



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SAMUEL MORAIS DA SILVA

PROPRIEDADES DINÂMICAS DE REDES DE KLEINBERG

FORTALEZA

2015

SAMUEL MORAIS DA SILVA

PROPRIEDADES DINÂMICAS DE REDES DE KLEINBERG

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ascanio Dias Araujo.

Coorientador: Dr. Saulo-Davi Soares Reis.

FORTALEZA

2015

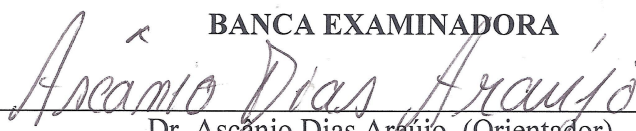
SAMUEL MORAIS DA SILVA

PROPRIEDADES DINÂMICAS EM REDES DE KLEINBERG

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

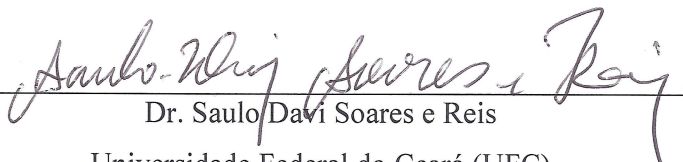
Aprovada em 08/07/2015.

BANCA EXAMINADORA



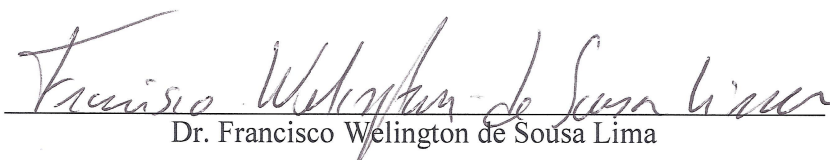
Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Dr. Saulo Davi Soares e Reis

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Dr. Francisco Wellington de Sousa Lima

Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

S583p Silva, Samuel Morais da
Propriedades dinâmicas de redes de Kleinberg / Samuel Morais da Silva. – Fortaleza, 2015.
71 f.: il. algumas color. enc.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2015.

Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

Coorientação: Prof. Dr. Saulo-Davi Soares e Reis.

Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Kleinberg, redes de. 2. Sistemas complexos. 3. Propriedades de transporte. 4. Criticalidade.
5. Modelo *small world*. I. Araújo, Ascânio Dias. II. Reis, Saulo-Davi Soares e. III. Título.

CDD 530.0285

*A Deus, a quem devo
tudo. A meus pais,
José Wilson da Silva
e Lucineide Moraes
da Silva e irmãos,
Jefferson Moraes da
Silva e José
Wellington Moraes
da Silva e minha
amada noiva, Maria
Luana Gaudêncio
Santos. Amo muito
todos vocês.*

*Os que se tornam
sábios são felizes, e
a sabedoria lhes dará
vida.
Provérbios 3:18.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar comigo e a minha família que sempre me apoiou e oraram para que tudo desse certo. A meus pais, José Wilson da Silva e Lucineide Moraes da Silva que foram e são meus exemplos. A meus irmãos, Jefferson Moraes da Silva e José Wellington Moraes da Silva. A minha querida noiva Luana Gaudêncio dos Santos, pela paciência e incentivo.

Ao professor Dr. Ascânio Dias Araújo, pelo excelentíssimo trabalho de orientação, pela paciência em minhas demoras e e-mails. Ao Dr. Saulo-Davi Soares e Reis, pelo orientação e acompanhamento de minhas atividades. Ao Me. Rilder de Sousa Pires, pela impecável ajuda nos programas e desenvolvimento do trabalho. Aos amigos e companheiros de laboratório Calebe, Felipe, Thiago, Janete, Anderson, Leandro, e Nailson. Aos amigos e companheiros de estudo Felipe, Naiara e Gelson.

Ao CNPq, pela bolsa proporcionada durante todo o meu mestrado. Aos demais professores, secretários, alunos e colegas do Curso de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, pelo profissionalismo.

Enfim, agradeço a toda e qualquer pessoa que porventura tenha contribuído de alguma forma com este trabalho.

RESUMO

Um grande número de sistemas complexos são constituídos de partes ou componentes individuais interligados. A comunicação nestes sistemas é essencial para a sua existência sendo necessário o estudo de sua capacidade de se comunicar dependendo da quantidade de informação que está circulando na rede. A dinâmica do transporte de pacotes de informação em tais sistemas e o surgimento de seu congestionamento são problemas de elevado interesse científico e econômico. Neste trabalho, nós determinamos como os elementos de vários modelos de rede espacialmente embebidos, sendo redes regulares e redes de Kleinberg, alteram suas propriedades dinâmicas de transporte de pacotes tratando-as como redes de comunicação. Mais precisamente, estudamos uma transição de fase contínua de segunda ordem de uma fase de transporte de pacote livre para uma fase de congestão, quando os pacotes são acumulados na rede, e descrevemos esta transição por meio de expoentes críticos. Para as redes regulares em $1D$ e $2D$, vimos que respectivamente, o parâmetro crítico p_c escala com expoentes de aproximadamente -1 e -0.5 para o tamanho do sistema. Já nas redes de Kleinberg, nós mostramos que o melhor cenário, quando o tráfego de pacotes é mais resiliente para o aumento do número de pacotes, é conseguido quando os atalhos são adicionados à rede entre dois nós, nomeadamente nós i e j , com probabilidade $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$ quando $\alpha = d$, onde d é a dimensão da estrutura subjacente. Além disso, este resultado é obtido não só a partir da medição direta do parâmetro de ordem, ou seja, a relação entre o número de pacotes não entregues e pacotes gerados, mas também é suportada pela nossa análise de tamanho finito.

Palavras-chave: Kleinberg Mundo-Pequeno Dinâmica Criticalidade Transporte

ABSTRACT

A great number of systems defined as complex consist of interconnected parts or individual components performing a network or graph. Communication between the parts is essential for their existence so that it is necessary a better understanding of their ability to communicate depending on the amount of information that transits. The dynamics of package transport in these systems and the emergence of congestion are problems of high scientific and economic interest. In this work we investigate the dynamical properties of transport of packages (informations) between sources and previously defined destinations, considering different models of spatially embedded networks such as lattice and Kleinberg. More precisely, we study a second-order continuous phase transition from a phase of free transport to a congestion phase, when the packages are accumulated in certain regions of the network. By means of a Finite Size Scaling, we describe this phase transition characterizing its critical exponents. For 1D and 2D lattice networks, we observe that the critical parameter p_c scales with exponents approximately -1 and -0.5 with respect to the system size. In the case of Kleinberg networks where shortcuts between two nodes i and j are added to the network according to a probability distribution given by $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$, we show that the best scenario occurs when $\alpha = d$, where d is the dimension of the topology structure. In this regime, package traffic were shown to be more resilient to the increase of number of packages in the network. The confirmation of our result is obtained not only from direct measure of order parameter, that is, the ratio between undelivered and generated packets, but is also supported by our analysis of finite size.

Keywords: Kleinberg Small-World Dynamical Criticality Transport

Lista de Figuras

Figura 1 – Representação das pontes de Königsberg em mapa e grafo.	19
Figura 2 – Tipos de grafos que representam uma rede.	20
Figura 3 – Grafo de exemplificação	21
Figura 4 – Tipos de redes regulares	22
Figura 5 – Grafo do tipo árvore	23
Figura 6 – Construção da rede de Erdos-Renyi	24
Figura 7 – Mapa dos Estados Unidos da América	26
Figura 8 – Seis graus/ligações de separação	27
Figura 9 – Transição do modelo de Watts-Strogatz	29
Figura 10 – Construção de uma rede Kleinberg	32
Figura 11 – Evolução do modelo de Barabási-Albert	36
Figura 12 – Modelo de transporte de pacotes	39
Figura 13 – Cálculo do parâmetro de ordem e suscetibilidade	41
Figura 14 – Suscetibilidade para redes unidimensionais	42
Figura 15 – Suscetibilidade para redes bidimensionais	44
Figura 16 – Espectros de potência para rede unidimensional e bidimensional	47
Figura 17 – Comportamento da frequência característica para $\xi = 1$	47
Figura 18 – Evolução do congestionamento na rede	51
Figura 19 – Rede regular unidimensional com condição de contorno periódica	56
Figura 20 – Congestionamento na rede com condição de contorno periódica	59
Figura 21 – Variação da probabilidade crítica p_c em função de α para vários tamanhos de redes	62
Figura 22 – Colapso de espectros de potência para $\alpha = 0, 1, 2$	64
Figura 23 – Evolução do congestionamento de pacotes na rede de Kleinberg em 2D	65

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Evolução do serviço telefônico fixo comutado	16
Gráfico 2 – Caminho médio e coeficiente de agregação normalizados	30
Gráfico 3 – Variação do expoente do tempo de envio de uma mensagem em relação a α	34
Gráfico 4 – Caminho mínimo médio e tempo de envio em uma rede de Kleinberg .	35
Gráfico 5 – Histograma de conectividade para rede de Barabási-Albert	37
Gráfico 6 – Parâmetro de ordem η em função da probabilidade p para uma rede 1D com $L=100$	42
Gráfico 7 – Lei de potência de p_c em função do tamanho da rede	43
Gráfico 8 – Lei de potência de p_c em função do tamanho da rede	45
Gráfico 9 – Parâmetro de ordem normalizado para diferentes redes com $\xi = 1$. . .	46
Gráfico 10 – Comportamento da frequência característica para $\xi < 1$	48
Gráfico 11 – Transição de primeira ordem para $\xi > 1$	49
Gráfico 12 – Saturação dos espectros das redes unidimensionais	54
Gráfico 13 – Colapso dos espectros de potência para uma rede 1D com $L=100$. . .	55
Gráfico 14 – Colapso dos espectros de potência para uma rede 2D com $S=36$	56
Gráfico 15 – Lei de potência entre p_c e o tamanho da rede	57
Gráfico 16 – Lei de potência entre p_c e o tamanho da rede	58
Gráfico 17 – Suscetibilidade em função da probabilidade de criação de pacotes p na rede de Kleinberg	61
Gráfico 18 – Variação do expoente ρ para vários valores de α	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características de redes reais	28
Tabela 2 – Valores de centralidade de redes reais	30

LISTA DE SÍMBOLOS

p	Parâmetro de controle
p_c	Valor crítico do parâmetro de controle para criação de pacotes
η	Parâmetro de ordem
χ	Suscetibilidade do parâmetro de ordem
r	Distância Manhattan entre dois vértices i e j
α	Parâmetro controlador da probabilidade de estabelecer uma ligação de longo alcance
C	Conectividade de um sítio
L	Comprimento de caminho entre dois sítios
k_i	Capacidade de um sítio em receber/entregar pacotes
q_{ij}	Qualidade do canal que liga os sítios i e j
ξ	Parâmetro que controla como a capacidade dos sítios diminui
σ	Desvio padrão
ρ	Expoente de escala entre a probabilidade crítica de criação de pacotes e o tamanho do sistema
ϵ	Distância relativa do valor de p em relação a p_c
β	Expoente de escala do espectro de potência para $p > p_c$
ζ	Expoente de escala da saturação dos espectros de potência em relação a ϵ
τ	Tempo médio de entrega de pacotes

LISTA DE SIGLAS

LBL	Lawrence Berkeley National Laboratory
UC	University of California
Anatel	Agência Nacional de Telecomunicações
SMS	Short Message Service
STFC	Serviço Telefônico Fixo Comutado
<i>fft</i>	Fast Fourier Transform
UFC	Universidade Federal do Ceará

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	SISTEMAS COMPLEXOS: GRAFOS E REDES	18
2.1	Origem do estudo de redes complexas	18
2.2	Definições	19
2.3	Medidas de centralidade	20
2.4	Redes regulares euclidianas	21
2.5	Grafos aleatórios	22
2.6	Mundo Pequeno ou <i>Small World</i>	25
2.7	Watts-Strogatz	28
2.8	Redes de Kleinberg	31
2.9	Barabási-Albert	36
3	PROPRIEDADES DE TRANSPORTE EM REDES REGU- LARES 1D E 2D	38
3.1	Propriedades dinâmicas de rede em 1D e 2D	38
3.1.1	Caso crítico, $\xi = 1$	40
3.1.2	Caso não-crítico, $\xi > 1$ e $\xi < 1$	47
4	RESULTADOS OBTIDOS	52
4.1	Criticalidade e espectros de potência	52
4.1.1	Redes de Kleinberg em 2D	58
5	CONCLUSÕES GERAIS	66
	REFERÊNCIAS	68
	APÊNDICE A - CÁLCULO DO NÚMERO MÍNIMO DE SIMULAÇÕES EM UMA REDE DE KLEINBERG	71

1 INTRODUÇÃO

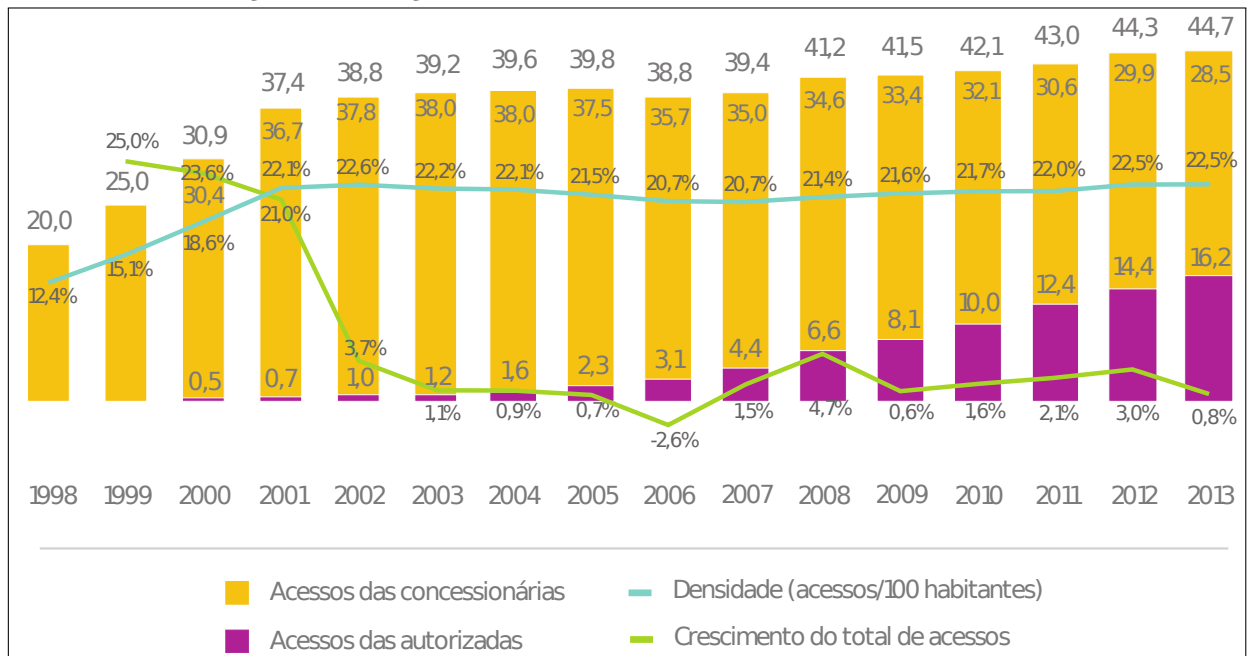
Nas últimas décadas ocorreu um crescimento bastante acentuado no interesse em sistemas classificados como complexos. Basicamente, estes sistemas são constituídos por elementos que interagem entre si, resultando em comportamentos coletivos que na maioria dos casos apresentam características bastante peculiares. Podemos citar como exemplos de tais sistemas a rede de conexão entre usuários da internet, a rede de transporte em cidades, as cadeias de alimentação entre as espécies de animais e vários outros Ref. [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Entender como características globais que emergem de comportamentos coletivos ocorrendo nestes sistemas, passou a ser uma tarefa de grande interesse científico e tecnológico. Por exemplo, entender como as pessoas movem-se nos grandes centros urbanos é de fundamental importância para um melhor planejamento dos investimentos a serem realizados no transporte coletivo nos grandes centros urbanos. Saber como se estabelecem as rotas de conexões entre os provedores na internet, é um conhecimento necessário para agilizar o processo de troca de informações entre os diversos usuários que utilizam a rede mundial que compõem a internet.

Entretanto, para se representar a forma como estes sistemas interagem, faz-se uso de uma ferramenta bastante difundida, que é a ideia básica que constitui uma rede complexa a forma como se estabelece a interação entre as partes. No mais básico entendimento, rede é uma coleção de objetos no qual alguns pares destes objetos são conectados por ligações (links). Esta definição é bastante flexível: dependendo do conjunto a ser representado, existem várias formas que podem ser usadas para definir uma conexão (link) entre dois ou mais objetos que compõem a rede. No caso de uma rede de computadores, as conexões são os cabos entre os provedores que estabelecem as rotas pela qual as informações podem trafegar. As formas como estas conexões se estabelecem definem em parte a velocidade no qual as informações irão ser transmitidas. Neste caso em particular, a topologia da rede e a qualidade da conexão entre as diferentes partes da rede, serão os fatores que irão definir a agilidade no transporte da informação.

A relevância do tema tem levado a um grande investimento na área de processos de informação, pois o entendimento destes sistemas possui aplicações em vários tipos de redes complexas presentes no nosso cotidiano. Os esforços para a melhoria das comunicações são grandes, pois além de sua importância atual, podemos prever um grande aumento de usuários e de investimentos nas próximas décadas. No Brasil a Anatel (agência reguladora das telecomunicações) pretende aumentar o serviço até dos antigos “orelhões” dando a estes a função de enviar mensagens de texto SMS [7]. Ainda segundo a Anatel

[8], no final de 2013 o Brasil contava com 44,7 milhões de acesso do Serviço Telefônico Fixo Comutado (STFC). Na figura 1 podemos acompanhar a evolução destes números desde 1998.

Gráfico 1 – Evolução do serviço telefônico fixo comutado



Fonte: Relatório anual Anatel[8].

Devido à importância da telecomunicação no Brasil e no mundo, recentemente, vários modelos que levam em conta o processo de geração e transporte de pacotes de informação foram propostos [9], na tentativa de melhorar o entendimento de como a topologia das redes de telecomunicação e a qualidade na conexão podem de fato modificar o transporte das informações através da internet. Nestes estudos, foram propostos diversos tipos de redes e distintas formas de conexões entre as partes que compõem estas redes, na tentativa de entender a dinâmica de transporte de informações através destas. Encontrar qual topologia seria a ideal, para que se estabelecesse o mais eficiente transporte de informação entre as diversas partes do sistema. Do ponto de vista de transporte da informação, entender como o sistema pode atingir o congestionamento dependendo da taxa de criação de pacotes e também da quantidade de pacotes que chegam ao destino final, foram os temas abordados nestes estudos.

Nesta dissertação, propomos um estudo de como a presença de conexões de longo alcance seguindo uma distribuição do tipo lei de potência que depende da distância entre os sítios da rede na forma, $P_{ij} \sim 1/r_{ij}^\alpha$, (Redes de Kleinberg [10]), podem alterar o processo de transporte de informações ocorrendo nestas redes. Para tanto, utilizamos neste trabalho um modelo proposto por Guimera e seus colaboradores, que estabelece

uma forma de criação e uma forma de modelar a qualidade no transporte da informação, para entender como a presença das conexões de longo alcance controlada pelo parâmetro α , podem alterar a eficiência do transporte de pacotes neste tipo de redes. Sucintamente, investigamos a existência de um valor ótimo para o parâmetro α que permita a criação de uma rede onde o processo de entrega de pacotes seja a mais eficiente possível. Neste estudo utilizamos redes em uma e duas dimensões na tentativa de se determinar qual a relação do valor de α com a dimensionalidade da rede.

Para uma melhor compreensão dos aspectos envolvidos no estudo de redes apresentamos no primeiro Capítulo algumas redes bastantes utilizadas em estudo de sistemas complexos e suas propriedades, que serão úteis no estudo proposto. Em seguida no segundo Capítulo, apresentamos alguns resultados obtidos por meio de simulações numéricas utilizando o modelo proposto por Guimera e seus colaboradores, para geração de pacotes e transporte em redes (1D e 2D). Nesta parte, faremos uso de algumas ferramentas da mecânica estatística bastante difundidas em estudos relacionados com transição de fase, para tratar com os parâmetros críticos envolvido no processo de criação e transporte de pacotes. Analisamos também o espectro de potências, frequência característica e em que circunstâncias se estabelece a transição de fase.

No terceiro Capítulo, introduzimos a presença de ligações de longo alcance, segundo o modelo de Kleinberg para este propósito, e fazemos um estudo de como a presença destas ligações altera o processo de transporte de informação. Finalmente, no quarto Capítulo apresentamos as nossas conclusões sobre o estudo realizado e algumas ideias sobre investigações futuras a serem realizadas.

2 SISTEMAS COMPLEXOS: GRAFOS E REDES

A construção e a estrutura de grafos ou redes são a chave para compreender o complexo mundo que nos rodeia.

Albert-Laszló Barabasi

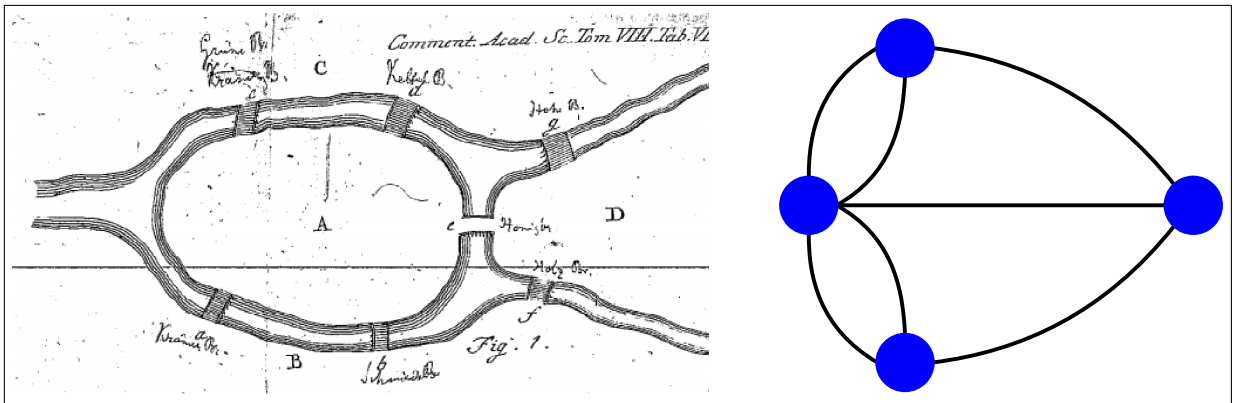
A interação entre elementos de sistemas sociais, tecnológicos, biológicos, químicos e físicos são usualmente definidos como redes complexas[11]. A forma como estes elementos se organizam e interagem definem o comportamento, evolução temporal, e seu(s) estado(s). Com o grande crescimento tecnológico foi-se necessário a criação de vários modelos que explicassem de forma simples a origem de alguns fenômenos. Neste capítulo discutiremos os principais modelos de rede. Mas antes, devemos lembrar o começo dos estudos das redes iniciado com o problema das pontes de Königsberg.

2.1 Origem do estudo de redes complexas

Eram tempos de paz e prosperidade antes da segunda guerra mundial na Cidade de St. Petersburg na Prússia Oriental onde o Matemático Euler vivia. A população preocupava-se em jogos de puzzle quando surgiu o enigma das pontes de Königsberg, onde era proposto a seguinte questão: “É possível visitar todas as regiões ligadas pelas pontes sem passar pelas mesmas pontes duas vezes?” Mais importante do que a solução para a questão foi a ferramenta criada por Euler para resolver tal enigma, a teoria dos grafos. A figura 1 mostra a original publicada por Euler em seu artigo, e ao lado, o grafo que representa as faixas de terra e os links(pontes) que as conectam. Com a sua teoria formulada, Euler percebeu que o problema só seria resolvido se a quantidade de ligações de cada vértice fosse um número par, ou no máximo dois vértices com um número ímpar de ligações. O problema foi resolvido quando uma nova ponte foi construída em 1875 que ligou as regiões B e C. Assim, cada vértice possuía um número de ligações que permitia visitar todas as regiões ligadas pelas pontes sem passar duas vezes pela mesma ponte. Neste problema não nos interessa o tamanho das pontes ou das regiões que são interligadas, mas apenas como cada região é interligada as outra através das pontes. Este foi o primeiro passo para os estudos sobre redes, pois permitiu o tratamento do problema através da construção de um simples *grafo*.

Antes de prosseguirmos, é necessário definirmos alguns objetos que sempre citaremos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Figura 1 – Representação das pontes de Königsberg em mapa e grafo.



Fonte: A figura esquerda foi a publicada por Euler (Euler, 1936) e a segunda é produção do autor. O grafo representativo representa as faixas de terra através dos nós e as pontes através das ligações.

2.2 Definições

1. Grafo

Para fins de simplificação usamos *grafos*, um ente matemático, $G(V,E)$ [12] que contém os vértices e o conjunto de ligações entre os constituintes da rede. V é o conjunto finito de N vértices da rede e E a relação binária entre os integrantes da rede, ou seja, as arestas ou *links*. Estes *grafos* podem também representar redes não-reais onde sua construção não representa a estrutura de uma rede existente no mundo físico.

Há dois tipos de grafos: *orientado*, quando as ligações têm um sentido determinado; e *não orientado*, quando não há um sentido predefinido à ligação. Uma diferença significativa entre estes dois tipos é a possibilidade de formação de autoloops nos grafos orientados, quando um vértice pode possuir uma ligação a ele mesmo, o que não acontece com os grafos não orientados. Um grafo não orientado $G(V,E)$ é formalmente um *complex* [13] de dimensão 2 cujas arestas são células de dimensão 1 e cujos nós são células de dimensão 0 [13].

Na figura 2 temos os dois tipos de grafos citados.

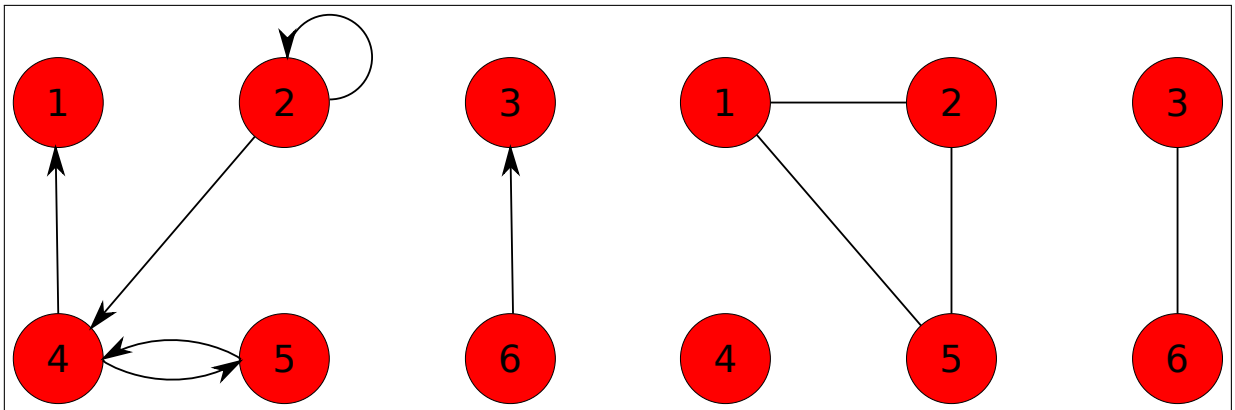
2. Nó ou sítio

Definimos Nó/sítio como a representação dos indivíduos pertencentes a um grafo. Cada sítio pode se conectar a um ou mais sítios pertencentes ao grafo .

