UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

OTÁVIO PAULINO LAVOR

VARIEDADES DE EINSTEIN COMPACTAS COM CURVATURA ISOTRÓPICA POSITIVA

FORTALEZA

2013

OTÁVIO PAULINO LAVOR

VARIEDADES DE EINSTEIN COMPACTAS COM CURVATURA ISOTRÓPICA POSITIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho

Co-orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2013

OTÁVIO PAULINO LAVOR

VARIEDADES DE EINSTEIN COMPACTAS COM CURVATURA ISOTRÓPICA POSITIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 07/03/2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
(Co-orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino
Universidade Federal do Piauí

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sua bondade infinita.

A minha esposa Vanúzia, pelo carinho e compreensão.

A meus pais e irmãos, pelo amor e incentivo de todas as horas.

Ao Prof. Ricardo Renan Landim de Carvalho, pela orientação e valiosas discussões.

Ao Prof. Ernani Ribeiro Jr, pela idéia deste trabalho, paciência, incentivo, sugestões e esclarecimentos. A sua ajuda e acompanhamento foi crucial para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Cícero Pedro de Aquino, pela atenção e sugestões.

Ao Prof. Antônio Gomes, pelo empenho em suas funções.

Ao meu grande amigo Kleiton, Prof. da UECE, que sempre me ajudou e me aconselhou nesta vida acadêmica incentivando desde os primeiros passos.

A Cristiane e João Francisco, pela amizade e tantas discussões.

A Andrea e Rejane, secretárias da Pós-Graduação em Matemática e Física, respectivamente.

Aos meus amigos de curso, em especial, Alan, Dilton, Gadelha, Joel, Jorge, Samuel e Wendell, pela amizade e tantas horas de estudo juntos.

A tantos outros que de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos as variedades de Einstein com curvatura isotrópica positiva. Mais precisamente, mostraremos que toda variedade de Einstein compacta com curvatura isotrópica positiva tem curvatura seccional constante.

Palavras-chave: variedades-geometria. curvatura isotrópica. curvatura seccional. variedade de Einstein. variedade compacta.

ABSTRACT

The aim of this work is to study compact Einstein manifolds with positive isotropic curvature. More precisely, we shall prove that every compact Einstein manifold with positive isotropic curvature has constant sectional curvature.

Keywords: manifold-geometry. isotropic curvature. sectional curvature. Einstein manifolds. compact manifold.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo das variedades de Einstein têm grandes implicações em relatividade geral e em geometria conforme. Nos últimos anos, muita atenção tem sido dada a este assunto. As variedades de Einstein são as variedades Riemannianas em que o tensor de Ricci é proporcional ao tensor métrico.

Berber claassificou todas as variedades de Einstein satisfazendo adequadas condições de curvatura, veja [1] e [2]. Além disso, Tachibana [15] mostrou que se uma variedade de Einstein compacta tem operador de curvatura positivo, então a curvatura seccional é constante. Ele ainda mostrou que se o operador de curvatura é não negativo, então a variedade é localmente simétrica. Gursky e LeBrum [9] obtiveram interessantes resultados em variedades de Einstein de dimensão 4 com curvatura seccional constante. Outros resultados nesta mesma direção foram obtidos por Yang [16].

Uma condição de curvatura, a curvatura isotrópica, foi introduzida por Micallef e Moore em [10]. Baseado nos trablhos de Micallef e Moore, Brendle e Schoen [5] mostraram que a curvatura isotrópica é preservada pelo fluxo de Ricci em todas as dimensões. Resultados neste sentido também podem ser vistos em [12].

Vale ressaltar que Seshadri [14] obteve uma classificação parcial para variedades com curvatura isotrópica não negativa. Além disso, Micallef e Wang [11] mostraram que uma variedade de Einstein de dimensão 4, com curvatura isotrópica não negativa é localmente simétrica. Neste mesmo trabalho, eles mostraram que se uma variedade tem curvatura isotrópica não negativa, a curvatura escalar, também é não negativa. Essa condição de curvatura isotrópica é uma hipótese mais fraca que a hipótese do operador de curvatura utilizada por Tachibana.

Brendle [4] obteve um excelente resultado que generaliza o resultado de Micallef e Wang para dimensões arbitrárias. Mais precisamente, ele mostrou o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Seja (M, g) uma variedade de Einstein compacta de dimensão $n \geq 4$. Se*

(M, g) tem curvature isotrópica positiva, então (M, g) tem curvatura seccional constante. Além disso, se (M, g) tem curvatura isotrópica não negativa, então (M, g) é localmente simétrica.

Apresentaremos uma prova detalhada da primeira parte dos resultados de Brendle. Nesta demonstração, usaremos todos os resultados aqui enunciados.

2 PRELIMINARES

2.1 Definições de Curvatura

Definição 2.1. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2.1}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana e $\mathfrak{X}(M)$ é o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M.

Se considerarmos um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M^n$, a equação (2.1) pode ser escrita como

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} - \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

uma vez que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

A curvatura R de uma variedade Riemanniana M^n goza das seguintes propriedades:

- R é linear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y) &= fR(X_1, Y) + gR(X_2, Y), \\ R(X, fY_1 + gY_2) &= fR(X, Y_1) + gR(X, Y_2), \end{aligned}$$

  $f, g \in \mathcal{D}(M)$, onde $\mathcal{D}(M)$ é o conjunto das funções reais diferenciáveis.

- O operador curvatura é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W \\ R(X,Y)(fZ) &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

  $f \in \mathcal{D}(M)$.

- Primeira identidade de *Bianchi*, isto é,

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Relacionado com o operador de curvatura está a curvatura seccional. Antes de definir esta curvatura, definiremos o tensor de curvatura algébrico.

Definição 2.2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Um tensor de curvatura algébrico é uma forma multilinear $R : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$R(X,Y,Z,W) = \left\langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W \right\rangle \tag{2.2}$$

satisfazendo

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$$

e

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0,$$

para todos vetores $X, Y, Z, W \in V$.

Na próxima seção, faremos um estudo mais detalhado deste tensor.

Proposição 2.1. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM de uma variedade Riemanniana M^n e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então o número*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} \tag{2.3}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. É possível ver que podemos passar da base $\{x, y\}$ para uma base $\{x', y'\}$ por iteração das seguintes transformações;

- $\{x, y\} \to \{y, x\}$
- $\{x, y\} \to \{\lambda x, y\}$
- $\{x, y\} \to \{x + \lambda y, y\}$

Portanto, basta então mostrar que $K(x,y)$ é invariante por tais transformações. Observe que das propriedades do tensor de curvatura R, segue que

$$\begin{aligned} K(y,x) &= \frac{\langle R(y,x)y,x\rangle}{|y\wedge x|^2} = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2} = K(x,y), \\ K(\lambda x,y) &= \frac{\langle R(\lambda x,y)\lambda x,y\rangle}{|\lambda x\wedge y|^2} = \frac{\lambda^2\langle R(x,y)x,y\rangle}{\lambda^2|x\wedge y|^2} = K(x,y) \end{aligned}$$

e

$$K(x+\lambda y,y) = \frac{\langle R(x+\lambda y,y)(x+\lambda y,y\rangle}{|(x+\lambda y)\wedge y|^2} = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2} = K(x,y).$$

□

Definição 2.3. *Dado um ponto $p\in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma\subset T_pM$ o número real $K(x,y)=K(\sigma)$, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p ou a curvatura seccional de M em p segundo σ.*

Esta é uma generalização da curvatura Gaussiana das superfícies e é conhecida como curvatura Riemanniana. Agora enunciamos um importante resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Lema 2.1. *Sejam uma variedade Riemanniana e p um ponto de M^n. Defina uma aplicação trilinear $R':T_pM\times T_pM\times T_pM\to T_pM$ por*

$$\langle R'(X,Y)W,Z\rangle = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle, \tag{2.4}$$

para todo $X,Y,W,Z\in T_pM$. Então M^n tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e somente se $R=K_0R'$, onde R é a curvatura de M^n.

Uma consequência imediata do resultado anterior é dada pelo seguinte:

Corolário 2.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, p um ponto de M^n e $\{e_1,\cdots,e_n\}, n=$ $dimM$, uma base ortonormal de T_pM. Escreva $R_{ijkl}=\langle R(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle$, $i,j,k,l=1,\cdots,n$. Então $K(p,\sigma)=K_0$ para todo $\sigma\subset T_pM$, se, e somente se,*

$$R_{ijkl} = K_0(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}).$$

Demonstração. Por (2.4), temos que

$$\begin{aligned} R'_{ijkl} &= \langle e_i,e_k\rangle\langle e_j,e_l\rangle - \langle e_j,e_k\rangle\langle e_i,e_l\rangle & (2.5)\\ &= g_{ik}g_{jl}-g_{jk}g_{il}. & (2.6) \end{aligned}$$

Se $K(p,\sigma) = K_0$, pelo Lema 2.1, $R = K_0 R'$. Assim,

$$R_{ijkl} = K_0(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Reciprocamente, se

$$R_{ijkl} = K_0(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

então

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= K_0\left(\langle e_i, e_k\rangle \langle e_j, e_l\rangle - \langle e_j, e_k\rangle \langle e_i, e_l\rangle\right) \\ &= K_0 R'_{ijkl} \end{aligned}$$

e novamente pelo Lema 2.1, concluímos que $K(p,\sigma) = K_0$, o que finaliza a prova do corolário. $\square$

Algumas combinações de curvaturas seccionais aparecem com muita frequência e recebem nomes especiais.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, \cdots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideremos o seguinte:

$$Ric_p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i\rangle \tag{2.7}$$

e

$$scal(p) = \sum_{j=1}^{n} Ric_p(z_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i}^{n-1} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle . \tag{2.8}$$

Definição 2.4. *Definimos a curvatura de Ricci e a curvatura escalar pelas expressões (2.7) e (2.8), respectivamente.*

Para uma abordagem mais ampla veja [8] ou [13].

2.2 Tensores de Curvatura Algébricos

Nesta seção faremos um estudo dos tensores de curvaturas algébricos definidos na seção anterior.

Escrevendo $\nabla^2_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z$, obtemos

$$\nabla_X\nabla_Y Z = \nabla^2_{X,Y}Z + \nabla_{\nabla_X Y}Z \tag{2.9}$$

e

$$\nabla_Y\nabla_X Z = \nabla^2_{Y,X}Z + \nabla_{\nabla_Y X}Z \tag{2.10}$$

Subtraindo as expressões (2.9) e (2.10), temos

$$\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z = \nabla^2_{Y,X}Z - \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

$$\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z = \nabla^2_{Y,X}Z - \nabla^2_{X,Y}Z \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) em (2.2), temos

$$-R(X,Y,Z,W) = \left\langle \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z, W \right\rangle$$

o que implica

$$\nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z = -\sum_{i=1}^{n} R(X,Y,Z,e_i)e_i. \tag{2.12}$$

Dado $S(U,V,W,Z)$, podemos expressar $\nabla^2_{X,Y}S(U,V,W,Z) - \nabla^2_{Y,X}S(U,V,W,Z)$ em termos do tensor de curvatura R de uma variedade (M^n, g), da seguinte forma;

$$\begin{aligned}
& \nabla^2_{X,Y}S(U,V,W,Z) - \nabla^2_{Y,X}S(U,V,W,Z) \\
= \ & -S\left(\nabla^2_{X,Y}U - \nabla^2_{Y,X}U, V, W, Z\right) - S\left(U, \nabla^2_{X,Y}V - \nabla^2_{Y,X}V, W, Z\right) \\
& -S\left(U, V, \nabla^2_{X,Y}W - \nabla^2_{Y,X}W, Z\right) - S\left(U, V, W, \nabla^2_{X,Y}W - \nabla^2_{Y,X}W\right) \\
= \ & -S\left(-\sum_{i=1}^{n} R(X,Y,U,e_i)e_i, V, W, Z\right) - S\left(U, -\sum_{i=1}^{n} R(X,Y,V,e_i)e_i, W, Z\right) \\
& -S\left(U, V, -\sum_{i=1}^{n} R(X,Y,W,e_i)e_i, Z\right) - S\left(U, V, W, -\sum_{i=1}^{n} R(X,Y,Z,e_i)e_i\right).
\end{aligned}$$

Ordenando convenientemente os termos, temos

$$\begin{aligned}
& \nabla^2_{X,Y}S(U,V,W,Z) - \nabla^2_{Y,X}S(U,V,W,Z) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} R(X,Y,U,e_i)S(e_i,V,W,Z) + \sum_{i=1}^{n} R(X,Y,V,e_i)S(U,e_i,W,Z) \\
& + \sum_{i=1}^{n} R(X,Y,W,e_i)S(U,V,e_i,Z) + \sum_{i=1}^{n} R(X,Y,Z,e_i)S(U,V,W,e_i).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Definição 2.5. *O Laplaciano de um campo tensorial S é definido por*

$$\Delta S = \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,e_k} S \tag{2.14}$$

onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal na variedade (M^n, g).

Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de V. Além disso, suponha que R e S são dois tensores de curvatura algébricos em V. Definimos um tensor de curvatura algébrico em V por

$$\begin{aligned} & B(R,S)(X,Y,Z,W) = \\ & \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} [R(X,Y,e_p,e_q)S(Z,W,e_p,e_q) + R(Z,W,e_p,e_q)S(X,Y,e_p,e_q)] \\ + & \sum_{p,q=1}^{n} [R(X,e_p,Z,e_q)S(Y,e_p,W,e_q) + R(Y,e_p,W,e_q)S(X,e_p,Z,e_q)] \\ - & \sum_{p,q=1}^{n} [R(X,e_p,W,e_q)S(Y,e_p,Z,e_q) + R(Y,e_p,Z,e_q)S(X,e_p,W,e_q)] \end{aligned} \tag{2.15}$$

para todos vetores $X, Y, Z, W \in V$.

Para cada tensor de curvatura algébrico, definimos $Q(R) = B(R,R)$.

Por (2.15), temos

$$\begin{aligned} B(R,R) &= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} [R(X,Y,e_p,e_q)R(Z,W,e_p,e_q) + R(Z,W,e_p,e_q)R(X,Y,e_p,e_q)] \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} [R(X,e_p,Z,e_q)R(Y,e_p,W,e_q) + R(Y,e_p,W,e_q)R(X,e_p,Z,e_q)] \\ &- \sum_{p,q=1}^{n} [R(X,e_p,W,e_q)R(Y,e_p,Z,e_q) + R(Y,e_p,Z,e_q)R(X,e_p,W,e_q)]\,. \end{aligned}$$

Agrupando os termos equivalentes, obtemos

$$\begin{aligned} B(R,R) &= \sum_{p,q=1}^{n} [R(X,Y,e_p,e_q)R(Z,W,e_p,e_q)] \\ &+ 2\sum_{p,q=1}^{n} [R(X,e_p,Z,e_q)R(Y,e_p,W,e_q)] \\ &- 2\sum_{p,q=1}^{n} [R(X,e_p,W,e_q)R(Y,e_p,Z,e_q)]\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Escrevendo $Q(R) = R^2 + R^\sharp$, definimos

$$R^2(X,Y,Z,W) = \sum_{p,q=1}^{n} \left[R(X,Y,e_p,e_q)R(Z,W,e_p,e_q)\right] \tag{2.17}$$

e

$$\begin{aligned} R^\sharp(X,Y,Z,W) &= 2\sum_{p,q=1}^{n} \left[R(X,e_p,Z,e_q)R(Y,e_p,W,e_q)\right] \\ &- 2\sum_{p,q=1}^{n} \left[R(X,e_p,W,e_q)R(Y,e_p,Z,e_q)\right]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Proposição 2.2. *Seja X,Y,Z,W campos de vetores em M^n. Então*

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2_{X,Z} Ric\right)(Y,Z) - \left(\nabla^2_{X,W} Ric\right)(Y,Z) \\ - & \left(\nabla^2_{Y,Z} Ric\right)(X,W) + \left(\nabla^2_{Y,W} Ric\right)(X,Z) \\ = & (\Delta R)(X,Y,Z,W) + Q(R)(X,Y,Z,W) \\ - & \sum_{k=1}^{n} Ric(X,e_k)R(e_k,Y,Z,W) \\ - & \sum_{k=1}^{n} Ric(Y,e_k)R(X,e_k,Z,W). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Demonstração. Fazendo $Y = e_k, U = e_k, V = Y, W = Z, Z = W$, e $S = R$ na equação (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} & \nabla^2_{X,e_k} R(e_k,Y,Z,W) - \nabla^2_{e_k,X} R(e_k,Y,Z,W) \\ = & \sum_{i=1}^{n} R(X,e_k,e_k,e_i)R(e_i,Y,Z,W) + \sum_{i=1}^{n} R(X,e_k,Y,e_i)R(e_k,e_i,Z,W) \\ + & \sum_{i=1}^{n} R(X,e_k,Z,e_i)R(e_k,Y,e_i,W) + \sum_{i=1}^{n} R(X,e_k,W,e_i)R(e_k,Y,Z,e_i). \end{aligned}$$

Somando em k, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{X,e_k} R(e_k,Y,Z,W) - \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,X} R(e_k,Y,Z,W) \\ = & \sum_{i,k=1}^{n} R(X,e_k,e_k,e_i)R(e_i,Y,Z,W) + \sum_{i,k=1}^{n} R(X,e_k,Y,e_i)R(e_k,e_i,Z,W) \\ + & \sum_{i,k=1}^{n} R(X,e_k,Z,e_i)R(e_k,Y,e_i,W) + \sum_{i,k=1}^{n} R(X,e_k,W,e_i)R(e_k,Y,Z,e_i). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Fazendo uma permutação em X e Y, ficamos com

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{Y,e_k}R(e_k,X,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,Y}R(e_k,X,Z,W)\\
=&\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,e_k,e_i)R(e_i,X,Z,W)+\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,X,e_i)R(e_k,e_i,Z,W)\\
+&\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,Z,e_i)R(e_k,X,e_i,W)+\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,W,e_i)R(e_k,X,Z,e_i). \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Subtraindo as expressões (2.20) e (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{X,e_k}R(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{Y,e_k}R(e_k,X,Z,W)\\
-&\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,X}R(e_k,Y,Z,W)+\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,Y}R(e_k,X,Z,W)\\
=&\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,e_k,e_i)R(e_i,Y,Z,W)+\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,Y,e_i)R(e_k,e_i,Z,W)\\
+&\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,Z,e_i)R(e_k,Y,e_i,W)+\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,W,e_i)R(e_k,Y,Z,e_i)\\
-&\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,e_k,e_i)R(e_i,X,Z,W)-\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,X,e_i)R(e_k,e_i,Z,W)\\
-&\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,Z,e_i)R(e_k,X,e_i,W)-\sum_{i,k=1}^{n}R(Y,e_k,W,e_i)R(e_k,X,Z,e_i).
\end{aligned}$$

Arrumando convenientemente os termos e identificando o Ric, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{X,e_k}R(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{Y,e_k}R(e_k,X,Z,W)\\
-&\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,X}R(e_k,Y,Z,W)+\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,Y}R(e_k,X,Z,W)\\
=&\sum_{i,k=1}^{n}[R(X,e_k,Y,e_i)-R(Y,e_k,X,e_i)]R(e_k,e_i,Z,W)\\
+&\ 2\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,Z,e_i)R(Y,e_k,W,e_i)\\
-&\ 2\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,W,e_i)R(Y,e_k,Z,e_i)\\
-&\sum_{i=1}^{n}Ric(X,e_i)R(e_i,Y,Z,W)+\sum_{i=1}^{n}Ric(Y,e_i)R(e_i,X,Z,W). \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Pela primeira identidade de Bianchi, temos que

$$R(X,e_k,Y,e_i)+R(e_k,Y,X,e_i)+R(Y,X,e_k,e_i)=0$$

$$R(X,e_k,Y,e_i)-R(Y,e_k,X,e_i)=R(X,Y,,e_k,e_i). \tag{2.23}$$

Substituindo (2.23) em (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{X,e_k}R(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{Y,e_k}R(e_k,X,Z,W)\\
- & \sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,X}R(e_k,Y,Z,W)+\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,Y}R(e_k,X,Z,W)\\
= & \sum_{i,k=1}^{n}R(X,Y,,e_k,e_i)R(e_k,e_i,Z,W)\\
+ & 2\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,Z,e_i)R(Y,e_k,W,e_i)\\
- & 2\sum_{i,k=1}^{n}R(X,e_k,W,e_i)R(Y,e_k,Z,e_i)\\
- & \sum_{i=1}^{n}Ric(X,e_i)R(e_i,Y,Z,W)+\sum_{i=1}^{n}Ric(Y,e_i)R(e_i,X,Z,W)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

e substituindo (2.16) em (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{X,e_k}R(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{Y,e_k}R(e_k,X,Z,W)\\
- & \sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,X}R(e_k,Y,Z,W)+\sum_{k=1}^{n}\nabla^2_{e_k,Y}R(e_k,X,Z,W)\\
= & Q(R)(X,Y,Z,W)-\sum_{i=1}^{n}Ric(X,e_i)R(e_i,Y,Z,W)\\
- & \sum_{i=1}^{n}Ric(Y,e_i)R(X,e_i,Z,W).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Pela segunda identidade de Bianchi(Veja [8]) concluímos que

$$\nabla^2_{X,e_k}R(e_k,Y,Z,W)+\nabla^2_{X,Z}R(e_k,Y,W,e_k)+\nabla^2_{X,W}R(e_k,Y,e_k,Z)=0$$

$$\nabla^2_{X,e_k}R(e_k,Y,Z,W)=-\nabla^2_{X,Z}R(e_k,Y,W,e_k)-\nabla^2_{X,W}R(e_k,Y,e_k,Z)$$

$$\nabla^2_{X,e_k}R(e_k,Y,Z,W)=\nabla^2_{X,Z}R(e_k,Y,e_k,W)-\nabla^2_{X,W}R(e_k,Y,e_k,Z).$$

Somando em k, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{X,e_k} R(e_k, Y, Z, W) &= \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{X,Z} R(e_k, Y, e_k, W) \\
&- \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{X,W} R(e_k, Y, e_k, Z) \\
&= \left(\nabla^2_{X,Z} Ric\right)(Y, W) - \left(\nabla^2_{X,W} Ric\right)(Y, Z). \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Fazendo uma permutação entre X e Y, deduzimos

$$\sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{Y,e_k} R(e_k, X, Z, W) = \left(\nabla^2_{Y,Z} Ric\right)(X, W) - \left(\nabla^2_{Y,W} Ric\right)(X, Z). \qquad (2.27)$$

Subtraindo as expressões (2.26) e (2.27) temos

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla^2_{X,Z} Ric\right)(Y, W) - \left(\nabla^2_{X,W} Ric\right)(Y, Z) \\
- & \left(\nabla^2_{Y,Z} Ric\right)(X, W) + \left(\nabla^2_{Y,W} Ric\right)(X, Z) \\
= & \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{X,e_k} R(e_k, Y, Z, W) - \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{Y,e_k} R(e_k, X, Z, W). \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.28) em (2.25) temos

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla^2_{X,Z} Ric\right)(Y, W) - \left(\nabla^2_{X,W} Ric\right)(Y, Z) \\
- & \left(\nabla^2_{Y,Z} Ric\right)(X, W) + \left(\nabla^2_{Y,W} Ric\right)(X, Z) \\
= & \; Q(R)(X, Y, Z, W) - \sum_{i=1}^{n} Ric(X, e_i) R(e_i, Y, Z, W) \\
- & \sum_{i=1}^{n} Ric(Y, e_i) R(X, e_i, Z, W) + \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,X} R(e_k, Y, Z, W) \\
- & \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,Y} R(e_k, X, Z, W). \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Novamente pela segunda identidade de Bianchi, obtemos

$$\nabla^2_{e_k,X} R(e_k, Y, Z, W) + \nabla^2_{e_k,e_k} R(Y, X, Z, W) + \nabla^2_{e_k,Y} R(X, e_k, Z, W) = 0$$

$$\nabla^2_{e_k,X} R(e_k, Y, Z, W) - \nabla^2_{e_k,Y} R(e_k, X, Z, W) = \nabla^2_{e_k,e_k} R(X, Y, Z, W).$$

Somando em k,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,X} R(e_k,Y,Z,W) - \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,Y} R(e_k,X,Z,W) \\ = & \sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,e_k} R(X,Y,Z,W) \\ = & (\Delta R)(X,Y,Z,W). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Substituindo (2.30) em (2.29), temos

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2_{X,Z} Ric\right)(Y,W) - \left(\nabla^2_{X,W} Ric\right)(Y,Z) \\ - & \left(\nabla^2_{Y,Z} Ric\right)(X,W) + \left(\nabla^2_{Y,W} Ric\right)(X,Z) \\ = & Q(R)(X,Y,Z,W) + (\Delta R)(X,Y,Z,W) \\ - & \sum_{i=1}^{n} Ric(X,e_i)R(e_i,Y,Z,W) - \sum_{i=1}^{n} Ric(Y,e_i)R(X,e_i,Z,W), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

2.3 Variedades de Einstein

Nesta seção definiremos as variedades de Einstein, que são o objeto central de estudo deste trabalho.

