{\sigma R}(0)} u \leq C \cdot (1-\sigma)^{-2\tau_0} \cdot \inf_{B_{\sigma R}(0)} u.$$

A mesma estimativa é verdadeira se $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_R(0))$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_R(0))$

Uma vez disponível desigualdade de Harnack nos termos do Teorema e Corolário acima, resultados do tipo Liouville são obtidos de forma bastante natural. Aqui incluímos o primeiro destes. O argumento será apresentado para a apreciação do leitor.

Corolário 4.2 (Teorema do tipo Liouville - I) *Suponha que* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$ *é limitada por cima ou por baixo por uma constante. Então,* u *é constante. A mesma conseqüência é verdadeira caso tenhamos* $u \in S_{\lambda,\Lambda}(\mathbb{R}^n)$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$.

Prova: Provaremos aqui o caso quasilinear. O caso totalmente não-linear é idêntico. Vamos assumir que $u \geq m$ em $\mathbb{R}^n$. Claramente, $s := \inf_{\mathbb{R}^n} u \geq m > -\infty$. Desta forma, $w := u - s \geq 0$, $\inf_{\mathbb{R}^n} w = 0$ e $w \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$. Sejam $\varepsilon > 0$ uma constante pequena escolhida arbitrariamente e $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tal que $w(x_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Desta forma, pelo Corolário 4.1, aplicado em $B_{2r}(x_\varepsilon)$ temos

$$0 \leq \sup_{B_r(x_\varepsilon)} w \leq C \cdot \inf_{B_r(x_\varepsilon)} w \leq C \cdot 2^{2\tau_0} \cdot w(x_\varepsilon) \leq C \cdot 2^{2\tau_0} \cdot \varepsilon.$$

Fazendo $r \to \infty$ obtemos

$$\sup_{\mathbb{R}^n} w \leq C \cdot 2^{2\tau_0} \cdot \varepsilon \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0$$

Então, $w \equiv 0$ o que finaliza o caso assumido. O caso onde u é limitada por cima segue de forma semelhante.

■

Proposição 4.4 (Desigualdade de Harnack no complemento de faixas) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$ *anulando-se continuamente em* $B_1'(0)$*. Então, para* $0 < s < 1/2$*,*

$$\sup_{B_{3/4}^+ \cap \{x_n \geq s\}} u \leq C_0 \cdot s^{-\tau} u\left(\frac{1}{2}e_n\right),$$

onde C_0 *é uma constante universal e* $\tau = 2\tau_0$*, onde* τ_0 *é tal como no Teorema 4.2. A mesma estimativa é verdadeira se tivermos* $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$*.*

Prova: Seja $x \in B_{3/4}^+ \cap \{x_n \geq s\}$. Se $x \in \{x_n \geq 1/16\}$, então pela Desigualdade de Harnack (interior) e desde que $s < 1$,

$$\sup_{B_{3/4}^+ \cap \{x_n \geq 1/16\}} u \leq C_{\Omega_0} \cdot u\left(\frac{1}{2}e_n\right) \leq C_{\Omega_0} \cdot s^{-\tau} u\left(\frac{1}{2}e_n\right), \tag{123}$$

onde $\Omega_0 := B_{3/4}^+ \cap \{x_n \geq 1/16\}$.

Agora, estudemos o caso em que $x \in \{x_n < 1/16\}$. Neste cenário somos forçados a ter $0 < s < 1/16$. Existe $z_0 \in B_{7/8}^+(0) \cap \{x_n = 1/16\}$ tal que $x \in B_{(1/16)-s}(z_0)$. Para ver isto, é suficiente considerar z_0 para ser a projeção vertical de x sobre o hiperplano $\{x_n = 16\}$. Usando o Corolário 4.1 com $R = 1/16$ e $r = (1/16) - s$ temos

$$u(x) \leq \sup_{B_{(1/16)-s}(z_0)} u \leq C \cdot 16^{-2\tau_0} \cdot s^{-2\tau_0} \inf_{B_{(1/16)-s}(z_0)} u \leq C \cdot 16^{-2\tau_0} \cdot s^{-2\tau_0} \cdot u(z_0) \tag{124}$$

Novamente pela Desigualdade de Harnack (interior) no domínio $\Omega_1 = B_{7/8}^+(0) \cap \{x_n \geq 1/16\}$, obtemos

$$u(z_0) \leq C_{\Omega_1} \cdot u\left(\frac{1}{2}e_n\right). \tag{125}$$

Combinando as estimativas (124) e (125) concluímos que

$$u(x) \leq C \cdot C_{\Omega_1} \cdot 16^{-2\tau_0} \cdot s^{-2\tau_0} \cdot u\left(\frac{1}{2}e_n\right). \tag{126}$$

Este fato mostra que para $\Omega := B^+_{3/4}(0) \cap \{s \le x_n \le 1/16\}$,

$$\sup_{\Omega} u \le C_1 \cdot s^{-\tau} u\left(\frac{1}{2}e_n\right). \tag{127}$$

A Proposição segue pela junção das estimativas (123) e (127).

■

Diante de tudo que foi feito, estamos prontos para provar a estimativa de Carleson. Nosso argumento será por contradição e a idéia da prova consiste em observar que se a estimativa universal proposta não é satisfeita para alguma função $u_0 \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$ (ou $u_0 \in S_{\lambda,\Lambda}(B^+_1(0)))$ em $B^+_{1/2}(0)$, então podemos construir uma seqüência de pontos $x_j \in B^+_{3/4}(0)$ tais que $\lim_{j\to\infty} u_0(x_j) = +\infty$ violando o fato de que u_0 é limitada, de fato contínua, em $\overline{B^+_{3/4}(0)}$.

[**Prova da estimativa de Carleson** - (Teorema 4.1)] Iniciamos a prova deste Teorema afirmando que para qualquer função u na classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$, anulando-se continuamente sobre $B'_1(0)$, a seguinte estimativa se verifica, a saber,

$$\sup_{B^+_{1/2}(0)} u \le M_0 := (16\Theta)^{\tau} \cdot C_0, \tag{128}$$

onde $\Theta = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\frac{\sigma}{\tau}i}$, $\sigma > 0$ é dada na Proposição 4.3 e $\tau, C_0 > 0$ são as mesmas constantes como na Proposição 4.4. A escolha de M_0 como aparece acima pode-nos, em princípio, parecer estranho. Creio que, por esta razão, tal escolha precisa de uma explicação prévia. Ora, a verdadeira razão por trás da escolha de M_0 é porque ela força a série a seguir a convergir a uma constante suficientmente pequena, digamos menor que $1/16$.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2^{j\sigma}\cdot M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}} \le \frac{1}{16}. \tag{129}$$

Vamos precisar que, essencialmente, isto aconteça. Nosso argumento é baseado na construção de uma seqüência de pontos $\{x_j\}$ e, sua própria construção depende do fato de que as bolas $B_j := \overline{B^+_{2d_j}(\overline{x_j})}$ (onde $\overline{x_j}$ é a projeção de x_j sobre a fronteira plana B'_1) nunca deixem de estar contidas em $\overline{B^+_{3/4}(0)}$. A série em (129) controla a soma de raios $\sum 2d_j$, permitindo-nos concluir que cada semi-bola B_j está, de fato, contida em $\overline{B^+_{3/4}(0)}$. Uma vez que este fato está devidamente apontado, podemos começar a prova.

