

# EFICIÊNCIA ENTRE O GRÁFICO DE CONTROLE POR GRUPOS PARA A MÉDIA E O DE SHEWHART PARA FLUXOS CORRELACIONADOS COM UM DESLOCAMENTO CONJUNTO NA MÉDIA E NA VARIÂNCIA DO PROCESSO

**MAX BRANDAO DE OLIVEIRA (UFC)**  
maxbrandao@gmail.com

**Joao Welliandre Carneiro Alexandre (UFC)**  
jwca@ufc.br

**NUBIA DA SILVA BATISTA BRANDAO (UFC)**  
nubiabatistabrandao@gmail.com

**SILVIA MARIA DE FREITAS (UFC)**  
silvia\_m\_d\_freitas@yahoo.com.br



*A produção em larga escala motivou a implementação dos chamados processos paralelos, aqueles cujos produtos são originados de vários fluxos produtivos. Tal configuração colaborou para a elaboração de uma nova alternativa de carta de controle, os Gráficos de Controle por Grupos (GG). Proposto em 1950 por Boyd, o GG consiste na elaboração de um único gráfico para o monitoramento do nível da qualidade e outro para a variabilidade do processo. O monitoramento dos processos paralelos por meio do Gráfico de Controle tradicional de Shewhart (GCS) requer a construção de duas cartas para cada fluxo, uma para o nível da qualidade e outro para variabilidade, significando uma análise individual para cada um deles, isso se justifica por não ser recomendado misturar produtos de fluxos distintos em uma amostra. Outro fator importante na construção dos gráficos de controle é a existência de uma estrutura de dependência nos processos paralelos, representada por uma autocorrelação nas amostras ou uma correlação entre os fluxos, que pode gerar sucessivos alarmes falsos. Por esta razão, é necessário fazer um estudo da eficiência entre o GG e o GCS quanto ao desempenho em sinalizar causas especiais. Neste sentido, o objetivo deste artigo consiste em analisar o desempenho e a eficiência entre o GCS e o GG para em processos paralelos com fluxos correlacionados na ocorrência de um deslocamento conjunto na média e na variância do processo. Para a obtenção dos resultados, desenvolveu-se um algoritmo de simulação com base no método de Monte Carlo que foi implementado no software R. Resultados indicam que, quanto maior o deslocamento na média e na variância, ambas as cartas de controle têm o mesmo desempenho na detecção da*

*perturbação, independente do nível de correlação entre fluxos. Porém, para pequenas perturbações, o GCS é mais rápido quanto à detecção do deslocamento do que o GG.*

*Palavras-chaves: Gráficos por Grupos, Processos Paralelos, Fluxos Correlacionados*

## 1. Introdução

Os processos paralelos (PP), aqueles cujos produtos são originados de mais de um fluxo produtivo, vem sendo amplamente utilizados na indústria de transformação. Essa configuração favorece o aumento da produção, motivado pela produção em larga escala e pela evolução industrial.

Os processos paralelos burocratizam o monitoramento por meio do Gráfico de Controle tradicional de Shewhart (GCS), já que não é interessante coletar uma amostra com produtos de fluxos distintos, assume-se cada fluxo como uma população que carrega uma informação própria, misturá-los pode ocasionar distorções nos resultados e levar a conclusões equivocadas acerca da estabilidade estatística do processo. Segundo Costa, Epprecht e Carpinetti (2010), essa distorção pode ser fruto da estratificação dos subgrupos racionais.

A carta tradicional de Shewhart é capaz de resolver o problema de estratificação nos processos paralelos através da elaboração de um gráfico de controle para o nível da qualidade e outro para variabilidade de cada fluxo (SHEWHART, 1931). Desta forma, seria necessário monitorar cada fluxo isoladamente. No entanto, essa alternativa elevaria os custos e o tempo de inspeção dos produtos, deixando a análise ainda mais complexa.

Por este motivo, Boyd (1950) propõe uma alternativa para solucionar esse problema através da construção do Gráfico de Controle por Grupos (GG), possibilitando construir apenas dois gráficos de controle para monitorar vários fluxos de produção, um para o nível da qualidade e outro para a variabilidade do processo.

Apesar de ser apresentado em 1950 pela primeira vez, ainda existe carência de estudos no desenvolvimento de estruturas probabilísticas e na determinação do desempenho e da eficiência do modelo, principalmente no que se refere à presença de uma estrutura de dependência inserida nos processos paralelos, que pode proporcionar sucessivos alarmes falsos. Um dos fatores que pode favorecer essa carência se encontra na complexidade de utilizar-se função de distribuição de probabilidade normal quando há um grau de dependência entre os fluxos.

Grinshaw e Brice (1999) e Vasconcelos (2009) desenvolvem o modelo probabilístico clássico e obtêm o desempenho e a eficiência entre o GCS e o GG satisfazendo as duas condições básicas dos gráficos de controle, fluxos não correlacionados e a característica da qualidade  $X$  normalmente distribuída com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . O presente artigo, por outro lado, colabora na mesma linha de pesquisa tendo objetivo de investigar o desempenho e a eficiência do GG com relação ao gráfico de Shewhart quanto à detecção de um deslocamento conjunto na média e na variância do processo com fluxos correlacionados.

