UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALEXMAY SOARES NUNES

AS PERMUTAÇÕES CAÓTICAS, O PROBLEMA DE LUCAS E A TEORIA DOS PERMANENTES

FORTALEZA
2015

ALEXMAY SOARES NUNES

AS PERMUTAÇÕES CAÓTICAS, O PROBLEMA DE LUCAS E A TEORIA DOS PERMANENTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

N923p Nunes, Alexmay Soares
As permutações caóticas, o problema de Lucas e a teoria dos permanentes / Alexmay Soares Nunes. - 2015.
77 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

1. Análise combinatória. 2. Lemas de Kaplansky. 3. Problema de Lucas. I. Título.

CDD 511.6

ALEXMAY SOARES NUNES

AS PERMUTAÇÕES CAÓTICAS, O PROBLEMA DE LUCAS
E A TEORIA DOS PERMANENTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 25 / 05 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Fabrício Siqueira Benevides

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Ana Shirley S. da Silva

Prof. Dr. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Victor Campos

Prof. Dr. Victor Almeida Campos
Dep. Computação, Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha mãe e à Rosângela.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, que batalhou muito em sua vida para educar seus filhos.

À Rosangela, por não me abandonar na solidão das madrugadas em que escrevia.

À dona Zuila, por ser uma sogra bem melhor do que eu mereço.

Ao meu orientador, Fabrício Benevides pela generosa paciência com que lidou com minhas dúvidas e teimosias.

Ao amigo Márcio, por dividir comigo um pouco de sua sabedoria.

À minha amiga Otávia, que mesmo de longe nunca deixou de torcer por mim.

Aos meus amigos e companheiros de viagens, Marcelo, Robson e Fernanda pela incansável disposição em me ouvir tagarelar e não me deixar cochilar ao volante.

Ao amigo Adriano, pela amizade sincera ao longo de tantos anos.

Ao professor Cleiton Albuquerque, que sempre ofereceu seu apoio e sempre será para mim uma referência de professor, amigo, colega e cidadão.

A todos os meus professores e colegas do PROFMAT, pelas valiosas lições de Matemática, de vida e companheirismo.

"Nós somos aquilo que fazemos repetidamente. Excelência, então, não é um modo de agir, mas um hábito".

Aristóteles

RESUMO

Neste trabalho abordamos algumas técnicas de contagem utilizadas para solucionar alguns problemas clássicos da Análise Combinatória. Mostramos também uma relação entre o problema das cartas mal endereçadas, o problema de Lucas e os permanentes de uma matriz quadrada.

Palavras-chave: Lemas de Kaplansky.Problema de Lucas. Permanentes.

ABSTRACT

In this work we cover some counting techniques used to solve some classic problems in Combinatorics. We also show a link between the so called “rencontre problem”, the “ménage problem” and the permanent of a square matrix.

Keywords: Lemmas of Kaplansky. Ménage Problem. Permanents.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..11

2 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO..12

2.1 A cardinalidade da união de dois conjuntos finitos....................................12

2.2 A cardinalidade da união de três conjuntos finitos....................................13

2.3 Caso geral do princípio da inclusão e exclusão..15

2.4 Permutação caótica ou desarranjo...19

2.5 A quantidade de funções sobrejetoras entre dois conjuntos finitos..........22

3 RETÂNGULOS E QUADRADOS LATINOS..27

3.1 Definição e existência de retângulos e quadrados latinos..........................28

3.2 Da quantidade de retângulos e quadrados latinos.......................................36

4 LEMAS DE KAPLANSKY...43

4.1 Combinações completas...43

4.2 Lemas de Kaplansky...47

4.3 Generalizações dos lemas de Kaplansky..48

5 O PROBLEMA DE LUCAS...57

5.1 Solução de Kaplansky para o problema de Lucas..58

5.2 Outra solução para o problema de Lucas...62

6 PERMUTAÇÕES E PERMANENTES...63

6.1 Permanentes..64

6.2 Permutações e permanentes..66

6.3 Uma fórmula de recorrência para os desarranjos e a engenhosa

Solução de Euler..68

6.4 O problema de Lucas e os permanentes 71

7 CONCLUSÃO..76

REFERÊNCIAS..77

1 INTRODUÇÃO

O problema das cartas mal endereçadas, proposto por Nicolaus Bernoulli e resolvido por Euler, trata da quantidade de formas de distribuirmos n cartas endereçadas a n pessoas distintas de modo que nenhuma pessoa receba corretamente sua correspondência. O problema de Lucas, proposto por Édouard Lucas e resolvido por Kaplansky, pergunta de quantos modos podemos acomodar n casais, marido e mulher, em $2n$ cadeiras distintas dispostas em uma mesa circular de modo que pessoas do mesmo sexo não sentem juntas e nenhum homem sente ao lado de sua esposa. Ambos são problemas sobre o número de permutações com restrições sobre as posições dos elementos permutados e estão também relacionados com o problema de contar a quantidade de quadrados latinos.

Neste trabalho, discutimos algumas técnicas de contagem usadas para solucionar o problema das cartas mal endereçadas, o problema de Lucas e que fornecem também estimativas para o número de quadrados latinos. Começamos por apresentar e demonstrar o Princípio da Inclusão e Exclusão (PIE) seguido de algumas aplicações notáveis. Em seguida, exibimos os conceitos de retângulos e quadrados latinos e enfatizamos uma relação direta entre quadrados latinos e as permutações caóticas. No Capítulo 4, apresentamos, generalizamos e demonstramos os Lemas de Kaplansky e em seguida apresentamos uma série de aplicações. No Capítulo 5, apresentamos o problema de Lucas e uma solução diferente da que foi apresentada por Kaplansky. Finalmente, no Capítulo 6, tecemos alguns comentários sobre permanentes e explicamos sua ligação com a contagem das permutações, em especial com as permutações caóticas e o problema de Lucas.

Este trabalho tem por objetivo servir como ferramenta didática para o aprofundamento de técnicas de contagem usadas no Ensino Médio. Os assuntos tratados e a linguagem usada para resolver os problemas são compatíveis com a Matemática desenvolvida no currículo do Ensino Médio. Não obstante, tais problemas são desafiadores e podem despertar a curiosidade dos alunos e contribuir com a melhoria do ensino da Matemática.

2 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Começaremos por apresentar uma importante ferramenta de contagem que é largamente conhecida na comunidade Matemática como *O Princípio da Inclusão e Exclusão* ou simplesmente pela sigla PIE.

Basicamente, este princípio nos fornece uma maneira de determinar a quantidade de elementos da união de uma quantidade finita de conjuntos finitos caso seja conhecido as quantidades de elementos de cada conjunto e das intersecções entre eles.

Inicialmente, vamos considerar a situação onde temos apenas dois conjuntos finitos. Em seguida vamos generalizar essa situação para mais conjuntos. A partir daqui, iremos representar a cardinalidade de um conjunto finito A por $|A|$.

2.1 A cardinalidade da união de dois conjuntos finitos

Sejam A e B dois conjuntos finitos. Cada elemento do conjunto $A \cup B$ pertence a um e somente um dos seguintes subconjuntos da união de *A* com *B*: $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $A \cap B$. Tal afirmação é verdadeira devido ao fato de os três subconjuntos formarem, notadamente, uma partição de $A \cup B$. Assim,

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|.$$

Por outro lado, $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$ e $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$. Logo,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

O sinal de "–" precedente a $|A \cap B|$ também pode ser justificado pelo de fato de que cada elemento da intersecção entre A e B está sendo contado duplamente, uma vez em $|A|$ e outra em $|B|$, daí surge a necessidade de retirar o excesso da soma $|A| + |B|$.

A seguir, um exemplo de aplicação deste caso particular do PIE.

Exemplo 2.1.1

Em certo município brasileiro, não há sistema de coleta de esgoto, tal fato favorece a propagação de parasitoses, sendo que as mais comuns são causadas *por Ascaris lumbricoides (conhecida como lombriga) e Enterobius vermiculares (também chamada de tuxina). Considere que nesse município haja uma comunidade de 800 habitantes e que após uma rápida pesquisa, constatou-se que:*

- *460 apresentavam ovos de lombriga;*
- *380 apresentavam ovos de tuxina e*
- *20% dos habitantes não apresentavam infestação por estes vermes.*

Quantos habitantes dessa comunidade estavam infestados pelos dois tipos de vermes?

Solução:

Vamos definir os conjuntos:

A: Conjunto dos habitantes infestados pela “lombriga”,

B: Conjunto dos habitantes infestados pela “tuxina”.

Veja que, nesta notação, estamos procurando a cardinalidade de $A \cap B$ e nos foi informado que $|A| = 460$ e que $|B| = 380$.

Ora, sabemos 20% dos habitantes não apresentavam infestação por estes vermes, assim 80% dos 800 habitantes, isto é, 640 habitantes estão infestados por ao menos um dos dois tipos de vermes, logo: $|A \cup B| = 640$.

Como $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, segue que:

$$640 = 460 + 380 - |A \cap B|.$$

Portanto, $|A \cap B| = 200$.

Dessa forma, concluímos que 200 habitantes da comunidade citada estão infestados pelos dois tipos de vermes. $\square$

2.2 A cardinalidade da união de três conjuntos finitos

Sejam A, B e C três conjuntos finitos. Estamos interessados em determinar $|A \cup B \cup C|$. Podemos pensar em $B \cup C$ como um único conjunto. Assim, desde que $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$, podemos aplicar o resultado obtido na seção anterior para dois conjuntos e obter:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|.$$

Por outro lado, sabemos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Daí:

$$|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|.$$

Assim,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|),$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Tal como na Seção 2.1 podemos justificar o resultado acima da seguinte forma: cada um dos elementos das três intersecções $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ foi duplamente contado na soma $|A| + |B| + |C|$, daí se justifica a subtração das parcelas $|A \cap B|, |A \cap C|$ e $|B \cap C|$. Contudo, cada elemento do conjunto $A \cap B \cap C$ foi triplamente incluído (uma vez em $|A|$, outra em $|B|$ e mais uma vez em $|C|$) e triplamente retirado (uma vez em cada uma das três intersecções $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$) e isso justifica a inclusão de $|A \cap B \cap C|$ no final da fórmula.

Exemplo 2.2.1

(UERJ - Adaptada) Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas diarreia, febre ou dor no corpo, isoladamente ou não. A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela abaixo.

Sintomas	**Frequência**
Diarreia	62
Febre	62
Dor no corpo	72
Diarreia e febre	14
Diarreia e dor no corpo	8
Febre e dor no corpo	20
Diarreia, febre e dor no corpo	**?**

Determinar o número de pessoas que apresentaram, ao mesmo tempo, *os três sintomas.*

Solução:

Vamos começar definindo os conjuntos A, B e C como segue.

A: conjunto das pessoas que apresentaram diarreia,

B: conjunto das pessoas que apresentaram febre,

C: conjunto das pessoas que apresentaram dor no corpo.

Dessa forma, fica evidente que: $|A \cup B \cup C| = 160$, $|A| = 62$, $|B| = 62$, $|C| = 72$, $|A \cap B| = 14$, $|A \cap C| = 8$ e $|B \cap C| = 20$. Pede-se para calcular $|A \cap B \cap C|$.

Ora, pelo PIE, sabemos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &160 = 62 + 62 + 72 - 14 - 8 - 20 + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Logo,

$$|A \cap B \cap C| = 6.$$ □

A seguir, veremos o caso geral do PIE e uma prova de tal resultado.

2.3 Caso geral do princípio da inclusão e exclusão

A seguir enunciamos o PIE em sua forma geral. Há várias formas de demonstrar este resultado. A demonstração que segue fará uso do Princípio de Indução Finita (PIF).

Teorema 2.3.1

Sejam A_1, A_2, ..., A_n conjuntos finitos. Então,

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{r=1}^{n}\left[(-1)^{r-1}\cdot\left(\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}\right|\right)\right]$$

$$\sum_{1\le i_1\le n}\left|A_{i_1}\right| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right| -$$

$$\sum_{1\le i_1<i_2<i_3<i_4\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{i_4}\right| + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right|.$$

Demonstração do Teorema 2.3.1:

Vamos usar indução sobre *n.* O Teorema 2.3.1 é claramente verdadeiro para $n=1$ e já provamos que ele também é verdadeiro para $n=2$ e $n=3$.

Para o passo indutivo, vamos assumir que o Teorema 2.3.1 é verdadeiro para $n=r$, quaisquer que sejam os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

Vejamos o que ocorre no caso $n=r+1$.

Para $n=r+1$ teremos:

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\cup A_{r+1}\right| = \left|\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right)\cup A_{r+1}\right|.$$

Tratando $\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right)$ como um único conjunto e usando o resultado obtido na Seção 2.1, temos:

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\cup A_{r+1}\right| = \left|\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right)\cup A_{r+1}\right| \Rightarrow$$
$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\cup A_{r+1}\right| = \left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right| + \left|A_{r+1}\right| - \left|\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right)\cap A_{r+1}\right|.$$

Aplicando a hipótese de indução para os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$, tem-se:

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\cup A_{r+1}\right| = \sum_{1\le i_1\le r}\left|A_{i_1}\right| - \sum_{1\le i_1<i_2\le r}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le r}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right| - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{r-1}\cdot\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_r\right| + \left|A_{r+1}\right| - \left|\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right)\cap A_{r+1}\right|.$$

Inserindo $\left|A_{r+1}\right|$ em $\sum_{1\le i_1\le r}\left|A_{i_1}\right|$ tem- se:

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\cup A_{r+1}\right| = \sum_{1\le i_1\le r+1}\left|A_{i_1}\right| - \sum_{1\le i_1<i_2\le r}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le r}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right| - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{r-1}\cdot\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_r\right| - \left|\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right)\cap A_{r+1}\right|.$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\left|\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r\right)\cap A_{r+1}\right| = \left|\left(A_1\cap A_{r+1}\right)\cup\left(A_2\cap A_{r+1}\right)\cup\ldots\cup\left(A_r\cap A_{r+1}\right)\right|.$$

Observe que devido ao fato de $(A_1 \cap A_{r+1}) \cup (A_2 \cap A_{r+1}) \cup \ldots \cup (A_r \cap A_{r+1})$ representar a união de r conjuntos finitos podemos, novamente, aplicar a hipótese de indução para esses conjuntos e obter:

$$\left|(A_1 \cap A_{r+1}) \cup (A_2 \cap A_{r+1}) \cup \ldots \cup (A_r \cap A_{r+1})\right| = \sum_{1 \le i_1 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{r+1}\right| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{r+1}\right| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{r-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r \cap A_{r+1}\right|.$$

Assim,

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_{r+1}\right| = \sum_{1 \le i_1 \le r+1} \left|A_{i_1}\right| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right|$$
$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}\right| + \ldots + (-1)^{r-1} \cdot \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r\right|$$
$$- \left(\sum_{1 \le i_1 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{r+1}\right| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{r+1}\right| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le r} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{r+1}\right| \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{r-2} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{r-1} \le r} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{r-1}} \cap A_{r+1}\right| + (-1)^{r-1} \cdot \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r+1}\right| \right).$$

Veja que para $2 \le k \le r$ temos:

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le r} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \le r} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{r+1}\right| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le r+1} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|.$$

Dessa forma, podemos escrever:

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_{r+1}\right| = \sum_{1 \le i_1 \le r} \left|A_{i_1}\right| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le r+1} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le r+1} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right| - \ldots$$
$$(-1)^{r-1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_r \le r+1} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{r-1}} \cap A_{i_r}\right| + (-1)^r \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r+1}\right|.$$

Isso encerra a prova do Teorema 2.3.1. □

Exemplo 2.3.2

Considere que haja quatro cartas, digamos *a, b, c* e *d*, endereçadas a quatro pessoas distintas, isto é, cada carta possui um único destinatário. Quantas são as formas de realizar a entrega dessas correspondências de modo que nenhuma das quatro cartas seja entregue ao destinatário correto?

