

IV Simpósio Internacional de Avaliação de Pavimentos e Projetos de Reforço

Fortaleza/CE - BRASIL - 07 a 09 de outubro 2009

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA GRÁFICO PARA ANÁLISE NUMÉRICA DE PAVIMENTOS ASFÁLTICOS

*Renato P. Coutinho¹; Rodrigo P. Botelho¹; Ricardo N. de A. Cavalcante¹; Áurea S. Holanda¹;
Evandro Parente Jr.²*

RESUMO

O presente trabalho trata do desenvolvimento de um pré-processador para geração de malhas axissimétricas de pavimentos asfálticos utilizadas para análise de tensões e deformações pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). O programa, chamado PMG (*Pavement Mesh Generator*), permite ao usuário criar o modelo geométrico de um pavimento a partir de um pequeno conjunto de dados fornecidos pelo usuário e visualizar este modelo graficamente na tela do computador. Os dados necessários incluem características das camadas do pavimento (e.g. espessura, material) e o carregamento aplicado. Uma vez concluído o modelo geométrico, o usuário pode gerar uma malha de elementos finitos quadriláteros ou uma malha mista, mesclando elementos finitos com elementos infinitos. Para a geração da malha, o software divide o pavimento em regiões com o objetivo principal de gerar malhas mais refinadas próximo à carga, região que apresenta uma maior concentração de tensões. À medida que se afasta do carregamento, o tamanho dos elementos aumenta de forma suave através de uma progressão aritmética. As malhas geradas pelo PMG podem ainda ser submetidas a análises de tensões e deformações através de uma chamada ao CAP3D, software desenvolvido pelo grupo de Modelagem Computacional do Laboratório de Mecânica dos Pavimentos (LMP) da UFC. Sendo um software específico para pavimentos, o PMG permite gerar malhas de maneira mais rápida e eficiente do que alguns pré-processadores mais genéricos. A inclusão de elementos infinitos na análise numérica de pavimentos asfálticos possibilita uma diminuição do esforço computacional e uma modelagem mais realista do subleito da região. Exemplos são apresentados comparando as respostas em tensões obtidas utilizando malhas geradas pelo PMG e por outros pré-processadores com objetivo de validar este programa. A seguir o programa é utilizado para estudar o efeito da discretização adotada e do uso de elementos infinitos sobre a resposta obtida.

PALAVRAS-CHAVE: Análise de pavimentos, Malhas axissimétricas, Gerador de malhas, Elementos infinitos.

¹Universidade Federal do Ceará - Departamento de Engenharia de Transportes
Campus do Pici, Bl. 703, 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brasil
rodpaschoal@hotmail.com, nblade@hotmail.com, renato@det.ufc.br, aurea@det.ufc.br

²Universidade Federal do Ceará – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil
Campus do Pici, Bl. 710, 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brasil
evandro@ufc.br

ABSTRACT

This paper presents the development of a pre-processor for the stress analysis of flexible pavements. The software, called PMG (*Pavement Mesh Generator*), generates axisymmetric meshes for the numerical analyses by the Finite Element Method (FEM). The software creates and draws the geometric model using a few data given by the user. These data include the characteristics of the pavement layers (e.g. thickness, material) and the applied load. Once the geometric model is finished, two types of mesh can be generated: a finite element mesh or a mixed mesh. The first one is created using only quadrilateral finite elements, while the other mixes quadrilateral finite elements with infinite elements. The software divides the pavement structure into regions in order to generate fine meshes near the load that is the region where there is a large stress concentration. The element size increases in a smooth manner as the region gets far away from the loaded region. The meshes generated using PMG are used in the FE analyses performed by the CAP3D system, which is a program developed by the Computer Modeling group of the Pavement Mechanics Laboratory (LMP/UFC). It is important to note that PMG generates meshes more quickly than other generic pre-processors as it is specific for pavement and requires a few input data. The use of infinite elements in the pavement analyses allows a decrease in the computational effort and a more realistic representation of the subgrade. Finally, in order to validate the system, numerical examples are presented comparing the stresses obtained using PMG and other pre-processors. The system is also used to study the effect of the discretization and the influence of the infinite elements on the FE response.

KEY WORDS: Pavement analysis, Axisymmetric meshes, Mesh generators, Infinite elements

INTRODUÇÃO

Desde o início histórico da construção dos primeiros pavimentos flexíveis até o início do século XX, a experiência dominou a construção e o projeto das rodovias pavimentadas. Ao longo dos anos, vários métodos foram propostos para determinar alguns dados importantes, como a espessura ideal para uma camada de revestimento asfáltico.

Os primeiros métodos a serem utilizados foram empíricos. O uso destes métodos surgiu com o desenvolvimento do sistema de classificação do solo das rodovias públicas, pelo qual o subleito era classificado como uniforme de A-1 a A-8 e não uniforme de B-1 a B-3. Esse sistema foi posteriormente modificado pelo *Highway Research Board*, segundo o qual os solos eram agrupados de A-1 a A-7.

A partir daí surgiu o primeiro método empírico com um ensaio de resistência, que se denominava *California Bearing Ratio* (CBR). Os métodos empíricos tiveram grande aceitação e ainda são muito utilizados, mas apresentam problemas devido à consideração de materiais, carregamento e condições ambientais fixas.

