



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**JOSÉ LUCIANO NASCIMENTO BEZERRA**

**PROBABILIDADE E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA – ALÉM DOS DADOS,  
MOEDAS E CARTAS DE BARALHO**

**FORTALEZA**

**2015**

JOSÉ LUCIANO NASCIMENTO BEZERRA

PROBABILIDADE E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA – ALÉM DOS DADOS,  
MOEDAS E CARTAS DE BARALHO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

B469p Bezerra, José Luciano Nascimento  
Probabilidade e probabilidade geométrica: além dos dados, moedas e cartas de baralho / José Luciano Nascimento Bezerra. – 2015.  
63 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

1. Probabilidades. 2. Probabilidade geométrica. 3. Agulhas de Buffon. I. Título.

---

CDD 519.2

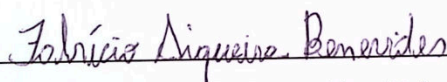
JOSÉ LUCIANO NASCIMENTO

PROBABILIDADE E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA –  
ALÉM DOS DADOS, MOEDAS E CARTAS DE BARALHO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

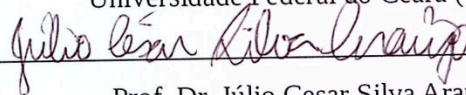
Aprovada em: 21 / 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA



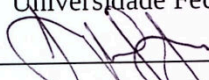
Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Júlio Cesar Silva Araújo

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Angelo Papa Neto

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Ao Deus de Abraão.

Aos meus pais, Zezinho e Lúcia.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, meu Senhor e Salvador, pelo modo assombrosamente maravilhoso como me supriu ao longo desta jornada.

À CAPES, pelo apoio e incentivo financeiro, com a manutenção da bolsa de auxílio, e aos idealizadores do PROFMAT por tão importante programa que tem permitido a muitos como eu concretizar o sonho de fazer um mestrado.

Ao Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides, pela excelente e paciente orientação, pelas boas discussões e conversas por demais instrutivas, mesmo tendo o tempo por adversário.

Aos professores participantes da banca examinadora Dr. Júlio Cesar Silva Araújo e Dr. Ângelo Papa Neto pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos meus professores da Educação Básica: D. Regina, Luiz Moura e Daniel Mendes, pelas boas aulas e por despertar em mim o interesse pela Matemática.

Aos professores do PROFMAT, em especial, ao Professor Marcos Ferreira de Melo e à Universidade Federal do Ceará, pelas aulas e imensas contribuições em nossa formação para o exercício deste belíssimo ofício que é ensinar.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas, pela amizade e companheirismo, em especial, Sâmio Praciano, Marcelo Batista, Rafael, Valdir e Uchôa.

Aos meus amados irmãos em Cristo, por suas incessantes orações por mim.

Aos meus familiares e amigos por me incentivar e acreditar em mim, em especial, D. Lúcia e Sr. Zezinho, meus queridos pais.

À minha esposa Natalisce, por sua paciência, apoio e incentivo e à nossa querida Lia, por existir e alegrar nossas vidas e até pelos choros enquanto eu tentava escrever este texto.

Aos gestores da EEFM Maria Conceição de Araújo pelo apoio, incentivo e flexibilidade nos meus horários a fim de favorecer o meu trabalho.

À minha estimada e saudosa diretora Tereza de Jesus Silva por todo o seu apoio que me permitiu concluir o ensino fundamental.

“A Teoria das Probabilidades, como disciplina Matemática, pode e deve desenvolver-se a partir de axiomas, exatamente como a Geometria ou a Álgebra.”

(KOLMOGOROV, 1903–1987)

## RESUMO

O presente trabalho consiste numa abordagem didático-pedagógica do estudo e do ensino da Teoria das Probabilidades na Educação Básica, com ênfase no conceito de Probabilidade Geométrica, sua importância e relevância para uma aprendizagem mais significativa, efetiva e atrativa. Inicia-se com a história e evolução deste singular ramo da Matemática Aplicada, seguindo-se uma seção com teoria e prática através da resolução de exercícios. O conceito de probabilidade geométrica é introduzido e desenvolvido a fim de mostrar quão mais abrangente pode ser a Teoria das Probabilidades (como apresentada nos livros didáticos no Brasil), tanto em termos de conteúdo quanto de aplicações e relações com outras áreas da própria Matemática. Algumas aplicações interessantes e conhecidas na literatura são apresentadas, resolvidas e analisadas de modo simples, algumas vezes fazendo uso de matemática menos elementar, outras explorando apenas os aspectos intuitivos. Nesta seção voltada para as aplicações do conceito de probabilidade geométrica, trata-se da solução de problemas como o Problema das Agulhas de Buffon, o Problema do Macarrão e o Problema do Encontro, dentre outros, encerrando com o problema do Paradoxo de Bertrand. Seguem-se as considerações finais do autor e um apêndice com algumas demonstrações de resultados de geometria plana que são utilizados ao longo do texto.

**Palavras-chave:** Teoria das Probabilidades. Probabilidade Geométrica. Aplicações. Agulhas de Buffon. Problema do Macarrão. Problema do Encontro. Paradoxo de Bertrand.



## ABSTRACT

This work is a didactic-pedagogical approach to the study and teaching of Probability Theory in Basic Education, with emphasis on the concept of Geometric Probability, its importance and relevance to a more meaningful, effective and attractive learning. It begins with the history and evolution of this unique branch of Applied Mathematics, followed by a section with theory and practice by means of problem solving. The concept of geometric probability is introduced and developed in order to show how broad the theory of probability can be (as presented in textbooks in Brazil), both in terms of content, as well as applications and relations with other areas of mathematics itself. Some interesting and well-known applications in the literature are presented, analyzed and solved in a simple fashion, sometimes by making use of less elementary mathematics, others times by exploring only intuitive aspects. In this section, focused on the application of the concept of geometric probability, we deal with the solving of problems, such as the Problem of Buffon's Needles, the Pasta Problem and the Problem of the Encounter, among others, closing with the problem of Bertrand's Paradox. On the sequence the author offers his final remarks and an appendix with some demonstrations of results in plane geometry that are used throughout the text.

**Keywords:** Probability Theory. Basic Education. Geometric Probability. Applications. Buffon's Needle. Pasta Problem. Problem of the Encounter. Bertrand's Paradox.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Alvo circular de 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio.....	33
Figura 2 - Quadrado com um "buraco" no centro .....	34
Figura 3 - Círculo C de raio 2 e centro O, contendo quadrado ABCD concêntrico com C .....	35
Figura 4 - Região do quadrado de lado 2 cuja distância aos vértices é maior que 1 .....	36
Figura 5 - Agulhas de tamanho r lançadas entre retas paralelas de distância $d=r$ .....	40
Figura 6 - Elementos determinantes da posição da agulha em relação às paralelas vizinhas ..	41
Figura 7 - Gráfico da região que representa os casos em que a agulha toca alguma das paralelas .....	42
Figura 8 - Disco g de centro H sobre o lado do quadrado KLMN concêntrico com o quadrado ABCD .....	43
Figura 9 - Segmento de reta $AB=1$ dividido aleatoriamente em três partes.....	46
Figura 10 - Região triangular representando a solução do sistema de inequações (1).....	46
Figura 11 - Triângulo CDE cujos vértices são pontos médios dos lados do triângulo OAB ...	47
Figura 12 - Triângulo de Sierpinski com uma iteração .....	48
Figura 13 - Triângulo de Sierpinski com duas iterações .....	49
Figura 14 - Triângulo de Sierpinski com três iterações.....	50
Figura 15 - Triângulo de Sierpinski com quatro iterações .....	51
Figura 16 - Região dos pontos do plano favoráveis a que o encontro aconteça.....	53
Figura 17 - Corda IE pertencente ao círculo de raio 1.....	55
Figura 18 - Corda determinada por sua distância ao centro da circunferência.....	56
Figura 19 - Corda tangente à circunferência de raio 0,5 .....	57
Figura 20 - Triângulo ABC com prolongamento de CB até B' .....	62

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Gráfico de P(D) com valores para L .....	44
--	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>PROBABILIDADE: COMO TUDO COMEÇOU.....</b>	<b>14</b>
2.1	<i>Contribuições e sistematização do estudo de probabilidades.....</i>	<i>15</i>
<b>3</b>	<b>CONCEITOS E DEFINIÇÕES: UM POUCO DA TEORIA.....</b>	<b>18</b>
3.1	<i>Experimentos aleatórios e determinísticos.....</i>	<i>18</i>
3.2	<i>Espaço amostral (<math>\Omega</math>).....</i>	<i>19</i>
3.2.1	<i>Espaço amostral equiprovável.....</i>	<i>19</i>
3.3	<i>Evento (E).....</i>	<i>20</i>
3.3.1	<i>Evento simples (ou elementar).....</i>	<i>21</i>
3.3.2	<i>Evento certo.....</i>	<i>21</i>
3.3.3	<i>Evento impossível.....</i>	<i>22</i>
3.3.4	<i>Eventos que se complementam.....</i>	<i>23</i>
3.5	<i>Calculando a probabilidade da união de eventos.....</i>	<i>26</i>
3.6	<i>Probabilidade condicional.....</i>	<i>27</i>
<b>4</b>	<b>PROBABILIDADE GEOMÉTRICA.....</b>	<b>31</b>
4.1	<i>Um pouco de história.....</i>	<i>31</i>
4.2	<i>Exemplos de problemas simples de probabilidade geométrica.....</i>	<i>32</i>
<b>5</b>	<b>AS AGULHAS DE BUFFON E OUTROS PROBLEMAS.....</b>	<b>40</b>
5.1	<i>Buffon e as agulhas.....</i>	<i>40</i>
5.2	<i>Os ladrilhos de Buffon.....</i>	<i>43</i>
5.3	<i>Desigualdade triangular e probabilidade geométrica.....</i>	<i>45</i>
5.4	<i>Sierpinski e um triângulo muito curioso.....</i>	<i>48</i>
5.5	<i>A probabilidade de um encontro.....</i>	<i>52</i>
5.6	<i>Bertrand, a corda e o paradoxo.....</i>	<i>54</i>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>60</b>
	<b>APÊNDICE A – A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO JOGO DOS PONTOS.....</b>	<b>61</b>
	<b>APÊNDICE B – A DESIGUALDADE TRIANGULAR.....</b>	<b>62</b>

## ***1 INTRODUÇÃO***

O ensino de Matemática no nível da Educação Básica, no âmbito da escola pública brasileira, sofre prejuízos pela ausência, superficialidade ou falta de contextualização no ensino de alguns conteúdos, dentre eles o de probabilidade, considerado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000, p. 40) como necessário ao estabelecimento de relações de conceitos aprendidos em outras disciplinas, bem como dentro da própria Matemática. O referido documento afirma ainda que esta é uma subárea da Matemática especialmente ligada às aplicações em questões do mundo real, ressaltando o crescimento e complexidade que obteve ao longo da história enquanto área do conhecimento.

Um importante conceito que ganhou notoriedade e importância dentro desta subárea da Matemática, especialmente com os trabalhos de Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707–1788), foi o de Probabilidade Geométrica. Incrivelmente negligenciado pela quase totalidade dos livros didáticos da educação básica adotados no país, tal conceito, rico em aplicações, e efetivo em estabelecer conexões com outras subáreas da Matemática (Geometria, por exemplo), motivou a realização deste trabalho.

Uma vez que excluímos conteúdos como estes ou os exploramos superficialmente em sala de aula, os prejuízos para a aprendizagem e o desenvolvimento matemático dos alunos são reais.

Esperamos que o desenvolvimento do conceito de Probabilidade Geométrica dentro do estudo da chamada Teoria das Probabilidades possa ser útil a professores e alunos neste nível de ensino, superando a abordagem superficial e descontextualizada tradicionalmente utilizada. É também um de nossos objetivos divulgar a ciência e estimular os alunos e professores da educação básica a fazerem pesquisa moderna, com um texto caracterizado por linguagem simples e aplicações práticas interessantes.

O Capítulo 2 é destinado a um breve apanhado histórico, a fim de entendermos a Teoria das Probabilidades como uma construção humana decorrente das necessidades que a evolução das sociedades exigiu – o que revela seu caráter prático. Mostraremos que tudo começou com o interesse humano em desenvolver métodos que lhes assegurassem vantagens sobre eventos cujos resultados à época pareciam imprevisíveis. Daí, os primórdios da Teoria das Probabilidades estarem relacionados ao surgimento dos seguros e dos jogos de azar. No mesmo capítulo, segue-se uma seção sobre os matemáticos que fizeram as principais

contribuições no processo de sistematização que consolidou a Teoria das probabilidades como área do conhecimento.

O terceiro capítulo traz os principais conceitos e definições relacionados a Probabilidade nos padrões matemáticos atuais, alguns teoremas e proposições que serão úteis para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes, bem como algumas aplicações na solução de problemas, visando fixar os tópicos teóricos. Sempre que possível apresentamos as demonstrações, salvo quando técnicas não elementares são exigidas, caso em que faremos uso apenas da intuição.

No quarto capítulo definimos Probabilidade Geométrica, sendo inicialmente apresentada um pouco da história da introdução deste conceito através dos estudos de Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon. O capítulo se encerra com uma lista de problemas cujas soluções apresentadas exploram um pouco mais o conceito de probabilidade geométrica, a fim de elucidá-lo cada vez mais.

O Capítulo 5 trata de algumas conhecidas e interessantíssimas aplicações do conceito de Probabilidade Geométrica como o Problema das Agulhas de Buffon, o Jogo dos Discos, entre outros. Em sua última seção discutimos o Paradoxo de Bertrand, um curioso problema de Geometria Plana e Probabilidade, que demonstra a necessidade de sermos precisos ao usar o termo “sorteio aleatório”. Damo-nos, vez por outra, ao uso de algumas ferramentas matemáticas menos elementares, entendendo que nos dirigimos em especial a professores.

Este trabalho traz em sua última seção algumas considerações finais, baseadas em depoimentos de alunos do Ensino Médio, relatos de professores e experiências do autor sobre os tópicos Probabilidade e Probabilidade Geométrica no que se refere ao ensino destes, reafirmando nosso objetivo de contribuir para que este importante tema, no contexto da Educação Básica, possa receber a devida atenção por parte de professores e alunos e seu estudo vise mais que uma abordagem superficial e de pouca ligação com o cotidiano dos alunos, além de poder estabelecer convenientes conexões com outros campos da Matemática.

## **2 PROBABILIDADE: COMO TUDO COMEÇOU**

A *Teoria das Probabilidades*, ou simplesmente *Probabilidade*, tem sua origem relacionada às tentativas de quantificação dos riscos de seguros nas sociedades antigas, em particular entre os fenícios, e na avaliação das chances de se ganhar em jogos de azar.

No caso da quantificação dos riscos de seguros, as embarcações partiam para viagens longas e estavam sujeitas a ocorrência de infortúnios (naufrágios, morte de tripulantes, etc.). É, portanto, justificável tais tentativas, ainda que os processos pelos quais estabelecessem seus resultados não fossem tão sofisticados, muito provavelmente sofrendo de ausência de sistematização e rigor matemático.

Porém, a estruturação destes estudos e, conseqüentemente, o surgimento de um novo e importante ramo da Matemática se dá com a resolução de problemas relacionados aos jogos de azar. A palavra azar aqui tem origem árabe, derivada de “al azar”, que significa dado. O seu significado neste contexto está relacionado ao fato de que os jogos em geral não dependem exclusivamente de técnicas ou raciocínios corretos, mas também do acaso (*aleatório*).