Solução:

O total de permutações possíveis entre quatro elementos distintos é $4! = 24$. Portanto, é claro que a resposta do problema será no máximo igual a 24.

Considerando uma entrega como sendo uma distribuição arbitrária das quatro cartas entre os quatro destinatários, em que cada destinatário recebe exatamente uma das quatro cartas, podemos definir os seguintes conjuntos:

A: conjunto das entregas em que carta *a* vai para o destinatário correto.

B: conjunto das entregas em que carta *b* vai para o destinatário correto.

C: conjunto das entregas em que carta *c* vai para o destinatário correto.

D: conjunto das entregas em que carta *d* vai para o destinatário correto.

Desse modo, a resposta do problema proposto é claramente:

$$24 - |A \cup B \cup C \cup D|.$$

Aplicando o PIE para os conjuntos *A, B, C* e *D,* temos:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - \\ |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + \\ |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.\end{aligned}$$

Vamos determinar $|A|$. No conjunto *A,* a carta *a* vai para o destinatário correto, isto só pode ser feito de uma única maneira. Por outro lado, há $3!$ formas de distribuir as 3 cartas restantes entre os outros 3 destinatários. Então, $|A| = 1 \cdot 3! = 6$.

Analogamente,

$$|B| = |C| = |D| = 6.$$

Vejamos agora o valor de $|A \cap B|$. O conjunto $A \cap B$ é aquele em que as cartas *a* e *b* são entregues corretamente aos seus respectivos destinatários, mais uma vez, isto só pode ser feito de modo único. Deste modo, restaram 2 cartas e estas podem ser distribuídas de $2!$ entre os 2 destinatários remanescentes. Logo,

$$|A \cap B| = 1 \cdot 2! = 2.$$

Analogamente,

$$|A\cap C| = |A\cap D| = |B\cap C| = |B\cap D| = |C\cap D| = 2! = 2.$$

Os conjuntos $A\cap B\cap C$, $A\cap B\cap D$, $A\cap C\cap D$ e $B\cap C\cap D$ são aqueles em que 3 das quatro cartas são corretamente entregues a seus respectivos destinatários. Por outro lado, ao fazer tal distribuição teremos que entregar a quarta carta ao destinatário restante, que necessariamente será o destinatário correto dessa carta, haja visto que os 3 demais já receberam suas cartas corretamente. Essa distribuição só pode ser realizada de forma única. Assim:

$$|A\cap B\cap C\cap D| = |A\cap B\cap C| = |A\cap B\cap D| = |A\cap C\cap D| = |B\cap C\cap D| = 1! = 1.$$

Dessa forma, a resposta do problema é:

$$24 - (4\cdot 6 - 6\cdot 2 + 4\cdot 1 - 1) = 9. \qquad \square$$

O exemplo acima foi motivado por um problema mais geral proposto por Nicolaus Bernoulli (1687-1759), e posteriormente resolvido por Leonard Euler (1707-1783). O problema perguntava de quantas formas podemos distribuir n cartas destinadas a n endereços distintos de modo que nenhuma carta seja entregue no endereço correto. Tal problema ficou conhecido como *problema das cartas mal endereçadas* e sua solução está relacionada ao conceito de permutação caótica. A próxima seção tratará desse tema.

2.4 Permutação caótica ou desarranjo

Seja n um número inteiro. Considere um grupo de n objetos distintos dispostos em certa ordem. Uma permutação desse grupo é dita caótica (ou um desarranjo) se, ao reordenarmos esses objetos trocando-os de posição entre si, nenhum deles torna a ocupar sua posição original. Em geral, representa-se a quantidade de desarranjos de n elementos por D_n, com $n \geq 1$. Ademais, também definimos $D_0 = 1$.

Teorema 2.4.1

Seja n um número inteiro. A quantidade de desarranjos de n elementos distintos é dada por

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right),$$

ou ainda, na forma mais compacta:

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Demonstração do Teorema 2.4.1:

Vamos começar definindo cada conjunto A_i, em que $1 \le i \le n$, como o conjunto das permutações dos n objetos em que o *i-ésimo* deles está na posição original.

Com esta notação, a solução deste problema será dada por:

$$n! - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|.$$

Assim, aplicando o PIE para os conjuntos A^i obtemos:

$$D_n = n! - \left[\sum_{1 \le i_1 \le n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots \right.$$
$$\left. ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| \right].$$

Ou ainda, em uma forma mais compacta:

$$D_n = n! + \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^k \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| \right].$$

Vamos determinar o valor de $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|$.

Perceba que uma vez fixados os índices $i_1, i_2, ..., i_k$, tais que $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$, o conjunto $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}$ é formado pelas permutações em que os objetos das posições $i_1, i_2, ..., i_k$ estão em suas posições originais e isto só ocorre de uma única forma. Como os demais $n-k$ objetos podem ser distribuídos arbitrariamente de $(n-k)!$ maneiras nas posições restantes, podemos concluir que:

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)!.$$

Por outro lado, há $\binom{n}{k}$ escolhas possíveis para $i_1, i_2, ..., i_k$. Assim:

$$\sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} \cdot (n-k)!.$$

Daí,

$$D_n = n! + \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!\right].$$

E, desde que

$$n! = \binom{n}{0} \cdot (n-0)!,$$

podemos escrever

$$D_n = \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!\right].$$

Considerando que,

$$\binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Assim, obtemos que

$$D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Por fim, como $D_0 = 1$, a fórmula acima torna-se válida para todo número natural. □

No capítulo 5, apresentamos também a solução dada por Euler ao problema das cartas mal endereçadas.

Exemplo 2.4.2

Quatro pessoas aguardam atendimento em uma clínica médica. Todas deverão ser consultadas por dois médicos diferentes. O atendimento de ambos os médicos está marcado para iniciar às 14:00h e terminar às 15:00h. Os médicos deverão gastar, em cada atendimento, exatos 15 minutos. De quantas formas poderiam ser organizadas os horários das duas consultas?

Solução:

Considere a tabela a seguir como forma de ilustrar os possíveis horários em que podemos distribuir os quatro pacientes dadas as condições impostas pelo problema.

	Horário de Atendimento			
	14:00 – 14:15	**14:15 – 14:30**	**14:30 – 14:45**	**14:45 – 15:00**
Médico 1				
Médico 2				

Perceba que há $4!$ formas de se preencher o horário de atendimento do Médico 1, pois não há nenhuma restrição sobre ele. Contudo, uma vez montado o horário do Médico 1, note que o paciente que estiver em atendimento com ele não poderá estar em atendimento no mesmo horário com o Médico 2, ou seja, o preenchimento dos horários de atendimento do Médico 2 deverá ser uma permutação caótica do horário do Médico 1. Dessa forma, para cada horário do Médico 1, há D_4 formas de se montar o horário do Médico 2.

Como

$$D_4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9,$$

a resposta do problema é:

$$4! \cdot D_4 = 24 \cdot 9 = 216. \qquad \square$$

Uma generalização do exemplo anterior consiste em determinar a quantidade de formas em que *n* pessoas podem ser atendidas por *n* médicos em um conjunto determinado de *n* horários. Este problema, no entanto, ainda se encontra sem solução, ou seja, não se conhece uma fórmula fechada para esse valor. Como veremos, ele é igual à quantidade de quadrados latinos de ordem *n*. Discutiremos mais sobre esse assunto no próximo capítulo. Antes, veremos na próxima seção mais uma notável aplicação do PIE.

2.5 A quantidade de funções sobrejetoras entre dois conjuntos finitos

Antes de partir para o objetivo principal desta seção, vamos apresentar algumas definições pertinentes. Neste trabalho, trataremos apenas de funções entre conjuntos finitos, contudo a definição que será dada pode ser ampliada para quaisquer conjuntos.

Definição 2.5.1

Sejam A e B dois conjuntos finitos não vazios. Uma função *f* de *A* em *B,* denotada por $f: A \to B$, é um conjunto de pares ordenados *(x, y)* tais que as três seguintes condições são observadas:

- $x \in A$ e $y \in B$, $\forall (x,y) \in f$
- $\exists\, y \in B$ tal que $(x,y) \in f$, $\forall\, x \in A$;
- Se $(x,y_1) \in f$ e $(x,y_2) \in f$,então $y_1 = y_2$.

O valor de $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$ é frequentemente representado por $f(x)$ e chamado de *imagem de x pela função* f **.** O conjunto *A* é chamado de *Domínio da função* e o conjunto *B* é chamado de *Contra-domínio da função***.** O subconjunto de *B* formado por todas as imagens dos elementos do domínio é chamado de *Conjunto Imagem da função.*

Teorema 2.5.2

A quantidade de funções de *A* em *B*, em que *A* e *B* são conjuntos finitos não vazios é $|B|^{|A|}$.

Demonstração do Teorema 2.5.2:

Cada um dos $|A|$ elementos de *A* pode ser associado a um único dos $|B|$ elementos de *B*. Assim, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) temos $|B|^{|A|}$ funções distintas. $\square$

Definição 2.5.3 - Função Injetora

Sejam *A* e *B* dois conjuntos finitos. Uma função *f* de *A* em *B* é dita *injetora* quando quaisquer elementos diferentes no domínio corresponderem-se com imagens diferentes. Isto é, se $\{x_1, x_2\} \subset A$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Podemos também usar a contrapositiva da afirmação acima para definir uma função injetora, ou seja, uma função injetora é uma função com a seguinte propriedade: $\forall x_1, x_2 \in A: \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

Observe que a definição de função injetora acarreta a necessidade de que $|A| \leq |B|,$ do contrário seria impossível construir uma função injetora de *A* em *B*, pois necessariamente haveria pelo menos dois elementos de *A* com a mesma imagem.

Teorema 2.5.4

A quantidade de funções injetoras entre dois conjuntos finitos não vazios *A* e *B* é:

$$|A|! \cdot \binom{|B|}{|A|}.$$

Demonstração do Teorema 2.5.4:

Considere os conjuntos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|A|}\}$ e $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_{|B|}\}$. Veja que se $f : A \to B$ é uma função injetora, então seu conjunto imagem possui exatamente $|A|$ elementos. Fixemos uma das possíveis escolhas para o conjunto imagem, digamos $B^* = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{|A|}}\}$, em que $\{i_1, i_2, \ldots, i_{|A|}\} \subset \{1, 2, \ldots, |B|\}$. Uma função de *A* em *B,* em que *B** é o conjunto imagem dessa função, é um conjunto do tipo

$$\{(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2), \ldots, (x_{|A|}, \alpha_{|A|})\},$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|A|}$ é uma permutação dos elementos de *B**. Sabemos que a quantidade de permutações de *n* objetos é $n!$, e como $|B^*| = |A|$ concluímos que há $|A|!$ funções distintas de *A* em *B,* em que *B** é o conjunto imagem. Por fim, observando que existem $\binom{|B|}{|A|}$ escolhas possíveis para *B**, concluímos, pelo Princípio Fundamental da Contagem, que o total de funções injetoras de *A* em *B* é:

$$|A|!\cdot\binom{|B|}{|A|}.$$

Definição 2.5.5 - Função Sobrejetora

Sejam *A* e *B* dois conjuntos finitos. Uma função *f* de *A* em *B* é dita *sobrejetora* quando todo elemento de *B* é imagem de ao menos um elemento de *A*. Isto é, se $y \in B$, então $\exists\, x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Observe que a definição de função sobrejetora acarreta a necessidade de que $|A| \geq |B|$, do contrário seria impossível construir uma função sobrejetora de *A* em *B*, pois necessariamente haveria pelo menos um elemento de *B* desassociado de qualquer elemento de *A*.

O cálculo da quantidade de funções sobrejetoras de *A* em *B* não é tão elementar quanto os dos dois teoremas anteriores. Mas podemos contornar essa dificuldade aplicando o PIE. Antes, vamos a um exemplo que ilustra as ideias do próximo teorema.

Exemplo 2.5.6

Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$. Quantas são as funções sobrejetoras de *A* em *B* ?

Solução:

De acordo com o Teorema 2.5.2, sabemos que há ao todo 81 funções de *A* em *B*, uma vez que $|B|^{|A|} = 3^4 = 81$. Vamos calcular quantas dessas funções não são sobrejetoras.

Vamos começar definindo os conjuntos:

M_1: conjunto das funções *f* de *A* em *B* em que a não pertence ao conjunto imagem de f.

M_2: conjunto das funções *f* de *A* em *B* em que *b* não pertence ao conjunto imagem de f.

M_3 : conjunto das funções de *f* *A* em *B* em que *c* não pertence ao conjunto imagem de f.

Dessa forma, a quantidade de funções de *A* em *B* que não são sobrejetoras é $|M_1 \cup M_2 \cup M_3|$.

Note que, $|M_1| = 2^4$, pois, neste caso, cada um dos 4 elementos de *A* possui duas possibilidades para sua imagem. Analogamente, $|M_2| = |M_3| = 2^4$.

Por outro lado, $|M_1 \cap M_2| = 1^4$, pois, neste caso, cada elemento de *A* terá apenas *c* como possibilidade de imagem. Analogamente, $|M_1 \cap M_3| = |M_2 \cap M_3| = 1^4$.

Por fim, $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 0^4$, pois, neste caso, os elementos de *A* não possuem possibilidade de imagem.

Assim,

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 1^4 + 0 = 45.$$

Logo, a quantidade de funções sobrejetoras de *A* em *B* é : 81 – 45 = 36.□

Teorema 2.5.7

Sejam *A* e *B* dois conjuntos finitos não vazios tais que $|A| \geq |B|$. A quantidade de funções sobrejetoras de *A* em *B* é dada por:

$$\sum_{k=0}^{|B|} (-1)^k \cdot \binom{|B|}{k} (|A| - k)!.$$

A demonstração que segue faremos uso do princípio de inclusão e da exclusão que é totalmente acessível aos alunos a partir do segundo ano de ensino médio, pois faremos uso de técnicas de contagem vistas nesse período.

Demonstração do Teorema 2.5.7:

Considere os conjuntos $A = \{a_1, a_2, ..., a_{|A|}\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_{|B|}\}$ e M_k, em que M_k e definido como o conjunto das funções de *A* em *B* em que b_k não é imagem de nenhum dos elementos *A,* para $(1 \leq k \leq |B|)$.