Definição 2.6. *Uma variedade Riemanniana M^n é chamada uma variedade de Einstein se, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Ric(X,Y) = \lambda \langle X, Y \rangle$, onde $\lambda : M \to \mathbb{R}$ é uma função real.*

Existem vários exemplos de variedades de Einstein. Vejamos alguns:

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}^n$. *Neste caso temos que o tensor de curvatura R é nulo, logo $Ric = 0$.*

Exemplo 2.2. S^n. *Podemos calcular o Ric tomando a métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ para obter $Ric = (n-1)g$, onde g é a mátrica de S^n.*

Exemplo 2.3. M^4*(Espaço-tempo de Minkowski), cujo tensor de Ricci é nulo, pois assim como o espaço euclidiano, tem curvatura seccional nula.*

Exemplo 2.4. *A equação de campo de Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é escalar de curvatura, Λ é a constante cosmolóliga, c é a velocidade da luz, G é a constante gravitacional e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento definido por

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}L_m,$$

onde L_m é um termo de matéria. Para o caso em que L_m é constante, estamos numa variedade de Einstein.

O resultado seguinte é conhecido como Teorema de Schur.

Teorema 2.1. *Se M^n é uma variedade conexa e de Einstein, com $n \geq 3$, então a função λ na definição 2.6 é uma constante em M^n.*

Demonstração. Seja $p \in M^n$ e considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal e geodésico em M^n. Pela segunda identidade de Bianchi, temos

$$e_s(R_{hijk}) + e_j(R_{hiks}) + e_k(R_{hisj}) = 0. \tag{2.31}$$

Lembremos que $g_{ik} = \langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik}$. Multiplique (2.31) por $\delta_{ik}\delta_{hj}$ e some em i, j, k, l. Para a primeira parcela, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,k,j,h} \delta_{hj}\delta_{ik} e_s\left(R_{hijk}\right) \\ &= e_s\left(\sum_{i,k,j,h} \delta_{hj}\delta_{ik} R_{hijk}\right) \\ &= e_s\left[\sum_{hj} \delta_{hj}\left(\sum_{ik} \delta_{ik} R_{hijk}\right)\right] \\ &= e_s\left(\sum_{hj} \delta_{hj} Ric_{hj}\right). \end{aligned}$$

Mas, como $Ric_{hj} = \lambda\delta_{hj}$, temos

$$\begin{aligned} A &= e_s\left(\sum_{hj} \delta_{hj}\lambda\delta_{hj}\right) \\ &= e_s\left(n\lambda\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Para a segunda parcela, obtemos

$$B = \sum_{i,k,j,h} \delta_{hj}\delta_{ik} e_j\left(R_{hiks}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{hj} \delta_{hj} e_j \left(\sum_{ik} \delta_{ik} R_{hisk} \right) \\
&= -\sum_{hj} \delta_{hj} e_j \left(Ric_{hs} \right) \\
&= -\sum_{hj} \delta_{hj} e_j \left(\lambda \delta_{hs} \right) \\
&= -e_s \left(\lambda \right). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

e para a terceira parcela, deduzimos

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{i,k,j,h} \delta_{hj} \delta_{ik} e_k \left(R_{hisj} \right) \\
&= -\sum_{i,k,j,h} \delta_{hj} \delta_{ik} e_k \left(R_{ihsj} \right) \\
&= -\sum_{i,k} \delta_{ik} e_k \left(\sum_{h,j} \delta_{hj} R_{ihsj} \right) \\
&= -\sum_{i,k} \delta_{ik} e_k \left(Ric_{is} \right) \\
&= -\sum_{i,k} \delta_{ik} e_k \left(\lambda \delta_{is} \right) \\
&= -e_s \left(\lambda \right). \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Somando as expressões (2.32), (2.33) e (2.34) e usando 2.31, concluímos que

$$\begin{aligned}
A + B + C &= n e_s (\lambda) - e_s (\lambda) - e_s (\lambda) \\
0 &= (n-2) e_s (\lambda).
\end{aligned}$$

Como s é qualquer e $n \geq 3$, temos que λ é constante, o que finaliza a prova. □

Teorema 2.2. *Se M^3 é uma variedade de Einstein conexa, então M^3 tem curvatura seccional constante.*

Demonstração. Pelo teorema anterior λ é constante e portanto para um $p \in M^3$ e sendo $\{e_i\}_{i=1}^3$ um referencial geodésico em p, temos

$$Ric(e_i, e_j) = \lambda \delta_{ij}$$

e

$$Ric(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{3} \langle R(e_i, e_k) e_j, e_k \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{3} R_{ikjk}$$

donde

$$\lambda\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} R_{ikjk}. \tag{2.35}$$

Assim para cada $j = 1, 2, 3$, temos

$$\sum_{k=1}^{3} R_{jkjk} = \lambda, \tag{2.36}$$

ou seja,

- $R_{1212} + R_{1313} = \lambda$
- $R_{2121} + R_{2323} = \lambda$
- $R_{3131} + R_{3232} = \lambda$

Resolvendo este sistema obtemos

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = \frac{\lambda}{2},$$

ou seja,

$$R_{jkjk} = \frac{\lambda}{2} \; se \; j \neq k.$$

Ainda por (2.35) temos que

$$\sum_{k=1}^{3} R_{ikjk} = 0 \; se \; j \neq i.$$

Assim,

$$R_{i1j1} + R_{i2j2} + R_{i3j3} = 0,$$

donde obtemos que

- $R_{1232} + R_{1323} = 0$
- $R_{2131} + R_{2313} = 0$
- $R_{3121} + R_{3212} = 0$

Resolvendo o sistema acima concluímos que

$$R_{1232} = R_{1323} = R_{2131} = 0.$$

Portanto, temos $R_{ijkh} = \frac{\lambda}{2}$ se $j = h, i = k$ e $R_{ijkh} = 0$ nos outros casos.

Pelo Corolário 2.1, $K(p, \sigma) = \frac{\lambda}{2}$ para todo $\sigma \subset T_pM$. E como $p \in M^3$ foi tomado arbitrariamente e $\frac{\lambda}{2}$ é constante, temos que a curvatura seccional $K(p, \sigma)$ também não depende de p, ou seja, para todo $p \in M^3$ e todo $\sigma \subset T_pM$, tem-se $K(p, \sigma) = \frac{\lambda}{2}$ que é constante. $\square$

Um maior estudo sobre as variedades de Einstein pode ser encontrado em [3].

3 CURVATURA ISOTRÓPICA

3.1 Teoremas sobre Curvatura Isotrópica

Micallef e Moore [10] estendem o operador de curvatura para uma aplicação linear complexa

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 T_pM \otimes \mathbb{C} \to \Lambda^2 T_pM \otimes \mathbb{C},$$

onde para cada 2-plano $\sigma \subset T_pM \otimes \mathbb{C}$, tem-se uma curvatura seccional complexa definida pela fórmula

$$K(\sigma) = \frac{\langle \mathcal{R}(z \wedge w), z \wedge w \rangle}{\|z \wedge w\|^2},$$

onde $\langle \mathcal{R}(z \wedge w), z \wedge w \rangle = R(z, w, z, w)$ e $\{z, w\}$ é uma base para σ.

Definição 3.1. *Um elemento $z \in T_pM \otimes \mathbb{C}$ é dito ser isotrópico se $(z, z) = 0$. Um subespaço linear complexo $V \subseteq T_pM \otimes \mathbb{C}$ é totalmente isotrópico se $z \in V$ implicar $(z, z) = 0$.*

Definição 3.2. *A curvatura de uma variedade Riemanniana M^n é positiva em 2-planos totalmente isotrópicos se $K(\sigma) > 0$ sempre que $\sigma \subseteq T_pM \otimes \mathbb{C}$ é um 2-plano totalmente isotrópico situado em algum ponto $p \in M^n$.*

Seja $\{z, w\}$ uma base para σ tal que

$$z = e_1 + ie_2 \text{ e } w = e_3 + ie_4,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal. Assim, observamos que

$$\begin{aligned} z \wedge w &= (e_1 + ie_2) \wedge (e_3 + ie_4) \\ &= (e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4) + i(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3). \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}(z\wedge w), z\wedge w\rangle &= \langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_3 - e_2\wedge e_4), e_1\wedge e_3 - e_2\wedge e_4\rangle \\
&+ \langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3), e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3\rangle \\
&= \langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_3), e_1\wedge e_3\rangle - 2\,\langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_3), e_2\wedge e_4\rangle \\
&+ \langle \mathcal{R}(e_2\wedge e_4), e_2\wedge e_4\rangle + \langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_4), e_1\wedge e_4\rangle \\
&+ 2\,\langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_4), e_2\wedge e_3\rangle + \langle \mathcal{R}(e_2\wedge e_3), e_2\wedge e_3\rangle \\
&= R(e_1,e_3,e_1,e_3) + R(e_1,e_4,e_1,e_4) + R(e_2,e_3,e_2,e_3) \\
&+ R(e_2,e_4,e_2,e_4) + 2R(e_1,e_4,e_2,e_3) - 2R(e_1,e_3,e_2,e_4) \\
&= R(e_1,e_3,e_1,e_3) + R(e_1,e_4,e_1,e_4) + R(e_2,e_3,e_2,e_3) \\
&+ R(e_2,e_4,e_2,e_4) - 2R(e_1,e_2,e_3,e_4).
\end{aligned}$$

O cálculo anterior nos permite estabelecer o seguinte:

Definição 3.3. *Seja (M^n, g) uma variedade de dimensão $n \geq 4$. Definimos a curvatura isotrópica de M^n por*

$$\begin{aligned}
&R(e_1,e_3,e_1,e_3) + R(e_1,e_4,e_1,e_4) + R(e_2,e_3,e_2,e_3) \\
&\qquad +R(e_2,e_4,e_2,e_4) - 2R(e_1,e_2,e_3,e_4),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde R é o tensor de curvatura e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$ é um referencial ortonormal.

Dizemos que (M^n, g) tem curvatura isotrópica positiva (não negativa) se a expressão em (3.1) é sempre maior (maior ou igual) que zero. Enunciamos agora um resultado cuja demonstração será feita na seção 3.2.

Proposição 3.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 4$ que é munido com um produto interno. Seja R um tensor de curvatura algébrico em V com curvatura isotrópica não negativa. Finalmente suponha que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal em V satisfazendo*

$$\begin{aligned}
&R(e_1,e_3,e_1,e_3) + R(e_1,e_4,e_1,e_4) + R(e_2,e_3,e_2,e_3) \\
&+R(e_2,e_4,e_2,e_4) - 2R(e_1,e_2,e_3,e_4) = 0.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
&R^\sharp(e_1,e_3,e_1,e_3) + R^\sharp(e_1,e_4,e_1,e_4) \\
&+R^\sharp(e_2,e_3,e_2,e_3) + R^\sharp(e_2,e_4,e_2,e_4)
\end{aligned}$$

$$+2R^\sharp(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2R^\sharp(e_1, e_4, e_2, e_3) \geq 0. \tag{3.2}$$

Vamos enunciar um resultado devido a Brendle e Schoen [5].