Os jogos de azar acompanham a humanidade em praticamente toda a sua história, sendo muitas vezes uma atividade de lazer, um esporte ou mesmo uma atividade lucrativa.

Os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623–1662) e Pierre de Fermat (1601–1665) iniciaram de modo formal o que hoje chamamos Teoria das Probabilidades. Estes matemáticos trocaram correspondências na tentativa de solucionar o seguinte problema proposto por Luca Bartolomeo de Pacioli (1445–1517), um monge franciscano e célebre matemático italiano.

**Problema 2.1** (Problema dos Pontos) *Dois jogadores jogam uma série de partidas justas até que um deles obtenha seis vitórias. Por motivos exteriores ao jogo, este é interrompido quando um dos jogadores somava cinco vitórias e o outro, três vitórias. Como dividir, de forma justa, o montante apostado por ambos os jogadores?*

Muitos matemáticos famosos, entre eles, Niccolo Fontana (1499–1557), também conhecido como Tartaglia, tentaram solucionar o referido problema antes de Pascal e Fermat, mas não obtiveram êxito. Suas soluções não eram satisfatórias e chagavam a ser controversas, fazendo parecer que o problema era um paradoxo.

A solução deste problema (que trataremos no Apêndice A) era, à época, especialmente complexa por exigir que se quantificasse, de modo justo, eventos que não haviam ocorrido, ou seja, que se tratasse com a incerteza. O fato de que a Probabilidade ainda não era um ramo da Matemática bem estruturado tornou-se mais um agravante. Note-se, portanto, que o raciocínio que leva à solução traz em sua essência a gênese da Teoria das Probabilidades.

### ***2.1 Contribuições e Sistematização do estudo de Probabilidades***

A lista das grandes mentes matemáticas que deixaram contribuições essenciais para que a Teoria das Probabilidades ganhasse corpo e se consolidasse enquanto ramo da Matemática Aplicada é bastante extensa.

Os fundamentos da Teoria das Probabilidades são lançados pelo matemático francês Blaise Pascal, em correspondência com seu compatriota Pierre Simon de Fermat, durante o verão de 1654, na tentativa de solucionar o que se conhece hoje por Problema dos Pontos (Problema 2.1).

A primeira publicação veio em 1657, no livro *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, do matemático holandês Christian Huygens, que não só o tornou famoso como matemático como também representa um importante avanço nos métodos de Pascal e Fermat.

Huygens traz a consolidação do estudo das probabilidades. É também ele quem trata pela primeira vez do conceito de *esperança matemática*<sup>1</sup>. Numa de suas justificativas a Frans van Schooten (1615–1660), seu orientador, para a publicação de *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, afirma: “... não estamos tratando apenas com jogos, mas com os fundamentos de uma nova teoria, tanto profunda quanto interessante”.

A família dos Bernoulli segue com contribuições importantes, sendo o primeiro deles Jacob Bernoulli (1654–1705) em *Ars Conjectandi*, uma espécie de reedição do livro de Huygens, onde prova, inclusive, a Lei dos Grandes Números. Este livro não estava concluído quando Jacob morreu, cabendo a seu sobrinho Nicolaus I Bernoulli (1687–1759) a tarefa de concluí-lo e publicá-lo. Porém, Nicolaus deixa suas contribuições também. A mais notável talvez tenha sido propor o que se convencionou chamar de Paradoxo de São Petersburgo. Trata-se de um jogo de cara ou coroa, onde um jogador paga ao outro  $2^n$  moedas se, por exemplo, cara aparecer no  $n$  – ésimo lançamento. Daí, pergunta-se: quantas moedas este

---

<sup>1</sup> Representa o valor médio “esperado” de uma experiência se ela for repetida muitas vezes.



outro jogador deve pagar ao primeiro para participar de um jogo justo com ele? Curiosamente, chega-se à conclusão de que se trata de uma fortuna infinita.

O próximo Bernoulli a contribuir com a Teoria das Probabilidades foi Daniel Bernoulli (1700 – 1782), aplicando Cálculo em vez de Combinatória em algumas soluções de problemas de probabilidade, sendo o primeiro a propor o uso de estimativas de *máxima-verossimilhança*<sup>2</sup>.

Amigo da família Bernoulli, mais precisamente, aluno de Johann Bernoulli, Leonhard Euler (1707–1783) também fez contribuições à Teoria das Probabilidades, especialmente no que se refere a aplicações em análise de loterias, em demografia e em seguros. Segundo Gadelha (2004), Euler resolveu o *problema da secretária*, que pode ser enunciado como a seguir.

**Problema 2.2** *Realizadas entrevistas individuais numa ordem aleatória com  $n$  candidatas a uma vaga de secretária, onde exatamente uma delas deve ser contratada, sendo que após cada entrevista a candidata é rejeitada ou contratada, e uma vez rejeitada a candidata não pode ser mais contratada, quer-se saber qual estratégia deve ser adotada a fim de maximizar a probabilidade de encontrar a melhor candidata.*

Abraham DeMoivre (1667–1754), matemático francês, publicou em 1718 o livro *The Doctrine of Chances* (A Doutrina de Chances), em que inova resolvendo problemas de probabilidade com equações diferenciais, solucionando-as através de funções geratrizes. Na segunda edição deste livro vê-se pela primeira vez o conceito de *distribuição normal*<sup>3</sup> que DeMoivre apresentou em forma de série.

O naturalista francês Georges-Louis Leclerc, o *Conde de Buffon* (1707–1788), que propôs um dos principais problemas abordados neste trabalho, também fez contribuições significativas explorando as aplicações da Teoria das Probabilidades às ciências naturais.

Pierre Simon de Laplace (1749–1827), em seu tratado *Théorie Analytique des Probabilités*, reúne em um mesmo material uma ampliação das principais contribuições de seus antecessores, bem como estabelece novos fundamentos, sendo esta obra considerada hoje em dia a teoria Clássica das Probabilidades. Segundo Gadelha (2004) suas principais contribuições são as aplicações de probabilidade na Teoria de análise de erros de medições,

---

<sup>2</sup> Em estatística, é um método para estimar os parâmetros de um modelo estatístico.

<sup>3</sup> Importante distribuição, em Estatística, que descreve fenômenos determinados por múltiplas causas, que em geral interagem entre si.

desenvolvida inicialmente pelo matemático inglês Thomas Simpson (1710–1761), e a definição de *probabilidade a priori* (que originou grandes controvérsias, uma vez que sua determinação pode basear-se em distribuição de probabilidade subjetiva) para o cálculo da chamada probabilidade inversa (ou probabilidade de causas ou *a posteriori*), conceito este sugerido pelo trabalho de Bayes<sup>4</sup> em 1763.

Chegamos, finalmente, à moderna Teoria das Probabilidades com o revolucionário trabalho do matemático russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987), intitulado *Teoria geral da Medida e Teoria da Probabilidade*, publicado em 1929. Muitas das definições dos que o antecederam eram imprecisas e careciam de formalização e rigor matemático. Kolmogorov pôs fim a tudo isso, associando as noções empíricas de acontecimento, probabilidade e variável aleatória às noções precisas de conjunto, função e integral de medida de *Lebesgue*<sup>5</sup>. A Teoria das Probabilidades mantém assim íntima ligação com a Análise, mas usa técnicas próprias e é uma área de pesquisa por si só, ganhando respeitabilidade e, com o novo patamar de abstração, alcançou algumas extensões relevantes, bem como forneceu respostas a questões que pareciam insolúveis.

---

<sup>4</sup> Matemático britânico, nascido em Londres, 1702. Famoso pelo teorema que leva seu nome e que trata da relação entre probabilidade condicional e a sua inversa.

<sup>5</sup> Matemático francês nascido no século XIX.

### ***3 CONCEITOS E DEFINIÇÕES: UM POUCO DA TEORIA***

Trataremos nesta seção de definir alguns termos fundamentais inerentes ao contexto das probabilidades para que os possamos utilizar ao longo do texto sem a necessidade de recorrentemente defini-los.

Julgamos necessário e importante salientar as observações de Morgado (2006) para quem “*a Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios*” (p. 128).

À medida que conceitos e definições são apresentados também faremos algumas aplicações interessantes, dando ao texto maior significado e relevância. Assim, sempre que possível, exemplos são apresentados com o intuito de esclarecer e fixar o conceito.

#### ***3.1 Experimentos Aleatório e Determinístico***

Definiremos inicialmente experimento aleatório, todavia, definiremos também seu oposto (experimento determinístico), a fim favorecermos a compreensão de um conceito através da comparação com o seu inverso.

**Definição 3.1.1** *Experimento aleatório é todo aquele cuja realização, ainda que em condições iguais ou semelhantes, pode apresentar resultados distintos.*

Podemos citar como exemplo: sortear um cartão com o nome de uma pessoa em uma urna em que há vários cartões com outros nomes, todos diferentes entre si. Se repetido o experimento, poderá apresentar vários nomes diferentes. Ainda que um determinado nome possa ser sorteado novamente não podemos garantir que isto ocorrerá em seguida.

A aleatoriedade, no contexto de probabilidade, está intimamente ligada com o que se convencionou chamar de acaso. Isto quer dizer que quando nenhuma força intencional contribuiu para que determinado resultado acontecesse, dizemos ser ele fruto do acaso. No exemplo acima, se ninguém (ou nada) concorrer intencionalmente para promover algum dos resultados possíveis, dizemos que o cartão sorteado se deu por força do acaso.

**Definição 3.1.2** Chamamos de *experimento determinístico* àquele cujo resultado, quando realizado em condições iguais ou semelhantes, é sempre igual e sabido antes mesmo da realização do experimento.

Um excelente exemplo que bem ilustra o que estamos querendo dizer é o que ocorre ao aquecermos a água, em condições normais de temperatura e pressão. Ela ferve a  $100^{\circ}\text{C}$ . Não precisamos realizar o experimento, este resultado certamente ocorrerá. Está, então, determinado o resultado final antes mesmo de realizar o experimento, caracterizando assim o aspecto determinístico a que nos referimos, diametralmente oposto ao da aleatoriedade.

É fácil perceber ainda que o aspecto mais notório dos experimentos determinísticos é a certeza de seus resultados, que por sua vez contrasta com a incerteza dos resultados dos experimentos aleatórios.

### 3.2 Espaço Amostral ( $\Omega$ )

Ao realizarmos um experimento aleatório, embora não possamos garantir qual resultado ocorrerá antes de realizá-lo, podemos, em muitos casos, determinar o conjunto de todos os resultados possíveis. Esta é a essência da próxima definição.

**Definição 3.2.1** Dado um experimento aleatório qualquer, chama-se *espaço amostral*, que representaremos por  $\Omega$ , ao conjunto formado por todos os resultados possíveis de ocorrer.

Vejamus a seguinte situação: se resolvermos anotar o número que consta da face voltada para cima no experimento aleatório de lançar um dado cúbico, os resultados possíveis são os números naturais de 1 a 6, ou seja,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Neste exemplo temos um espaço amostral finito, no entanto, por vezes trabalharemos com espaços amostrais infinitos. Um bom exemplo de espaço amostral infinito, muito comuns no contexto de Probabilidade Geométrica, é o conjunto de pontos no interior de um quadrado.

#### 3.2.1 Espaço Amostral Equiprovável

Na literatura é comum referir-se ao lançamento de um *dado perfeito* (ou *não viciado*) citando-o como experimento aleatório do qual se pretende calcular a probabilidade

de algum evento. O que a expressão *dado perfeito* significa nesse contexto? Ela reflete o conceito que apresentamos a seguir e dispensa um trato diferenciado da parte de quem calcula a probabilidade, caso o dado possuísse alguma face cuja frequência de ocorrência nos lançamentos fosse maior ou menor que as demais. Em um dado, perfeito considera-se que todas as faces possuem chances iguais de ocorrência.

**Definição 3.2.1.1** Um *espaço amostral* finito ou infinito é considerado *equiprovável* quando cada um de seus resultados possui a mesma chance de ocorrência.

Em um modelo equiprovável finito, onde o espaço amostral possui  $n$  resultados possíveis, dizemos que a chance de cada resultado do espaço amostral ocorrer é quantificada pelo número  $\frac{1}{n}$ .

Diga-se ainda que, se realizássemos o experimento *lançar um dado* e registrássemos os primeiros mil resultados a frequência de cada face tende a  $\frac{1}{6}$ . Se outra pessoa realizasse o mesmo experimento, anotando os primeiros um milhão de resultados, as frequências relativas de cada face se aproximariam cada vez mais da igualdade. Por fim, se fizéssemos o número de lançamentos grande o suficiente, as frequências tornar-se-iam tão próximas de  $\frac{1}{6}$  quanto quiséssemos. Este princípio relacionado à probabilidade hoje, num contexto mais geral, conhecido como Lei dos Grandes Números, foi reconhecido e estudado por Girolamo Cardano (1501 – 1570) em seu livro *Liber de Ludo Aleae* (Manual sobre Jogos de Azar) e, posteriormente, aperfeiçoado por Jacob Bernoulli (1654 – 1705) em seu livro *Ars Conjectandi* (A Arte de Conjecturar).

### 3.3 Evento ( $E$ )

Uma vez que o espaço amostral é um conjunto, podemos falar em subconjuntos do espaço amostral. Isto é essencialmente a definição de um *evento* do espaço amostral, ou seja, os eventos são coleções dos resultados que possivelmente ocorrerão.

**Definição 3.3.1** Um *evento* de um espaço amostral  $\Omega$  é um subconjunto de  $\Omega$ . Frequentemente usamos a letra  $E$  para representar um evento.

Se considerarmos o experimento aleatório *lançar um dado cúbico não viciado e tomar nota da face voltada para cima*, cujo espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , podemos citar os seguintes eventos:

- i.  $E_1 = \{2, 3, 5\}$ ,
- ii.  $E_2 = \{2, 4, 6\}$ ,
- iii.  $E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ ,
- iv.  $E_4 = \{6\}$ ,
- v.  $E_5 = \emptyset$ .

Os conjuntos acima podem ainda ser representados descrevendo características de seus elementos, o que facilita o manuseio deles. Por exemplo,  $E_1$  pode ser descrito como “*obter um número primo*”,  $E_2$  como “*ocorrer um número par*” e  $E_3$  pode ser descrito como “*registrar na face superior um número menor que 7*”.

### 3.3.1 Evento Simples (ou Elementar)

Este conceito é importante para entendermos outros, tais como o de espaço amostral equiprovável, que discutimos anteriormente, bem como a definição Laplaciana de probabilidade, conhecida na literatura como a definição clássica de Probabilidade.

**Definição 3.3.1.1** Chamamos de *evento simples* a todo subconjunto unitário do espaço amostral.

Ainda considerando o experimento aleatório *lançar um dado cúbico não viciado e tomar nota da face voltada para cima*, sejam os eventos “*obter número par e primo*”, “*obter número natural maior que 5*” e “*obter número natural múltiplo de 6*”. Note-se que todos estes conjuntos são unitários e estão contidos em  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Conforme Definição 3.3.1.1, são, portanto, eventos simples (ou elementares).

### 3.3.2 Evento Certo

Quando determinado evento é igual ao próprio espaço amostral dizemos que é certa a sua ocorrência, uma vez que o evento contempla todos os resultados possíveis.

**Definição 3.3.2.1** Chamamos de *evento certo* àquele que possui todos os elementos do espaço amostral.

Suponhamos que certo jogo consista em adivinhar qual o número na face voltada para cima no lançamento de um dado cúbico não viciado. Se um jogador pudesse apostar que *o resultado a se apresentar não supera 7* ou *se pudesse apostar que vai sair número inteiro positivo* teria garantia de que receberia o prêmio, pois qualquer dos resultados que ocorrer contemplará a aposta por ele realizada.

