



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Davi Soares Dantas

**ESTRUTURAS DE CONFINAMENTO DE BAIXA
DIMENSIONALIDADE EM SUPERFÍCIES DE HÉLIO
LÍQUIDO SUSPENSAS**

Fortaleza – CE

16 de julho de 2012

Davi Soares Dantas

**ESTRUTURAS DE CONFINAMENTO DE BAIXA
DIMENSIONALIDADE EM SUPERFÍCIES DE HÉLIO
LÍQUIDO SUSPENSAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador:

Prof. Dr. Andrey Chaves

Fortaleza – CE

16 de julho de 2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

D211e Dantas, Davi Soares.

Estruturas de confinamento de baixa dimensionalidade em superfícies de hélio líquido suspensas / Davi Soares Dantas. – Fortaleza, 2012.

71f. : il. algumas color., enc.; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2012.

Orientador: Prof. Dr. Andrey Chaves.

1. Física de Superfície. 2. Hélio Líquido. 3. Mecânica Quântica. I. Título.

CDD 530.417

DAVI SOARES DANTAS

**ESTRUTURAS DE CONFINAMENTO DE BAIXA DIMENSIONALIDADE EM
SUPERFÍCIEIS DE HÉLIO LÍQUIDO SUSPENSO**

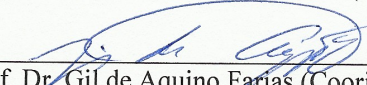
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 16 / 07 / 2012 .

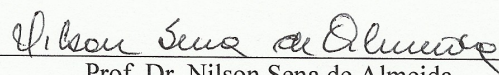
BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Andrey Chaves (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. Gil de Aquino Farias (Coorientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. Nilson Sena de Almeida

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Este trabalho é dedicado ao meu pai, o homem mais inteligente e honrado que já conheci.

Agradecimentos

Aos professores Andrey Chaves, Gil de Aquino Farias e Antônio Carlos Alonge Ramos pela confiança depositada em mim durante a realização desse trabalho e pelo incentivo, simpatia e presteza no auxílio às atividades e discussões sobre o andamento e normatização desta Dissertação para a obtenção do título de Mestre em Física.

Ao Professor Nilson Sena de Almeida pelos seus ensinamentos transmitidos durante o curso de Graduação em Física na UFC e por ter aceito o convite de participação da banca examinadora.

Agradeço também a todos meus amigos e alunos do curso de graduação e pós-graduação, César Menezes, Daniel Marchesi, Diego Lucena, Diego Rabelo, Diego Ximenes, Eduardo Araujo, Heitor Credidio, Hygor Piaget, Leandro Jader, Levi Leite, Rafael Alencar, Rilder Pires, Saulo Dantas e Vagner Bessa pelas horas de estudo em grupo e pelo conhecimento compartilhado.

Em especial, agradeço à minha mãe, Lúcia, ao meu irmão, Bruno e à minha noiva Lorraine Nogueira Lima por estarem sempre presentes em momentos difíceis e pelo apoio, que foi fundamental para realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à pessoa que foi mais importante para realização deste trabalho, deixando sua lição de luta e perseverança pela vida, certamente, meu melhor amigo, meu pai, Sebastião Silveira Dantas.

*“A vida é como andar de bicicleta. Para manter o equilíbrio, é preciso
se manter em movimento”*

Albert Einstein

Resumo

O sistema de elétrons na superfície de hélio líquido é considerado um dos melhores objetos na investigação de princípios fundamentais da Física de baixa dimensionalidade, uma vez que estes não apresentam heterogeneidades e impurezas geralmente encontradas em heteroestruturas semicondutoras. Além disso, espera-se que estes sistemas tenham uma aplicação tecnológica futura como *bits* quânticos, que são fundamentais na construção de blocos dos futuros computadores quânticos. Geralmente, as estruturas de confinamento de baixa dimensionalidade sugeridas para elétrons na superfície de hélio líquido na literatura são baseadas em superfícies planas, onde o confinamento lateral é induzido por um potencial externo controlado por eletrodos.