Para atingir os resultados, um algoritmo de simulação foi desenvolvido no *software* de código aberto R. O algoritmo é baseado no método de Monte Carlo e determina o número médio de amostras até a detecção de um deslocamento na média e na variância do processo (NMA<sub>2</sub>), permitindo fazer inferências em diversos cenários.

No desenvolvimento deste artigo serão apresentados, nas próximas seções, os Gráficos de Controle por Grupos (GG), o indicador de desempenho, o algoritmo de simulação, os resultados e a conclusão.

## 2. Gráficos de controle por grupos (GG)

Os GG possuem uma elaboração simples, onde os subgrupos racionais são a base de sua formação. Neste sentido, sua matriz de dados é organizada conforme a Tabela 1, possuindo  $m$  grupos com  $k$  fluxos, no processo produtivo. Mortell e Runger (1995) afirmam que o esquema de controle do GG tem dois objetivos preliminares, (1) detectar um deslocamento na média de todos os fluxos e (2) detectar um deslocamento na média de um fluxo individual do produto.

Tabela 1 – Modelo de organização da planilha de dados

<b>Grupo</b>	<b>Fluxo</b>	<b>Prod. 1</b>	...	<b>Prod. n</b>	$\bar{X}$	<b>R</b>
1	1	$X_{111}$	...	$X_{11n}$		$R_{11}$
	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	k	$X_{1k1}$	...	$X_{1kn}$	$\bar{X}_{1k}$	$R_{1k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	1	$X_{m11}$	...	$X_{m1n}$	$\bar{X}_{m1}$	$R_{m1}$
	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	k	$X_{mk1}$	...	$X_{mkn}$	$\bar{X}_{mk}$	$R_{mk}$

Fonte: Produção do próprio autor

Os limites de controle (LC) são baseados no modelo tradicional de Shewhart, ou seja,

$$LSC_X = \mu_X + L\sigma_X$$

$$LC_X = \mu_X$$

$$LIC_X = \mu_X - L\sigma_X$$

onde  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  é a característica da qualidade a ser monitorada. Os limites superior e inferior de controle e a linha central são dados, respectivamente, por  $LSC_X$ ,  $LIC_X$ , e  $LC_X$  e o fator de largura do intervalo é dado por  $L$  (MONTGOMERY, 2009).

De acordo com Ramos (2000), são adotadas as seguintes etapas para a construção dos GG da média e da amplitude,  $\bar{X}$  e  $R$ , respectivamente:

- a) É iniciada uma coleta sistemática de amostras de cada fluxo, da mesma forma que faria para a construção de gráficos para a média e para amplitude em cada fluxo individual, seguindo o modelo tradicional de Shewhart;
- b) Em seguida são calculadas a média e a amplitude para cada amostra selecionada anteriormente. As amostras selecionadas devem ser de um processo sob controle para a elaboração do GG, calculando a média geral e a amplitude da média;
- c) Os limites de controle são determinados para o GG para a média e a amplitude, de forma semelhante aos calculados para o gráfico de Shewhart;
- d) Por fim, no gráfico para a média, a maior e a menor média de cada grupo são plotadas, enquanto que no gráfico para a amplitude é plotada apenas a maior amplitude.

Quando o máximo e o mínimo estiverem dentro dos LC e apresentarem um comportamento aleatório, tem-se uma indicação de que o processo está sob controle; caso contrário, é recomendado investigar, identificar e corrigir as causas que levaram a esse estado de instabilidade no processo. Cada par de pontos do GG para a média está associado a um fluxo, e se um deles estiver além dos limites de controle é simples detectar a fonte do problema (GRIMSHAW; BRYCE, 1999).

Aparentemente, em relação à praticidade, o GG apresenta muitas vantagens em relação ao GCS. Porém, é necessário quantificar esse desempenho. Para isto é necessário determinar o Número Médio de Amostras (NMA) até a ocorrência de um sinal (ponto fora dos limites de controle).

Grinshaw e Brice (1999) desenvolvem um método de obtenção do fator de largura para manter a mesma taxa de alarme falso entre o GG e o GCS. Vasconcelos (2009) utiliza esse método na determinação do desempenho e da eficiência entre o GG e GCS de forma probabilística, satisfazendo as duas condições básicas. Oliveira *et al* (2011) desenvolvem um procedimento análogo através de simulação. Epprecht, Barbosa e Simões (2011) elaboram um estudo semelhante, contudo quando um deslocamento na média ocorre em apenas um dos fluxos do processo paralelo (PP). Neste caso, o diferencial deste trabalho consiste em analisar o comportamento do GG e do GCS na presença de correlação entre os fluxos e de um deslocamento na média do processo.

### 3. Determinação do NMA

Os gráficos de controle podem ser vistos como um teste de hipóteses, onde

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

em que a hipótese  $H_0$  afirma que o processo está sob controle e a hipóteses  $H_1$  afirma que o processo está fora de controle. A probabilidade do Erro do Tipo I, o alarme falso no contexto dos gráficos de controle, é quantificada por

$$P(ETI) = P(\bar{X} \notin [LIC, LSC] | \mu = \mu_0). \quad (1)$$

Para vários fluxos, (1) é reescrito por

$$P(ETI_k) = P\left(\bigcup_{i=1}^k \bar{X}_i \notin [LIC, LSC] \mid \mu = \mu_0\right) \quad (2)$$

ou ainda,

$$P(ETI_k) = 1 - P(\bar{X} \in [LIC, LSC] \mid \mu = \mu_0)^k. \quad (3)$$

No Controle Estatístico do Processo (CEP), a probabilidade do Erro do Tipo I ocorre ao se afirmar que o processo está fora de controle, quando de fato não está. A probabilidade apresentada em (3) é usada como parâmetro de uma distribuição geométrica  $Y$ , descrita como o número de ensaios até a ocorrência do primeiro sucesso ( $Y \sim G(p)$ ) (MORETTIM; BUSSAB, 2010).