### 3.3.3 Evento Impossível

Alguns eventos são facilmente descritos como sem qualquer chance de ocorrência. Eles não são contemplados pelo espaço amostral, ou seja, em relação ao espaço amostral são considerados conjuntos vazios. Um mesmo espaço amostral tem um único evento impossível que pode ser descrito de várias formas.

**Definição 3.3.3.1** Chamamos de *evento impossível*, no âmbito de um espaço amostral, ao evento que não possui elementos do espaço amostral.

Embora a chance de uma pessoa ganhar quando faz uma única aposta na Mega-Sena seja muito pequena, ela não é nula. Porém a chance dela ganhar é simplesmente nenhuma caso apostasse somente em números maiores que 60. Dizemos que a chance de um evento impossível ocorrer é nula.

Também é impossível que ocorra uma face com número maior que sete no lançamento de um dado cúbico não viciado. Em todas estas situações está presente o conceito de evento impossível.

Nossa abordagem vem considerando que eventos são subconjuntos do espaço amostral. Na definição apresentada anteriormente tratamos do evento impossível. É bastante consistente questionarmo-nos se tal evento é subconjunto de um dado espaço amostral  $\Omega$ . A resposta é positiva dado que, em Teoria dos Conjuntos, o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto.

### 3.3.4 Eventos que se complementam

Dois eventos que pertencem ao mesmo espaço amostral podem ser tais que a intersecção entre eles é vazia e a união de ambos resulta no espaço amostral. Dizemos, então, que um é o complemento do outro. Esta é uma noção estudada em Teoria dos Conjuntos e aplicada a eventos no contexto de probabilidade, uma vez que os eventos são tratados como subconjuntos do espaço amostral. Formalizemos a seguinte:

**Definição 3.3.4.1** Dois eventos  $E_1$  e  $E_2$ , ambos contidos num espaço amostral  $\Omega$ , são ditos *complementares* se  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  e  $\Omega = E_1 \cup E_2$ .

Um exemplo bastante simples de eventos complementares pode ser encontrado no experimento aleatório lançamento de um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, se tomarmos, por exemplo, os eventos  $E_1 = \{\text{ocorrer número par}\}$  e  $E_2 = \{\text{ocorrer número ímpar}\}$ .

Temos que  $E_1 = \{2, 4, 6\}$  e  $E_2 = \{1, 3, 5\}$ , contemplando perfeitamente a definição acima, pois não há número que seja simultaneamente par e ímpar e nosso espaço amostral é formado apenas por números de uma paridade ou da outra.

Aproveitamos este exemplo para introduzir uma definição importante.

**Definição 3.3.4.2** Dois eventos  $A$  e  $B$  são *mutuamente exclusivos (excludentes)* ou *disjuntos* quando a ocorrência simultânea deles é impossível.

No exemplo que motivou esta definição os eventos  $E_1$  e  $E_2$  são mutuamente exclusivos ou excludentes, pois a intersecção entre eles é vazia.

Podemos observar que eventos complementares são sempre mutuamente exclusivos, porém, a recíproca não é verdadeira. Tomemos, a título de exemplo, no espaço amostral  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , os eventos  $E_3 = \{3, 5\}$ , ocorrência de um número primo maior que 2, e  $E_4 = \{2, 4, 6\}$ , ocorrência de um número par.



### 3.4 O que é Probabilidade?

Em muitas de suas atividades o homem precisa trabalhar com a incapacidade de determinar um resultado antes de realizar a ação que o promoverá. Quantificar a incerteza sempre foi e ainda é uma necessidade bastante presente nas atividades desenvolvidas pelo homem em muitas áreas.

A ideia de probabilidade está tão presente em nosso meio que podemos percebê-la, por exemplo, quando alguém diz: “*é provável que chova hoje*” ou “*há uma boa chance de encontrarmos vida em outros planetas*”. Pessoas falam deste conceito, muitas vezes intuitivamente. Sua presença no cotidiano das pessoas e importância são, assim, inegáveis.

Quando falamos em calcular a probabilidade de certo evento ocorrer pressupõe-se a existência de uma “*chance*” de que esse evento ocorra. A probabilidade é, neste contexto, entendida como o número que mede (*quantifica*) esta “*chance*”. Mesmo que seja impossível a ocorrência do evento isto ainda pode ser quantificado por zero, o que nos permite dizer que a probabilidade de um evento impossível é nula.

Um dos modelos probabilísticos que adotaremos ao longo deste trabalho é o equiprovável, no entanto, outros modelos são possíveis, é o que se percebe de Morgado (2006) quando afirma que o modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática, dependendo do fenômeno estudado. Mas todos esses modelos têm ingredientes básicos comuns.

**Definição 3.4.1** (Clássica) Seja  $\varepsilon$  um experimento aleatório e  $\Omega$  um espaço amostral associado formado por  $n > 0$  resultados igualmente prováveis. Seja  $A \subset \Omega$  um evento com  $m$  elementos. A probabilidade de  $A$ , denotada por  $P(A)$ , é definida como sendo  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

O francês Pierre Simon Laplace muito contribuiu com a chamada Teoria das Probabilidades. Ele a tratou como uma razão entre o que chamou de *número de casos favoráveis* e o *número de casos possíveis*. Assim, a probabilidade foi por ele definida da seguinte forma:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Como bem observa Viali (2008) esta definição possui significativa fragilidade quando espaço amostral e evento são conjuntos infinitos e trata-se de definição circular, pois a ideia de *igualmente provável* coincide com a de *probabilidade igual*. No Capítulo 5 veremos

algumas ideias sobre como podemos lidar com espaços amostrais infinitos. Contudo, a formalização dessas ideias para o caso mais geral, depende da chamada Teoria da Medida, que é uma técnica não elementar de matemática e foge do escopo desse texto.

Compreendamos melhor a definição Laplaciana. Dizemos que a chance de nosso nome ser sorteado numa urna contendo dez cartões idênticos, cada qual com um nome diferente, incluído o nosso, é de  $\frac{1}{10}$ . Percebe-se facilmente que se trata de uma aplicação direta da definição de Laplace, pois o número de casos favoráveis é 1 (há um só cartão com o nosso nome) e o número de casos possíveis é 10, pois a urna contém dez cartões ao todo, podendo qualquer um deles ser o cartão sorteado.

A seguir, apresentamos uma definição mais formal, conforme Morgado (2006). Tal definição é conhecida, na literatura moderna da Teoria das Probabilidades, como Axiomas de Kolmogorov e se aplicam tanto aos espaços amostrais uniformes quanto aos não uniformes. Tais axiomas são originalmente mais gerais, mas podem ser resumidos na definição a seguir.

**Definição 3.4.2** Seja  $\Omega$  um espaço amostral (conjunto). Uma função  $P$  definida para todos os subconjuntos de  $\Omega$  (chamados eventos) é chamada uma probabilidade se

- i.  $0 \leq P(A) \leq 1$ , para todo evento  $A \subset \Omega$ ;
- ii.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ;
- iii. Se  $A$  e  $B$  são eventos disjuntos  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Mostraremos agora que a definição de Laplace, para probabilidades uniformes em espaços amostrais finitos, satisfaz a noção mais geral de probabilidade. Dado um evento  $A \subset \Omega$ , como  $A$  é subconjunto de  $\Omega$ , temos que  $0 \leq n(A) \leq n(\Omega)$ , em que  $n(A)$  é o número de elementos de  $A$ . Como  $n(\Omega) \neq 0$ , temos que  $\frac{0}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$  também é válida, o que implica que  $0 \leq P(A) \leq 1$  (onde  $P(A)$  é a probabilidade definida por Laplace), conforme se afirma em (i). A afirmação (ii),  $P(\emptyset) = 0$  e  $P(\Omega) = 1$ , é uma consequência direta da definição de Laplace. Da Teoria dos Conjuntos temos  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ , para conjuntos disjuntos  $A$  e  $B$ . Dividindo ambos os membros por  $n(\Omega)$ , segue o que se afirma em (iii). ■

### 3.5 Calculando a Probabilidade da União de Eventos

O problema a seguir será o nosso motivador a fim de podermos definir probabilidade da união de eventos quaisquer (não necessariamente disjuntos), bem como desenvolver uma forma de calculá-la.

**Problema 3.5.1** Ao lançarmos um dado não viciado qual é a probabilidade de que o número registrado na face voltada para cima seja *um divisor de 10* ou *um número de Fermat*<sup>6</sup>?

#### Solução.

É fácil ver que  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e que há dois eventos distintos. Queremos calcular a probabilidade de ocorrência de um *ou* o outro. Em Teoria dos Conjuntos chamamos a união de dois conjuntos ao conjunto formado pelos elementos de um *ou* do outro conjunto (podendo também incluir elementos que pertencem a ambos). Segue que a probabilidade pedida é a probabilidade da união dos eventos  $E_1$ : número divisor de 10 e  $E_2$ : número da forma  $2^{2^n} + 1$ . Representemos esta probabilidade por  $P(E_1 \cup E_2)$ . Vamos agora determinar cada evento:  $E_1 = \{1, 2, 5\}$  e  $E_2 = \{3, 5\}$ , pois  $F(0) = 2^{2^0} + 1 = 3$  e  $F(1) = 2^{2^1} + 1 = 5$ , sendo  $F(n) > 6$  para todo  $n > 2$ . Temos assim que  $E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 5\}$  e, por definição,  $P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . ■

**Proposição 3.5.1** Sejam  $E_1$  e  $E_2$  eventos de um mesmo espaço amostral finito, então

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

#### Demonstração.

Usando o Item (iii) da Definição 3.4.2 e o fato de que  $E_1 = (E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2)$ , podemos concluir que  $P(E_1) = P(E_1 - E_2) + P(E_1 \cap E_2)$ . De forma análoga, podemos concluir que  $P(E_2) = P(E_2 - E_1) + P(E_1 \cap E_2)$ . Somando as duas igualdades, temos:  $P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 - E_2) + P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 - E_1) + P(E_1 \cap E_2)$ . Isto implica  $P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 - E_2) + P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 - E_1) = P(E_1 \cup E_2)$ , onde nesta última igualdade usamos novamente o item (iii) de 3.4.2, obtendo o desejado. ■

Note-se que o cálculo de  $P(E_1 \cup E_2)$ , no Problema 3.5.1, agora de posse da Proposição 3.5.1 pode ser feito da seguinte forma:

---

<sup>6</sup> Os números de Fermat são os números inteiros positivos da forma  $F_n = 2^{2^n} + 1$ .

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

É possível, sem qualquer dificuldade, apenas modificações óbvias, estabelecer um resultado mais geral,  $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n)$ , para  $n$  eventos, dois a dois disjuntos, ou seja,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , e não somente para dois eventos como provamos na proposição anterior.

### 3.6 Probabilidade Condicional

Nesta seção, apresentamos um importante conceito: o de probabilidade condicional. Em linhas gerais, trata-se de calcularmos a ocorrência de certo evento, estando de posse da informação de que outro evento do mesmo espaço amostral já ocorreu. É bastante contundente pensarmos sobre se a ocorrência deste outro evento modifica (altera) ou não a probabilidade da ocorrência do primeiro. O estudo de tais situações nos conduzirá também a introduzir os conceitos de eventos dependentes e independentes.

Imaginemos o seguinte:

**Problema 3.6.1** *Confeccionam-se algumas figuras geométricas, colocando-as em uma urna. Há na urna cinco paralelogramos e quatro triângulos. Dentre os paralelogramos, apenas dois são retângulos. Suponha que a chance de retirar qualquer figura dessas é a mesma para cada uma. Qual a probabilidade de que a figura retirada desta urna seja um retângulo, sabendo que é um paralelogramo?*

#### Solução.

Queremos calcular a probabilidade de ocorrência de certo evento,  $E_1 = \{\text{a figura retirada desta urna seja um retângulo}\}$ , estando de posse da informação de que outro evento já ocorreu,  $E_2 = \{\text{é um paralelogramo}\}$ . Como já estamos de posse da informação de que a figura sorteada é um paralelogramo, nosso espaço amostral, antes com 9 elementos (5 paralelogramos e 4 triângulos), passou a ser um espaço amostral com apenas 5 elementos. Temos que 2 dos cinco paralelogramos são retângulos. Assim, a probabilidade pedida é dada por  $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(E_2)} = \frac{2}{5} = 40\%$ . ■

É interessante realizarmos o cálculo acima nos seguintes termos: como já é sabido que o evento  $E_1 = \{\text{é um paralelogramo}\}$  ocorrerá, a ocorrência do evento

$E_2 = \{\text{é um retângulo}\}$ , cuja probabilidade quer-se calcular, fica condicionada a  $E_1$  de modo que os resultados favoráveis devem ser elementos também de  $E_1$ , ou seja, devem pertencer simultaneamente a  $E_1$  e a  $E_2$ . Tal conjunto é chamado de intersecção de  $E_1$  e  $E_2$  e representado por  $E_1 \cap E_2$ . Note-se também que nosso espaço amostral, antes composto de nove figuras, agora se resume aos cinco paralelogramos. Diante do exposto, podemos escrever

$$P = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \frac{2}{5} = 40\% \quad (1).$$

Conduzindo-nos desta forma na solução do problema favorecemos a introdução da definição a seguir, uma vez que (1) pode ser escrita como  $P = \frac{\frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(\Omega)}}{\frac{n(E_1)}{n(\Omega)}} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$ , pois  $\Omega$  (*espaço amostral original*) é não vazio e é finito.

Somos motivados assim à seguinte definição, que será adotada tanto para espaços amostrais finitos como infinitos.

**Definição 3.6.1** Dados dois eventos  $E_1$  e  $E_2$ , com  $P(E_1) > 0$ , a probabilidade condicional de  $E_2$  na certeza de  $E_1$  é o número  $P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$ .

Concordamos com Lima (2006) que o uso desta fórmula excessivamente pode tornar-se um inconveniente, sendo bastante útil utilizá-la no cálculo da intersecção de dois eventos. Representando tal número por  $P(E_2|E_1)$ , temos, em símbolos,

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \quad (2).$$

É fácil ver que  $P(E_2|E_1)$  só está definido para  $P(E_1) > 0$ . Podemos ainda escrever (2) na forma:  $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$  e, desde que  $P(E_2) > 0$ , temos  $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2)$ .

O problema a seguir, retirado de Barroso (2010), será resolvido com uma aplicação direta desta fórmula, conduzindo-nos ao resultado pretendido sem nos preocuparmos com os processos que já explicamos antes.

**Problema 3.6.2** Um grupo de 1000 pessoas apresenta, conforme sexo e qualificação profissional, a composição:

	Especializados	Não especializados
Homens	210	390
Mulheres	140	260

Escolhendo uma dessas pessoas ao acaso, se for especializado, qual a chance de ser mulher?