No presente trabalho, é sugerida uma forma alternativa de produzir o confinamento lateral em superfícies de hélio líquido, isto é, é demonstrado que a forma da superfície pode ser projetada para produzir anéis, fios e pontos quânticos apenas variando a forma da cavidade do substrato no qual o hélio líquido se encontra suspenso. A superfície foi calculada para quatro formas diferentes de cavidade: i) uma cavidade cilíndrica, gerando um ponto quântico simples; ii) uma cavidade em forma de anel circular, gerando um anel quântico; iii) duas cavidades em forma de canais que se interceptam perpendicularmente, formando um ponto quântico simples no ponto de interceptação; e iv) duas cavidades retangulares conectadas por um canal estreito, gerando um ponto duplo. O elétron é então depositado sobre a superfície e confinado a se mover em cada superfície devido à ação de um campo elétrico externo.

Os resultados apresentados aqui mostram que os níveis de energia para estes sistemas podem ser alterados através da variação do campo elétrico e do banho de hélio, que são facilmente ajustáveis. O efeito de um campo magnético externo é também investigado em um destes sistemas.

Abstract

The system of electrons on liquid helium (EoH) is one of the most ideal objects for investigating the fundamental principles of the physics of low dimensionality, since they do not have the inhomogeneities and impurities generally found on semiconductors. Besides, these systems are expected to have future technological applications as quantum bits, which are of fundamental importance as building blocks of future quantum computers. Usually, the low-dimensional confinements structures for EoH suggested in the literature are based on a planar surface, where the lateral confinement is induced by an external potential controlled by electrodes.

In this work, we suggest an alternative way to produce lateral confinement in liquid helium surfaces, namely, we demonstrate that the shape of the surface can be designed to produce single and double quantum dots by adjusting the shape of a cavity in the substrate. The surface was calculated for four different shapes of substrate cavity: i) a cylindrical cavity, generating a single quantum dot; ii) a ring-shaped cavity, generating a quantum ring; iii) two cubic cavities connected by a channel, creating a coupled double-dot structure; and iv) two channel-shaped cavities that intersect perpendicularly to each other, where a single dot is formed in the intersection point. The electron is then deposited and confined to move on each surface by an external electric field.

Our results show that the electron energy levels in these systems can be tuned by varying the electric field and the bulk level, which are easily adjustably. The effect of an external magnetic field on the energy spectrum in one of these systems is also investigated.

Sumário

1	Introdução	p. 14
1.1	Elétrons em um sistema <i>bulk</i> de hélio líquido sob campo elétrico externo . . .	p. 15
1.2	Tempo de Relaxação e Computadores Quânticos	p. 18
1.3	Confinamento lateral e as nanoestruturas de hélio líquido	p. 19
2	Hélio líquido	p. 23
2.1	Propriedades	p. 23
2.2	Condensado de Bose-Einstein e o modelo dos dois fluidos	p. 26
2.3	Teoria de Landau para a superfluidez	p. 27
2.3.1	Condição de Landau para superfluidez	p. 29
2.3.2	Estatística das excitações e o modelo dos dois fluidos	p. 31
2.4	Fenômeno de Superfície e o filme de hélio	p. 32
2.4.1	Filmes finos e filmes suspensos	p. 33
3	Perfis das superfícies do filme de hélio líquido para as diferentes cavidades	p. 35
3.1	Equação diferencial para a superfície	p. 36
3.2	Resultados para os perfis	p. 39
3.2.1	Resultados para a cavidade cilíndrica	p. 40
3.2.2	Resultados para a cavidade em forma de casca cilíndrica	p. 42

3.2.3	Substrato com duas cavidades retangulares ligadas por uma cavidade estreita	p. 45
3.2.4	Substratos com cavidades cruzadas	p. 47
4	Elétrons confinados em superfícies de hélio	p. 50
4.1	Hamiltoniano	p. 50
4.2	Ponto Quântico	p. 52
4.2.1	Solução da Equação de Schroedinger para o ponto quântico	p. 52
4.2.2	Efeito Zeeman	p. 54
4.2.3	Resultados	p. 55
4.3	Ponto quântico duplo	p. 58
4.4	Múltiplos pontos quânticos	p. 63
5	Conclusões	p. 66
	Referências Bibliográficas	p. 68