Suponha portanto, por contradição, que (128) não possa ser satisfeita para funções em $\mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$. Neste caso, deve existir u_0 sob as condições acima e $x_0 \in \partial B^+_{1/2}(0) \setminus \{x_n = 0\}$ tais que

$$u_0(x_0) > M_0.$$

Por outro lado, sabemos pelo Lema 4.1 e Teorema 1.2 em Liberman (1991) que

$$\sup_{B^+_{3/4}(0)} u_0 < +\infty. \tag{130}$$

Com efeito, $u_0 \in C^0(\overline{B^+_{3/4}(0)}) \cap C^{1,\alpha}(B^+_{3/4}(0))$ pelos resultados em Lieberman (1991). Consideramos $\overline{x}_i$ a projeção de x_i sobre $\{x_n = 0\}$ e x^i_n a n-ésima coordenada de x_i. Pela Proposição 4.4, temos

$$M_0 \leq u_0(x_0) \leq \sup_{B^+_{3/4}(0)\cap\{x_n \geq x^0_n\}} u_0 \leq C_0|x_0 - \overline{x}_0|^{-\tau}. \tag{131}$$

Assim, concluímos que

$$d_0 := |x_0 - \overline{x}_0| \leq \left(\frac{M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}}. \tag{132}$$

Claramente,

$$\sup_{B^+_{d_0}(\overline{x}_0)} u_0 \geq u_0(x_0) \geq M_0.$$

Por (129) e (132) temos $1/2 + 2d_0 < 3/4$. Portanto, $B^+_{2d_0}(\overline{x}_0) \subset B^+_{3/4}(0)$. Pela Proposição 4.3 e Proposição 4.4 podemos encontrar

$$x_1 \in \overline{B^+_{2d_0}(\overline{x}_0)} \subset \overline{B^+_{3/4}(0)}$$

$$C_0|x_1 - \overline{x}_1|^{-\tau} \geq \sup_{B^+_{3/4}(0)\cap\{x_n \geq x^1_n\}} u_0 \geq u_0(x_1) = \sup_{B^+_{2d_0}(\overline{x}_0)} u_0 \geq 2^\sigma \cdot \sup_{B^+_{d_0}(\overline{x}_0)} u_0 \geq 2^\sigma \cdot M_0.$$

Como em (132) temos

$$d_1 := |x_1 - \overline{x}_1| \leq \left(\frac{2^\sigma \cdot M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}}. \tag{133}$$

Mais uma vez por (129) e (133), temos $1/2 + 2(d_0 + d_1) < 3/4$ e portanto $B^+_{2d_1}(\overline{x}_1) \subset B^+_{3/4}(0)$. Assim, como em procedimento anterior, obtém-se

$$x_2 \in \overline{B^+_{2d_1}(\overline{x}_1)} \subset \overline{B^+_{3/4}(0)} \text{ e}$$

$$C_0|x_2 - \overline{x}_2|^{-\tau} \geq u_0(x_2) = \sup_{B^+_{2d_1}(\overline{x}_1)} u_0 \geq 2^{2\sigma} \cdot M_0.$$

Então, definimos

$$d_2 := |x_2 - \overline{x}_2| \leq \left(\frac{2^{2\sigma} \cdot M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}}. \tag{134}$$

Novamente, (129) e (134) mostram que $B^+_{2d_2}(\overline{x}_2) \subset B^+_{3/4}(0)$ uma vez que $1/2 + 2(d_0 + d_1 + d_2) < 3/4$. De fato, (129) nos permite continuar indefinidamente esta construção e obter uma sequência de pontos x_j satisfzendo as seguintes propriedades

$$C_0|x_j - \overline{x}_j|^{-\tau} \geq u_0(x_j) = \sup_{B^+_{2d_{j-1}}(\overline{x}_{j-1})} u_0 \geq 2^{j\sigma} \cdot M_0.$$

$$d_j := |x_j - \overline{x}_j| \leq \left(\frac{2^{j\sigma} \cdot M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}} \Longrightarrow 1/2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} d_j < 3/4 \Longrightarrow x_j \in \overline{B^+_{2d_{j-1}}(\overline{x}_1)} \subset \overline{B^+_{3/4}(0)}.$$

Em particular, isto implica que

$$u_0(x_j) \geq 2^{j\sigma} M_0 \to +\infty \quad \text{com} \quad x_j \in \overline{B^+_{3/4}(0)} \quad \forall j \geq 0.$$

Isto claramente viola (130). Assim, a estimativa (128) é verdadeira, finalizando assim a prova do Teorema.

■

Teorema 4.3 (Estimativa de Carleson - uma versão escalonada) *Seja $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_r(0))$ anulando-se continuamente sobre $B'_r(0)$. Assuma que para $y \in B^+_r(0)$ tenhamos $dist(y, B'_r(0)) \geq \epsilon r$. Então, existe uma constante $C > 0$ dependendo de parâmetros universais e de ϵ tal que*

$$u(x) \leq Cu(y), \quad \forall\ x \in B^+_{\epsilon r}(0).$$

A mesma estimativa é verdadeira se tivermos $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B^+_r(0))$ ao invés de $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_r(0))$.

4.3 Desigualdade de Harnack até a Fronteira

Nesta seção temos por meta provar uma desigualdade de Harnack até a fronteira (Boundary Harnack Inequality) para funções na classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$. Essencialmente, o que faremos aqui é mostrar que a geometria das barreiras de Pucci construídas na Secção 1, combinada com a estimativa de Carleson nos permitirá comparar as funções na classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$ com a distância até a fronteira. Uma desigualdade de Harnack como desejamos já foi provada para o caso onde o operador é o p-Laplaciano (veja Aikawa et al (2007)). Neste caso, ao invés de serem usadas barreiras do contexto totalmente não-linear, foram usadas como função barreira os p-capacitores de potência os quais possuem uma geometria bem conhecida.

Antes de desenvolvermos o primeiro resultado desta seção, a observação a seguir é bastante pertinente.

Ora, todos os resultados aqui apresentados são também verdadeiros se substituirmos a hip$\tilde{A}^3 tesedeu$ $\in \mathcal{G}(\delta, g_0, \Omega)$ por $u \in S_{\lambda,\Lambda}(\Omega)$. As provas seguem *Ipsis-Literis*, uma vez que são totalmente baseadas nas barreiras de Pucci construídas na Seção 1. Por esta razão apresentaremos apenas as provas do caso quaselinear. Assim como em Aikawa et al (2007), os resultados obtidos nesta secção pode ser estendidos para domínios $C^{1,1}$. Todavia, desde que nossos resultados centrais são provados em semi-espaços, preferimos desenvolver provas em domínios cuja fronteira é plana ao invés de usar fronteiras curvas com regularidade $C^{1,1}$.