Desde a década de 1940 até os dias de hoje, outros métodos foram desenvolvidos, sendo que atualmente a tendência é utilizar métodos mecanísticos-empíricos no projeto de pavimentos asfálticos (NCHRP, 2004). Nestes métodos, as respostas mecânicas do pavimento são utilizadas, juntamente com resultados de laboratório, para prever o dano que os carregamentos externos causarão no pavimento.

As principais respostas dos pavimentos de interesse em métodos mecanístico-empíricos e os mecanismos de dano associados são:

- Tensões/deformações de tração na face inferior do revestimento (para fissuração por fadiga).
- Tensões/deformações verticais de compressão nas diversas camadas (para deformação permanente).
- Deslocamento vertical da superfície (para deformação permanente).

Várias técnicas para determinar as tensões e deformações em sistemas de pavimentos asfálticos estão disponíveis. Dentre estas alternativas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem se destacado devido a sua simplicidade e generalidade.

Desta forma, a utilização do MEF juntamente com métodos mecanístico-empíricos é a tendência atual tanto para o projeto de pavimentos novos como para reabilitação de pavimentos existentes (NCHRP/TRB, 2004). Seguindo esta tendência, o Laboratório de Mecânica dos Pavimentos (LMP) da Universidade Federal do Ceará (UFC) iniciou em 2005 o desenvolvimento do programa CAP3D para análise bidimensional e tridimensional de pavimentos asfálticos através do MEF (Holanda *et al.*, 2006; Codes, 2007; Parente *et al.*, 2006; Oliveira, 2007; Coutinho, 2008).

A determinação das tensões e deformações em um pavimento submetido à carga de várias rodas é um problema tridimensional. Contudo, caso se considere o material linear elástico, as respostas mecânicas devido às várias rodas podem ser calculadas através da superposição das respostas de cada roda. Adicionalmente, considerando que a carga de cada roda é dada por uma pressão uniforme (correspondente à pressão dos pneus) aplicada em uma área circular, as equações da Teoria da Elasticidade mostram que a resposta é simétrica em relação ao eixo vertical que passa pelo centro da carga (Huang, 2003). Portanto, a análise de tensões e deformações em pavimentos asfálticos pode ser tratada como um problema axissimétrico.

Escrevendo as tensões e deformações em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e considerando a axissimetria, obtém-se um problema bidimensional nas coordenadas r e z . Adicionalmente, os modelos bidimensionais supõem que o pavimento tem geometria e materiais constantes nos planos horizontais, sendo ilimitado na direção horizontal e vertical, como mostrado na Figura 1. O carregamento do modelo é composto por uma pressão uniforme aplicada em uma área de forma circular cuja resultante corresponde à carga de uma roda.

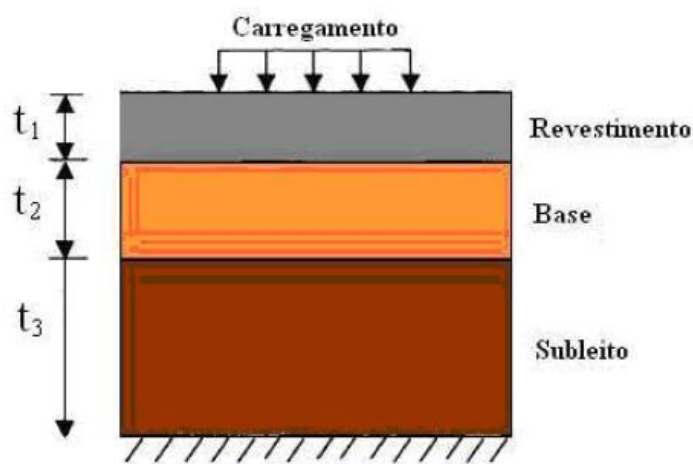


Figura 1. Esquema simplificado de um pavimento flexível com 3 camadas.

ANÁLISE NÚMERICA DE PAVIMENTOS ASFÁLTICOS PELO MEF

O Método dos Elementos Finitos (Bathe, 1996; Cook et al, 2002) baseia-se na transformação das equações diferenciais que regem um problema específico em equações algébricas de mais fácil resolução. Neste processo, o domínio do problema é dividido em uma série de regiões (conhecidas como elementos finitos) de topologia simples como triângulos, quadriláteros, tetraedros e hexaedros e cuja geometria é definida pelas coordenadas de um conjunto de pontos (conhecidos como nós). O conjunto destes elementos é chamado de malha de elementos finitos.

Um exemplo de malha de elementos finitos quadriláteros quadráticos (8 nós) para um modelo axissimétrico de um pavimento com três camadas (revestimento, base e subleito) é mostrado na Figura

2. Nota-se, que neste caso, o modelo não é ilimitado e que devido à simetria axial, apenas a metade do modelo representado na Figura 1 precisa ser discretizado em elementos finitos.