Proposição 3.2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 4$ que é munido com um produto interno. Seja R um tensor de curvatura algébrico em V com curvatura isotrópica não negativa. Finalmente suponha que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal em V satisfazendo*

$$\begin{aligned}&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4) + R(e_2, e_3, e_2, e_3)\\&+R(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2R(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}&Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4) + Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3)\\&+Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2Q(R)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Demonstração. Pela Proposição 3.1, temos

$$\begin{aligned}&R^\sharp(e_1, e_3, e_1, e_3) + R^\sharp(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+R^\sharp(e_2, e_3, e_2, e_3) + R^\sharp(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&+2R^\sharp(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2R^\sharp(e_1, e_4, e_2, e_3) \geq 0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por (2.17), temos

$$\begin{aligned}&R^2(e_1, e_3, e_1, e_3) + R^2(e_1, e_4, e_1, e_4) + R^2(e_2, e_3, e_2, e_3)\\&+R^2(e_2, e_4, e_2, e_4) + 2R^2(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2R^2(e_1, e_4, e_2, e_3)\\&= \sum_{p,q=1}^{n} [R(e_1, e_3, e_p, e_q)R(e_1, e_3, e_p, e_q)] + \sum_{p,q=1}^{n} [R(e_1, e_4, e_p, e_q)R(e_1, e_4, e_p, e_q)]\\&+ \sum_{p,q=1}^{n} [R(e_2, e_3, e_p, e_q)R(e_2, e_3, e_p, e_q)] + \sum_{p,q=1}^{n} [R(e_2, e_4, e_p, e_q)R(e_2, e_4, e_p, e_q)]\\&+2 \sum_{p,q=1}^{n} [R(e_1, e_3, e_p, e_q)R(e_4, e_2, e_p, e_q)] + 2 \sum_{p,q=1}^{n} [R(e_1, e_4, e_p, e_q)R(e_2, e_3, e_p, e_q)].\end{aligned}$$

Agrupando os termos de forma conveniente, temos

$$
\begin{aligned}
&R^2(e_1,e_3,e_1,e_3)+R^2(e_1,e_4,e_1,e_4)+R^2(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
&+R^2(e_2,e_4,e_2,e_4)+2R^2(e_1,e_3,e_4,e_2)+2R^2(e_1,e_4,e_2,e_3)\\
&=\sum_{p,q=1}^{n}\left\{[R(e_1,e_3,e_p,e_q)]^2+[R(e_2,e_4,e_p,e_q)]^2-2\left[R(e_1,e_3,e_p,e_q)R(e_2,e_4,e_p,e_q)\right]\right\}\\
&+\sum_{p,q=1}^{n}\left\{[R(e_1,e_4,e_p,e_q)]^2+[R(e_2,e_3,e_p,e_q)]^2+2\left[R(e_1,e_4,e_p,e_q)R(e_2,e_3,e_p,e_q)\right]\right\}\\
&=\sum_{p,q=1}^{n}\left[R(e_1,e_3,e_p,e_q)-R(e_2,e_4,e_p,e_q)\right]^2\\
&+\sum_{p,q=1}^{n}\left[R(e_1,e_4,e_p,e_q)+R(e_2,e_3,e_p,e_q)\right]^2\geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Somando (3.4) e (3.5), temos

$$
\begin{aligned}
&R^\sharp(e_1,e_3,e_1,e_3)+R^\sharp(e_1,e_4,e_1,e_4)+R^\sharp(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
&+R^\sharp(e_2,e_4,e_2,e_4)+2R^\sharp(e_1,e_3,e_4,e_2)+2R^\sharp(e_1,e_4,e_2,e_3)\\
&+R^2(e_1,e_3,e_1,e_3)+R^2(e_1,e_4,e_1,e_4)+R^2(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
&+R^2(e_2,e_4,e_2,e_4)+2R^2(e_1,e_3,e_4,e_2)+2R^2(e_1,e_4,e_2,e_3)\\
&=Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4)+Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
&+Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4)+2Q(R)(e_1,e_3,e_4,e_2)+2Q(R)(e_1,e_4,e_2,e_3)\geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$Q(R)$ satisfaz a primeira identidade de Bianchi, pois é um tensor de curvatura algébrico(Veja Proposição 5.7 de [7]). Assim,

$$Q(R)(e_1,e_3,e_4,e_2)+Q(R)(e_3,e_4,e_1,e_2)+Q(R)(e_4,e_1,e_3,e_2)=0$$

$$Q(R)(e_1,e_3,e_4,e_2)+Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4)-Q(R)(e_1,e_4,e_3,e_2)=0$$

$$Q(R)(e_1,e_3,e_4,e_2)+Q(R)(e_1,e_4,e_2,e_3)=-Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4). \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
&Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4)+Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
&+Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4)-2Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4)\geq 0,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Na Proposição seguinte, a métrica $g(t)$ é uma função dependente de $t \in [0, T]$.

Proposição 3.3. *Assuma que $(M, g(t))$ tenha curvatura isotrópica não negativa para todo $t \in [0, T]$. Fixe um número real $t \in (0, T)$. Então o conjunto de todos os quadrireferenciais $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ que são ortonormais com respeito a $g(t)$ e que satisfazem*

$$\begin{aligned} &R_{g(t)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + R_{g(t)}(e_1, e_4, e_1, e_4) + R_{g(t)}(e_2, e_3, e_2, e_3) \\ &+R_{g(t)}(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2R_{g(t)}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0 \end{aligned}$$

é invariante sob transporte paralelo.

A prova desta proposição pode ser encontrada em [6].

O próximo resultado é devido a Micallef e Wang [11].

Proposição 3.4. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 4$ que é munido com um produto interno. Seja S um tensor de curvatura algébrico em V com curvatura isotrópica não negativa. Então a curvatura escalar de S é não negativa. Além disso, se o tensor de Ricci de S é igual a zero, então $S = 0$.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal arbitrária de V. Como S tem curvatura isotrópica não negativa, temos para os quadrireferenciais $\{e_i, e_j, e_k, e_l\}$ e $\{e_i, e_j, e_l, e_k\}$, respectivamente

$$\begin{aligned} &S(e_i, e_k, e_i, e_k) + S(e_i, e_l, e_i, e_l) + S(e_j, e_k, e_j, e_k) \\ + \quad &S(e_j, e_l, e_j, e_l) - 2S(e_i, e_j, e_k, e_l) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

e

$$\begin{aligned} &S(e_i, e_l, e_i, e_l) + S(e_i, e_k, e_i, e_k) + S(e_j, e_l, e_j, e_l) \\ + \quad &S(e_j, e_k, e_j, e_k) - 2S(e_i, e_j, e_l, e_k) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Somando as expressões (3.8) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} &S(e_i, e_k, e_i, e_k) + S(e_i, e_l, e_i, e_l) \\ + \quad &S(e_j, e_k, e_j, e_k) + S(e_j, e_l, e_j, e_l) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

sempre que $i, j, k, l \in \{e_1, \cdots, e_n\}$ são mutualmente distintos.

Somando a expressão (3.10) em $l \in \{e_1, \cdots, e_n\} \setminus \{i, j, k\}$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_l S(e_i, e_k, e_i, e_k) + \sum_l S(e_i, e_l, e_i, e_l) \\ + & \sum_l S(e_j, e_k, e_j, e_k) + \sum_l S(e_j, e_l, e_j, e_l) \\ = & \sum_{l=1}^n S(e_i, e_l, e_i, e_l) - S(e_i, e_j, e_i, e_j) - S(e_i, e_k, e_i, e_k) \\ + & \sum_{l=1}^n S(e_j, e_l, e_j, e_l) - S(e_j, e_i, e_j, e_i) - S(e_j, e_k, e_j, e_k) \\ + & (n-3)S(e_i, e_k, e_i, e_k) + (n-3)S(e_j, e_k, e_j, e_k) \\ = & Ric(e_i, e_i) + Ric(e_j, e_j) - 2S(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ + & (n-4)\left[S(e_i, e_k, e_i, e_k) + S(e_j, e_k, e_j, e_k)\right] \geq 0 \end{aligned}$$

sempre que $i, j, k \in \{e_1, \cdots, e_n\}$ são mutualmente distintos.

Tomemos agora a soma em $k \in \{e_1, \cdots, e_n\} \setminus \{i, j\}$, para obter

$$\begin{aligned} & \sum_k Ric(e_i, e_i) + \sum_k Ric(e_j, e_j) - 2\sum_k S(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ + & (n-4)\sum_k \left[S(e_i, e_k, e_i, e_k) + S(e_j, e_k, e_j, e_k)\right] \\ = & (n-2)Ric(e_i, e_i) + (n-2)Ric(e_j, e_j) - 2(n-2)S(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ + & (n-4)\sum_{k=1}^n S(e_i, e_k, e_i, e_k) - S(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ + & (n-4)\sum_{k=1}^n S(e_j, e_k, e_j, e_k) - S(e_j, e_i, e_j, e_i) \\ = & (n-2)\left[Ric(e_i, e_i) + Ric(e_j, e_j)\right] - 2(n-2)S(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ - & 2(n-4)S(e_i, e_j, e_i, e_j) + (n-4)\left[Ric(e_i, e_i) + Ric(e_j, e_j)\right] \\ = & (2n-6)\left[Ric(e_i, e_i) + Ric(e_j, e_j) - 2S(e_i, e_j, e_i, e_j)\right] \\ = & Ric(e_i, e_i) + Ric(e_j, e_j) - 2S(e_i, e_j, e_i, e_j) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

sempre que $i, j \in \{e_1, \cdots, e_n\}$ são distintos.

Somemos também em $j \in \{e_1, \cdots, e_n\} \setminus \{i\}$ para obter

$$\begin{aligned} & \sum_j Ric(e_i, e_i) + \sum_j Ric(e_j, e_j) - 2\sum_j S(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ = & (n-1)Ric(e_i, e_i) + \sum_{j=1}^n Ric(e_j, e_j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - \quad Ric(e_i, e_i) - 2\sum_{j=1}^{n} S(e_i, e_j, e_i, e_j) \\
& = \quad (n-2)Ric(e_i, e_i) + \sum_{j=1}^{n} Ric(e_j, e_j) - 2Ric(e_i, e_i) \\
& = \quad (n-4)Ric(e_i, e_i) + scal \geq 0
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

para todo $i \in \{e_1, \cdots, e_n\}$. Somando essa última expressão em i temos

$$
\begin{aligned}
& (n-4)\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{n} scal \\
= \quad & n(n-4)scal \geq 0.
\end{aligned}
$$

Isso implica que $scal \geq 0$.

Agora, se $Ric = 0$, a expressão (3.11) se torna

$$
-2S(e_i, e_j, e_i, e_j) \geq 0,
$$

ou seja, a curvatura seccional é não positiva. Portanto temos curvatura escalar não negativa e curvatura seccional não positiva, o que implica $S = 0$. □

3.2 Prova da Proposição 3.1

Para a presente demonstração precisaremos de alguns lemas. Assumindo que V é um espaço vetorial de dimensão $n \geq 4$ munido com um produto interno, que R é um tensor de curvatura algébrico em V com curvatura isotrópica não negativa. Assumimos ainda que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um quadri-referencial ortonormal satisfazendo

$$
R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} = 0 \tag{3.13}
$$

onde $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$.