Proposição 4.5 (Lema de Hopf) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1(0)) \cap C^0(\overline{B_1(0)})$ *onde* $u(x_0) = 0$ *para algum* $x_0 \in \partial B_1(0)$*. Então, existe uma constante (universal)* $c = c(n, \delta, g_0) > 0$ *tal que*

$$u(x) \geq c \cdot |x - x_0| \cdot u(0), \tag{135}$$

ao longo da direção radial. Em particular, se a derivada normal interior existe em x_0*, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq c \cdot u(0).$$

As mesmas conclusões são verdadeiras se $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1(0))$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1(0))$*.*

Prova: Seja $x \in B_1(0)$ um ponto na direção radial de x_0. Se $|x| \leq 1/2$ então pela Desigualdade de Harnack (interior) e desde que $|x - x_0| \leq 1$

$$u(x) \geq \overline{c} \cdot u(0) \geq \overline{c} \cdot |x - x_0| \cdot u(0).$$

Agora, considere a função dada por $w = \overline{c} \cdot u(0) \cdot \Gamma_{0,1}$ como apresentada na Observação 4.2. Aplicando assim o Princípio da Comparação a u e w, o resultado segue pelas propriedades geométricas de w (dadas também na Observação 4.2). De fato,

$$u(x) \geq w(x) \geq \alpha_0 \cdot \overline{c} \cdot u(0) \cdot \mathrm{dist}(x, \partial B_1(0)) = \alpha_0 \cdot \overline{c} \cdot u(0) \cdot |x - x_0|. \tag{136}$$

$\blacksquare$

Corolário 4.3 (Versão escalonada do Lema de Hopf) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_r(0)) \cap C^0(\overline{B}_r(0))$ *onde* $u(x_0) = 0$ *para algum* $x_0 \in \partial B_r(0)$*. Então, existe uma constante* $c = c(n, \delta, g_0) > 0$ *tal que*

$$u(x) \geq c \cdot \frac{|x - x_0| \cdot u(0)}{r} \tag{137}$$

ao longo da direção radial. Em particular, se a derivada normal interior existe em x_0*, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq c \cdot \frac{u(0)}{r}.$$

As mesmas conclusões podem ser verificadas caso tenhamos $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B_R(0))$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_r(0))$*.*

O resultado a seguir determina um comportamento supralinear para funções na classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$.

Corolário 4.4 (Crescimento supralinear a partir da fronteira plana) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$ *anulando-se continuamente sobre* $B_1'(0)$ *tal que* $u\left(\frac{1}{2}e_n\right) = 1$*. Então, existe* *uma constante universal $c > 0$ tal que*

$$u(x) \geq c \cdot x_n, \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B^+_{1/2}(0). \tag{138}$$

A mesma estimativa é verificada caso tenhamos $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B^+_1(0))$ ao invés de $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$.

Prova: Seja $x \in B^+_{\frac{1}{2}}(0)$. Se $\mathrm{dist}(x, \partial H_n) > 1/16$, então pela Desigualdade de Harnack (interior) para a classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$,

$$2x_n \leq 1 = u\left(\frac{1}{2}e_n\right) \leq C \cdot \inf_{\Omega} u \leq C \cdot u(x),$$

onde $\Omega = B_{3/4}(0)^+ \cap \left\{x_n \geq 1/16\right\}$ e $C > 0$ é universal. Caso contrário, existe $x_0 \in B^+_{3/4}(0) \cap \{x_n = 1/16\}$ tal que $x \in B_{1/16}(x_0)$. Novamente para ver isto, tome x_0 para ser a projeção de x sobre o plano $\{x_n = 1/16\}$. Pelo Lema de Hopf (Proposição 4.3) aplicado em $B_{1/16}(x_0)$, temos

$$u(x) \geq 16 \cdot c \cdot u(x_0) \cdot x_n.$$

Agora, mais uma vez, pela Desigualdade de Harnack (interior) com respeito ao domínio Ω (e desde que $u(\frac{1}{2}e_n) = 1$) concluímos que

$$u(x) \geq c_0 \cdot x_n.$$

$\blacksquare$

Proposição 4.6 (Estimativa do tipo Lipschitz até a Fronteira) *Seja $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$ uma função limitada em $B^+_{3/4}(0)$. Então, existe uma constante universal $C > 0$ tal que*

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{L^\infty(B^+_{3/4}(0))} \cdot x_n + \sup_{B'_{3/4}(0)} |u|, \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B^+_{1/2}(0). \tag{139}$$

A mesma estimativa é verificada caso tenhamos $u \in S_{\lambda,\Lambda}(B^+_1(0))$ ao invés de $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$.

Prova: Considere um ponto $x \in B^+_{1/2}(0)$. Se $x \in \{x_n \geq 1/16\}$, então

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(B^+_{3/4}(0))} \leq 16 \cdot \|u\|_{L^\infty(B^+_{3/4}(0))} \cdot x_n + \sup_{B'_{3/4}(0)} |u|.$$

Caso $x \in \{x_n < 1/16\}$ tomamos $\overline{x}$ para ser a projeção sobre o hiperplano $\left\{x_n = -1/16\right\}$. Agora, consideramos $\Theta_{\overline{x},1/8}(y)$ a solução radial como na Observação 4.2 para o caso de $\mathcal{L}_g$-supersolução. Portanto, para todo $y \in \mathcal{A}_{\frac{1}{16},\frac{1}{8}}(\overline{x})$, definimos

$$\Theta^*_{\overline{x},1/8}(y) := \|u\|_{L^\infty(B^+_{3/4}(0))} \cdot \Theta_{\overline{x},1/8}(y) + \sup_{B'_{3/4}(0)} |u| \leq \frac{8}{\kappa_0}\|u\|_{L^\infty(B^+_{3/4}(0))} \cdot y_n + \sup_{B'_{3/4}(0)} |u|. \tag{140}$$

Finalmente, observamos que $B_{1/8}(\overline{x}) \cap \{y_n > 0\} \subset B^+_{3/4}(0)$. Também,

$$u, -u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0)) \quad \text{com} \quad -u, u \leq \Theta^*_{\overline{x},1/8} \quad \text{sobre} \quad \partial\overline{B}^+_{1/8}(\overline{x}).$$

Assim, Princípio da Comparação implica que

$$|u(y)| \leq \Theta^*_{\overline{x},1/8}(y), \ \forall\ y \in B_{1/8}(\overline{x}) \cap \{x_n > 0\}.$$

Portanto, a estimativa para $u(x)$ é uma conseqüência imediata da estimativa acima com (140).

■

Agora estabelecemos um resultado que determina um comportamento sublinear para funções na classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$.

Corolário 4.5 (Estimativa Lipschitz até a fronteira plana) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$ *anulando-se continuamente sobre* $B'_1(0)$ *tal que* $u\left(\frac{1}{2}e_n\right) = 1$. *Então, existe uma constante universal* $C > 0$ *tal que*

$$u(x) \leq C \cdot x_n, \quad \forall\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in H_n \cap B_{1/2}(0). \tag{141}$$

Em particular,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B^+_{1/2}(0))} \leq C. \tag{142}$$

Estimativa (141) permanece verdadeira caso tenhamos $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(B^+_1(0))$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B^+_1(0))$.

Prova: Pela estimativa de Carleson existe uma constante universal $C_0 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(B^+_{3/4}(0))} \leq C_0.$$

Desde que u anula-se sobre a fronteira plana, a estimativa (141) segue imediatamente pela Proposição anterior. Sabemos pelos resultados em Liberman (1991) que $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(B^+_1(0))$. Para ver a estimativa do gradiente, consideramos $x_0 \in B^+_{1/2}(0)$. Se $\text{dist}(x_0, \partial H_n) \geq 1/8$, $B_{1/32}(x_0) \subset\subset H_n$ e pela estimativa interior do gradiente (veja Lema 2.7 em Martinez e Wolanski (2008)) temos

$$|\nabla u(x_0)| \leq \sup_{B_{1/32}(x_0)} |\nabla u| \leq 16 \cdot C \cdot \sup_{B_{1/16}(x_0)} u \leq 16 \cdot C \cdot \sup_{B^+_{3/4}(0)} u \leq 16 \cdot C \cdot C_0$$

Caso contrário, $\text{dist}(x_0, \partial H_n) = r < 1/8$. Sabemos por (141) que $u(x_0) \leq C \cdot r$. Assim, uma vez mais, pela estimativa interior do gradiente (Lema 2.7 em Martinez e Wolanski

(2008)) combinada com a Desigualdade de Harnack obtemos

$$|\nabla u(x_0)| \leq \sup_{B_{r/4}(x_0)} |\nabla u| \leq \frac{2C_0}{r} \sup_{B_{r/2}(0)} u \leq \frac{2C_0\overline{C}}{r} \inf_{B_{r/2}(x_0)} u \leq \frac{2C_0\overline{C}}{r} u(x_0) \leq 2C_0\overline{C}C,$$

provando o resultado.