Assim, a demonstração do Teorema 2.5.7 consiste em calcular

$$|B|^{|A|}-\left|M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_{|B|}\right|.$$

Seja k um número natural, tal que $1\leq k\leq|B|$. Perceba que cada um dos conjuntos do tipo $M_{j_1}\cap\ldots\cap M_{j_k}$, com $1\leq j_1<\ldots<j_k\leq|B|$, terá a mesma cardinalidade $(|B|-k)^{|A|}$, pois cada elemento de A terá $|B|-k$ possíveis imagens. Como há $\binom{|B|}{k}$ possíveis escolhas para $(j_1,j_2,\ldots,j_k)$ segue que:

$$\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq|B|}\left|M_{j_1}\cap\ldots\cap M_{j_k}\right|=\binom{|B|}{k}\cdot(|B|-k)^{|A|}.$$

Assim, aplicando o PIE para os conjuntos $M_1,M_2,\ldots,M_{|B|}$ obtemos:

$$\left|M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_{|B|}\right|=\binom{|B|}{1}\cdot(|B|-1)^{|A|}-\binom{|B|}{2}\cdot(|B|-2)^{|A|}+\ldots$$
$$+(-1)^{k-1}\cdot\binom{|B|}{k}\cdot(|B|-k)^{|A|}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{|B|}{|B|}\cdot(|B|-|B|)^{|A|}.$$

Isto é, $\left|M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_{|B|}\right|=\sum_{k=1}^{|B|}(-1)^{k-1}\cdot\binom{|B|}{k}\cdot(|B|-k)^{|A|}$.

Deste modo, a quantidade de funções sobrejetoras de A em B é dada por:

$$|B|^{|A|}-\sum_{k=1}^{|B|}(-1)^{k-1}\cdot\binom{|B|}{k}\cdot(|B|-k)^{|A|}=|B|^{|A|}+\sum_{k=1}^{|B|}(-1)^{k}\cdot\binom{|B|}{k}\cdot(|B|-k)^{|A|}.$$

Desde que $|B|^{|A|}=(-1)^0\cdot\binom{|B|}{0}(|B|-0)^{|A|}$, podemos reescrever a expressão acima na forma:

$$\sum_{k=0}^{|B|}(-1)^{k}\cdot\binom{|B|}{k}\cdot(|B|-k)^{|A|}.$$

$\square$

3 RETÂNGULOS E QUADRADOS LATINOS

Registros apontam que o primeiro matemático a publicar um texto sobre quadrados latinos foi Leonhard Euler em 1783. A expressão *quadrado latino* deveu-se ao fato de Euler (DELAHAYE) ter usado letras latinas para os seus quadrados.

Euler teria sido desafiado com o seguinte problema:

"Suponhamos que seis regimentos fornecem seis oficiais de patentes diferentes. Por exemplo, um general, um coronel, um capitão, um major, um tenente e um alferes. Será possível colocar os oficiais numa disposição quadrangular seis por seis, para que em cada linha e cada coluna não haja nenhuma repetição de patente nem de regimento?"

Para tentar resolver esse problema, Euler definiu o que hoje chamamos de quadrados latinos e, a partir destes, introduziu o conceito de quadrados latinos ortogonais, ou quadrados greco-latinos. Euler sabia que caso encontrasse um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6, o problema estaria resolvido. Mas, Euler não obteve sucesso e lançou a conjectura de que não existiriam quadrados latinos ortogonais de ordem $n = 4k + 2$, com $k \in \mathbb{N}$. De fato, em 1901, o matemático francês Gaston Tarry mostrou que realmente não existem quadrados greco-latinos de ordem 6, o que vinha a dar algum crédito à conjectura de Euler. Contudo, em 1959, os matemáticos Bose, Shrikhande e Parker (DELAHAYE) provaram que a conjectura estava errada, mostrando que é possível encontrar quadrados latinos ortogonais para qualquer ordem $n = 4k + 2$ com $k > 1$. O resultado obtido por Bose, Shrikhande e Parker (BOSE, SHRIKHANDE e AND PARKER, 1960) foi matéria de primeira página do The New York Times (1959), e também a capa da revista Scientific American (1959). Mesmo hoje, há várias perguntas centrais em torno desse tema que ainda se encontram sem resposta.

Neste capítulo, iremos introduzir os conceitos de retângulos e quadrados latinos. Vamos discutir alguns importantes resultados, sobretudo no que se refere à quantidade de retângulos e quadrados latinos que podem ser construídos com um dado conjuntos de símbolos.

3.1 Definição e existência de retângulos e quadrados latinos

Definição 3.1.1

Sejam *k* e *n* números inteiros positivos. Um retângulo latino do tipo $k \times n$, em que $k \leq n$, é uma quádrupla (M, N, P, Q) em que *M*, *N* e *P* são conjuntos tais que

$|M| = k,\ |N| = |P| = n$ e Q é uma aplicação $Q : M \times N \to P$ tal que, fixados $j \in N$ e $p \in P$ a equação $Q(i, j) = p$ apresenta, no máximo, uma solução para $i \in M$.

É possível visualizar um retângulo latino do tipo $k \times n$ como uma matriz $k \times n$ cujas entradas são elementos de um conjunto *P* de cardinalidade n. Nessa matriz, todo elemento de *P* aparece disposto em cada linha exatamente uma vez e em cada coluna no máximo uma vez.

São exemplos de retângulos latinos:

@	∞	¥	◊	†
¥	◊	@	†	∞
†	@	∞	¥	◊

Retângulo Latino 3 x 5

1	2	3	4	5	6
6	3	1	5	2	4

Retângulo Latino 2 x 6

Definição 3.1.2

Um quadrado latino é um retângulo latino em que $k = n$.

Comumente um quadrado latino $n \times n$ é chamado de quadrado latino de ordem n.

São exemplos de quadrados latinos:

@	∞	¥
∞	¥	@
¥	@	∞

Quadrado Latino 3×3

2	3	6	5	1	4
3	4	1	6	2	5
1	2	5	4	6	3
6	1	4	3	5	2

5	6	3	2	4	1
4	5	2	1	3	6

Quadrado Latino 6×6

Deste ponto em diante, faremos uso apenas dos elementos do conjunto $\{1,2,...,n\}$ como elementos de entrada da matriz que representa os retângulos latinos do tipo $k \times n$.

Definição 3.1.3 – Quadrados latinos ortogonais

Dois quadrados latinos de mesma ordem são denominados ortogonais se os pares ordenados, formados por elementos em posições correspondentes, forem todos distintos.

A seguir temos um par quadrados latinos ortogonais.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	3	2
2	1	3
3	2	1

De fato, os 9 pares ordenados são: (1,1); (2,3); (3,2); (2,2); (3,1); (1,3); (3,3); (1,2) e (2,1). E, conforme podemos constatar eles são todos distintos.

É importante observar que para qualquer inteiro positivo *n* existe um quadrado latino $n \times n$**.** De fato, podemos proceder da seguinte forma para obter um quadrado latino de ordem *n***.**

Vamos dispor os *n* elementos 1, 2, 3, ..., *n* nessa ordem na primeira linha. Na segunda linha, dispomos os elementos na ordem 2, 3, ..., *n*, 1. Isto é, deslocamos a primeira linha uma casa para a esquerda e colocamos o elemento 1 na última posição. Seguindo esse formato, teríamos na *j-ésima* linha os elementos dispostos na seguinte ordem: j, $j+1$, ..., n, 1, 2, ..., $j-1$. Finalmente, a última linha teria a seguinte configuração n, 1, 2, ..., $n-1$.

Abaixo, temos uma ilustração:

1	**2**	**3**	**...**	**n − 2**	**n − 1**	**n**

2	**3**	**4**	**...**	**n − 1**	**n**	**1**
$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$
j	**j+1**	**j+2**	**...**	**j − 3**	**j − 2**	**j − 1**
$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$
n	**1**	**2**	**...**	**n − 3**	**n − 2**	**n − 1**

Além disso, é possível obter vários quadrados latinos a partir de um quadrado pré-fixado, para isso, basta permutar entre si suas linhas ou colunas ou ainda pode-se renumerar seus elementos.

Outro resultado bastante importante é o fato de que qualquer retângulo latino pode ser completado até se tornar uma quadrado latino. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.4

Observe o retângulo latino do tipo 3×6 abaixo.

3	6	2	5	1	4
2	5	1	4	6	3
1	4	6	3	5	2

Ele pode ser expandido para um quadrado latino de ordem 6, conforme a ilustração a seguir.

3	6	2	5	1	4
2	5	1	4	6	3
1	4	6	3	5	2
5	2	4	1	3	6
6	3	5	2	4	1
4	1	3	6	2	5

Antes de iniciar a demonstração desse fato, convém algumas considerações.

Definição 3.1.5

Considere o conjunto $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, em que cada A_i, para $1 \leq i \leq n$, é um conjunto finito não vazio.

Um *sistema de representantes distintos* (*SRD*) do conjunto $\mathcal{A}$, ou associado aos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, é um conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tal que:

- $a_i \in A_i$, e
- dado $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ se $i \neq j$ então $a_i \neq a_j$.

Exemplo 3.1.6

Sejam $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ e $A_3 = \{1, 4\}$. Um *SRD* de $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ é $\{2, 3, 1\}$.

Exemplo 3.1.7

Sejam $A_1 = \{1, 2, 4\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{2, 3\}$ e $A_5 = \{1, 2\}$.

Não é possível obter um *SRD* associado aos conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, pois necessariamente teremos de escolher $a_3 = 3$ e, dessa forma, teremos apenas os valores 1 e 2 para distribuir entre a_2, a_4 e a_5, o que , pelo princípio da casa dos pombos, não pode ser feito sem que algum dos valores seja repetido.

Teorema 3.1.8 (HALL, 1935)

Seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, em que cada A_i, com $i \in \{1, 2, ..., n\}$, é um conjunto finito não vazio. Então, existe um *SRD* para $\mathcal{A}$ se, e somente se, para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tivermos $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}\right| \geq k$ quaisquer que sejam $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$.

Demonstração do Teorema 3.1.8:

A primeira parte da prova consiste em mostrar que a existência de um *SRD*, digamos $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, implica $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}\right| \geq k$, com $k \in \{1, 2, ..., n\}$ e $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$.

De fato, seja $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ uma escolha arbitrária de *k* elementos de $\mathcal{A}$, com $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Seja $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um *SRD* para $\mathcal{A}$. Podemos selecionar um conjunto de *k* elementos de *D*, digamos $E = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$, tal que tenhamos $a_{i_j} \in A_{i_j}$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Pela definição de *SRD*, todos os elementos de *D* são distintos entre si e como $E \subset D$ segue que todos os *k* elementos de *E* também são distintos entre si, daí podemos concluir que $|E| = k$. Por outro lado, como cada elemento de *E* pertence a pelo menos um dos conjuntos $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ segue que $E \subset A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}$, assim $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right| \geq |E| = k$. E isto encerra a primeira parte da prova do Teorema 3.1.8.

Para a segunda parte, isto é, provar que se $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right| \geq k$, então existe um *SRD* para o conjunto $\mathcal{A}$, em que $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ é uma escolha arbitrária de *k* elementos de $\mathcal{A}$ (com $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$), iremos aplicar o princípio de indução finita sobre *n*.

O resultado é trivialmente verdadeiro quando $n = 1$, pois A_1 deve conter pelo menos um elemento e tal elemento pode ser escolhido para o *SRD*. Assumindo que o resultado seja válido para todo *r*, tal que $0 < r < n$, vamos provar que ele também é válido para $r = n$.

Vamos dividir o problema em dois casos.

1°Caso: Suponhamos que para qualquer escolha de *k* elementos de $\mathcal{A}$, digamos $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_{i_k}$, tenhamos $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right| \geq k + 1$, em que $1 \leq k \leq n - 1$. Deste modo, segue, pelo princípio da casa dos pombos, que existe um $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que A_{i_j} possui pelo menos 2 elementos. Sem perda de generalidade, vamos dizer que tal conjunto seja A_1 e destaquemos um de seus elementos, digamos que $a_1 \in A_1$.

Pode ser que, eventualmente, a_1 também pertença a algum outro elemento de $\mathcal{A}$, nesse caso vamos retirar a_1 desses conjuntos e vamos passar a considerar os seguintes $n - 1$ conjuntos: $A_2 \setminus \{a_1\}$, $A_3 \setminus \{a_1\}$, ..., $A_n \setminus \{a_1\}$. É claro que nenhum desses novos conjuntos é vazio, pois do contrário isso negaria a hipótese (em particular, no caso $k=1$) de que para qualquer escolha de *k* elementos de $\mathcal{A}$ devemos ter $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right| \geq k+1$.

Agora, perceba que a união de qualquer escolha de *k* dos conjuntos $A_2 \setminus \{a_1\}$, $A_3 \setminus \{a_1\}$, ..., $A_n \setminus \{a_1\}$, sendo $1 \leq k < n$, terá de ter pelo menos *k* elementos, isto é, necessariamente devemos ter $\left|A_{i_1} \setminus \{a_1\} \cup A_{i_2} \setminus \{a_1\} \cup \ldots \cup A_{i_k} \setminus \{a_1\}\right| \geq k$, uma vez que $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right| \geq k+1$ e retiramos no máximo um elemento dessa união.

Assim, aplicando a hipótese de indução, podemos assumir que o conjunto $A' = \{A_2 \setminus \{a_1\}, A_3 \setminus \{a_1\}, \ldots, A_n \setminus \{a_1\}\}$ admite um *SRD*, digamos $\{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, com $a_j \in A_j \setminus \{a_1\}$. Uma vez que cada $a_j \in \{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é diferente de a_1, podemos concluir que o conjunto $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ admite o seguinte *SRD:* $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$.

2°Caso: Suponha agora que para alguma escolha de *k*, com $1 \leq k < n$, existem elementos $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ de $\mathcal{A}$ tais que $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right| = k$ (note que a hipótese do Teorema 3.1.8 não permite tal cardinalidade seja menor do que *k*). Como $k \leq n-1$, podemos aplicar a hipótese de indução para os conjuntos $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ e obter um *SRD*, digamos $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$. Vamos então tomar os $n-k$ conjuntos restantes e retirar de cada um deles os elementos do conjunto $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$. É claro que nenhum desses novos $n-k$ conjuntos formados é vazio, pois se houvesse um tal conjunto ele não possuiria nenhum elemento diferente dos elementos de $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ e nesse caso a união de $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ com esse conjunto teria cardinalidade *k*, que é menor do que $k+1$ e isso estaria em desacordo com a hipótese do Teorema 3.1.8. Note também que, devido à mesma hipótese, a escolha de quaisquer p desses novos $n-k$ conjuntos deverá ter pelo menos *p* elementos. E, como $1 \leq p < n$, podemos aplicar novamente a hipótese de indução, para obter um *SRD* que terá $n-k$ elementos, digamos $\{a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+2}}, \ldots, a_{i_n}\}$ e todos diferentes dos *k* elementos de $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$. Dessa forma, podemos obter $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+2}}, \ldots, a_{i_n}\}$ como *SRD* de $\mathcal{A}$.