3. Ligação

Entidade que permite a interação entre os nós da rede. Através dela os pacotes se

Figura 2 – Tipos de grafos que representam uma rede.



Fonte: Produção do autor baseada em Comen (1990, p. 590). O primeiro representa um grafo ordenado onde as ligações possuem um sentido determinado enquanto o segundo representa um grafo não ordenado onde as ligações não possuem um sentido único.

mover entre os nós até o destino final. No capítulo 3 associaremos uma qualidade a este canal que favorece a utilização do mesmo no transporte de informação.

4. Rede

A rede é diferente de um grafo trata-se de um sistema complexo real representado pelo grafo. A rede é o objeto final de interesse pois ela pode existir no mundo real, representando um sistema complexo, tal como ruas de uma cidade.

5. Pacote

Definimos pacote como a quantidade de informação básica que atravessa a rede de sua origem ao seu destino. Este objeto será usado quando falarmos da dinâmica de transporte de informações ocorrendo em uma rede no processo de comunicação.

2.3 Medidas de centralidade

Tratando-se de redes, é necessário caracterizá-la em relação as suas condições estruturais. Estas características são importantes para diferenciar as redes e compará-las entre si. Citaremos abaixo as principais medidas das redes chamadas de *centralidades*.

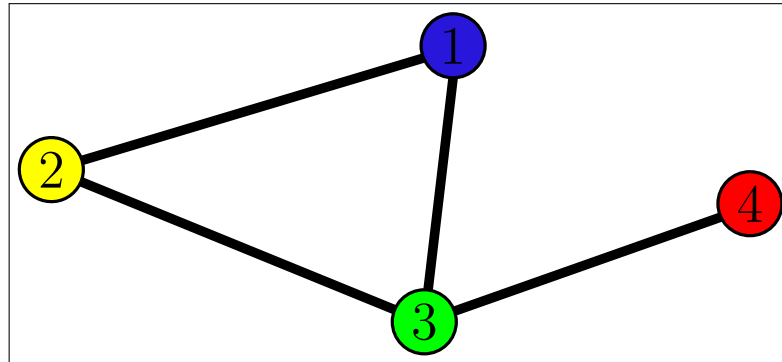
1. Comprimento de caminho*

Número de ligações que separam dois sítios de uma rede. Quando representa a menor distância entre dois sítios de uma rede chamamos de *caminho mínimo* ou *geodésica* e traduz a eficiência da rede quanto a sua navegação. Na figura 3 existe dois caminho entre os nós 1 e 4 , $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ e $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, sendo que o menor

*Também conhecido como *path length*.

é aquele que não passa pelo nó 2. Podemos ainda ter o valor médio do caminho mínimo somando todos os caminhos entre os vértices e dividindo pelo número de vértices existentes.

Figura 3 – Grafo de exemplificação



Fonte: Produção do autor baseada em Barabasi (2012, p. 32).

2. Conectividade ou grau

É uma medida básica que descreve o número de ligações que chegam ou saem de uma nó. Na figura 3 as conectividades para nós 1, 2, 3, 4 são 2, 2, 3, 1, respectivamente, com conectividade média igual a 2.

3. Coeficiente de agregação[†]

Representa a probabilidade de dois vizinhos de um vértice também estarem conectados, ou seja, uma densidade de triângulos na rede. Essa medida é calculada com o número de ligações entre vizinhos estabelecidas em relação a número de ligações possíveis entre os vizinhos. Para o nó 3 da figura 3, das três ligações possíveis entre os vizinhos, $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ e $2 \rightarrow 4$, apenas uma ligação foi estabelecida, logo o coeficiente de agregação para este nó será $1/3$.

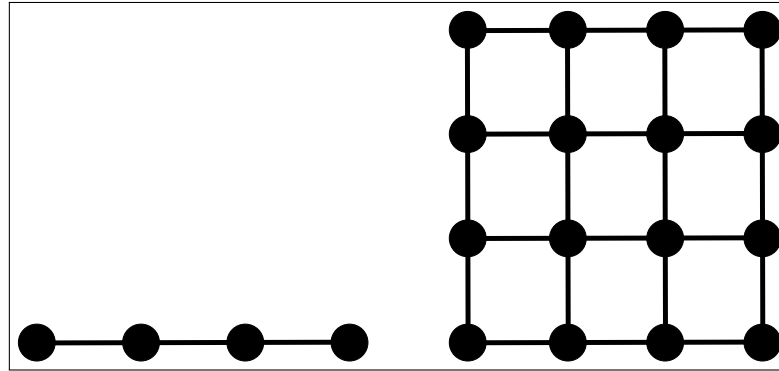
2.4 Redes regulares euclidianas

Nós referiremos a rede regular quando tivermos um grafo, tal que, os sítios constituintes estejam dispostos em posições equidistantes dos seus vizinhos de forma a construir uma malha através das ligações entre os sítios, conforme ilustrado na figura 4, onde podemos observar uma rede regular em uma e duas dimensões, respectivamente. Em outras palavras, nos referiremos a rede regular como o espaço euclidiano discretizado. Neste tipo de grafo teremos que, a distância entre dois sítio quaisquer da rede será dado por:

$$r_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j| \quad (2.1)$$

[†]Também conhecido como *clustering coefficient*.

Figura 4 – Tipos de redes regulares



Fonte: Produção do autor. Representações de Lattices em 1D e 2D onde as ligações possuem o mesmo peso e são igualmente distantes. A primeira representa uma rede em 1D semelhante a um *fibro*. Já a segunda, representa uma rede 2D semelhante a uma *malha*.

É fácil perceber que uma rede regular possui conectividade média igual a 4 e um coeficiente de agregação igual a zero.

2.5 Grafos aleatórios

Os primeiros trabalhos de redes aleatórios são de 1948[14] e 1951[15] onde Solomonoff e Rapoport [16] estudaram a conectividade das ligações aleatórias em fibras neurais, axônio[‡], que formam estruturas capazes de transmitir impulsos elétricos ou reagentes químicos. Neste último, Solomonoff e Rapoport mostraram a importância do tema para a solução de problemas envolvendo, probabilidade de conexão entre os integrantes de uma rede na formação de agregados percolantes, considerando uma rede de neurônios. Também analisaram problemas envolvendo propagação de doenças contagiosas e descendências entre os indivíduos de uma população. Segundo Solomonoff e Rapoport, cada um destes problemas pode ser formalizado através da construção de uma "árvore probabilística", figura 5, que representa os indivíduos da rede e suas interações. Como solução para os problemas citados, utilizou-se da equação diferencial formulada por Shimbel [18] em 1950 que reduziu o problema a encontrar o valor de x quando $x \rightarrow \infty$ na equação abaixo:

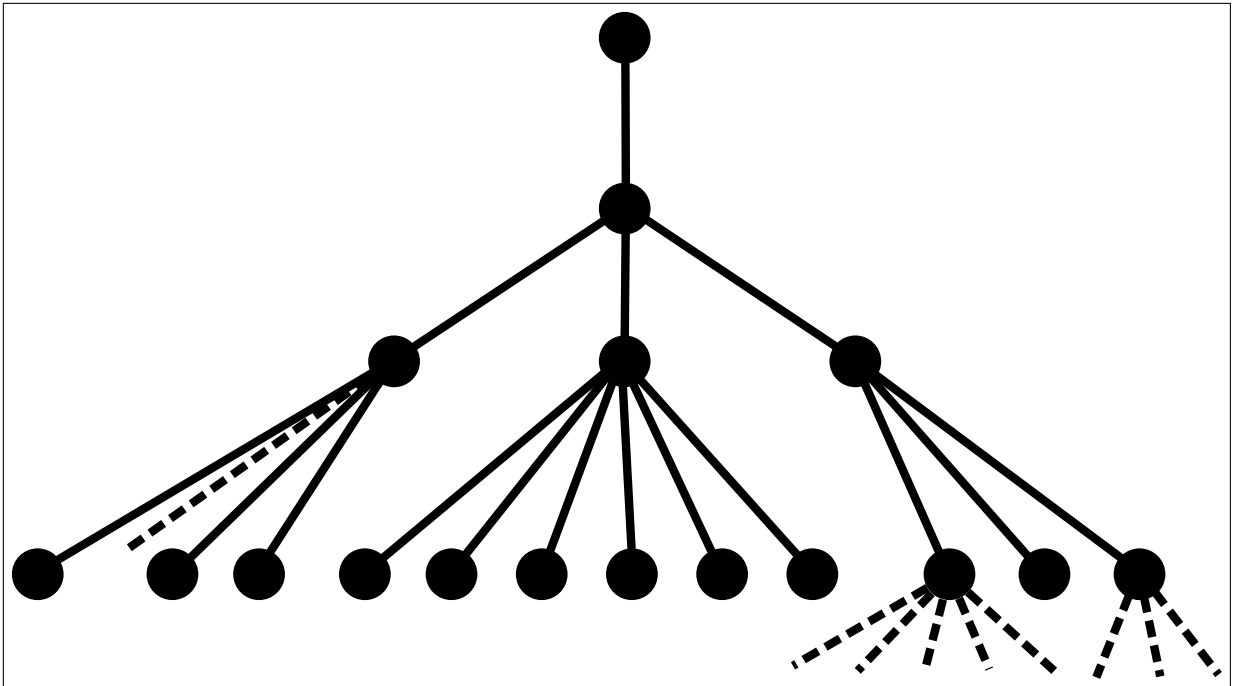
$$\frac{dx}{dt} = [N - x(t)][x(t) - x(t - \tau)], \quad (2.2)$$

onde $x(t)$ é o valor esperado de t axônios removidos de um neurônio arbitrário e τ é a densidade de axônios, ou seja, a densidade de conexões.

A equação acima pode ser resolvida para um caso particular proposto por

[‡]É uma parte do neurônio responsável pela condução dos impulsos elétricos que partem do corpo celular, até outro local mais distante, como um músculo ou outro neurônio [17].

Figura 5 – Grafo do tipo árvore



Fonte: Produção do autor baseada em Solomonoff et al (1951, p. 108). Idealização do modelo de rede proposto por Solomonoff e Rapoport em forma de árvore de conexões para explicar as conexões entre indivíduos de uma família, conexões neurais e propagação de doenças [15].

Rapoport [14], quando o número de axônios por neurônio é exatamente 1. Recursivamente, chega-se a solução:

$$x(t+1) - x(t) = [N - x(t)][1 - (1 - \frac{1}{N})^{a[x(t)-x(t-1)]}] \quad (2.3)$$

onde N representa o número total de vértices.

Para a conectividade do sistema, denominada de γ por Solomonoff, obtém-se a seguinte função onde a representa a densidade de axônios no sistema com criticalidade em $a = 1$.

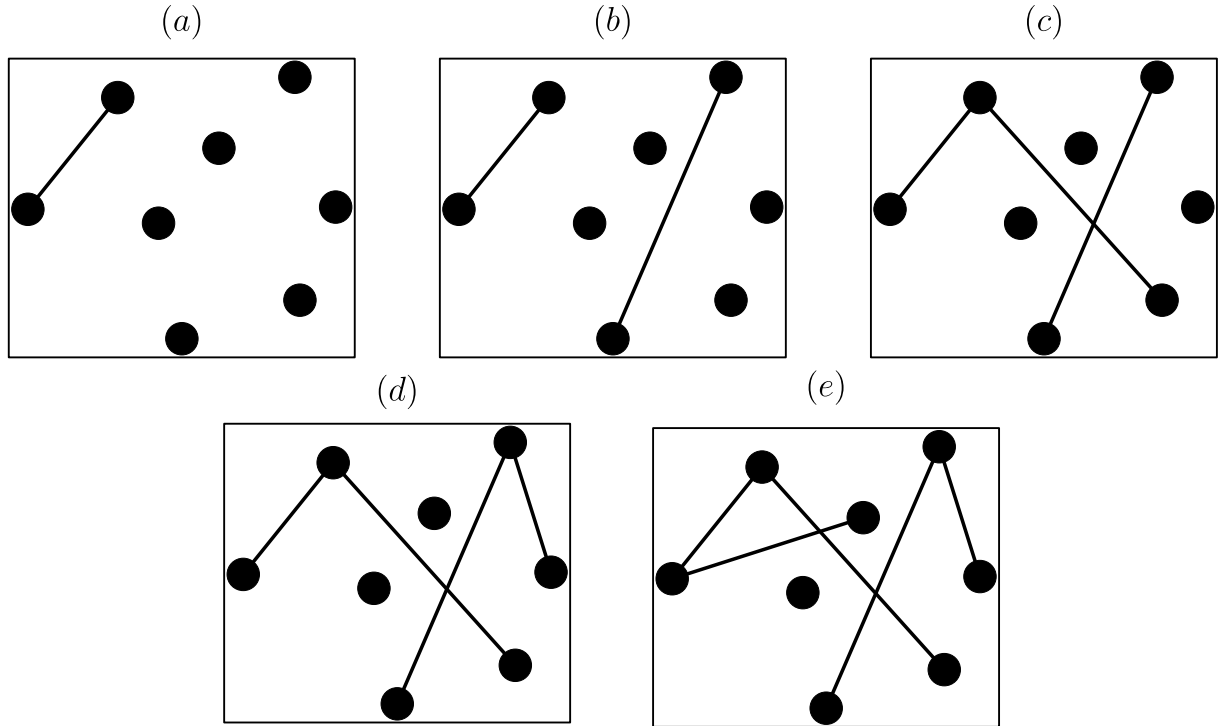
$$\gamma = 1 - e^{-a\gamma} \quad (2.4)$$

Em 1959 Erdős e Renyi [19] lançaram seu modelo de *grafo aleatório*. Um modelo caracterizado como uma rede aleatória equilibrada[§]. Definimos como rede de Erdős-Renyi a rede construída de tal forma que as conexões entre os indivíduos é feita de forma aleatória, ou seja, todas as conexões são igualmente prováveis. Sua construção é feita a partir de um conjunto de P_1, P_2, \dots, P_n pontos e N ligações definidos inicialmente. A cada passo de tempo as ligações são estabelecidas de forma aleatória até que o número total

[§]Quando o número de nós é fixo e o número de ligados também. Além disso, as ligações são estabelecidas em pares e de maneira aleatória em uma rede aleatória não-equilibrada, o processo é semelhante porém a medida que acrescentamos as ligações os vértices também são incluídos [20].

de ligações preestabelecidas seja utilizado, como mostrado na figura 6. Nesta configuração, teremos um conjunto de $\binom{n}{N}$ conjuntos de grafos igualmente possíveis com um número máximo de arestas possíveis igual a $M = \frac{N}{2}(N - 1)$, com N sendo o número de sítios da rede.

Figura 6 – Construção da rede de Erdos-Renyi



Fonte: Produção do autor. A figura mostra como acontece a evolução temporal da rede de Erdos-Renyi. Em cada instante de tempo, as ligações são estabelecidas entre os vértices da rede com igual probabilidade entre os vértices.

Sendo p a probabilidade de que um sítio esteja conectado, teremos um *ensemble*, $G_{N,p}$, que possui um valor de conectividade constante para o limite de $N \rightarrow \infty$ igual a:

$$\langle k \rangle = p(N - 1) \simeq pN \quad (2.5)$$

Assim como a rede Solomonoff e Rapoport, a rede de Erdos-Renyi possui um valor crítico para a densidade de conectividade igual a 1.

O modelo de Erdos-Renyi foi revolucionário por ter introduzido a ideia de aleatoriedade nas conexões feitas entre vértices de um grafo qualquer. Este é o tratamento mais geral que se pode dar a eleição do sítio a ser ligado. Para um sistema suficientemente grande, veremos a formação de aglomerados de vértices formando sub-redes menores até o momento em que estes pequenos aglomerados formam uma rede com a dimensão do sistema. É possível observar que a medida que o sistema evolui com o tempo o número de sítios isolados diminui exponencialmente. Existe um limiar em que a estrutura sofre uma

mudança drástica pois a rede se tornará totalmente conectada. Neste ponto, o número médio de conexões por sítio será um. Este fenômeno é nomeado de percolação [21] ou emergência em que há a formação de um gigantesco agregado que liga as extremidades da rede. Através dos modelos de redes aleatórias, foi possível uma maior compreensão de diversos sistemas, como as redes neurais, redes genéticas e vários outros sistemas auto-organizados. Porém, outros sistemas que não possuíam ligações aleatórias, como as redes sociais, precisavam ser explorados.

2.6 Mundo Pequeno ou *Small World*

Em 1967, o psicólogo Stanley Milgram [22], estimulado pelo trabalho de Pool e Kochen[23], realizou um experimento que contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento do estudo das redes. Este experimento ficou conhecido como o experimento de mundo pequeno, ou *small world*. O objetivo de Milgram era quantificar o menor caminho médio, ou distância geodésica[¶], entre dois atores em uma rede social. Até então, acreditava-se que essa distância seria da ordem de uma centena de ligações para que a mensagem chegasse ao seu destino o que provocou preocupação por parte dos idealizadores do experimento, já que os pacotes poderiam ser perdidos no caminho e assim não serem entregues ao destino final. Em seguida descreveremos o experimento proposto por Milgram.

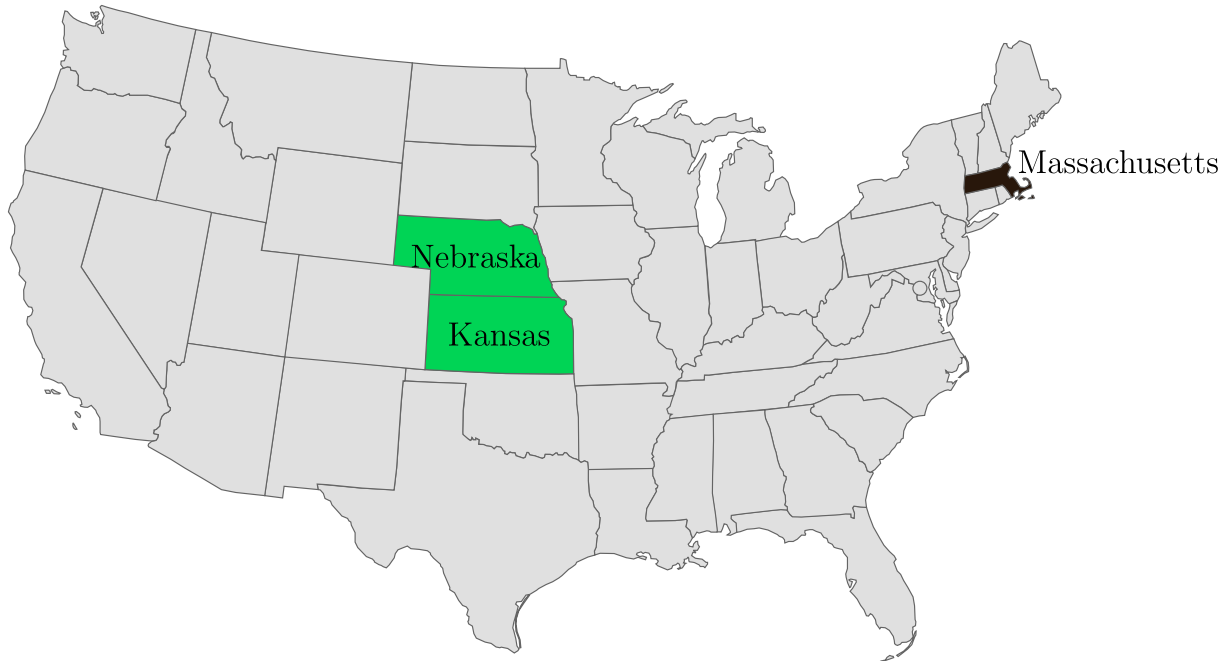
Milgram envio um total de 160 pacotes para diferentes pessoas escolhidas aleatoriamente da lista telefônica das cidades norte-americanas de Omaha em Nebraska e Wichita em Kansas, figura 7. Todos os pacotes tinham como destino final um amigo de Milgram que era corretor de ações em Massachusetts. Apesar dos pontos de partidas dos pacotes serem aleatoriamente escolhido entre pessoas possivelmente não tão conectadas, o alvo era alguém que tinha uma conectividade média alta.

As instruções para cada participante que recebia os pacotes eram as seguintes:

1. O participante deveria adicionar seu nome e o nome da próxima pessoa que receberia a caixa em uma lista no pacote.
2. De posse de um dos cartões existentes no interior do pacote, deveria preencher com seus dados e enviar para Harvard para que Milgram pudesse acompanhar o caminho em que os pacotes estivessem seguindo.
3. Se a pessoa que tivesse recebido o pacote conhecesse a pessoa para quem o pacote estava destinado, deveria enviá-lo diretamente a este.

[¶]Menor número de ligações necessárias para chegar a um sítio da rede partindo de uma posição distinta [16].

Figura 7 – Mapa dos Estados Unidos da América



Fonte: Wikipédia com modificação do autor. Mapa dos Estados Unidos da América com destaque para os estados onde as correspondências do experimento de Milgram iniciaram (verde) e o estado onde se localizava o destino final das correspondências.

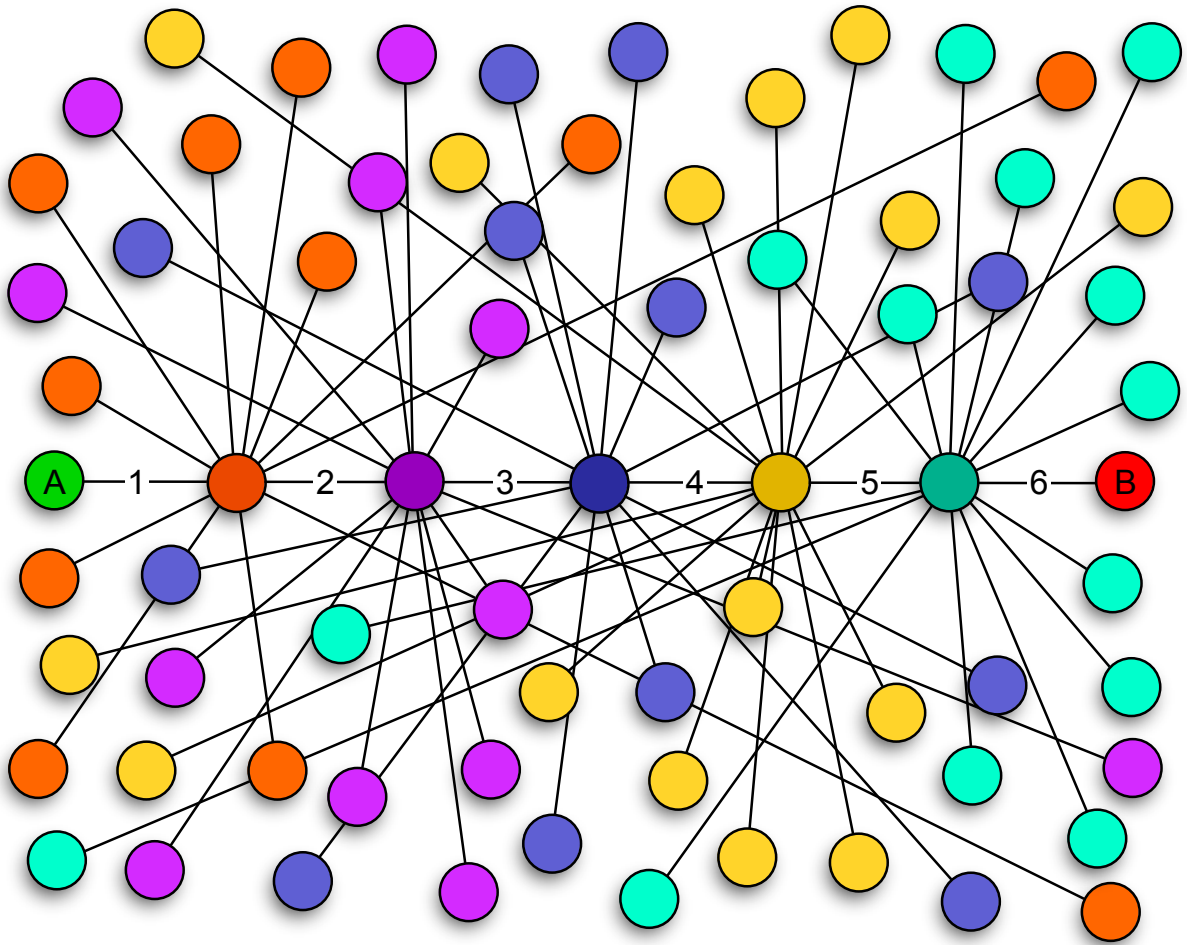
4. Se a pessoa que estivesse recebido o pacote não conhecesse a pessoa para quem o pacote estava destinado, deveria enviar a uma outra pessoa que conhecesse o alvo ou que facilitaria a entrega do pacote de alguma forma.

Para a surpresa de todos, o primeiro pacote chegou alguns dias depois de sair de Nebraska passando apenas por duas ligações intermediários. Ao todo, 42 pacotes de 160 conseguiram chegar ao destino final, alguns passando por até por 12 intermediários. Porém, a média de ligações intermediários necessários para que os pacotes chegasse ao seu destino foi de 5,5 passos, aproximando-se para os tão famosos "seis graus de separação" ou *six degree*, figura 8.

Esse valor tão pequeno nos diz que não estamos tão longe uns dos outros como se pode imaginar. Pelo contrário, pertencemos a um mundo onde o número de ligações necessárias para ligar quaisquer duas pessoas é pequeno dando origem ao termo mundo pequeno, *small world*. Na tabela 1, podemos ver alguns valores de conectividade, distância média e distância máxima entre dois sítios de suas respectivas redes.

Recentemente, um novo experimento de pequeno mundo foi realizado por Peter Sheridan Dodds et al [24] um experimento aperfeiçoado em termos de volume de participantes a priori. Neste trabalho, Doods utilizou a rede de contatos de e-mails para a realização do experimento. No total, foram enviados mais de 60000 e-mails entre os

Figura 8 – Seis graus/ligações de separação



Fonte: Wikipédia. Exemplo de uma rede cujo número de passos que uma mensagem precisa para chegar ao seu destino, partindo de um vértice *A* até um vértice *B*, é 6. As demais distâncias entre os vértices possuem um valor máximo de 6 passos.

participantes. Estas mensagens tinham como destino 18 pessoas localizadas em 13 países diferentes.

