

## ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE PAVIMENTOS ASFÁLTICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

**Enson de Lima Portela**

Universidade Federal do Ceará

Laboratório de Mecânica dos Pavimentos - Departamento de Engenharia de Transportes

**Evandro Parente Junior**

Universidade Federal do Ceará

Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil

**Rodrigo Paschoal Botelho**

**Áurea Silva de Holanda**

Universidade Federal do Ceará

Laboratório de Mecânica dos Pavimentos - Departamento de Engenharia de Transportes

### RESUMO

Este artigo discute a importância da consideração do comportamento viscoelástico das misturas asfálticas na análise de tensões de pavimentos flexíveis e apresenta um algoritmo incremental, baseado no Método dos Elementos Finitos, para análise de sólidos viscoelásticos. Este algoritmo parte da representação das tensões como uma integral de convolução onde o módulo de relaxação é escrito como uma série de Prony. A integração semi-analítica das tensões leva a uma expressão recursiva, na qual as variáveis em um instante de tempo são funções dos seus valores no instante anterior. Este algoritmo é validado através de um exemplo cuja solução analítica é conhecida e depois é utilizado para estudar a influência do comportamento viscoelástico no comportamento de um pavimento flexível.

### ABSTRACT

This paper discusses the consideration of the viscoelastic behavior of asphalt mixtures in the stress analysis of flexible pavements and presents an incremental algorithm, based on the Finite Element Method, for the analysis of viscoelastic solids. The algorithm uses the integral approach where the stress is written as a convolution integral and the relaxation modulus is represented by a Prony series. The semi-analytic solution of this convolution integral leads to an efficient incremental algorithm where the variables at the current time depend only on the values of the previous step. The algorithm is validated by using a well-known example whose analytical solution can be found by the elastic-viscoelastic correspondence principle and is applied to assess the influence of the viscoelastic behavior in the mechanical response of a flexible pavement.

### 1. INTRODUÇÃO

É muito comum na engenharia, principalmente nos procedimentos de dimensionamento de elementos estruturais, considerar-se que os materiais têm comportamento elástico linear. Esta consideração é justificada porque, para pequenas deformações, grande parte dos materiais segue a Lei de Hooke. Contudo, praticamente todos os materiais apresentam comportamento dependente do tempo e da taxa de carregamento. Para alguns materiais essa dependência no tempo manifesta-se numa escala de tempo muito longa, como o concreto e a madeira, enquanto que em outros a manifestação desse comportamento é mais rápida, como é o caso dos polímeros à temperatura ambiente.

Quando o material apresenta comportamento dependente do tempo e da taxa de carregamento em uma escala de tempo da mesma ordem das cargas aplicadas, a consideração destes efeitos é importante. Este é o caso dos pavimentos asfálticos uma vez que a resposta dependente do tempo apresentada pelos materiais betuminosos ocorre na mesma escala de tempo que as cargas dos veículos. Assim, o comportamento dependente do tempo destes materiais pode ser facilmente observado, especialmente em altas temperaturas, tendo como uma das principais

conseqüências as deformações permanentes observadas na camada de superfície de pavimentos.

A representação do efeito do tempo e da taxa de carregamento sobre o comportamento dos materiais requer a utilização de modelos constitutivos adequados, como os modelos viscoelásticos e viscoplásticos. Os modelos viscoplásticos ou viscoelastoplásticos são utilizados quando ocorre deformação permanente (Shames e Cozarelli, 1997; Simo e Hughes, 2002). Por outro lado, os modelos viscoelásticos (Christensen, 1982; Lakes, 1998; Shames e Cozarelli, 1997; Simo e Hughes, 2002) são utilizados quando não ocorre deformação permanente ou quando esta não é significativa. Este é o caso da maioria dos polímeros e materiais betuminosos quando as tensões atuantes são relativamente pequenas em relação às tensões de ruptura do material.