E com isto, encerramos a segunda e última parte da prova. $\square$

Observe que, de acordo com o Teorema 3.1.8, o conjunto $\mathcal{A}$ do Exemplo 3.1.7 não possui *SRD* pelo fato de que para $k=4$ podemos tomar os conjuntos A_2, A_3, A_4 e A_5 para os quais obtemos $|A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = 3$ que é menor do que 4.

Teorema 3.1.9

Um retângulo latino do tipo $k \times n$, em que $1 \leq k < n$, pode ser expandido para um outro retângulo latino do tipo $(k+1) \times n$ pelo acréscimo de uma linha.

Demonstração do Teorema 3.1.9

Em qualquer retângulo latino $k \times n$, com $1 \leq k < n$, cada coluna possui *k* elementos distintos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Seja A_j, com $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o conjunto dos $n-k$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não aparecem na coluna *j*. Para provar o Teorema 3.1.9, é suficiente mostrar que existe um *SRD* associado aos A_j, uma vez que, por definição, o elemento $a_j \in A_j$ não aparece na coluna *j*. Por outro lado, para provar a existência de um tal *SRD* devemos, de acordo com o Teorema 3.1.8, mostrar que qualquer escolha de *p* dos conjuntos A_j, digamos $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$, é tal que $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_p}\right| \geq p$, em que $1 \leq p \leq n$. Vamos trabalhar com a hipótese contrária, isto é, vamos supor que exista uma escolha de *p* conjuntos A_j, nomeados como $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$, para os quais tenhamos $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_p}\right| \leq p-1$ e mostrar que isso nos leva a uma contradição.

Considere uma escolha de quaisquer *p* conjuntos A_j, descritos como acima. Note que $|A_j| = n-k$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deste modo concluímos que $\sum_{j=1}^{p} \left|A_{i_j}\right| = p \cdot (n-k)$, em que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$. Suponha agora que tivéssemos $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_p}\right| \leq p-1$, isto significaria, de acordo com o princípio da casa dos pombos, que algum elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pertenceria a pelo menos $n-k+1$ dos conjuntos A_j. Seja *x* um desses possíveis elementos.

Cada elemento do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ aparece exatamente uma vez em cada uma das *k* linhas do retângulo latino. Assim, existem *k* colunas nas quais o elemento *x* aparece exatamente uma vez e existem $n-k$ colunas nas quais ele não aparece. Deste modo, o elemento *x* pertence a exatamente $n-k$ dos conjuntos A_j e isto contraria a nossa suposição de que $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_p}\right| \leq p-1$. Logo, devemos ter $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_p}\right| \geq p$ para qualquer *p,* tal que $1 \leq p \leq n$.

Deste modo, podemos obter um *SRD* associado aos A_j e esse *SRD* determina uma possível escolha para a $(k+1)$*-ésima* linha do retângulo latino $k \times n$ que queríamos completar. □

Colorário 3.1.10

Todo retângulo latino $k \times n$, em que $0 < k < n$, pode ser completado com $n-k$ linhas de modo a se tornar um quadrado latino de ordem *n***.**

3.2 Da quantidade de retângulos e quadrados latinos

Saber quantas são as formas de se preencher um quadrado latino de ordem *n*, com um dado conjunto de *n* símbolos, ainda é um problema em aberto. Na verdade, até o momento sabe-se com exatidão apenas quantos são os quadrados latinos de ordem até 11. A respeito da quantidade de quadrados latinos de ordem 12, 13, 14 e 15 tem-se uma aproximação usando métodos probabilísticos. O problema de se determinar a quantidade retângulos latinos do tipo $k \times n$, com *k* pequeno, poderia parecer mais acessível, porém, mesmo este tem se mostrado de alta dificuldade.

A partir de agora, iremos denotar a quantidade de retângulos latinos do tipo $k \times n$ por *L(k, n).*

Teorema 3.2.1

Seja *n* um número natural, vale que:

a) $L(1, n) = n!$

b) $L(2, n) = n! \cdot D_n$, em que D_n é a quantidade de desarranjos de *n* elementos

c) $L(3,\ n) = n!\cdot\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} \cdot D_{n-k} \cdot D_k \cdot U_{n-2k}$, em que $U_0 = D_0 = 1$, $U_1 = D_1 = 0$ e

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \text{ para } n > 1.$$

Veremos, no capítulo 4 que o valor de U_n, definido na parte *c,* está profundamente relacionado à solução do chamado Problema de Lucas.

Demonstração do Teorema 3.2.1:

Faremos a demonstração dos dois primeiros itens. A demonstração do item *c* pode ser encontrada em (MOSER, 1982) e em (PRANESACHAR, 1982) e não colocamos aqui por envolver conceitos e técnicas que vão além dos objetivos deste trabalho.

Com efeito, um retângulo latino do tipo $1\times n$ contém *n* elementos distintos distribuídos arbitrariamente em sua única linha. Cada permutação desses elementos corresponde a um retângulo latino distinto. Deste modo, há $n!$ retângulos latinos do tipo $1\times n$.

Em relação aos retângulos latinos do tipo $2\times n$, sabemos que há $n!$ permutações dos elementos da primeira linha. Para cada permutação desses elementos, os *n* elementos da segunda linha devem formar um desarranjo e sabemos que isto pode ocorrer de D_n formas. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que há $n!\cdot D_n$ retângulos latinos do tipo $2\times n$. □

Exemplo 3.2.2

Vamos aplicar a fórmula do item *c* do Teorema 3.2.1 para determinar a quantidade de quadrados latinos de ordem 4.

Basta perceber que $L(3,\ 4) = L(4,\ 4)$. De fato, uma vez determinado de quantas formas podemos preencher as 3 primeiras linhas de um retângulo latino 3×4, a quarta linha será preenchida de modo único, pois em cada coluna teremos exatamente 3 dos quatro valores possíveis. Passemos às contas:

$$L(3,\ 4) = 4!\cdot\left(\binom{4}{0}\cdot D_4 \cdot D_0 \cdot U_4 + \binom{4}{1}\cdot D_3 \cdot D_1 \cdot U_2 + \binom{4}{2}\cdot D_2 \cdot D_2 \cdot U_0\right).$$

Ora,

$$D_1 = 1!\left(1 - \frac{1}{1!}\right) = 0$$

$$D_2 = 2!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = 1$$

$$D_3 = 3!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 2$$

$$D_4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$$

$$U_2 = \frac{4}{4}\binom{4}{0}(2)! - \frac{4}{3}\binom{3}{1}(1)! + \frac{4}{2}\binom{2}{2}(0)! = 0$$

$$U_4 = \frac{8}{8}\binom{8}{0}(4)! - \frac{8}{7}\binom{7}{1}(3)! + \frac{8}{6}\binom{6}{2}(2)! - \frac{8}{5}\binom{5}{3}(1)! + \frac{8}{4}\binom{4}{4}(0)! = 2.$$

Logo, $L(3,\ 4) = 24 \cdot (1 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) = 576.$

E assim concluímos que: $L(4,\ 4) = 576.$ □

Definição 3.2.3

Um retângulo latino reduzido do tipo $k \times n$, em que $1 \leq k \leq n$, é um retângulo latino em que a primeira linha é $(1, 2, \ldots, n)$ e a primeira coluna é $(1, 2, \ldots, k)^T$.

Exemplo 3.2.4

Abaixo, temos um retângulo latino reduzido do tipo 3×6.

1	2	3	4	5	6
2	5	1	3	6	4
3	6	5	2	4	1

A quantidade de retângulos latinos reduzidos do tipo $k \times n$ será, a partir de agora, representada por $l(k,\ n)$. Não é difícil perceber que podemos expressar $L(k,\ n)$ em função de $l(k,\ n)$. De fato, o teorema seguinte nos fornece uma relação entre tais números.

Teorema 3.2.5

Sejam $L(k,\ n)$ e $l(k,\ n)$ respectivamente as quantidade de retângulos latinos e a quantidade de retângulos latinos reduzidos, com $1 \le k < n$, então:

$$L(k,n) = \frac{n! \cdot (n-1)!}{(n-k)!} \cdot l(k,n).$$

Corolário 3.2.6

$$L(n,n) = n! \cdot (n-1)! \cdot l(n,n).$$

Demonstração do Teorema 3.2.5

Para o caso em $k = 1$, observe que existem $n!$ retângulos latinos $1 \times n$ e somente um deles é reduzido. Dessa forma, $L(1,n) = n! = \frac{n! \cdot (n-1)!}{(n-1)!} \cdot l(1,n)$.

Para o que segue, considere $k \ge 2$.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os retângulos latinos do tipo $k \times n$. Deste modo, podemos afirmar que $L(k,n) = |\mathcal{A}|$. Agora, considere $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ como subconjuntos de $\mathcal{A}$ definidos da seguinte forma:

$\mathfrak{B}$: conjunto de todos os retângulos latinos em que o primeiro elemento da primeira linha é 1.

$\mathfrak{C}$: conjunto de todos os retângulos latinos em que a primeira coluna é $(1,2,...,k)^T$.

$\mathfrak{D}$: conjunto de todos os retângulos latinos reduzidos.

Vamos obter uma relação entre $|\mathcal{A}|$ e $|\mathfrak{B}|$. Para tanto, considere o seguinte algoritmo que permite obter elementos de $\mathfrak{B}$ a partir de transformações nos elementos de $\mathcal{A}$.

- Fixe um elemento de $\mathcal{A}$, digamos A_1, e identifique o valor da entrada que ocupa a primeira linha e primeira coluna de A_1. Seja x o valor dessa entrada.
- Substitua por 1 todas as entradas de A_1 que são iguais a x e vice-versa, ou seja, permute o símbolo 1 com o x.

Dessa forma, o retângulo latino A_1 será transformado de modo único em um elemento de $\mathfrak{B}$. Por outro lado, para cada elemento de $\mathfrak{B}$, existem exatamente n

elementos de $\mathcal{A}$ que podem gerá-lo, uma vez que para realizar a operação inversa há *n* valores distintos para *x.* Assim, concluímos que $|\mathcal{A}| = n \cdot |\mathcal{B}|$

Agora, vamos relacionar $|\mathcal{B}|$ e $|\mathcal{C}|$. Seja B_1 um elemento de $\mathcal{B}$, identifique os valores de entrada da primeira coluna de B_1. Seja $(1, x_2, x_3, ..., x_k)^T$ a primeira coluna de B_1, em que, em que $x_j \in \{2, 3, ..., n\}$ e $j \in \{2, 3, ..., k\}$. Aplique o seguinte algoritmo à B_1:

- Em todas as entradas de B_1, permute os valores iguais a x_j com *j.*

Dessa forma, B_1 se transformará, de modo único, em um elemento de $\mathcal{C}$ e aplicando esse algoritmo aos demais elementos de $\mathcal{B}$ obteremos o conjunto $\mathcal{C}$. Assim, considerando que há $\binom{n-1}{k-1} \cdot (k-1)!$ possíveis escolhas para $(1, x_2, x_3, ..., x_k)^T$, concluímos que $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}| \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot (k-1)!$, ou seja:

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}| \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!}.$$

Vamos agora estabelecer uma relação entre $|\mathcal{C}|$ e $|\mathcal{D}|$. Fixe um elemento de $\mathcal{C}$, digamos C_1. Mantenha fixa a primeira coluna de C_1 e reordene as $n-1$ colunas restantes de forma que a primeira linha do novo retângulo obtido seja $(1, 2, 3, ..., n)$, note que, dessa forma, transformamos C_1, de modo único, em um elemento de $\mathcal{D}$, digamos D_1. É claro que se fizermos o mesmo com os demais elementos de $\mathcal{C}$ iremos obter o conjunto dos retângulos latinos reduzidos, isto é, obteremos o conjunto $\mathcal{D}$. Observando que há $(n-1)!$ permutações das $n-1$ colunas de Δ_1, concluímos que $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}| \cdot (n-1)!$.

Por fim, a definição de $\mathcal{D}$ nos permite afirmar que $|\mathcal{D}| = l(k, n)$. Deste modo, concluímos que $|\mathcal{A}| = n \cdot (n-1)! \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \cdot l(k, n)$, ou seja:

$$|\mathcal{A}| = n! \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \cdot l(k, n). \qquad \square$$

Certamente o esforço computacional para determinar o valor de *l(k, n)* é reduzido quando comparado ao de *L(k, n).* Contudo, mesmo o valor de *l(k, n)* tem se mostrado um desafio, de forma que muito pouco se sabe a respeito de retângulos latinos com mais de 4 linhas. Entretanto, a partir dos resultados do Teorema 3.2.1 é possível mostrar, conforme encontramos em (RIORDAN, 1958), que:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{L(1,n)}{(n!)} = e^{0}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{L(2,n)}{(n!)^2} = e^{-1}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{L(3,n)}{(n!)^3} = e^{-3}$

A partir das observações expostas nos itens acima, conjecturou-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{L(k,n)}{(n!)^k} = e^{-\binom{k}{2}}$ e, de fato, Kaplansky e Erdös (I. KAPLANSKY, P. ERDÖS, 1946) mostraram que tal conjectura é verdadeira para $k < (\log n)^{\frac{3}{2}}$. Posteriormente, Yamamoto (YAMAMOTO, 1951) ampliou o limite superior de *k,* ao provar que $\lim_{n\to\infty} \frac{L(k,n)}{(n!)^k} = e^{-\binom{k}{2}}$ é válida para $k < n^{\frac{1}{3}}$.

A seguir, apresentaremos duas tabelas, a primeira mostra os valores conhecidos de $l(n,n)$, a segunda apresenta alguns valores conhecidos para $l(k,n)$.

N	***l(n,n)***	**Referências**
1	1	
2	1	
3	1	
4	4	
5	56	L. Euler
6	9408	M. Frolov
7	16942080	A. Sade
8	535281401856	M. B. Wells
9	377597570964258816	S. E. Bammel e J. Rothstein

10	7580721483160132811489280	B. D. McKay e E. Rogoyski
11	5363937773277371298119673540771840	B. D. McKay e I. M. Wanless

n	*k*	*l(k, n)*	*n*	*k*	*l(k, n)*
1	1	1	9	1	1
2	1	1		2	16687
	2	1		3	103443808
3	1	1		4	207624560256
	2	1		5	112681643083776
	3	1		6	12952605404381184
4	1	1		7	224382967916691456
	2	3		8	377597570964258816
	3	4		9	377597570964258816
	4	4	10	1	1
5	1	1		2	148329
	2	11		3	154999232
	3	46		4	147174521059584
	4	56		5	746988383076286464
	5	56		6	870735405591003709440
6	1	1		7	177144296983054185922560
	2	53		8	4292039421591854273003520
	3	1064		9	7580721483160132811489280
	4	6552		10	7580721483160132811489280
	5	9408	11	1	1
	6	9408		2	1468457
7	1	1		3	798030483328
	2	309		4	143968880078466048
	3	35792		5	7533492323047902093312
	4	1293216		6	96299552373292505158778880
	5	11270400		7	240123216475173515502173552640
	6	16942080		8	86108204357787266780858343751680
	7	16942080		9	2905990310033882693113989027594240
8	1	1		10	5363937773277371298119673540771840
	2	2119		11	5363937773277371298119673540771840
	3	1673792			
	4	420909504			
	5	27206658048			
	6	335390189568,			
	7	535281401856			
	8	535281401856			

Os valores das tabelas acima foram obtidos em (B. D. MCKAY AND I. M. WANLESS, 2005) e na enciclopédia virtual das sequências no endereço www.*oeis.org*. Tal sequência está registrada sob o código A000315.