A esperança de  $Y$  ( $E(Y)$ ) retrata o número médio de ensaios até a ocorrência do primeiro sucesso. Assumindo o sucesso como sendo o alarme falso, define-se o  $NMA_1$  como

$$E(Y) = NMA_1 = \frac{1}{p} = P\left(\bigcup_{i=1}^k \bar{X}_i \notin [LIC, LSC] \mid \mu = \mu_0\right)^{-1}, \quad (4)$$

que pode ser escrito como,

$$NMA_1 = \frac{1}{1 - [\Phi(L) - \Phi(-L)]^k} \quad (5)$$

em que  $\Phi(L)$  representa a função de distribuição acumulada da normal no ponto  $L$ .

Por outro lado, admitindo  $p = P(ETI_k)$ , um deslocamento na média  $\mu^* = \mu + \delta\sigma$  ( $\delta \neq 0$ ) e um deslocamento na variância  $\lambda^* = \lambda^2\sigma^2$  ( $\lambda > 0$ ),  $E(Y)$  se refere ao número médio de amostras até a detecção de um deslocamento na média e na variância do processo, denominado  $NMA_2$ , dado por

$$NMA_2 = \frac{1}{p} = P\left(\bigcup_{i=1}^k \bar{X}_i \notin [LIC, LSC] \mid \mu = \mu^*; \lambda = \lambda^*\right)^{-1}, \quad (6)$$

que pode ser reescrito como

$$NMA_2 = \frac{1}{1 - \left[ \Phi\left(\frac{-\delta\sqrt{n} + L}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta\sqrt{n} - L}{\lambda}\right) \right]^k}. \quad (7)$$

A expressão (7) é usada neste artigo como indicador para contabilizar o número médio de amostras até a detecção de um deslocamento na média e na variância do processo. Contudo, esta expressão é definida para fluxos não correlacionados. Destaca-se ainda que, por se tratar de uma distribuição normal, o fato dos fluxos serem correlacionados implica em dependência.

Ao se considerar uma estrutura de dependência entre os fluxos, impossibilita-se a utilização de (7) e aumenta a complexidade no cálculo de  $NMA_2$ , pois ainda não existe fórmula fechada e exige o uso de recursos computacionais para determiná-la (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). Por estas razões, este estudo foi realizado através de simulações para determinar o NMA neste contexto.

Visando comparar os dois modelos na presença da correlação entre os fluxos, utiliza-se a Eficiência Relativa (ER) do NMA entre o GCS ( $NMA_{2S}$ ) e o GG ( $NMA_{2G}$ ). A Eficiência Relativa é uma razão simples entre o indicador do GCS e o do GG, ou seja,

$$ER = \frac{NMA_{2S}}{NMA_{2G}}, \text{ se } \begin{cases} = 1 \rightarrow \text{Equivalentes} \\ < 1 \rightarrow \text{GCS} \\ > 1 \rightarrow \text{GG.} \end{cases} \quad (8)$$

Caso ER seja menor que 1, a eficiência do GCS é melhor do que a do GG, pois requer menos amostras para detectar a perturbação. Por outro lado, se for maior do que 1, a eficiência do GG é melhor do que a do GCS. Em último caso, quando ER é igual a 1, os dois modelos são equivalentes.

#### 4. Algoritmo de simulação

A simulação consiste em uma tentativa de representar uma esfera da realidade através de variáveis abstratas, associadas a questões referentes ao objetivo da pesquisa, e a criação de cenários de operações onde estas variáveis podem ser verificadas (BRYMAN, 1989). Desta forma, este artigo emprega a simulação na determinação do desempenho e da eficiência do GG em relação ao GCS na presença da correlação entre os fluxos, e de um deslocamento conjunto na média e na variância do processo.



A simulação é fundamentada no método de Monte Carlo, como uma estratégia que se baseia na geração de quantidades aleatórias para atribuir valores às variáveis do sistema que se deseja investigar (LUSTOSA; PONTE; DOMINAS, 2004). Os números são obtidos através de artifícios aleatórios ou diretamente de *softwares*, como mostra Gentle (2003). A cada iteração do laço externo, consegue-se um resultado que é registrado para compor um vetor contendo uma distribuição de frequência que permite calcular, por exemplo, estatísticas descritivas, como média e desvio-padrão.