Lista de Figuras

- 1.1 Imagem ilustrativa de um gás de elétrons na superfície de hélio líquido sob a ação de um campo elétrico externo perpendicular à superfície de hélio. p. 15
- 1.2 Perfil do potencial e a função de onda do estado fundamental de um elétron depositado sobre a superfície de hélio líquido [8]. p. 16
- 1.3 Transição energética entre o estado fundamental e o primeiro (1-2) e o segundo (1-3) estados excitados, respectivamente, como função do campo elétrico externo perpendicular à superfície. As curvas são apresentadas para duas temperaturas diferentes, $T = 1.0$ K (linha sólida) e $T = 1.3$ K (linha pontilhada). Os símbolos representam os resultados experimentais, $T = 1.0$ K (triângulos) e $T = 1.2$ K (círculos) [9]. p. 17
- 1.4 Modelo da amostra experimental de um microeletrodo submerso no hélio líquido a uma profundidade $h = 0.5 \mu\text{m}$. O elétron está submetido a um campo elétrico externo, gerado pelo eletrodo e por uma das placas de um capacitor. O potencial $U_{||}$ gerado é parabólico próximo do mínimo [22]. p. 19
- 1.5 Modelo da amostra experimental: seção transversal do substrato que apresenta uma cavidade circular, com o hélio líquido suspenso. H e h representam as profundidades da superfície livre de hélio líquido e da cavidade do substrato, respectivamente. p. 19
- 1.6 Modelo da geometria das quatro cavidades investigadas nesse trabalho: (a) uma cavidade circular de raio R ; (b) uma cavidade em forma de anel circular com raio interno $r_<$ e raio externo $r_>$; (c) a interseção entre dois canais perpendiculares de largura w ; (d) duas cavidades conectadas por um canal estreito. p. 21

2.1	Densidade do hélio líquido sob a pressão de vapor saturado [42]	p. 24
2.2	Coeficiente de expansão do hélio líquido sob a pressão de vapor saturado [43]	p. 25
2.3	Calor específico do hélio líquido sob a pressão de vapor saturado [44]	p. 25
2.4	Espectro de excitação do hélio superfluido sugerido por Landau em 1947[55]	p. 29
2.5	Espectro de excitação do hélio superfluido obtido através do experimento de espalhamento de nêutron[57]	p. 29
3.1	Modelo da geometria das quatro cavidades investigadas neste trabalho: (a) uma cavidade circular de raio R ; (b) uma cavidade em forma de anel circular com raio interno $r_<$ e raio externo $r_>$; (c) a interseção entre dois canais perpendiculares de largura w ; (d) duas cavidades conectadas por um canal estreito.	p. 39
3.2	(a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade cilíndrica para diversos valores de raio R : 300 (preto, linha sólida), 500 (vermelho, linha tracejada), 700(azul, linha pontilhada), 900(verde, linha tracejada-pontilhada) e 1500 nm (amarelo, linha tracejada-pontilhada-pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi $h = 3000$ nm e o banho de hélio tomado foi $H = 10$ cm. (b) Ampliação dos resultados obtidos em (a) para $R = 300$ e 500 nm, com <i>fits</i> polinomiais de segunda ordem para esses resultados representados por símbolos.	p. 41
3.3	Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade em forma de casca cilíndrica, com raio interno $r_< = 20$ nm, para diversos valores de raio externo $r_>$: 220 (linha pontilhada), 320 (linha tracejada), 420 (linha tracejada-pontilhada), 520 (linha tracejada-pontilhada-pontilhada), 820 nm (linha tracejada-tracejada-pontilhada) e 1020 nm (linha sólida). A profundidade da cavidade considerada foi $h = 3000$ nm e o banho de hélio tomado foi $H = 1$ cm.	p. 42
3.4	Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade em forma de casca cilíndrica, com raio interno $r_< = 20$ nm e $r_> = 1020$, para diversos valores de banho de hélio, H : 3(linha pontilhada), 6 (linha tracejada) e 9 cm (linha sólida). Os símbolos representam a tentativa de aproximar as respectivas curvas por parábolas. A profundidade da cavidade considerada foi $h = 3000$ nm e o banho de hélio tomado foi $H = 1$ cm.	p. 43