4. LEMAS DE KAPLANSKY

Neste capítulo iremos tratar das ferramentas introduzidas por Kaplansky (KAPLANSKY, 1943) para solucionar o famoso problema de Lucas. Antes, porém, convém uma seção para apresentar um importante conceito da análise combinatória.

4.1. Combinações completas

Geralmente definimos as combinações simples de *n* elementos distintos tomados *r* a *r*, e usualmente denotadas por $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$, da seguinte forma: dados *n* e *r* números naturais, com $0 \le r \le n$, o número $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, representa a quantidade de formas de escolhermos *r* objetos distintos de um grupo de *n* objetos distintos dados. E, quando $r > n$, definimos $C_{n,r} = 0$.

Mas, e se os *r* objetos escolhidos não forem necessariamente distintos? Nesse caso, trata-se das combinações completas (também chamadas de "combinações com repetição") de *r* objetos (distintos ou não) escolhidos entre *n* objetos distintos.

Esse problema equivale a determinar de quantas formas podemos separar *r* objetos em *n* classes distintas (podendo, eventualmente, algumas dessas classes permanecerem vazias).

Vamos representar essa quantidade por $CR_{n,r}$ e determinar seu valor.

Teorema 4.1.1

A quantidade $CR_{n,r}$ de combinações completas é dada por:

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r},$$

em que *n* e *r* são números naturais e convencionamos $CR_{n,0} = 1$.

Demonstração do teorema 4.1.1:

Perceba que se $r = 1$, nenhuma repetição é possível, assim podemos colocar esse objeto em qualquer uma das *n* classes, ou seja, $CR_{n,1} = n = \binom{n+1-1}{1}$. Por outro lado, se $n = 1$, então só há uma possibilidade para dispor os *r* objetos, daí $CR_{1,r} = 1 = \binom{1+r-1}{r}$.

Agora, considere $r > 1$ e fixe uma dada classe, podemos dividir o valor de $CR_{n,r}$ em dois casos disjuntos.

1°Caso: A classe fixada conterá algum elemento. Neste caso, a classe escolhida deverá ter pelo menos 1 elemento. Assim, restarão $r-1$ elementos para serem distribuídos em *n* classes**.**

Ou seja, haverá $CR_{n,r-1}$ possibilidades.

2° Caso: A classe fixada não conterá nenhum elemento. Neste caso, teremos *r* elementos para serem distribuídos em $n-1$ classes**.** Ou seja, haverá $CR_{n-1,r}$ possibilidades.

Assim: $CR_{n,r} = CR_{n-1,r} + CR_{n,r-1}$.

Usando a recorrência acima juntamente com indução finita sobre *n*, vamos provar que $CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r}$.

De fato, para $n=1$ teremos $CR_{1,r} = \binom{r}{r} = 1$, resultado que está em perfeito acordo com nossas discussões anteriores.

Vamos assumir que para $n \leq k$ o resultado seja verdadeiro e analisar o que ocorre quando $n = k+1$. Nessa hipótese, teremos:

$$CR_{k+1,r} = CR_{k,r} + CR_{k+1,r-1}.$$

Por outro lado, $CR_{k+1,r-1} = CR_{k+1,r-2} + CR_{k,r-1}$, e prosseguindo dessa forma, chegaremos a:

$$CR_{k+1,r} = CR_{k,r} + CR_{k,r-1} + CR_{k,r-2} + \ldots + CR_{k,2} + CR_{k+1,1}.$$

Assim,

$$CR_{k+1,r} = \binom{k+r-1}{r} + \binom{k+r-2}{r-1} + \binom{k+r-3}{r-2} + \ldots + \binom{k+1}{2} + \underbrace{\binom{k}{1} + \binom{k-1}{0}}_{CR_{k+1,1}=k+1}.$$

Aplicando o Teorema das diagonais do Triângulo de Pascal teremos:

$$CR_{k+1,r} = \binom{k+r}{r}.$$

E isto encerra a prova do Teorema 4.1.1. □

Uma forma alternativa e muito útil de se provar o Teorema 4.1.1 é associar $CR_{n,r}$ à quantidade de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r.$$

De fato, cada x_i corresponde a uma das *n* classes, e devemos escrever o número *r* como a soma de *n* parcelas inteiras e não negativas.

Vamos a um exemplo no qual ilustraremos uma forma de determinar a quantidade de soluções desse tipo de equação sem aplicar a fórmula para $CR_{n,r}$ deduzida acima.

Exemplo 4.1.2 - Admita que uma loja de calçados possua em seu estoque três modelos de tênis e uma pessoa deseja comprar 5 pares de tênis. De quantas formas essa pessoa poderá realizar sua compra ?

Solução: A equação associada a esse problema é:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5.$$

Em que, x_i é a quantidade de pares de tênis do modelo i, com $1 \leq i \leq 3$.

Vamos esquematizar as soluções da equação acima com o uso dos símbolos * e /. Teremos cinco símbolos * para representar os cinco pares de tênis que serão comprados e teremos dois símbolos / para separá-los em três classes de objetos. Por exemplo, uma a solução $(x_1, x_2, x_3) = (1,2,2)$ pode ser esquematizada da seguinte forma:

*/**/**

Outra solução seria (3,0,2) cujo esquema seria:

***//**

Já a solução (5,0,0) teria o seguinte esquema:

*****//

Por outro lado, os esquemas:

/*****/

*/****/

//***

correspondem, respectivamente, às soluções: (0,5,0), (1,4,0) e (1,1,3).

Constatamos que existe uma relação biunívoca entre as permutações dos símbolos **/**/* e as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Dessa forma, a quantidade de soluções da equação será a quantidade de permutações, com elementos repetidos, dos 7 símbolos **/**/*, isto é,

$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$, note-se que este resultado está de acordo com o Teorema 4.1.1, uma vez que $CR_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$. □

Em geral, uma esquematização da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = r$ envolve *r* símbolos * e $n-1$ símbolos /, temos portanto $n+r-1$ símbolos para permutar (com repetição de *r* símbolos * e $n-1$ símbolos /). Como sabemos, a quantidade de tais permutações é:

$$P_{n+r-1}^{n-1,r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\cdot r!} = CR_{n,r} .$$

4.2. Lemas de Kaplansky

Nesta seção iremos apresentar os lemas de Kaplansky, mas suas demonstrações serão deixadas para a seção seguinte que tratará de uma generalização desses lemas.

Primeiro Lema de Kaplansky 4.2.1: O número de subconjuntos de *p* elementos de $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ nos quais não há números consecutivos é $\binom{n-p+1}{p}$.

Exemplo 4.2.2 - Um colégio deve aplicar duas provas na última semana de aula, de segunda à sábado. De quantas formas isso pode ocorrer de modo que as provas não caiam em dias consecutivos?

Solução: Temos uma aplicação direta do Primeiro Lema de Kaplansky em $n = 6$ e $p = 2$. Logo, a resposta é $\binom{5}{2} = 10$. □

Segundo Lema de Kaplansky 4.2.3: O número de subconjuntos de *p* elementos de $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos, é igual a: $\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$.

Exemplo 4.2.4 - (IME) Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Solução: O problema é uma aplicação direta do Segundo Lema de Kaplansky em que $n = 12$ e $p = 5$. Assim, a resposta é: $\frac{12}{7}\binom{7}{5} = 36$. □

4.3. Generalizações dos Lemas de Kaplansky

Nesta seção, iremos apresentar e demonstrar uma generalização dos Lemas de Kaplansky apresentados na seção anterior. Em seguida, apresentaremos alguns problemas em que podemos aplicá-los.

Teorema 4.3.1- Primeiro Lema de Kaplansky - Generalizado

Sejam *n, p* e *q* números naturais. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, em que $n \geq (p-1)\cdot(q-1)$. A quantidade I de subconjuntos de *A* que possuem *p* elementos tais que o valor absoluto da diferença de dois quaisquer desses elementos seja pelo menos igual a *q* (isto é, dados *i* e *j* dois elementos quaisquer de algum subconjunto de *A*, devemos ter $|i - j| \geq q$) é uma função de *n, p* e *q* dada por:

$$I(n,p,q) = \binom{n-(p-1)\cdot(q-1)}{p}.$$

Demonstração do Teorema 4.3.1

Considere os elementos de *A* dispostos em fila e em ordem crescente, isto é, formando a sequência $(1,2,3,...,n)$. Cada subconjunto com *p* elementos de *A* é formado por uma escolha de *p* elementos da fila. Vamos associar cada subconjunto de *A* a uma sequência, com *n* entradas, dos símbolos "$+$" e "$-$". Faremos da seguinte forma: para cada subconjunto de *A,* quando o *i-ésimo* termo da sequência $(1,2,3,...,n)$ for um elemento de um desses subconjuntos iremos representar esse fato colocando o símbolo "$+$" na *i-ésima* posição, caso contrário, colocaremos o símbolo "$-$". Desse modo, cada subconjunto de *A* com *p* elementos será associado a uma sequência com *p* símbolos "$+$" e $n-p$ símbolos "$-$" dispostos em uma dada ordem. Por exemplo, o conjunto $\{1,3,4,n\}$ será associado com uma sequência de 4 símbolos "$+$" e $n-4$ símbolos "$-$". Nesse exemplo, os símbolos "$-$" ocorrerão em todas as posições, exceto nas posições 1, 3, 4 e *n,* pois estas serão ocupadas pelos símbolos "$+$" , conforme ilustração a seguir.

$$\boxed{+-++----\ldots--+}$$

Nesses termos, o conjunto *A* será associado à sequência com *n* símbolos "$+$" e o conjunto vazio à sequência com *n* símbolos "$-$". Ademais, como há duas possibilidades $(+,-)$ para cada uma das *n* entradas possíveis para a sequência de símbolos, concluímos haver 2^n sequências desses símbolos distintas, número igual ao de subconjuntos de *A*.

Seja $\mathscr{B}$ o conjunto de todos os subconjuntos de *A,* com *p* elementos, nas condições do teorema. Podemos aplicar os seguintes passos para obter um elemento de $\mathscr{B}$.

- Começamos inserido o primeiro símbolo "$+$" na primeira posição.
- Em seguida, inserimos $q-1$ símbolos "$-$" seguido de um novo símbolo "+". E continuamos dessa forma, intercalando um símbolo "$+$" com $q-1$ símbolos "$-$", até que utilizemos *p* símbolos "$+$" e $(p-1)\cdot(q-1)$ símbolos "$-$".
- Alocamos todos os $n-p-(p-1)(q-1)$ símbolos "$-$" que restaram à direita do último símbolo "$+$". Conforme ilustração a seguir:

$$+\underbrace{---\ldots-}_{\substack{q-1\\ \text{símbolos}}}+\underbrace{---\ldots-}_{\substack{q-1\\ \text{símbolos}}}+\cdots+\underbrace{---\ldots-}_{\substack{q-1\\ \text{símbolos}}}+\underbrace{---\ldots-}_{\substack{n-p-(p-1)(q-1)\\ \text{símbolos}}}$$

Essa configuração corresponde ao seguinte elemento de *B*:

$$\{1, q+1, 2q+1, 3q+1, \ldots, (p-1)q+1\}.$$

Podemos obter todos elementos de $\mathscr{B}$, a partir da configuração acima, bastando para isso distribuir os $n-p-(p-1)(q-1)$ símbolos "$-$" restantes, e que inicialmente foram todos alocados à direita do último símbolo "$+$", nos $p+1$ espaços que intercalam os símbolos "$+$". Tais espaços ocorrem desde a esquerda do primeiro símbolo "$+$", passando por entre os símbolos "$+$" intermediários e terminando à direita do último símbolo "$+$", daí porque $p+1$ espaços.

Desse modo, a quantidade de formas de distribuirmos os $n-p-(p-1)(q-1)$ símbolos "$-$" excedentes corresponde à quantidade de soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{p+1} = n-p-(p-1)(q-1).$$

Por sua vez, de acordo com o Teorema 4.1.1, a equação acima tem $\binom{n-(p-1)\cdot(q-1)}{p}$ soluções inteiras não negativas.

Concluímos, portanto, que

$$I(n,p,q) = \binom{n-(p-1)\cdot(q-1)}{p}. \qquad \square$$

Note que para:

a) $q=0$, temos $I(n,p,0) = \binom{n+p-1}{p}$ que corresponde ao número de combinações completas de *n* elementos tomados *p* a *p*, isto é, em nossa contagem podemos repetir elementos. A interpretação para esse fato é que quando tomamos $q=0$

estamos considerando que a diferença entre dois elementos pode ser zero, estamos, portanto, estabelecendo a possibilidade de repetição de elementos.

b) $q=1$, temos $I(n,p,1)=\binom{n}{p}$ que corresponde ao número de combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*. A interpretação é óbvia.

c) $q=2$, temos $I(n,p,2)=\binom{n-p+1}{p}$ que corresponde ao primeiro Lema de Kaplansky.

Exemplo 4.3.2 - Um atleta precisa realizar 5 treinos de preparação para uma competição, para isso ele dispõe de 19 dias seguidos. Contudo, para evitar risco de lesões deve guardar pelo menos 3 dias entre os treinos. De quantas formas ele pode escolher os dias para realizar os 5 treinos?

Solução: De acordo com os dados do problema, temos $n=19$, $p=5$ e $q=4$ (pois, a "distância" entre os treinos é 4, uma vez que deve haver 3 dias entre os treinos).

Assim, a resposta é:

$$I(19,5,4)=\binom{7}{5}=21. \qquad \square$$

Como são poucos casos, vamos exibi-los aqui a título ilustrativo.

Sejam os dias $\{1,2,3,\ ...,\ 19\}$.

As possíveis escolhas para os treinos são:

$$\begin{array}{lll}
A_1=\{1,5,9,13,17\}, & A_2=\{1,5,9,13,18\}, & A_3=\{1,5,9,13,19\}, \\
A_4=\{1,5,9,14,18\}, & A_5=\{1,5,9,14,19\}, & A_6=\{1,5,9,15,19\}, \\
A_7=\{1,5,10,14,18\}, & A_8=\{1,5,10,14,19\}, & A_9=\{1,5,10,15,19\}, \\
A_{10}=\{1,5,11,15,19\}, & A_{11}=\{1,6,10,14,18\}, & A_{12}=\{1,6,10,14,19\}, \\
A_{13}=\{1,6,10,15,19\}, & A_{14}=\{1,6,11,15,19\}, & A_{15}=\{1,7,11,15,19\}, \\
A_{16}=\{2,6,10,14,18\}, & A_{17}=\{2,6,10,14,19\}, & A_{18}=\{2,6,10,15,19\}, \\
A_{19}=\{2,6,11,15,19\}, & A_{20}=\{2,7,11,15,19\}, & A_{21}=\{3,7,11,15,19\}.
\end{array}$$

Exemplo 4.3.3 - Um médico recomenda a seu paciente que faça 3 caminhadas curtas semanalmente. O paciente dispõe de 4 dias livres na semana para fazer tais caminhadas, ele pode fazer mais de uma caminhada ao dia, mas não pretende caminhar três vezes em um mesmo dia, pois teme ficar exausto no dia seguinte. De quantas formas o paciente pode escolher fazer suas caminhadas?