■

Finalmente podemos enunciar e provar a Desigualdade de Harnack até a Fronteira.

Teorema 4.4 (Desigualdade de Harnack até a Fronteira) *Sejam* $0 \leq u, v \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$ *ambas anulando-se continuamente sobre* $B_1'(0)$ *e tais que* $u\left(\frac{1}{2}e_n\right) = v\left(\frac{1}{2}e_n\right) = 1$. *Então, existe uma constante universal* $\overline{C} > 0$ *tal que*

$$\frac{1}{\overline{C}} \leq \frac{u(x)}{v(x)} \leq \overline{C}, \quad \forall\, x \in B_{1/2}^+(0). \tag{143}$$

As mesmas estimativas são verificadas caso tenhamos $0 \leq u, v \in S_{\lambda,\Lambda}(B_1^+(0))$ *ao invés de* $u, v \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_1^+(0))$.

Prova: Pelo Corolário 4.4 e Corolário 4.5 temos que para todo $x \in B_{1/2}^+$,

$$\frac{c}{C} v(x) \leq \frac{c}{C} C \cdot x_n \leq u(x) \leq \frac{C}{c} c \cdot x_n \leq \frac{C}{c} v(x).$$

Isto prova o Teorema.

■

Lembrando uma vez mais que a escala $u_r(x) = u(rx)$ preserva as classes em consideração, obtemos a versão escalonada do Teorema acima.

Teorema 4.5 (Desigualdade de Harnack até a Fronteira - Versão escalonada) *Sejam* $0 \leq u, v \in \mathcal{G}(\delta, g_0, B_r^+(x_0))$ *para algum* $x_0 \in \partial H_n$ *e suponha que ambas se anulam sobre* $B_r'(x_0)$. *Então, existe uma constante* $C = C(n, \delta, g_0) > 0$ *tal que*

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{u(y)}{v(y)} \leq \frac{u(x)}{v(x)} \leq C \cdot \frac{u(y)}{v(y)}, \quad \forall\, x, y \in B_{r/2}^+(x_0). \tag{144}$$

O prÃ^3*ximoCorolárioémaisumresultadodotipoLiouville.*

Corolário 4.6 (Teorema do tipo Liouville com sinal em semi-espaços) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ *limitada. Suponha que* u *anula-se continuamente sobre a fronteira* ∂H_n. *Então,* $u \equiv 0$. *As mesmas conclusões são verificadas para* $0 \leq u \in S(\lambda, \Lambda, H_n^+)$ *ao invés de* $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$.

Prova: Com efeito, suponha $u \leq M$. Então, para $r > 2$, Teorema 4.4 (para $v(x) = x_n$ e $y = e_1$) nos dá

$$\frac{1}{C} \cdot u(e_1) \leq \frac{u(x)}{x_n} \leq \frac{M}{x_n} \quad \forall\, x \in B_{r/2}^+(0).$$

Em particular, aplicando a desigualdade acima para $x = r \cdot e_n/4$ encontramos

$$\frac{1}{C} \cdot u(e_1) \leq \frac{4M}{r} \to 0 \quad \text{as} \quad r \to \infty.$$

Assim, $u(e_1) = 0$. Desta forma, para qualquer $r > 1$, o mínimo de u em $\overline{B_r(0)}$ é atingindo em seu interior, assim, pelo Princípio do Máximo Forte, u é necessariamente nula em $B_r(0)$. Isto finaliza a prova do Corolário.

■

Observação 4.4 *Observamos que, com respeito ao Corolário acima, restringindo-nos aos operadores quaselineares, podemos remover a hip*$\tilde{A}^3 tesedosinalquetalresultadoaindaseverifica.Istos$

4.4 Controle universal entre hiperplanos e Caracterização Linear para funções na classe $S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$ - (Prova do Teorema 2.10)

Nesta seção combinamos as várias versões da Desigualdade de Harnack, a geometria das barreiras do operador de Pucci construídas na Seção 1 e a estimativa de Carleson para provar o Teorema 2.10. Isto é, provaremos que existem hiperplanos (universais) que determinam o comportamento de u para qualquer função em $\mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ ou $S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$.

Por comodidade o reenunciaremos aqui.

Teorema (Teorema 2.11) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ *anulando-se continuamente sobre* ∂H_n^+. *Então, existem constantes* $0 < c \leq C < \infty$, *dependendo apenas de* n, δ, g_0 *tais que*

$$cu(e_n) \cdot x_n \leq u(x) \leq C \cdot u(e_n) \cdot x_n. \tag{145}$$

Similarmente, se $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$ *anulando-se continuamente sobre* ∂H_n^+ *então a estimativa (145) se verifica para constantes* c *e* C *dependendo de* n, λ, Λ.

Prova:

Afirmação: Existem $0 < c \leq C$ universais tais que

$$cu(e_n)r \leq u(re_n) \leq Cu(e_n)r, \quad \forall\ r \geq 2.$$

Para $r > 2$ tome $x_0 = re_n$ com $u(x_0) > 0$. Pela Desigualdade de Harnack existe $C = C(n, \delta, g_0) > 0$ tal que

$$\sup_{B_{r/2}(x_0)} u \leq C \inf_{B_{r/2}(x_0)} u.$$

Em particular, $u \geq C^{-1}u(x_0)$ em $\overline{B}_{r/2}(x_0)$. Agora, consideramos

$$\Gamma^*(x) := C^{-1}u(x_0) \cdot \Gamma_{x_0,r}(x) \quad \text{para } x \in \mathcal{A}_{r/2,r}(x_0),$$

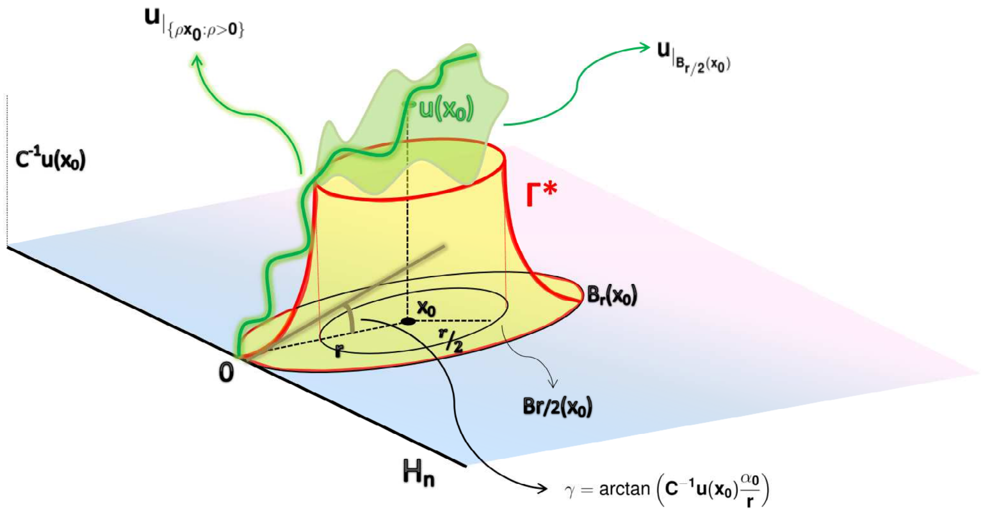
onde $\Gamma_{x_0,r}$ foi definida na Observação 4.2. Pelo Princípio da Comparação e Observação 4.2