- 3.5 (a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade em forma de casca cilíndrica para diversos valores de raio interno r_c : 10 (sólida), 50 (tracejada-pontilhada), 150 (tracejada) e 10000 nm (pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi de $h = 3000$ nm e o banho de hélio tomado foi $H = 1$ cm. (b) Ampliação das curvas apresentadas no item (a) para os raios internos 10 e 10^4 nm. Em todos os casos a espessura da cavidade foi mantida fixa, valendo $dR = 100$ nm p. 44
- 3.6 Substrato com duas cavidades retangulares conectadas por um canal estreito. As cavidades retangulares apresentam dimensões $S = 450$ nm e $L = 400$ nm. Já a canaleta apresenta um comprimento dado por $l = 100$ nm e uma largura dada por $S - 2s$, com $s = 100$ nm quando não especificado. p. 45
- 3.7 Resultado numérico para a superfície de hélio líquido suspensa sobre duas cavidades retangulares ligadas por uma canaleta, com banho de hélio $H = 6$ cm. As cores dão a noção de profundidade da superfície $\xi(x,y)$. A cor vermelha representa valores mais elevados da superfície, isto é, mais próximos de h e a cor azul representa as regiões onde o hélio líquido é mais profundo. p. 46
- 3.8 Perfis da superfície de hélio líquido para duas cavidades retangulares conectadas, considerando três valores de banho de hélio H : 3 (linha pontilhada), 6 (linha tracejada) e 9 cm (linha sólida). p. 46
- 3.9 Altura da barreira de hélio líquido para diferentes valores da largura da cavidade, definida por $S - 2s$ p. 47
- 3.10 Substrato com duas cavidades em formas de canais que se interceptam perpendicularmente. As cavidades apresentam dimensões $w = 150$ nm e $S = 500$ nm, quando não especificadas. p. 48
- 3.11 Resultado numérico para a superfície de hélio líquido suspensa sobre um substrato que apresenta cavidades em forma de canais que se interceptam perpendicularmente, com banho de hélio $H = 6$ cm. As cores dão a noção de profundidade da superfície $\xi(x,y)$. A cor vermelha representa valores mais elevados da superfície, isto é, mais próximos de h e a cor azul representa as regiões onde o hélio líquido é mais profundo. p. 48
- 3.12 Perfis da superfície de hélio líquido para duas cavidades que se cruzam ortogonalmente, considerando três valores de banho de hélio H : 3 (linha pontilhada), 6 (linha tracejada) e 9 cm (linha sólida). p. 49