Solução: Deixemos de lado, por um momento, a restrição de não fazer as três caminhadas no mesmo dia. Temos então, de acordo com o texto, que nossos parâmetros são $n=4$, $p=3$ e $q=0$ (o valor de *q* é zero porque ele pode fazer mais de uma caminhada ao dia, isto é o mesmo que dizer que a “distância" entre dois dias com caminhadas é pelo menos zero). Assim,

$$I(4,3,0)=\binom{6}{3}=20.$$

Contudo, a resposta seria 20 se não houvesse a restrição citada. Como há apenas 4 modos de se fazer as 3 caminhadas em mesmo dia, segue que a resposta é 20 - 4 = 16.

De fato, veja a tabela abaixo que exibe tais possibilidades.

Sejam *A, B, C* e *D* os dias disponíveis. As escolhas para as três caminhadas são:

AAB	*ABC*	*ADD*	*BCD*
AAC	*ABD*	*BBC*	*BDD*
AAD	*ACC*	*BBD*	*CCD*
ABB	*ACD*	*BCC*	*CDD*

Exemplo 4.3.4 - Em um estacionamento há 30 vagas consecutivas. De quantas formas podemos dispor 24 carros distintos nessas vagas, de forma que haja pelo menos 4 carros entre duas vagas vazias?

Solução: Temos 24 vagas ocupadas pelos carros, dessa forma restam 6 vagas ociosas. Devemos colocar pelos menos 4 carros entre as vagas ociosas.

Vamos começar calculando de quantas formas podemos escolher as vagas ociosas.

Se numerarmos as vagas de 1 a 30, devemos escolher 6 números tais que a diferença seja pelo menos 5 (quatro carros entre as vagas).

Assim, temos:

$$I(30,6,5)=\binom{10}{6}=210\,.$$

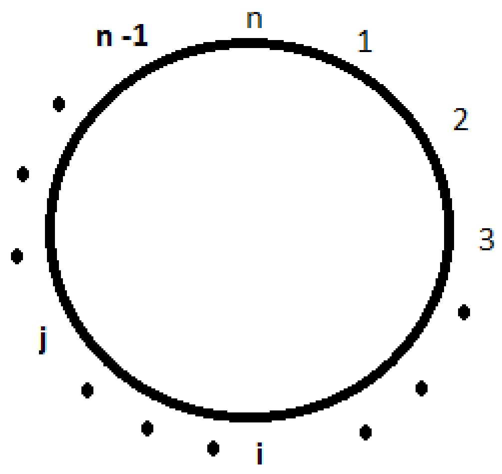
Para cada escolha das 6 vagas ociosas podemos permutar as posições dos 24 carros entre si, dessa forma a resposta é $210\cdot 24!$.

Teorema 4.3.5 - Segundo Lema de Kaplansky - Generalizado

Sejam *n, p* e *q* números naturais. Considere o conjunto $A=\{1,\ 2,\ 3,...,\ \mathrm{n}\}$, em que $n\geq p\cdot(q-1)$. A quantidade K de subconjuntos de *A* que possuem *p* elementos tais que o valor absoluto da diferença de dois quaisquer desses elementos seja pelo menos igual a *q,* considerando que o valor da diferença entre os elementos de *A,* digamos *i* e *j*, seja o menor entre os números $|j-i|$ e *n* – $|j-i|$, com $\{i,j\}\subset\{1,2,3,...,n\}$, é uma função de *n, p* e *q* dada por:

$$K(n,p,q)=\frac{n}{n+p-pq}\binom{n+p-pq}{p}.$$

Antes de iniciar a demonstração, convém observar que a situação dada acima pode ser interpretada intuitivamente da seguinte maneira. Considere os elementos do conjunto *A* dispostos regularmente ao redor de um círculo. Adotemos um sentido qualquer, digamos horário, e coloquemos os elementos de *A* em ordem crescente no sentido adotado, de forma que teremos a configuração a seguir, que se assemelha a um relógio que marca *n* horas, em vez de as 12 convencionais.



Essa configuração ilustra que, para todo para $n \geq 7$, a distância entre os elementos $n-1$ e 2 é 3 . O segundo lema é especialmente útil em situações em que os elementos a serem escolhidos formam uma sequência de período *n***,** como por exemplo os meses do ano ($n=12$) ou os dias da semana ($n=7$).

Demonstração do Teorema 4.3.5:

Podemos dividir o problema em *q* casos disjuntos.

<u>1° Caso</u>: Os subconjuntos possuem o elemento 1.

Neste caso, não podemos escolher os elementos do conjunto $\{n-q-1, n-q, ..., n-1, n, 2, 3, 4, ..., q-1\}$, restando $n-2q+1$ elementos dos quais teremos que escolher $p-1$ com a distância mínima *q***,** e isto pode ser feito, de acordo com o Teorema 4.3.1, precisamente de $I(n-2q+1, p-1, q) = \binom{n-2q+1-(p-2)\cdot(q-1)}{p-1}$ formas.

<u>2° Caso</u>: Os subconjuntos possuem o elemento 2. Neste caso, os elementos do conjunto $\{n-q, n-q+1, ..., n-1, n, 1, 3, 4, ..., q\}$ não podem ser escolhidos, restando $n-2q+1$ elementos dos quais teremos que escolher $p-1$ com a distância mínima *q***,** e a quantidade de formas em que isto pode ser feito é novamente:

$$I(n-2q+1, p-1, q) = \binom{n-2q+1-(p-2)\cdot(q-1)}{p-1}.$$

Os casos 3, 4,..., $q-1$ são análogos, aplicando-se respectivamente para os elementos 3, 4,..., $q-1$.

Temos agora o último caso a analisar.

<u>Q-ésimo caso</u>: Os subconjuntos a serem escolhidos não possuem nenhum dos elementos do conjunto $\{1,2,3,4,...,q-1\}$, dessa forma, restam $n-q+1$ elementos, dos quais deveremos escolher *p* deles com a "distância mínima igual a *q*"**.** Isto pode ser feito de $I(n-q+1,p,q)=\binom{n-q+1-(p-1)\cdot(q-1)}{p}$.

Assim,

$$K(n,p,q)=(q-1)\binom{n-2q+1-(p-2)\cdot(q-1)}{p-1}+\binom{n-q+1-(p-1)\cdot(q-1)}{p}.$$

Simplificando teremos:

$$K(n,p,q)=(q-1)\binom{n+p-pq-1}{p-1}+\binom{n+p-pq}{p}$$

$$K(n,p,q)=(q-1)\cdot\frac{p}{n+p-pq}\cdot\frac{n+p-pq}{p}\binom{n+p-pq-1}{p-1}+\binom{n+p-pq}{p}$$

$$K(n,p,q)=\frac{pq-p}{n+p-pq}\binom{n+p-pq}{p}+\binom{n+p-pq}{p}$$

$$K(n,p,q)=\binom{n+p-pq}{p}\cdot\left(\frac{pq-p}{n+p-pq}+1\right)$$

$$K(n,p,q)=\frac{n}{n+p-pq}\cdot\binom{n+p-pq}{p}. \qquad \square$$

Note que para:

a) $q=0$, temos $K(n,p,0)=\frac{n}{n+p}\cdot\binom{n+p}{p}=\binom{n+p-1}{p}$ que corresponde ao número de combinações completas de n elementos tomados *p* a *p*. A interpretação para esse fato é a mesma relativa ao Teorema 4.3.1.

b) $q=1$, temos $K(n,p,1)=\binom{n}{p}$ que corresponde ao número de combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*.

c) $q=2$, temos $K(n,p,2)=\frac{n}{n-p}\cdot\binom{n-p}{p}$ que corresponde ao segundo Lema de Kaplansky.

Exemplo 4.3.6 - Em uma entrevista de emprego é solicitado ao candidato que escolha três dias para comparecer semanalmente à sede da empresa (no restante da semana ele poderá trabalhar em casa), no entanto a escolha não pode conter dias consecutivos (observe que sábado e domingo são considerados dias consecutivos). Quantas são as formas de o candidato realizar a sua escolha?

Solução: Trata-se de uma aplicação do segundo lema de Kaplansky, para $n=7$, $p=3$ e $q=2$, temos então:

$$K(7,3,2)=\frac{7}{7+3-6}\cdot\binom{7+3-6}{3}$$
$$K(7,3,2)=\frac{7}{4}\cdot\binom{4}{3}=7.$$

Exemplo 4.3.7 - Uma empresa de turismo possui um navio que realiza cruzeiros temáticos em diversos países da América Latina. Por motivos estratégicos, a empresa desloca seu navio para atender ao Brasil apenas duas vezes ao ano, com pelo menos 3 meses entre um atendimento e outro. Contudo, cada cruzeiro realizado no ano é com um tema diferente e as escolhas dos meses e do tema serão mantidas pelos anos seguintes. Quantas são as formas de essa empresa realizar seus cruzeiros no Brasil?

Solução: Como a escolha dos meses será mantida pelos anos seguintes, temos uma aplicação do segundo Lema de Kaplansky generalizado. Nesse exemplo, temos $n=12$, $p=2$ e $q=4$ (pois, deve haver pelo menos 3 meses entre os atendimentos).

Dessa forma, a escolha dos meses poderá ser feita de $K(12,2,4)=\frac{12}{6}\cdot\binom{6}{2}=30$ formas diferentes. Uma vez escolhidos os meses, há duas formas de escolher os temas. Assim, a resposta é $30\cdot 2=60$. □

Exemplo 4.3.8 - Bruna gosta de viajar, contudo só consegue economizar o necessário para viagens a cada 12 semanas. Ela pretende viajar pelo menos uma vez ao ano e pretende escolher as semanas do ano em que viajará de modo a montar um calendário de viagens que se mantenha fixo para os próximos anos. Por exemplo, ela pode escolher viajar apenas uma vez por ano. De quantas formas Bruna pode escolher as semanas em que viajará? Considere um ano com 52 semanas exatas.

Solução: Como a escolha se manterá fixa pelos próximos anos, temos uma aplicação do segundo Lema de Kaplansky generalizado, pois caso ela escolha a 50ª semana do ano para viajar, não poderá viajar novamente antes da 10ª semana do ano seguinte. Neste exemplo, temos $n=52$, $q=12$ e $p\in\{1,2,3,4\}$, pois para $p>4$ teremos $K(52,p,12)$ igual a zero, isto mostra que o máximo de viagens que Bruna poderá fazer ao ano é 4. De fato, para que $K(n,p,q)$ não se torne igual a zero é necessário que $n+p-pq\geq p\Rightarrow n\geq pq$. Como temos $n=52$ e $q=12$ deveremos ter $52\geq p\cdot 12\Leftrightarrow p\leq\frac{13}{3}$, sendo *p* um número natural, e devendo-se fazer ao menos uma viagem ao ano, temos que os únicos valores viáveis para *p* são os elementos do conjunto $\{1,2,3,4\}$.

Assim, temos os seguintes casos:

<u>1º Caso</u>: $p=1$

$$K(52,1,12)=\frac{52}{52+1-1\cdot 12}\cdot\binom{52+1-1\cdot 12}{1}=\frac{52}{41}\cdot\binom{41}{1}=52.$$

<u>2º Caso</u>: $p=2$

$$K(52,2,12)=\frac{52}{52+2-2\cdot 12}\cdot\binom{52+2-2\cdot 12}{2}=\frac{52}{30}\cdot\binom{30}{2}=754.$$

<u>3º Caso</u>: $p=3$

$$K(52,3,12)=\frac{52}{52+3-3\cdot 12}\cdot\binom{52+3-3\cdot 12}{3}=\frac{52}{19}\cdot\binom{19}{3}=2652.$$

<u>4º Caso</u>: $p=4$

$$K(52,4,12)=\frac{52}{52+4-4\cdot 12}\cdot\binom{52+4-4\cdot 12}{4}=\frac{52}{8}\cdot\binom{8}{4}=455.$$

Logo, a resposta é 52 + 754 + 2652 + 455 = 3913. □

5 O PROBLEMA DE LUCAS

Em 1891, o matemático francês Édouard Lucas (LUCAS, 1891) formulou o seguinte problema:

De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não sejam vizinhas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Esse problema ficou conhecido como *Ménage Pròbleme*. Embora seja mais conhecida a versão de Lucas para esse problema, na verdade, alguns anos antes, um problema equivalente da teoria dos nós havia sido formulado pelo físico Peter Guthrie Tait (TAIT, 1876-1877). Ainda, em 1934, o matemático francês Jacques Touchard (TOUCHARD, 1934) apresentou a seguinte fórmula que solucionava o problema de Lucas: $M_n=2\cdot n!\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$.

Contudo, Touchard apresentou a fórmula sem uma dedução da mesma. Somente em 1943, Irving Kaplansky publica o artigo *Solution of the pròbleme des ménages* no *Bulletin of the American Mathematical Society*, com uma solução para o problema. Foi neste artigo que Kaplansky apresentou os lemas que usou para solucionar o problema.

5.1 Solução de Kaplansky para o problema de Lucas

A solução dada por Kaplansky ao problema de Lucas foi:

1º Passo: Numerar os lugares de 1 a *2n* e acomodar as mulheres em lugares alternados. Dessa forma, os homens podem ocupar os lugares ímpares e as mulheres os pares ou vice-versa. Assim, há dois tipos de escolhas possíveis para o primeiro passo.

2º Passo: Escolhidos os lugares das damas (se ímpares ou pares), passaremos a acomodá-las em suas cadeiras. Há $n!$ formas de realizar este passo.

3°Passo: Deve-se alocar os homens tomando-se o cuidado de que nenhum deles sente ao lado da esposa. Iremos representar a quantidade de formas de isso ocorrer por U_n.

Logo, se usarmos M_n para representar a quantidade de formas de dispor os *n* casais ao redor da mesa, de acordo com as restrições do problema, teremos que a resposta ao problema de Lucas é:

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot U_n.$$

Vamos demonstrar que:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!.$$

Renumere os espaços vazios disponíveis aos homens por 1, 2, 3, ..., *n*. Em seguida, defina, para $1 \leq i \leq n$, os conjuntos:

H: conjuntos das permutações dos homens (livres de qualquer restrição).

H^{i}: conjuntos das permutações dos homens em que o *i-ésimo* homem está à esquerda de sua esposa.

H'^{i}: conjuntos das permutações dos homens em que o *i-ésimo* homem está à direita de sua esposa.