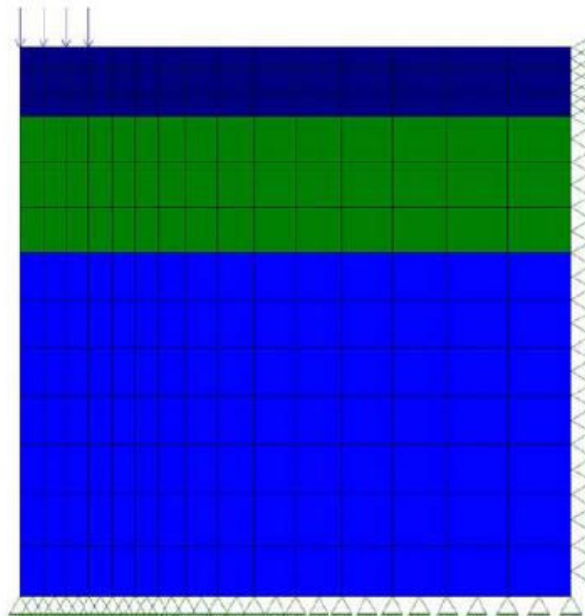


Figura 2. Modelo de elementos finitos para um pavimento de três camadas.

A análise de tensões em sólidos ou estruturas, incluindo pavimentos, utilizando o MEF consiste, basicamente, em três etapas, como mostrado na Figura 3. No pré-processamento, o domínio do problema é discretizado em sub-regiões, resultando na malha de elementos finitos. É nesta fase que os dados relacionados à geometria, às condições de contorno (apoios) e ao carregamento atuante na estrutura são fornecidos pelo usuário. O PMG é responsável por esta etapa, fazendo a modelagem geométrica, aplicação dos atributos físicos (materiais, carregamentos e condições de contorno) e geração da malha de estruturas de pavimentos flexíveis.

A segunda etapa diz respeito à análise numérica propriamente dita que utiliza os dados fornecidos na etapa anterior para calcular os deslocamentos, as tensões e as deformações na estrutura. Neste trabalho é utilizado o programa CAP3D (Holanda *et al.*, 2006) para realizar a etapa de análise numérica.

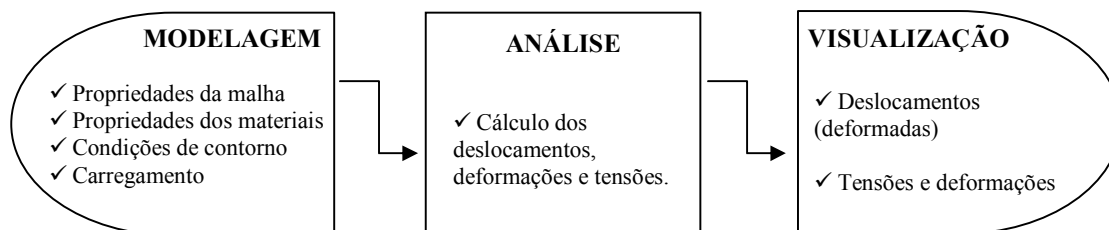


Figura 3. Etapas de uma análise pelo Método dos Elementos Finitos.

Finalmente, os programas responsáveis pela visualização dos resultados (pós-processadores) são utilizados de maneira a facilitar a interpretação dos resultados obtidos. Estes programas geralmente apresentam uma série de funcionalidades, tais como a apresentação da estrutura deformada e indeformada, bem como a distribuição de tensões e deslocamentos ao longo de toda a estrutura. Para este objetivo são utilizados códigos de cores, isolinhas, isofoixas, etc.

ELEMENTOS INFINITOS

Elementos infinitos são elementos finitos especiais, cujas características permitem diminuir a quantidade de elementos finitos necessária em uma análise. O objetivo de introduzir esses elementos é modelar o pavimento de maneira mais realista, uma vez que a idéia destes elementos é simular a condição em que as respostas mecânicas tendem a zero no infinito. Desta forma, além de produzirmos resultados mais próximos da realidade, realizamos uma diminuição no tamanho da malha, reduzindo a quantidade de elementos e, conseqüentemente o esforço computacional.

O primeiro elemento infinito foi usado por Ungless e Anderson em 1973, tendo sido por eles denominado de elemento finito infinito. Este trabalho já havia aparecido em uma dissertação de mestrado, mas não foi publicado até 1977. Logo, o primeiro trabalho publicado sobre elementos infinitos foi um artigo em 1975 cujos autores eram Bettess e Zienkiewicz (Bettess, 1992).

Há vários tipos de elementos infinitos encontrados na literatura que podem ser utilizados em uma análise bidimensional. Dentre estes, há os que simulam o infinito em uma direção e os que simulam o infinito em duas direções (Marques e Owen, 1984). Os elementos com inicial “S” receberam essa nomenclatura por serem do tipo Serendipity, assim como aqueles com inicial “L” são do tipo Lagrangiano. A Figura 4 ilustra o elemento infinito L6 utilizado no PMG para gerar malhas mistas com elementos finitos e infinitos.