- 3.13 Altura da barreira de hélio líquido para diferentes valores de largura da cavidade, w p. 49
- 4.1 Espectro de energia da parte radial do centro de massa como função do campo magnético para dois elétrons interagentes em um ponto quântico parabólico com concavidade $a = \sigma gH/4\alpha = 9.38 \times 10^{-6} \text{ \AA}^{-1}$ que corresponde a um ponto quântico de hélio líquido com banho de hélio $H = 10$ cm e profundidade da cavidade $h = 3000$ nm. O campo elétrico externo utilizado foi de $E = 3$ kV/cm. p. 56
- 4.2 Espectro de energia total do sistema como função do campo magnético para dois elétrons interagentes em um ponto quântico parabólico com concavidade $a = \sigma gH/4\alpha = 9.38 \times 10^{-6} \text{ \AA}^{-1}$, que corresponde a um ponto quântico de hélio líquido com banho de hélio $H = 10$ cm e profundidade da cavidade $h = 3000$ nm. O campo elétrico externo utilizado foi de $E = 3$ kV/cm. p. 57
- 4.3 Função de onda do estado fundamental (Vermelho) e potencial efetivo (Preto) para um elétron, considerando que o segundo elétron esteja na origem. Resultados obtidos para um banho de hélio, $H = 10$ cm. p. 58
- 4.4 (a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre duas cavidades retangulares ligados por um canal para diversos valores banho de hélio H : 1 (sólida), 3(tracejada), 6(tracejada-pontilhada) e 9 cm(pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi de $h = 3000$ nm e o campo elétrico tomado foi $F = 3.0$ kV/cm. (b) Perfis gerados a partir de uma variação do campo elétrico F : 0.5 (sólida), 1(tracejada), 2(tracejada-pontilhada) e 3 cm(pontilhada), com $H = 6$ cm. p. 59
- 4.5 (a) Diferenças energéticas entres os estados quase degenerados para diversos valores de banho de hélio: E_{12} (quadrados), E_{34} (triângulos) e E_{56} (círculos), com $F = 0.5$ kV/cm. (b) Resultados similares para um campo elétrico externo $F = 3.0$ kV/cm são também apresentados. As curvas são apenas um guia, para facilitar a visualização dos resultados. p. 60
- 4.6 (a) Diferenças energéticas entres os estados não degenerados e a barreira de potencial, considerando diversos valores de campo elétrico: E_{1B} (triângulos), E_{3B} (quadrados) e E_{5B} (círculos), com $H = 3$ cm. (b) Resultados similares para um banho de hélio $H = 9$ cm são também apresentados. As curvas são apenas um guia, para facilitar a visualização dos resultados. p. 61

- 4.7 (a) Diferenças energéticas entres os estados não degenerados e a barreira de potencial, considerando diversos valores de banho de hélio: E_{1B} (triângulos), E_{3B} (quadrados) e E_{5B} (círculos), com $F = 0.5$ kV/cm. (b) Resultados similares para um campo elétrico $F = 3.0$ kV/cm são também apresentados. . . . p. 62
- 4.8 (a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre duas cavidades em forma de canais que se interceptam ortogonalmente para diversos valores de banho de hélio H : 1 (sólida), 3(tracejada), 6(tracejada-pontilhada) e 9 cm(pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi de $h = 3000$ nm e o campo elétrico tomado foi $F = 3.0$ kV/cm. (b) Perfis gerados a partir de uma variação do campo elétrico F : 0.5 (sólida), 1(tracejada), 2(tracejada-pontilhada) e 3 cm(pontilhada), com $H = 6$ cm. p. 63
- 4.9 (a) Energia da barreira de potencial e as energias permitidas para a calha dupla, variando com o banho de hélio: E_B (linha sólida), E_1 (círculos) e E_2 (quadrados), E_3 (triângulos), E_4 (estrelas) com $F = 3.0$ kV/cm. (b) Diferenças energéticas entre as energias acessíveis para a calha dupla, variando com o banho de hélio: E_{1B} (linha sólida), E_{12} (círculos) e E_{13} (quadrados) e E_{14} (triângulos), com $F = 3.0$ kV/cm. p. 64
- 4.10 (a) Energia da barreira de potencial e as energias permitidas para a calha dupla, variando com o campo elétrico: E_B (linha sólida), E_1 (círculos) e E_2 (quadrados), E_3 (triângulos), E_4 (estrelas) com $H = 3$ cm. (b) Diferenças energéticas entre as energias acessíveis para a calha dupla, variando com o banho de hélio: E_{1B} (linha sólida), E_{12} (círculos) e E_{13} (quadrados) e E_{14} (triângulos), com $H = 9$ cm. p. 65

Capítulo 1

Introdução

O hélio pode ser encontrado na natureza como um de três isótopos, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ e ${}^6\text{He}$, o último possuindo uma meia vida de apenas 0.82 segundos, não sendo de interesse estudá-lo aqui. Os outros dois isótopos possuem os dois menores pontos de ebulição e solidificação conhecidos dentre todas as outras substâncias, não apresentando ponto triplo e sendo solidificados apenas sob a aplicação de pressões elevadas [1].