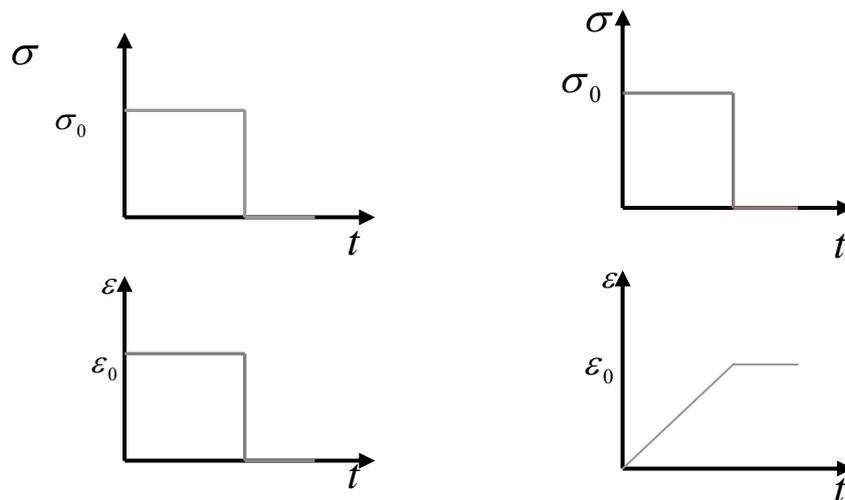
O modelo viscoelástico linear tem sido bastante utilizado na caracterização de misturas asfálticas (Huang, 2004) devido à boa correlação obtida entre a teoria e os ensaios de laboratório (Soares e Souza, 2002). A forma clássica de análise de sólidos viscoelásticos através do princípio da correspondência elástica-viscoelástica (Christensen, 1982; Lakes, 1998) envolve o uso da transformada de Laplace para eliminar a variável tempo, transformando o problema viscoelástico em um problema elástico com a solução final sendo obtida pela transformada inversa da solução elástica. Contudo, a utilização deste procedimento no cálculo dos deslocamentos, tensões e deformações de pavimentos flexíveis é difícil, devido à presença de diferentes materiais, condições de contorno e de carregamento.

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e a implementação de um procedimento para análise de sólidos viscoelásticos lineares através do Método dos Elementos Finitos com vistas a análise de pavimentos asfálticos e misturas betuminosas. Seguindo a proposta de Taylor et al. (1970), o procedimento aqui desenvolvido parte da representação das tensões como uma integral de convolução onde o módulo de relaxação é escrito como uma série de Prony. A solução semi-analítica desta integral de convolução leva a um procedimento incremental bastante eficiente. O procedimento é validado através de exemplos de solução conhecida e depois é utilizado para estudar a influência do comportamento viscoelástico na análise de pavimentos asfálticos.

## **2. MATERIAS VISCOELÁSTICOS**

Uma maneira simples de entender o comportamento de materiais viscoelásticos é através da combinação do comportamento de materiais elásticos e viscosos. Esta idéia faz sentido, uma vez que submetidos a carregamentos rápidos, os materiais viscoelásticos exibem comportamento semelhante aos sólidos elásticos e quando submetidos a carregamentos lentos apresentam deformações com o passar do tempo, assemelhando-se ao comportamento de fluidos.

Sólidos elásticos e fluidos viscosos diferem amplamente em seus respectivos comportamentos constitutivos, como se verifica a partir da Figura 1. Os materiais elásticos se deformam imediatamente com a aplicação do carregamento e retornam ao seu estado original quando este é removido. Por outro lado, a deformação dos fluidos viscosos aumenta gradativamente com o tempo de carregamento e não retornam à posição inicial quando este é removido.



(a) Elástico

(b) Viscoso

**Figura 1:** Comportamentos dos materiais.

Uma característica básica dos materiais viscoelásticos é o fenômeno da fluência (*creep*), que corresponde à deformação lenta e progressiva do material quando submetido a uma tensão constante. Assim, em materiais que apresentam *creep*, as deformações continuam a crescer mesmo quando não ocorre variação no carregamento (Lakes, 1998).

A relaxação (*relaxation*) é outra característica básica de materiais viscoelásticos. Este fenômeno se traduz em um decréscimo (relaxamento) gradual da tensão quando o material é mantido em deformação constante.

O ligante asfáltico é um material que apresenta comportamento mecânico conhecido dependente do tempo e sua presença na camada de revestimento asfáltico é fundamental no entendimento dos fenômenos que uma mesma sollicitação provoca em diferentes momentos da vida útil do pavimento (Soares e Souza, 2002). Com o intuito de caracterizar corretamente as misturas asfálticas, é necessária a obtenção de parâmetros compatíveis com os efeitos viscoelásticos, permitindo o estudo e a análise de tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\epsilon$ ) (Huang, 2004; Evangelista et al., 2006).

Os materiais viscoelásticos podem ser caracterizados sob um carregamento harmônico ou estático constante. No caso de carregamentos harmônicos os parâmetros utilizados para caracterização são o módulo complexo ( $G^*$ ) e o ângulo de fase ( $\delta$ ). No caso de carregamento estático constante ou deslocamento constante o comportamento viscoelástico é caracterizado através dos ensaios de fluência ou relaxação.

O ensaio de fluência consiste na aplicação instantânea de uma tensão  $\sigma_0$ , em um corpo-de-prova viscoelástico, e a manutenção desta tensão durante certo intervalo de tempo onde é medida a deformação. No ensaio de relaxação, uma deformação instantânea  $\epsilon_0$  é aplicada e mantida constante enquanto os valores das tensões são medidos ao longo do tempo. A partir destes ensaios determina-se a compliância  $D(t)$  ou módulo de relaxação  $E(t)$ :

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \text{ e } E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

em que  $\varepsilon(t)$  é a deformação ao longo do tempo,  $\sigma_0$  é a tensão constante aplicada no ensaio de *creep*,  $\sigma_0(t)$  é a tensão ao longo do tempo,  $\varepsilon_0$  é a deformação constante aplicada em ensaios de relaxação.