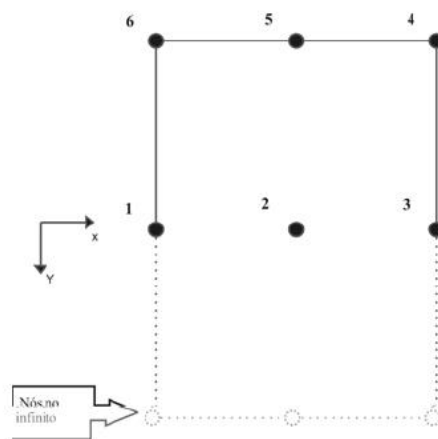


Figura 4. Elemento Infinito L6 que simula o infinito em apenas uma direção (Oliveira, 2007).

GERADOR DE MALHAS

Como já foi dito anteriormente, o PMG é um gerador de malhas bidimensionais que utiliza elementos finitos e infinitos. Uma das principais vantagens deste software é a sua utilização específica para pavimentos asfálticos, o que torna a quantidade de dados de entrada pequena devido à geometria simples e constante dos pavimentos. Conseqüentemente tem-se uma modelagem mais rápida e eficiente do que a obtida a partir de geradores de malha de uso geral como o Mtool (Tecgraf, 1992) e o ABAQUS/CAE (HKS, 2004), por exemplo.

Estes programas apresentam uma boa interface gráfica, porém a geração da malha é mais demorada. Neles, é necessário desenhar cada linha que define o contorno da malha e a separação das camadas, além de criar uma linha auxiliar para que a área da aplicação da carga possa ser definida. As linhas do contorno da malha devem ainda ser selecionadas para que as condições de apoio sejam

definidas. Apenas depois de todo esse processo, o usuário entra com as propriedades das camadas. Por outro lado, para se gerar uma malha pelo PMG, basta seguir os passos descritos na Figura 5.



Figura 5. Fluxograma do PMG.

Modelo geométrico é o arquivo texto com extensão .pav gerado pelo programa contendo todos os dados de entrada requeridos para a geração da malha: pressão do pneu, raio de aplicação do carregamento, número de elementos sob o carregamento, comprimento horizontal do modelo, número de elementos na horizontal e as propriedades das camadas: espessura, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e número de elementos na vertical. Assim, no caso de modelos elásticos, são necessários para o PMG apenas $5 + 4n$ dados de entrada, onde n é o número de camadas do pavimento em análise.

O usuário pode aplicar uma malha de elementos finitos quadrilaterais (Q4, Q8 ou Q9) ou mista, mesclando estes elementos finitos com elementos infinitos lagrangeanos (L6). Na versão atual do programa, os elementos infinitos estão sendo utilizados apenas na modelagem do subleito, simulando a condição de infinito na direção vertical.

Arquivo neutro é o arquivo texto com extensão .dat gerado pelo PMG que será submetido a análise pelo CAP3D. Neste arquivo estão contidas todas as informações da malha e do carregamento, como as coordenadas dos nós, as propriedades das camadas e os elementos finitos ou infinitos. O CAP3D pode ser chamado diretamente pelo programa PMG, já fazendo a análise do arquivo neutro corrente.

O PMG possui um painel de visualização 2D no qual será impresso automaticamente o modelo geométrico ou o arquivo neutro, permitindo ao usuário acompanhar o progresso de sua simulação. O programa permite ainda salvar ou abrir modelos geométricos ou arquivos neutros para edição em tempo de execução, possibilitando fazer simulações de forma prática e eficiente.

Interface

Neste item, será apresentada a interface do programa PMG, enfatizando suas principais funcionalidades. A Figura 6 indica o menu “File”, através do qual o usuário pode criar, abrir, fechar ou salvar modelos geométricos ou arquivos neutros.

A Figura 7 apresenta a caixa de diálogo para criar novos modelos geométricos, da qual são capturados os $5 + 4n$ dados de entrada para a geração da malha. Na aba “Layers”, as camadas adicionadas pelo botão “New layer” ficarão na “List of current layers” e podem ser editadas alterando as caixas de texto posicionadas do lado esquerdo da lista.

A Figura 8 ilustra um exemplo de modelo geométrico aberto. No painel central, visualiza-se o modelo com as divisões e texturas nas camadas. No display lateral, alguns dados de entrada são mostrados nas caixas de texto brancas e o arquivo aberto é mostrado na caixa de texto amarela, abaixo do logotipo. No menu “Edit”, se o usuário clicar em “Properties” uma caixa de diálogo parecida com a da Figura 7 é aberta, sendo possível alterar em tempo de execução os dados de entrada. Após a confirmação da alteração, a tela inteira será atualizada pelo PMG. Caso o usuário deseje voltar às condições iniciais, cancelando as alterações feitas, ele deve clicar em “Undo”. Para aplicar uma malha ao modelo geométrico, deve-se clicar em “Mesh”, abrindo assim a caixa de diálogo “Generate Mesh”, mostrada na Figura 9.