Apesar do número de participantes iniciais, a porcentagem de pessoas que repassaram suas mensagens foi muito baixa comparado ao de Milgram. Newman [16] aponta, como causa da pouca participação do experimento, o cansaço do público alvo em relação a mensagens recebidas que não foram solicitadas sendo estas mensagens ignoradas pelos participantes. O número de mensagens que chegaram aos seus destinos neste experimento foi bem menor, 1.5%, quando comparado a de Milgram, 19%. Mesmo assim, o resultado encontrado por Dodds foi semelhante ao de Milgram. Para que uma mensagem eletrônica, com origem e destinos aleatórios, chegue ao destinatário são necessários poucos passos. Dodds encontrou um valor médio para o número de passos das mensagens igual a 4.05, um valor ainda menor que Milgram. Esse resultado comprova a ideia de

Tabela 1 – Características de redes reais

Rede	N	$\langle k \rangle$	$\langle d \rangle$	d_{max}
Internet	192244	6.34	6.98	26
WWW	325729	4.60	11.27	93
Celulares	36595	2.51	11.72	39
E-mail	57194	1.81	5.88	18

Fonte: Barabasi (2012, p. 63). Aqui N é número de nós que constituem a rede, $\langle k \rangle$ é a conectividade média do sistema, $\langle d \rangle$ é a distância média entre dois indivíduos e d_{max} a distância máxima entre possível na rede.

que, os indivíduos constituintes das cadeias de uma rede social estão ainda mais próximos comparado as cadeias analisadas por Milgram.

É importante ressaltar o fato que algumas cadeias não foram completadas pois mostra que nem sempre teremos circuitos direcionados fechados em rede social. Neste caso, as mensagens deveriam retornar a um participante anterior até chegar em um vértice contido em um dos circuitos fechados onde a mensagem chegou ao seu destino. Logo, é necessário que os vértices de uma rede possuam interação entre vizinhos e vizinhos para que as informações que percorrem a rede não sejam perdidas.

Até então, temos o modelo de rede aleatória, que atribui ligações aleatórias entre os sítios da rede. O próximo passo é descrever um modelo de rede que se comporte como uma rede de mundo pequeno, ou seja, cuja probabilidade de conhecidos meus se conhecerem seja alta, como acontece em uma rede social por exemplo.

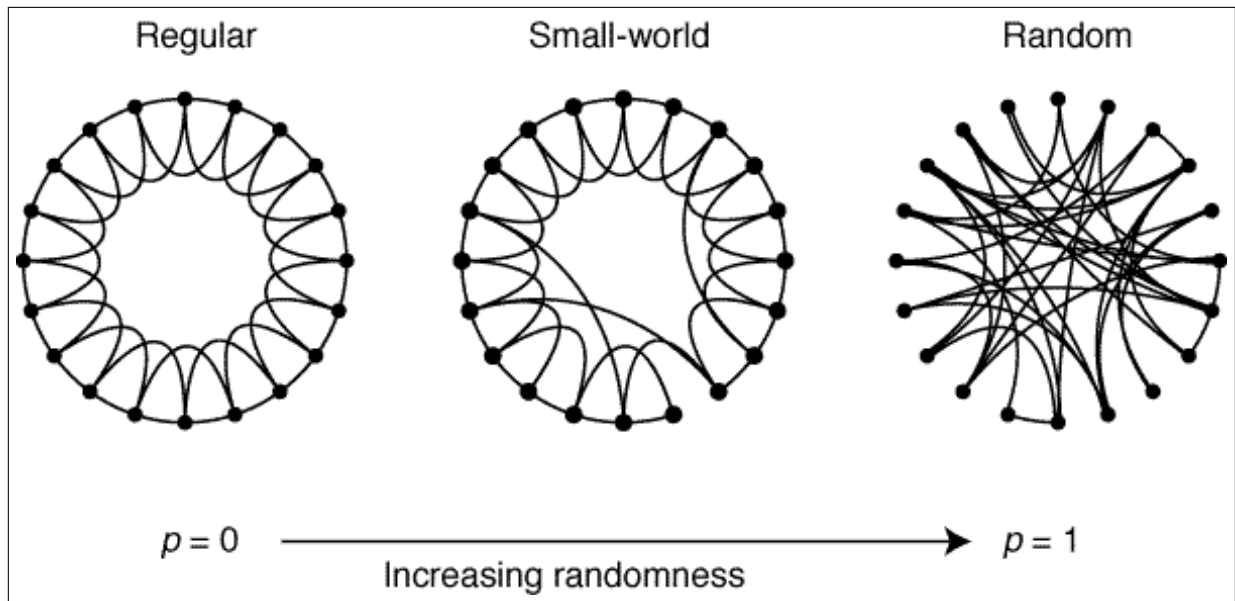
2.7 Watts-Strogatz

Muitos sistemas dinâmicos de redes acoplados são usados para modelar redes neurais, de controle genético e vários outros auto-organizados. O modelo de rede que descreveremos nesta seção, é utilizado para modelar outros sistemas que apresentam comportamento que está entre as redes regulares e as aleatórias como redes biológicas, tecnológicas e sociais.

Em 1998 Duncan J. Watts e Steven H. Strogatz[26], anunciaram um novo modelo de rede que permitia descrever sistemas cujos os limites são de um lado redes regulares, e do outro, redes aleatórias. Variando apenas um parâmetro devemos observar esta transição de redes. Este parâmetro p controla a realocação^{||} das ligações existentes em uma rede inicialmente regular de tal forma que, no seu valor máximo, a rede muda todas as suas ligações como mostra a figura 9. Este valor controla o grau de desordem adicionado ao sistema.

^{||}Também conhecido como *rewired*.

Figura 9 – Transição do modelo de Watts-Strogatz



Fonte: Figura publicada em (Watts et al, 1998). O modelo parte de uma rede regular até uma rede totalmente aleatória [26]. Neste caso a rede regular possui interação com os primeiros e segundos vizinhos.

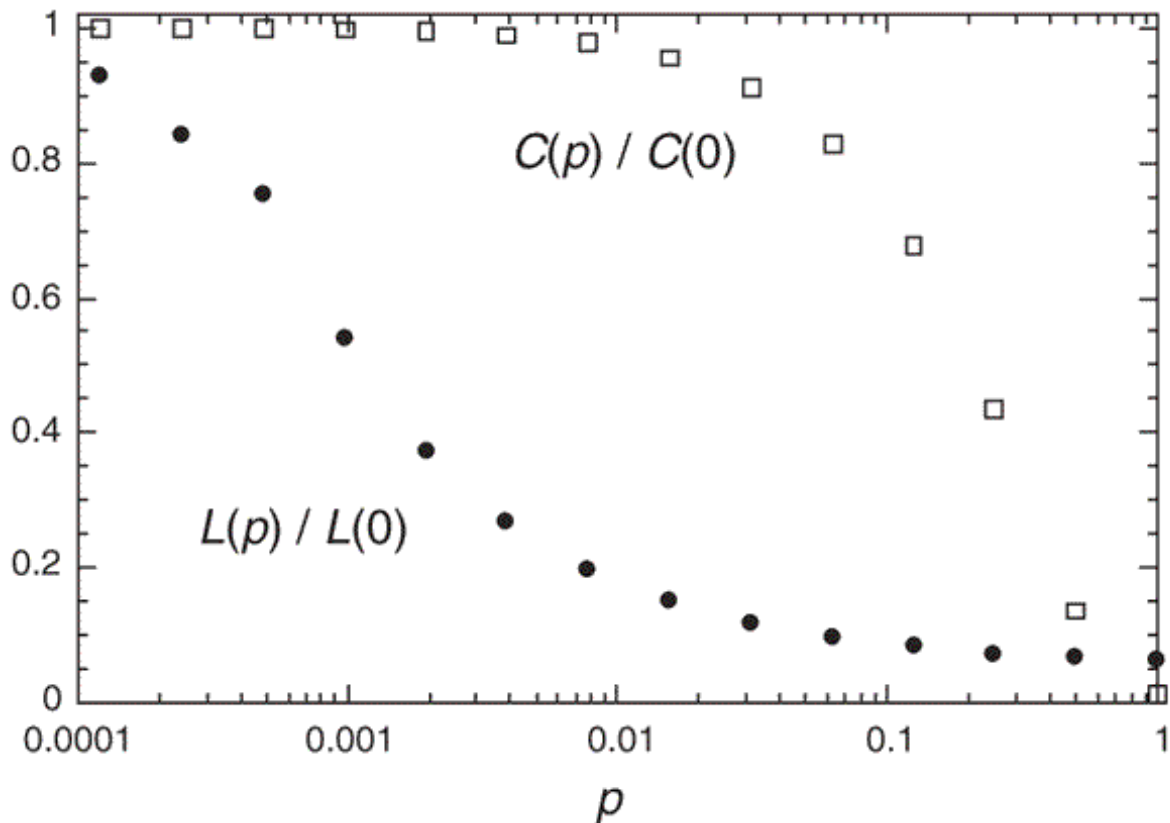
Definimos como uma rede de Watts-Strogatz aquela em que realocamos as ligações existentes a partir de uma rede inicialmente regular. Para construirmos esta rede partimos de uma rede regular com P_1, P_2, \dots, P_n pontos e N ligações. Em seguida, fazemos uma realocação (*rewired*) nas ligações existentes segundo uma probabilidade p , onde $p = 0$ significa uma rede regular e $p = 1$ uma rede completamente aleatória. Inicialmente é escolhido uma probabilidade p que determina a porcentagem de ligações que serão realocadas. Para cada ligação existente na rede sorteamos um número entre $[0,1]$ e se este for menor que p realocamos a ligação aleatoriamente.

Apesar da aparência na figura 9, a rede construída para um valor de $p = 1$ é a mesma do modelo de Erdős-Renyi, pois todas as ligações foram restabelecidas de forma aleatória. A grande vantagem é que este modelo poderia descrever o fenômeno de mundo pequeno pois observa-se o aparecimento de uma densidade de "triângulos" significativo, na rede para um valor de coeficiente de reorganização das ligações entre 0 e 1.

As mudanças demonstradas por Watts et al em seu trabalho foram observadas não apenas para um tipo de rede regular mas para vários modelos iniciais, porém os resultados obtidos foram semelhantes.

Sobre os resultados obtidos por Watts e Strogatz [26], representados na figura 2, podemos ver que é possível a construção de uma rede intermediária entre a regular e a aleatória, tal que as propriedades de transporte da rede sejam maximizadas, ou seja, teremos um caminho mínimo pequeno, possibilitando que a informação chegue rapidamente

Gráfico 2 – Caminho médio e coeficiente de agregação normalizados



Fonte: gráfico publicada em (Watts et al, 1998). O gráfico da figura mostra os valores de caminho médio $L(p)$, normalizado por $L(p = 0)$, entre os vértices da rede e o coeficiente de agregação $C(p)$, normalizado por $C(p = 0)$, em função do parâmetro de realocação das ligações existentes. Os valores relativos a $(p = 0)$ representam o estágio em que a rede ainda é regular [26].

ao seu destino. Na figura 2, os valores estão normalizados com o valor de menor caminho médio e coeficiente de agregação para o caso de $p = 0$, quando nenhuma ligação da rede regular foi mudada.

Tabela 2 – Valores de centralidade de redes reais

Tipos de redes	L_{real}	$L_{aleatório}$	C_{real}	$C_{aleatório}$
Redes de atores em filme	3.65	2.99	0.79	0.00027
Rede elétrica	18.7	12.4	0.080	0.005
Rede de <i>C. elegans</i> **	2.64	2.25	0.28	0.05

Fonte: Tabela publicada em (Watts et al, 1998). A tabela contém dados reais e simulados, para uma rede aleatória, dos valores de distância entre dois vértices e coeficiente de agregação. Os valores apresentados identificam as redes como não-aleatórias e nem regulares, mas como redes de pequeno mundo entre os dois extremos.

**Uma espécie de nematódeo da família Rhabditidae que mede cerca de 1 milímetro de comprimento, e vive em ambientes temperados. Tornou-se um importante modelo para o estudo da biologia, especialmente a biologia do desenvolvimento, desde a década de 1970 [27].

Watts et al concluíram que o fenômeno de mundo pequeno não é meramente um fato curioso das redes sociais, nem um modelo idealizado, mas um comportamento genérico para um grande número de redes encontradas na natureza [26].

Com este modelo de rede também foi possível estudar a propagação de uma doença em pessoas pertencentes a uma rede dependendo de um parâmetro r , onde r é a probabilidade de um vértice infectar um vizinho, para valores de p variando de 0 a 1. O valor crítico da probabilidade de infecção r_c , quando metade da população é infectada, decresce quando o valor de p aumenta. Assim também, o tempo necessário para uma infecção máxima $T(p)$ decresce quando p aumenta. Porém, a forma como $T(p)$ decresce é semelhante a de $L(p)$ comprovando a dependência entre estes valores.

2.8 Redes de Kleinberg

Neste tipo de rede as ligações são acrescentadas com uma probabilidade que depende da distâncias entre os sítios i e j que se pretende conectar. Assim, a probabilidade de um sítio i estar ligado a um sítio j sendo estes separados por uma distância $r_{i,j}$ será dada por:

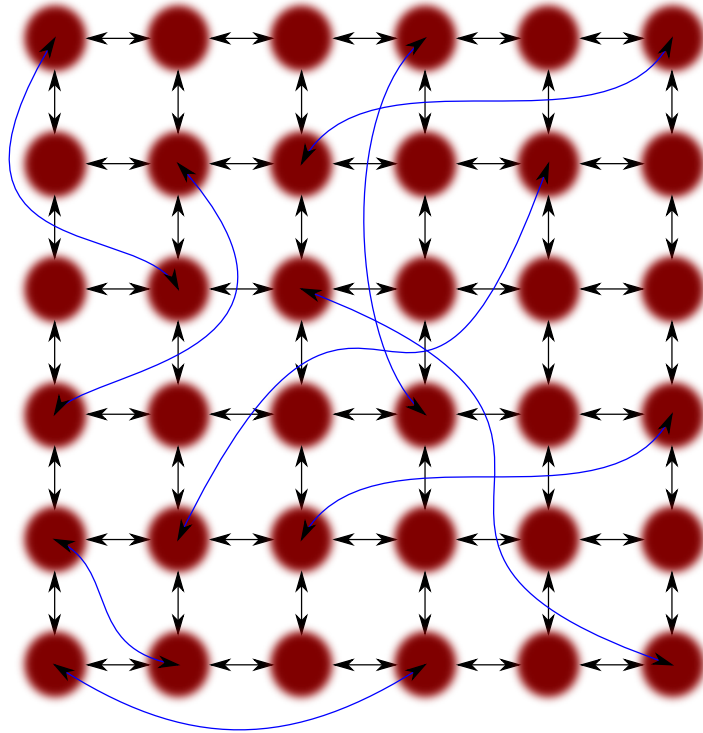
$$P(r_{i,j}) \sim r^{-\alpha} \quad (2.6)$$

Para a construção da rede utilizamos um procedimento semelhante a de Li et al [37] conforme descrito abaixo.

1. Cria-se uma rede de dimensão d com N vértices tal que cada vértice está ligado a $2d$ vizinhos.
2. Escolhemos aleatoriamente um vértice i dos N vértices para receber uma ligação de longo alcance e geramos o tamanho da ligação r_{ij} a ser estabelecida de acordo com a equação 2.6.
3. Escolhemos o vértice j que receberá a ligação dentro do conjunto de vértices possíveis para o determinado tamanho de ligação r_{ij} .
4. Repetimos o processo até que o número de ligações de longo alcance chegue ao pretendido. A figura 10 mostra a construção da rede em um determinado tempo.

Para a construção das redes de Kleinberg é necessário que o tamanho das ligações sorteadas obedeam a uma distribuição em lei de potência. Clauset et al. [35] mostrou que o menor valor escolhido para ser sorteado interfere diretamente no número de realizações necessárias a se fazer para conseguir tal expoente. O método utilizado para a geração de números aleatórios seguindo uma lei de potência foi o de Press et al [36].

Figura 10 – Construção de uma rede Kleinberg



Fonte: produção do autor. A figura representa um instante de tempo em que algumas ligações de longo alcance já foram estabelecidas de acordo com uma probabilidade de criação $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$.

Clauset et al [35] mostrou em seu trabalho que, quanto maior for o menor valor possível dos números presentes na distribuição desejada, menor será o erro na distribuição comparada ao seu valor analítico. Logo, os valores limites a serem sorteados de tamanho de ligação devem ser pensados no intervalo entre 5 e $L - 1$, onde L é o tamanho do sistema para o caso 1D e o tamanho do lado da rede para o caso 2D.

Se a probabilidade de uma ligação entre os sítios i e j é $P(r_{ij}) \propto r_{ij}^{-\alpha}$, podemos normalizar esta probabilidade através de um fator somatório que pode ser aproximado por uma integral, como segue:

$$\sum_{i \neq j} r_{ij}^{-\alpha} \sim \int_1^L x^{-\alpha} x^{d-1} dx = \begin{cases} L^{d-\alpha}, & \text{se } \alpha < d, \quad (i) \\ \ln(L), & \text{se } \alpha = d, \quad (ii) \\ (\alpha - d)^{-1}, & \text{se } \alpha > d. \quad (iii). \end{cases} \quad (2.7)$$

Para o caso (i), consideremos a seguinte situação. Imagine uma região circular de raio R , com $R = L^\delta$, onde no centro desta região localiza-se o vértice alvo a . Sabendo que a probabilidade de um vértice qualquer i se ligar a um vértice j é dada por

$$P(r_{ij}) = r_{ij}^{-\alpha}. \quad (2.8)$$

Portando, a probabilidade de um vértice conectar um dos vértices contidos na região considerada pode ser expressa na seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(r_{i,j}|r_{a,j} < R) &\leq \frac{R^d}{L^{d-\alpha}} \\ &\leq L^{\delta d-d+\alpha}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

No limite de uma rede muito grande veremos que qualquer caminho entre uma fonte f e um alvo a deverá ter pelo menos uma ligação de longo alcance apontando para dentro desta região circular. Além disso, o valor esperado para o número de passos necessários para a informação ser entregue é limitado a ser, no mínimo, igual a R , pela possibilidade de conexão com algum dos nós nas proximidades da borda da região circular. Sendo portanto, necessário que a informação percorra toda a distância R se não houver nenhuma ligação de longo alcance que passa conduzir a informação.

A probabilidade de encontrar um nó com estas características em R passos é $RL^{\delta d-d+\alpha}$, onde $\lim_{L \rightarrow \infty} RL^{\delta d-d+\alpha} = 0$ que implicam a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} 0 &< RL^{\delta d-d+\alpha} < 1 \\ 0 &< L^{\delta(d+1)-d+\alpha} < 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Logo,

$$\delta(d+1) - d + \alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad \delta < \frac{(d-\alpha)}{1+d}. \quad (2.11)$$

Assim, o menor valor esperado do número de passos que uma informação (pacote) precisa para atingir o seu destino não pode ser menor que $L^{(d-\alpha)/(1+d)}$ para o caso (i).

Considerando agora o caso (iii), a probabilidade de termos uma ligação maior que L^γ ($0 < \gamma < 1$), é determinado pela seguinte relação:

$$\int_{L^\gamma}^{\infty} \frac{x^{-(\alpha-d+1)}}{\alpha-d} dx \sim L^{\gamma(d-\alpha)}. \quad (2.12)$$

Portanto, a probabilidade de que a informação dê um passo maior do que L^γ , em um número de L^β com ($0 < \beta < 1$) passos é menor do que $L^\beta L^{\gamma(d-\alpha)}$, onde

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^\beta L^{\gamma(d-\alpha)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle \leq L^{\beta+\gamma} \quad (2.13)$$

Assim, a distância que separa os vértices fonte e alvo é proporcional a L , o que resulta em

$$\beta + \gamma = 1. \quad (2.14)$$

A probabilidade de existirem conexões com uma tamanha superior a L^γ , torna-se muito

pequeno quando $[\beta + \gamma(d - \alpha) < 0]$, implicando em

$$\beta < \frac{(\alpha - d)}{\alpha - d + 1} \Rightarrow \langle t \rangle = L^\beta \sim L^{(\alpha-d)/(\alpha-d+1)} \quad (2.15)$$

onde $\langle t \rangle$ representa o tempo esperado de envio de uma informação.

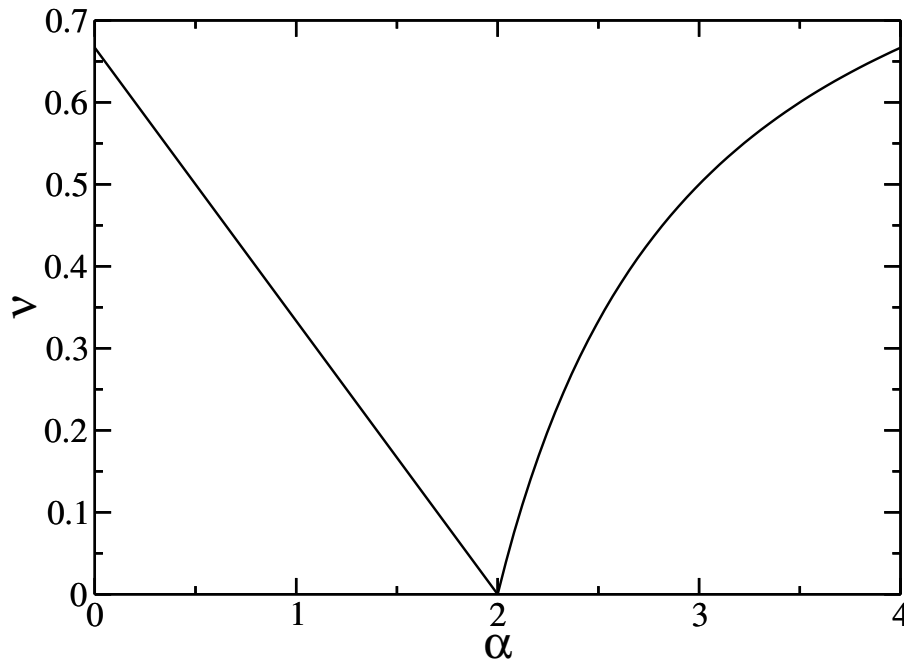
Finalmente analisando o caso (II), podemos imaginar que o alvo a está rodeado de m regiões circulares de raio $e^{m-1} < R < e, m = 1, 2, 3, \dots$. Se o vértice u que possui a informação estiver na região m , a probabilidade de que u possua uma conexão com algum vértice v na região $m - 1$ é dada por

$$P(r_{i,j}) \sim \int_{e^{m-1}}^{e^m} \frac{y^{-1}}{\ln L} dy = \frac{1}{\ln L}. \quad (2.16)$$

A probabilidade de se alcançar a próxima região $m - 1$ em mais do que x passos é $p(x) = (1 - 1/\ln L)^x$. Assim, $\langle t \rangle \leq O((\ln L)^2)$.

Podemos concluir que o tempo médio $\langle t \rangle$ que uma informação leva de um vértice fonte f para um vértice alvo a , possui limites na forma L^ν como podemos observar no gráfico 3.

Gráfico 3 – Variação do expoente do tempo de envio de uma mensagem em relação a α



Fonte: Produção do autor. Comportamento do expoente ν em função do parâmetro α . Assim, como no resultado mostrado por Kleinberg [10] que o valor mínimo do expoente tende ao valor da dimensão do sistema, neste caso $d = 2$.

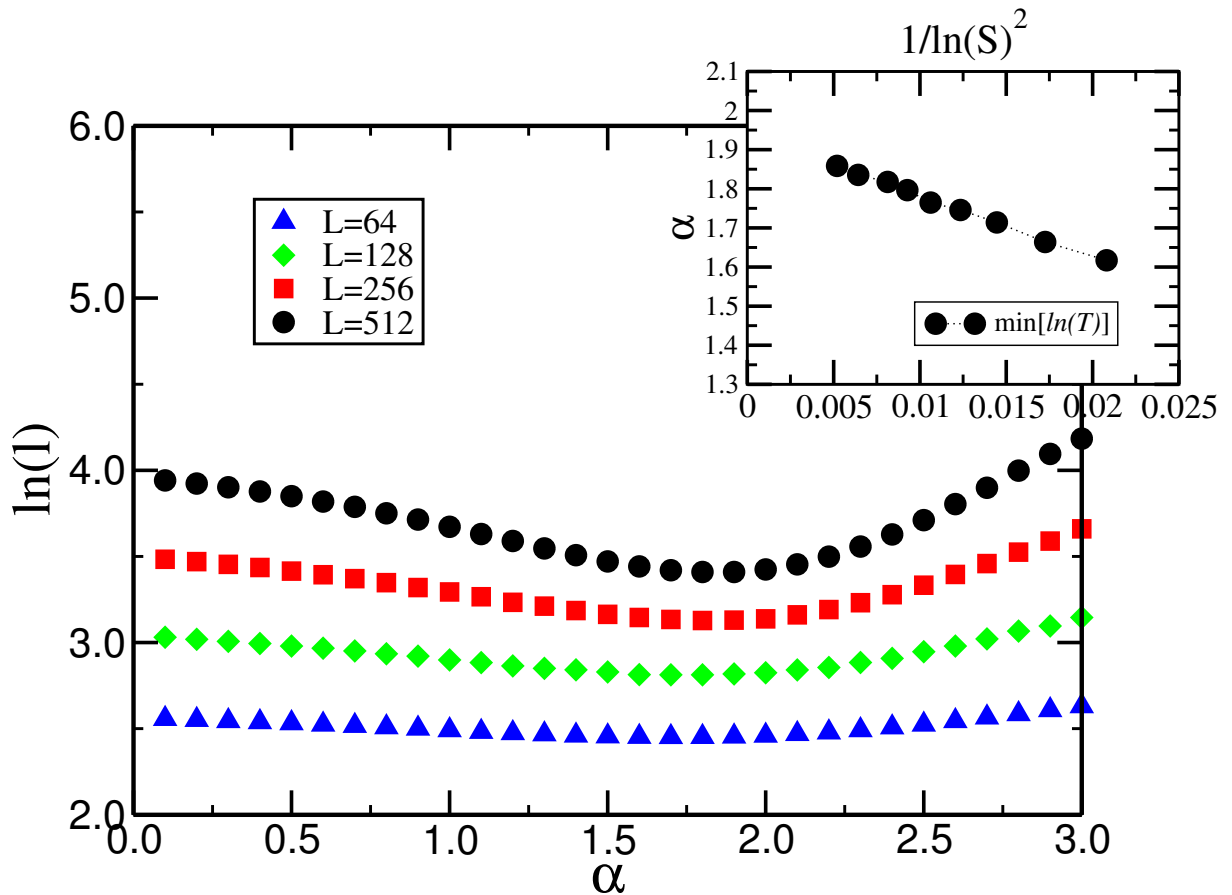
A partir do gráfico 4, podemos constatar que quando aumentamos o tamanho do sistema o valor mínimo médio do tempo de envio de uma mensagem tende a dimensão do sistema, neste caso, $d = 2$.