$$u(x) \geq \Gamma^*(x) \geq C^{-1}u(x_0)\frac{\alpha_0}{r}\text{dist}(x, \partial B_r(x_0)),$$

onde $\alpha_0 > 0$ é universal. Assim, para $x = e_n$ concluímos que

$$u(e_n) \geq \frac{c_0}{r}u(re_n).$$

Figura 14 – Esquema ilustrativo da prova de $u(re_n) \leq Cu(e_n)r$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Provemos a estimativa supra linear. Ora, pela estimativa de Carleson (Teorema 4.3) temos,

$$u(x) \leq Cu(2re_n), \ \forall x \in B^+_{4r}(0) \tag{146}$$

e pela desigualdade de Harnack

$$u(2re_n) \leq C2^\tau u(x_0). \tag{147}$$

Assim, combinando as estimativas (146) e (147) obtemos

$$u(x) \leq C_0u(x_0), \ \forall \ x \in B^+_{4r}(0).$$

Logo, se considerarmos a barreira

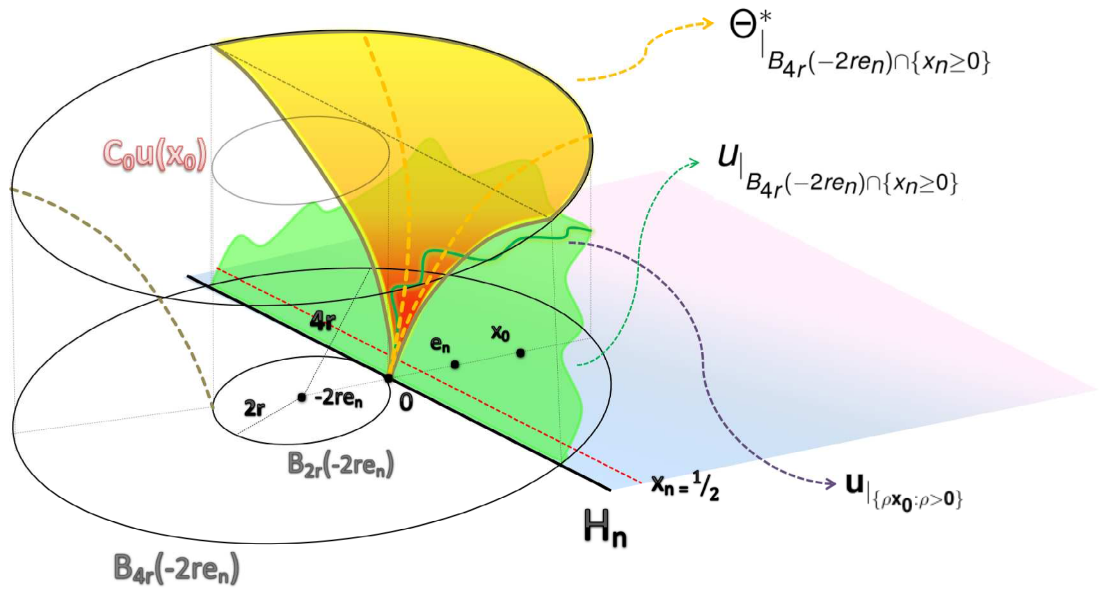
$$\Theta^*(x) = C_0u(x_0) \cdot \Theta_{-2re_n,4r}(x)$$

Chegaremos mais uma vez, em virtude do Princípio da Comparação, que

$$u(x) \leq \Theta^*(x) \leq \frac{\kappa_0^{-1}}{2r} u(x_0) \mathrm{dist}(x, \partial B_{2r}(-2re_n)) \quad \text{in } \overline{B}_{4r}(-2re_n) \cap \{x_n \geq 0\}.$$

Isto completa a prova da Afirmação quando tomamos $x = e_n$.

Figura 15 – Esquema ilustrativo da prova de $cu(e_n)r \leq u(re_n)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, pela Desigualdade de Harnack até a Fronteira existem $0 < c_0 \leq C_0$ dependendo apenas de n, δ, g_0 tais que

$$c_0 \frac{u(re_n)}{r} \leq \frac{u(x)}{x_n} \leq C_0 \frac{u(re_n)}{r} \quad \forall\, x \in B_{2r}(0) \cap H_n, r > 2.$$

Portanto,

$$\frac{c_0}{C_0} u(e_n) \cdot x_n \leq c_0 \frac{u(re_n)}{r} \cdot x_n \leq u(x) \leq C_0 \frac{u(re_n)}{r} \cdot x_n \leq \frac{C_0}{c_0} u(e_n) \cdot x_n, \ \forall\, x \in B_{2r}(0) \cap H_n.$$

Isto prova o Teorema quando $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$. O caso em que $u \in S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$ segue de forma análoga.

■

A classificação de funções $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$ anulando-se continuamente sobre ∂H_n^+ segue como uma aplicação do Teorema acima e do Princípio do Máximo Forte. Mais uma vez por cortesia ao leitor nos o reenunciamos abaixo.

Teorema (Teorema 2.10) *Seja $0 \leq u \in S_{\lambda,\Lambda}(H_n^+)$ anulando-se continuamente sobre ∂H_n^+.*

Então,

$$u(x) = u(e_n) \cdot x_n. \tag{148}$$

Prova: Defina

$$D_{\text{inf}} := \inf \Big\{ D > 0 : u(x) \leq D \cdot u(e_n) \cdot x_n \Big\}.$$

Pelo Teorema anterior,

$$0 < c \leq D_{\text{inf}} \leq C < \infty.$$

Afirmo que $D_{\text{inf}} = 1$ e, portanto, pelo Princípio do Máximo Forte (veja Proposição 4.9 em Caffarelli e Cabré (1995)),

$$u(x) = u(e_n) \cdot x_n.$$

De fato, Teorema 2.11 aplicado em $x = e_n$ garante que $D_{\text{inf}} \geq 1$. Se $D_{\text{inf}} > 1$, então concluímos que a função

$$v(x) := D_{\text{inf}} \cdot u(e_n) \cdot x_n - u(x)$$

também satisfaz as condições do Teorema 2.11. Assim,

$$c \cdot v(e_n) \cdot x_n \leq v(x).$$

Isto implica imediatamente que

$$u(x) \leq \Big(D_{\text{inf}} + c - cD_{\text{inf}} \Big) \cdot u(e_n) \cdot x_n.$$

Neste caso,

$$D_{\text{inf}} + c - cD_{\text{inf}} \geq D_{\text{inf}} \Longleftrightarrow D_{\text{inf}} \leq 1$$

o que contradiz o fato de ser $D_{\text{inf}} > 1$. Logo, $D_{\text{inf}} = 1$ e a prova do Teorema está completa.