Lema 3.1. *Temos*

$$
R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442} = R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423} = 0.
$$

Demonstração. Considere o referencial $\{e_1, cos(s)e_2 - sen(s)e_3, sen(s)e_2 + cos(s)e_3, e_4\}$. Como R tem curvatura isotrópica não negativa, a função

$$
\begin{aligned}
s \mapsto\ & cos^2(s)\left(R_{1313} + R_{2424} - 2R_{1234}\right) + sen^2(s)\left(R_{1212} + R_{3434} + 2R_{1324}\right) \\
& + R_{1414} + R_{2323} + 2cos(s)sen(s)\left(R_{1213} - R_{2434} - R_{1224} - R_{1334}\right)
\end{aligned}
$$

é não negativa para todo $s \in \mathbb{R}$ e deve se anular para $s = 0$. Assim,

$$R_{1213} - R_{2434} - R_{1224} - R_{1334} = 0$$

$$R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442} = 0.$$

Trocando $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ por $\{e_2, -e_1, e_3, e_4\}$, obtemos

$$-R_{2123} + R_{2141} + R_{3423} - R_{3441} = 0$$

o que equivale a

$$R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423} = 0,$$

completando a demonstração. □

Lema 3.2. *Temos*

$$\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{4} R_{12pq} R_{34pq} \\
= & \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\
+ & \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}).
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{4} R_{12pq} R_{34pq} \\
- & \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\
- & \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) \\
= & R_{2121}(R_{3131} + R_{4141}) + R_{2123}R_{4143} + R_{2124}R_{3134} \\
+ & R_{1212}(R_{3232} + R_{4242}) + R_{1213}R_{4243} + R_{1214}R_{3234} \\
+ & R_{2321}R_{4341} + R_{1312}R_{4342} + (R_{1313} + R_{2323})R_{4343} \\
+ & R_{2421}R_{3431} + R_{1412}R_{3432} + (R_{1414} + R_{2424})R_{3434} \\
- & R_{1212}R_{3412} - R_{1213}R_{3413} - R_{1214}R_{3414} - R_{1221}R_{3421} \\
- & R_{1223}R_{3423} - R_{1224}R_{3424} - R_{1231}R_{3431} - R_{1232}R_{3432} \\
- & R_{1234}R_{3434} - R_{1241}R_{3441} - R_{1242}R_{3442} - R_{1243}R_{3443}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad R_{2141}R_{4121} - R_{2142}R_{3112} - R_{2143}(R_{3113} + R_{4123})\\
&- \quad R_{1231}R_{4221} - R_{1232}R_{3212} - R_{1234}(R_{3214} + R_{4224})\\
&- \quad (R_{1331} + R_{2341})R_{4321} - R_{1334}R_{4324} - (R_{1432} + R_{2442})R_{3412}\\
&- \quad R_{2443}R_{3413} - R_{1434}R_{3414} - R_{2131}R_{3121} + R_{2132}R_{4112}\\
&+ \quad R_{2134}(R_{4114} - R_{3124}) + R_{1241}R_{3221} - R_{1242}R_{4212}\\
&- \quad R_{1243}(R_{4213} - R_{3223}) - (R_{1342} - R_{2332})R_{4312} - R_{1343}R_{4313}\\
&+ \quad R_{2334}R_{4314} + (R_{1441} - R_{2431})R_{3421} + R_{1443}R_{3423} - R_{2434}R_{3424}.
\end{aligned}
$$

Agrupando convenientementebos termos, temos

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq}\\
- \quad & \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q})\\
- \quad & \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q})\\
= \quad & (R_{1212} + R_{3434})(R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234})\\
+ \quad & 2R_{1234}(R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} + 2R_{1342} + 2R_{1423})\\
- \quad & (R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442})^2\\
- \quad & (R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423})^2. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Mas, pela primeira identidade de Bianchi,

$$
R_{1342} + R_{1423} = -R_{1234}. \qquad (3.15)
$$

Substituindo (3.15) em (3.14), temos

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq}\\
- \quad & \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q})\\
- \quad & \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q})\\
= \quad & (R_{1212} + R_{3434} + 2R_{1234})(R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234})\\
- \quad & (R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442})^2
\end{aligned}
$$

$$- \quad (R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423})^2. \tag{3.16}$$

Pelo Lema 3.1 e a equação (3.13), o lado direito de (3.16) é zero. Assim,

$$\begin{aligned} & \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq} \\ = & \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\ + & \sum_{p,q=1}^{4} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 3.3. *Temos*

$$R_{133q} + R_{144q} + R_{432q} = R_{233q} + R_{244q} + R_{341q} = 0$$

para $q = 5, \cdots, n$.

Demonstração. Considere o referencial $\{cos(s)e_1 + sen(s)e_q, e_3, e_4\}$. Como R tem curvatura isotrópica não negativa, a função

$$\begin{aligned} s \mapsto cos^2(s)(R_{1313} + R_{1414}) + sen^2(s)(R_{q3q3} + R_{q4q4}) + R_{2323} + R_{2424} \\ +2cos(s)sen(s)(R_{13q3} + R_{14q4}) - 2cos(s)R_{1234} - 2sen(s)R_{q234} \end{aligned}$$

é não negativa para todo $s \in \mathbb{R}$ e se anula em $s = 0$. Assim

$$2(R_{13q3} + R_{14q4}) - 2R_{q234} = 0$$

$$R_{133q} + R_{144q} + R_{432q} = 0.$$

Trocando $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ por $\{e_2, -e_1, e_3, e_4\}$, obtemos

$$R_{233q} + R_{244q} - R_{431q} = 0$$

$$R_{233q} + R_{244q} + R_{341q} = 0,$$

o que completa a demonstração. □

Lema 3.4. *Temos*

$$\sum_{p=1}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq}$$

$$= \sum_{p=1}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + \sum_{p=1}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}).$$

para $q = 5, \cdots, n.$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{2}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p=1}^{2} R_{12pq}R_{34pq} \\
= \;& R_{212q}(R_{313q} + R_{414q}) + R_{121q}(R_{323q} + R_{424q}) - R_{121q}R_{341q} - R_{122q}R_{342q} \\
= \;& R_{212q}(R_{313q} + R_{414q} + R_{342q}) + R_{121q}(R_{323q} + R_{424q} - R_{341q}) \\
= \;& -R_{212q}(R_{133q} + R_{144q} + R_{432q}) - R_{121q}(R_{233q} + R_{244q} + R_{341q}) = 0 \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

pelo Lema 3.3.

Agora observe que

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=3}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + \sum_{p=3}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) \\
= \;& (R_{133q} + R_{234q})R_{432q} + (R_{143q} + R_{244q})R_{341q} \\
+ \;& (R_{134q} - R_{233q})R_{431q} - (R_{144q} - R_{243q})R_{342q} \\
= \;& (R_{133q} + R_{234q} + R_{144q} - R_{243q})R_{432q} + (R_{143q} + R_{244q} - R_{134q} + R_{233q})R_{341q} \\
= \;& (R_{133q} + R_{144q} + R_{432q})R_{432q} + (R_{341q} + R_{244q} + R_{233q})R_{341q} = 0, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

novamente pelo Lema 3.3.

Trocando $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ por $\{e_3, e_4, e_1, e_2\}$ em (3.17) e (3.18), obtemos

$$\sum_{p=3}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p=3}^{4} R_{12pq}R_{34pq} = 0 \qquad (3.19)$$

e

$$\sum_{p=1}^{2}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + \sum_{p=1}^{2}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) = 0. \qquad (3.20)$$

Pelas equações (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20), temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq} \\
& = \sum_{p=1}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + \sum_{p=1}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}),
\end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar. $\square$

Recordemos que o quadri-referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ realiza o mínimo da curvatura isotrópica de R. Por enquanto, só usamos o fato de que a primeira variação da curvatura isotrópica é zero. Agora vamos usar o fato de que a segunda variação é não negativa.

Lema 3.5. *Suponha que w_1, w_2, w_3, w_4 pertença a extensão $\{e_5, \cdots, e_n\}$. Então a expressão*

$$\begin{aligned}
& R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(w_1, e_4, w_1, e_4) \\
+ \;& R(w_2, e_3, w_2, e_3) + R(w_2, e_4, w_2, e_4) \\
+ \;& R(e_1, w_3, e_1, w_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\
+ \;& R(e_1, w_4, e_1, w_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4) \\
- \;& 2\left[R(e_3, w_1, e_1, w_3) + R(e_4, w_1, e_2, w_3)\right] \\
- \;& 2\left[R(e_4, w_1, e_1, w_4) - R(e_3, w_1, e_2, w_4)\right] \\
+ \;& 2\left[R(e_4, w_2, e_1, w_3) - R(e_3, w_2, e_2, w_3)\right] \\
- \;& 2\left[R(e_3, w_2, e_1, w_4) + R(e_4, w_2, e_2, w_4)\right] \\
- \;& 2R(w_1, w_2, e_3, e_4) - 2R(e_1, e_2, w_3, w_4)
\end{aligned}$$

é não negativa.

Demonstração. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ denotemos por $v_i(s)$ a solução da equação diferencial ordinária

$$v_i'(s) = \sum_{j=1}^{4} \left(\langle v_i(s), e_j\rangle\, w_j - \langle v_i(s), w_j\rangle\, e_j\right)$$

com condição inicial $v_i(0) = e_i$. Vemos claramente que

$$v_i''(s) = -\sum_{j=1}^{4} \langle w_i, w_j\rangle\, e_j.$$

Para cada $s \in \mathbb{R}$, os vetores $\{v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s)\}$ formam um quadri-referencial ortonormal em V. Como R tem curvatura isotrópica não negativa, a função

$$\begin{aligned}
s \;\mapsto\;& R(v_1(s), v_3(s), v_1(s), v_3(s)) + R(v_1(s), v_4(s), v_1(s), v_4(s)) \\
+ \;& R(v_2(s), v_3(s), v_2(s), v_3(s)) + R(v_2(s), v_4(s), v_2(s), v_4(s)) \\
- \;& 2R(v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s))
\end{aligned}$$

é não negativa para todo $s \in \mathbb{R}$ e se anula para $s = 0$. Portanto, a segunda derivada desta função é não negativa em $s = 0$. Assim temos

$$0 \leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5,$$

onde

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{d^2}{ds^2} R(v_1(s), v_3(s), v_1(s), v_3(s)) \mid_{s=0} \\
&= 2R(w_1, e_3, w_1, e_3) + 2R(e_1, w_3, e_1, w_3) \\
&+ 4R(e_1, e_3, w_1, w_3) + 4R(e_1, w_3, w_1, e_3) \\
&- 2(|w_1|^2 + |w_3|^2) R(e_1, e_3, e_1, e_3) \\
&- 2\langle w_1, w_2 \rangle R(e_1, e_3, e_2, e_3) - 2\langle w_1, w_4 \rangle R(e_1, e_3, e_4, e_3) \\
&- 2\langle w_3, w_2 \rangle R(e_1, e_3, e_2, e_3) - 2\langle w_3, w_4 \rangle R(e_1, e_3, e_1, e_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{d^2}{ds^2} R(v_1(s), v_4(s), v_1(s), v_4(s)) \mid_{s=0} \\
&= 2R(w_1, e_4, w_1, e_3) + 2R(e_1, w_4, e_1, w_4) \\
&+ 4R(e_1, e_4, w_1, w_4) + 4R(e_1, w_4, w_1, e_4) \\
&- 2(|w_1|^2 + |w_4|^2) R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&- 2\langle w_1, w_2 \rangle R(e_1, e_4, e_2, e_4) - 2\langle w_1, w_3 \rangle R(e_1, e_4, e_3, e_4) \\
&- 2\langle w_4, w_2 \rangle R(e_1, e_4, e_1, e_2) - 2\langle w_4, w_3 \rangle R(e_1, e_4, e_1, e_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \frac{d^2}{ds^2} R(v_2(s), v_3(s), v_2(s), v_3(s)) \mid_{s=0} \\
&= 2R(w_2, e_3, w_2, e_3) + 2R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\
&+ 4R(e_2, e_3, w_2, w_3) + 4R(e_2, w_3, w_2, e_3) \\
&- 2(|w_2|^2 + |w_3|^2) R(e_2, e_3, e_2, e_3) \\
&- 2\langle w_2, w_1 \rangle R(e_2, e_3, e_1, e_3) - 2\langle w_2, w_4 \rangle R(e_2, e_3, e_4, e_3) \\
&- 2\langle w_3, w_1 \rangle R(e_2, e_3, e_2, e_1) - 2\langle w_3, w_4 \rangle R(e_2, e_3, e_2, e_4),
\end{aligned}$$