O cálculo do  $NMA_2$  para fluxos dependentes consiste na execução de uma função a partir de uma sequência de passos:

- a) Os parâmetros de entrada no algoritmo são a média ( $\mu$ ) e a variância ( $\sigma^2$ ) do processo, a quantidade de fluxos ( $k$ ), o tamanho da amostra ( $n$ ), a correlação entre os fluxos ( $r$ ), o fator de largura ( $L$ ), o parâmetro de perturbação na variância ( $\lambda$ ) e o parâmetro de perturbação na média ( $\delta$ );
- b) Inseridos os parâmetros, gera-se um vetor vazio ( $v$ ) responsável por acumular o contador, fundamental no cálculo do  $NMA_2$ ;
- c) Executando o método de Monte Carlo, inicia-se um laço externo (de tamanho 500) com o contador inicializado em 0 em cada iteração;
- d) No interior do laço externo, geram-se quantidades que configurem o ambiente abordado na pesquisa, ou seja, amostras baseadas nos dados de entrada, sendo um grupo com  $k$  fluxos,  $n$  observações e correlação  $r$ , tendo os limites baseados nas quantidades  $L$  e  $\sigma$ . Dessa amostra, são escolhidos o mínimo e o máximo;
- e) De posse dos valores obtidos, e ainda dentro do laço externo, inicia-se o laço interno (*While*), o qual julga se as médias pertencem aos limites de controle. Isto é, enquanto o mínimo e o máximo estiverem sob controle, o contador é adicionado de 1 e se reinicia o laço interno. Quando pelo menos uma das medidas estiver fora de controle, finaliza-se o laço e armazena-se a quantidade em  $v$ ;
- f)  $v$  tem 500 observações referentes aos contadores e deles é calculada a média como sendo o indicador desejado ( $NMA_2$ ).

Destaca-se que os ambientes simulados neste artigo assumem, sem perda de generalidade,  $n = 4$ ,  $\mu = \sigma^2 = 100$ ,  $r = (0,10; 0,50; 0,90)$ ,  $k = (3, 5, 10)$ ,  $\lambda = (1,5; 2; 3 \text{ e } 5)$  e  $\delta = (0,1; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0)$ , bem como consideram o processo inicialmente sob controle.

## 5. Resultados e discussões

Visando comparar o GG e o GCS, é necessário determinar o fator de largura do intervalo ( $L$ ) para manter a mesma taxa de alarme falso em ambas as cartas de controle, em média 370 inspeções até a ocorrência do primeiro alarme falso. Assim, o algoritmo proposto foi utilizado na definição dessas quantidades.

Para a obtenção de  $L$ , foi utilizada uma heurística que executa o algoritmo até que o  $NMA_1$  pertença ao intervalo (365; 375). Os dados de entrada do algoritmo, sem perda de generalidade, são  $\mu = \sigma^2 = 100$ ,  $n = 4$ ,  $k$  e  $r$ , conforme citado acima, e um  $L_0$  inicial selecionado em função dos possíveis valores de  $L$  e de observações empíricas. Caso o valor retornado pelo algoritmo esteja entre 365 e 375, o processo é interrompido e armazena-se o valor de  $L$ , caso contrário, adiciona-se 0,01 a  $L_0$  e inicia-se o procedimento novamente. Destaca-se que o fator de largura aumenta de acordo com o número de fluxos, ou seja,  $L_i > L_j$ , para  $i > j$ . Os valores de  $L$  determinados são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores de  $L$  para  $k$  e  $r$  distintos

<b>k</b>	<b>r = 0,10</b>	<b>r = 0,50</b>	<b>r = 0,90</b>
3	3,42	3,38	3,31
5	3,57	3,57	3,45
10	3,78	3,77	3,61

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 3 –  $NMA_{2S}$  com correlação entre os fluxos e um deslocamento na média e na variância do processo