**Solução.**

Consideremos os seguintes eventos:  $E_1 = \{\text{ser especializado}\}$  e  $E_2 = \{\text{ser mulher}\}$ . Note que a pergunta pode ser reformulada do seguinte modo: “Qual a probabilidade de sortearmos uma mulher, sabendo que a pessoa sorteada é especializada?”. Queremos calcular, portanto,

$P(E_2|E_1)$ . Mas isto é  $P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$ . Como  $P(E_1 \cap E_2) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(\Omega)}$ , temos  $P(E_1 \cap E_2) = \frac{140}{1000}$  e  $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{350}{1000}$ . A probabilidade pedida é dada por

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{140}{1000}}{\frac{350}{1000}} = \frac{140}{350} = 40\%. \quad \blacksquare$$

Um aspecto interessante no problema acima é que a probabilidade de sortearmos uma mulher dentre as mil pessoas não foi alterada pela certeza de que a pessoa sorteada era especializada. A probabilidade de sortearmos uma mulher desse grupo é  $\frac{400}{1000} = 40\%$ , pois há 400 mulheres entre as 1000 pessoas. Pode-se ainda, sem qualquer dificuldade, concluir que a probabilidade de ser especializado, dado que é mulher, é  $\frac{140}{400} = 35\%$ , que é a probabilidade de ser especializado. Estes resultados nos motivam à próxima definição.

**Definição 3.6.2** Dizemos que  $E_1$  e  $E_2$ , eventos de um mesmo espaço amostral, são *eventos independentes* se a ocorrência de um deles não afetar a probabilidade da ocorrência do outro, i.e., se, e somente se,  $P(E_1|E_2) = P(E_1)$  e  $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ .

Note-se que uma consequência imediata desta definição é que

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = P(E_1) \cdot P(E_2).$$

O que a equação acima está nos mostrando é que dois eventos são independentes se, e somente se, a probabilidade de que ocorra a intersecção deles é dada pelo produto de

suas probabilidades. Com isso, podemos afirmar que dois eventos  $E_1$  e  $E_2$  são *dependentes* quando  $P(E_1 \cap E_2) \neq P(E_1) \cdot P(E_2)$ .

Estamos agora munidos dos conceitos e definições básicos em Teoria das Probabilidades. Segue-se uma seção que introduz conceitos básicos e faz aplicações elementares em Probabilidade Geométrica.

#### **4. PROBABILIDADE GEOMÉTRICA**

Neste capítulo apresentamos e desenvolvemos o conceito de Probabilidade Geométrica, através da resolução de alguns problemas simples, selecionados de contextos diversos (livros didáticos do ensino médio ou provas aplicadas neste nível de ensino).

Nossa linha de raciocínio é a de que as aplicações do conceito de probabilidade geométrica na solução de problemas podem contribuir, de forma significativa, no fortalecimento da aprendizagem da Teoria das Probabilidades, dando-lhe mais significado, solidez e relevância.

Não estamos querendo estabelecer um ensino de probabilidade exclusivamente através do conceito de probabilidade geométrica, mas positivamente afirmar e demonstrar sua relevância e, conseqüentemente, perceber que a negligência dispensada a este conceito pelos livros didáticos no ensino básico tanto representa prejuízo ao ensino quanto não faz sentido que exista.

Quando falamos em Probabilidade Geométrica nos referimos a calcular probabilidade, tratando de experimentos aleatórios onde o espaço amostral é um conjunto de pontos no plano (*figuras planas e retas*) ou no espaço (*volumes*) e os eventos são subconjuntos destes objetos geométricos, ou seja, trata-se do estudo das probabilidades com ênfase nos aspectos geométricos que conceitos como espaço amostral e eventos podem adquirir dentro de determinados contextos.

Portanto, Probabilidade Geométrica é o estudo de probabilidades que envolvem espaços amostrais contínuos geralmente relacionados a problemas geométricos, por exemplo, comprimentos, áreas e volumes, de objetos geométricos que satisfazem uma determinada condição.

##### **4.1 Um pouco de história**

Todos os relatos históricos sobre o início da formalização do que hoje se conhece por Probabilidade Geométrica e suas aplicações estão relacionados ao experimento que conduz a uma estimativa do valor do número irracional  $\pi$ , conhecido como *O Problema das Agulhas de Buffon*<sup>7</sup>, em homenagem ao matemático francês Georges Louis Leclerc (1707–1788), também conhecido como Conde de Buffon. Trata-se de calcular a probabilidade de que

---

<sup>7</sup> Naturalista, matemático e escritor francês.



uma agulha de tamanho  $r$ , lançada aleatoriamente entre retas paralelas, de distância  $d \geq r$ , toque alguma dessas paralelas.

Este problema é essencialmente um problema de integração, porém os aspectos algébricos e geométricos da solução aqui apresentada (especialmente este último) fazem dele um dos mais interessantes problemas que abordaremos. Todavia, conforme veremos, este não foi o único problema que Buffon tratou em Probabilidade Geométrica.

O Jogo do Ladrilho (outro problema tratado por Buffon), o Problema do Encontro e o Problema do Macarrão, todos igualmente interessantes, podem enriquecer a compreensão do conceito de Probabilidade, bem como podem torná-lo atraente e desafiador para alunos e professores da Educação Básica.

As soluções destes problemas, que apresentamos a seguir, têm o propósito de desenvolver as ideias no contexto de Probabilidade Geométrica, bem como, do estudo da Teoria das Probabilidades como um todo.

No Jogo do Ladrilho queremos determinar qual a probabilidade de um disco de diâmetro  $d$ , lançado num plano pavimentado com quadrados de lado  $\ell$ , depois de pousar no plano, não intersectar nem tangenciar os lados de quadrado algum. Buffon discutiu esse jogo em um livro publicado em 1777, juntamente com o problema da agulha. Esse foi o primeiro tratado conhecido sobre Probabilidade Geométrica.

O problema do encontro consiste em determinar a probabilidade de acontecer o encontro entre duas amigas que combinaram de se encontrar entre duas e três horas da tarde, de modo que quem chegasse primeiro ao local do encontro esperaria no máximo 12 minutos pela outra, indo embora em seguida.

No problema do macarrão abordaremos a probabilidade de ao dividirmos um segmento de reta em três partes obtermos um triângulo com estes três novos segmentos.

#### ***4.2 Exemplos de problemas simples de Probabilidade Geométrica***

Segundo Tunala (1995), em Probabilidade Geométrica, os espaços amostrais são descritos por figuras geométricas, sendo não-enumeráveis, podendo ser limitados, como no caso da região delimitada por um quadrado ou um cubo; ou ilimitados, como a região delimitada por duas retas. Um conjunto diz-se não-enumerável quando não pode haver uma função bijetora entre ele e o conjunto dos números naturais.

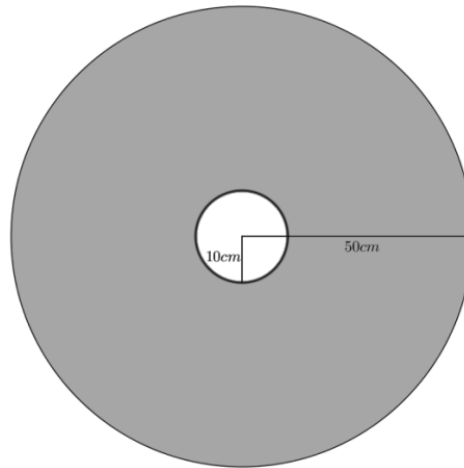
Em diversas situações, inclusive tratadas neste trabalho, o cálculo de Probabilidade Geométrica é feito através da razão entre áreas, como bem ilustra o problema a seguir, que os alunos do Ensino Médio podem resolver até mesmo intuitivamente.

**Problema 4.2.1** *Um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular de 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a afirmação de que o atirador acertou o alvo, qual a probabilidade de que tenha atingido o disco central?*

**Solução.**

Ilustramos o alvo descrito no enunciado na **Figura 1**.

Figura 1: Alvo circular de 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio



Fonte 1 - Elaborado pelo autor.

Note-se que uma aplicação da definição Laplaciana de probabilidade nos levaria a uma impossibilidade de calcular número de casos possíveis e número de casos favoráveis, uma vez que tal cálculo pressupõe uma contagem. Mas o atirador não vê o alvo e não está interessado em atingir algum ponto em particular. E já que temos a informação de que ele acertou o alvo, podemos afirmar que a probabilidade de que tenha atingido o disco central é a razão entre a área deste disco e a área do disco que representa o alvo. Portanto, a probabilidade procurada é

$$\frac{\pi \cdot 10^2}{\pi \cdot 50^2} = 4\%. \quad \blacksquare$$

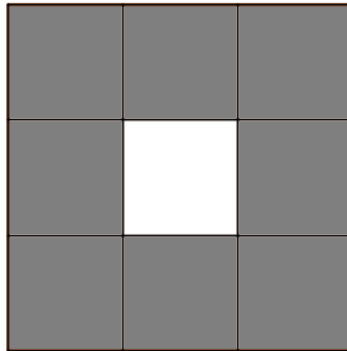
Os problemas que envolvem razão entre áreas não são os únicos em Probabilidade Geométrica, mas são muito eficientes em expor, com clareza, este conceito, refletindo também quão facilmente ele pode ser trabalhado na educação básica. O problema a seguir, extraído de Lopes (2012), reforça nossa afirmação.

**Problema 4.2.2** *Considere um quadrado. Divida cada lado desse quadrado em três segmentos congruentes, de forma que o quadrado inicial se divida em nove quadrados menores. Chamamos de buraco o quadrado interno central. Escolhendo-se ao acaso um ponto no quadrado inicial, qual a chance desse ponto “cair” no buraco?*

**Solução.**

Conforme enunciado podemos chegar à figura a seguir.

Figura 2 - Quadrado com um "buraco" no centro



Fonte 2: Elaborado pelo autor.

Como no quadrado original cada lado foi dividido em três segmentos congruentes, a **Figura 2** possui nove quadrados pequenos, formando o quadrado original. Uma vez que o ponto será tomando aleatoriamente no interior do quadrado maior, a probabilidade de que isto ocorra é dada pela razão entre as áreas do buraco e a do quadrado original. Seja  $\ell$  a medida do lado do quadrado original, então sua área é dada por  $\ell^2$ . O lado quadrado menor que representa o buraco tem lado  $\frac{\ell}{3}$  e sua área é dada por  $\frac{\ell^2}{9}$ . Assim a probabilidade procurada é  $\frac{\frac{\ell^2}{9}}{\ell^2} = \frac{1}{9}$ . ■

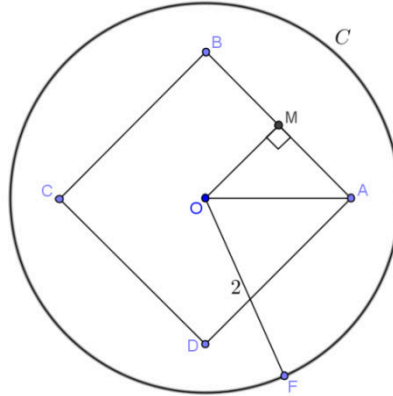
No problema a seguir, apesar de fazermos uso da razão entre áreas, podemos vislumbrar que, em sua essência, o conceito de probabilidade geométrica é mais abrangente e poderoso.

**Problema 4.2.3** (UFRJ-2011) *Um ponto  $M$  é selecionado ao acaso no interior de um círculo  $C$  de raio 2 e centro  $O$ . Em seguida, constrói-se um quadrado, também centrado em  $O$ , que tem  $M$  como ponto médio de um de seus lados. Calcule a probabilidade de que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo  $C$ .*

**Solução.**

A figura a seguir deve nos ajudar a organizar as ideias.

Figura 3 - Círculo  $C$  de raio 2 e centro  $O$ , contendo quadrado  $ABCD$  concêntrico com  $C$



Fonte 3: Elaborado pelo autor.

Tomemos um ponto  $M$  qualquer. Seja  $ABCD$  um quadrado como no enunciado, estritamente dentro do círculo  $C$  de centro  $O$ , conforme **Figura 3**. Temos  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$  e, a fim de garantir que o quadrado  $ABCD$  esteja inteiramente contido no círculo  $C$ , devemos ter  $\overline{OA} \leq 2$ , o que implica  $\overline{OM} \leq \sqrt{2}$ , pois  $\overline{OM} = \overline{AM} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OM} \cdot \sqrt{2}$ . Logo,  $M$  deve estar dentro de um círculo cujo raio é  $\sqrt{2}$ .

Qualquer escolha de  $M$  fora deste círculo fará com que o quadrado extrapole o círculo  $C$ . Assim, a área do círculo menor representa os *resultados favoráveis*, enquanto que a área do círculo  $C$  representa os resultados possíveis. Note-se que  $\overline{OM}$  é o lado de um quadrado cuja diagonal mede no máximo 2, quando tivermos  $\overline{OM} \cdot \sqrt{2} = 2$  e daí  $\overline{OM} = \sqrt{2}$ , sendo também esta a medida do raio do círculo interno ao quadrado  $ABCD$  e que tangencia seus lados.

Finalmente, a probabilidade pedida é dada por  $\frac{\pi \cdot (\sqrt{2})^2}{\pi \cdot (2)^2} = \frac{2}{4} = 50\%$ . ■

Tomemos outro exemplo para continuar ilustrando o que queremos dizer por Probabilidade Geométrica. Esse problema foi apresentado na Avaliação feita ao final do PAPMEM<sup>8</sup>, edição 2015.1.

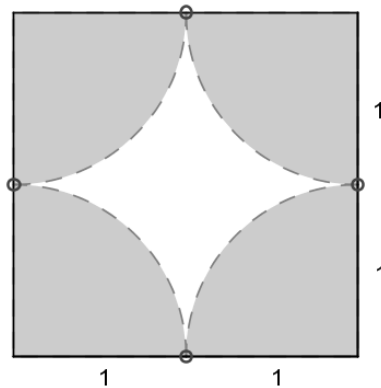
**Problema 4.2.4** Escolhe-se, aleatoriamente, um ponto no interior de um quadrado de lado 2 cm. Qual é a probabilidade de que a distância do ponto escolhido a qualquer dos vértices do quadrado seja maior do que 1 cm?

<sup>8</sup> Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio, realizado duas vezes por ano, pelo IMPA, em parceria com as Instituições de Ensino Superior associadas.

**Solução.**

Veja que nosso espaço amostral é uma região quadrada de lado  $2\text{ cm}$ , que denotaremos por  $S$ . Ela possui área igual a  $A(S) = 4\text{ cm}^2$ . Agora, vamos calcular a área da região formada pelos pontos que satisfazem o evento do problema, que denotaremos  $S_0$ . Os pontos de  $S_0$  são aqueles que restam quando excluimos os pontos que estão a uma distância menor que 1 de algum dos vértices, ou seja, retiramos do quadrado quatro quartos de círculo de raio  $1\text{ cm}$ , com centro nos vértices do quadrado. A região mais clara da **Figura 4** representa o conjunto  $S_0$ .

Figura 4 - Região do quadrado de lado 2 cuja distância aos vértices é maior que 1



Fonte 4: Elaborado pelo autor.

A área de  $S_0$ , que denotaremos por  $A(S_0)$ , é facilmente calculada através de uma subtração de áreas já conhecidas. Juntando os quatro quartos de círculo de raio  $1\text{ cm}$  formamos um círculo de raio  $1\text{ cm}$ , cuja área é dada por  $\pi \cdot (1)^2 = \pi\text{ cm}^2$ . Assim,  $A(S_0) = (4 - \pi)\text{ cm}^2$ , pois é a área do quadrado subtraída da área dos quatro quartos de círculo. Concluimos afirmando que a probabilidade ou a *probabilidade geométrica* de sortearmos um ponto do quadrado de lado  $2\text{ cm}$  e a distância dele a qualquer dos vértices do quadrado ser maior que  $1\text{ cm}$  é dada pela razão entre as áreas  $A(S_0)$  e  $A(S)$ . Segue-se que

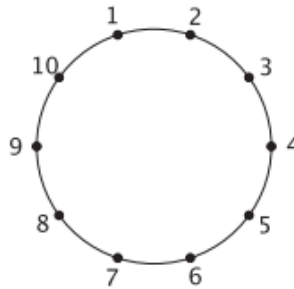
$$P = \frac{A(S_0)}{A(S)} = \frac{4 - \pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \cong 0,2146 = 21,46\%. \quad \blacksquare$$

O problema seguinte foi retirado da Prova de Habilitação do Programa OBMEP na Escola<sup>9</sup>.