$$J_4 = \frac{d^2}{ds^2} R(v_2(s), v_4(s), v_2(s), v_4(s)) \mid_{s=0}$$

$$\begin{aligned}
&= 2R(w_2,e_4,w_2,e_4)+2R(e_2,w_4,e_2,w_4)\\
&+ 4R(e_2,e_4,w_2,w_4)+4R(e_2,w_4,w_2,e_4)\\
&- 2(|w_2|^2+|w_4|^2)R(e_2,e_4,e_2,e_4)\\
&- 2\langle w_2,w_1\rangle R(e_2,e_4,e_1,e_4)-2\langle w_2,w_3\rangle R(e_2,e_4,e_3,e_4)\\
&- 2\langle w_4,w_1\rangle R(e_2,e_4,e_2,e_1)-2\langle w_4,w_3\rangle R(e_2,e_4,e_2,e_3)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_5 &= \frac{d^2}{ds^2}R(v_1(s),v_2(s),v_3(s),v_4(s))\,|_{s=0}\\
&= 4R(w_1,w_2,e_3,e_4)+4R(w_1,e_2,w_3,e_4)+4R(w_1,e_2,e_3,w_4)\\
&+ 4R(e_1,w_2,w_3,e_4)+4R(e_1,w_2,e_3,w_4)+4R(e_1,e_2,w_3,w_4)\\
&- 2(|w_1|^2+|w_2|^2+|w_3|^2+|w_4|^2)R(e_1,e_2,e_3,e_4)\\
&- 2\langle w_1,w_3\rangle R(e_3,e_2,e_3,e_4)-2\langle w_1,w_4\rangle R(e_4,e_2,e_3,e_4)\\
&- 2\langle w_2,w_3\rangle R(e_1,e_3,e_3,e_4)-2\langle w_2,w_4\rangle R(e_1,e_4,e_3,e_4)\\
&- 2\langle w_3,w_1\rangle R(e_1,e_2,e_1,e_4)-2\langle w_3,w_2\rangle R(e_1,e_2,e_2,e_4)\\
&- 2\langle w_4,w_1\rangle R(e_1,e_2,e_3,e_1)-2\langle w_4,w_2\rangle R(e_1,e_2,e_3,e_2).
\end{aligned}$$

Arrumandos e termos e dividindo a expressão por 2, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq R(w_1,e_3,w_1,e_3)+R(w_1,e_4,w_1,e_4)\\
&+ R(w_2,e_3,w_2,e_3)+R(w_2,e_4,w_2,e_4)\\
&+ R(e_1,w_3,e_1,w_3)+R(e_2,w_3,e_2,w_3)\\
&+ R(e_1,w_4,e_1,w_4)+R(e_2,w_4,e_2,w_4)\\
&+ 2R(e_1,e_3,w_1,w_3)+2R(e_1,w_3,w_1,e_3)-2R(w_1,e_2,w_3,e_4)\\
&+ 2R(e_1,e_4,w_1,w_4)+2R(e_1,w_4,w_1,e_4)-2R(w_1,e_2,e_3,w_4)\\
&+ 2R(e_2,e_3,w_2,w_3)+2R(e_2,w_3,w_2,e_3)-2R(e_1,w_2,w_3,e_4)\\
&+ 2R(e_2,e_4,w_2,w_4)+2R(e_2,w_4,w_2,e_4)-2R(e_1,w_2,e_3,w_4)\\
&- 2R(w_1,w_2,e_3,e_4)-2R(e_1,e_2,w_3,w_4)\\
&- |w_1|^2(R_{1313}+R_{1414}-R_{1234})-|w_2|^2(R_{2323}+R_{2424}-R_{1234})\\
&- |w_3|^2(R_{1313}+R_{2323}-R_{1234})-|w_4|^2(R_{1414}+R_{2424}-R_{1234})\\
&+ (\langle w_1,w_3\rangle-\langle w_2,w_4\rangle)(R_{1214}-R_{1232}+R_{3234}-R_{1434})\\
&- (\langle w_1,w_4\rangle+\langle w_2,w_3\rangle)(R_{1213}+R_{1242}+R_{3134}+R_{2434})
\end{aligned}$$

$$- \quad 2\langle w_1, w_2\rangle (R_{1323} + R_{1424}) - 2\langle w_3, w_4\rangle (R_{1314} + R_{2324}).$$

Trocando o referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ por $\{e_2, -e_1, e_4, -e_3\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & R(w_1, e_4, w_1, e_4) + R(w_1, e_3, w_1, e_3) \\
+\ & R(w_2, e_4, w_2, e_4) + R(w_2, e_3, w_2, e_3) \\
+\ & R(e_2, w_3, e_2, w_3) + R(e_1, w_3, e_1, w_3) \\
+\ & R(e_2, w_4, e_2, w_4) + R(e_1, w_4, e_1, w_4) \\
+\ & 2R(e_2, e_4, w_1, w_3) + 2R(e_2, w_3, w_1, e_4) - 2R(w_1, e_1, w_3, e_3) \\
-\ & 2R(e_2, e_3, w_1, w_4) - 2R(e_2, w_4, w_1, e_3) + 2R(w_1, e_1, e_4, w_4) \\
-\ & 2R(e_1, e_4, w_2, w_3) - 2R(e_1, w_3, w_2, e_4) + 2R(e_2, w_2, w_3, e_3) \\
+\ & 2R(e_1, e_3, w_2, w_4) + 2R(e_1, w_4, w_2, e_3) - 2R(e_2, w_2, e_4, w_4) \\
+\ & 2R(w_1, w_2, e_4, e_3) + 2R(e_2, e_1, w_3, w_4) \\
-\ & |w_1|^2 (R_{2424} + R_{2323} - R_{2143}) - |w_2|^2 (R_{1414} + R_{1313} - R_{2143}) \\
-\ & |w_3|^2 (R_{2424} + R_{1414} - R_{2143}) - |w_4|^2 (R_{2323} + R_{1313} - R_{2143}) \\
+\ & (\langle w_1, w_3\rangle - \langle w_2, w_4\rangle)(R_{2123} - R_{2141} + R_{4143} - R_{2343}) \\
+\ & (\langle w_1, w_4\rangle + \langle w_2, w_3\rangle)(R_{2124} + R_{2131} + R_{4243} + R_{1343}) \\
+\ & 2\langle w_1, w_2\rangle (R_{2414} + R_{2313}) + 2\langle w_3, w_4\rangle (R_{2423} + R_{1413}).
\end{aligned}$$

Tomando a média aritimética das duas expressões acima, lembrando do fato que $R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(w_1, e_4, w_1, e_4) \\
+\ & R(w_2, e_3, w_2, e_3) + R(w_2, e_4, w_2, e_4) \\
+\ & R(e_1, w_3, e_1, w_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\
+\ & R(e_1, w_4, e_1, w_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4) \\
+\ & R(e_1, e_3, w_1, w_3) + R(e_1, w_3, w_1, e_3) - R(w_1, e_2, w_3, e_4) \\
+\ & R(e_2, e_4, w_1, w_3) + R(e_2, w_3, w_1, e_4) - R(w_1, e_1, w_3, e_3) \\
+\ & R(e_1, e_4, w_1, w_4) + R(e_1, w_4, w_1, e_4) - R(w_1, e_2, e_3, w_4) \\
-\ & R(e_2, e_3, w_1, w_4) - R(e_2, w_4, w_1, e_3) + R(w_1, e_1, e_4, w_4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad R(e_2,e_3,w_2,w_3)+R(e_2,w_3,w_2,e_3)-R(e_1,w_2,w_3,e_4)\\
&- \quad R(e_1,e_4,w_2,w_3)-R(e_1,w_3,w_2,e_4)+R(e_2,w_2,w_3,e_3)\\
&+ \quad R(e_2,e_4,w_2,w_4)+R(e_2,w_4,w_2,e_4)-R(e_1,w_2,e_3,w_4)\\
&+ \quad R(e_1,e_3,w_2,w_4)+R(e_1,w_4,w_2,e_3)-R(e_2,w_2,e_4,w_4)\\
&- \quad 2R(w_1,w_2,e_3,e_4)-2R(e_1,e_2,w_3,w_4).
\end{aligned}
$$

Devido a primeira identidade de Bianchi, essa expressão se reduz a

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq & \quad R(w_1,e_3,w_1,e_3)+R(w_1,e_4,w_1,e_4)\\
+ & \quad R(w_2,e_3,w_2,e_3)+R(w_2,e_4,w_2,e_4)\\
+ & \quad R(e_1,w_3,e_1,w_3)+R(e_2,w_3,e_2,w_3)\\
+ & \quad R(e_1,w_4,e_1,w_4)+R(e_2,w_4,e_2,w_4)\\
- & \quad 2\left[R(e_3,w_1,e_1,w_3)+R(e_4,w_1,e_2,w_3)\right]\\
- & \quad 2\left[R(e_4,w_1,e_1,w_4)-R(e_3,w_1,e_2,w_4)\right]\\
+ & \quad 2\left[R(e_4,w_2,e_1,w_3)-R(e_3,w_2,e_2,w_3)\right]\\
- & \quad 2\left[R(e_3,w_2,e_1,w_4)+R(e_4,w_2,e_2,w_4)\right]\\
- & \quad 2R(w_1,w_2,e_3,e_4)-2R(e_1,e_2,w_3,w_4),
\end{aligned}
$$

que é o que queríamos demonstrar. □

Lema 3.6. *Temos*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p,q=5}^{n}R_{12pq}R_{34pq}\\
&\geq \sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})+\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q}).
\end{aligned}
$$

Demonstração. Seja W, a extensão $\{e_5,\cdots,e_n\}$. Definiremos as transformações lineares $A,B,C,D,E,F:W\to W$ por

$$
\begin{aligned}
\langle Ae_p,e_q\rangle &= R_{1p1q}+R_{2p2q},\\
\langle Be_p,e_q\rangle &= R_{3p3q}+R_{4p4q},\\
\langle Ce_p,e_q\rangle &= R_{3p1q}+R_{4p2q},\\
\langle De_p,e_q\rangle &= R_{4p1q}-R_{3p2q},\\
\langle Ee_p,e_q\rangle &= R_{12pq}
\end{aligned}
$$

e

$$\langle Fe_p, e_q \rangle \quad = \quad R_{34pq}.$$

Percebamos que A e B são simétricas enquanto que E e F são antisimétricas.

Para todos os vetores $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W$,

$$\begin{aligned}
& \langle Bw_1, w_1 \rangle + \langle Bw_2, w_2 \rangle + \langle Aw_3, w_3 \rangle + \langle Aw_4, w_4 \rangle \\
- & \; 2 \langle Cw_1, w_3 \rangle - 2 \langle Dw_1, w_4 \rangle - 2 \langle Dw_2, w_3 \rangle - 2 \langle Cw_2, w_4 \rangle \\
= & \; R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(w_1, e_4, w_1, e_4) \\
+ & \; R(w_2, e_3, w_2, e_3) + R(w_2, e_4, w_2, e_4) \\
+ & \; R(e_1, w_3, e_1, w_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\
+ & \; R(e_1, w_4, e_1, w_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4) \\
- & \; 2 \left[R(e_3, w_1, e_1, w_3) + R(e_4, w_1, e_2, w_3) \right] \\
- & \; 2 \left[R(e_4, w_1, e_1, w_4) - R(e_3, w_1, e_2, w_4) \right] \\
+ & \; 2 \left[R(e_4, w_2, e_1, w_3) - R(e_3, w_2, e_2, w_3) \right] \\
- & \; 2 \left[R(e_3, w_2, e_1, w_4) + R(e_4, w_2, e_2, w_4) \right] \\
- & \; 2R(w_1, w_2, e_3, e_4) - 2R(e_1, e_2, w_3, w_4) \\
\geq & \; 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

pelo Lema 3.5.