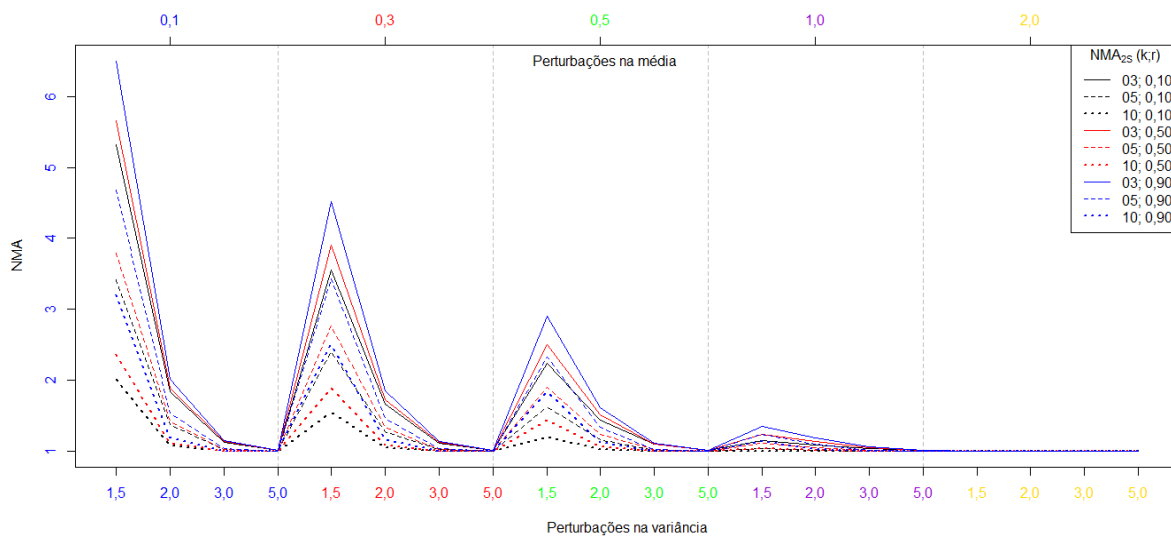
$\delta$	$\lambda$	$r = 0,1$			$r = 0,5$			$r = 0,9$		
		3	5	10	3	5	10	3	5	10
0,1	1,5	5,3174	3,4229	2,0199	5,6599	3,7983	2,3672	6,4947	4,6868	3,2008
	2,0	1,8362	1,3709	1,0803	1,8893	1,4222	1,1119	2,0141	1,5416	1,1915
	3,0	1,1314	1,0285	1,0008	1,1359	1,0311	1,0010	1,1461	1,0368	1,0017
	5,0	1,0140	1,0008	1,0000	1,0142	1,0008	1,0000	1,0146	1,0009	1,0000
0,3	1,5	3,5595	2,3966	1,5484	3,9040	2,7682	1,8846	4,5221	3,4278	2,5019
	2,0	1,6593	1,2791	1,0536	1,7288	1,3438	1,0896	1,8496	1,4575	1,1630
	3,0	1,1187	1,0246	1,0006	1,1250	1,0280	1,0009	1,1360	1,0340	1,0015
	5,0	1,0134	1,0007	1,0000	1,0137	1,0008	1,0000	1,0141	1,0009	1,0000
0,5	1,5	2,2421	1,6258	1,2019	2,5042	1,9060	1,4441	2,8984	2,3261	1,8365
	2,0	1,4322	1,1648	1,0244	1,5100	1,2343	1,0580	1,6185	1,3341	1,1193
	3,0	1,0971	1,0184	1,0004	1,1058	1,0228	1,0007	1,1179	1,0289	1,0012
	5,0	1,0123	1,0006	1,0000	1,0126	1,0007	1,0000	1,0132	1,0008	1,0000
1,0	1,5	1,1464	1,0405	1,0031	1,2362	1,1151	1,0394	1,3559	1,2323	1,1324
	2,0	1,0871	1,0180	1,0006	1,1330	1,0485	1,0082	1,1899	1,0945	1,0303
	3,0	1,0392	1,0047	1,0000	1,0499	1,0087	1,0002	1,0620	1,0136	1,0005
	5,0	1,0081	1,0003	1,0000	1,0088	1,0004	1,0000	1,0096	1,0005	1,0000
2,0	1,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0006	1,0001	1,0000	1,0028	1,0010	1,0003
	2,0	1,0003	1,0000	1,0000	1,0014	1,0001	1,0000	1,0043	1,0011	1,0002
	3,0	1,0012	1,0000	1,0000	1,0029	1,0002	1,0000	1,0055	1,0007	1,0000
	5,0	1,0015	1,0000	1,0000	1,0021	1,0001	1,0000	1,0027	1,0001	1,0000

Fonte: Produção do próprio autor

Em seguida, o *software* R foi usado no cálculo do número médio de amostras até a detecção de uma perturbação conjunta na média e na variância do processo para o GCS. O cálculo mantém  $L = 3$  para quaisquer números de fluxos ( $k$ ) e considera  $\mu = \sigma^2 = 100$ ,  $r = (0,10; 0,50$  e  $0,90)$ ,  $k = (3, 5, 10)$ ,  $n = 4$ ,  $\delta = (0,1; 0,3; 0,5; 1,0$  e  $2,0)$  o parâmetro de perturbação da média e  $\lambda = (1,5; 2; 3$  e  $5)$  o parâmetro de perturbação da variância. Um procedimento análogo é realizado para o GG, no entanto, o L utilizado é baseado na Tabela 2, e o indicador é obtido por meio do algoritmo desenvolvido. Os valores do  $NMA_2$  para o GCS ( $NMA_{2S}$ ) estão expostos na Tabela 3.

Percebe-se que, quando o número de fluxos  $k$  e a correlação  $r$  estão constantes, o  $NMA_{2S}$  reduz à medida que  $\lambda$  ou  $\delta$  aumentam. Fixando  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $k$ , o indicador aumenta à medida que a correlação cresce. No último cenário, quando  $r$  e  $\delta$  são fixados, o  $NMA_{2S}$  diminui quando o número de fluxos aumenta. Tais resultados são apresentados na Figura 1.

Figura 1 –  $NMA_{2S}$  com 3, 5 e 10 fluxos, correlação 0,1; 0,5 e 0,9 e uma perturbação na média e na variância do processo



Fonte: Produção do próprio autor

A Tabela 3 dá indícios que  $r$  afeta, como esperado, o comportamento do  $NMA_{2S}$ . Observa-se que, para  $r = 0,10$ , o indicador é inferior ao de correlação 0,50. Em outras palavras, quanto maior o nível de dependência entre os fluxos, mais amostras são necessárias até a detecção de um deslocamento na média do processo. Porém, para elevadas perturbações ( $\delta = 1$  e 2;  $\lambda = 3$  e 5), ocorre uma convergência para 1 do  $NMA_{2S}$  nos cenários analisados. Os valores do  $NMA_2$  para o GG ( $NMA_{2G}$ ) estão apresentados na Tabela 4.