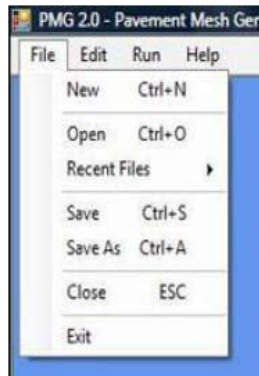


Figura 6. Menu "File"

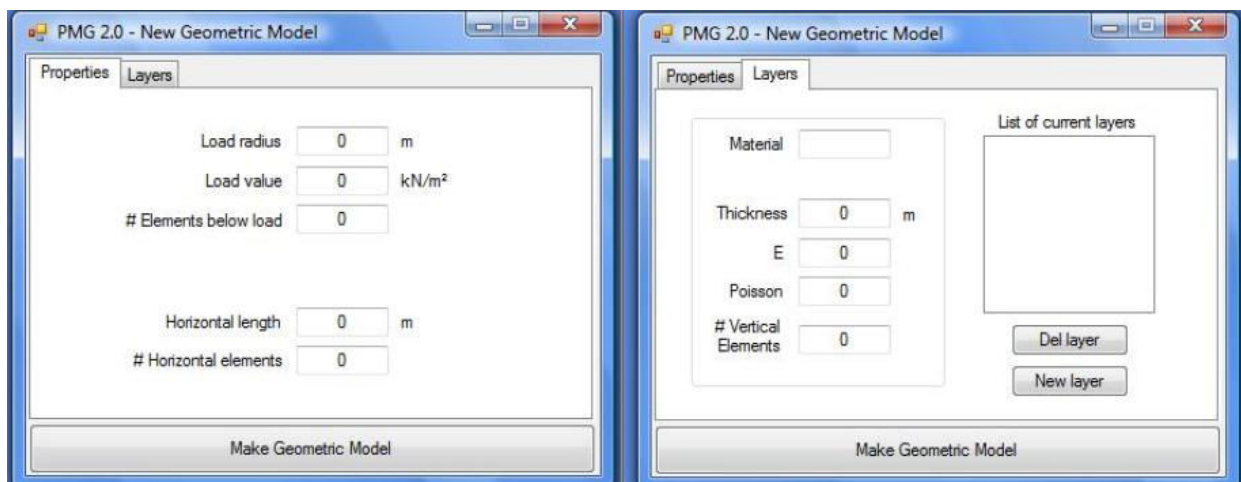


Figura 7. Caixa de diálogo para criar novo modelo geométrico

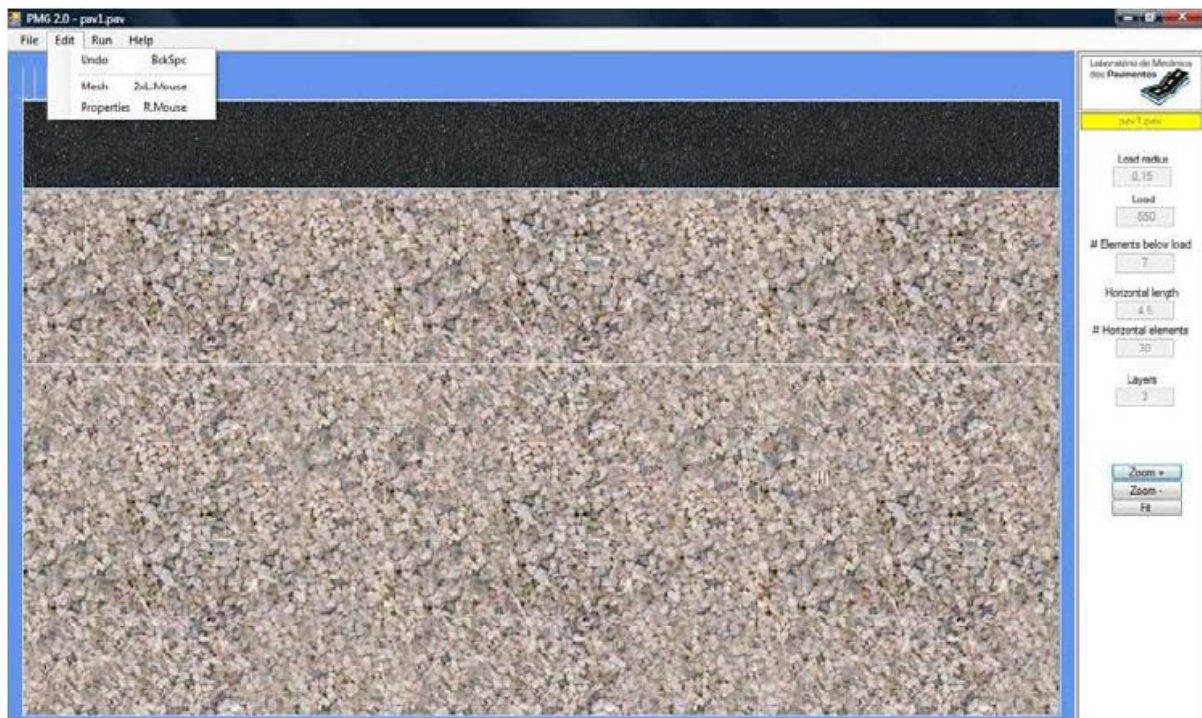


Figura 8. Exemplo de modelo geométrico

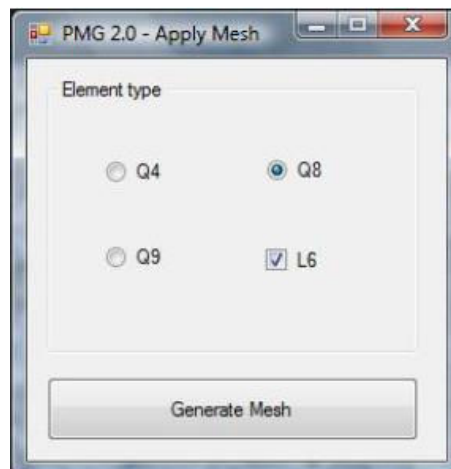


Figura 9. Caixa de diálogo “Generate Mesh”

A malha poderá ser toda de elementos finitos quadrilaterais baseados na formulação isoparamétrica (Cook *et al.*, 2002): Q4, Q8 e Q9. Estes elementos utilizam diferentes funções de interpolação (funções de forma) para o campo de deslocamentos, acarretando em diferentes números de nós para cada elemento, como mostrado na Figura 10.