Definiremos agora

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} B & F & -C^* & -D^* \\ -F & B & D^* & -C^* \\ -C & D & A & E \\ -D & -C & -E & A \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -id \\ -id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & id & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue de (3.21) que $\mathbb{M}$ é positivo semi-definido. Isso implica que

$$0 \leq \frac{1}{4} tr(\mathbb{M}\mathbb{U}\mathbb{M}\mathbb{U}^*) = tr(AB) + tr(EF) - tr(C^2) - tr(D^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 \ \leq & \ \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ae_p, e_q \rangle \langle Be_p, e_q \rangle - \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ee_p, e_q \rangle \langle Fe_p, e_q \rangle \\ - & \ \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ce_p, e_q \rangle \langle Ce_q, e_p \rangle - \sum_{p,q=5}^{n} \langle De_p, e_q \rangle \langle De_q, e_p \rangle , \end{aligned}$$

donde substituindo as transformações lineares A, B, C, D, E e F, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=5}^{n} R_{12pq} R_{34pq} \\ \geq & \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}), \end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar. $\square$

Agora que já dispomos dos argumentos necessários, vamos nos ater a demonstração da Proposição 3.1.

Pela definição de $R^\sharp$, equação (2.18), temos

$$\begin{aligned} & R^\sharp_{1313} + R^\sharp_{1414} + R^\sharp_{2323} + R^\sharp_{2424} \\ = & \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p1q} R_{3p3q} - 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q} R_{3p1q} \\ + & \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p1q} R_{4p4q} - 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q} R_{4p1q} \\ + & \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{2p2q} R_{3p3q} - 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{2p3q} R_{3p2q} \\ + & \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{2p2q} R_{4p4q} - 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{2p4q} R_{4p2q} \\ = & \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) \\ - & \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q} R_{3p1q} - 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q} R_{4p1q} \\ - & \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{2p3q} R_{3p2q} - 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{2p4q} R_{4p2q} \end{aligned} \tag{3.22}$$

e

$$R^\sharp_{1342} + R^\sharp_{1423} \ = \ 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q} R_{3p2q} - 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q} R_{4p2q}$$

$$+ \quad 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{4p3q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{3p4q}. \tag{3.23}$$

Usando a primeira identidade de Bianchi, obtemos

$$\begin{aligned} 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{4p3q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{3p4q} &= -2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{34pq} \\ &= -\sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) em (3.23), temos

$$\begin{aligned} R^{\sharp}_{1342} + R^{\sharp}_{1423} &= 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q}R_{4p2q} \\ &- \sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Combinando (3.22) e (3.25), obtemos

$$\begin{aligned} & R^{\sharp}_{1313} + R^{\sharp}_{1414} + R^{\sharp}_{2323} + R^{\sharp}_{2424} + 2R^{\sharp}_{1342} + 2R^{\sharp}_{1423} \\ = \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) \\ - \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q}R_{3p1q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{4p1q} \\ - \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{2p3q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{2p4q}R_{4p2q} \\ + \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q}R_{4p2q} \\ + \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q}R_{4p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq}. \end{aligned}$$

Agrupando os termos de forma conveniente, temos

$$\begin{aligned} & R^{\sharp}_{1313} + R^{\sharp}_{1414} + R^{\sharp}_{2323} + R^{\sharp}_{2424} + 2R^{\sharp}_{1342} + 2R^{\sharp}_{1423} \\ = \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq} \\ - \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \end{aligned}$$

$$- \quad 2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q}). \tag{3.26}$$

Pelos Lemas 3.2, 3.4 e 3.6, temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p,q=1}^{n}R_{12pq}R_{34pq} \\
\geq \quad & \sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q}) \\
+ \quad & \sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q}).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Substituindo (3.27) em (3.26), obtemos

$$R^{\sharp}_{1313}+R^{\sharp}_{1414}+R^{\sharp}_{2323}+R^{\sharp}_{2424}+2R^{\sharp}_{1342}+2R^{\sharp}_{1423}\geq 0,$$

como queríamos demonstrar.

4 VARIEDADES DE EINSTEIN

4.1 Variedades de Einstein Compactas

Apresentemos a seguir duas Proposições devidas a Brendle[4].

Proposição 4.1. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana com $Ric_g = \rho g$. Então o tensor de curvatura R de (M^n, g) satisfaz*

$$(\Delta R) + Q(R) = 2\rho R. \tag{4.1}$$

Demonstração. Fazendo $Ric_g = \rho g$ em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla^2_{X,Z}\rho g\right)(Y,W) - \left(\nabla^2_{X,W}\rho g\right)(Y,Z) - \left(\nabla^2_{Y,Z}\rho g\right)(X,W) \\
&+ \left(\nabla^2_{Y,W}\rho g\right)(X,Z) = Q(R)(X,Y,Z,W) + (\Delta R)(X,Y,Z,W) \\
&- \sum_{i=1}^{n} \rho g(X,e_i)R(e_i,Y,Z,W) - \sum_{i=1}^{n} \rho g(Y,e_i)R(X,e_i,Z,W)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Mas, como

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z g)(Y,W) &= Z(g(Y,W)) - g(\nabla_Z Y, W) - g(Y, \nabla_Z W) \\
&= g(\nabla_Z Y, W) + g(Y, \nabla_Z W) - g(\nabla_Z Y, W) - g(Y, \nabla_Z W) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

todos os termos do lado esquerdo de (4.2) se anulam. Assim,

$$\begin{aligned}
&(\Delta R)(X,Y,Z,W) + Q(R)(X,Y,Z,W) \\
&= \rho \sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)R(e_i,Y,Z,W) + \rho \sum_{i=1}^{n} g(Y,e_i)R(X,e_i,Z,W)
\end{aligned}$$

Portanto

$$(\Delta R)(X,Y,Z,W) + Q(R)(X,Y,Z,W) = 2\rho R(X,Y,Z,W),$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 4.2. *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein compacta de dimensão $n \geq 4$ com curvatura isotrópica não negativa. Então o conjunto de todos os quadri-referenciais ortonormais $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} &R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4) + R(e_2, e_3, e_2, e_3) \\ &+R(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2R(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0 \end{aligned}$$

é invariante sob transporte paralelo.

Demonstração. Desde que (M^n, g) é uma variedade de Einstein, temos $Ric_g = \rho g$ para alguma constante ρ. Consequentemente as métricas $(1-2\rho t)g$ formam uma solução para o fluxo de Ricci com curvatura isotrópica não negativa, ou seja, uma solução para a equação $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}$. Assim pela Proposição 3.3, segue o resultado. □

4.2 Variedades de Einstein Compactas com Curvatura Isotrópica Positiva

Nesta seção apresentamos a idéia principal deste trabalho, ou seja, a demontração do primeira parte do teorema enunciado anteriormente que é é devido a Brendle[4]. Aqui usaremos praticamente todos os conhecimentos adquiridos até agora.

Teorema 4.1. *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein compacta de dimensão $n \geq 4$. Se M^n tem curvatura isotrópica positiva, então M^n tem curvatura seccional constante.*

Demonstração. Podemos assumir que $Ric_g = (n-1)g$, ou seja estamos tomando Ric_g positivo, pois o caso não positivo implicaria em curvatura escalar não positiva e como a curvatura isotrópica é positiva, isto contrariaria a Proposição 3.4. Pela proposição 4.1, temos

$$(\Delta R) + Q(R) = 2(n-1)R. \tag{4.3}$$

Defina o tensor S pondo

$$S_{ijkl} = R_{ijkl} - \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{4.4}$$

onde κ é uma constante positiva.

Observe que S é um tensor de curvatura algébrico, pois

$$\begin{aligned} S_{jikl} &= R_{jikl} - \kappa(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik}) \\ &= -R_{ijkl} + \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \\ &= -S_{ijkl}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{klij} &= R_{klij} - \kappa(g_{ki}g_{lj} - g_{kj}g_{li}) \\ &= R_{ijkl} - \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \\ &= S_{ijkl}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{ijkl} + S_{jikl} + S_{kijl} &= R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} - \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \\ &- \kappa(g_{ji}g_{kl} - g_{jl}g_{ki}) - \kappa(g_{kj}g_{il} - g_{kl}g_{ij}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Percebemos que aqui na definição de S_{ijkl}, estamos usando o fato de (M, g) ser compacta e ter curvatura isotrópica positiva para garantir a existência de κ positivo. Seja κ a maior constante com a propriedade de que S tenha curvatura isotrópica não negativa. Então existe um ponto $p \in M$ e um quadrireferencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$ tal que

$$\begin{aligned} & S(e_1, e_3, e_1, e_3) + S(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ + \ & S(e_2, e_3, e_2, e_3) + S(e_2, e_4, e_2, e_4) \\ - \ & 2S(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Assim segue da proposição 3.2 que

$$\begin{aligned} & Q(S)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(S)(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ + \ & Q(S)(e_2, e_3, e_2, e_3) + Q(S)(e_2, e_4, e_2, e_4) \\ - \ & 2Q(S)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Observemos que pela equação (2.16), temos

$$B(S)_{ijkl} = \sum_{p,q=1}^{n} S_{ijpq}S_{klpq} + 2\sum_{p,q=1}^{n} S_{ipkq}S_{jplq} - 2\sum_{p,q=1}^{n} S_{iplq}S_{jpkq}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left[R_{ijpq} - \kappa(g_{ip}g_{jq} - g_{iq}g_{jp})\right]\left[R_{klpq} - \kappa(g_{kp}g_{lq} - g_{kq}g_{lp})\right] \\
&+ 2\sum_{p,q=1}^{n} \left[R_{ipkq} - \kappa(g_{ik}g_{pq} - g_{iq}g_{pk})\right]\left[R_{jplq} - \kappa(g_{jl}g_{pq} - g_{jq}g_{lp})\right] \\
&- 2\sum_{p,q=1}^{n} \left[R_{iplq} - \kappa(g_{il}g_{pq} - g_{iq}g_{lp})\right]\left[R_{jpkq} - \kappa(g_{jk}g_{pq} - g_{jq}g_{pk})\right] \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}R_{klpq} + 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}R_{jplq} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}R_{jpkq} \\
&- \kappa\sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}(g_{kp}g_{lq} - g_{kq}g_{lp}) - \kappa\sum_{p,q=1}^{n} R_{klpq}(g_{ip}g_{jq} - g_{iq}g_{jp}) \\
&- 2\kappa\sum_{p,q=1}^{n} R_{jplq}(g_{ik}g_{pq} - g_{iq}g_{pk}) - 2\kappa\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}(g_{jl}g_{pq} - g_{jq}g_{lp}) \\
&+ 2\kappa\sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}(g_{jk}g_{pq} - g_{jq}g_{pk}) + 2\kappa\sum_{p,q=1}^{n} R_{jpkq}(g_{il}g_{pq} - g_{iq}g_{lp}) \\
&+ \kappa^2\sum_{p,q=1}^{n} (g_{kp}g_{lq} - g_{kq}g_{lp})(g_{ip}g_{jq} - g_{iq}g_{jp}) \\
&+ 2\kappa^2\sum_{p,q=1}^{n} (g_{ik}g_{pq} - g_{iq}g_{pk})(g_{jl}g_{pq} - g_{jq}g_{lp}) \\
&- 2\kappa^2\sum_{p,q=1}^{n} (g_{jk}g_{pq} - g_{jq}g_{pk})(g_{il}g_{pq} - g_{iq}g_{lp}).
\end{aligned}
$$