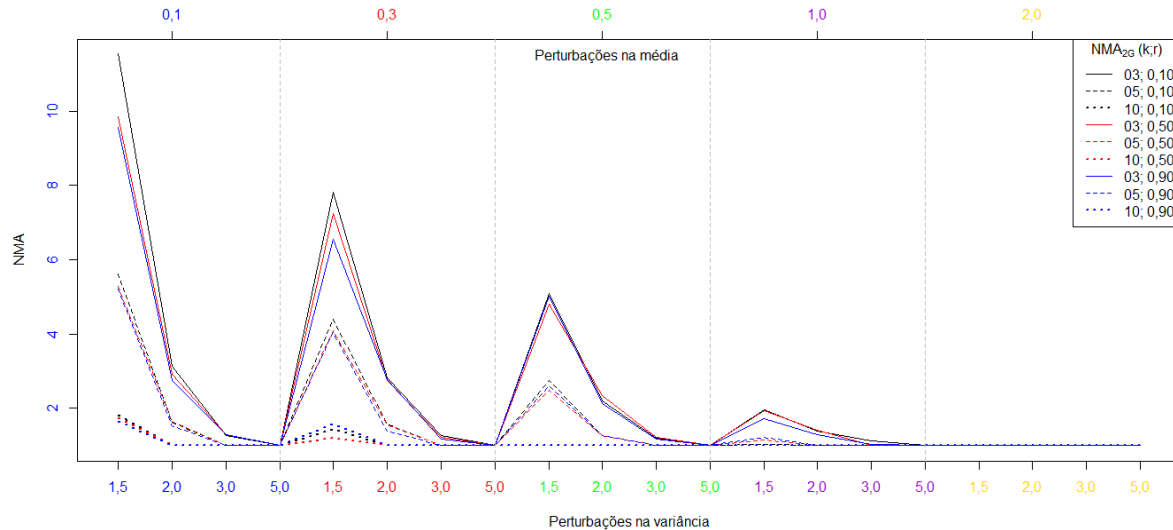
Com base na Tabela 4, percebe-se que, fixando  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $k$ , o indicador apresenta uma queda relação à  $r$  (ver Figura 2). Quando o número de fluxos  $k$  e a correlação  $r$  permanecem fixos, o  $NMA_{2G}$  reduz à medida que as perturbações  $\delta$  ou  $\lambda$  aumentam. Por fim, quando  $r$ ,  $\lambda$  e  $\delta$  são fixados, o  $NMA_{2G}$  diminui quando o número de fluxos cresce. Diante dos resultados, têm-se evidências que a correlação influencia em ambas as cartas de controle. Em seguida, de acordo com a equação (8), calculou-se a eficiência relativa entre os dois modelos, apresentada na Tabela 5.

Tabela 4 – NMA<sub>2G</sub> com correlação entre os fluxos e um deslocamento na média e na variância do processo

$\delta$	$\lambda$	$r = 0,1$			$r = 0,5$			$r = 0,9$		
		3	5	10	3	5	10	3	5	10
0,1	1,5	11,5500	5,6220	1,8120	9,8360	5,2800	1,7320	9,5500	5,2140	1,6520
	2,0	3,1200	1,6280	1,0000	2,9100	1,6480	1,0000	2,7460	1,5300	1,0000
	3,0	1,2700	1,0000	1,0000	1,2820	1,0000	1,0000	1,2940	1,0000	1,0000
	5,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	1,5	7,8240	4,4020	1,4220	7,2300	4,0940	1,1880	6,5400	4,0300	1,5780
	2,0	2,8280	1,5760	1,0000	2,7540	1,5420	1,0000	2,7680	1,3900	1,0000
	3,0	1,2520	1,0000	1,0000	1,2060	1,0000	1,0000	1,1740	1,0000	1,0000
	5,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	1,5	5,0840	2,7440	1,0000	4,7900	2,4840	1,0000	5,0060	2,6080	1,0000
	2,0	2,1840	1,2660	1,0000	2,3320	1,2520	1,0000	2,1260	1,2680	1,0000
	3,0	1,1800	1,0000	1,0000	1,2260	1,0000	1,0000	1,1760	1,0000	1,0000
	5,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0	1,5	1,9500	1,0240	1,0000	1,9360	1,1520	1,0000	1,7260	1,2260	1,0000
	2,0	1,3860	1,0000	1,0000	1,4080	1,0000	1,0000	1,2920	1,0000	1,0000
	3,0	1,1280	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0140	1,0000	1,0000
	5,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,0	1,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	2,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	3,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	5,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fonte: Produção do próprio autor

Figura 2 –  $NMA_{2G}$  com 3, 5 e 10 fluxos, correlação 0,1; 0,5 e 0,9 e uma perturbação na média e na variância do processo



Fonte: Produção do próprio autor

Percebe-se na Tabela 5 que, em geral, a ER é inferior a 1, indicando a superioridade do GCS em relação ao GG, ou seja, na presença da correlação entre os fluxos, o desempenho em detectar a ocorrência de uma falha do GCS é superior ao GG. Observa-se ainda que, quando  $r$  e  $k$  permanecem constantes, a eficiência dos modelos aumenta quando a perturbação cresce, convergindo rapidamente para 1 quando  $\delta$  passa de 1,0 para 2,0.