■

4.5 Princípio da Reflexão de Schwarz

Para esta seção reservamos a extensão de um resultado clássico bastante conhecido para funções harmônicas, o chamado Princípio da Reflexão de Schwarz para a classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, \Omega^+)$. Em linhas gerais, este resultado nos permite estender soluções fracas de equações elípticas que se anulam em parte da fronteira de domínios apropriados para domínios maiores mediante estensão ímpar da função. Este tipo de Teorema é também conhecido para funções p-harmônicas tendo sido provado em Martio (1981). O argumento da prova é variacional e exige o uso de funções testes apropriadas. Em nossa prova, escolhemos uma função teste específica e diferente das utilizadas em Martio (1981). Tal função foi escolhida porque acreditamos que pode nos fornecer uma prova ainda mais clara e, quiça, mais direta para o contexto de espaços de Orlicz (na realidade, a função que apresentamos pode ser usada em quaisquer dos contextos que mencionamos acima). Mencionamos ainda que, para o caso das equações aqui estudadas, as estimativas referentes Ã equação são diferentes das obtidas para o caso p-Laplaciano. Isto se dá porque, é nesta hora que, entram em jogo as propriedades dos espaços de Orlicz ora considerados.

Em toda esta seção usamos a notação $R_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para denotar a reflexão ímpar que cruza a fronteira ∂H_n. Neste caso, R_n é dada por $R_n(x', x_n) = (x', -x_n)$. Aqui também usaremos a notação introduzida no Capítulo Preliminares.

Teorema 4.6 (Princípio da Reflexão de Schwarz) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio simétrico com respeito a $\{x_n = 0\}$ e u uma solução no sentido das distribuições para $\mathcal{L}_g u = 0$ em Ω^+ anulando-se continuamente sobre Ω'. Aqui, $G' = g$ e G satisfaz as condições (CP) and (CQ). Então a função $u^* : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & se \ \ x \in \overline{\Omega}^+; \\ -u(R_n(x)) & \text{se} \ \ x \in \Omega^-, \end{cases} \tag{149}$$

pertence a $W^{1,G}(\Omega)$ e também satisfaz

$$\mathcal{L}_g u^* = 0 \quad em \ \ \Omega$$

no sentido das distribuições.

Prova: Inicialmente observamos que, por continuidade e pela caracterização das funções de Sobolev via funções absolutamente contínuas com respeito a "quase todas"as retas paralelas aos eixos coordenados, $u^* \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ (Veja Teorema 2.2). Também, por mudança de variáveis, temos que

$$\mathcal{L}_g u^* = 0 \quad \text{em} \ \ \Omega \setminus \Omega'.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para $\varepsilon > 0$ definimos a função Lipschitz

$$\xi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \ \ |x_n| \geq \varepsilon; \\ \frac{2}{\varepsilon}|x_n| - 1 & \text{if} \ \frac{\varepsilon}{2} \leq |x_n| \leq \varepsilon; \\ 0 & \text{if} \ \ |x_n| < \varepsilon/2. \end{cases} \tag{150}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(|\nabla u^*|)}{|\nabla u^*|} \nabla u^* \cdot \nabla \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(|\nabla u^*|)}{|\nabla u^*|} \nabla u^* \cdot \nabla[(1-\xi_\varepsilon)\varphi] dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus \partial H_n} \frac{g(|\nabla u^*|)}{|\nabla u^*|} \nabla u^* \cdot \nabla(\xi_\varepsilon \varphi) dx. \end{aligned} \tag{151}$$

Uma vez que $\xi_\varepsilon \varphi \in C(\Omega) \cap W_0^{1,G}(\Omega \setminus \Omega')$, temos que a integral da segunda linha da equação acima é nula. Assim, o Teorema ficará provado se formos capazes de mostrar que a integral do lado direito da primeira linha de (151) tende a zero quando $\varepsilon \to 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(|\nabla u^*|)}{|\nabla u^*|} \nabla u^* \cdot \nabla[(1-\xi_\varepsilon)\varphi] dx \\
&\qquad = \int_{H_n} (1-\xi_\varepsilon) \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{H}_n} (1-\xi_\varepsilon) \frac{g(|\nabla (u(R_n(x)))|)}{|\nabla (u(R_n(x)))|} \nabla (u(R_n(x))) \cdot \nabla \varphi dx \\
&\qquad - \int_{H_n} \varphi \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \xi_\varepsilon dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{H}_n} \varphi \frac{g(|\nabla (u(R_n(x', x)))|)}{|\nabla (u(R_n(x)))|} \nabla (u(R_n(x))) \cdot \nabla \xi_\varepsilon dx \\
&\qquad = \int_{H_n} (1-\xi_\varepsilon) \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{H}_n} (1-\xi_\varepsilon) \frac{g(|\nabla (u(x', -x_n))|)}{|\nabla (u(x', -x_n))|} \nabla u(x', -x_n) \cdot R_n(\nabla \varphi) dx \\
&\qquad - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\{\varepsilon/2 \le x_n \le \varepsilon\}} \varphi \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x_n} dx \\
&\qquad + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\{-\varepsilon \le x_n \le -\varepsilon/2\}} \varphi \frac{g(|\nabla (u(x', -x_n))|)}{|\nabla (u(x', -x_n))|} \frac{\partial u(x', -x_n)}{\partial x_n} dx \\
&\qquad =: A_\varepsilon - B_\varepsilon - C_\varepsilon + D_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Agora, estimamos $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ e $-C_\varepsilon + D_\varepsilon$. Seja $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Observe que se $\widetilde{G}' = g^{-1}$ então por $(G-4)$ e pelo Lema 2.3 temos

$$\begin{aligned}
\|g(|\nabla u|)\|_{L^{\widetilde{G}}(K \cap H_n)} &\le C_1 \cdot \Big(1 + \int_{K \cap H_n} \widetilde{G}(g(|\nabla u|))\, dx\Big)^{g_0/(g_0+1)} \\
&\le C_2 \cdot \Big(1 + \int_{K \cap H_n} G(|\nabla u|)\, dx\Big)^{g_0/(g_0+1)},
\end{aligned}$$

onde $C_2 > 0$ depende somente de δ, g_0. Portanto,

$$\|g(|\nabla u|)\|_{L^{\widetilde{G}}(K \cap H_n)} \le C_0.$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$\|g(|\nabla u|)\|_{L^{\widetilde{G}}(K \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{H}_n))} \le C_0.$$

Desde que $0 \leq \xi_\varepsilon \leq 1$, segue pela desiguladade de Hölder para espaços de Orlicz que

$$\begin{aligned}|A_\varepsilon| &\leq \int_{K\cap\{0<x_n<\varepsilon\}} g(|\nabla u|)|\nabla\varphi| dx \\ &\leq \|g(|\nabla u|)\|_{L^{\widetilde{G}}(K\cap H^+)} \cdot \|\nabla\varphi\|_{L^G(K\cap\{0<x_n<\varepsilon\})} \qquad (152) \\ &\leq C_0 \cdot \|\nabla\varphi\|_{L^G(K\cap\{0<x_n<\varepsilon\})}.\end{aligned}$$

Por mudança de variáveis,

$$|B_\varepsilon| \leq C_0 \cdot \|\nabla\varphi\|_{L^G(K\cap\{-\varepsilon<x_n<0\})}.$$