## 2.1 Integração das tensões

Visto que os materiais viscoelásticos apresentam comportamento não só dependente do tempo, mas também da taxa de carregamento, suas repostas não dependem somente do carregamento aplicado em um instante específico, mas sim de todo o histórico de carregamento (Christensen, 1982). O uso do princípio da superposição de Boltzmann permite escrever a relação tensão-deformação para um material viscoelástico linear na forma de uma integral de convolução (integral hereditária), que no caso unidimensional é dada por

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

sendo  $E$  o módulo de relaxação,  $t$  o tempo contado a partir de um referencial qualquer e  $\tau$  o tempo contado a partir do início da aplicação da carga.

Normalmente o módulo de relaxação é representado através de uma série de Prony. Em geral, essas séries são regredidas a partir de dados laboratoriais obtidos dos experimentos de *creep* ou relaxação seja para compliância ou relaxação respectivamente. Assim, no caso o módulo de relaxação pode ser representado por:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^p E_i e^{-t/\rho_i} \quad (3)$$

Onde  $E_\infty$ ,  $E_i$ ,  $\rho_i$  são os coeficientes e  $p$  o número de termos da série de Prony. É importante notar que o uso da série de Prony leva a uma implementação eficiente do cálculo da integral de convolução da Equação (2) através de um algoritmo incremental:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \Delta \sigma \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo entre dois passos. Utilizando as Equações (2) e (3) e assumindo um taxa de deformação constante ( $\dot{\varepsilon}$ ) em cada intervalo, o incremento de tensão pode ser escrito como:

$$\Delta \sigma = \bar{E} \Delta \varepsilon + \Delta \hat{\sigma} \quad (5)$$

Nesta expressão o primeiro termo representa o incremento de tensão devido ao incremento de deformação ocorrida entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  com o modulo de elasticidade tangente ( $\bar{E}$ ) dado por:

$$\bar{E} = E_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^p E_i \rho_i (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) \quad (6)$$

Enquanto o segundo termo da expressão representa o incremento de tensão devido ao tempo decorrido entre os dois passos. Este termo pode ser escrito como:

$$\Delta \hat{\sigma} = - \sum_{i=1}^p (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) S_i^n \quad (7)$$

Onde o parâmetro  $S_i^n$  pode ser calculado por uma expressão recursiva:

$$S_i^n = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} S_i^{n-1} + E_i \rho_i (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) \dot{\varepsilon}^{n-1} \quad (8)$$

Portanto, verifica-se que para um determinado instante a tensão depende apenas dos valores do instante anterior, garantindo uma grande eficiência computacional.

No caso de modelos elásticos lineares (lei de Hooke generalizada), o vetor das tensões ( $\sigma$ ) pode ser calculado a partir das deformações totais através da expressão

$$\sigma = C \varepsilon \quad (9)$$

onde:

$C$  : matriz constitutiva elástica  
 $\varepsilon$  : vetor das deformações

Vale lembrar que a matriz  $C$  depende não só das propriedades do material, como o Módulo de Elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), mas também do modelo de análise escolhido. No caso de materiais isotrópicos esta matriz pode ser escrita como

$$C = E A(\nu) \quad (10)$$

onde a forma da matriz  $A(\nu)$  depende do modelo de análise escolhido. Por exemplo, para análise de sólidos axissimétricos a matriz é dada por

$$A = \frac{1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Para outros modelos a matriz pode ser encontrada na literatura (Bathe, 1996).

Com o objetivo de realizar a generalização do modelo apresentado até aqui, escreve-se a Equação (2) como:

$$\sigma(t) = \int_0^t C(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (12)$$

É importante notar que no caso de materiais isotrópicos, a integral acima depende de dois parâmetros viscoelásticos ( $E$  e  $\nu$ ), ambos escritos como séries de Prony. Contudo, uma hipótese bastante utilizada é que o coeficiente de Poisson pode ser considerado constante (Schapery, 1975; Chen, 1995). Neste caso, tem-se que

$$C(t) = E(t) A(\nu) \quad (13)$$

onde o módulo de relaxação  $E(t)$  é dado pela Equação (3). Utilizando esta expressão a Equação (12) pode ser escrita como

$$\sigma(t) = A(\nu) \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (14)$$

Desta forma para problemas 2D ou 3D as expressões serão dadas por:

$$\Delta \sigma = \bar{C} \Delta \varepsilon + \Delta \hat{\sigma} \Rightarrow \bar{C} = \bar{E} A(\nu) \quad (15)$$