**Problema 4.2.5** Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10

<sup>9</sup> Programa voltado para o professor de matemática das escolas públicas, visando melhorar o desempenho dos alunos na OBMEP.

partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



- Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo isósceles?
- Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um quadrilátero convexo no qual exatamente dois dos ângulos internos sejam retos?
- Se forem retiradas cinco bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um pentágono convexo que tenha o centro da circunferência em seu interior?

*Obs: se o centro da circunferência pertence ao lado do pentágono, então ele não está no interior do pentágono.*

### Solução.

O leitor pode tentar verificar que as probabilidades dos diversos eventos não são alteradas se as bolas são retiradas simultaneamente.

- Inicialmente vamos determinar o número de resultados possíveis, ou seja, o total de triângulos distintos com vértices em três destes pontos. Para formar um triângulo nestas condições basta escolher três pontos dentre os dez existentes, pois como estão sobre a mesma circunferência não há três pontos colineares. Então, trata-se de combinação simples de 10 pontos tomados 3 a 3, o que nos dá  $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120$  triângulos. Portanto,  $n(\Omega) = 120$ . Calculemos agora o número de resultados favoráveis ao evento proposto. Para formarmos um triângulo isósceles nestas condições podemos escolher o vértice oposto à base e depois escolhemos a base. A primeira destas escolhas pode ser feita de 10 maneiras,  $\{1, 2, \dots, 10\}$ , e a segunda de 4 maneiras, resultando assim em  $10 \cdot 4 = 40$  triângulos isósceles, pelo Princípio Fundamental de Contagem. O  $n(E) = 40$  e a probabilidade procurada é  $P(E) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$ .

- b) Neste caso, o espaço amostral é formado por todos os quadriláteros com vértices em quatro dos dez pontos que dispomos sobre a circunferência. Isto dá  $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$  quadriláteros, sendo que qualquer desses quadriláteros é convexo. Para que eles tenham exatamente dois ângulos internos retos é suficiente e necessário tomarmos dois pontos da circunferência diametralmente opostos, pois se um ângulo inscrito numa circunferência de modo que cada lado seu passe por uma das extremidades de um diâmetro dessa circunferência, ele é reto. Os outros dois pontos (vértices) não podem ficar ambos no mesmo arco determinado por esses dois. A escolha dos dois diametralmente opostos pode ser feita de 5 maneiras, deixando quatro pontos em cada um dos arcos formados pelos dois escolhidos. Teremos  $2 \cdot C_4^2$  maneiras de montar o quadrilátero como pedido, pois temos duas formas de escolher o arco e, em seguida, escolher 2 pontos de 4, em cada arco. Assim, há  $5 \cdot 2 \cdot C_4^2 = 60$  quadriláteros com as características exigidas na questão. Desta forma, a probabilidade pedida é dada por  $\frac{60}{210} = \frac{2}{7}$ .
- c) Como quaisquer cinco pontos distintos sobre uma circunferência formam um único pentágono convexo, temos  $n(\Omega) = C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$  pentágonos convexos. Devemos agora contar apenas os pentágonos convexos com as características exigidas. Calculemos a quantidade procurada subtraindo dos 252 aqueles que não possuem o centro em seu interior. Dividiremos a contagem em dois casos: os que possuem dois vértices diametralmente opostos e os demais 3 em um mesmo arco determinado por esses dois vértices e os que são formados por cinco vértices consecutivos.
- 1º caso:** Há  $5 \cdot 2 \cdot C_4^3 = 40$  destes pentágonos, pois há 5 maneiras de escolher dois pontos diametralmente opostos e, quando escolhidos dois desses pontos formamos sempre dois arcos, há 2 maneiras de escolher o arco e  $C_4^3$  maneiras de escolher os outros três vértices em cada um dos arcos formados por estes dois pontos diametralmente opostos.
- 2º caso:** Observe que nesse caso, a única possibilidade é que os cinco pontos sejam pontos consecutivos do círculo. Assim, há somente 10 maneiras distintas de formar um pentágono com os cinco vértices consecutivos, pois escolhendo o primeiro destes cinco vértices os outros quatro ficam determinados.

Assim os pentágonos que possuem as características que queremos são, em número,  $252 - 40 - 10 = 202 = n(E)$ . Nossa probabilidade é  $\frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{202}{252} = \frac{101}{126}$ . ■

É importante percebermos que o que fizemos no tratamento dos problemas acima foi calcular probabilidade no sentido convencional, porém, espaço amostral e evento mostram-se nos entes geométricos de que os problemas trataram. Não só desenvolvemos uma abordagem que prescinde aos tradicionais dados, moedas e cartas de baralho e a alguns inconvenientes cálculos com aplicação de fórmulas, como também aplicamos um conceitos matemáticos de *Probabilidade*, utilizando outros já conhecidos em *Geometria*. Esta conveniente conexão, conforme dissemos na introdução, pode trazer muitos ganhos ao ensino e à aprendizagem matemática.



## 5. AS AGULHAS DE BUFFON E OUTROS PROBLEMAS

Trataremos nesta seção de analisar e resolver alguns problemas um pouco mais complexos no contexto de probabilidade geométrica, em especial, o clássico Problema das Agulhas de Buffon.

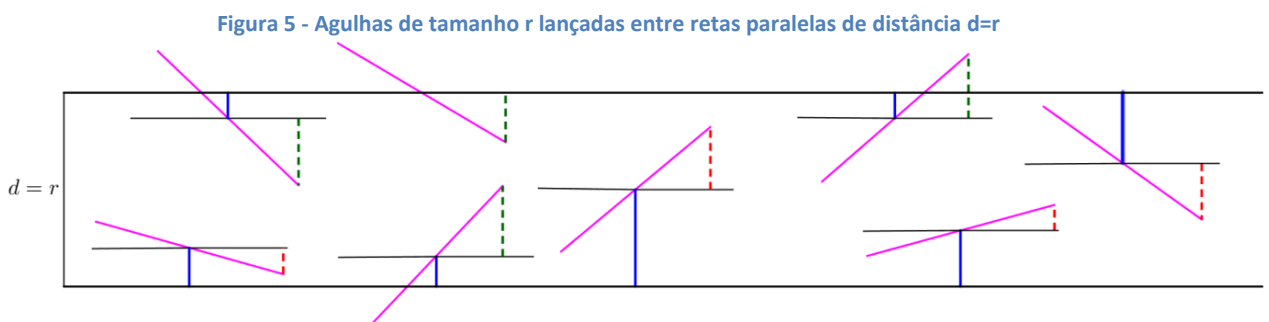
### 5.1 Buffon e as agulhas

O matemático francês Georges-Louis Leclerc estudou e solucionou o hoje conhecido *Problema das agulhas de Buffon*. Conforme encontramos em Lins (2004) o problema originalmente proposto por Buffon tem a seguinte formulação:

**Problema 5.1.1** *Qual a probabilidade de uma agulha de comprimento  $r$  lançada num plano marcado por linhas paralelas tocar numa destas linhas marcadas, sabendo-se que a distância entre as linhas paralelas consecutivas é constante e igual a  $d$  ( $d \geq r$ )?*

Trataremos aqui apenas o caso particular no qual  $d = r$ . A **Figura 5** mostra-nos várias possibilidades de posição para a agulha (*segmento de cor rosa*).

Notadamente, em cada caso em que a agulha toca alguma das paralelas, a distância de seu ponto médio à paralela mais próxima (*segmento de cor azul*) é menor ou igual à distância de uma de suas extremidades à paralela às duas retas vizinhas que passa pelo ponto médio da agulha (*segmento tracejado de cor verde*). Nos casos em que a agulha não toca uma das paralelas o segmento azul é maior. Para estes casos, o segmento tracejado está na *cor vermelha*. Esta observação é um bom começo na tarefa de descrever os elementos que determinam se a agulha toca ou não uma das paralelas.

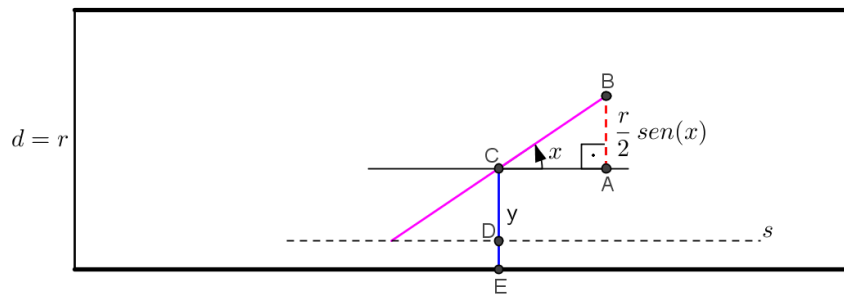


Fonte 5: Elaborado pelo autor.

Vamos determinar a posição da agulha após o lançamento, bastando para isso determinar o menor ângulo  $x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) que a agulha faz com as retas paralelas e a distância  $y$  ( $0 \leq y \leq \frac{r}{2}$ ) do centro da agulha à reta paralela mais próxima.

Para uma posição qualquer da agulha (**Figura 5**), após o lançamento, podemos sempre estabelecer o triângulo retângulo  $ABC$ , cujos vértices são o ponto médio da agulha, uma de suas extremidades e o pé da perpendicular baixada dessa extremidade à paralela a duas retas vizinhas que passa pelo ponto médio da agulha, conforme **Figura 6**. Também sempre podemos determinar a reta  $s$  paralela às duas linhas paralelas, passando pela extremidade mais próxima a uma destas linhas. Seja  $E$  o pé da perpendicular de  $C$  à paralela mais próxima e  $D$  a intersecção de  $\overline{CE}$  com a reta  $s$ . Mais geralmente, os elementos detalhados na **Figura 6** nos ajudam a determinar se ocorreu ou não o toque da agulha numa das linhas paralelas.

Figura 6 - Elementos determinantes da posição da agulha em relação às paralelas vizinhas



Fonte 6: Elaborado pelo autor.

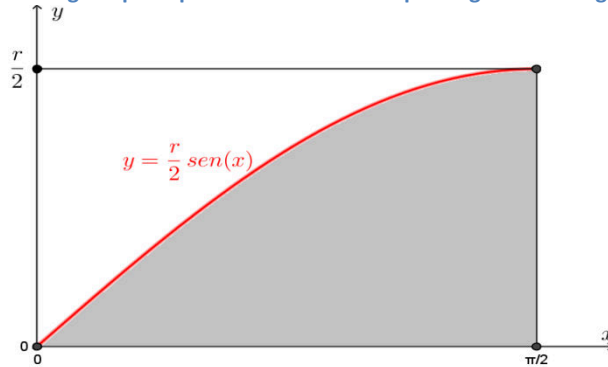
Da Trigonometria no Triângulo Retângulo, temos  $\overline{AB} = \frac{r}{2} \text{sen}(x)$ . Como  $y$  e  $\frac{r}{2} \text{sen}(x)$  são claramente segmentos paralelos e  $C$  é o ponto médio da agulha, temos  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , o que implica  $|\overline{DE}| = |y - \overline{CD}| = \left| y - \frac{r}{2} \text{sen}(x) \right|$ . Note-se que exatamente um dos seguintes ocorre:  $y - \frac{r}{2} \text{sen}(x) = 0$ ,  $y - \frac{r}{2} \text{sen}(x) < 0$  ou  $y - \frac{r}{2} \text{sen}(x) > 0$ . Consequentemente, exatamente um dos seguintes ocorre:  $y = \frac{r}{2} \text{sen}(x)$ ,  $y < \frac{r}{2} \text{sen}(x)$  ou  $y > \frac{r}{2} \text{sen}(x)$ . A agulha toca alguma das linhas paralelas se, e somente se, tivermos  $y \leq \frac{r}{2} \text{sen}(x)$ .

Nosso interesse vai além disso, pois queremos a probabilidade de que a agulha toque alguma paralela, e o que discutimos até aqui apenas determina a ocorrência ou não do toque da agulha numa das linhas paralelas.

A **Figura 7** apresenta o gráfico (linha vermelha) da função  $y = \frac{r}{2} \text{sen}(x)$ , no intervalo de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ . A região destacada em cinza, que denotaremos por  $S_0$ , limitada pelo

gráfico, pelo eixo horizontal e pela reta  $x = \frac{\pi}{2}$ , incluindo a curva  $y = \frac{r}{2} \text{sen}(x)$ , representa os casos em que a agulha toca alguma das linhas paralelas, enquanto que a região retangular que a contém, que denotaremos por  $S$ , representa os casos possíveis. Note-se que os intervalos citados acima,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq y \leq \frac{r}{2}$  são precisamente os apresentados nela.

Figura 7 - Gráfico da região que representa os casos em que a agulha toca alguma das paralelas



Fonte 7: Elaborado pelo autor.

Assim como nos problemas da seção anterior a solução que buscamos advém da razão entre duas áreas. No entanto, a área da região cinza, na **Figura 7**, cujo valor é  $\frac{r}{2}$ , necessita de uma ferramenta do Cálculo<sup>10</sup> chamada Integral Definida, que pode ser visto em um curso superior de Matemática ou áreas afins.

Denotando a área da região cinza por  $A(S_0)$ , temos que  $A(S_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{2} \text{sen}(x) dx$ .

Como  $\frac{r}{2}$  é uma constante multiplicativa, pode ser retirada do integrando. Daí, temos

$$A(S_0) = \frac{r}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) dx = \frac{r}{2} \cdot \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{2} \cdot \left[ -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right] = \frac{r}{2} \text{ unidades de área.}$$

A área da região retangular, denotada por  $A(S)$ , de base  $\frac{\pi}{2}$  e altura  $\frac{r}{2}$  (mais facilmente calculável) é dada por  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{\pi r}{4}$  unidades de área. Esta representa os casos possíveis. Daí, a probabilidade pedida é a razão entre as áreas obtidas, ou seja,

$$P = \frac{A(S_0)}{A(S)} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{\pi r}{4}} = \frac{2}{\pi}. \quad \blacksquare$$

<sup>10</sup> Ramo da Matemática que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área sob uma curva).

## 5.2 Os ladrilhos de Buffon

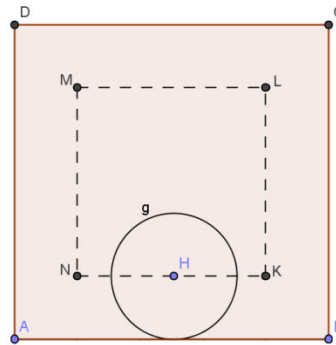
Em seu livro *Suplemento à História Natural*, publicado em 1777, Buffon dedica três de seus trinta e cinco capítulos ao cálculo de probabilidades. Um dos capítulos trata de *Sur le jeu de franc-carreau* (Sobre o Jogo do Ladrilho). Este problema, em linguagem moderna, pode ser enunciado nos seguintes termos:

**Problema 5.2.1** *Em um plano pavimentado com quadrados de lado  $\mathcal{L}$ , é lançado aleatoriamente um disco de diâmetro  $\mathcal{D}$ . Qual a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de quadrado algum?*

### Solução.

Procurando posições para o disco que fossem favoráveis ao que se exige no problema, a percepção que Buffon teve foi a de que o disco não intersectaria nem tangenciaria os lados de qualquer dos ladrilhos desde que seu centro “caísse” no interior de um quadrado de lado  $\mathcal{L} - \mathcal{D}$ , sendo este quadrado concêntrico com o ladrilho, conforme figura a seguir.