Com trabalhos pioneiros em técnicas de refrigeração, Heike Kamerlingh Onnes, em 1908 [2], foi o primeiro a liquefazer o hélio ao atingir a temperatura de 5,2 K. Apesar das características incomuns exibidas pelo hélio líquido logo em sua descoberta, as pesquisas sobre as propriedades deste foram deixadas de lado, provavelmente devido à descoberta da supercondutividade aproximadamente na mesma época [3]. Em 1938 com a descoberta da superfluidade realizada por Kaptisza [4], fase exibida pelo hélio no seu estado líquido, onde apresenta a capacidade de fluir por capilares e fendas sem dissipação de energia, as pesquisas sobre essa substância peculiar em sua fase líquida foram retomadas, tornando-se um dos assuntos mais discutidos em periódicos nos anos seguintes.

Os trabalhos envolvendo hélio líquido, no entanto, não ficaram apenas no estudo de suas propriedades como um fluido. Em particular, as propriedades de elétrons extras na superfície de hélio líquido também tornaram-se um assunto bastante ativo desde as publicações de Sommer [5], Cole e Cohen [6], e Shikin [7], as quais apresentavam descrições dos estados eletrônicos de superfície, provenientes da interação dos elétrons com o hélio líquido. Uma das razões que torna esse campo interessante é a redução da dimensionalidade, que é um assunto amplamente estudado pela comunidade científica, uma vez que os modelos que descrevem esse tipo de sistemas são simples e, em muitos casos, apresentam uma riqueza de propriedades físicas interessantes [8].

1.1 Elétrons em um sistema *bulk* de hélio líquido sob campo elétrico externo

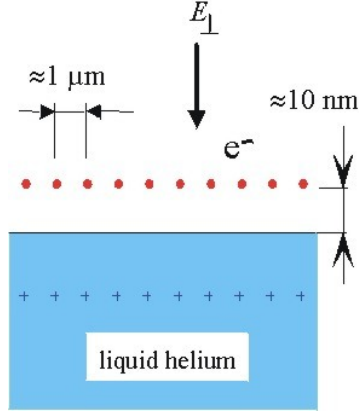


Figura 1.1: Imagem ilustrativa de um gás de elétrons na superfície de hélio líquido sob a ação de um campo elétrico externo perpendicular à superfície de hélio.

Os efeitos de um elétron sobre uma camada plana de hélio líquido, considerando a influência de um campo elétrico externo aplicado na direção normal à superfície, Figura 1.1, já foram amplamente estudados na literatura [9], [10], [11], [12]. Sabe-se que a presença do elétron sobre a superfície polariza o hélio líquido, dando origem a um potencial atrator que prende o elétron à superfície e é confinado ainda mais devido ao campo elétrico externo. Por outro lado, o princípio da exclusão de Pauli impede o elétron de penetrar no hélio líquido, gerando uma barreira de potencial de 1 eV [10]. Dessa forma, considerando que a superfície de hélio ocupa a região do espaço $z \leq 0$, o potencial total para um elétron a uma distância z da superfície de hélio é dado por

$$V(z) = \begin{cases} -\Lambda/z + Fz & \text{se } z > 0 \\ V_0 \approx 1\text{eV} & \text{se } z < 0 \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde $\Lambda \equiv e(\epsilon - 1)/4(\epsilon + 1)$, com $\epsilon = 1,057$ sendo a constante dielétrica do hélio e F o valor absoluto do campo elétrico externo aplicado na direção z perpendicular à superfície, $\vec{F} = F\hat{z}$. Uma vez que a energia do elétron é da ordem da temperatura, $k_B T \ll V_0$, é comum assumir que $V_0 = \infty$. Assim, na ausência de campo elétrico externo ($F = 0$), o espectro de energia na direção z é semelhante ao do átomo de hidrogênio, sendo dado por