As ligações de longo alcance podem ser entendidas como sendo a medida de

que a probabilidade de vizinhos dos vizinhos mais próximos estarem conectados. Quando o parâmetro α possui um valor muito pequeno, a rede formada possui características de um grafo aleatório, pois as ligações de longo alcance são estabelecidas com probabilidades iguais. Já quando α é grande, as ligações de longo alcance não fazem mais tanta diferença ao caminho seguido pelos pacotes pois estas são bem mais prováveis de existirem entre sítios próximos.

Neste ponto podemos pensar que quando $\alpha = 0$, ou bem próximo, se estabelece uma rede com ótima navegação. Em seu artigo, Kleinberg[10] mostrou que existe um valor de α , tal que, a menor distância média entre dois sítios de uma rede é mínima. Este valor tende a dimensão d do sistema quanto maior for o sistema, fato que foi comprovado experimentalmente através dos resultados mostrados no gráfico 4, obtidos para uma rede bidimensional.

Gráfico 4 – Caminho mínimo médio e tempo de envio em uma rede de Kleinberg

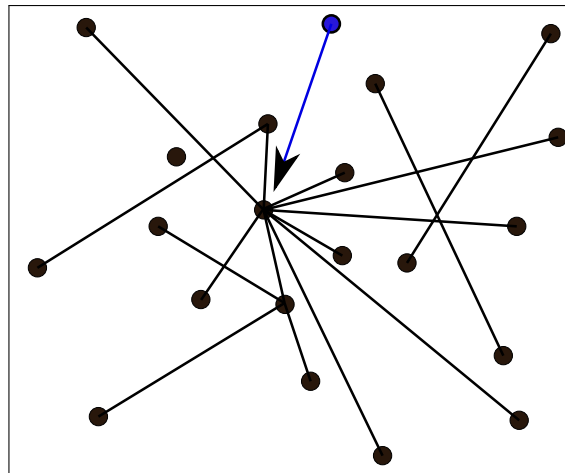


Fonte: Produção do autor. Tempo médio para um pacote chegar ao destino considerando as ligações sempre livre para transporte entre os vizinhos. Os diferentes símbolos correspondem a diferentes tamanhos de rede. No gráfico pequeno a direita, podemos observar que, a medida que aumentamos o tamanho do sistema o valor de α , em que o tempo de entrega dos pacotes é minimizado, tende a dimensão do sistema $d = 2$.

2.9 Barabási-Albert

A internet é uma das redes que mais cresce em número de sites e usuários no Brasil e no mundo. Segundo pesquisa feita pela empresa eMarketer, no final do ano de 2014 já eram 107,7 milhões de brasileiros conectados a rede [28]. Em pesquisa realizada pela União Internacional de Telecomunicações (UIT) em 2014, o Brasil ocupa 65ª posição que mostra a Dinamarca como país mais conectado [29]. Nesta rede, os novos vértices adicionados não são conectados a rede de forma aleatório. O mais provável é que este novos vértices se liguem a vértices bem conectados com a rede para facilitar a sua comunicação para outros vértices da rede. Neste contexto surge o modelo de Barabasi-Albert ilustrado pela figura 11.

Figura 11 – Evolução do modelo de Barabási-Albert

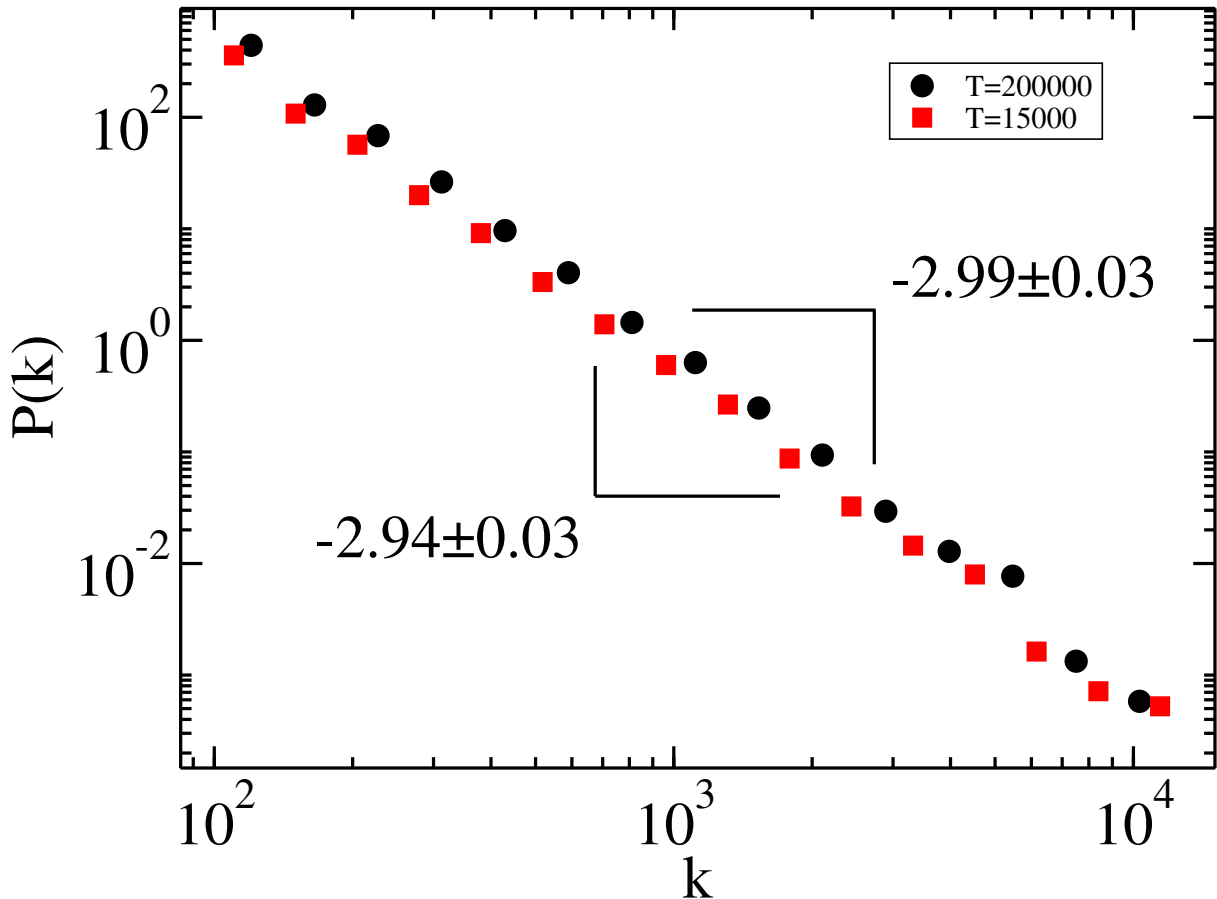


Fonte: Idealização do modelo de rede de Barabási-Albert. Podemos ver a evolução de um passo de tempo onde o próximo vértice (azul) a ser acrescentado a rede prefere se ligar a vértices com um número maior de conexões.

O modelo de Barabasi-Albert (BA) pode ser encarado como uma continuação do modelo de Erdos-Renyi com o acréscimo da ligação a vértices mais conectados. O modelo BA é moldado a partir de conjunto inicial de vértices m_0 , em cada instante de tempo t acrescentamos um vértice que se liga a outros m vértices dando preferencias aos vértices que possuem um maior número de ligações os chamados *hubbles*. Ao final da simulação, o sistema deve conter $(m_0 + t)$ sítios com (mt) ligações [30]. A interpretação deste sistema é bem simples e traduz muitos tipos de redes como a *World Wide Web* (WWW), redes de citações, redes sociais e muitas outras. No caso de uma rede social, quando um novo membro vai associar-se a rede existe uma grande probabilidade de ter uma ligação com os membros mais conhecidos desta rede. O mesmo acontece no caso de uma rede de citações, onde os mais citados possuem uma probabilidade maior de receberem ainda mais citações.

A probabilidade de um vértice receber ligações é proporcional a sua conectividade, ou seja, devemos ter $P(k) \propto k^\gamma$ com γ real. Nas simulações realizadas encontramos valores aproximados de $\gamma = -2.94 \pm 0.03$ e $\gamma = -2.99 \pm 0.03$ muito próximos do publicado por Barabási-Albert [30].

Gráfico 5 – Histograma de conectividade para rede de Barabási-Albert



Fonte: Produção do autor. Distribuição de probabilidades em função da conectividade k , para o modelo de Rede BA com $m_0 = m = 5$ e tempo de simulação $t = 150000$ e $t = 200000$, como indicado no gráfico.

No capítulo 3 trataremos das redes de Kleinberg que são redes de pequeno mundo por possuírem ligações de longo alcance que "aproxima" os sítios da rede, como veremos em detalhes.

3 PROPRIEDADES DE TRANSPORTE EM REDES REGULARES 1D E 2D

Neste capítulo, estudaremos fenômenos de transporte ocorrendo em redes que possuem topologia regular em uma e duas dimensões. O foco será em sistemas que produzem pacotes de informação em cada instante de tempo em todos os sítios da rede, com destinos variados. Neste problema é bastante comum uma transição de fase com expoente crítico bem definido. Faremos uma análise sobre os estados livres e congestionados, quando a informação atinge o seu destino e quando a informação fica retida em seu caminho, respectivamente. Além disso, exploraremos a correlação temporal do número de pacotes existentes na rede através do espectro de potência.

Algumas das ferramentas da mecânica estatística serão utilizadas para estudar tanto propriedades estruturais como dinâmicas. Este tipo de sistema é observado em redes reais [31] e em modelos de comunicação [32]. Os fenômenos de congestionamento também são importantes para a engenharia de construção de redes. Em 1986 uma abrupta queda na taxa de transmissão de dados, de 32Kbps para 40bps, entre o LBL e UC em Berkeley chamou a atenção de Van Jacobson e Mike Karels[31]. Desde então, originaram-se sete algoritmos que melhoram o tráfego de dados em uma rede, para evitar que tais eventos pudessem ocorrer novamente. Deste então, foram criados protocolos que controlassem e prevenissem tais acontecimentos.

As topologias 1D e 2D são os casos mais simples que podemos estudar. Mesmo assim, conseguimos extrair informações importantes desses sistemas que são semelhantes a uma *lan* de computadores..

3.1 Propriedades dinâmicas de rede em 1D e 2D

O *estado livre** é aquele em que o sistema consegue manusear os pacotes de tal forma que todos os pacotes criados na rede conseguem chegar ao seu destino. Por outro lado, um sistema é considerado no *estado congestionado*† quando o número de pacotes existentes na rede é superior ao que a rede consegue manusear, assim os pacotes tendem a se acumularem na rede não sendo entregues ao seu destino. A transição de fase acontecerá no ponto de fronteira entre estes dois regimes.

A existência da rede é assegurada por três componentes:

1. O pacote, que representa a informação mínima que caminha na rede;

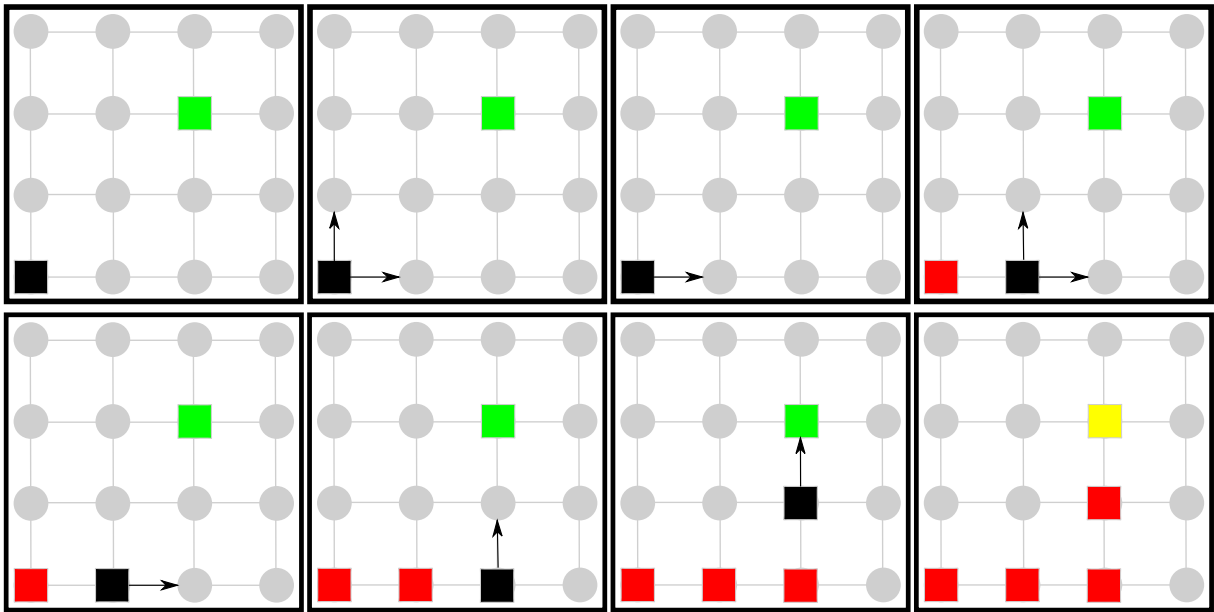
*Também conhecido com free regime.[11]

†Também conhecido como congested regime [11].

2. Os sítios, representando as origens e destinos dos pacotes;
3. Ligações entre os sítios, que permite o movimento dos pacotes.

No instante inicial é fornecido uma probabilidade p que determina o número de pacotes criados na rede. Com esta probabilidade, para cada sítio em cada tempo, "time step", é criado um pacote se um número sorteado no intervalo entre $[0,1]$ for menor ou igual à probabilidade p . Para cada pacote criado é escolhido um destino aleatório diferente da sua origem, no momento da sua criação. Este permanece inalterado até atingir o seu destino.

Figura 12 – Modelo de transporte de pacotes



Fonte: Produção do autor. A escolha do caminho a ser seguido pelo pacote depende da direção que minimize a distância em relação ao destino do pacote. Se houver dois caminhos que minimize a distância para o destino do pacote este caminho será escolhido aleatoriamente com iguais probabilidades.

Os pacotes seguem o seu trajeto pelo menor caminho entre o seu ponto de criação e o seu destino como vemos na figura 12. Esta escolha é feita de acordo com a distância *Manhattan*[‡], de tal forma que minimize o número de passos necessários para chegar ao alvo. Feito a escolha do sítio a ser enviado, o pacote é transmitido dependendo da *qualidade do canal* q_{ij} entre os sítios i e j , calculado pela média geométrica da capacidade dos dois sítios k_i e k_j . Assim,

$$q_{ij} = \sqrt{k_i k_j}. \quad (3.1)$$

[‡]Distância discretizada entre os sítios inspirada no mapa das ruas de Manhattan.

Para calcular a capacidade dos sítios k_i usaremos a seguinte função

$$k_i = f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n^{-\xi}, & \text{se } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

É importante lembrar que poderíamos escolher outras funções para calcular a capacidade k_i , bastando que a expressão permita exprimir uma dependência decrescente ao número de pacotes de acordo com o valor das constantes ajustáveis, no nosso caso essa constante será ξ .

Dada a simetria da rede, o número médio de pacotes que vai de um nó i a um j é:

$$\bar{n}_{ij} = n_i q_{ij} = \sqrt{k_i k_j} = \frac{n_i}{n_i^{\xi/2} n_j^{\xi/2}} = n_i^{1-\xi} \quad (3.3)$$

Desta forma o sistema pode ser explorado em três situações, dependendo do valor de ξ .

1. $\xi < 1$, onde o número de pacotes entregues cresce com o aumento do número de pacotes acumulados;
2. $\xi > 1$, onde o número de pacotes entregues diminui rapidamente com o aumento do número de pacotes na rede;
3. $\xi = 1$, onde observamos uma transição de fase contínua do estado livre para o congestionado.

3.1.1 Caso crítico, $\xi = 1$

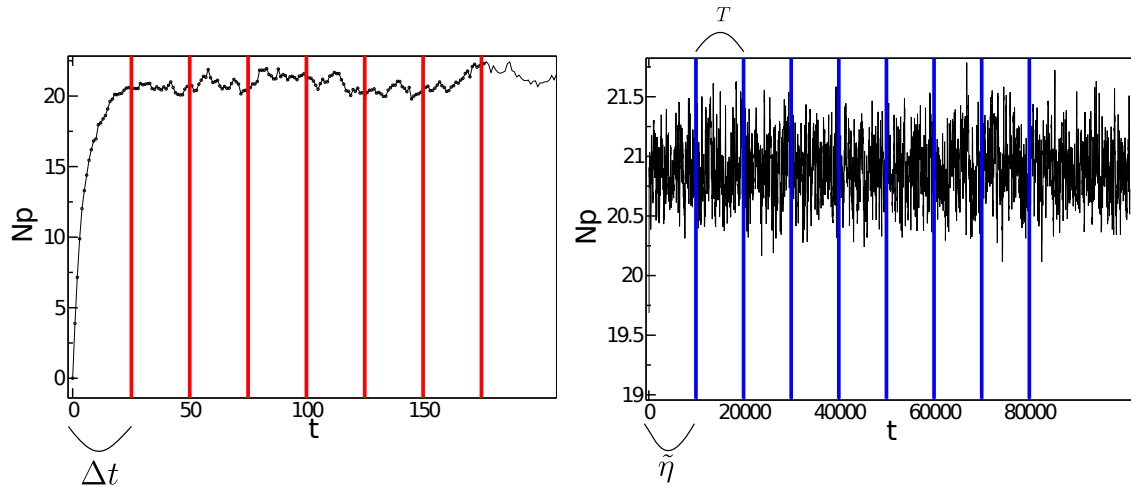
Para o caso de $\xi = 1$, acompanhamos a transição de fase na rede utilizando o seguinte parâmetro de ordem:

$$\eta(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{pS} \frac{\langle \Delta N \rangle}{\Delta t}, \quad (3.4)$$

em que $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$, logo, $\langle \Delta N \rangle$ é a variação média do número de pacotes dada uma janela de tempo Δt . O primeiro gráfico da figura 13 mostra o sinal do número de pacotes em função do tempo sendo dividido em intervalos iguais de Δt afim de se calcular a variação média do número de pacotes.

Já S representa o tamanho do sistema, neste caso o número total de nós. O parâmetro de ordem η , representa a porcentagem do número de pacotes não entregues em relação ao número de pacotes criados (ptS), para um determinado tempo t .

Figura 13 – Cálculo do parâmetro de ordem e suscetibilidade



Fonte: Produção do autor. Cada sinal do número de pacotes Np em função do tempo t é dividido em intervalos iguais para calcular tanto o valor do parâmetro de ordem como a suscetibilidade.

No gráfico 6 podemos observar o comportamento do parâmetro de ordem, onde calculamos o valor de η a partir do estado livre, passando pelo ponto crítico p_c e terminando no estado congestionado.

Quando calculamos η na vizinhança do ponto crítico o sistema sofre as maiores alterações tornando difícil a determinação de p_c com precisão. Logo, a melhor maneira de obtermos o valor do ponto crítico do sistema é através da *Suscetibilidade* definida como:

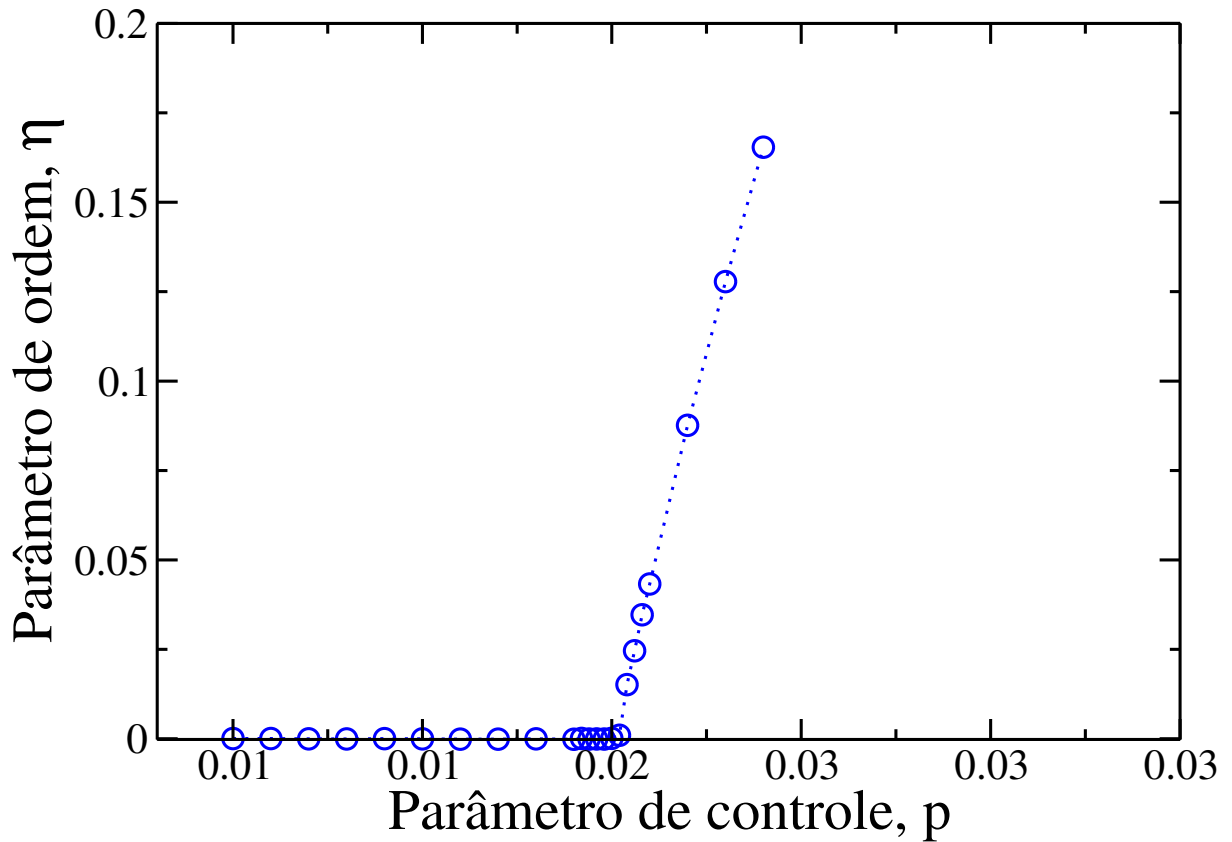
$$\chi(p) = \lim_{T \rightarrow \infty} T\sigma_\eta(T), \quad (3.5)$$

onde $\sigma_\eta(T)$ é o desvio padrão para diferentes janelas de tempo T . Assim, para determinação do valor de χ , dividimos o sinal de $N(t)$ em janelas de tamanho T , calculamos o valor do parâmetro de ordem η_i em cada uma destas janelas T_i . O valor de χ será então o desvio padrão $\sigma_\eta(T)$ destes valores multiplicado por T .

Para redes em uma dimensão obtivemos os seguintes valores de suscetibilidade mostrados na figura 14. O cálculo foi realizado para vários tamanhos de redes e obtivemos o mesmo comportamento.

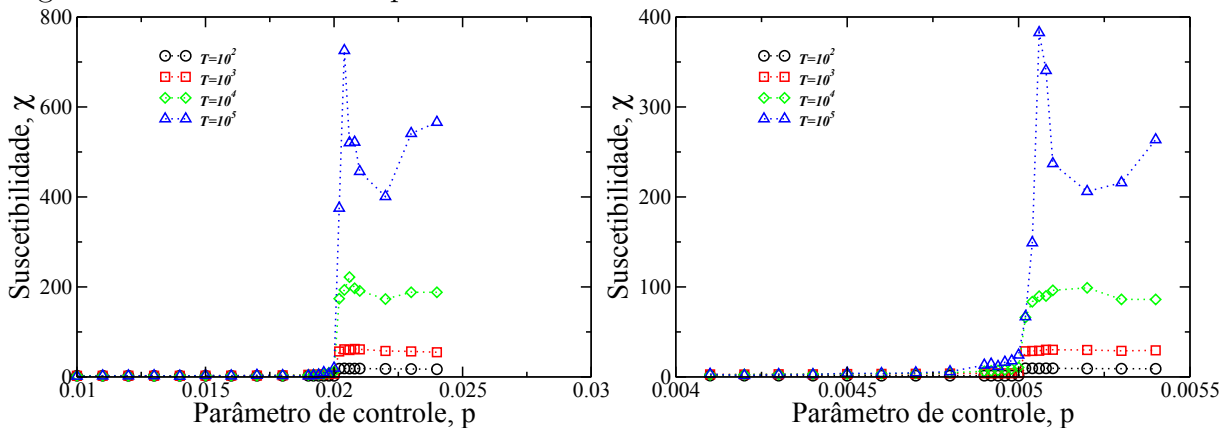
O valor de p_c para uma rede unidimensional pode ser obtido através de argumentos de simetria. Consideremos que o vértice mais congestionado seja o central na posição $n = L/2$ que passa a receber um número de pacotes acima do valor que o mesmo consegue entregar. Se a rede se encontra no estado de equilíbrio, sabemos que os vértices nas posições vizinhas possuem o mesmo número de pacotes que o vértice central. Quando a quantidade de pacotes entregues pelo vértice central é igual a 1, a rede chega ao seu

Gráfico 6 – Parâmetro de ordem η em função da probabilidade p para uma rede 1D com $L=100$

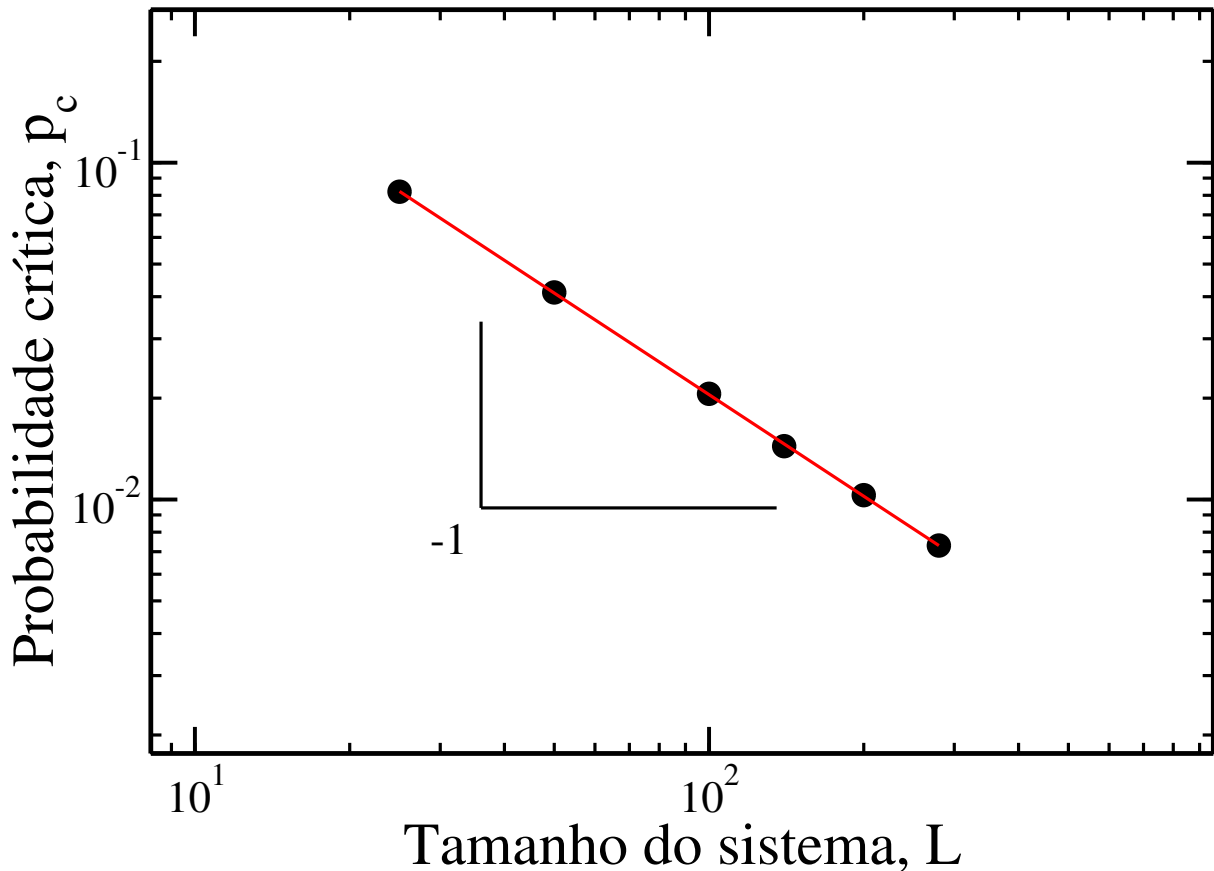


Fonte: Produção do autor. O parâmetro de ordem apresenta uma transição de fase quando $p \approx 0.02$. Para este gráfico fizemos média sobre 100 realizações até p_c e após este valor restringimos à uma realização utilizando a equação (1.10).