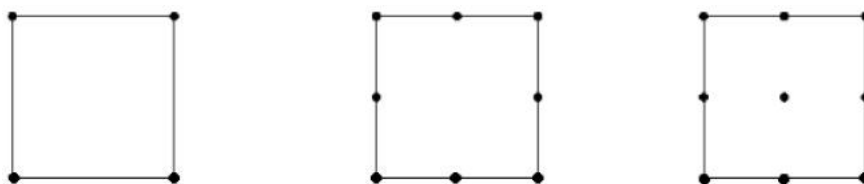


Figura 10. Elementos Q4, Q8 e Q9, respectivamente.

O elemento Q4 utiliza uma interpolação linear, possuindo 4 nós nas extremidades. Por outro lado, os elementos Q8 e Q9 possuem funções de interpolação quadráticas, necessitando de nós nos meios dos lados. O elemento Q9 é conhecido como Lagrangiano porque as funções de interpolação são polinômios de Lagrange o que requer a utilização de um nó no interior do elemento, enquanto que o elemento Q8 pertence à família Serendipity, possuindo apenas nós no contorno (Cook *et al.*, 2002). Normalmente, elementos quadráticos produzem melhores resultados que os elementos lineares, quando o mesmo número de nós é utilizado.

Esta versão do PMG permite o uso do elemento quadrilateral Q8, juntamente com o elemento infinito L6 apresentado anteriormente. Neste caso a camada de revestimento asfáltico, assim como as camadas granulares, é modelada apenas com elementos finitos (Q8), enquanto o subleito é composto de elementos finitos (Q8) e infinitos (L6).

Dessa forma, na caixa de diálogo “*Generate Mesh*”, Figura 9, o usuário deve selecionar a opção desejada (Q4, Q8 ou Q9) para uma malha contendo apenas elementos finitos ou escolher uma malha mista, marcando a opção L6 em conjunto com a opção Q8. Como já foi dito anteriormente, o PMG irá gerar elementos infinitos sempre na última camada do pavimento, enquanto as demais serão de elementos finitos.

Após clicar em “*Generate Mesh*”, todos os dados serão submetidos ao algoritmo do PMG de geração de malhas e uma caixa de texto irá confirmar sucesso ou emitir uma mensagem de erro. Caso todos os dados estejam coerentes, o usuário terá uma tela como a da Figura 11, e o arquivo neutro gerado e carregado estará na mesma pasta do modelo geométrico corrente.

Mesmo no arquivo neutro, o PMG permite ao usuário editar os dados de entrada e o tipo de malha através do menu “*Edit*”. Pode-se ainda observar na Figura 11, que no menu “*Run*”, o PMG pode fazer chamada a três programas da equipe de modelagem do LMP: NFRorder, para reordenar os nós e permitir uma análise mais rápida (Menezes, 1995), CAP3D, para fazer análise da malha gerada e criar um arquivo .pos e o Nlpos, um pós-processador que pode visualizar tanto o arquivo .dat quanto o .pos. Clicando em “*Preferences*” o usuário comunica ao PMG onde esses três programas estão instalados no disco rígido.

No PMG, todas as principais operações possuem teclas de atalho indicadas no programa e as caixas de diálogo estão todas organizadas com tabulação, facilitando a utilização via teclado. No menu “*Help*”, um guia completo com tópicos de ajuda está à disposição do usuário.