$$E_n = -\frac{\Lambda^2}{2n^2} R_y, \quad (1.2)$$

com n sendo um inteiro positivo e $R_y = 13,6$ eV a constante de Rydberg. A separação energética entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado é $E_2 - E_1 = 5,6$ K. Isso significa

que a temperaturas entre $T = 0,1 - 1,0$ K, o elétron deve estar no seu estado fundamental, possuindo energia $E_1 = -7.5$ K, tornando o problema praticamente bidimensional, uma vez que a separação entre os níveis energéticos é larga quando comparada à energia do elétron nessas temperaturas. Por outro lado, como nenhum confinamento lateral é aplicado, o elétron se encontra livre na direção paralela ao plano, com energia $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ [13]. A dependência em z da função de onda para esse sistema na ausência de campo elétrico externo deve ser dada por

$$\Phi_1(z) = \frac{2}{a^{3/2}} z e^{-z/a}, \quad (1.3)$$

com $a = a_0/\Lambda = 76\text{\AA}$ e $a_0 = 0,529\text{\AA}$. O valor esperado para a distância entre o elétron e a superfície de hélio no estado fundamental é, então, $\langle z_1 \rangle = 3a/2 = 114\text{\AA}$. Essa distância é relativamente grande quando comparada à distância média entre os átomos de hélio, trazendo consequências bastante interessantes do ponto de vista físico, como será mencionado posteriormente. Na Figura 1.2 é apresentada a função de onda para o estado fundamental de um elétron sobre a superfície de hélio.

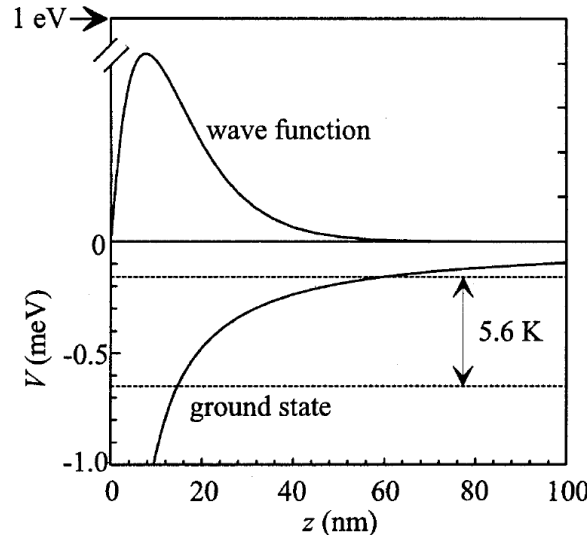


Figura 1.2: Perfil do potencial e a função de onda do estado fundamental de um elétron depositado sobre a superfície de hélio líquido [8].

Através da observação das depressões formadas na superfície do hélio líquido devido à presença de elétrons, Williams e Crandall [14] mostraram que os elétrons são estáveis nessas superfícies. Três anos depois, Grimmes e Brown [15] mediram, usando absorção da radiação de microondas emitida pelos elétrons, a frequência de transição do estado fundamental para o primeiro e segundo estados excitados, obtendo $125,9\text{GHz}$ e $148,6\text{GHz}$ respectivamente, provando a quantização dos níveis de energia dos elétrons. Essas frequências de transição podem ainda ser reguladas se necessário, através da aplicação de um campo elétrico externo que confine ainda

mais o elétron, empurrando-o contra a superfície do hélio e consequentemente afastando os níveis energéticos. Este afastamento, conhecido como Efeito Stark, pode ser calculado através da teoria de perturbação de primeira ordem [16], [17], [18]. Obviamente, a aplicação de um campo elétrico externo deve reduzir também a distância elétron-superfície, impondo então um limite superior no módulo do campo aplicado, uma vez que para campos suficientemente fortes, o elétron deve adquirir energia maior do que a barreira de potencial fornecida pela superfície de hélio, ocasionando na entrada deste no líquido. A dependência das diferenças entre os níveis energéticos com o campo elétrico externo é bem representada através dos resultados ilustrados na Figura 1.3. A importância deste tipo de controle será explicitada mais adiante.