Sendo  $\bar{E}$  dado pela Equação (6) e o incremento de tensão devido ao tempo de carregamento dado por:

$$\Delta \hat{\sigma} = - \sum_{i=1}^p (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) S_i^n \quad (16)$$

e o vetor  $S_i^n$  será dado por:

$$\mathbf{S}_i^n = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \mathbf{S}_i^{n-1} + E_i \rho_i (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) \mathbf{A}(v) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n-1} \quad (17)$$

Pode-se observar que se continua com uma expressão recursiva, no entanto, para cada instante em que a tensão for calculada será necessário armazenar um vetor e não mais um número, como era o caso 1D, o que obviamente elevará o custo computacional do problema.

### 3. ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (Bathe, 1996; Cook *et al*, 2002; Zienkiewicz e Taylor, 2005) é um método numérico no qual o domínio do problema é dividido em regiões pequenas e de geometria simples que são os elementos finitos. No interior de cada elemento finito, o campo de deslocamentos é aproximado por funções simples, em geral polinômios de baixa ordem interpolados a partir dos deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ). Desta forma a compatibilidade fica garantida visto que os deslocamentos no interior dos elementos são definidos por funções contínuas e nas fronteiras de dois elementos são definidos de forma única. As deformações no interior dos elementos são calculadas a partir dos deslocamentos utilizando relações cinemáticas apropriadas a cada tipo de problema. Estas relações podem ser escritas na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (18)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação-deslocamento. Esta matriz é independente dos deslocamentos nodais para problemas geometricamente lineares (pequenas deformações e deslocamentos).

De posse das deformações, as tensões podem ser calculadas utilizando a relação constitutiva do material que, para o caso de materiais viscoelásticos, deve se considerar a dependência do tempo. Assim:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, t) \quad (19)$$

Fazendo uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e considerando pequenas deformações, como é usual em análise de pavimentos, o vetor de forças internas de um elemento finito ( $\mathbf{g}$ ) pode ser calculado a partir de:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^t \mathbf{g} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV \Rightarrow \mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (20)$$

onde  $\delta \mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos virtuais e  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}$  são as deformações virtuais no interior do elemento finito. O vetor das forças internas globais é calculado através da soma das contribuições dos elementos (Bathe, 1996). Vale ressaltar que esta expressão independe do comportamento do material (linear ou não-linear) uma vez que na sua dedução nenhuma hipótese foi adotada sobre a relação constitutiva do material.

A condição de equilíbrio é representada pela igualdade entre forças externas ( $\mathbf{f}$ ) e internas ( $\mathbf{g}$ ). Assim, no instante  $n+1$  tem-se

$$\mathbf{g}(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}) \Rightarrow \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV = \mathbf{f}_{n+1} \quad (21)$$

De acordo com as Equações (4) e (15) as tensões podem ser escritas como

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \bar{\mathbf{C}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad (22)$$

Por outro lado, para os deslocamentos e deformações tem-se que

$$\mathbf{u}_{n+1} = \Delta \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u} \quad (23)$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad (24)$$

uma vez que

$$\Delta \varepsilon = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (25)$$

Finalmente, substituindo esta expressão na Equação (21) chega-se a expressão que permite a determinação do incremento de deslocamentos:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_{n+1} - \hat{\mathbf{g}}_{n+1} \quad (26)$$

onde o vetor auxiliar é dado por:

$$\hat{\mathbf{g}}_{n+1} = \int_V \mathbf{B}' (\boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}) dV \quad (27)$$

e a matriz de rigidez é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}' \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} dV \quad (28)$$

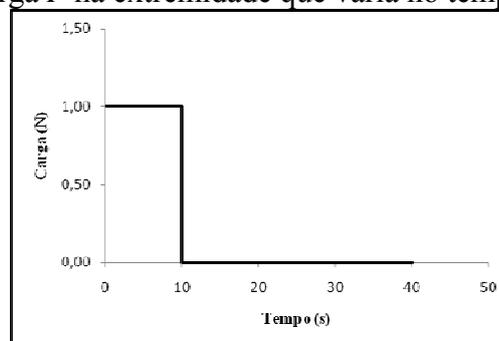
As Equações (23), (26), (27) e (28) são a base do algoritmo global de análise de sólidos viscoelásticos através do MEF. Como o modelo é viscoelástico linear, o algoritmo é puramente incremental não havendo a necessidade de iterações. Assim como na integração das tensões discutidas no item anterior, as variáveis utilizadas pelo algoritmo de análise global também só dependem dos valores do passo anterior. Outra característica importante deste algoritmo é que devido às Equações (6) e (15), a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  permanece constante enquanto o incremento de tempo  $\Delta t$  for constante. Isto aumenta a eficiência do procedimento, uma vez que a fatoração desta matriz (Bathe, 1996), etapa mais cara da solução do sistema linear descrito pela Equação (26), só precisa ser realizada quando houver uma mudança do incremento  $\Delta t$ .