Figura 8 - Disco  $g$  de centro  $H$  sobre o lado do quadrado  $KLMN$  concêntrico com o quadrado  $ABCD$

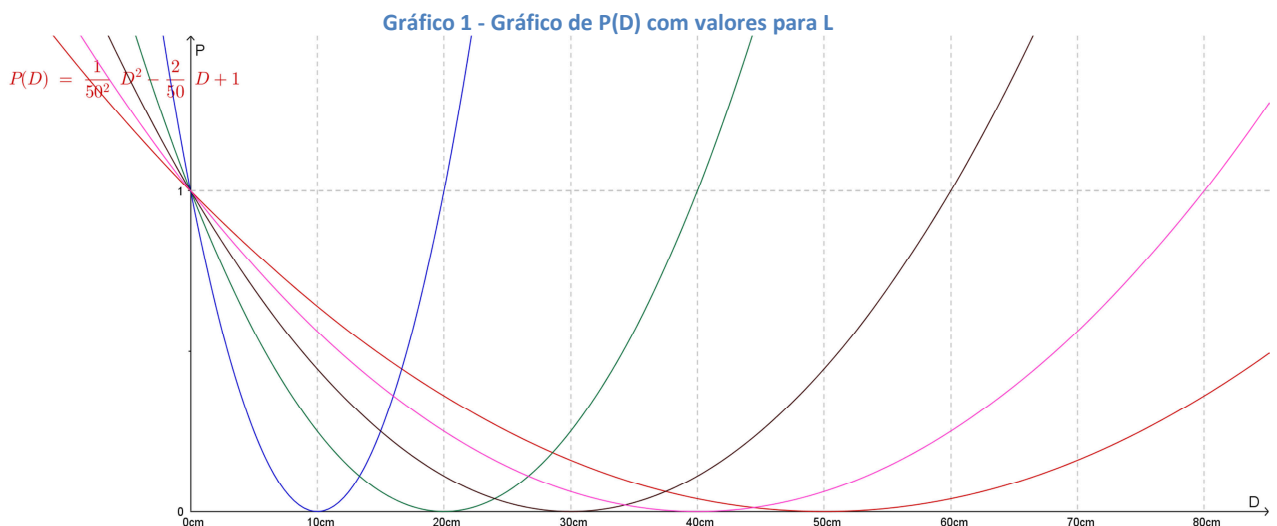


Fonte 8: Elaborado pelo autor.

A fim de fixarmos as ideias vejamos o seguinte: o quadrado  $KLMN$  possui lado cuja medida é  $\mathcal{L} - \mathcal{D}$ , com  $\mathcal{D} < \mathcal{L}$ , e seu centro coincide com o centro do quadrado  $ABCD$ . O círculo (disco)  $g$  possui raio igual a  $\frac{\mathcal{D}}{2}$  e centro  $H$ . É de fácil visualização que a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de um ladrilho é a probabilidade de o centro do disco cair no interior do quadrado  $KLMN$ . Note-se ainda que se o centro do círculo  $g$  estiver sobre o lado do quadrado  $KLMN$  (conforme **Figura 8**), o círculo tangencia o quadrado  $ABCD$  e isto não é interessante aos casos favoráveis.

Chamemos a probabilidade pretendida de  $P$ . Ela é dada pelo quociente entre a área do quadrado  $KLMN$  e a área do quadrado  $ABCD$ . Portanto,  $P = \frac{(\mathcal{L}-\mathcal{D})^2}{\mathcal{L}^2}$ . Desenvolvendo, temos:  $P = \frac{\mathcal{L}^2 - 2\mathcal{L}\mathcal{D} + \mathcal{D}^2}{\mathcal{L}^2} = 1 - \frac{2\mathcal{D}}{\mathcal{L}} + \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{L}^2}$ , que é claramente uma função quadrática na variável  $\mathcal{D}$ . Reescrevamos nossa função quadrática nos seguintes termos:  $P(\mathcal{D}) = \frac{1}{\mathcal{L}^2}\mathcal{D}^2 - \frac{2}{\mathcal{L}}\mathcal{D} + 1$ , sendo  $0 \leq \mathcal{D} \leq \mathcal{L}$ . Portanto,  $P(\mathcal{D})$  é a probabilidade de um disco (círculo) de diâmetro  $\mathcal{D}$  cair inteiramente contido numa região quadrada (ladrilho) de lado  $\mathcal{L}$ . ■

Fixado o lado  $\mathcal{L}$  do ladrilho, a probabilidade do círculo cair inteiramente em seu interior depende do diâmetro do círculo. Pensando no problema como um jogo, quanto maior  $\mathcal{D}$ , menos favorecido o apostador que lançar o disco. Também é verdade que o apostador tem melhores chances à medida que  $\mathcal{D}$  diminui. Se  $\mathcal{D} \geq \mathcal{L}$ , temos probabilidade zero, pois assim certamente o disco tangenciaria ou intersectaria algum lado do quadrado (ladrilho). Em particular, se  $\mathcal{D} = \mathcal{L}$ , temos  $P(\mathcal{L}) = \frac{1}{\mathcal{L}^2}\mathcal{L}^2 - \frac{2}{\mathcal{L}}\mathcal{L} + 1 = 0$  para  $\mathcal{L} \neq 0$ , e  $P(0) = 1$ . Na figura a seguir apresentamos o gráfico da função quadrática  $P(\mathcal{D})$ , sendo  $\mathcal{L} \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ , com destaque para o gráfico (em vermelho) de  $P(\mathcal{D})$ ,  $\mathcal{L} = 50$ .



Uma aplicação prática e bastante interessante desta função é tratada no seguinte problema, adaptado de Caetano e Paterlini (2010).

**Problema 5.2.1** *Suponha que certo empreendedor trabalha com um jogo de ladrilhos com 50 cm de lado e pretende determinar um tamanho de disco que não lhe traga prejuízos, mas que*

ao mesmo tempo torne o jogo atrativo para seus potenciais clientes. Se ele fixar em 45% a probabilidade de algum apostador ganhar, qual deve ser o diâmetro do disco?

**Solução.**

De acordo com a situação proposta devemos ter  $P(\mathcal{D}) = 0,45$ , ou seja,

$\frac{1}{50^2}\mathcal{D}^2 - \frac{2}{50}\mathcal{D} + 1 = 0,45$ . Esta equação pode ser reescrita como

$0,0004\mathcal{D}^2 - 0,04\mathcal{D} + 0,55 = 0$ , cujas raízes aproximadas são  $\mathcal{D}_1 = 83,5$  e  $\mathcal{D}_2 = 16,5$ . A raiz  $\mathcal{D}_1$  não é interessante para o dono do jogo, pois  $83,5 > 50$  o que implica  $P(\mathcal{D}) = 1$ . Segue que  $\mathcal{D}_2 = 16,5$  centímetros é o valor que ele precisa a fim de que em cerca de 55% das apostas os resultados lhe favoreçam e em 45% delas seus clientes saiam vencedores. ■

### 5.3 Desigualdade Triangular e Probabilidade Geométrica

Outro problema interessante e que pode ser facilmente tratado com alunos do Ensino Médio, e cuja solução pode também ser encontrada em Wagner (1997), é conhecido como o Problema do Macarrão. Em linhas gerais o problema pode ser enunciado da seguinte forma:

**Problema 5.3.1** *Dividindo aleatoriamente um segmento de reta em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?*

Antes de solucionarmos o problema analisemos alguns aspectos dele e implicações que podem parecer contradizer o resultado teórico.

Uma abordagem para a sala de aula pode ser incrementada se precedida de um experimento prático com materiais concretos, a fim de levar os alunos a comparar resultados teóricos com os obtidos na prática.

O experimento prático consiste em selecionar um grupo de pessoas e lhes entregar um fio de espaguete e pedir-lhes que o quebrem em três partes da forma que quiserem. Elas poderão fazê-lo de sorte que os três pedaços sempre formem um triângulo se possuírem conhecimentos sobre a Desigualdade Triangular. O conhecimento prévio delas pode, assim, comprometer a aleatoriedade do experimento e, conseqüentemente, a probabilidade.

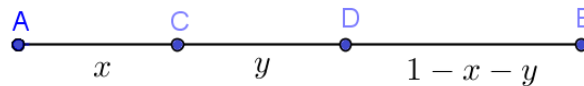
Mesmo que façamos este experimento com pessoas que não possuem conhecimentos prévios básicos de Matemática, a chance de que a maioria das pessoas quebre o fio de macarrão de modo a permitir que se construa um triângulo com os três pedaços é

grande, pois as pessoas “tendem” a quebrar o macarrão em três partes iguais mesmo sem serem solicitadas para fazerem-no desta forma. Isto compromete a aleatoriedade do experimento e, conseqüentemente, o valor da probabilidade, que calculada de forma experimental não coincide com o valor teórico, porém o ganho tanto na aprendizagem quanto no tornar a aula mais atrativa é compensador com os jovens do Ensino Médio. Dito isto, vamos à solução do problema.

### Solução.

Sem perda de generalidade, podemos supor um segmento de reta  $\overline{AB}$  de comprimento medindo uma unidade. Dentre todas as maneiras equiprováveis de dividir tal segmento em três outros segmentos tomemos uma, conforme ilustramos na **Figura 9**, a fim de determinar nosso espaço amostral e o evento em questão.

Figura 9 - Segmento de reta  $AB=1$  dividido aleatoriamente em três partes



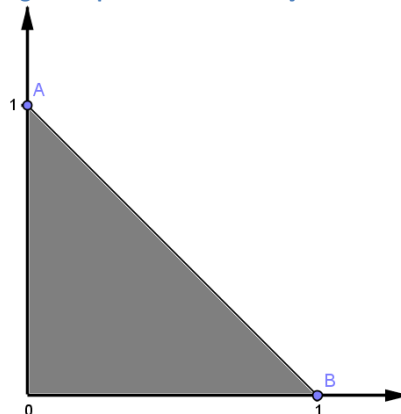
Fonte 10: Elaborado pelo autor.

Observe que podemos associar cada uma das divisões do segmento  $\overline{AB}$  em três partes a um único par de valores  $(x, y)$  no plano, com  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $x + y < 1$ , pois a medida do último pedaço é uma função da medida dos outros dois. Por exemplo, se  $\overline{AC} = \frac{1}{2}$  e  $\overline{CD} = \frac{1}{3}$ , conseqüentemente,  $\overline{DB} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ , que representa o par  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ .

Temos, portanto, um sistema de inequações: 
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases} \quad (1).$$
 A solução deste

sistema é uma região do plano, conforme a **Figura 10**, e representa nosso espaço amostral.

Figura 10 - Região triangular representando a solução do sistema de inequações (1)



Fonte 11: Elaborado pelo autor.

A partir da **Figura 9** podemos escrever  $\overline{AC} = x$ ,  $\overline{CD} = y$  e  $\overline{DB} = 1 - x - y$ . Estas três partes podem ou não formar um triângulo e isto pode ser determinado usando a seguinte proposição, que demonstraremos no Apêndice B.

**Proposição 5.3.1** (Desigualdade Triangular) Três segmentos de reta  $a$ ,  $b$  e  $c$  formam um triângulo se, e somente se, qualquer deles é menor que a soma dos outros dois e maior que o módulo da diferença entre eles. Dito em símbolos,

$$|b - c| < a < b + c,$$

$$|a - c| < b < a + c \text{ e}$$

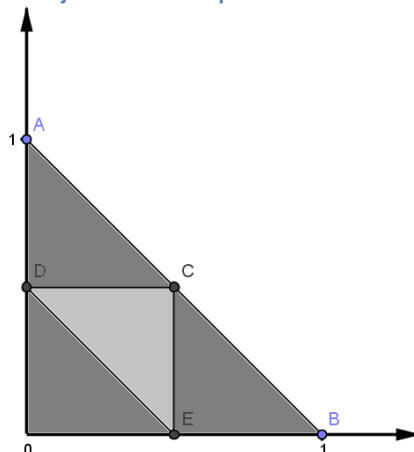
$$|a - b| < c < a + b.$$

Suponhamos  $x = \frac{1}{2}$  e  $y = \frac{1}{4}$ , isto nos dará  $\overline{DB} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ . Claramente estes três segmentos não formam um triângulo, pois, por exemplo,  $x = y + \overline{DB}$ , o que desrespeita a condição de existência acima. Então, nenhum lado do triângulo pode ser maior ou igual a  $\frac{1}{2}$ . Daí,  $x < \frac{1}{2}$  e  $y < \frac{1}{2}$ , e como o terceiro lado é menor que  $\frac{1}{2}$ , temos  $x + y > \frac{1}{2}$ . Juntando este resultado com as limitações da condição de existência formamos uma nova região no plano, que são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < x + y < 1 \end{cases} \quad (2).$$

A **Figura 11** mostra a região do plano que representa o conjunto solução do sistema (2), o triângulo  $CDE$ , que é a área mais clara. Esta representa o evento desejado, contido na região que representa a solução do sistema (1), o triângulo  $OAB$ , área mais escura.

Figura 11 - Triângulo CDE cujos vértices são pontos médios dos lados do triângulo OAB



Fonte 12: Elaborado pelo autor.



Note-se que a área do triângulo  $OAB$  alude ao conjunto de *resultados possíveis*, enquanto que a área do triângulo  $CDE$  aos *resultados favoráveis*. Dado que o problema propõe uma escolha aleatória dos segmentos, a probabilidade pedida é o quociente entre as

áreas dos triângulos  $CDE$  e  $OAB$ , ou seja,  $P = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 25\%$ . ■

#### 5.4 Sierpinski e um triângulo muito curioso

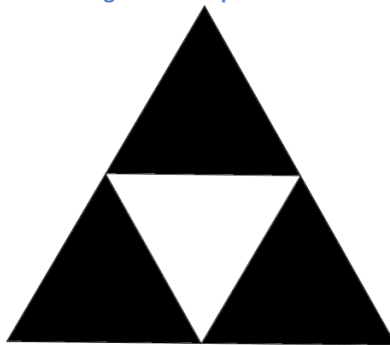
Trataremos agora de uma belíssima aplicação de Probabilidade Geométrica à Geometria Fractal através do Triângulo de Sierpinski. O nome é uma homenagem ao matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882–1969) e trata-se de um fractal de aspecto triangular, preferencialmente construído a partir de um triângulo equilátero, com lado de medida fixada. O referido triângulo é resultado de um processo iterativo que a cada etapa faz “*furos*” no interior da região triangular, formando novos triângulos com vértices nos pontos médios de triângulos obtidos em etapas anteriores.

Tomemos inicialmente um triângulo equilátero de lado unitário. Ao considerarmos os pontos médios de seus lados construímos um novo triângulo, que facilmente demonstramos ser ele também equilátero, porém de lado  $\frac{1}{2}$  unidade. Definamos um furo.

**Definição 5.4.1** Considera-se *furo* um triângulo obtido a partir dos pontos médios de um triângulo inicialmente dado.

A **Figura 12** apresenta o Triângulo de Sierpinski com uma iteração, ou seja, com a primeira etapa de construção dos furos.

Figura 12 - Triângulo de Sierpinski com uma iteração



Fonte 13: Elaborado pelo autor.