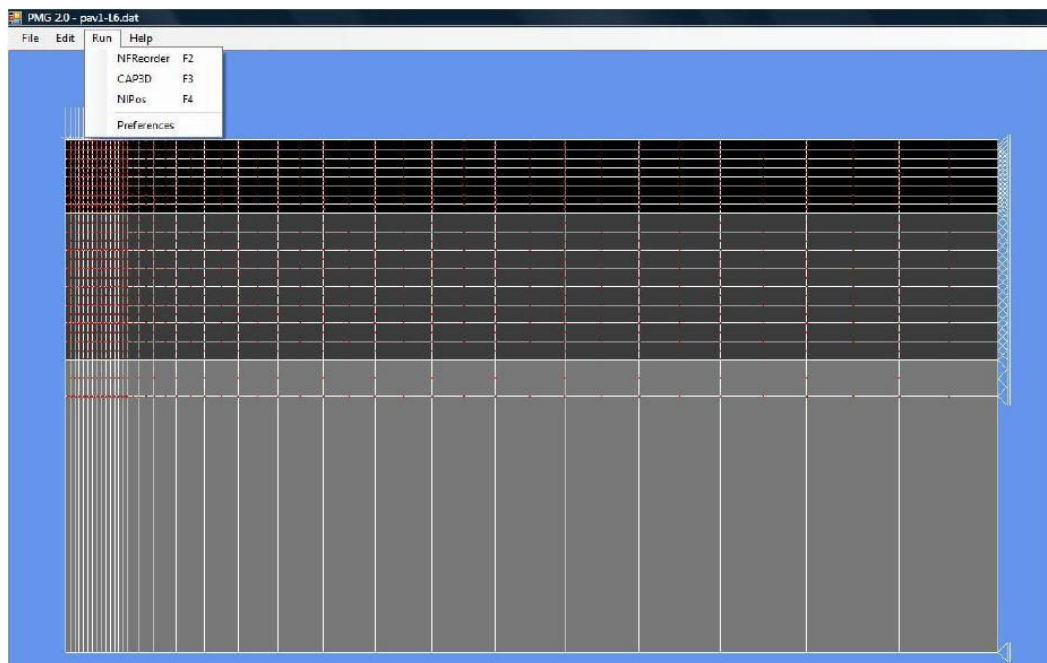


Figura 11. Desenho da Malha Gerada

EXEMPLO

Este exemplo tem como objetivo a validação da implementação da geração de malha e da praticidade do novo sistema gráfico interativo do PMG. Para isto, foi gerada uma estrutura de pavimento com uma camada de revestimento de 152 mm de espessura, com módulo de elasticidade $E = 3,5$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,4$ e com 6 elementos na vertical. Este revestimento encontra-se apoiado em uma base de 305 mm de espessura composta por um material com $E = 158$ MPa e $\nu = 0,38$. Esta camada também contém 6 elementos na vertical. Na última camada, ou subleito, o material apresenta $E = 55$ MPa e $\nu = 0,45$. A espessura desta camada foi considerada de 6 m com 30 elementos na vertical. A carga aplicada é igual a 552 kPa, o raio de aplicabilidade desta carga é de 152 mm e o comprimento horizontal do modelo é 3 m.

A partir destes dados foram geradas três malhas, sendo a primeira de elementos finitos gerada no PMG (Malha 1), a segunda de elementos finitos gerada pelo programa Mtool (Malha 2) e a terceira sendo mista, ou seja, contendo elementos finitos e infinitos, no PMG (Malha 3). Todas estas malhas consideraram 6 elementos sob a carga que é aplicada na direção horizontal. É importante salientar que

as malhas geradas consideraram elementos quadrilaterais quadráticos Q8 e elemento infinito L6 (Malha 3). O sistema CAP3D foi utilizado para a realização das análises.

A Figura 14 ilustra as malhas de elementos finitos geradas pelo PMG e Mtool. Deve-se notar que parte do subleito foi removida para melhorar a visualização das camadas superiores. Nesta figura podem ser visualizadas as diferentes camadas do pavimento, onde cada cor representa uma camada específica.

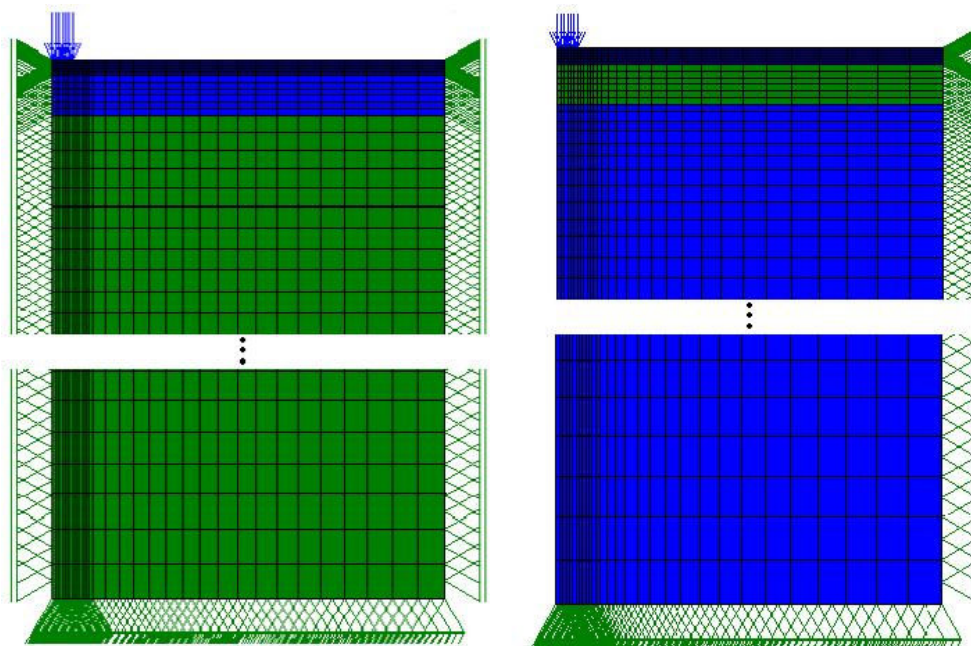


Figura 14. Malhas de elemento finito

As Tabelas 1 e 2 representam, respectivamente, as tensões horizontais e verticais obtidas nas análises. Pode ser observado nas tabelas que os resultados obtidos pela Malha 1 foram, praticamente, coincidentes com os obtidos pela Malha 2. Isto valida o modelo que está sendo utilizado na geração de malhas feita pelo PMG.