Agrupando os termos e identificando o Ric, temos

$$
\begin{aligned}
B(S)_{ijkl} &= B(R)_{ijkl} - \kappa\left(R_{ijkl} - R_{ijlk} + R_{klij} - R_{klji}\right) \\
&- 2\kappa\left(Ric_{jl}g_{ik} - R_{jkli} + Ric_{ik}g_{jl} - R_{ilkj}\right) \\
&+ 2\kappa\left(Ric_{il}g_{jk} - R_{iklj} + Ric_{jk}g_{il} - R_{jlki}\right) \\
&+ \kappa^2\sum_{p,q=1}^{n} \left(g_{kp}g_{lq}g_{ip}g_{jq} - g_{kp}g_{lq}g_{iq}g_{jp} - g_{kq}g_{lp}g_{ip}g_{jq} + g_{kq}g_{lp}g_{iq}g_{jp}\right) \\
&+ 2\kappa^2\sum_{p,q=1}^{n} \left(g_{ik}g_{pq}g_{jl}g_{pq} - g_{ik}g_{pq}g_{jq}g_{lp} - g_{iq}g_{pk}g_{jl}g_{pq} + g_{iq}g_{pk}g_{jq}g_{lp}\right) \\
&- 2\kappa^2\sum_{p,q=1}^{n} \left(g_{jk}g_{pq}g_{il}g_{pq} - g_{jk}g_{pq}g_{iq}g_{lp} - g_{jq}g_{pk}g_{il}g_{pq} + g_{jq}g_{pk}g_{iq}g_{lp}\right).
\end{aligned}
$$

Identificando $Q(R)_{ijkl}$ e substituindo $Ric = (n-1)g$, obtemos

$$
B(S)_{ijkl} = B(R)_{ijkl} - \kappa\left(4R_{ijkl} + 4R_{iljk} + 4R_{iklj}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 2\kappa\left(Ric_{jl}g_{ik} + Ric_{ik}g_{jl} - Ric_{il}g_{jk} - Ric_{jk}g_{il}\right)\\
&+ \quad \kappa^2\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} - g_{il}g_{jk} + g_{ik}g_{jl}\right)\\
&+ \quad 2\kappa^2\left(ng_{ik}g_{jl} - g_{ik}g_{jl} - g_{ik}g_{jl} - ng_{jk}g_{il} + g_{jk}g_{il} + g_{jk}g_{il}\right)\\
&= \quad Q(R)_{ijkl} + 2(n-1)\kappa^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\\
&- \quad 2\kappa(Ric_{ik}g_{jl} - Ric_{il}g_{jk} - Ric_{jk}g_{il} + Ric_{jl}g_{ik})\\
&= \quad Q(R)_{ijkl} + 2(n-1)\kappa^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\\
&- \quad 2\kappa\left[(n-1)g_{ik}g_{jl} - (n-1)g_{il}g_{jk} - (n-1)g_{jk}g_{il} + (n-1)g_{jl}g_{ik}\right]\\
&= \quad Q(R)_{ijkl} + 2(n-1)\kappa^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\\
&- \quad 2\kappa(n-1)(2g_{ik}g_{jl} - 2g_{il}g_{jk})\\
&= \quad Q(R)_{ijkl} + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Pela equação (4.7), temos

$$
\begin{aligned}
Q(S)(e_1,e_3,e_1,e_3) &= Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)(g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31})\\
&= Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(S)(e_1,e_4,e_1,e_4) &= Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)(g_{11}g_{44} - g_{14}g_{41})\\
&= Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(S)(e_2,e_3,e_2,e_3) &= Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})\\
&= Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(S)(e_2,e_4,e_2,e_4) &= Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)(g_{22}g_{44} - g_{24}g_{42})\\
&= Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
Q(S)(e_1,e_2,e_3,e_4) &= Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4) + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)(g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23})\\
&= Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\quad Q(S)(e_1,e_3,e_1,e_3) + Q(S)(e_1,e_4,e_1,e_4)\\
&+ \quad Q(S)(e_2,e_3,e_2,e_3) + Q(S)(e_2,e_4,e_2,e_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 2Q(S)(e_1, e_2, e_3, e_4)\\
&= \quad Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+ \quad Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&- \quad 2Q(R)(e_1, e_2, e_3, e_4) + 8(n-1)\kappa(\kappa-2) \geq 0. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

devido a (4.6).

Como $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ realiza o mínimo da curvatura isotrópica de (M, g), temos

$$
\begin{aligned}
& \left(\nabla^2_{v,v} R\right)(e_1, e_3, e_1, e_3) + \left(\nabla^2_{v,v} R\right)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
+ \quad & \left(\nabla^2_{v,v} R\right)(e_2, e_3, e_2, e_3) + \left(\nabla^2_{v,v} R\right)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
- \quad & 2\left(\nabla^2_{v,v} R\right)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0.
\end{aligned}
$$

para todos vetores $v \in T_pM$.

Tomando o traço sobre $v \in T_pM$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,e_k} R\right)(e_1, e_3, e_1, e_3) + \left(\sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,e_k} R\right)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
+ \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,e_k} R\right)(e_2, e_3, e_2, e_3) + \left(\sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,e_k} R\right)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
- \quad & 2\left(\sum_{k=1}^{n} \nabla^2_{e_k,e_k} R\right)(e_1, e_2, e_3, e_4)\\
= \quad & (\Delta R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + (\Delta R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
+ \quad & (\Delta R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + (\Delta R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
- \quad & 2(\Delta R)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Somando as expressões (4.8) e (4.9), temos

$$
\begin{aligned}
& Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
+ \quad & Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
- \quad & 2Q(R)(e_1, e_2, e_3, e_4) + (\Delta R)(e_1, e_3, e_1, e_3)\\
+ \quad & (\Delta R)(e_1, e_4, e_1, e_4) + (\Delta R)(e_2, e_3, e_2, e_3)\\
+ \quad & (\Delta R)(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2(\Delta R)(e_1, e_2, e_3, e_4)\\
+ \quad & 8(n-1)\kappa(\kappa-2) \geq 0.
\end{aligned}
$$

Devido à expressão (4.3), essa última se reduz a

$$\begin{aligned} & 2(n-1)R(e_1,e_3,e_1,e_3)+2(n-1)R(e_1,e_4,e_1,e_4) \\ + \quad & 2(n-1)R(e_2,e_3,e_2,e_3)+2(n-1)R(e_2,e_4,e_2,e_4) \\ - \quad & 4(n-1)R(e_1,e_2,e_3,e_4)+8(n-1)\kappa(\kappa-2) \geq 0, \end{aligned}$$

que dividindo por $2(n-1)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & R(e_1,e_3,e_1,e_3)+R(e_1,e_4,e_1,e_4) \\ + \quad & R(e_2,e_3,e_2,e_3)+R(e_2,e_4,e_2,e_4) \\ - \quad & 2R(e_1,e_2,e_3,e_4)+4\kappa(\kappa-2) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pela expressão (4.4), temos

$$\begin{aligned} S(e_1,e_3,e_1,e_3) &= R(e_1,e_3,e_1,e_3-\kappa(g_{11}g_{33}-g_{13}g_{31}) \\ &= R(e_1,e_3,e_1,e_3-\kappa, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(e_1,e_4,e_1,e_4) &= R(e_1,e_4,e_1,e_4)-\kappa(g_{11}g_{44}-g_{14}g_{41}) \\ &= R(e_1,e_4,e_1,e_4)-\kappa, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(e_2,e_3,e_2,e_3) &= R(e_2,e_3,e_2,e_3)-\kappa(g_{22}g_{33}-g_{23}g_{32}) \\ &= R(e_2,e_3,e_2,e_3)-\kappa, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(e_2,e_4,e_2,e_4) &= R(e_2,e_4,e_2,e_4)-\kappa(g_{22}g_{44}-g_{24}g_{42}) \\ &= R(e_2,e_4,e_2,e_4)-\kappa \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(e_1,e_2,e_3,e_4) &= R(e_1,e_2,e_3,e_4)-\kappa(g_{13}g_{24}-g_{14}g_{23}) \\ &= R(e_1,e_2,e_3,e_4). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & S(e_1,e_3,e_1,e_3)+S(e_1,e_4,e_1,e_4) \\ + \quad & S(e_2,e_3,e_2,e_3)+S(e_2,e_4,e_2,e_4) \\ - \quad & 2S(e_1,e_2,e_3,e_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= R(e_1,e_3,e_1,e_3) + R(e_1,e_4,e_1,e_4) \\ &+ R(e_2,e_3,e_2,e_3) + R(e_2,e_4,e_2,e_4) \\ &- 2R(e_1,e_2,e_3,e_4) - 4\kappa \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

devido a (4.5).

Substituindo a expressão (4.11) em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} 4\kappa + 4\kappa(\kappa - 2) &\geq 0 \\ 4\kappa(\kappa - 1) &\geq 0, \end{aligned}$$

o que implica que $\kappa \geq 1$, pois κ é positivo.

Agora, tomemos o traço em (4.4), obtendo

$$\begin{aligned} S_{ik} &= R_{ik} - \kappa(n-1)g_{ik} \\ &= (n-1)g_{ik} - \kappa(n-1)g_{ik} \\ &= (n-1)(1-\kappa)g_{ik}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Tomemos o traço de (4.12), para obter

$$scalS = n(n-1)(1-\kappa). \tag{4.13}$$

Como $\kappa \geq 1$, $scalS \leq 0$. Portanto, S tem curvatura isotrópica não negativa e curvatura escalar não positiva. Assim, pela proposição 3.4, a sua curvatura escalar é zero.

Fazendo $scalS = 0$ em (4.13), obtemos $\kappa = 1$, que substituido em (4.12), nos dá $S_{ik} = 0$. Assim o tensor de *Ricci* de S é zero e novamente pela proposição 3.4, o tensor S se anula.

Fazendo $S = 0$ em (4.4), temos

$$R_{ijkl} = \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Assim, a curvatura seccional de (M^n, g) é constante igual a κ pelo corolário 2.1. $\square$

5 CONCLUSÃO

Durante a realização deste trabalho, foi possível enriquecer conhecimentos de geometria riemanniana. Adquirimos conhecimentos desde a idéia de variedade a espaços de curvatura constante.

Para demonstrar o teorema principal, tivemos que demonstrar outros conhecimentos a respeito de tensores de curvatura e curvatura isotrópica.

Definimos e exemplificamos as variedades de Einstein como aquelas em que o tensor de *Ricci* é proporcional ao tensor métrico. Demonstramos que se uma variedade de Einstein compacta tem curvatura isotrópiva positiva, então a curvatura seccional é constante.

A curvatura é uma constante positiva, donde concluímos que toda variedade de Einstein compacta de dimensão maior que três com curvatura isotrópica positiva é homeomorfa à esfera.

REFERÊNCIAS

[1] M. Berger. Sur quelques varietes d'einstein compacts. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 53:89–95, 1961.

[2] M. Berger. Sur les varietes d'einstein compacts. *Comptes Rendus de la IIIe Reunion du Groupement des Mathematiciens d'Expression Latine (Namur 1965), Librairie Universitaire, Louvain*, pages 35–55, 1966.

[3] A.L. Besse. *Einstein Manifolds.* 1987.

[4] S. Brendle. Einstein manifolds with nonnegative isotropic curvature are locally symmetric. *Duke Math. J.*, 151:1–21, 2009.

[5] S. Brendle and R. Schoen. Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 22:287–307, 2009.

[6] S. Brendle and R.S. Schoen. Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures. *Acta. Math.*, 200:1–13, 2008.

[7] Simon Brendle. *Riici Flow and the Sphere Theorem.* (Graduate studies in mathematics;v. 111), 2010.

[8] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Impa, 2008.

[9] G. Gursky and C. LeBrum. On einstein manifolds of positive sectional curvature. *Amnn. Global Anal. Geom.*, 17:315–328, 1999.

[10] M. J. Micallef and J. D. Moore. Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes. *Annals of Mathematics*, 127:199–227, 1988.

[11] Wang M. Micallef, M. J. Metrics with nonnegattive isotropic curvature. *Duke Math. J.*, 72, no 3:649–672, 1993.

[12] H. Nguyen. Isotropic curvature and the ricci flow. *Internat. Math. Res. Notices(to appear).*

[13] P. Petersen. *Riemannian Geometry.* Springer, 2006.

[14] H. Seshadri. Manifolds with nonegattive isotropic curvature. *Comm. Anal Geom(to apper).*

[15] S. Tachibana. A theorem on riemannian manifolds of positive curvature operator. *Proc. Japan Acad.*, 50:301–302, 1974.

[16] D. Yang. Rigitidy of einstein 4-manifolds with positive curvature. *Invent. Math.*, 142:435–450, 2000.