Figura 14 – Suscetibilidade para redes unidimensionais



Fonte: Produção do autor. Valores de suscetibilidade calculados para diferentes valores de taxa de criação de pacotes p em redes unidimensionais com $L=100$ e $L=400$, respectivamente. A suscetibilidade apresenta singularidade na região de $p = p_c$, pois as flutuações sobre o número de pacotes é também observado através do parâmetro de ordem que apresenta maior desvio padrão nesta região.

Gráfico 7 – Lei de potência de p_c em função do tamanho da rede

Fonte: Produção do autor. A curva na figura mostra que p_c , probabilidade máxima de criação de pacotes para que a rede continue entregando todos os pacotes aos seus destinos, escala com o tamanho do sistema com expoente -1, em acordo com a equação 3.6. Para esta simulação utilizamos condição de contorno fechada.

limite no mesmo instante em que a quantidade de pacotes criados no lado direito com destino ao lado esquerdo é igual a $(pL/2)$ e vice-versa. Assim,

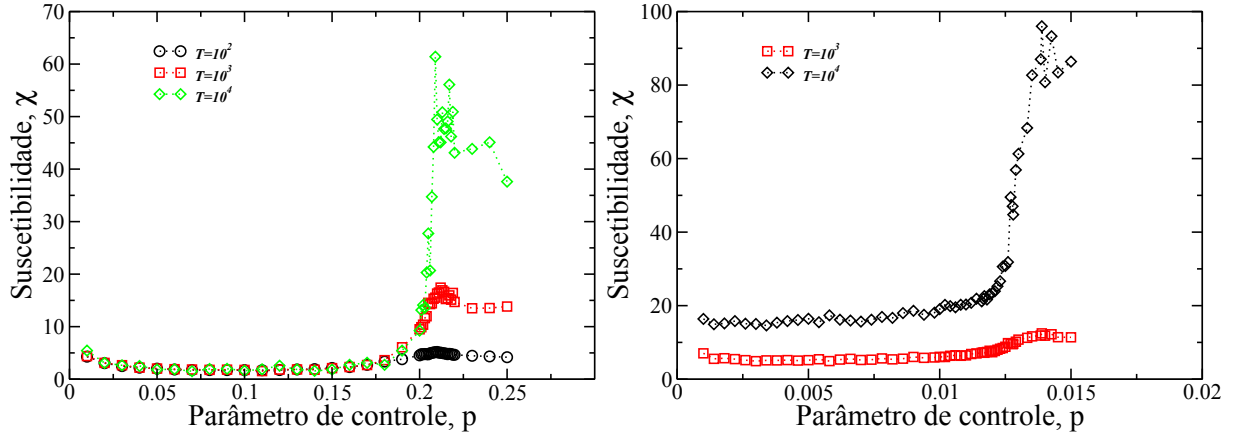
$$1 = \frac{p_c^{1D} L}{2} \Rightarrow p_c^{1D} = \frac{2}{L}. \quad (3.6)$$

Olhando para a figura 14, de $L = 100$ e $L = 400$, os valores encontrados são muito próximos aos esperados, segundo a equação 3.6. Além disso, repetindo o processo para outros valores de L , veremos que o valor do ponto crítico p_c segue uma lei de potência em função do tamanho do sistema L , conforme apresentado na figura 7 com expoente -1.

Considerando agora o caso 2D, adotamos o mesmo procedimento. Determinamos o valor de p_c considerando a região onde a suscetibilidade apresenta um valor máximo de acordo com a figura 15, onde exibimos resultados para redes com $L = 6$ e 64, sendo L agora o tamanho do lado da rede que possui um total de nós $S = L^2$. Da mesma forma, o valor da suscetibilidade apresenta singularidade em $p = p_c$ para vários valores de janela

de tempo como mostra a figura 15. Neste caso, vimos que o expoente de p_c em função do tamanho do sistema para estas redes, apresenta um expoente aproximadamente igual a -0.6 . Conforme mostrado no gráfico 8.

Figura 15 – Suscetibilidade para redes bidimensionais



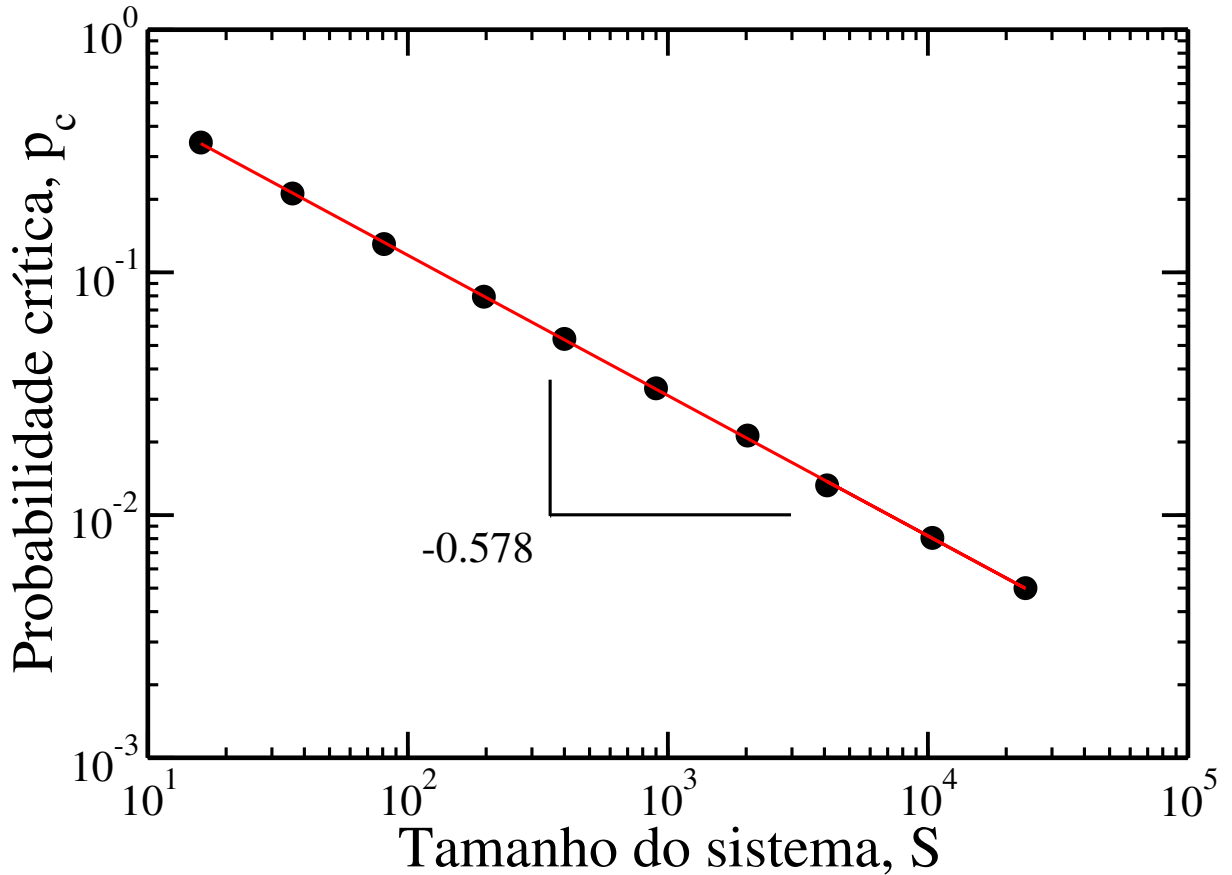
Fonte: Produção do autor. Valores de susceptibilidade calculados para diferentes valores de taxa de criação de pacotes p em redes bidimensionais com $S=36$ e $S=4096$, respectivamente. Onde há maior flutuação do sistema, ou seja, onde o desvio padrão do parâmetro de ordem é máximo coincide com o valor de $p = p_c$ onde ocorre a transição de fase.

A fim de comparação, podemos idealizar um sistema mais simples para aplicação do nosso modelo. Considerando o caso unidimensional com apenas dois sítios, podemos chegar a expressão abaixo sabendo que o número médio de pacotes eliminados será igual a 2 quando $p_c = 1$.

$$\eta(p/p_c) = \frac{p/p_c - 1}{p/p_c} \quad (3.7)$$

Com base nos resultados apresentados no gráfico 9 obtidos para as redes em uma dimensão, o valor do parâmetro de ordem é bem ajustado ao valor idealizado utilizando a equação 3.7, onde o valor de p está normalizado pelo seu valor crítico p_c . Já a curva para a rede 2D se afasta um pouco do valor previsto pela equação 3.7. Isso pode ser explicado, pelo fato de que, para redes 1D, temos apenas um menor caminho entre o sítio de criação e o destino, fato que não acontece com a rede 2D, pois neste caso teremos $\frac{(dx+dy)!}{dx!dy!}$ caminhos possíveis onde dx e dy são as distâncias discretizadas na horizontal e vertical, respectivamente.

Outro aspecto analisado em nosso estudo, foi o espectro de potência para a evolução do número de pacotes ($N(t) = \sum n_i$) na rede em função do tempo. Para isso, calculamos a o modulo quadrado da transformada de Fourier deste sinal através da transformada rápida de fourier ou *Fast Fourier Transform*(*fft*). O resultado é o espectro de potência representado em função das frequências, mostrado na figura 16. No domínio das frequências, o espectro de potência pode ser aproximado por meio de uma função em

Gráfico 8 – Lei de potência de p_c em função do tamanho da rede

Fonte: Produção do autor. Valores do ponto crítico p_c , para diferentes tamanhos de redes em duas dimensões. O gráfico mostra que o valor de p_c escala com o tamanho do sistema S com um expoente -0.58 ± 0.0025 .

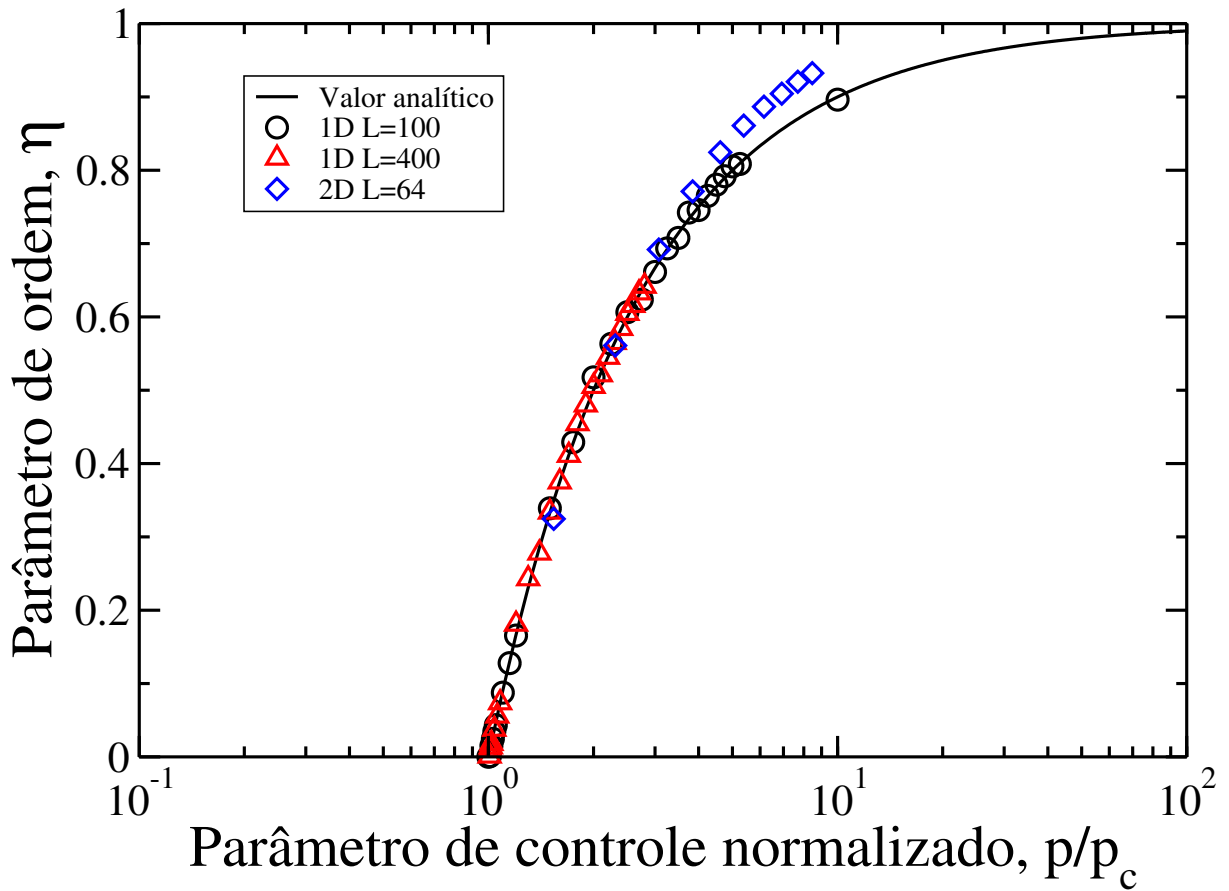
lei de potência cujo o expoente é igual a -2 . Será conveniente a utilização do parâmetro de controle $\epsilon = (p_c - p)/p_c$, pois este expressa claramente a distância relativa a p_c no qual estamos calculando o espectro.

A figura 16 apresentam a correlação temporal, expresso aqui através do espectro de potência, para redes em 1D e 2D quando calculados para valores de p se aproximando do valor crítico p_c .

Olhando por outra perspectiva, podemos ajustar as curvas da figura 16 a uma Lorentziana do tipo

$$L(f) = \frac{I}{\left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2\right]} \quad (3.8)$$

em que I é a intensidade do pico e f_c é a frequência característica. Neste caso encontramos uma dependência em lei de potencial entre f_c e ϵ na forma $f_c \sim \epsilon^\gamma$, com expoente $\gamma \sim 1$ para uma rede unidimensional com $L = 100$, e com expoente $\gamma \sim 2$ para uma rede bidimensional com $L = 6$ conforme mostrado na figura 17. Podemos concluir que quando

Gráfico 9 – Parâmetro de ordem normalizado para diferentes redes com $\xi = 1$ 

Fonte: Produção do autor. A linha sólida corresponde ao cálculo analítico para valores de $p > p_c$ e $L = 2$. Os símbolos correspondem a diferentes simulações em 1D e 2D para diferentes valores de L . A diferença entre os valores calculados do parâmetro de ordem (quadrados azuis) e o valor analítico (linha sólida) é explicado pela existência de vários caminhos mínimos entre a origem e o destino dos pacotes.

$p \rightarrow p_c, f_c \rightarrow 0$ através de :

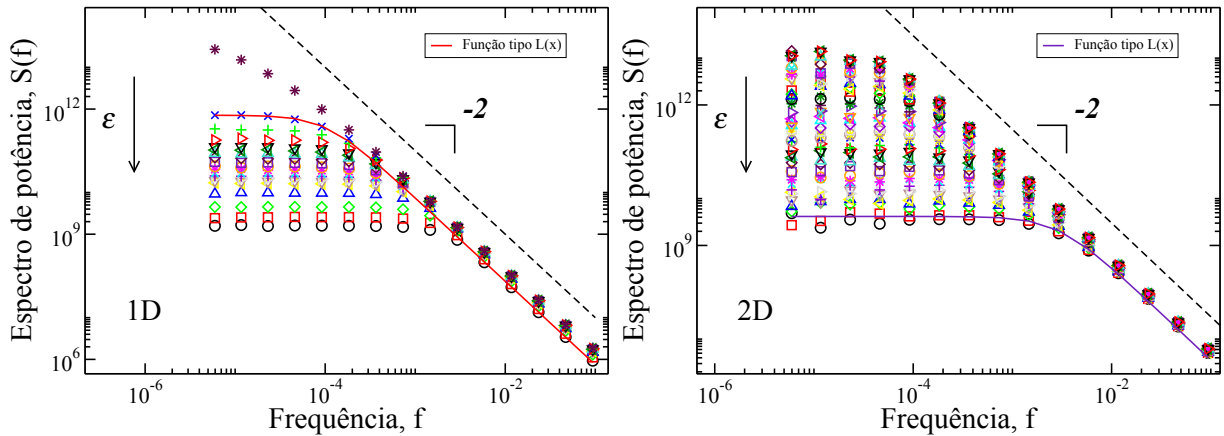
$$\log_{10}(f) = \alpha \log_{10} \left(\frac{p_c - p}{p_c} \right) + B \quad (3.9)$$

$$f = \left(\frac{p_c - p}{p_c} \right)^\alpha \cdot 10^B \quad (3.10)$$

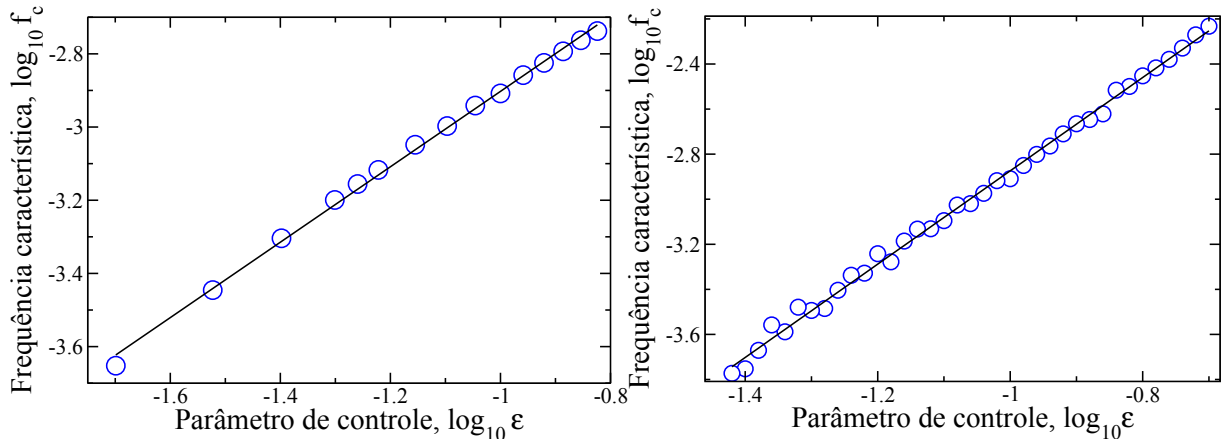
Os expoentes críticos obtidos a partir dos gráficos da figura 17, são importantes não apenas a nível acadêmico mais também para a engenharia pois descrevem a divergência de outras quantidades relevantes tais como o tempo médio para a entrega de pacote e o número total de pacotes no sistema conforme as equações a seguir:

$$\tau \propto (p_c - p)^{-\gamma} \quad N \propto (p_c - p)^{-\gamma}. \quad (3.11)$$

Figura 16 – Espectros de potência para rede unidimensional e bidimensional



Fonte: Produção do autor. Espectros de potência de $N(t)$ para redes em 1D, com $L=100$, e 2D com $S = 36$, respectivamente. O espectro de potência foi obtido para uma média de 100 amostras e em seguida o cálculo do centro de massa dos pontos tomados em quantidades múltiplas. Quanto mais próximos de p_c , o espectro de potência torna-se mais próximo de uma função do tipo $1/f^2$.

Figura 17 – Comportamento da frequência característica para $\xi = 1$ 

Fonte: Produção do autor. Gráfico em escala logarítmica das frequências características como função do parâmetro de controle ϵ para redes 1D e 2D com $L = 100$ e $S = 36$, respectivamente. Podemos observar que quando p tende a p_c , a frequência característica f_c tende a 0.

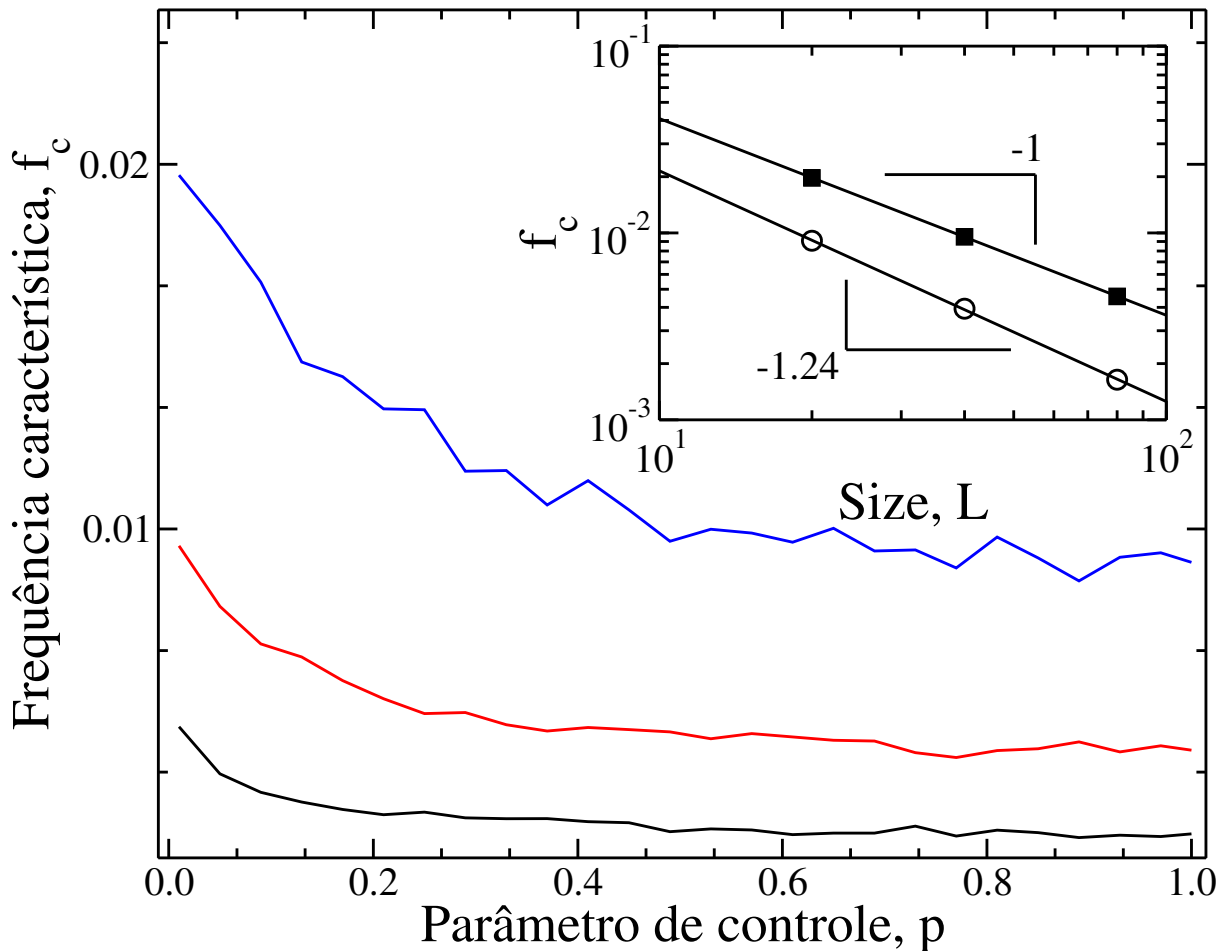
3.1.2 Caso não-crítico, $\xi > 1$ e $\xi < 1$

Quando $\xi < 1$, a capacidade do sistema em entregar pacotes aumenta com o crescimento do número de pacotes acumulados na rede, logo o sistema sempre terá um número de pacotes que oscila em torno de um valor médio e ficará no estado livre e não haverá transição de fase. Este cenário é difícil de se imaginar, pois dificilmente teremos um sistema em que quanto mais pacotes são acumulados melhor seria o transporte dos mesmos. Para este caso, o parâmetro de ordem η , que representa a taxa de pacotes não entregues em relação aos pacotes criados, será sempre igual a 0, para qualquer valor de p ,

pois a rede sempre será capaz de entregar os pacotes criados. Para este valor de ξ o sistema apresenta um comportamento que em prática não tem proximidade com a realidade.