Na prática, a integração da matriz  $\mathbf{K}$  e do vetor  $\hat{\mathbf{g}}$  é realizada através da quadratura de Gauss. Portanto, o cálculo das tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  e da matriz  $\bar{\mathbf{C}}$  é realizado em cada ponto de integração da malha de elementos finitos. Uma vez que cada ponto de integração possui uma história de deformação diferente, estes precisam armazenar variáveis internas como as tensões  $\boldsymbol{\sigma}_n$  e os vetores  $\mathbf{S}_i^n$ , que são atualizadas após cada passo de integração.

## 4 EXEMPLOS

### 4.1 Viga engastada

Com objetivo de validar o procedimento apresentado neste trabalho será realizada a análise de uma viga engastada com comprimento ( $L$ ) igual a 20m e seção transversal ( $A$ ) de 1x1m. O material corresponde a um sólido linear padrão com  $E_\infty = 0,1$  MPa,  $E_1 = 0,4$  MPa e  $\rho_1 = 1$ . A viga é submetida a uma carga  $P$  na extremidade que varia no tempo de acordo com a Figura 2.



**Figura 2:** Variação da carga com o tempo.

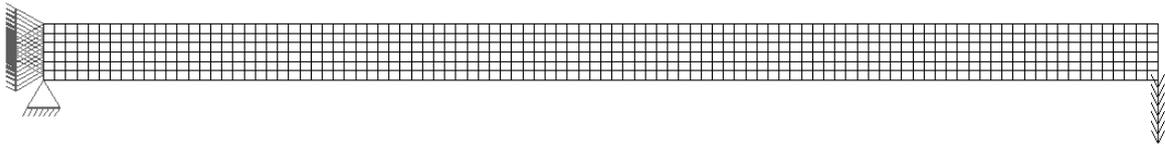
Definindo  $P_0$  como o valor máximo da carga aplicada e  $t_1$  como o tempo em que a carga é

retirada, verifica-se que esta carga pode ser escrita como

$$P(t) = P_0 H(t - t_1) \quad (29)$$

onde  $H$  é função degrau unitário. A partir da Figura 2 verifica-se que  $P_0 = 1$  N e  $t_1 = 1$  s.

A malha utilizada na análise possui 600 elementos quadrilaterais quadráticos de 8 nós (Q8) e integração de 2x2 pontos de Gauss. Considerou-se que a viga está em estado plano de tensões. A malha, carregamento e condições de contorno deste exemplo são mostrados na Figura 3.



**Figura 3:** Malha, carregamento e condições de contorno.

Utilizando o princípio da correspondência elástica-viscoelástica pode-se obter a solução analítica deste problema (Zocher, 1995). Nesta solução o deslocamento transversal máximo ( $v_L$ ) é igual a

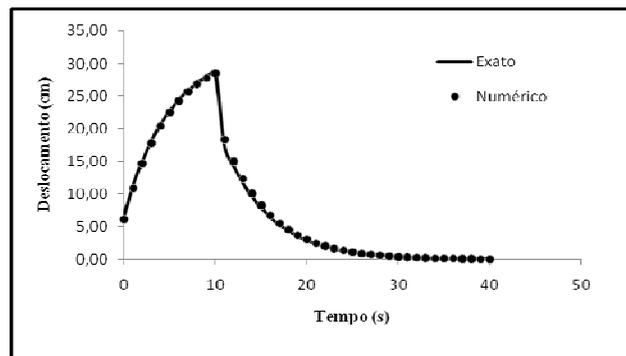
$$v_L = \frac{P_0 L^3}{3I} [D(t) - D(t - t_1) H(t - t_1)] \quad (30)$$

onde a compliância é dada por

$$D(t) = D_0 + D_1 (1 - e^{-\frac{t}{\lambda_1}}) \quad (31)$$

e

$$D_0 = \frac{1}{E_0} \quad E_0 = E_\infty + E_1 \quad D_1 = \left( \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_0} \right) \quad \lambda_1 = \frac{E_0 \rho_1}{E_\infty} \quad (32)$$



**Figura 4:** Comparação entre os resultados analíticos e numéricos.

Os resultados numéricos usando o método dos elementos finitos e um incremento de tempo  $\Delta t = 0,01$ s são mostrados na Figura 4 juntamente com a solução analítica do problema. Verifica-se uma concordância muito boa, onde o erro máximo obtido é de apenas 1,68%. Uma redução adicional no erro poderia ser obtida utilizando um  $\Delta t$  menor. No entanto, é importante notar que esta redução do incremento de tempo aumenta o esforço computacional.