Assim, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, pondo $K_\varepsilon = K \cap \{-\varepsilon \leq x_n \leq \varepsilon\}$ obtemos novamente pelo Lema 2.3 que

$$\begin{aligned}\||\nabla\varphi|\|_{L^G(K_\varepsilon)} &\leq C \cdot \max\left\{\Big(\int_{K_\varepsilon} G(|\nabla\varphi|)\, dx\Big)^{\frac{1}{g_0+1}}, \Big(\int_{K_\varepsilon} G(|\nabla\varphi|)\, dx\Big)^{\frac{1}{\delta+1}}\right\} \\ &\leq C \cdot (1+g_0)G(1) \sup_{K_\varepsilon}(1+|\nabla\varphi|)^{\frac{1+g_0}{1+\delta}} |K \cap \{-\varepsilon < x_n < \varepsilon\}|^{\frac{1}{1+\delta}} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(|A_\varepsilon| + |B_\varepsilon|) = 0.$$

Agora, desde que

$$D_\varepsilon = \int_{K\cap\{\varepsilon/2\leq x_n\leq\varepsilon\}} \varphi(x', -x_n) \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x_n} dx$$

concluímos pela Desigualdade do Valor Médio e procedendo de forma semelhante ao que foi feito em (152), que

$$\begin{aligned}\frac{2}{\varepsilon}|-C_\varepsilon + D_\varepsilon| &\leq \frac{2}{\varepsilon} \sup_{K\cap\{\varepsilon/2\leq x_n\leq\varepsilon\}} |\varphi(x) - \varphi(x', -x_n)| \int_{K\cap\{\varepsilon/2\leq x_n\leq\varepsilon\}} g(|\nabla u|) dx \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot 2C\varepsilon \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(K)} |K \cap \{\varepsilon/2 \leq x_n \leq \varepsilon\}|^{\frac{1}{1+\delta}} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

A prova do Teorema está finalmente completa.

■

Agora podemos remover a restrição do sinal para o caso quasilinear no Corolário 4.6 como segue.

Corolário 4.7 (Teorema do tipo Liouville - II) *Seja $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ uma função limitada que se anula continuamente sobre ∂H_n^+. Então $u \equiv 0$.*

Prova: Seja $u^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a reflexão ímpar de u dada no Teorema 4.6. Sabemos que u^* pertence a classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$ e, além disso, é limitada. Então, pelo Corolário 4.2, u é constante. Como u se anula na fronteira segue que $u \equiv 0$.

■

4.6 Comportamento no Infinito e caráter Afim

Na penúltima seção deste Capítulo estudamos a relação entre o crescimento no infinito para as funções em $\mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$ e seu eventual caráter afim. Aqui necessitamos de dois ingredientes principais. Eles aparecem de forma fundamental em nossa análise. São estes: a invariância de um escalonamento apropriado e também a estimativa $C^{1,\alpha}$-local para as funções na classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$. Vale ressaltar que estimativa $C^{1,\alpha}$ não são esperadas para a classe $S_{\lambda,\Lambda}(\mathbb{R}^n)$. De fato, sabemos que, devido a Teoria estabelecida por Caffarelli-Krilov-Safanov, o melhor que podemos esperar é Hölder continuidade (estimativa $C^{0,\alpha}$). É por isso que, nesta seção, apenas trataremos do caso quaselinear. Aqui acompanhamos de perto as idéias apresentadas em Kilpeläinen, Shahgholian e Zhong (2007). Começamos como uma Observação.

Observação 4.5 *No Capítulo 2 foi observado que a dependência de $g(1)$ da constante universal C que controla a a norma $C^{1,\alpha}$-interior de soluções no sentido das distribuições para o operador $\mathcal{L}_g$ pode ser removida. A prova deste fato pode ser vista na Observação 2.1. Esta informação será extremamente útil na prova do Teorema 4.7.*

Teorema 4.7 *Seja $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$. Existe uma contante real $\beta \in (0,1)$ dependendo apenas de δ, g_0 e n tal que se*

$$|u(x)| = o(|x|^{1+\beta}) \quad \text{as} \quad |x| \to \infty,$$

então u é uma função afim.

Prova: Seja $\{R_j\}_{j\geq 1}$ uma seqüência de números reais tal que $R_j \to \infty$ e considere

$$S_j := \sup_{B_{R_j}(0)} |u| = |u(x_j)|.$$

Definimos agora as seguintes funções escalonadas:

$$u_j(x) := \frac{u(R_j x)}{S_j} \quad \text{para} \quad x \in B_1(0).$$

Assim, por definição existe $G \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$ tal que $\mathcal{L}_g u = 0$ em $\mathbb{R}^n$. Logo, $|u_j| \leq 1$ em $B_1(0)$ e $\mathcal{L}_{g_j} u_j = 0$ em $B_1(0)$, onde $g_j(t) := g\left(\frac{S_j}{R_j} t\right)$. Note que se $G_j' = g_j$ com $G_j(0) = 0$ então $G_j \in \mathcal{G}(\delta, g_0)$. Agora, pelo Teorema 1.7 em Liberman (1991) e pela Observação acima, existem $\alpha = \alpha(\delta, g_0, n)$ e uma constante $C_0 > 0$ tais que

$$\|u_j\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2}(0))} \leq C_0(n, \delta, g_0), \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

para $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ pomos

$$C_j(x) := \frac{|\nabla u_j(x) - \nabla u_j(0)|}{|x|^\beta} = \frac{R_j^{1+\beta}}{S_j} \frac{|\nabla u(R_j x) - \nabla u(0)|}{|R_j x|^\beta}.$$

Desta forma, $||C_j||_{L^\infty(B_{1/2}(0))} \leq C_0$.
Logo, pela condição de crescimento, temos

$$\frac{|x_j|^{1+\beta}}{|u(x_j)|} \leq \frac{R_j^{1+\beta}}{S_j} \to \infty \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Isto implica que

$$\sup_{y \in B_{R_j/2}(0)} \frac{|\nabla u(y) - \nabla u(0)|}{|y|^\beta} \leq C_0 \cdot \left(\frac{R_j^{1+\beta}}{S_j}\right)^{-1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Portanto, ∇u é constante em $\mathbb{R}^n$ e o resultado segue.

■

O Corolário abaixo é uma conseqüência imediata do Teorema 4.7.

Corolário 4.8 *Seja $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$. Então*

i) $|u(x)| = O(|x|)$ quando $|x| \to \infty \Longrightarrow u$ é afim.

ii) $|u(x)| = o(|x|)$ quando $|x| \to \infty \Longrightarrow u$ é constante.

Corolário 4.9 *Seja $u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$. Suponha que u é Lipschitz contínua em H_n^+ e se anula continuamente sobre ∂H_n^+. Então,*

$$u(x) = u(e_n) \cdot x_n \;\forall\; x \in H_n^+.$$

Prova: De acordo com as hipóteses acima, existe uma constante positiva L (menor possível) tal que

$$|u(x)| \leq L \cdot |x| \;\; \text{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, se considerarmos u^* sua reflexão ímpar cruzando o plano ∂H_n^+, o Princípio da Reflexão de Schwarz, Teorema 4.6, garante que $u^* \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$. Trivialmente chegamos a

$$|u^*(x)| \leq L \cdot |x| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo Corolário 4.8, u^* é afim e desde que se anula sobre ∂H_n^+, concluímos que $u(x) = \alpha \cdot x_n$. Agora, $|\alpha| = |u(e_n)| \leq L$. Ainda, pela estimativa abaixo

$$L = \sup_{\{x,y \in H_n^+,\ x \neq y\}} \frac{|\alpha \cdot x_n - \alpha \cdot y_n|}{|x-y|} \leq |u(e_n)|,$$

o resultado segue.