Com essa notação, obtemos, como aplicação do PIE visto no segundo capítulo, que:

$$U_n = |H| - |H_1 \cup H'_1 \cup \ldots \cup H_i \cup H'_i \cup \ldots \cup H_n \cup H'_n|.$$

Vejamos as cardinalidades:

- Claramente, $|H| = n!$.

- Por outro lado, $|H_i| = |H'_i| = (n-1)!$, com $1 \le i \le n$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} |H_i| = \sum_{i=1}^{n} |H'_i| = 2 \cdot n \cdot (n-1)!.$$

Agora, vamos dispor os $2n$ conjuntos da seguinte forma: $H_1, H'_1, H_2, H'_2, ..., H_n, H'_n$ e estudar as possibilidades de intersecções.

Em relação às intersecções de *k* desses conjuntos, elas podem ser de dois tipos:

1º Tipo: Podem conter dois conjuntos consecutivos (considerando a disposição citada acima), por exemplo: $H_1 \cap H_5 \cap H_9 \cap H'_9 \cap H'_{16}$ ou $H_8 \cap H'_{12} \cap H_{13}$. Nestes casos, a intersecção é sempre vazia. Intersecções do tipo $H_i \cap H'_i$ são vazias, pois um mesmo homem não pode estar simultaneamente à esquerda e à direita de sua esposa. Também são vazias intersecções do tipo $H'_i \cap H_{i+1}$, neste caso, a impossibilidade reside no fato de que dois homens devem sentar-se em lugares alternados.

2º Tipo: Não podem conter dois conjuntos consecutivos, considerando que H'_n e H_1 são consecutivos. Neste caso, temos as permutações de *n* homens em que *k* deles estão em lugares fixos. Desse modo, há $(n-k)!$ permutações.

Contudo, de acordo com o segundo Lema de Kaplansky, há $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$ formas de escolhermos *k* conjuntos não consecutivos entre os $2n$ conjuntos. Perceba que $1 \le k \le n$. Pois se $k > n$, teríamos, necessariamente (princípio da casa dos pombos), dois conjuntos consecutivos e, portanto, a cardinalidade da intersecção de mais de *n* conjuntos é nula .

Daí, a soma das cardinalidades de *k* conjuntos dos conjuntos citados é dada por: $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!$

Assim, podemos, de acordo com o PIE, escrever que:

$$|H_1 \cup H'_1 \cup ... \cup H_n \cup H'_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!.$$

Deste modo,

$$U_n = n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)! = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} \cdot \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!.$$

Por outro lado, desde que $n! = \frac{2n}{2n-0}\binom{2n-0}{0} \cdot (n-0)!$, podemos reescrever U_n na forma a seguir:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k} \cdot \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!.$$

Assim, a solução, apresentada por Touchard e demonstrada por Kaplansky para o problema de Lucas é:

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k} \cdot \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

Note que, como era de se esperar, $U_1 = U_2 = 0$, pois, claramente, não é possível acomodar apenas um ou dois casais com as restrições impostas pelo problema. Além disso, é usual convencionar que $U_0 = 1$.

Veja ainda, que:

$$U_3 = \left(\frac{6}{6}\binom{6}{0} \cdot (3)! - \frac{6}{5}\binom{5}{1} \cdot (2)! + \frac{6}{4}\binom{4}{2} \cdot (1)! - \frac{6}{3}\binom{3}{3} \cdot (0)!\right) = 1.$$

Logo, $M_3 = 2 \cdot 3! \cdot 1 = 12$.

Isto significa que há 12 formas de acomodarmos 3 casais com as restrições dadas.

O próximo exemplo, ilustra o problema de Lucas para o caso que envolve quatro casais.

Exemplo 5.1.1

Quantas são as formas de acomodarmos 4 casais em 8 cadeiras distintas em torno de uma mesa circular sem que nenhuma marido sente-se ao lado de sua esposa ?

Solução:

Claramente, a resposta é M_4 :

$$M_4 = 2 \cdot 4! \cdot \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \cdot \frac{8}{8-k} \binom{8-k}{k} \cdot (4-k)! \Rightarrow$$

$$M_4 = 48 \cdot \left(\frac{8}{8}\binom{8}{0} \cdot (4)! - \frac{8}{7}\binom{7}{1} \cdot (3)! + \frac{8}{6}\binom{6}{2} \cdot (2)! - \frac{8}{5}\binom{5}{3} \cdot (1)! + \frac{8}{4}\binom{4}{4} \cdot (0)! \right) \Rightarrow$$

$$M_4 = 48 \cdot (24 - 48 + 40 - 16 + 2) \Rightarrow$$

$$M_4 = 96$$

A tabela a seguir apresentará alguns valores de U_n e de M_n .

n	***Uⁿ***	***Mⁿ***
0	1	2
1	0	0
2	0	0
3	1	12
4	2	96
5	13	3120
6	80	115200
7	579	5836320
8	4738	382072320
9	43387	31488549120
10	439792	3191834419200

5.2 Outra solução para o problema de Lucas

A solução que segue, a partir do parágrafo seguinte, deve-se a Bogart e Doyle (BOGART e DOYLE, 1986). De forma alguma desmerece o trabalho apresentado por Kaplansky, mesmo porque faz uso de seus lemas, mas possui a vantagem de obter a resposta de forma mais direta, ao fazer uso técnicas mais elementares e conhecidas dos alunos do ensino médio. Basicamente, Bogart e Doyle eliminam a escolha de colocar as mulheres em primeiro lugar (ou os homens) e procuram trabalhar com a alocação dos casais.

Primeiro, vamos observar que há $2\cdot n!\cdot n!$ formas de acomodarmos as $2n$ pessoas alternando entre homens e mulheres ($n!$ formas de assentar os homens nas cadeiras ímpares e $n!$ formas de assentar as mulheres na pares ou vice-versa).

Segundo, vamos escolher k casais e acomodá-los de modo que cada homem desse casal sente-se ao lado de sua esposa. Note que tal escolha pode ser realizada de $\binom{n}{k}$ formas. Uma vez escolhidos os k casais, devemos acomodá-los em torno da mesa. Devemos escolher k lugares não consecutivos, digamos $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k$. O *j-ésimo* casal será acomodado nas posições i_j e $i_j + 1$. De acordo com o segundo lema de Kaplansky, isso pode ser feito de $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$ formas. Devemos ainda decidir se a posição i_1 será ocupada por um homem ou por uma mulher, note que, uma vez tomada essa decisão, a paridade dos números $i_2, i_3, \ldots, i_k$ determina se nessa posições iremos acomodar o homem ou a mulher do casal. Os k casais selecionados previamente poderão permutar entre si de $k!$ formas.

Em seguida, podemos assentar os $n-k$ homens restantes de $(n-k)!$ formas e as $n-k$ mulheres restantes também de $(n-k)!$ formas.

Daí, a quantidade de formas de acomodarmos os n casais em que determinado grupo de k deles são formados por marido e mulher é:

$$2\cdot\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-k)!.$$

Deste modo, segue do PIE que:

$$M_n = 2(n!)^2 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot 2\cdot\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot\binom{n}{k}\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-k)!.$$

Porém, como $2(n!)^2 = 2\cdot\frac{2n}{2n-0}\binom{2n-0}{0}\cdot\binom{n}{0}\cdot 0!\cdot(n-0)!\cdot(n-0)!$ então,

$$M_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\cdot 2\cdot\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot\binom{n}{k}\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-k)!.$$

Esta última expressão para M^n é equivalente à obtida por Kaplansky, uma vez que:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot 2\cdot\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot\binom{n}{k}\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-k)!=$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot 2\cdot\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-k)!=$$
$$2\cdot n!\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot(n-k)!=2\cdot n!\cdot U_n.$$

Para terminar esta seção, ressaltamos que o valor de U^n definido acima é o mesmo utilizado no Teorema 3.2.1.

6 PERMUTAÇÕES E PERMANENTES

No ensino básico, o contato dos alunos com o a teoria dos determinantes ocorre geralmente no segundo ano do ensino médio, ainda que sem uma definição formal do que é um determinante. Em relação ao permanente, ele não costuma fazer parte do currículo do ensino básico, mesmo durante a graduação em Matemática é raro que seja incluído no currículo. Contudo, existe uma forte relação entre o cálculo do permanente associado a uma matriz de ordem n e a quantidade de permutações de n elementos.

6.1 Permanetes

Determinantes de matrizes quadradas desempenham importante papel na Álgebra Linear. Além de diversas propriedades úteis, eles possuem algumas interpretações e aplicações práticas. Na Geometria Analítica, por exemplo, é possível associá-lo a área de um triângulo ou ao volume de um paralelepípedo definido pelas linhas (ou colunas) de uma matriz de coordenadas dos vértices dessas figuras. À grosso modo, permanentes são números associados a uma matriz quadrada e que são obtidos basicamente do mesmo modo que os determinantes, a diferença reside no fato de que nos permanentes não há a mudança de sinal (relativa à ordem das permutações) observada no cálculo dos determinantes. No que segue, iremos representar o determinante e o permanente de uma matriz A por, respectivamente:

$$Det(A) \text{ e } Per(A).$$

Definição 6.1.1 - Considere uma matriz quadrada A de ordem n**.** Definimos o permanente da matriz A da seguinte forma:

$$Per(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

Na soma acima, S_n é o conjunto de todas as $n!$ permutações dos n números 1, 2, 3,..., n. Para cada permutação π, seja $X_\pi = \{a_{i,\pi(i)}\}$, o conjunto formado por n elementos da matriz A em que, para cada i, em que $1 \le i \le n$, tomamos entre os elementos da linha i da matriz A apenas aquele que está na coluna $\pi(i)$. A parcela correspondente à permutação π é o produto dos elementos de X_π. Observe ainda que o conjunto X_π tem a propriedade de conter exatamente um elemento de cada linha e de cada coluna da matriz. Sendo assim, podemos interpretar a definição de permanente de uma matriz quadrada como uma soma de $n!$ parcelas em que o valor de cada parcela é igual ao produto de n elementos em que nenhum desses n elementos pertence à mesma linha ou coluna dessa matriz. Vejamos alguns casos particulares do cálculo permanentes e determinantes.

Exemplo 6.1.2 - Permanentes e Determinantes de primeira ordem. Seja a matriz $A = [a_{11}]$, então $Det(A) = Per(A) = a_{11}$.

Exemplo 6.1.3 - Permanentes e Determinantes de segunda ordem. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então $Det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ e $Per(A) = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$,

note que no permanente não há inversão de sinal do termo $a_{12} \cdot a_{21}$.

Exemplo 6.1.4 - Permanentes e Determinantes de terceira ordem. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{aligned} Det(A) = {} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ & - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Per(A) = {} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + \\ & a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{13}. \end{aligned}$$

Ao contrário do que ocorre com os determinantes, ainda é um problema em aberto obter um algoritmo eficiente para o cálculo dos permanentes. De fato, há um teorema de Valiant (1979) que, em termos de complexidade computacional, afirma que o cálculo de uma matriz com entradas 0 e 1 é #P-completo, ou seja, mesmo com a informação adicional de que as entradas são apenas 0 ou 1, o cálculo do permanente continua difícil. Contudo, alguns resultados conhecidos da teoria dos determinantes continuam válidos para os permanentes e podem nos ajudar a calculá-los, por exemplo o fato de que o permanente de uma matriz é igual ao da sua transposta. Outros resultados precisam de pequenos ajustes, por exemplo: o valor do permanente não muda caso troquemos duas filas paralelas de posição, além disso, o Teorema de Laplace admite um variante que permite calcular o valor do permanente, a saber: seja A uma matriz quadrada de ordem *n,* o permanente de A é o número obtido somando-se os produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos seus respectivos complementos algébricos, em que o complemento algébrico do elemento a^{ij} é o permanente da matriz obtida ao eliminarmos a linha i e a coluna j da matriz A.

Veja como fica a aplicação desse resultado em uma matriz de ordem 4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

então, $Per(A)$ é igual a:

$$a \cdot Per\left(\begin{bmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{bmatrix}\right) + b \cdot Per\left(\begin{bmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{bmatrix}\right) + c \cdot Per\left(\begin{bmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{bmatrix}\right) + d \cdot Per\left(\begin{bmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{bmatrix}\right).$$

6.2 Permutações e permanentes

O permanente das matrizes cujas entradas são apenas 0 ou 1 possuem uma forte relação com os problemas de permutação. No restante deste trabalho, trataremos apenas deste tipo de matrizes, ou seja, matrizes cujas entradas são apenas 0 ou 1.

Considere os n objetos a serem permutados e vamos numerá-los de 1 a n. Se a entrada a_{ij} , na matriz A_n, for igual a 1, isto representará a possibilidade de o *i-ésimo* objeto a ser permutado poder ocupar a posição *j*. Assim, o permanente da matriz A_n, cujas entradas são todas iguais a 1, pode ser interpretado como a quantidade de permutações de n objetos em que qualquer um deles pode ocupar qualquer posição. Na eventualidade de o *i-ésimo* elemento não poder ocupar a posição *j,* o elemento a_{ij} da matriz A_n será 0.

Seja A_n a matriz quadrada de ordem n tal que: $A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Então, $Per(A_n) = n!$.

Realmente, o permanente da matriz A_n é a soma de $n!$ produtos de n termos, cada produto vale 1, pois todas as entradas da matriz são iguais a 1. Assim, $Per(A_n)$ é a soma de $n!$ parcelas iguais a 1, isto é, $n!$.

Suponha agora, que desejamos contar a quantidade de permutações em que o primeiro objeto não pode ocupar a segunda posição. Neste caso, a matriz quadrada, de ordem *n,* associada a esse problema será:

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter o valor de seu permanente, podemos usar a variante do Teorema de Laplace desenvolvendo a primeira linha.

Dessa forma, como um dos elementos da primeira linha é 0 e os demais são iguais a 1, segue que o permanente de B_n será a soma de $n-1$ permanentes de matrizes de ordem $n-1$ cujas entrada são todas iguais a 1. Logo, o $Per(B_n) = (n-1)\cdot(n-1)!$.

Perceba que esse é exatamente o resultado obtido quando calculamos a quantidade de permutações de *n* elementos em que o primeiro elemento não pode ocupar a segunda posição.

Exemplo 6.2.1 - Um grupo de 6 modelos, entre as modelos estão Bruna e Lívia, irá desfilar em uma passarela. Quantas são as formas de o desfile ocorrer, considerando que nem Bruna nem Lívia podem ser a primeira ou a última a desfilar?

Solução: Adotando-se Bruna e Lívia como os dois primeiros objetos a serem permutados, podemos construir a matriz associada a essa permutação como sendo:

$$C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular o $Per(C_6)$, vamos usar a variante do Teorema de Laplace aplicada à primeira linha de C_6. Como as entradas extremas são nulas e as demais entradas da primeira linha possuem o mesmo complemento algébrico, temos:

$$Per(C_6) = 4 \cdot Per\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Por sua vez, $Per\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot Per\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 4!.$

Assim, $Per(C_6) = 4 \cdot 3 \cdot 4! = 288$. □

6.3 Uma fórmula de recorrência para os desarranjos e a engenhosa solução de Euler

O problema das permutações caóticas (desarranjos) de *n* elementos, foi tratado na Seção 2.4 deste trabalho. A solução apresentada foi baseada em uma aplicação do PIE. Contudo, Euler apresentou uma solução bem engenhosa a partir de uma relação de recorrência. Inicialmente, vamos obter a relação de recorrência a partir do uso de permanentes, em seguida vamos apresentar a solução de Euler.