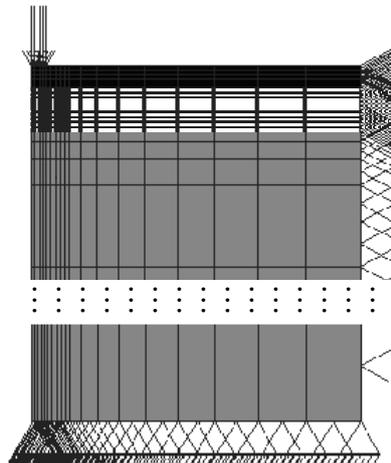
## 4.2 Pavimento com 3 camadas

Este exemplo tem por objetivo estudar o efeito da viscoelasticidade das misturas asfálticas no comportamento mecânico de pavimentos flexíveis. Para este fim foi escolhido um pavimento composto por três camadas: revestimento asfáltico, base e subleito. A camada de revestimento asfáltico tem 20 cm de espessura,  $\nu = 0,35$  e módulo de relaxação apresentado na Tabela 1 (Lee, 1996). A base tem 40 cm de espessura e suas propriedades elásticas são  $E = 300$  MPa e  $\nu = 0,3$ , enquanto o subleito tem  $E = 100$  MPa e  $\nu = 0,4$ .

**Tabela 1:** Série de Prony.

Termo	E (kPa)	$\rho$ (s)
$\infty$	1,172E+03	-
1	3,10E+06	2.20E-05
2	4,31E+06	2.20E-04
3	3,46E+06	2.20E-03
4	2,02E+06	2.20E-02
5	1,27E+06	2.20E-01
6	2,72E+05	2.20E+00
7	6,59E+04	2.20E+01
8	1,45E+04	2.20E+02
9	1,52E+03	2.20E+03
10	7,10E+02	2.20E+04
11	5,88E+01	2.20E+05

A análise do pavimento foi realizada através de um modelo axissimétrico, sendo considerado como carregamento uma pressão de 550 kPa distribuída em uma área circular de raio ( $r$ ) igual a 15 cm. As dimensões do modelo de elementos finitos foram escolhidas de maneira a simular as condições de um meio semi-infinito. Assim, a face lateral está a uma distância de 3 m ( $20r$ ) do eixo de simetria e o final do subleito está a 7,5 m ( $50r$ ) abaixo da superfície. Foram utilizados um total de 494 elementos quadriláteros quadráticos (Q8) com integração de  $2 \times 2$  pontos de Gauss. A representação esquemática da malha, carregamento e condições de contorno é mostrada na Figura 5.



**Figura 5:** Malha de elementos finitos.

O modelo axissimétrico não permite a consideração de cargas móveis. Assim, normalmente as cargas dos veículos são aplicadas na forma de pulsos de carga cuja duração depende da velocidade do veículo e da profundidade do ponto considerado (Huang, 2004). Obviamente, velocidades maiores estão relacionadas a pulsos de menor duração. Assim, com vistas a investigar a influência da consideração da viscoelasticidade foram escolhidos 3 pulsos semi-

senoidais de carga com duração de 0,01 s, 0,1 s e 1,0 s. Os resultados obtidos serão comparados com os obtidos considerando apenas o comportamento elástico para os mesmos pulsos.

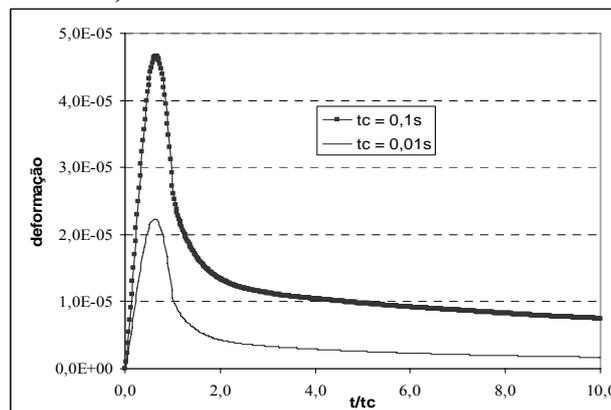
A análise elástica requer a utilização de um módulo de elasticidade ( $E$ ) equivalente para as misturas asfálticas. O módulo de elasticidade de misturas asfálticas pode ser aproximado pelo ensaio de Módulo Resiliente (MR). O MR é determinado a partir de ensaios de compressão diametral, que consiste na aplicação repetida de carregamento aproximadamente na forma de um pulso semi-senoidal com duração de 0,1 s seguido de 0,9 s de descanso (DNER, 1994). O MR também pode ser obtido através de ensaios de compressão simples (Huang, 2004). Em ambos os casos o MR é calculado como a relação entre a tensão máxima aplicada ( $\sigma_0$ ) e a deformação recuperável (elástica):