A frequência característica, por sua vez, não tende a zero, porém, tende assintoticamente a um valor que depende do tamanho do sistema, em acordo com as curvas mostradas no gráfico 10. Podemos encontrar uma expressão para caso unidimensional para a frequência característica f_c . Para uma alta densidade de pacotes ($p \rightarrow 1$) sabemos que o número de pacotes entregues por um nó é $n_i^{1-\xi}$, logo, o número de pacotes N_t que estão sendo entregues na rede será:

Gráfico 10 – Comportamento da frequência característica para $\xi < 1$



Fonte: Produção do autor. Frequência característica f_c como função da probabilidade de criação de pacotes p , para $\xi = 0.2$ e diferentes tamanhos de redes em uma dimensão, azul para $L = 20$, vermelho para $L = 40$ e preto para $L = 80$. Como podemos ver, f_c nunca será igual a 0 como acontece no caso $\xi = 1$.

$$N_t = Ln_i^{1-\xi} \Rightarrow n_i \propto L^{1/(1-\xi)}. \quad (3.12)$$

Já o número de pacotes existentes na rede será $\sum_i N_i \sim L^{1+1/(1-\xi)}$. Assim,

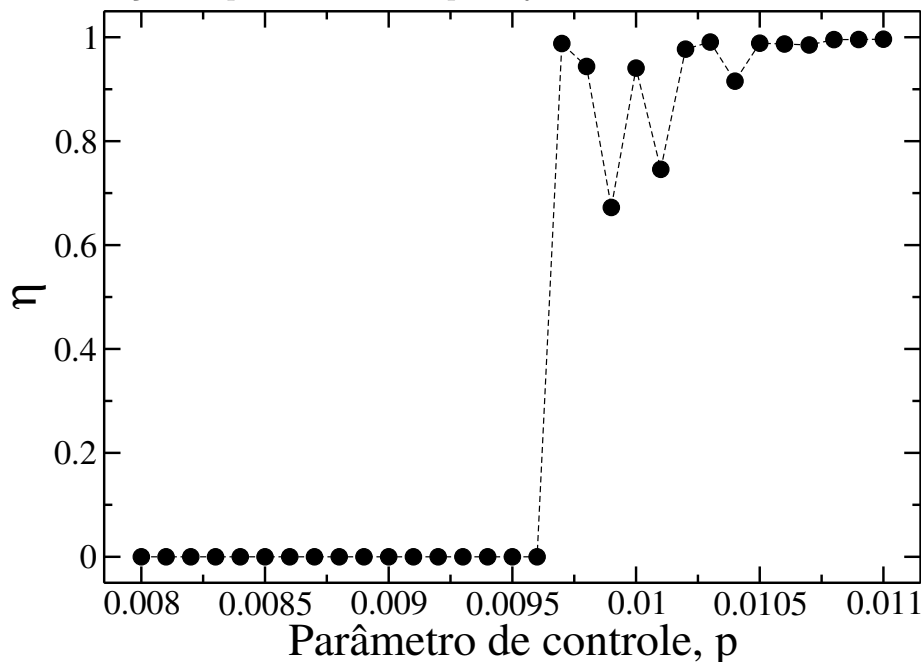
através da lei de Little[§] [33] chegamos que a frequência característica, em um estado de alta densidade de pacotes na rede, quando $p \rightarrow 1$ será:

$$f_c^* \propto \frac{pL}{N} \propto L^{-1/(1-\xi)}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, quando $p \rightarrow 0$ teremos $f_c^0 \propto L^{-1}$ onde o tempo característico é diretamente a média do comprimento de caminho entre os nós.

Considerando agora o caso quando $\xi > 1$, o sistema tende ao estado congestionado rapidamente sempre acumulando pacotes na rede. Existe um estágio muito curto em que os pacotes conseguem ser entregues ao seu destino. Porém, a transição para o estágio congestionado não é contínua e sim de primeira ordem, como mostrado no gráfico 11. A partir do gráfico 11 podemos ver um padrão no acúmulo de pacotes com o passar do tempo para uma rede 2D com $\xi > 1$ e $L = 200$.

Gráfico 11 – Transição de primeira ordem para $\xi > 1$



Fonte: Produção do autor. Comportamento do parâmetro de ordem η quando existe uma transição descontínua para um rede 2D com $L = 32$ e $\xi = 5$. Podemos observar uma abrupta mudança na taxa de pacotes não entregues, em relação aos pacotes criados, confirmando que o sistema neste limite se apresenta muito sensível a uma perda na sua capacidade de enviar pacotes.

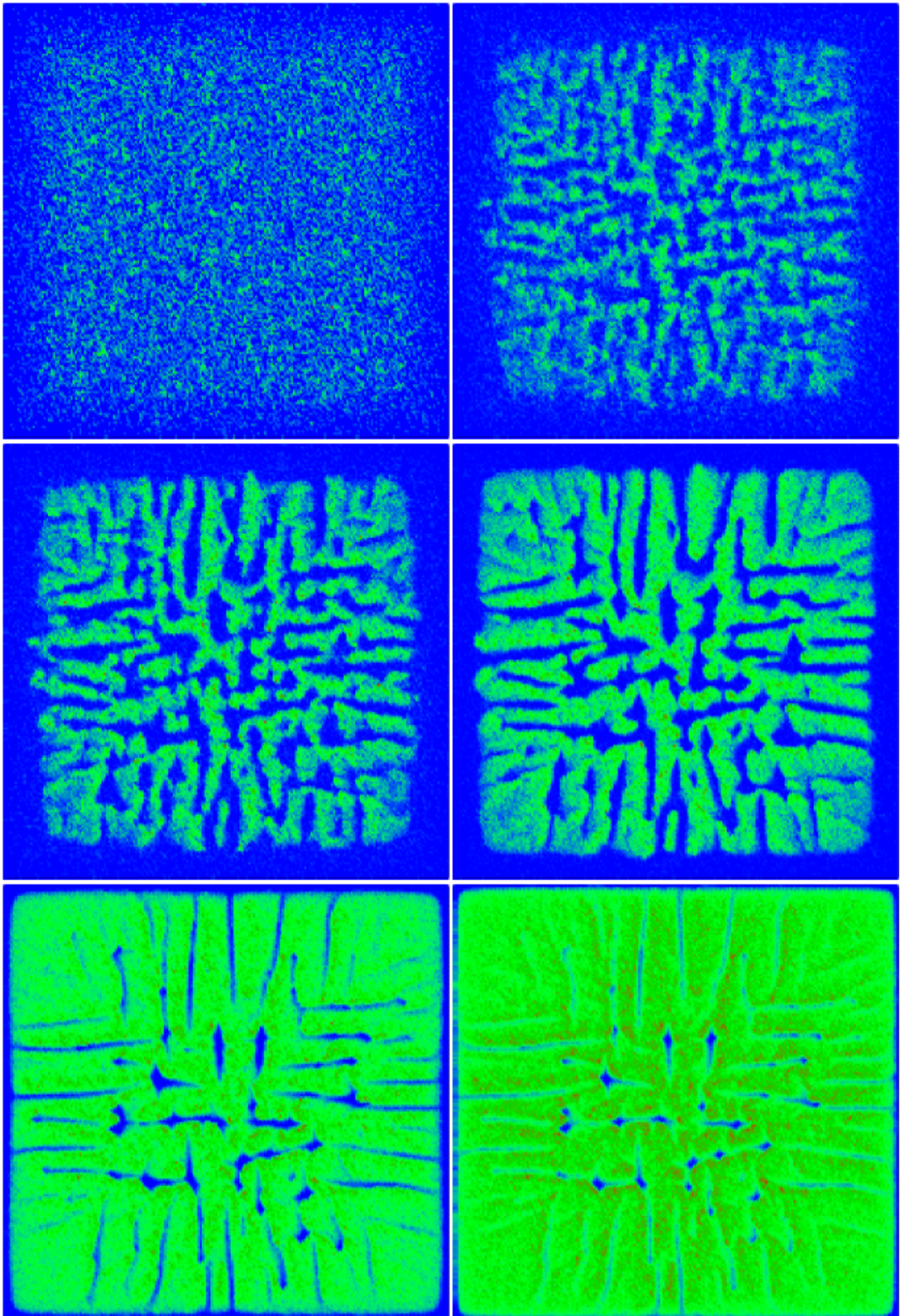
Essa mudança na ordem da transição altera a forma como o congestionamento se propaga na rede. No caso de $\xi = 1$, o nó mais congestionado sempre era o central e em seguida, o congestionamento se espalhava para as demais regiões da rede. Agora o congestionamento acontece em vários núcleos distribuídos pela rede ao mesmo tempo blo-

[§]Lei que relaciona o tempo médio de espera e o número médio de itens a espera por um serviço em um sistema formulada por John D. C. Little e Stephen C. Graves [33].

quando a passagem de pacotes, fato que pode ser observado nos vários estágios mostrados na figura 18.

Apesar do padrão de congestionamento, vimos que a dimensão fractal da estrutura sempre é a mesma, para todos os instantes, e igual a d , onde d é a dimensão do sistema.

Figura 18 – Evolução do congestionamento na rede



Fonte: Produção do autor. Formação de núcleos de congestionamento para rede 2D com $L = 200$, $\epsilon = 5$, $p = 0.001$ para tempos de simulação de $t = 100$, $t = 300$, $t = 500$, $t = 1000$, $t = 5000$ e $t = 10000$, respectivamente. Os pacotes acumulam na rede quando o número de pacotes criados e que chegam ao nó é maior que o número máximo de pacotes que podem ser enviados. Uma vez congestionado o nó não muda sua condição.

4 RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo estudaremos algumas particularidades e extensões das características das redes Lattice em 1D e 2D. Analisaremos os espectros de potência e a criticidade das redes Lattice com condição de contorno periódica. Além disso, utilizaremos as ferramentas exploradas no capítulo anterior para estudar e caracterizar as redes de Kleinberg [10]. Essas redes foram introduzidas por Jon Michael Kleinberg em 2000 [10] quando propôs um modelo de rede que, além das ligações de primeiros ou segundos vizinhos, possui ligações de longo alcance entre dois sítios quaisquer da rede controladas por meio de um parâmetro α . Do ponto de vista prático, a presença destas ligações permitem que algumas mensagens possam ser enviadas por meio de atalhos que minimizam o caminho mínimo entre os sítios origem e destino. Através do parâmetro α podemos transitar de uma rede aleatória ($0 < \alpha < d$), passando por uma rede de mundo pequeno ($\alpha > d$) até atingir uma rede que apresenta interações de segundo ou terceiro vizinhos, quando $\alpha \gg d$.

4.1 Criticalidade e espectros de potência

Quando o sistema se encontra no estado congestionado o tempo computacional para a sua simulação pode ser demasiadamente longo uma vez que a quantidade de pacotes na rede tende sempre a aumentar. Podemos adotar outra maneira de calcular o parâmetro de ordem que diminui o tempo computacional das simulações, fato que discutiremos a seguir.

Sabemos que o número de pacotes em um determinado instante é dado por

$$N(t) = t(pS - N_e) + N_0, \quad (4.1)$$

em que N_e é o número médio de pacotes entregues na rede por instante de tempo e N_0 é o número de pacotes acumulados na rede até seu estado de equilíbrio. Portanto, para um tempo $(t + \Delta t)$ temos que o número de pacotes é dado por:

$$N(t + \Delta t) = (t + \Delta t)(pS - N_e) + N_0. \quad (4.2)$$

Assim, podemos obter o número médio da diferença de pacotes $\langle \Delta N \rangle$ através de

$$\langle \Delta N \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [N_i(t + \Delta t) - N_i(t)]. \quad (4.3)$$

Dado o intervalo de tempo Δt , e assumindo que o número médio de pacotes entregues N_e se mantém constante para uma determinada probabilidade de criação de pacotes p

chegaremos a seguinte expressão:

$$\langle \Delta N \rangle = \Delta t(pS - N_e). \quad (4.4)$$

Logo, podemos escrever o parâmetro de ordem como função apenas do número médio de pacotes entregues N_e , do tamanho da rede S e da probabilidade de criação de pacotes p .

$$\eta(p) = 1 - \left(\frac{N_e}{pS} \right) \quad (4.5)$$

Esta equação é indicada no caso do cálculo do parâmetro de ordem para valores de p acima do ponto crítico, pois obtém-se os valores necessários com um tempo de simulação até 10 vezes mais rápido.

Ainda para o caso da Lattice, podemos explorar um aspecto bastante interessante em relação a seu espectro de potência. Sabemos que a correlação temporal, $S(f)$, escala com a frequência na forma $S \sim f^{-2}$ e que se ajusta a uma Lorentziana, $L = I/(1 + (f/f_c)^2)$, onde I é intensidade máxima das curvas e f_c a frequência crítica. Podemos ajustar I , para cada valor de p , ao parâmetro ($\epsilon = (p_c - p)/p_c$), introduzido no capítulo anterior, como mostrado no gráfico 12.

Os valores de intensidade dos espectros de potência de cada curva de p obedecem a uma lei de potência com expoente -1.8661 ± 0.0069 . Utilizando uma ideia semelhante a aplicada no trabalho de Araújo e seus colaboradores [34], podemos propor um colapso semelhante para a função espectro de potência utilizando os parâmetros de escala apropriados. Todos os espectros colapsam em um só se aplicarmos em cada espectro $S(f)$ a seguinte transformação de escala $H(\epsilon, f)$, de tal forma que:

$$S(f) \rightarrow H(\epsilon, f) = S(f)\epsilon^{-\zeta} \quad (4.6)$$

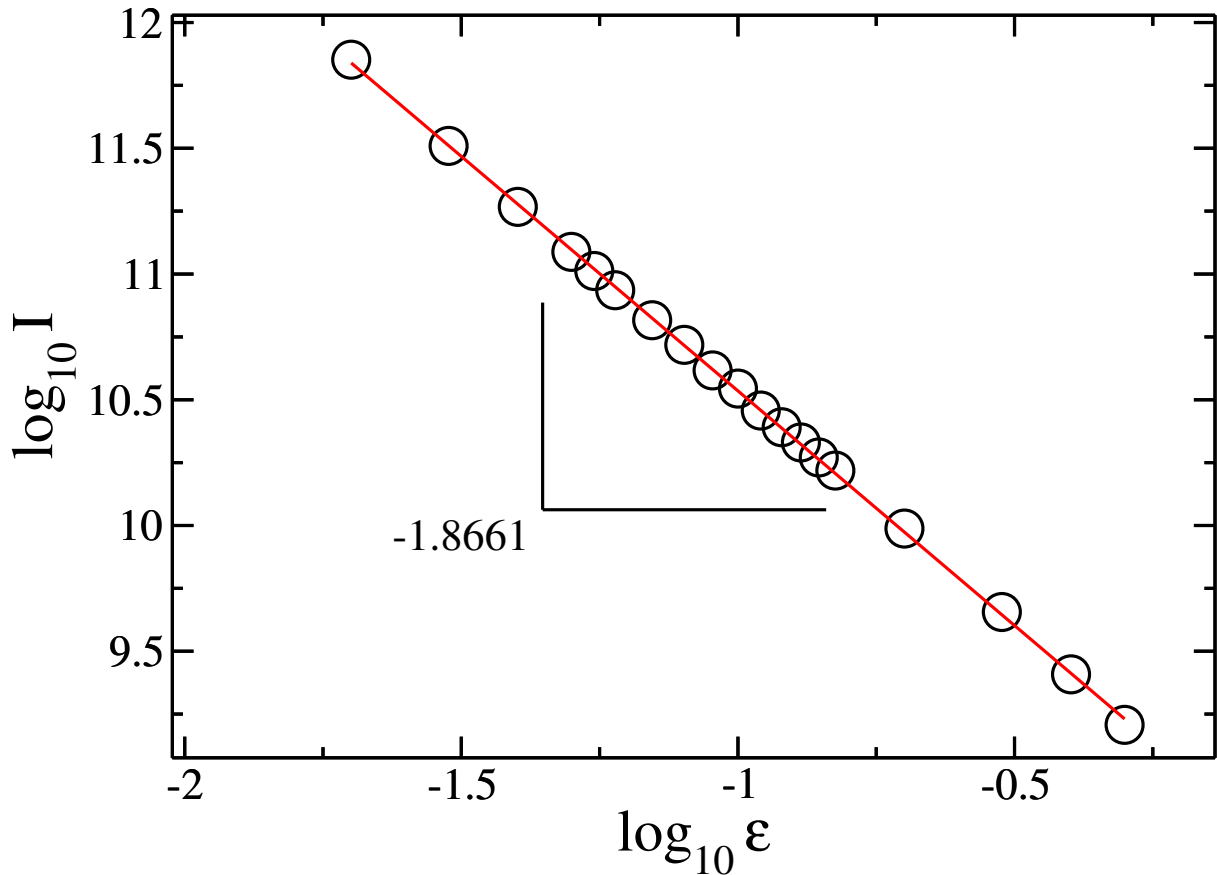
e

$$f \rightarrow f' = f\epsilon^{-z}, \quad (4.7)$$

onde obtemos o valor de ζ a partir do ajuste mostrado no gráfico 12, com $z = \zeta/\beta$, sendo $\beta = -2$ o expoente do espectro de potência mostrado nos gráficos da figura 16. Assim, todas as curvas dos espectros de potência se ajustam muito bem a função $H(f')$ com as devidas transformações de escala aplicadas em $S(f)$ e f .

O fato das curvas colapsarem em uma mesma função $H(f')$, revela a semelhança das curvas para p menor que p_c , diferenciando apenas por valores de escala. Logo, é possível descrever uma função geral que representa todos os espectros de potência transformados pelas equações 4.6 e 4.7. Como essa transformação é invertível podemos encontrar uma função geral de $N(t)$ para o número total de pacotes na rede em cada instante

Gráfico 12 – Saturação dos espectros das redes unidimensionais



Fonte: Produção do autor. O gráfico mostram os valores de intensidade I resultantes do ajuste a uma Lorentiziana do espectro de potência em função de ϵ para uma rede 1D com $L=100$. O parâmetro de escala deste gráfico é utilizado para determinar o valor de ζ da equação 4.6 para que os espectros coincidam.

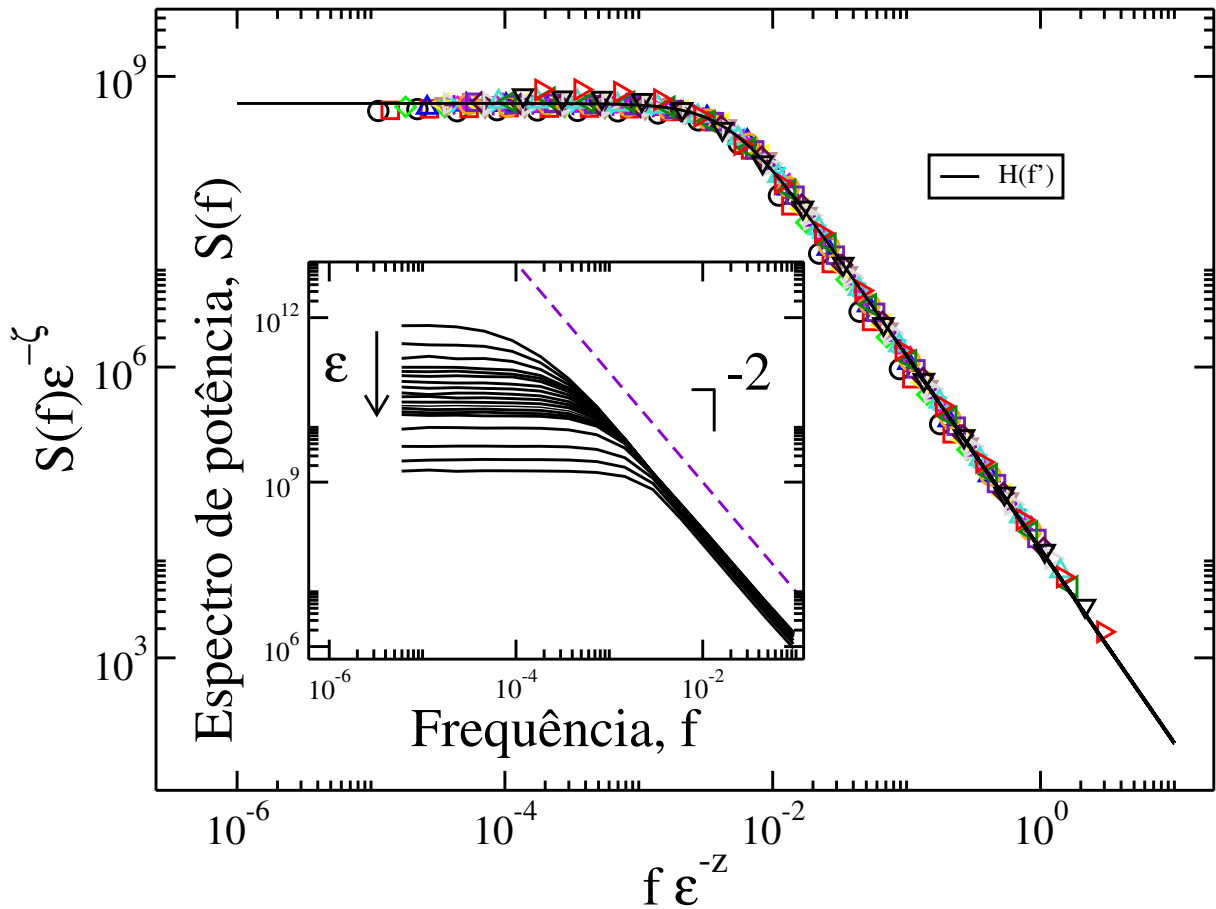
de tempo t .

Nas redes bidimensionais, apesar de existirem flutuações devido a presença dos vários caminhos possíveis entre a origem e o destino durante o tráfego dos pacotes na rede, veremos também um comportamento semelhante.

O colapso das curvas também nos leva a escrever uma função geral $H(f')$ que representa todas as curvas transformadas para diferentes valores de p que, da mesma maneira que no caso unidimensional, nos permite encontrar uma função geral de $N(t)$ que representa o número total de pacotes na rede em um instante t . Podemos assim, escrever uma função geral $H_G(f')$ válida para qualquer espectro de potência transformado através de

$$H_G(f') = \frac{I\epsilon^{-2d}}{1 + \left[\frac{f\epsilon^d}{f_c}\right]^2}, \quad (4.8)$$

em que d é a dimensão do sistema. Todos os espectros foram obtidos de 100 realizações e extraindo-se o comportamento médio dos pontos através do centro de massa dos valores

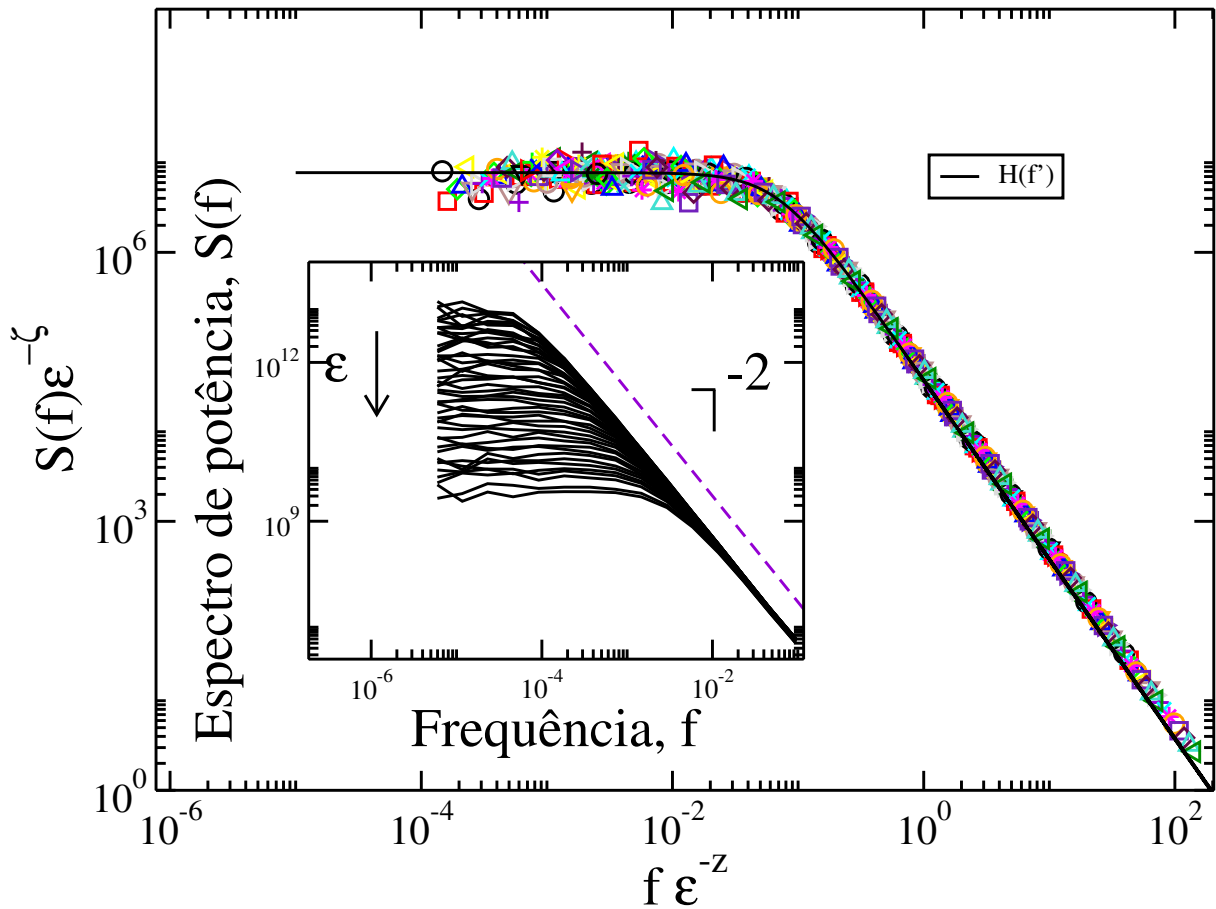
Gráfico 13 – Colapso dos espectros de potência para uma rede 1D com $L=100$ 

Fonte: Produção do autor. Aqui, $\zeta \sim -1.83$ é o expoente do ajuste da intensidade de curva de cada espectro de potência que foi ajustado a uma Lorentziana. No gráfico os valores de $\beta = -2$ e $z = \zeta/\beta$. O espectro de potência foi obtido para uma média de 100 amostras sendo feito uma binagem dos pontos tomados em conjuntos de 4, 8, 16... pontos, e assim por diante.

obtidos.

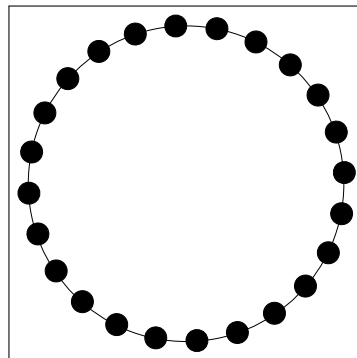
Tratando-se de redes complexas, sabemos que um dos fatores de desvio na determinação de pontos críticos de uma transição de fase é o tamanho do sistema. Muitas vezes este sistema torna-se difícil de ser simulado para tamanhos grandes que minimizem os efeitos de borda. Assim, é necessário contornar esta dificuldade aplicando a rede uma condição de contorno periódica. Esta condição permite que os sítios localizados nas extremidades da rede "enxerguem" os outros sítios na extremidade oposta. O resultado desta aplicação é um grafo em forma de anel em 1D, figura 19, e em duas dimensões uma malha semelhante a um *donut*. Isso permite que todos os sítios em uma dimensão tenha dois vizinhos e em duas dimensões quatro, gerando uma maior uniformidade na rede, mesmo para tamanhos de redes pequenos.