A cada iteração, nesta sequência recursiva, que consiste de tomar os pontos médios dos triângulos remanescentes e formar novos furos, solucionaremos o problema de determinar a probabilidade de escolhermos um ponto aleatoriamente e ele pertencer a um furo. Após algumas iterações esperamos encontrar algum padrão, concluindo com uma fórmula que o descreva.

**Problema 5.4.1** *Dado um Triângulo de Sierpinski com uma iteração, qual a probabilidade  $P$  de, ao escolhermos um ponto aleatoriamente em seu interior, ele pertencer ao furo?*

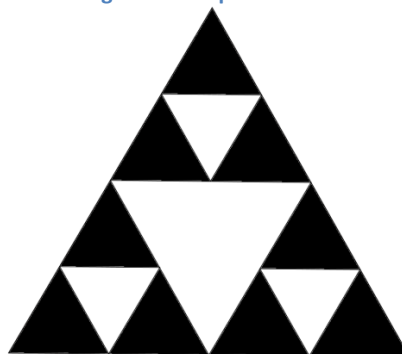
**Solução.**

A chance de escolhermos aleatoriamente um ponto da região clara da **Figura 12** é proporcional à área desta região, bem como a chance de o escolhermos pertencente a qualquer parte da figura é proporcional à área das regiões clara e escura. É bastante coerente com os argumentos e raciocínios expostos até aqui que a probabilidade que se pede é dada pela razão

entre estas áreas. Assim, temos: 
$$P = \frac{\text{Área da Região Clara}}{\text{Área do Triângulo Original}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{\frac{(1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{1} = \frac{1}{4} = 25\%.$$
 Ora, da forma que foi construída, a região clara é notadamente a quarta parte da região originalmente concebida, daí a probabilidade que queríamos é  $\frac{1}{4}$ . ■

Note-se que a cada iteração a área da região clara aumenta, obviamente diminuindo a área escura no triângulo. Na **Figura 13** temos o Triângulo de Sierpinski com duas iterações, favorecendo uma reformulação do **Problema 5.4.1**, resultando no problema a seguir, cuja solução dá sequência à análise que iniciamos.

Figura 13 - Triângulo de Sierpinski com duas iterações



Fonte 14: Elaborado pelo autor.

**Problema 5.4.2** Dado um Triângulo de Sierpinski com duas iterações, qual a probabilidade  $P$  de, ao escolhermos um ponto aleatoriamente em seu interior, ele pertencer a um furo?

**Solução.**

Uma linha de raciocínio interessante para atacarmos este problema é utilizarmos muitas das noções e percepções que tivemos na solução proposta para uma iteração. A primeira delas é notarmos que a área clara foi acrescida de  $\frac{1}{4}$  da área de cada triângulo da parte escura, o que representa  $\frac{3}{4}$  da área clara. Agora o triângulo possui quatro furos, um deles com área  $\frac{1}{4}$  do triângulo original e os outros três com  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$  cada, totalizando  $\frac{3}{16}$  desta área. Assim, a área total dos furos equivale a  $\frac{1}{4} + \frac{3}{16}$  da área de todo o triângulo originalmente considerado. Do que vimos no problema anterior, a probabilidade pedida é  $P = \frac{7}{16} = 43,75\%$ . ■

Tomemos outra iteração no Triângulo de Sierpinski a fim de determinarmos mais um termo do que entendemos ser uma sequência com propriedades que podem ser descritas através de uma lei de formação.

**Problema 5.4.3** Dado um Triângulo de Sierpinski com três iterações, qual a probabilidade  $P$  de, ao escolhermos um ponto aleatoriamente em seu interior, ele pertencer a um furo?

**Solução.**

O triângulo possui a aparência da **Figura 14**.

Figura 14 - Triângulo de Sierpinski com três iterações

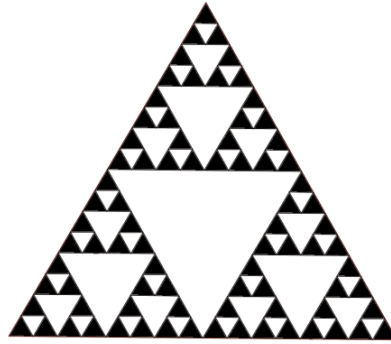


Fonte 15: Elaborado pelo autor.

Note-se que a área da parte clara (os furos) em relação à anterior (com duas iterações) recebeu um acréscimo de 9 novos triângulos equiláteros cuja área de cada um equivale a  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$  da área do triângulo original. A área dos furos totaliza agora

$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$  e esta é precisamente a probabilidade de escolhermos um ponto neste triângulo nas condições exigidas no enunciado do problema. Analogamente, uma nova iteração, conforme **Figura 15**, acrescentará  $3^3$  novos triângulos equiláteros de área igual a  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$  da área do triângulo original.

Figura 15 - Triângulo de Sierpinski com quatro iterações



Fonte 16: Elaborado pelo autor.

Iniciemos agora uma análise desta sequência de valores da probabilidade de escolhermos aleatoriamente um ponto no Triângulo de Sierpinski e ele pertencer a um furo à medida que o número de iterações avança.

Seja  $a_n$  a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um ponto no interior do Triângulo de Sierpinski e ele pertencer a um furo na  $n$  –ésima iteração.

Conforme vimos acima, temos:

$$a_1 = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = \frac{1}{4} + 3^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16},$$

$$a_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64}.$$

Ora, dessa forma, teremos

$$a_4 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + 3^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256},$$

e, mais geralmente,  $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ . Sendo assim, conclui-se ainda que  $a_n$  é uma recorrência de primeira ordem, pois o cálculo de um termo qualquer  $a_n$  é função do anterior  $a_{n-1}$ . Prescindindo ao estudo de Recorrências<sup>11</sup>, podemos facilmente ver que a sequência  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \frac{27}{256}, \dots\right)$ , que são os termos acrescentados a cada iteração, formam uma Progressão Geométrica cujo primeiro termo é  $a_1 = \frac{1}{4}$  e a razão é  $q = \frac{3}{4}$ . Cada termo de  $a_n$  é a soma dos  $n$

<sup>11</sup> Uma *recorrência* é uma equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seus valores anteriores.

primeiros termos da progressão geométrica com tais características, sendo facilmente calculada pela fórmula  $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow a_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} \Rightarrow a_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ . Finalmente, temos que a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um ponto no interior do Triângulo de Sierpinski e ele pertencer a um furo na  $n$ -ésima iteração é dada por  $a_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ . ■

Note-se que  $a_0 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0$ , ou seja, não há chance de obtermos um ponto pertencente a um furo quando nenhuma etapa do processo de iteração foi realizada. Se tomarmos  $n$  infinitamente grande,  $a_n$  tende a 1, que significa que após uma infinidade de iterações a probabilidade de escolhermos um ponto pertencente a um furo é certa. Este resultado é bastante curioso, pois mesmo após infinitas iterações restam infinitos pontos que não foram retirados com o processo recursivo. São precisamente os pontos médios dos triângulos remanescentes. Não obstante haverem infinitos pontos, a probabilidade de sortearmos exatamente um deles é zero, resultado que mesmo sendo contra intuitivo é verdadeiro.

### 5.5 A Probabilidade de um encontro

O problema sobre o qual nos debruçamos agora não segue o mesmo padrão dos demais aqui apresentados, no sentido de que não trata diretamente de entes geométricos e suas propriedades, porém uma geometrização deste problema não só apresenta uma elegante solução como também nos permite uma boa aplicação de Probabilidade Geométrica.

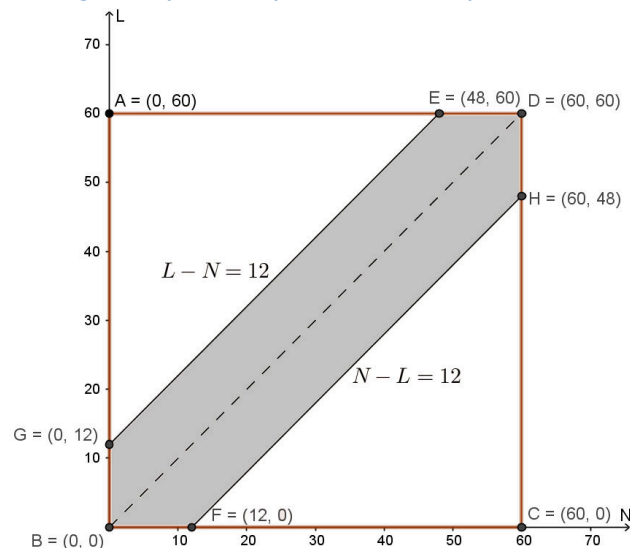
**Problema 5.5.1** *Duas amigas, Lia e Natalisce, que normalmente não são pontuais, marcaram encontrar-se às 14h00min. Supondo que cada uma delas chegará ao encontro em algum instante das 14h00min às 15h00min, escolhido de maneira independente e uniforme, dispendo-se esperar apenas 12 minutos pela outra, qual é a probabilidade de que o encontro aconteça?*

#### Solução.

Conforme dissemos acima, faremos uso de geometria (*em particular, de geometria analítica*) para esboçar graficamente os resultados possíveis para este encontro. Sejam os instantes,  $N$  e  $L$ , em que cada uma delas, Natalisce e Lia, respectivamente, chegam ao encontro, dados em minutos. Associemos a cada par de horários de chegada um ponto do plano cartesiano, de tal

modo que se ambas chegam às 14h00min, temos  $(0, 0)$ ; se chegam ambas às 15h00min, temos  $(60, 60)$ , se Natalisce chega às 14h12min e Lia, às 14h00min, temos  $(12, 0)$ , e assim sucessivamente, sendo  $0 \leq N \leq 60$  e  $0 \leq L \leq 60$ . A **Figura 16** é a representação gráfica de todos os possíveis horários de chegada vistos como pontos do plano, o que determina uma região quadrada no plano, cujo lado mede 60.

**Figura 16 - Região dos pontos do plano favoráveis a que o encontro aconteça**



**Fonte 17: Elaborado pelo autor.**

As retas  $N - L = 12$  e  $L - N = 12$  são conjuntos de pontos que claramente favorecem o encontro entre Lia e Natalisce, pois quaisquer  $(N_0, L_0)$  contidos na região quadrada da **Figura 16** tais que  $N_0 - L_0 = L_0 - N_0 = 12$  representam horários de chegada em que a diferença entre o horário de chegada de uma em relação ao da outra é exatamente 12, que é o tempo que elas se dispuseram esperar uma pela outra.

Vejam agora o que representam as regiões demarcadas no quadrado  $ABCD$ . A região clara abaixo da reta  $N - L = 12$  é o conjunto formado por todos os horários possíveis  $(N_0, L_0)$  tais que  $N_0 - L_0 > 12$ , enquanto que a região clara acima da reta  $L - N = 12$  nos dá todos os horários  $(N_0, L_0)$ , com  $L_0 - N_0 > 12$ . De fato, nenhum destes horários permite que o encontro aconteça.

A região escura, compreendida entre as retas  $N - L = 12$  e  $L - N = 12$ , corresponde ao conjunto de soluções do sistema 
$$\begin{cases} N_0 - L_0 \leq 12 \\ L_0 - N_0 \leq 12 \end{cases}$$
. Ora, tais soluções correspondem precisamente aos pares  $(N_0, L_0)$  que favorecem o encontro. Chamemos de  $P$  a probabilidade pedida no problema. Ela é a razão entre a área escura e a área do quadrado. Seja  $(ABCD)$  a área do quadrado  $ABCD$ , então  $(ABCD) = 60^2 = 3600$ . Quanto à parte escura,

temos  $(BGEDHF) = 3600 - 2 \cdot \frac{48 \cdot 48}{2} = 3600 - 2304 = 1296$ . Assim,

$$P = \frac{(BGEDHF)}{(ABCD)} = \frac{1296}{3600} = \frac{9}{25} = 36\%. \quad \blacksquare$$

É interessante observarmos que a linha tracejada (diagonal  $\overline{BD}$ ) no quadrado da **Figura 16** representa exatamente os horários em que Natalisce e Lia resolvem ser pontuais, enquanto que a largura da faixa mais escura (região que favorece o encontro) nos indica o grau de tolerância entre as amigas, ou seja, se elas houvessem fixado um valor acima de 12 minutos para esperar uma pela outra a faixa seria mais larga e se o valor fosse abaixo de 12 minutos, a faixa era mais estreita.

### 5.6 Bertrand, a Corda e o Paradoxo

Encerramos esta seção com o Paradoxo de Bertrand, em homenagem a Joseph Louis François Bertrand (1822–1900), matemático e historiador de ciências francês. O problema proposto por ele pode ser enunciado como a seguir.

**Problema 5.6.1** *Dado um círculo de raio unitário, qual a probabilidade de, escolhida aleatoriamente uma corda deste círculo, seu comprimento superar a medida do lado do triângulo equilátero nele inscrito?*

#### Solução.

Um paradoxo é algo que contraria o que se espera ser válido. É essencialmente uma contradição, algo ilógico. O problema proposto por Bertrand passou a ser considerado um paradoxo porque é possível apresentarmos três valores diferentes que respondem à pergunta que ele fez. Isto é possível graças à imprecisão da expressão ***escolhida aleatoriamente uma corda deste círculo***. Nesta situação, uma corda pode ficar bem definida de três maneiras distintas, daí três soluções diferentes para o mesmo problema. Analisemos, em seguida, cada uma delas, propondo a respectiva solução.

Antes, definamos corda da circunferência.

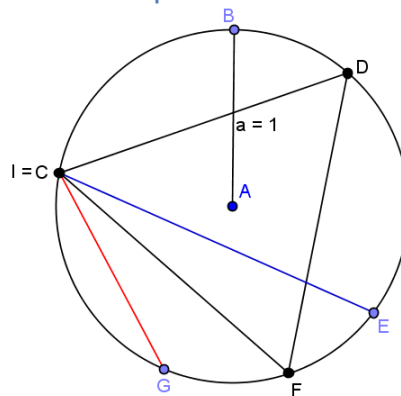
**Definição 5.6.1** *Chama-se corda da circunferência a qualquer segmento de reta cujas extremidades são dois pontos quaisquer dela.*

Uma vez definida uma corda, note-se que de posse de alguns elementos podemos determiná-la.

### 1. A corda determinada por suas extremidades

Dados dois pontos distintos da circunferência existe uma, e somente uma, corda que os contém. Assim, uma corda está bem determinada quando estabelecermos suas extremidades. As extremidades de um segmento de reta podem ser definidas como sendo o início e o fim deste segmento, portanto, representemos por  $I$  o início e  $E$  a extremidade de uma corda qualquer. Dado um ponto  $I$  qualquer sobre o círculo é sempre possível determinarmos um único triângulo equilátero inscrito neste círculo, com um de seus vértices coincidindo com  $I$ , conforme **Figura 17**.

Figura 17 - Corda IE pertencente ao círculo de raio 1



Fonte 18: Elaborado pelo autor.