Comparando os resultados de tensões obtidos quando as Malhas 1 e 3 foram adotadas, pode-se notar que os resultados são bastante próximos. Isto mostra que o uso do elemento infinito não alterou o resultado da análise, porém ele possibilitou uma considerável diminuição na quantidade de elementos e, conseqüentemente, na quantidade de nós na malha (Tabela 3). Esta diminuição da quantidade de nós resulta em um menor tempo de análise.

Tabela 1. Comparação entre as Tensões Horizontais (kPa).

Profundidade	Malha 1 PMG/CAP3D	Malha 2 Mtool/CAP3D	Malha 3 - Mista PMG/CAP3D
0,00	-1.838,68	-1.842,06	-1.838,58
126,99	1.486,86	1.489,89	1.486,85
127,01	-15,14	-15,18	-15,15
431,9	33,42	33,51	33,41
432,01	-2,77	-2,69	-2,78

Tabela 2. Comparação da Tensão Vertical (kPa).

Profundidade	Malha 1	Malha 2	Malha 3 - Mista
	PMG/CAP3D	Mtool/CAP3D	PMG/CAP3D
0,00	-555,31	-555,25	-555,31
126,99	-119,74	-120,02	-119,75
127,01	-123,02	-123,22	-123,00
431,9	-32,72	-32,80	-32,72
432,01	-32,94	-32,82	-32,96

Tabela 3. Comparação da quantidade de elementos e nós.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3 - Mista
	PMG/CAP3D	Mtool/CAP3D	PMG/CAP3D
Elementos	1260	1260	840
Nós	3925	3925	2606

Outro fator importante a ser citado é o tempo de geração do modelo. Por ser um gerador específico para pavimentos, o tempo de geração do PMG é bem inferior ao do Mtool. Isso foi comprovado por vários usuários familiarizados com ambos os sistemas. Houve um ganho de tempo significativo na geração dos modelos e, o mais importante, sem perda de qualidade dos resultados.

CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar o sistema PMG que é um gerador de malhas bidimensionais para análises numéricas pelo Método dos Elementos Finitos. Por ser um gerador específico para pavimentos, utiliza uma pequena quantidade de dados de entrada, o que possibilita uma geração rápida e eficiente. Este trabalho apresentou ainda a utilização de elementos infinitos para a modelagem mais realista do subleito da região.

O exemplo numérico apresentado validou o sistema ao compará-lo com um gerador de malhas genérico. Este exemplo ainda mostrou que o uso de elementos infinitos diminuiu bastante o número de nós da malha, reduzindo o número de equações do sistema e, conseqüentemente, o custo computacional. É importante ressaltar que esta redução não influenciou na qualidade dos resultados obtidos.

BIBLIOGRAFIA

Bathe, K. J. (1996), Finite Element Procedures, Prentice Hall.

Bettess, P. (1992) Infinite Elements. Ed. Penshaw Press, Inglaterra.

Codes, B. N. (2007). Validação do Programa CAP3D baseado no Método dos Elementos Finitos, através de Comparação com alguns Programas de Análise de Pavimentos Asfálticos. Monografia (graduação), Universidade Federal do Ceará (UFC), Ceará – Brasil.

Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. (2002), Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4. ed, John Wiley & Sons.

- Coutinho, R. P., Cavalcante, R. N. A., Holanda, A. S., Parente Jr, E. (2008). Desenvolvimento de um Gerador de Malhas para Análise de Pavimentos pelo Método dos Elementos Finitos. XXII Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes, ANPET, Ceará - Brasil.
- Holanda, A. S.; Parente Jr., E.; Araújo, T. D. P.; Melo, L. T. B.; Evangelista Jr., F. e Soares, J. B. (2006) Finite Element Modeling of Flexible Pavements. XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Pará - Brasil.
- Huang, Yang H., 2003. Pavement Analysis and Design, 2nd Edition, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Menezes, I. F. M., 1995. Técnicas de Reordenação para Solução de Sistemas Esparsos. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Brasil.
- NCHRP/TRB, 2004. Guide for Mechanistic-Empirical Design of New and Rehabilitated Pavement Structures, Appendix RR: Finite Element Procedures for Flexible Pavement Analysis.
- Tecgraf, 1992. Mtool - Bidimensional Mesh Tool - Manual do Usuário, PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- HKS, 2004. ABAQUS/CAE - Theory Manual, Version 6.5, Hibbit, Karlsson and Sirensen Inc., Providence, RI.
- Oliveira, M. V. R., 2007. Uso de Elementos Finitos e Infinitos na Análise de Pavimentos Asfálticos através do Programa CAP3D. Monografia (graduação), Universidade Federal do Ceará (UFC), Ceará – Brasil.
- Marques, J. M. M. C. e Owen, D. R. J., 1984. Infinite Elements in Quasi-static Materially Nonlinear Problems. Computers and Structures, v. 18, n. 4, p. 739 – 751, Inglaterra.