De forma semelhante, podemos determinar o ponto crítico para ambos os casos em uma e duas dimensões, utilizando as mesmas ferramentas já aplicadas para o caso com

Gráfico 14 – Colapso dos espectros de potência para uma rede 2D com $S=36$ 

Fonte: Produção do autor. Aqui, $\zeta \sim -3.97$ é o expoente do ajuste da intensidade de curva de cada espectro de potência que foi ajustado a uma Lorentziana. No gráfico os valores de $\beta = -2$ e $z = \zeta/\beta$. O espectro de potência foi obtido para uma média de 100 amostras sendo feito uma binagem dos pontos tomados em conjuntos de 4, 8, 16... pontos, e assim por diante.

Figura 19 – Rede regular unidimensional com condição de contorno periódica



Fonte: Produção do autor. Rede Lattice unidimensional com condição de contorno periódica. Cada um dos nós interage com dois vizinhos.

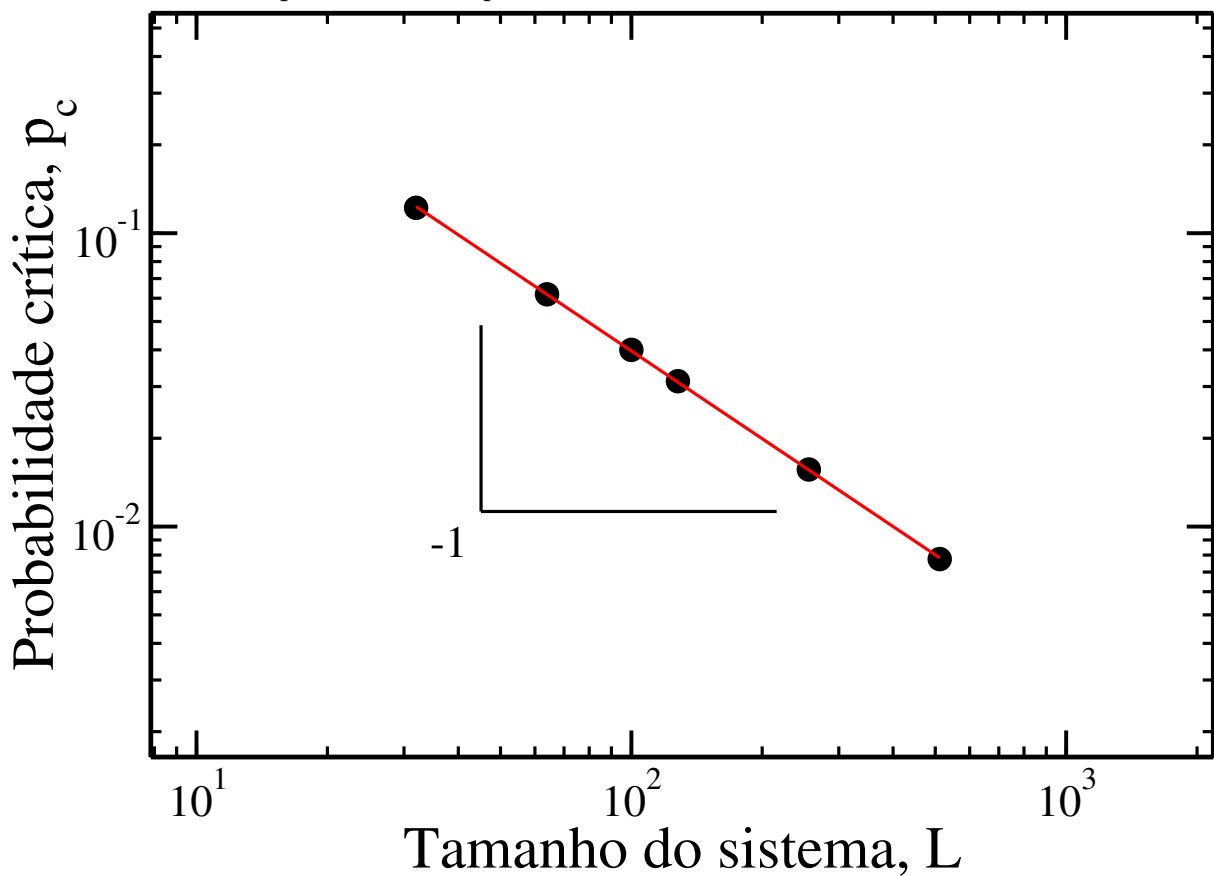
condição de contorno aberta. Quando a rede apresenta condição de contorno periódica, em 1D, teremos que a rede congestionará quando os pacotes posicionados em um quarto da rede tem destino em um quarto vizinho. Assim, com analogia semelhante a usado

no capítulo anterior, chegamos a seguinte expressão para o ponto crítico em função do tamanho da rede L :

$$1 = \frac{p_c^{1D'} L}{4} \Rightarrow p_c^{1D'} = \frac{4}{L} \quad p_c^{1D'} = 2p_c^{1D'}. \quad (4.9)$$

Neste caso o valor de p_c é dobrado em relação ao valor obtido para o caso com condição de contorno aberta, porém, sua dependência com o tamanho do sistema, continua com o mesmo expoente -1 . Os dados mostrados no gráfico 15 comprova a validade da equação 4.9.

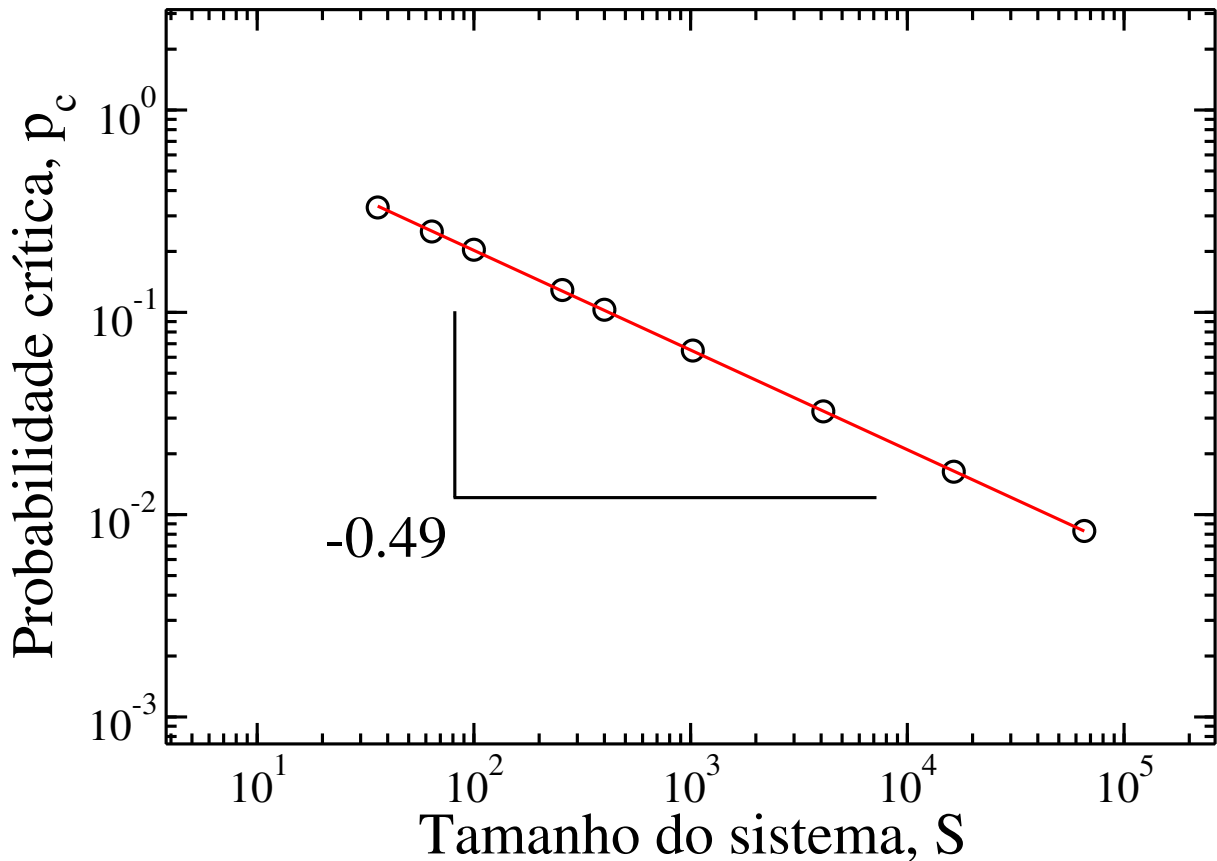
Gráfico 15 – Lei de potência entre p_c e o tamanho da rede



Fonte: Produção do autor. p_c escala com o tamanho do sistema com expoente -1 também para a rede em uma dimensão com condição de contorno periódica.

As redes em 2D com condição de contorno periódica também sofrem alteração no valor de p_c . Neste caso, o valor em que p_c escala com o tamanho do sistema muda para um expoente igual -0.492 ± 0.001 , como podemos observar no gráfico 16.

Estes resultados são importantes pois mostram que o valor calculado anteriormente para as rede unidimensionais possuem o mesmo valor de expoente, independente da condição de contorno aplicada. Já no caso bidimensional, os valores diferem um pouco mostrando a sensibilidade do caso 2D para uma mudança na condição de contorno. Estes

Gráfico 16 – Lei de potência entre p_c e o tamanho da rede

Fonte: Produção do autor. Comportamento de escala para a probabilidade crítica p_c em função do tamanho S para a rede em duas dimensões com condição de contorno periódica. Com base no ajuste linear obtivemos o expoente -0.492 ± 0.001 .

valores serão importantes para comparação com os valores obtidos para as redes de Kleinberg pois, além das ligações de longo alcance, aplicaremos condição de contorno periódico a todas as redes simuladas.

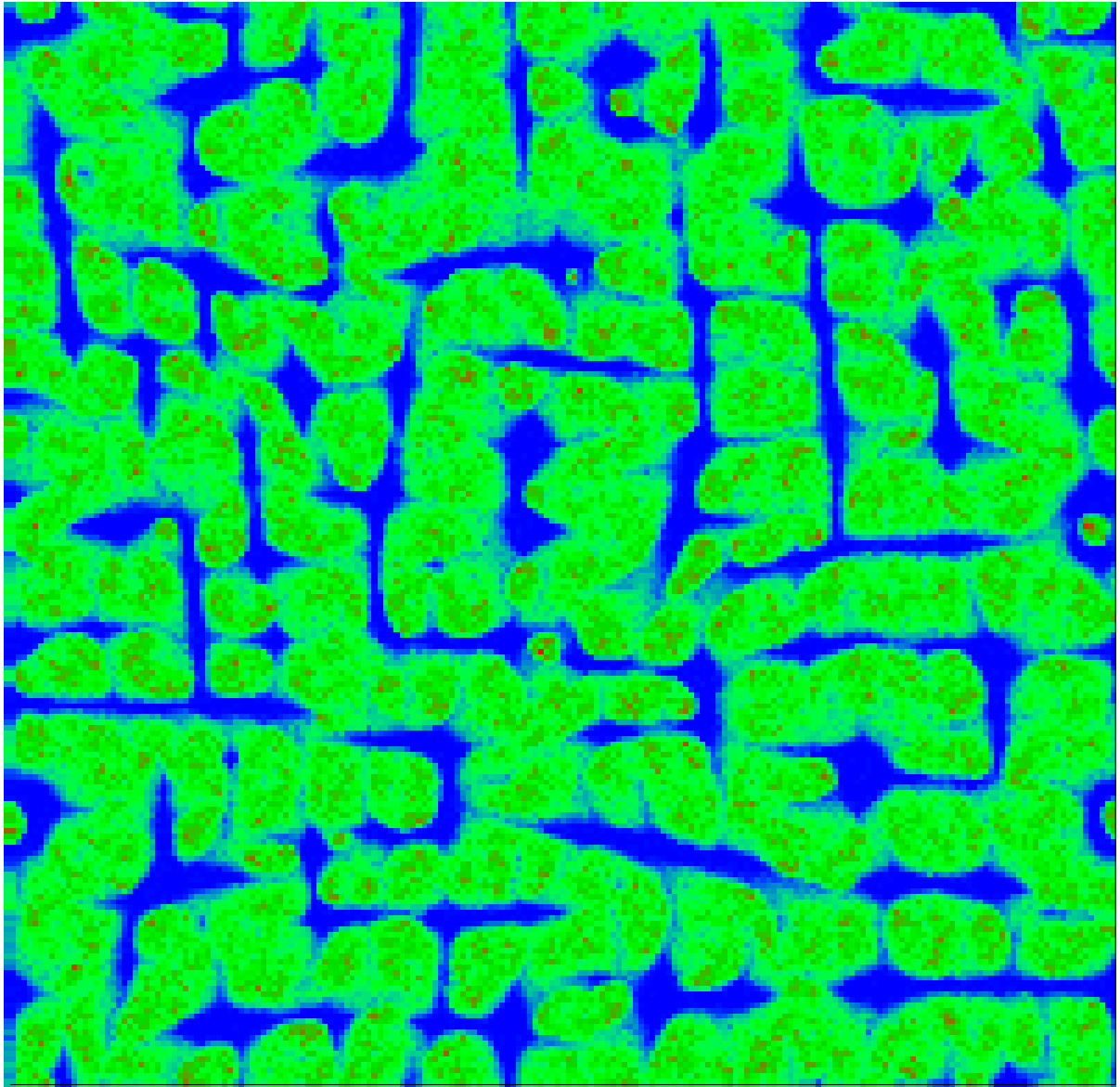
Analisando também o padrão de congestionamento da rede para $\xi > 1$, teremos um comportamento semelhante ao mostrado na parte central da figura 18, pois não teremos os efeitos de borda presente no caso anterior. Porém, observamos o mesmo padrão de núcleos congestionados impedindo os pacotes de chegarem ao seu destino.

4.1.1 Redes de Kleinberg em 2D

Já é conhecido que as redes de Kleinberg em 2D apresentam melhores condições de transporte para o caso de $\alpha = 2$ sendo este valor igual a dimensão do sistema [10]. Porém, propomos investigar se este resultado se confirma quando analisamos a quantidade de pacotes que se movem pela rede através da qualidade do canal entre os sítios (i, j) dependente do número de pacotes existentes em cada um destes sítios.

Assim como na rede em 1D e 2D discutidas no capítulo anterior, os pacotes

Figura 20 – Congestionamento na rede com condição de contorno periódica



Fonte: Produção do autor. Formação de núcleos de congestionamento para rede 2D com $L = 200$, $\epsilon = 2$, $p = 0.01$ para tempos de simulação de $t = 500$. As regiões azuis representam os sítios menos congestionados em relação aos sítios mais congestionados, pontos vermelhos.

caminham na rede segundo uma qualidade de canal q_{ij} que depende da capacidade k_i de cada sítio que por sua vez depende do número de pacote existentes nestes sítios através de uma $f(n)$.

As ligações são estabelecidas antes da criação de pacotes de tal forma que todos sítios da rede possuem, pelo menos, uma ligação de longo alcance. É importante lembrar que a distância $r_{i,j}$ refere-se a distância Manhattan, ou seja, $r = |\Delta x| + |\Delta y|$. Isso porque os passos executados pelos pacotes segue o mesmo pensamento.

Nas redes de Kleinberg, continuaremos com a suposição de que o número de

pacotes que existem na rede é, aproximadamente, homogêneo para cada sítio e que a qualidade do canal é independente do sentido, ou seja, é a mesma de i para j e de j para i , $q_{ij} = q_{ji}$. Esta suposição leva a uma rede com conexões do tipo simétricas, sem uma direção privilegiada. Isso nos leva a mesma suposição em que o número de pacotes entregues entre um sítio i e j será $n_i^{1-\xi}$. Nestas condições, teremos novamente três comportamentos diferentes. Se $0 < \xi < 1$, a rede nunca congestionará pois a capacidade dos nós em entregar pacotes aumentará quando o número de pacotes aumentar. Para $\xi = 1$ número de pacotes entregues é constante e igual a 1, logo, teremos uma transição contínua entre um regime livre e um regime congestionado, determinado pela suscetibilidade. Para $\xi > 1$, o sistema apresenta um curto estágio em que consegue entregar os pacotes, porém transita rapidamente para um estado congestionado.

Com o intuito de entender esta questão, construímos as redes de Kleinberg e calculamos o valor de p_c para vários tamanhos de rede com o parâmetro α variando de 0 à 10. Novamente, o valor de p_c varia com α , apresentando um valor máximo que tende a dimensão do sistema $d = 2$. Neste caso, melhores condições de transporte significam um valor máximo de p pois a rede pode criar um número maior de pacotes sem que esta atinja o limite do congestionamento.

Aqui, utilizamos o mesmo método para a determinação de p_c para $\xi = 1$, quando há transição de fase contínua. Próximo ao ponto crítico, o sistema sofre as maiores alterações tornando difícil a determinação de p_c com precisão, logo, obteremos o valor do ponto crítico do sistema através da suscetibilidade definida por:

$$\chi(p) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \sigma_\eta(T) \quad (4.10)$$

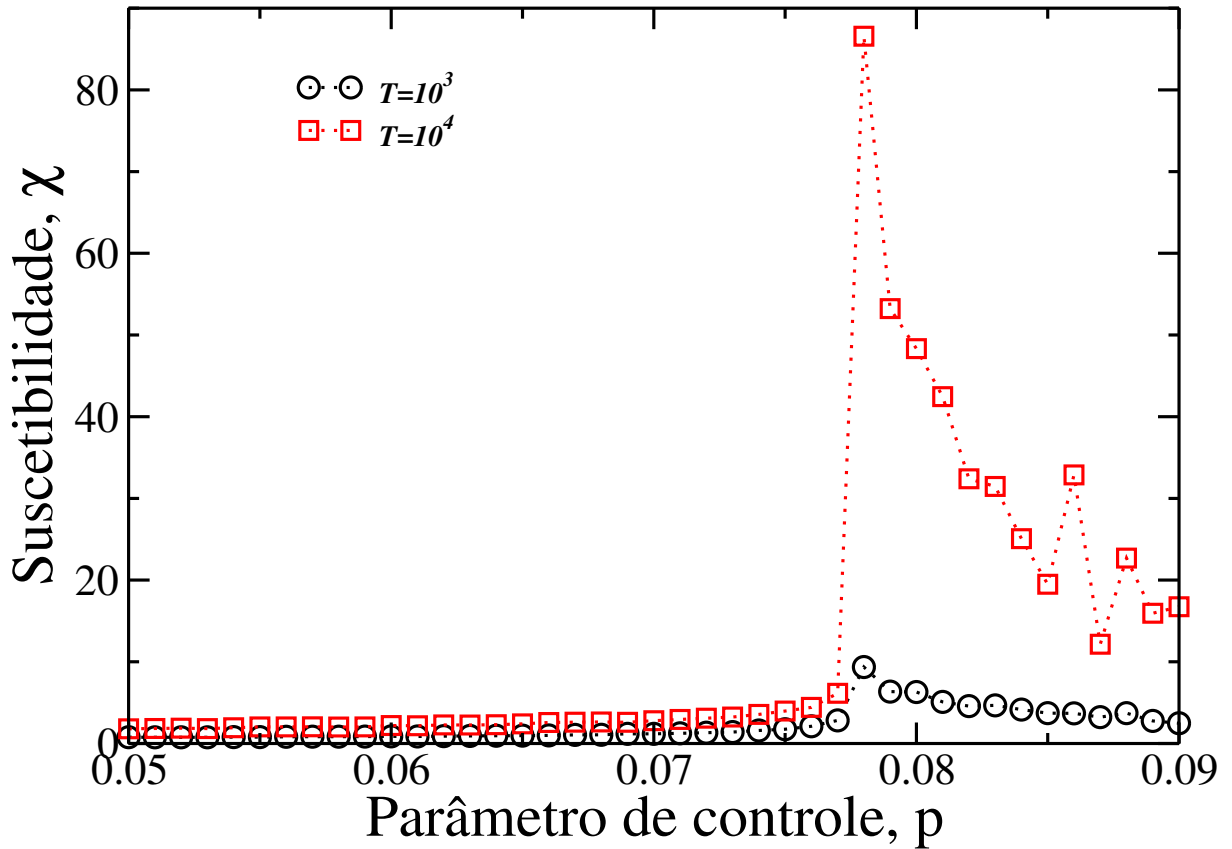
onde $\sigma_\eta(T)$ é o desvio padrão para uma janela de tempo T .

Assim, podemos estabelecer que, onde houver maior flutuação do parâmetro de ordem η quando calculado para diferentes janelas de tempo T assumindo uma determinada probabilidade de criação p , este é valor da probabilidade será definido como sendo o ponto crítico. Novamente, veremos que o valor máximo de suscetibilidade ocorre para vários valores de janelas de tempo T .

A figura 21 mostra o comportamento de p_c com o valor de α , onde podem ser observados três comportamentos distintos. Na primeira região que vai de $\alpha = 0$ (onde se caracteriza um grafo aleatório*), até $\alpha = 2$, o sistema tende a aumentar o valor de p_c . Nessa região, a rede se parece muito com um grafo aleatório tornando a determinação do valor de p_c bastante complicada devido a presença de um ruído. Em seguida, para valores de α maiores que d , o valor de p_c diminui assintoticamente para um valor constante.

*Onde as ligações de diferentes tamanhos são igualmente prováveis

Gráfico 17 – Suscetibilidade em função da probabilidade de criação de pacotes p na rede de Kleinberg



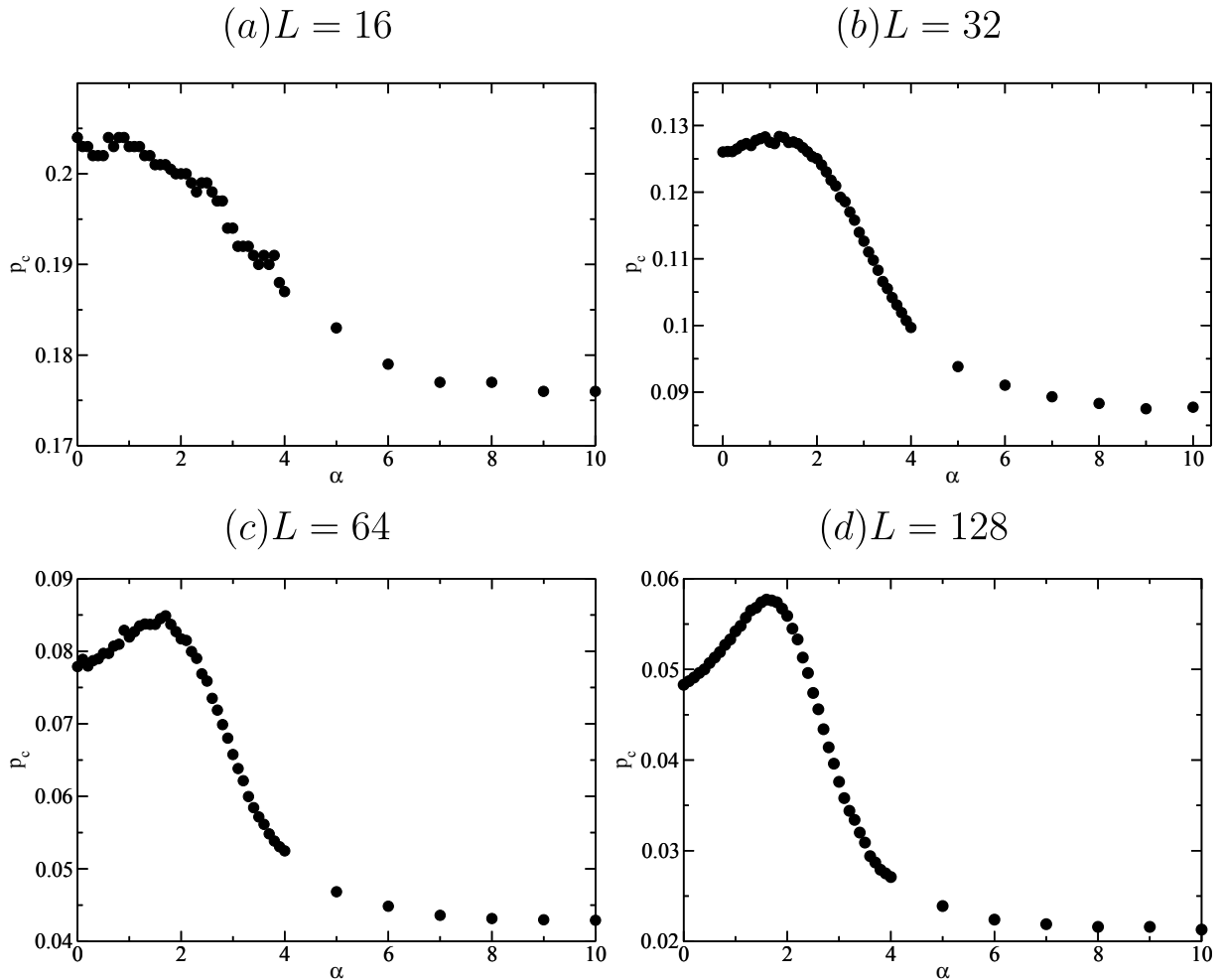
Fonte: Produção do autor. Resultados obtidos para uma rede em duas dimensões com tamanho $L = 64$ e parâmetro $\alpha = 0.1$. Podemos observar que o valor máximo da suscetibilidade χ acontece no ponto crítico.

Neste segundo momento, as redes tendem a um comportamento semelhante ao da lattice já discutido anteriormente. Isso se deve ao fato das ligações de longo alcance serem tão improváveis, que estas ligações ocorrem apenas entre segundos ou terceiros vizinhos. A medida que aumentamos o tamanho do sistema este comportamento fica mais evidente.

Um outro aspecto investigado neste trabalho, foi o efeito do parâmetro α no valor da probabilidade crítica p_c como função do tamanho do sistema, ou seja, $p_c \sim S^{-\rho(\alpha)}$. Para a construção deste gráfico, inicialmente vemos na figura 21 que de fato o sistema apresenta uma variação no valor de p_c como função do parâmetro α , para diferentes tamanhos do sistema. A partir destes resultados fica evidente a presença de um máximo em p_c para um determinado valor de α . No gráfico 18 mostramos como o expoente ρ varia para diferentes valores de α . A presença de um mínimo no módulo do expoente ρ confirma que a melhor condição para o transporte se estabelece quando o valor de α é próximo ou igual a dimensão do sistema.