■

4.7 Caracterização Linear para a classe $\mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ - (Prova do Teorema 2.9)

Finalmente, nesta seção, reunimos todos os ingredientes para dar uma prova simples para o Teorema 2.9. Reenunciaremos este Teorema aqui.

Teorema (Teorema 2.9) *Seja* $0 \leq u \in \mathcal{G}(\delta, g_0, H_n^+)$ *anulando-se continuamente sobre* ∂H_n^+. *Então,*

$$u(x) = u(e_n) \cdot x_n. \tag{153}$$

Prova: Seja u^* a reflexão ímpar de u com respeito ao hiperplano ∂H_n^+. Pelo Teorema 4.6, $u^* \in \mathcal{G}(\delta, g_0, \mathbb{R}^n)$. Teorema 2.11 implica na seguinte estimativa

$$|u^*(x)| \leq C \cdot u(e_n) \cdot |x_n| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{154}$$

Portanto, $u^*(x) = O(|x|)$ quando $|x| \to \infty$. Desta forma, Corolário 4.8 implica que u é afim. Desde que u se anula sobre ∂H_n^+ temos que $u(x) = u(e_n) \cdot x_n$ como desejado.

■

5 CONCLUSÃO

Finalizo este trabalho observando que todos os objetivos aos quais nos propomos a estudar lograram êxito. Na primeira parte da tese nos propomos a estudar um problema de fronteira livre do tipo Bernoulli de duas fases. Como conseqüência de nossos estudos estabelecemos um critério para a regularidade ótima de mínimos e apresentamos um primeiro resultado sobre a fronteira livre numa eventual falta de regularidade ótima dos mínimos. Na segunda parte da tese classificamos soluções de algumas equações elípticas da forma quasilinear e da forma totalmente linear em $\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Provamos que as únicas soluções das equações aqui tratadas são da forma $u(x) = u(e_n) \cdot x_n$, onde $e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$.

REFERÊNCIAS

ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. **Sobolev Spaces**. Academic Press, 2nd edition, 2003.

AIKAWA, Hiroaki; KILPELAINEN, Tero; SHANMUGALINGAM, Nageswari; ZHONG, Xiao. Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth Euclidean domains. **Potential Anal.**, v. 26, n. 3, p. 281–301, 2007.

ALEN, M.; LARA, H. C. **Free Boundary on a Cone**, 2014. Disponível em: $arXiv$: 1301.6047 [math.AP]. Acesso em: 30 mar. 2014.

ALT, Hans W.; CAFFARELLI, Luis A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. **J. Reine Angew. Math.**, v. -, n. 325, p. 105–144, 1981.

ALT, Hans W.; CAFFARELLI, Luis A.; FRIEDMAN, Avner. Free boundary problem for quasi-linear elliptic equations. **Institiut für Angewandte Mathematik.**, v. -, n. -, p. 1–44, 1983.

ALT, Hans W.; CAFFARELLI, Luis A.; FRIEDMAN, Avner. Variational problems with two phases and their free boundaries. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. -, n. 282, p. 431–461, 1984.

AXLER, Sheldon; BOURDON, Paul; RAMEY, Wade. **Harmonic function theory**. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 137. Springer-Verlag, New York, 2001.

AZZAM, Jonas; BEDROSSIAN, Jacob. **Bounded Mean Oscillation and the Uniqueness of Active Scalar Equations. Preprint**, 2014. Disponível em: arXiv:1108.2735v2 [math.AP]. Acesso em: 15 mar. 2014.

BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. 1. ed. Universitext. Springer, 2010.

CAFFARELLI, Luis A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. III. Existence theory, compactness, and dependence on X. **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.**, v. 15, n. 4, p. 583–602, 1989a.

CAFFARELLI, Luis A. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. **Ann. of Math.**, v. 130(2), n. 1, p. 189–213, 1989b.

CAFFARELLI, Luis A.; CABRE, Xavier. **Fully Nonlinear Elliptic Equations**. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 43. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1995.

CAFFARELLI, Luis A.; FABES, E.; MORTOLA, S.; SALSA, Sandro. Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form. **Indiana**

Univ. Math. Journal, v. 30, n. 4, p. 621–640, 1981.

CAFFARELLI, Luis A.; JERISON, David; KENIG, Carlos. Global energy minimizers for free boundary problems and full regularity in three dimensions. **Contemp. Math.**, v. -, n. 350, p. 83–97, 2004.

CAFFARELLI, Luis A.; SALSA, Sandro. **A Geometric Approach to Free Boundary Problems**. Volume 68 of Grad. Stud. Math. American Mathematical Society, 2005.

DANIELLI, Donatela; PETROSYAN, Arshak. A minimum problem with free boundary for a degenerate quasilinear operator. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 23, n. 1, p. 97–124, 2005.

DE SILVA, Danielli; JERISON, David. A singular energy minimizing free boundary. **J. Reine Angew. Math.**, v. 635, n. -, p. 1–21, 2009.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. Volume 19 of Grad. Stud. Math. American Mathematical Society, 1998.

EVANS, Lawrence C.; GARIEPERY, R. **Measure Theory and Fine Properties of Functions**. Boca Raton: CCR Press, Inc., 1992.

GILBARG, David. The Pragmém-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations. **A. Rational Mech. Anal.**, v. 1, n. -, p. 411–417, 1952.

GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer-Verlag, Berlin,(Reprint of the 1998), 1977.

HAN, Quin; LIN, Fanghua. **Elliptic partial differential equations**. Second edition. Courant Lecture Notes in Mathematics, 1. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; AMS, Providence, 2011.

HOPF, Eberhard. Remarks on the proceding paper by D. Gilbarg. **A. Rational Mech. Anal.**, v. 1, n. -, p. 418–424, 1952.

HUBER, Alfred. A theorem of Phragmén-Lindelöf type. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 4, n. -, p. 852–857, 1953.

KHARAKHANYAN, Aram. On the Lipschitz regularity of solutions of a minimum problem with free boundary. **Interfaces and Free Boundaries**, v. 10, n. -, p. 79–86, 2008.

KILPELAINEN, Tero; SHAGHOLIAN, Hendrix; ZHONG, Xiao. Growth estimates through scaling for quasilinear partial differential equations. **Ann. Acad. Sci. Fenn.**

Math., v. 32, n. -, p. 595–599, 2007.

LEDERMAN, Claudia; WOLANSKI, Noemi. A two phase elliptic singular perturbation problem with a forcing term. **J. Math. Pures Appl.**, v. 86, n. 6, p. 552–589, 2006.

LEWIS, John L.; NYSTRON, Kaj. New results for p-harmonic functions. Special Issue: In honor of Frederick W. Gehring, Part 2. **Pure Appl. Math. Q.**, v. 7, n. 2, p. 345–363, 2011.

LIEBERMAN, Gary M. The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhensaya and Uraltseva for elliptic equations. **Comm. in Partial Differential Equations**, v. 16, n. 2 e 3, p. 411–461, 1991.

MARTINEZ, Sandra; WOLANSKI, Noemi. A minimum problem with free boundary in Orlicz Spaces. **Advances in Mathematics**, v. 218, n. 6, p. 1914–1971, 2008.

MRTIO, O. Reflection principle for solutions of elliptic partial differential equations and quasiregular mappings. **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.**, v. 6, n. 1, p. 179–187, 1981.

SERRIN, James B. On Pragmém-Lindelöf Principle for elliptic partial differential equations. **A. Rational Mech. Anal.**, v. 3, n. -, p. 395–413, 1954.