Quando  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $k$  permanecem fixos, a eficiência cresce em função da correlação  $r$ , revelando a interferência da correlação no desempenho das cartas de controle. Por outro lado, fixando  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $r$ , o indicador cresce à medida que o número de fluxos aumenta, ou seja, quanto maior o número de fluxos, melhor é o desempenho do GG em relação ao GCS. Diante desse fenômeno, os resultados mostram que, para  $k > 5$ , o GG detecta mais rápido o deslocamento conjunto da média e da variância do processo. Os valores estão apresentados na Figura 3.

Tabela 5 – Eficiência relativa com dependência e um deslocamento na média e na variância do processo

$\delta$	$\lambda$	$r = 0,1$			$r = 0,5$			$r = 0,9$		
		$k$			$k$			$k$		
		3	5	10	3	5	10	3	5	10
0,1	1,5	0,4604	0,6088	1,1147	0,5754	0,7194	1,3667	0,6801	0,8989	1,9375
	2,0	0,5885	0,8421	1,0803	0,6492	0,8630	1,1119	0,7335	1,0076	1,1915
	3,0	0,8909	1,0285	1,0008	0,8860	1,0311	1,0010	0,8857	1,0368	1,0017
	5,0	1,0140	1,0008	1,0000	1,0142	1,0008	1,0000	1,0146	1,0009	1,0000
0,3	1,5	0,4549	0,5444	1,0889	0,5400	0,6762	1,5864	0,6915	0,8506	1,5855
	2,0	0,5867	0,8116	1,0536	0,6277	0,8715	1,0896	0,6682	1,0486	1,1630
	3,0	0,8935	1,0246	1,0006	0,9328	1,0280	1,0009	0,9676	1,0340	1,0015
	5,0	1,0134	1,0007	1,0000	1,0137	1,0008	1,0000	1,0141	1,0009	1,0000
0,5	1,5	0,4410	0,5925	1,2019	0,5228	0,7673	1,4441	0,5790	0,8919	1,8365
	2,0	0,6558	0,9201	1,0244	0,6475	0,9859	1,0580	0,7613	1,0521	1,1193
	3,0	0,9297	1,0184	1,0004	0,9020	1,0228	1,0007	0,9506	1,0289	1,0012
	5,0	1,0123	1,0006	1,0000	1,0126	1,0007	1,0000	1,0132	1,0008	1,0000
1,0	1,5	0,5879	1,0161	1,0031	0,6385	0,9680	1,0394	0,7856	1,0051	1,1324
	2,0	0,7843	1,0180	1,0006	0,8047	1,0485	1,0082	0,9210	1,0945	1,0303
	3,0	0,9213	1,0047	1,0000	1,0499	1,0087	1,0002	1,0473	1,0136	1,0005
	5,0	1,0081	1,0003	1,0000	1,0088	1,0004	1,0000	1,0096	1,0005	1,0000
2,0	1,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0006	1,0001	1,0000	1,0028	1,0010	1,0003
	2,0	1,0003	1,0000	1,0000	1,0014	1,0001	1,0000	1,0043	1,0011	1,0002
	3,0	1,0012	1,0000	1,0000	1,0029	1,0002	1,0000	1,0055	1,0007	1,0000
	5,0	1,0015	1,0000	1,0000	1,0021	1,0001	1,0000	1,0027	1,0001	1,0000

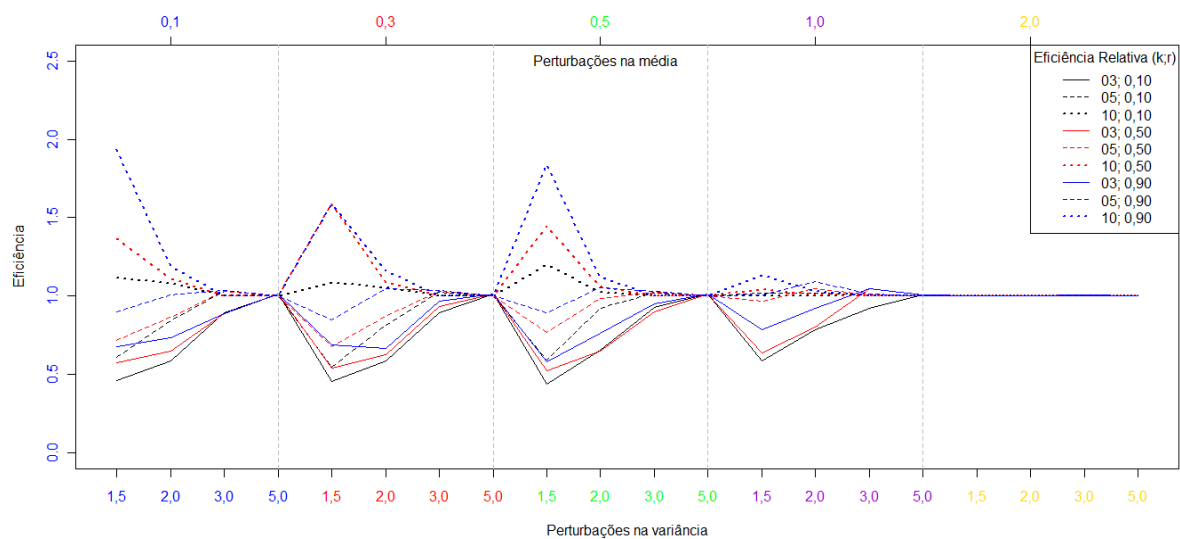
Fonte: Produção do próprio autor

A Tabela 5 indica que, para  $\delta = 0,3$ ,  $\lambda = 1,5$ ,  $r = 0,10$  e  $k = 3$ , o GCS chega ser duas vezes mais rápido na detecção de perturbação do que o GG. No entanto, quando para os mesmos valores de  $\lambda$ ,  $\delta$  e  $k$  e alterando a correlação para 0,9, os papéis se invertem e o GG é 8,8% mais rápido do que o GCS. Observando a Figura 3, percebe-se que, quando  $\lambda$  e  $k$  crescem, a