Outro aspecto importante de ser observado no gráfico 18 é o decréscimo do

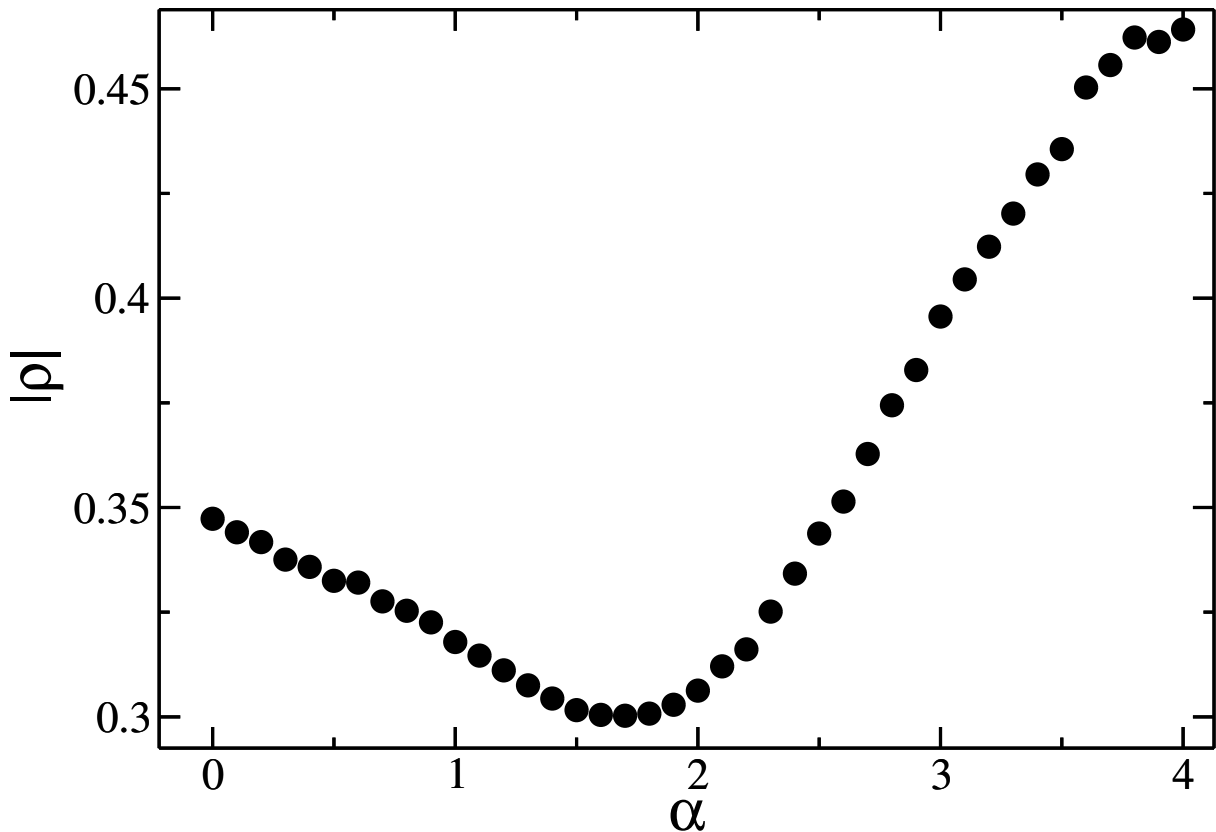
Figura 21 – Variação da probabilidade crítica p_c em função de α para vários tamanhos de redes



Fonte: Produção do autor. Os valores de $p_c(\alpha)$ são mostrados para (a) $L = 16$, (b) $L = 32$, (c) $L = 64$ e (d) $L = 128$. Quanto maior o sistema analisado, menor serão as flutuações associadas a determinação da probabilidade crítica do sistema, além de tornar mais evidente as melhores condições de transporte para α próximo ou igual a d .

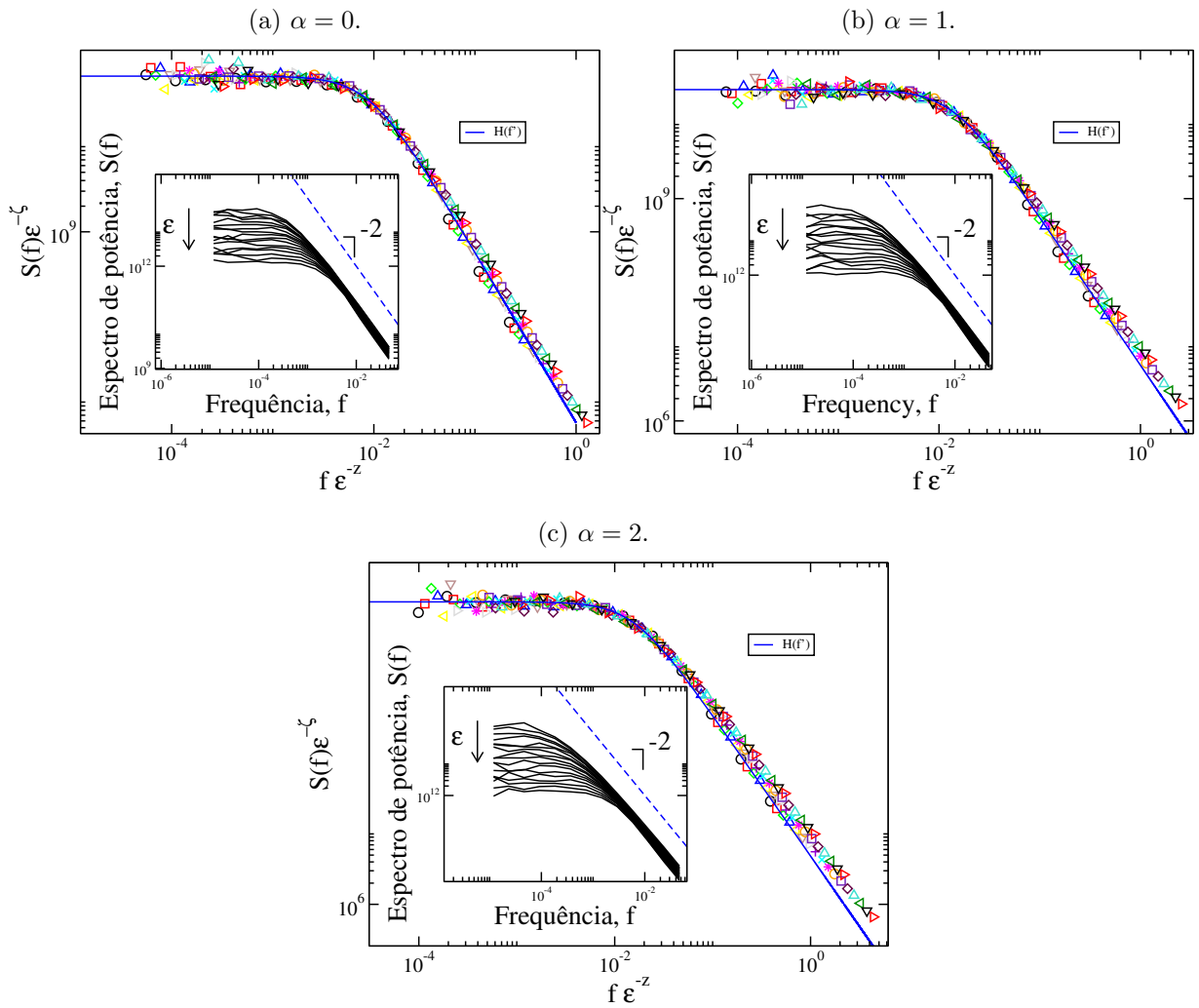
expoente ρ para valores muito grandes de α . O expoente de p_c em função do tamanho do sistema tende, assintoticamente, ao mesmo expoente de $p_c(S)$ para a configuração de rede Lattice com condição de contorno periódica, mostrada anteriormente, ou seja, o valor de $\rho(\alpha)$, para $\alpha \gg d$, será igual ao da Lattice com condição de contorno periódica.

Conforme já investigado anteriormente, os espectros de potência podem facilmente serem ajustados a uma Lorentziana. Também com a inclusão do parâmetro α as curvas para o espectro de potência são ajustadas a uma curva Lorentziana. Este aspecto confirma que embora exista uma variação significativa de p_c com o parâmetro α , os expoentes críticos associados ao problema não mudam apreciavelmente. Os colapsos propostos continuam válidos, mesmo considerando a inclusão de ligações de longo alcance no sistema, controlado neste modelo pelo parâmetro α .

Gráfico 18 – Variação do expoente ρ para vários valores de α 

Fonte: Produção do autor. O expoente ρ foi calculado de forma semelhante ao expoente de $p_c(S)$ para as redes Lattice. O seus valores revelam o fato de que as melhores condições de transporte acontece para $\alpha \sim d$, onde $d = 2$ como se esperava para uma rede bidimensional.

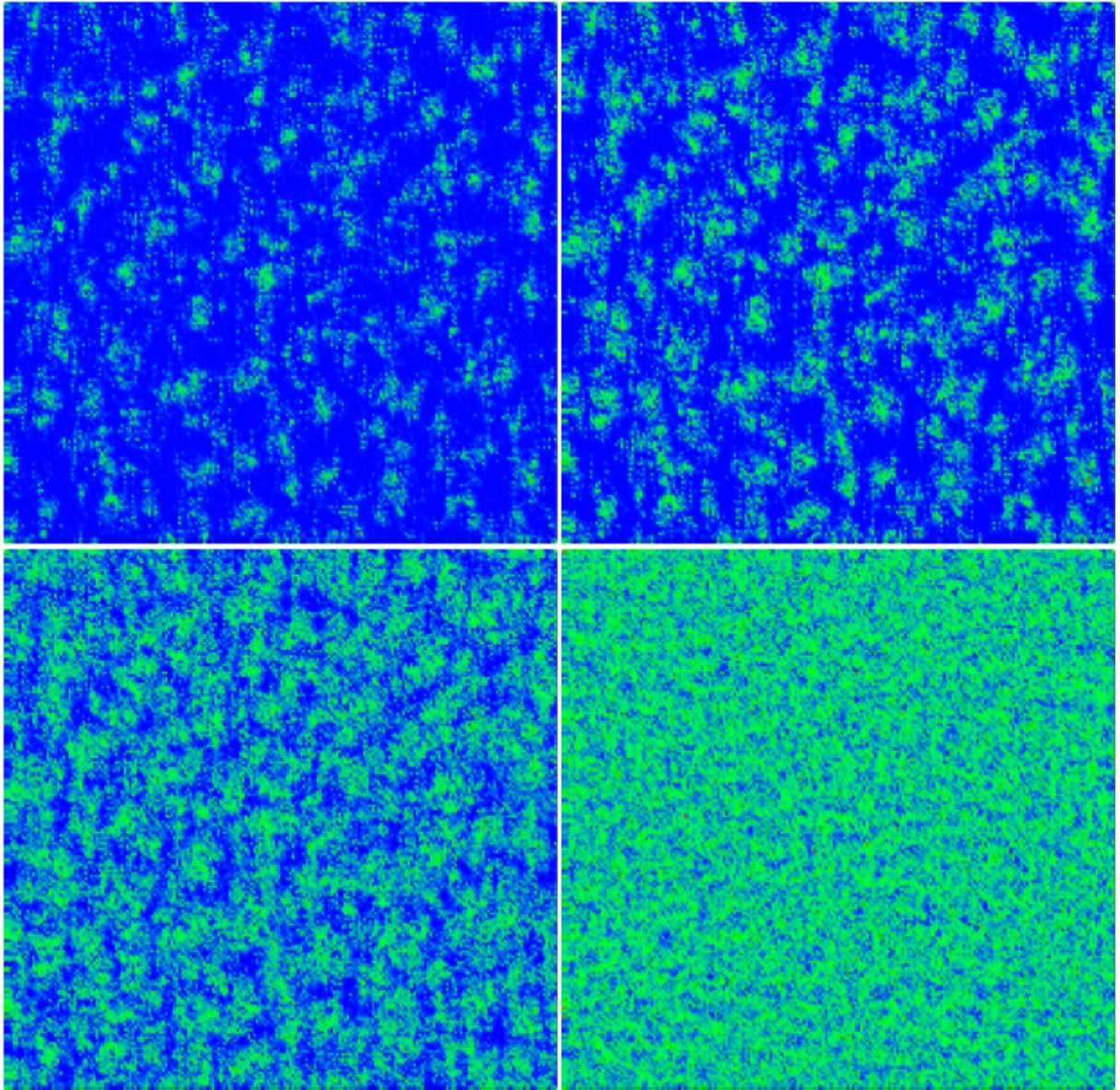
Como no capítulo anterior e para entendermos melhor o problema, podemos analisar o padrão de congestionamento das redes de Kleinberg no caso de $\xi > 1$. Para este caso, a figura 23 mostra um padrão bastante diferente do padrão de congestionamento para as redes lattice. Para a Lattice, vimos que os pacotes acumulados formam barreiras que impossibilitam a transmissão de pacotes entre as regiões delimitadas por esta barreira. Neste caso, o padrão apresentado parece bem "diluído" em comparação ao da figura 18 pois os núcleos que acumulam pacotes no sistema não formam estas barreiras levando o sistema ao congestionamento mais rapidamente. Os pacotes que precisam passar por sítios congestionados pode ser transferido para um sítio posterior através da ligação de longo alcance evitando o congestionamento num primeiro momento. Porém, esta mudança não é suficiente para evitar o congestionamento num momento posterior pois a probabilidade de transmissão de pacotes entre dois sítios da rede ainda diminuir rapidamente com $n_i^{-\Xi}$, onde $\Xi > 1$. Fato que também pode ser observado para redes do tipo Lattice em 2D, que não apresentam ligações de longo alcance mais possui o mesmo decaimento da probabilidade de transmissão de pacotes. A evolução do congestionamento ilustrado pela figura 23 foi

Figura 22 – Colapso de espectros de potência para $\alpha = 0, 1, 2$ 

Fonte: Produção do autor. Colapso dos espectros de potência para uma rede de Kleinberg em 2D com $L=128$ para valores de $\alpha = 0, 1, 2$. Onde ζ , o expoente do ajuste da saturação de cada espectro ao parâmetro de controle ϵ , é aproximadamente -1.9 para $\alpha = 0$, igual a -2.3 para $\alpha = 1$, e igual a -2.6 para $\alpha = 2$. Onde $\beta = -2$ e $z = \zeta/\beta$.

simulada para os mesmos valores de p e ξ atribuídos ao caso da redes lattice.

Figura 23 – Evolução do congestionamento de pacotes na rede de Kleinberg em 2D



Fonte: Produção do autor. A rede apresentada possui dimensão $L = 200$, $\epsilon = 5$ e $p = 0.001$ para tempos de simulação de $t = 500$, $t = 1000$, $t = 5000$ e com $p = 0.05$ $t = 500$ no último quadro.

5 CONCLUSÕES GERAIS

No estudo da dinâmica das redes regulares vimos que um sistema, em que a sua capacidade de transportar informação depende da quantidade de informação trafegando na rede, possui um valor máximo quanto ao número de informação suportada onde a rede consegue cumprir o seu papel entregando todas as mensagens aos seus respectivos destinos. Porém, se a rede possui uma quantidade de informação maior que o suportável ele sobrecarregará tornando impossível sua efetividade na entrega de informações. Este valor máximo para o número de pacotes suportada pela rede é caracterizado pela fração de pacotes criados e escala na forma uma lei de potência, com relação ao tamanho do sistema. Os expoentes que controlam o comportamento em lei de potência foram determinados sendo aproximadamente -1 e -0.5 , para redes em uma e duas dimensões, respectivamente. Este mesmo valor foi encontrado também, quando adicionamos condição de contorno periódico no sistema, fato que conduz o sistema ao seu limite termodinâmico, eliminando possíveis efeitos de borda, que poderiam alterar os expoentes encontrados.

Analisando os espectros de potência extraímos importantes informações da correlação temporal do número de pacotes na rede. Vimos que, para valores de p menor que p_c , o espectro possui uma saturação diferente quando aumentamos a probabilidade de criação de pacotes existente na rede. Estes espectros colapsam em uma mesma função geral $H(f')$ através de parâmetros de escala que dependem da saturação, ζ , e do expoente que controla o comportamento do espectro de potência na região do seu decaimento, quando $p \rightarrow p_c$. Através da determinação do expoente da frequência característica f_c em função do parâmetro ϵ conseguimos estabelecer a divergência de quantidades relevantes para a engenharia como o tempo em que um pacote demora para atingir seu destino e o número de pacotes existente na rede. Este expoente também é importante para protocolos de comunicação pois é usado para determinar o tempo em que um pacote pode ser considerado perdido e portanto enviado novamente.

Para $\xi < 1$, o sistema nunca congestiona e sua frequência característica f_c não tende a 0 para qualquer valor de p . Porém, a frequência característica escala com expoente previsto pela lei de Little próximo aos valores extremos de p . Para uma probabilidade de criação próxima de 0 teremos $f_c^0 \propto L^{-1}$ enquanto que para p próximo do seu valor máximo 1 a frequência característica torna-se $f_c^* \propto L^{-1/(1-\xi)}$.

Para $\xi > 1$, vimos que o sistema possui um pequeno intervalo de p em que os pacotes conseguem ser entregues. Porém, rapidamente congestionando demonstrando uma transição de fase de primeira ordem onde o parâmetro de ordem torna-se 1. O padrão de

congestionamento da rede é bem característico, reforçando a ideia de que quando um nó atinge a saturação permanecerá neste estado para sempre.

Quando aplicamos a dependência da qualidade do canal q_{ij} para a movimentação de pacotes em uma rede de Kleinberg vimos que as melhores condições de transporte para estas redes são sempre atingidas para $\alpha = d$, considerando um sistema suficientemente grande. Neste caso o valor do expoente de ρ varia de acordo com o valor de α , logo, as condições de maior eficiência no transporte de informação são alcançadas quando o módulo do expoente ρ possui um valor mínimo. A adição de uma dinâmica de pacotes que depende de outras variáveis, não alterou as propriedades topológicas que conduzem as condições de transporte mais eficiente nas redes de Kleinberg, quando $\alpha = d$. Podemos concluir que as condições estruturais das redes são mais significativas no transporte de pacotes do que os protocolos atribuídos a dinâmica do sistema. Assim, se quisermos maximizar a capacidade de transporte em uma rede em que há troca de pacotes (informações, dados, objetos, etc) devemos nos preocupar primordialmente com a estrutura física da rede (como o padrão em que as ligações estão distribuídas entre os nós, por exemplo) do que com os protocolos de troca de pacotes, pois desta maneira teremos uma otimização do transporte nestas redes.

Os espectros de potência para as redes de Kleinberg apresentam que um comportamento semelhante para diferentes valores de ϵ , pois foi possível obter um colapso das curvas em uma única curva. Assim como no caso das redes lattice, podemos construir uma função geral que represente todos os espectros de potência para todos os valores de $p < p_c$ e assim, chegar em uma função do número de pacotes existentes na rede para um tempo t .

Este tipo de sistema pode ser bastante explorado em diversos outros aspectos pois sua importância está diretamente ligada a sistemas que podem ser representados por meio de grafos aleatórios, mundo pequeno e regulares, alterando apenas o valor α .

Existe um grande interesse no estudo de sistemas complexos através de redes. Sua importância se explica pelo grande número de comportamentos que podemos estudar simulando modelos de redes a fim de que demonstrem um mesmo comportamento observado em redes reais. Isso facilita a caracterização de novas estruturas de interação que possam surgir, sejam elas interações entre seres humanos, animais, computadores, e etc. Através das redes conseguimos entender melhor como o mundo a nossa volta se comporta, deixando de lado a ideia de que aleatoriedade significa caos.

Acreditamos que o estudo dos expoentes de saturação dos espectros de potência revele informações ainda mais importantes para a caracterização desta dinâmica nas redes de Kleinberg.

REFERÊNCIAS

- [1] Adamic, L. A.;Lukose, R. M.;Puniyani, A. R.;Huberman, B. A. Search in power-law networks. **Physical Review E**, v. 64, 046135, 2001
- [2] Albert, R.;Jeong, H.; Barabási, A. Diameter of the world-wide web. **Nature**, v. 401, p. 130-131, 1999.
- [3] DeCanio, S. J.; Watkins, W. E. Information processing and organizational structure. **Journal of Economic Behavior & Organization**, 36, p. 275-294, 1998.
- [4] Faloutsos, M.; Faloutsos,P.; Faloutsos, C. On power-law relationships of the internet topology. **ACM SIGCOMM Computer Communication Review**, 29, 1999.
- [5] Huberman, B. A.; Adamic, L. A. **Nature**, v. 401, p. 131-131, 1999.
- [6] Radner,R. **Econometrica**, v. 61, pg. 1109, 1993.
- [7] Anatel. Disponível em: < [http : //legislacao.anatel.gov.br/resolucoes/2014/778 – resolucao – 638](http://legislacao.anatel.gov.br/resolucoes/2014/778-resolucao-638) >. Acesso em 03 de julho de 2014.
- [8] Agência Nacional de Telecomunicações. Relatório 2013. Disponível em: < [http : //www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalInternet.do](http://www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalInternet.do) >. Acesso em 03 de julho de 2014.
- [9] Allen, A. O. *Probability, statistics, and queueing theory: with computer science applications*. 2 ed. San Diego, Academyc Press, (1990).
- [10] Kleinberg, J. M. The Small-World Phenomenon: An Algorithm Perspective. Proceedings of the 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, p. 163–170, 2000.
- [11] Guimera,R.Dynamical proparties of model commolication networks. **Physical Review E**,v. 66, p. 247, ago. 2002.
- [12] Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L. Cambridge & New York:McGraw-Hill Book Company & The MIT press, 1990.
- [13] Calheiros, F. J. L. C. **Análise combinatória no estudo das transições de fase dos sistemas de spin vetorial** 1985. 208 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Universidade do Porto, Porto, 1985.
- [14] Rapoport, A. Cycle distribution in random nets, **B. Mathematical Biophysics**. 10, 145-157 (1948).
- [15] Solomonoff, R and Rapoport, A. Connectivity of random nets, **B. Mathematical Biophysics**. 13, 107-117 (1951).
- [16] Newman, M., E., J. *Networks: An introduction*. 1 ed. New York, Oxford University Press, (2010).

- [17] Wikipédia. Disponível em: < [http : //pt.wikipedia.org/wiki/Axonio](http://pt.wikipedia.org/wiki/Axonio) >. Acesso em 02 de junho de 2015.
- [18] Shimbel, A. Contributions to the mathematical biophysics of the central nervous system with special reference to learning, **Bulletin of Mathematical Biophysics**. v.12, pg. 241-275 (1950).
- [19] Erdos, P., Rényi, A. On random graphs. **Publicationes Mathematicae**, 6, p. 290–297, 1959.
- [20] Dorogovtsev, S. N.; Mendes, J. F. F. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. 1 ed. Oxford, Clarendon Press, (2002).
- [21] Stauffer, D. *Introduction To Percolation Theory*, 2ed. London, Selwood Printing Ltd, (2003).
- [22] Milgram, S. The Small-World Problem. **Psychology Today**, 1, 1967.
- [23] Pool, I. S.; Kochen, M. "Contacts and influence." *Social Networks* 1(1): 5-51. <http://hdl.handle.net/2027.42/23764>;
- [24] Dodds, P. S.; Muhamad, R.; Watts, D. J. An Experimental Study of Search in Global Social Networks. **Science**, v.301, pg. 827-828, 2003.
- [25] Barabási, A., L. *Networks Science*. Versão digital. Disponível em < [http : //barabasi.com/networksciencebook/](http://barabasi.com/networksciencebook/) >.
- [26] Watts, D., Strogaz, S. Collective dynamics of 'small-world' networks. **Nature**, 393, p. 440–442, 1998.
- [27] Wood, W. B. *The Nematode Caenorhabditis elegans*. 1 ed. New York, Cold Spring Harbor Laboratory Press, (1988). Capítulo 1: Introduction to C. elegans Biology. , p. 1.
- [28] BBC. < [http : //www.bbc.co.uk/portuguese/noticias/2014/11/141124_brasil_internet_pai](http://www.bbc.co.uk/portuguese/noticias/2014/11/141124_brasil_internet_pai) >. Disponível em 5 de junho de 2015.
- [29] Abril. < [http : //info.abril.com.br/noticias/internet/2014/11/dinamarca-e-o-pais-mais-conectado-do-mundo-mostra-relatorio-da-wit.shtml](http://info.abril.com.br/noticias/internet/2014/11/dinamarca-e-o-pais-mais-conectado-do-mundo-mostra-relatorio-da-wit.shtml) >. Disponível em 5 de junho de 2015.
- [30] Albert, R.; Barabási, A. Statistical mechanics of complex networks. **Reviews of Modern Physics**, v. 74, p. 47–97, 2002.
- [31] Jacobson, V. Congestion Avoidance and Control. **ACM SIGCOM Comp. Comm. Rev.**, v.18, pg. 314, 1988.
- [32] Arenas, A.; Díaz-Guilera, A.; Guimerà, R. Communication in Networks with Hierarchical Branching. **Physical Review Letters**, v. 86, p. 3196, abril de 2001.
- [33] Little, J. D. C.; Graves, S. C. *Building Intuition: Insights from Basic Operations Management Models and Principles*. New York, Springer Science, (2008).

- [34] Araújo, A. D.; Andrade Jr., J. S.; Hermann, H. J. Multiple invaded consolidating materials. **Physical Review E**, v.70, 66150, 2004.
- [35] Clauset, A.; Shalizi, C. R.; Newman, M. E. J. Power-law distributions in empirical data. **SIAM Review**, v.51, 661-703, 2007.
- [36] Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling W. T.; Flannery, B. P. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2 ed. Cambridge, Cambridge University Press, England, 1992.
- [37] Li, G.; Reis, S. D. S. et al. Optimal transport exponent in spatially embedded networks. **Physical Review E**, v. 87, p. 042810, 2013.

APÊNDICE A – CÁLCULO DO NÚMERO MÍNIMO DE SIMULAÇÕES EM UMA REDE DE KLEINBERG

O número de realizações necessárias para que a distribuição das ligações obedeça a equação 2.6 deve ser tal que permita o sorteio da ligação de maior tamanho pelo menos uma vez e é calculado no apêndice A. Podemos deduzir da seguinte forma:

$$P(r_{i,j}) = F_n r^{-\alpha} \quad (\text{A.1})$$

onde F_n é um fator de normalização.

$$\frac{P(r_{max})}{P(r_{min})} = \frac{r_{max}^{-\alpha}}{r_{min}^{-\alpha}} \quad \frac{N(r_{max})}{N(r_{min})} = \frac{r_{max}^{-\alpha}}{r_{min}^{-\alpha}} \quad (\text{A.2})$$

Onde $N(r) = P(r)N_{tl}$ é o número de ligações de tamanho r e N_{tl} o número total de ligações. Assim teremos:

$$N(r_i) = N(r_{max}) \frac{r_{max}^{-\alpha}}{r_i^{-\alpha}} \quad (\text{A.3})$$

Assim podemos concluir que o número de realizações necessária será:

$$N_{tl} = \sum N(r_i) = N(r_{max}) r_{max}^{-\alpha} \sum_{r_{min}}^{r_{max}} r_i^{-\alpha} \quad (\text{A.4})$$

Para cada rede criada obtemos L e L^2 ligações para as redes em 1D e 2D, respectivamente. Assim, o número mínimo de realizações para um determinado valor de α será para 1D e 2D, respectivamente:

$$\bar{N}^{1D} = L^{-1} N(r_{max}) r_{max} \sum_{r_{min}}^{r_{max}} r_i^{-\alpha} \quad \bar{N}^{2D} = L^{-2} N(r_{max}) r_{max} \sum_{r_{min}}^{r_{max}} r_i^{-\alpha} \quad (\text{A.5})$$