$$MR = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\text{final}}} \quad (33)$$

onde  $\varepsilon_{\max}$  : deformação máxima

$\varepsilon_{\text{final}}$  : deformação no final do período

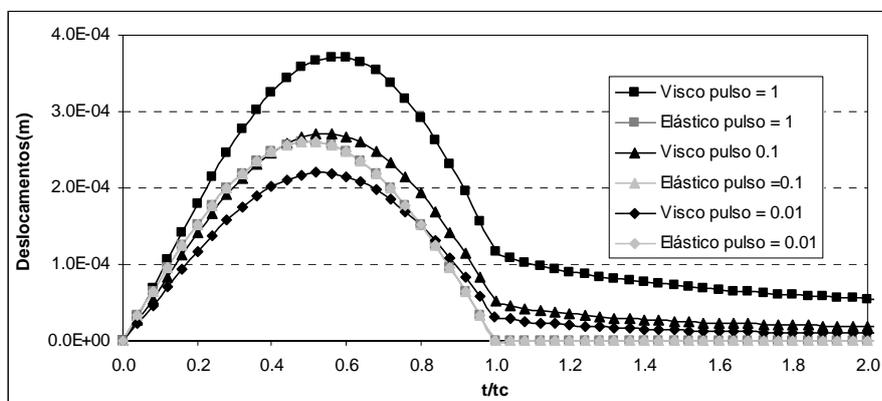
Como os resultados deste ensaio para a mistura utilizada não estavam disponíveis utilizou-se o algoritmo de análise apresentado neste artigo para simular o comportamento da mistura sob diferentes pulsos de carga em uma condição uniaxial. Os resultados obtidos são mostrados na figura abaixo, onde  $tc$  é a duração do pulso (ciclo) de carga. Estes resultados mostram claramente a influência da taxa de carregamento sobre o comportamento de materiais viscoelásticos. Assim, quanto mais curta a duração da carga, mais rígida é a resposta, pois não há tempo para a parcela viscosa do comportamento se manifestar. Este aspecto do comportamento viscoelástico faz com que o módulo de resiliência varie com a duração do pulso. Assim, a aplicação da Equação (33) resulta em  $MR = 2555,16$  MPa para  $tc = 0,1$  s e  $MR = 4838,80$  MPa para  $tc = 0,01$ s.



**Figura 6:** Simulação numérica do ensaio de MR.

Os deslocamentos verticais máximos no topo da camada de revestimento para os diferentes pulsos de carga são mostrados na Figura 7. Como era de se esperar, o modelo elástico, por não ter dependência do tempo, apresenta aproximadamente o mesmo deslocamento para qualquer que seja a duração do pulso. Pode-se observar que em termos de deslocamentos máximos, o modelo elástico apresenta valor bem próximo ao do viscoelástico para um pulso igual a 0.1s (mesmo no ensaio de MR), mostrando que, neste caso, o MR representa bem o Módulo de Elasticidade da mistura.

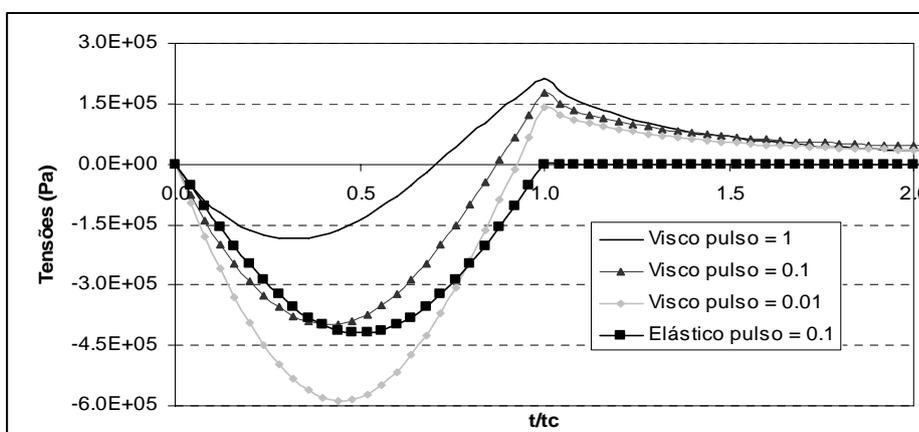
É importante notar que para pulsos mais curtos (velocidades mais altas), os deslocamentos verticais são menores, uma vez que a resposta do material é dominada pela parcela elástica. Por outro lado, verifica-se que no pulso de mais longa duração, os deslocamentos obtidos são bem superiores aos valores elásticos, mostrando a dominância da parcela viscosa do material.