É fácil ver que o comprimento da corda  $\overline{IE}$  é maior que o do lado do triângulo equilátero  $CD$  se, e somente se, a extremidade  $E$  pertence ao arco de circunferência  $DF$ , com  $E \neq D$  e  $E \neq F$ . Então, os resultados favoráveis resultam em  $\frac{1}{3} = 33,333 \dots \%$  do comprimento da circunferência, sendo este número precisamente a probabilidade pedida no problema. ■

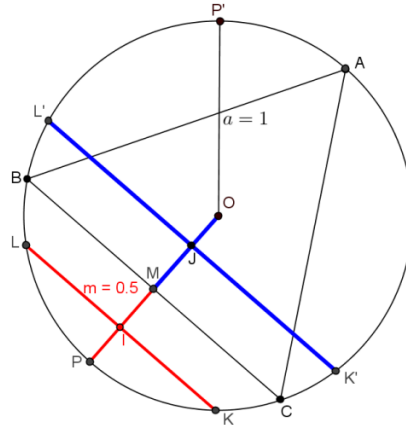
### 2. A corda determinada por sua distância ao centro da circunferência à qual pertence

É bem verdade que apenas a distância da corda ao centro da circunferência é insuficiente para determiná-la, porém a outra característica (a sua direção) pode ser desprezada sem prejuízos, pois estamos interessados no comprimento da corda. Note-se, ainda, que a distância da corda ao centro da circunferência é precisamente a medida do



segmento de reta, contido num raio perpendicular à corda, medido da intersecção desse raio com a corda até o centro da circunferência, conforme o segmento  $\overline{OM}$  da **Figura 18**.

Figura 18 - Corda determinada por sua distância ao centro da circunferência



Fonte 19: Elaborado pelo autor.

Na **Figura 18**, o ponto  $O$  é centro da circunferência de raio unitário. Toma-se nela um ponto qualquer  $P$  de modo que  $\overline{OP}$  determine uma direção perpendicular à corda. Seja  $I$  um ponto qualquer sobre  $\overline{OP}$ . Consideremos a corda que passa por  $I$ , perpendicular a  $\overline{OP}$ , digamos  $\overline{KL}$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{OP}$ . Vamos mostrar que a corda  $\overline{KL}$  é maior que o lado do triângulo  $ABC$  se, e somente se, o segmento  $\overline{OI}$  é menor que  $\overline{OM} = \frac{1}{2}$ .

Calcularemos agora o comprimento do lado do triângulo  $ABC$ . Para obter  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \sqrt{3}$ , basta aplicar o Teorema dos Cossenos no triângulo isósceles  $OAC$ , tendo assim

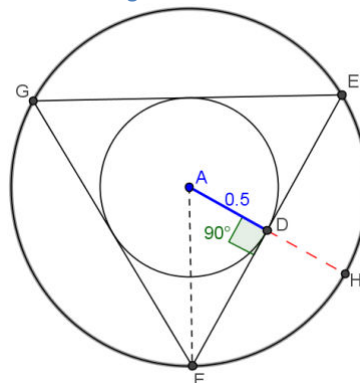
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow \\ \overline{AC}^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ \overline{AC} &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Destacamos em vermelho os resultados “desfavoráveis” e em azul, os favoráveis. Como  $\overline{OM} \perp \overline{BC} \Rightarrow B\hat{O}M \equiv C\hat{O}M = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ , temos  $\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{OM} = \frac{1}{2}$ . Ora, se a corda, desta forma determinada, tiver sua intersecção  $I \in \overline{MP}$ , sua distância ao centro da circunferência é  $\geq \frac{1}{2}$ , o que implica seu comprimento é menor ou igual a  $\sqrt{3}$ . Por outro lado, se sua distância ao centro da circunferência é  $< \frac{1}{2}$ , ou seja, sua intersecção  $J \in \overline{OM}$ , isto implica seu comprimento é maior que  $\sqrt{3}$ , que satisfaz o problema. A chance de termos  $J \in \overline{OM}$  é  $\frac{1}{2} = 50\%$ , que representa a probabilidade pedida por Bertrand. ■

### 3. A corda determinada por ser ela tangente à circunferência concêntrica e de raio inferior ao da circunferência a que pertence

Pela **Figura 19**, se o ponto de tangência entre a corda e a circunferência concêntrica de raio menor for o ponto médio de algum raio da circunferência de raio unitário, como visto na análise do caso anterior, a distância deste ponto de tangência ao centro das circunferências é  $\frac{1}{2}$ . Exatamente nesta situação a corda terá o comprimento do lado do triângulo equilátero  $EFG$  inscrito. Se não tangenciar a circunferência, seu comprimento é menor ou igual a  $\sqrt{3}$ , mas se for secante à circunferência terá um comprimento maior que  $\sqrt{3}$ . Ora, a chance de que isto ocorra é igual á chance de que tal corda toque algum ponto da região do círculo menor. Desta forma, a probabilidade pode ser expressa como a razão entre as áreas dos círculos (do menor para o maior), dando-nos  $\frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot \pi}{1^2 \cdot \pi} = \frac{1}{4} = 25\%$  de probabilidade de uma corda, escolhida aleatoriamente, ter seu comprimento superior a  $\sqrt{3}$ .

Figura 19 - Corda tangente à circunferência de raio 0,5



Fonte 20: Elaborado pelo autor.

Não obstante um mesmo problema aceite três respostas diferentes, matematicamente o que fizemos foi explorar a imprecisão do texto da questão, que acaba por nos permitir interpretações que contemplam características geométricas diversas de uma corda da circunferência. Segue firme o fato de que a Matemática não permite várias respostas ao mesmo problema, pois nisso se sustenta.

## **6. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Há uma riqueza imensurável no saber matemático, que o estudo um pouco mais aprofundado de seus tópicos nos revela. Todos que estudam matemática precisam usufruir tal riqueza, seja pela simples beleza que com ela se apresenta seja pela íntima relação que possui com as mais diversas atividades humanas e a realidade que nos cerca.

Este trabalho tentou mostrar e explorar quão rica é a Teoria das Probabilidades, mesmo considerando-se apenas a parte dela que é acessível a estudantes de Ensino Médio, desde a simples análise de jogos de azar, com Pascal e Fermat, até os modernos e complexos fundamentos estabelecidos por Kolmogorov.

Totalmente voltada para a promoção e o incentivo do estudo e do ensino da Teoria das Probabilidades, por parte de professores e alunos da Educação Básica – e por que não dizer do Ensino Superior? – apresentamos esta pesquisa com ares de proposta de trabalho, ressaltando a importância e força do conceito de probabilidade geométrica. Dizemos importância pela variedade nas aplicações e no favorecimento da compreensão e por força queremos dizer capacidade de estabelecer conexões com outros temas dentro da Matemática.

Iniciamos com uma abordagem histórica por entender que o conhecimento e também o conhecimento matemático é, antes de tudo, histórico, pois é fruto de uma construção humana perpassando os anos, crescendo, evoluindo. Este aspecto do saber matemático deve ser usado em sala a fim de promovê-lo e incentivá-lo. A Teoria das Probabilidades é um “capítulo” nessa história, acompanhando o homem, auxiliando-o nas tomadas de decisão, enfim, sendo-lhe útil.

Todavia, alunos e professores da Educação Básica não se sentem à vontade para trabalhar com este tópico, não obstante a simplicidade de muitos dos seus conceitos e aplicações. Também os livros didáticos não contribuem para mudar este quadro, concentrando-se excessivamente no uso de fórmulas e exercícios repetitivos sobre dados, cartas de baralho, moedas, bolas e urnas, etc., que, por vezes, obscurecem os conceitos centrais desta teoria. A falta de conexão com a realidade cotidiana dos alunos e ausência de seções com aplicações às demais disciplinas (e à própria Matemática) são problemas considerados crônicos. No que tange à Probabilidade Geométrica não há tópico específico na organização do conteúdo e, em alguns raros casos, um ou outro exercício oferece a oportunidade ao trato com Probabilidade Geométrica, ficando a isso restrito.

Nunca foi um nosso objetivo fazer de Probabilidade Geométrica um tópico à parte na Teoria das Probabilidades, porém entendemos que sua importância para o ensino e a

aprendizagem é vítima de uma negligência sem sentido. Salvo alguns artigos da Revista do Professor de Matemática e outros poucos trabalhos acadêmicos (dissertações), o tema possui literatura pobre em Língua Portuguesa.

As agulhas de Buffon, apesar do uso de matemática avançada, é um belíssimo problema que deve inclusive ser precedido de experimentação prática com os alunos, para posterior comparação de resultados, favorecendo discussões e análises proveitosas. Os tópicos de Geometria e Trigonometria que o problema desenvolve podem favorecer o fortalecimento de aprendizagens e/ou o tratamento simultâneo de assuntos que são normalmente vistos de forma fragmentada.

Notadamente útil em termos pedagógicos e especialmente rico nas aplicações o conceito de Probabilidade Geométrica parece ser ignorado pelos livros didáticos adotados no Ensino Médio no Brasil. Cremos não haverem razões para tal desprezo ao mesmo tempo em que afirmamos a relevância de ensinarmos Probabilidade aos nossos alunos de Ensino Médio, abordando o conceito de Probabilidade Geométrica, seja para promover a conexão entre tópicos distintos de matemática, seja para explorar quão mais abrangente se revela a moderna Teoria das Probabilidades.

Há muitos outros problemas de probabilidade relacionados à Geometria que podem e devem ser tratados numa abordagem como esta que mostramos aqui, donde certamente é possível desenvolver mais o conhecimento e gosto pelo saber matemático. Vale ressaltar ainda que o ensino que promove este saber deve sempre zelar para que ele de fato ocorra, pois disso depende a sociedade.

Encerramos estas considerações questionando os professores da Educação Básica que por ventura se interessem por este trabalho: se temos desprezado tanto o conceito de Probabilidade Geométrica no ensino da Teoria das Probabilidades, que outros tópicos têm sido por nós negligenciados em tantos outros campos que a Matemática possui? Quantas boas ferramentas temos deixado de usar para que nossas aulas sejam mais efetivas quanto a desenvolver o conhecimento matemático de nossos alunos?

## REFERÊNCIAS

- BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 3
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2000.
- CAETANO, Paulo Antônio Silvani; PATERLINI, Roberto Ribeiro. **Jogo dos Discos: módulo I**. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/JogoDosDiscosModuloI.pdf>>. Acesso em: 13 ago. 2015.
- GADELHA, Augusto. **Uma Pequena História da Probabilidade**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <[http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist\\_prob\\_Gadelha.pdf](http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf)>. Acesso em: 05 mar. 2015.
- LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2
- LINS, Lauro Didier. **Agulha de Buffon**. Recife: Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco. 2004. Disponível em: <<http://www.cin.ufpe.br/~ldl/buffon.pdf>>. Acesso em: 09 mai. 2015.
- LOPES, José Marcos; FILHO, Inocêncio Fernandes Balieiro; SALVADOR, José Antônio. O conceito de Probabilidade Geométrica por meio do uso de Fractais. *In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*, 34., 2012, Águas de Lindóia. **Artigo...** São Paulo: SBMAC, 2012. p. 58-59. Disponível em: <[http://www.sbm.org.br/eventos/cnmac/xxxiv\\_cnmac/pdf/41.pdf](http://www.sbm.org.br/eventos/cnmac/xxxiv_cnmac/pdf/41.pdf)>. Acesso em: 26 fev. 2015.
- MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- TUNALA, N. **Determinação de probabilidades por métodos geométricos**. Revista do Professor de Matemática, v. 20, p.16-22, 1995.
- VIALI, Lorí. **Probabilidade Univariada**. Porto Alegre: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008. Disponível em: <[http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/producao/probabilidade/material/apostilas/Prob\\_1.pdf](http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/producao/probabilidade/material/apostilas/Prob_1.pdf)>. Acesso em: 02 jun. 2015.
- WAGNER, Eduardo. **“O problema do macarrão e um paradoxo famoso”**, Revista do professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 34, p.28-35, 1997.

### APÊNDICE A – A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO JOGO DOS PONTOS

**Problema 2.1** (Problema dos Pontos) *Dois jogadores jogam uma série de partidas justas até que um deles obtenha seis vitórias. Por motivos exteriores ao jogo, este é interrompido quando um dos jogadores somava cinco vitórias e o outro, três vitórias. Como dividir, de forma justa, o montante apostado por ambos os jogadores?*

#### Solução.

Pascal e Fermat resolveram, de forma independente, este problema, apresentando o mesmo resultado, mas com soluções diferentes. Apresentaremos aqui a solução nos moldes da que foi dada por Fermat, utilizando recursos da Combinatória.

Chamemos inicialmente os jogadores de A e B. Suponhamos ainda que A seja o jogador com cinco vitórias e B, o jogador com três vitórias. Restam agora três partidas e, depois disso, fatalmente alguém ganhará. Seja  $\alpha$  uma partida ganha por A e  $\beta$  uma partida ganha por B. Os possíveis resultados para estas próximas três partidas estão organizados na tabela a seguir.

Vencedor da 1ª partida	Vencedor da 2ª partida	Vencedor da 3ª partida
$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$
$\alpha$	$\alpha$	$\beta$
$\alpha$	$\beta$	$\alpha$
$\beta$	$\alpha$	$\alpha$
$\beta$	$\beta$	$\beta$
$\beta$	$\beta$	$\alpha$
$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$\alpha$	$\beta$	$\beta$

Nesta sequência de resultados, há 7 que favorecem o jogador A e apenas o um favorece B, caso em que ele ganha as três partidas. Logo,  $\frac{7}{8}$  dos resultados são favoráveis ao jogador A e  $\frac{1}{8}$  ao B. Portanto, o jogador A deve ficar com  $\frac{7}{8}$  do montante apostado e B deve receber  $\frac{1}{8}$  disso. ■

## APÊNDICE B – A DESIGUALDADE TRIANGULAR

Provaremos agora a Proposição 5.3.1, com a seguinte redação:

*Três segmentos de reta  $a$ ,  $b$  e  $c$  formam um triângulo se, e somente se, qualquer um deles é menor que a soma dos outros dois e maior que o módulo da diferença entre eles. Dito em símbolos,*

$$|b - c| < a < b + c,$$

$$|a - c| < b < a + c,$$

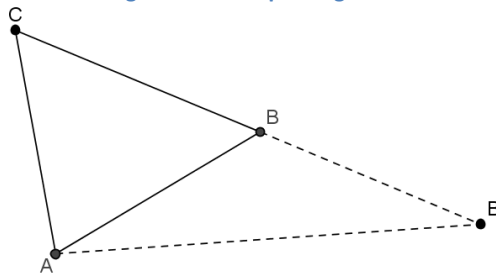
$$|a - b| < c < a + b.$$

### Demonstração.

Provaremos a primeira parte da proposição, deixando como exercício para o leitor a segunda parte. Demonstraremos a seguir que “A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado”.

Tomemos por base a **Figura 20**, triângulo  $ABC$  com prolongamento do lado  $\overline{CB}$  tal que  $\overline{AB} = \overline{BB'}$  para organizar as ideias.

Figura 20 - Triângulo  $ABC$  com prolongamento de  $CB$  até  $B'$



Fonte 21: Elaborado pelo autor.

O triângulo  $ABB'$  é isósceles de base  $\overline{AB'}$ , pois tomamos  $B'$  sobre o prolongamento de  $\overline{CB}$  tal que  $\overline{AB} = \overline{AB'}$ . Temos assim que os ângulos  $\widehat{AB'B}$  e  $\widehat{B'AB}$  são congruentes. Da **Figura 20** vê-se facilmente que  $\overline{CB'} = \overline{CB} + \overline{BB'} = \overline{CB} + \overline{AB}$  e que o ângulo  $\widehat{B'AC}$  é maior que o ângulo  $\widehat{B'AB}$  e, conseqüentemente, maior que  $\widehat{AB'B}$ . É possível mostrar (mas não faremos aqui) que o maior lado de um triângulo é oposto ao maior ângulo. Temos assim que  $\overline{CB'}$  é maior que  $\overline{AC}$ , mas isto é o mesmo que  $\overline{CB} + \overline{AB} > \overline{AC}$ . Analogamente, prova-se que  $\overline{CB} + \overline{AC} > \overline{AB}$  e  $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{CB}$ . ■