ER converge para 1, comprovando a equivalência entre as cartas. Além disso, quando  $k = 10$ , o GG, independente da variação dos outros parâmetros, é mais eficiente do que o GCS quanto à detecção da perturbação, chegando a ser 93% melhor quando  $k = 10$ ,  $r = 0,9$ ,  $\delta = 0,1$  e  $\lambda = 1,5$ .

Figura 3 – Eficiência relativa entre o Gráfico de Controle tradicional de Shewhart e o Gráfico por Grupos com uma perturbação na média e na variância do processo



Fonte: Produção do próprio autor

## 6. Conclusão

O artigo visou apresentar resultados referentes ao comportamento do desempenho e da eficiência entre o GG e o GCS quanto à detecção de um deslocamento conjunto na média e na variância do processo com fluxos correlacionados. Como mencionado, desenvolveu-se um algoritmo de simulação com base no método de Monte Carlo para calcular o número médio de amostras até a detecção de um deslocamento na média e na variância do processo ( $NMA_2$ ) na presença de correlação entre os fluxos.

Resultados apontam que, para pequenas perturbações ( $0,1 \leq \delta \leq 1,0$ ), o GCS detecta os deslocamentos da média e da variância mais rápido que o GG, até duas vezes mais. No entanto, quando  $\delta = 2$ , as duas cartas são equivalentes e a ER converge rapidamente para 1. O comportamento é análogo para  $\lambda$ , ou seja, quando  $\lambda = 1,5$ ; 2 e 3 o GCS é mais eficiente do que o GG, mas eles são equivalentes para  $\lambda = 5$ . Para  $k$  e  $r$ , o comportamento é semelhante, quanto



mais eles aumentam, mais a ER cresce.

Foi alcançado o objetivo, definindo uma relação entre a correlação e o NMA<sub>2</sub>. O método de simulação é importante, visto que viabiliza o estudo de cenários em processos paralelos com fluxos correlacionados, que se trata de outra contribuição do presente estudo.

Ficando como sugestão de pesquisa futura o desenvolvimento do estudo probabilístico acerca do tema abordado no artigo ao realizar o estudo para dados não normais.

## Referências

- BOYD, D.R. **Applying the Group Chart for  $\bar{X}$  and R**. *Industrial Quality Control*. n. 7, p. 22-25, 1950.
- BRYMAN, A. **Research methods and organization studies**. London: Unwin Hyman Ltd, 1989.
- COSTA A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade**. São Paulo, SP: Atlas, 2ª Edição, 2010.
- EPPRECHT, A. K.; BARBOSA, L. F. M.; SIMÕES, B. F. T. SPC of multiple stream processes – a chart for enhanced detection of shifts in one stream. *Produção*. v. 21, n. 2, p. 242-253, 2011
- GENTLE, J. E. **Random Number Generation and Monte Carlo Methods**. New York: Springer, 2003.
- GRIMSHAW, S.D.; BRYCE, G.R. Control Limits for Group Charts. *Quality Engineering*. n. 12 (2), p. 177-184, 1999.
- LUSTOSA, P. R. B.; PONTE, V. M. R.; DOMINAS, W. R. **Pesquisa Operacional para decisão em contabilidade e administração**. São Paulo: Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 4ª Edição, 2009.
- MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A., BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1974.
- MORETTIM, P.A.; BUSSAB, W.O. **Estatística Básica**. 6. ed. São Paulo, SP: Editora Saraiva, 2010.
- MORTELL, R.R.; RUNGER, G.C. Statistical Process Control of Multiple Stream Processes. *Journal of Quality Technology*. n.27, p. 1-22, 1995.
- OLIVEIRA, M.B.; ALEXANDRE, J.W.C.; VASCONCELOS, A.P.; FREITAS, S.M. Um estudo sobre o desempenho e eficiência dos gráficos de controle por grupos em processos paralelos através da simulação das distribuições do mínimo e do máximo. In: **Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção**. [S.l.: s.n.], v. 31, 2011.
- RAMOS, A.W. **CEP para Processos Contínuos e em Bateladas**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 2000.
- SHEWHART, W. A. **Economic Control Quality of Manufacturing Product**. New York: Van Nostrand, 1931.

VASCONCELOS, A.P. **Um Estudo sobre o desempenho e eficiência do Gráfico de Controle por Grupos em Processos Paralelos**. Fortaleza: UFC, 2009. 75 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Logística e Pesquisa Operacional, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2009.

VASCONCELOS, A.P.; ALEXANDRE, J. W. C. ; FREITAS, S. M. Estudo do Gráfico de Controle por Grupos como uma Alternativa ao modelo de Shewhart em Processos Paralelos. In: **XXX ENEGEP** - Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 2010, São Carlos - SP. Anais (CD-ROM), 2010.