**Figura 7:** Deslocamentos verticais.

A Figura 8 mostra as tensões horizontais obtidas no ponto de Gauss mais próximo da base da camada de revestimento e da linha do eixo de simetria. De maneira similar ao que ocorre nos deslocamentos, os valores de tensões da análise elástica são os mesmos para qualquer pulso e não são representados nesta figura. Em termos de tensões máximas, o gráfico do pulso 0,1s também é o que mais se aproxima do modelo elástico. Contudo, neste caso existe uma diferença mais significativa, com os valores do modelo viscoelástico sendo inferiores ao do modelo elástico.

Para os demais pulsos, observa-se que quanto maior a velocidade (pulsos menores), maiores são os valores das tensões. Pode-se ainda perceber que para o pulso de menor duração, há um aumento significativo na tensão máxima. Outro aspecto relevante apresentado nesta figura é que, para o caso de materiais viscoelásticos, ocorre uma inversão do sinal da tensão, alternando entre valores de tração e compressão. Isto pode acarretar um agravamento do problema de fadiga.



**Figura 8:** Tensões horizontais.

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um algoritmo incremental para análise de sólidos viscoelásticos através do Método dos Elementos Finitos. Este algoritmo é baseado na discretização no tempo da integral de convolução e na representação do módulo de relaxação como uma série de Prony. O algoritmo é bastante eficiente do ponto de vista computacional uma vez que as variáveis, como tensões e deslocamentos, só dependem de seus valores no instante de tempo anterior. Os resultados obtidos no exemplo de validação estão em excelente concordância com a solução analítica obtida através do princípio da correspondência elástica-viscoelástica.

A análise do pavimento mostrou a importância da consideração dos efeitos viscoelásticos na simulação do comportamento de pavimentos asfálticos. Verificou-se a dependência que a resposta das misturas betuminosas apresenta em relação ao tempo de carregamento. Como este tempo é correlacionado com a velocidade dos veículos, pode-se verificar que veículos mais rápidos causam deslocamentos (deflexões) menores e tensões maiores enquanto que veículos mais lentos têm efeito inverso. Esta pode ser uma explicação para as elevadas deflexões observadas em pavimentos urbanos, onde veículos, em especial os ônibus, trafegam em baixas velocidades.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, ANP, FINEP, FUNCAP e UFC pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bathe, K. J. (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Christensen, R. M. (1982) *Theory of Viscoelasticity*. Dover, New York, NY, USA, 2nd Edition.
- Cook, R. D., Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; de Witt (2002) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 3. ed.
- Evangelista Jr, F., Parente Jr, E. Holanda, A. S, Soares, J. B. (2006) *Análise quasi-estática e dinâmica de pavimentos asfálticos*. XX Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes (ANPET), Brasília, DF.
- Holanda, A. S, Parente Jr, E, Araújo, T. D. P; Melo, L. T. B, Evangelista Jr, F, & Soares, J. B.,(2006). *Finite Element Modeling of Flexible Pavements*. In XXVII Iberian Latin-American Congress on computational Methods in Engineering (CILAMCE), Belém, Pará.
- Huang, Y. H. (2004). *Pavement Analysis and Design*. 2.ed. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Lakes, R. S. (1998). *Viscoelastic Solids*. CRC Press.
- Lee, H. J. (1996). *Uniaxial Constitutive Modeling of Asphalt Concrete Using Viscoelasticity and Continuum Damage Modeling*. PhD thesis, Civil Engineering Department, North Carolina University, USA.
- Schaperly, R. A. (1975) *A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media I. Theoretical development*. International Journal of Fracture, v. 11, pp. 141-159.
- Shames, I. H; Cozzarelli, F. A. (1997) *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Taylor & Francis, Revised Printing.
- Shen, Y. P.; Hasebe, N.; Lee, L. X. (1995) *The finite element method of three-dimensional nonlinear viscoelastic large deformation problems*. Computers & Structures, v. 55, n. 4, pp. 659-666.
- Simo, J; Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.
- Soares, J. B. e Souza, F. (2002) *Verificação do Comportamento Viscoelástico Linear em Misturas Asfálticas*. Anais do 16º Encontro de Asfalto, IBP, Rio de Janeiro.
- Taylor, R. L.; Pister, K. S.; Goudreau, G. L. (1970) *Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 2 n. 1, pp. 45-59.
- Zienkiewicz, O. C, Taylor, R. L, E., (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier, 6. ed.

---

Enson de Lima Portela (ensondelima@gmail.com)  
Evandro Parente Júnior (evandro@ufc.br)  
Rodrigo Paschoal Botelho (rodpaschoal@hotmail.com)  
Áurea Holanda (aurea@det.ufc.br)  
Universidade Federal do Ceará  
Campus do Pici, Bloco 710, 60455-760, Fortaleza - CE – Brasil