A matriz quadrada, de ordem *n*, associada ao desarranjo de *n* elementos é claramente:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pois em um desarranjo, o *i-ésimo* objeto não pode ocupar a *i-ésima* posição. Ou seja, T_n é a matriz quadrada, de ordem *n*, cujas entradas da diagonal principal são nulas e as demais entradas são iguais a 1. Assim, o permanente de T_n é a quantidade de desarranjos de *n* elementos, isto é, $Per\left(T_n\right) = D_n$.

Para $n = 1$, temos:

$$Per\left(T_1\right) = Per\left(\left[0\right]\right) = 0 = D_1.$$

Para $n = 2$, temos:

$$Per\left(T_2\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 = D_2.$$

Para $n > 2$, façamos a expansão do permanente de T_n por meio da variante do Teorema de Laplace aplicada à primeira linha. Como a primeira entrada é zero, restarão $n-1$ permanentes e todos eles serão iguais, pois suas matrizes associadas (cuja ordem é $n-1$) diferem apenas pela ordem de suas linhas e isto não altera o valor do permanente. Deste modo, poderemos trabalhar com o complemento algébrico do segundo elemento da primeira linha e assim, teremos $D_n = \left(n-1\right) \cdot Per\left(X_{n-1}\right)$. Em que:

$$X_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular $Per\left(X_{n-1}\right)$, faremos, mais uma vez, a expansão via a variante do Teorema de Laplace novamente aplicada à primeira linha. Salvo pelo primeiro elemento da primeira linha, cujo complemento algébrico é claramente $Per\left(T_{n-2}\right) = D_{n-2}$, o restante do cálculo equivale ao permanente da matriz associada ao desarranjo de $n-1$ elementos, isto é $Per\left(T_{n-1}\right) = D_{n-1}$. Deste modo, podemos escrever que $Per\left(X_{n-1}\right) = Per\left(T_{n-1}\right) + Per\left(T_{n-2}\right) = D_{n-1} + D_{n-2}$. Assim, chegamos à recorrência:

$$D_n = (n-1)\cdot\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right).$$

Euler reescreveu a recorrência acima da seguinte forma:

$$D_n - n\cdot D_{n-1} = -D_{n-1} + (n-1)\cdot D_{n-2} \Rightarrow$$
$$D_n - n\cdot D_{n-1} = -\left(D_{n-1} - (n-1)\cdot D_{n-2}\right).$$

Em seguida, ele aplicou essa última identidade para os valores 3, 4, 5, ..., n obtendo as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} &D_3 - 3\cdot D_2 = -\left(D_2 - 2\cdot D_1\right) \\ &D_4 - 4\cdot D_3 = -\left(D_3 - 3\cdot D_2\right) \\ &D_5 - 5\cdot D_4 = -\left(D_4 - 4\cdot D_3\right) \\ &\vdots \\ &D_{n-1} - (n-1)\cdot D_{n-2} = -\left(D_{n-2} - (n-2)\cdot D_{n-3}\right) \\ &D_n - n\cdot D_{n-1} = -\left(D_{n-1} - (n-1)\cdot D_{n-2}\right) \end{aligned}$$

Após multiplicar todas as expressões obtidas e cancelar os termos idênticos, Euler chegou ao resultado abaixo

$$D_n - n\cdot D_{n-1} = (-1)^{n-2}\cdot\left(D_2 - 2\cdot D_1\right).$$

Como $D_2 = 1$, $D_1 = 0$ e $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, esta a última expressão equivale a:

$$D_n = (-1)^n + n \cdot D_{n-1}.$$

Em seguida, dividindo por $n!$, Euler obteve:

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ele aplicou esse último resultado para os valores de 2, 3, 4, ..., n e em seguida somou todas as expressões, cancelando os termos idênticos, como segue:

$$+\begin{cases} \dfrac{D_2}{2!} = \dfrac{(-1)^2}{2!} + \dfrac{D_1}{1!} \\ \dfrac{D_3}{3!} = \dfrac{(-1)^3}{3!} + \dfrac{D_2}{2!} \\ \vdots \\ \dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{D_{n-2}}{(n-2)!} \\ \dfrac{D_n}{n!} = \dfrac{(-1)^n}{n!} + \dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!} \end{cases}$$

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{D_1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

A partir daí, obtém-se:

$$D_n = n!\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Considerando a convenção $D_0 = 1$, a expressão pode ser reescrita na forma:

$$D_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

6.4 O problema de Lucas e os permanentes

No Capítulo 5, tratamos da solução do problema de Lucas via técnicas de contagem da Análise Combinatória. Nesta seção, veremos outra forma de abordar o problema.

Vamos considerar que já temos todas as mulheres assentadas em lugares alternados, digamos os lugares ímpares. Restam *n* lugares para assentar os *n* homens, vamos renumerar esse lugares de 1 a *n*. Perceba que cada homem está impedido de sentar em dois lugares (um à esquerda e outro à direita de sua esposa). Digamos que os dois lugares proibidos ao primeiro homem sejam os lugares 1 e 2. Ao segundo homem, os lugares proibidos sejam os lugares 2 e 3 e assim por diante, até o *n-ésimo* homem que ficará proibido de sentar nos lugares *n* e 1. Dessa forma, a matriz quadrada, de ordem *n,* associada a esse problema será:

$$L_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como há $n!$ formas de acomodarmos as mulheres e, ainda, poderíamos alternar homens e mulheres nos lugares pares e ímpares, então a solução do Problema de Lucas passa a ser:

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot Per\left(L_n\right).$$

Vejamos algumas situações particulares.

Para $n = 1$, temos:

$$L_1 = [0].$$

Neste caso, $Per(L_1) = 0$, logo $M_1 = 2 \cdot 1! \cdot 0 = 0$.

Para $n = 2$, temos:

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Também neste caso, $Per(L_2) = 0$, logo $M_2 = 2 \cdot 2! \cdot 0 = 0$

Para $n=3$, temos:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesta situação, temos $Per(L_3)=1$, logo $M_3 = 2\cdot 3!\cdot 1 = 12$.

Para $n=4$, temos:

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, temos $Per(L_4)=2$, logo $M_4 = 2\cdot 4!\cdot 2 = 96$

Façamos um último exemplo. Para $n=5$, temos

$$L_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesta última situação, temos $Per(L_5)=13$, logo $M_5 = 2\cdot 5!\cdot 13 = 3120$.

Se adotarmos $Per\left(L_n\right)=H_n$, então:

$$M_n = 2\cdot n!\cdot H_n.$$

Contudo, o cálculo de $Per\left(L_n\right)$ não é elementar, conforme pode ser visto em (SHEVELEV, 2011). Trabalhando independentemente em um problema relacionado à teoria dos nós e proposto por Tait (TAIT, 1876-1877), Arthur Cayley (CAYLEY, 1891) encontrou a seguinte relação de recorrência $\left(n \geq 4,\ H_2 = 0\ e\ H_3 = 1\right)$, aqui em notação moderna:

$$H_n = n \cdot H_{n-1} + \frac{n}{n-2} \cdot H_{n-2} + \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n-2}.$$

Considerando a definição de permanente e as discussões anteriores, não é difícil concluir que $H_n = U_n$. Contudo, apenas, em 1934, devido as pesquisas feitas por Touchard constatou-se que $H_n = U_n$.

Vamos dar outra demonstração de que de fato, a fórmula obtida por Touchard, satisfaz a relação de recorrência de Cayley.

Ou seja, vamos mostrar que $U_n = n \cdot U_{n-1} + \frac{n}{n-2} \cdot U_{n-2} + \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n-2}$. Para tanto, considere:

- $U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot b_k$, em que $b_k = \frac{2n-2}{2n-k-2} \binom{2n-k-2}{k} (n-k-1)!$,
- $U_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \cdot c_k$, em que $c_k = \frac{2n-4}{2n-k-4} \binom{2n-k-4}{k} (n-k-2)!$.

Vamos mostrar que:

$$n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot b_k + \frac{n}{n-2} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \cdot c_k + \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n-2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k ,$$

em que $a_k = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$.

Assim, mostrar que a fórmula de Touchard satisfaz a relação de Cayley, equivale a mostrar que $n \cdot b_k + \frac{n}{n-2} c_{k-2} = a_k$, para $2 \le k \le n-1$. Pois:

$$n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot b_k + \frac{n}{n-2} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \cdot c_k + \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n-2} =$$

$$n \cdot b_0 - n \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k \cdot n \cdot b_k + \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k \cdot \frac{n}{n-2} \cdot c_k + \frac{(-1)^{n-2} \cdot n}{n-2} \cdot c_{n-2} + \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n-2} =$$

$$n \cdot b_0 - n \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k \cdot \left(n \cdot b_k + \frac{n}{n-2} \cdot c_{k-2} \right) + \frac{(-1)^{n-2} \cdot n}{n-2} \cdot c_{n-2} + \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n-2}$$

Veja ainda que $c_{n-2} = \frac{2n-4}{n-2}\binom{n-2}{n-2}\cdot 0! = 2$ e que $n\cdot b_0 - n\cdot b_1 = a_0 - a_1$, pois

$$n\cdot b_0 - n\cdot b_1 = n\cdot\frac{2n-2}{2n-2}\binom{2n-2}{0}(n-1)! - n\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\binom{2n-3}{1}(n-2)! =$$
$$\frac{2n}{2n}\binom{2n-2}{0}(n-0)! - \frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)! = a_0 - a_1.$$

Deste modo,

$$n\cdot U_{n-1} + \frac{n}{n-2}\cdot U_{n-2} + \frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{n-2} = a_0 - a_1 + \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k\cdot a_k + \frac{(-1)^{n-2}\cdot n}{n-2}\cdot 2 + \frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{n-2} =$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot a_k + \frac{(-1)^{n-2}\cdot(2n-4)}{n-2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot a_k + (-1)^n\cdot 2 =$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot a_k + (-1)^n\cdot a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot a_k = U_n$$

Resta provar que $n\cdot b_k + \frac{n}{n-2}c_{k-2} = a_k$ para $2 \le k \le n-1$.

De fato,

$$n\cdot b_k + \frac{n}{n-2}c_{k-2} = 2n\cdot\frac{(n-k-1)!}{2n-k-2}\left((n-1)\binom{2n-k-2}{k} + (n-k)\binom{2n-k-2}{k-2}\right) \Rightarrow$$
$$n\cdot b_k + \frac{n}{n-2}c_{k-2} = 2n\cdot\frac{(n-k)!(2n-2k-2)!}{2n-k-2}\left(\frac{(2n-2)(2n-2k-1)+k(k-1)}{k!\cdot(2n-2k)!}\right) \Rightarrow$$
$$n\cdot b_k + \frac{n}{n-2}c_{k-2} = \frac{2n(n-k)!(2n-2k-2)!}{2n-k-2}\left(\frac{4n^2-2n(2k+3)+(k+1)(k+2)}{k!\cdot(2n-2k)!}\right) \Rightarrow$$
$$n\cdot b_k + \frac{n}{n-2}c_{k-2} = \frac{2n(n-k)!(2n-2k-2)!}{2n-k-2}\left(\frac{(2n-k-1)(2n-k-2)}{k!\cdot(2n-2k)!}\right) \Rightarrow$$
$$n\cdot b_k + \frac{n}{n-2}c_{k-2} = \frac{2n(n-k)!}{2n-k}\left(\frac{(2n-k)!}{k!\cdot(2n-2k)!}\right) \Rightarrow$$
$$n\cdot b_k + \frac{n}{n-2}c_{k-2} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)! = a_k.$$

7 CONCLUSÃO

Apesar do enunciado simples, o problema de Lucas apresentou certa resistência para ser resolvido e algumas das técnicas usadas em sua solução estão relacionadas com modernas pesquisas na área de Matemática Discreta, algumas das quais possuem problemas em aberto como é o caso dos quadrados latinos. Nessa perspectiva, e considerando que problemas de contagem estão presentes no currículo do ensino médio, tentamos dar uma abordagem elementar a algumas dessas técnicas de contagem que foram utilizadas para resolver o problema de Lucas. Apresentamos também algumas relações entre esse problema e outras áreas da Matemática como a Álgebra Linear (teoria dos permanentes). Acreditamos que os problemas tratados neste trabalho constituem um tema desafiador e instigante aos alunos do Ensino Médio, assim como podem servir de inspiração para pesquisas mais avançadas em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

B. D. MCKAY AND I. M. WANLESS. On the number of Latin squares, Canberra, Austrália, 2005.

BOGART, K. P.; DOYLE, P. G. Non-sexist solution of the ménage problem. **American Mathematical Monthly**, 1986.

BOSE, R. C.; SHRIKHANDE, S. S.; AND PARKER, E. T. Further Results on the Construction of Mutually Orthogonal Latin Squares and the Falsity of Euler's Conjecture., 1960.

CAYLEY, A. Note on Mr. Muir's solution of a problem of arrangements. **Proc. Royal**, 1891.

DELAHAYE, J. P. A Ciência do Sudoku. **Scientific American Brasil**.

EULER, L. **Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum**. Teubner. Leipzig: Memoires de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg, v. vol.7, 1779.

HALL, P. On Representatives of Subsets. **Journal London Math. Soc.**, 1, 1935.

I. KAPLANSKY, P. ERDÖS. The asymptotic number of Latin rectangle. **Journal of Math**, v. 68, p. 230-236, 1946.

KAPLANSKY, I. Solution of the Problème des Ménages. **Bull. Amer. Math. Soc.**, 1943.

LUCAS, É. **Théorie des Nombres**. Paris: Gauthier-Villars, 1891.

MORGADO, AUGUSTO CÉSAR DE OLIVEIRA; CARVALHO, JOÃO BOSCO PITOMBEIRA. **Análise Combinatória e Probablidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MOSER, W. O. J. A generalization of Riordan's formula for 3xn latin rectangles. **Discrete Mathematics**, 40, 1982.

PRANESACHAR, C. R. On the number of two-line and three-line latin rectangles— an alternative approach, Bangalore, 38, 1982.

RIORDAN, J. **An introdutuction to combinatorial Analysis**. Londres: Chapman, 1958.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C.. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SHEVELEV, V. The Menage Problem With A Known Mathematician , 2011.

TAIT, P. G. On knots. **Trans. Roy. Sot. Edinburgh**, 28. Part I 145-190, 1876-1877.

TOUCHARD, J. Sur un probléme de permutations. **C. R. Acad. Sci. Paris, 198** , 1934.

WILSON, J. H. V. L. &. R. M. **A course in Combinatorics**. New York: Cambridge university press, 2001.

YAMAMOTO, K. On the asymptotic number of Latin rectangle. **Japanese Journal od Math**, v. 21, p. 113-119, 1951.