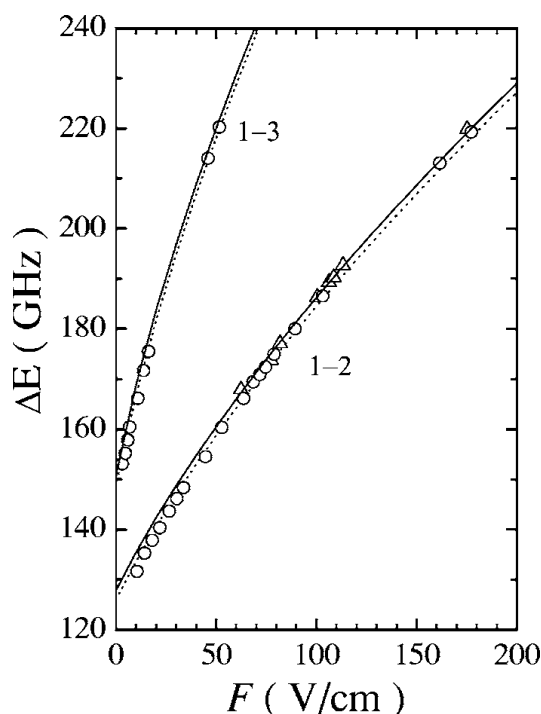


Figura 1.3: Transição energética entre o estado fundamental e o primeiro (1-2) e o segundo (1-3) estados excitados, respectivamente, como função do campo elétrico externo perpendicular à superfície. As curvas são apresentadas para duas temperaturas diferentes, $T = 1.0$ K (linha sólida) e $T = 1.3$ K (linha pontilhada). Os símbolos representam os resultados experimentais, $T = 1.0$ K (triângulos) e $T = 1.2$ K (círculos) [9].

Para sistemas com densidades eletrônicas elevadas, no entanto, a superfície plana torna-se instável e a distribuição uniforme de elétrons acima da superfície é destruída como uma forma de minimizar a energia devido à interação Coulombiana [19], [20]. Esses elétrons passam então a se aglomerar em bolhas com raios de aproximadamente 15 \AA abaixo da superfície de hélio líquido. Devido ao tamanho intermediário entre as escalas microscópicas e macroscópicas, essa bolha exibe comportamento dos dois regimes, dependendo do fenômeno sob investigação [11]. Na verdade, elétrons confinados acima da superfície também podem exibir comportamento

clássico. Uma vez que as densidades eletrônicas n são da ordem de apenas $10^9 - 10^{13} m^{-2}$, a energia de Fermi, que é dada por $E_F = \pi \hbar^2 n / m^*$, deve ser da ordem de apenas $0,01 K$, o que é bastante abaixo das temperaturas obtidas experimentalmente, sendo portanto muito menor do que $k_B T$ para os limites inferiores de densidade eletrônica, de tal forma que os elétrons se comportam como um gás não degenerado, obedecendo à estatística de Maxwell-Boltzman. Assim, para densidades eletrônicas baixas, o sistema pode ser tratado como um gás clássico descrito [13]. O fato de elétrons na superfície de hélio líquido apresentarem características dos dois regimes, clássico e quântico, torna-o um dos sistemas mais atraentes da matéria condensada para físicos teóricos.

1.2 Tempo de Relaxação e Computadores Quânticos

Elétrons na superfície de hélio líquido podem ser espalhados através de dois mecanismos. A altas temperaturas, esse espalhamento é decorrente da elevada concentração de vapor de hélio sobre a superfície. Para temperaturas mais baixas ($T < 0.8 K$), a concentração de vapor é, no entanto, exponencialmente menor, de tal forma que o espalhamento devido ao gás é desprezível. Nesse limite, o espalhamento ocorre principalmente devido à interação do elétron com ondas capilares do hélio, conhecidas como *ripples* [21].

Nos recentes anos, uma atenção especial tem sido dada para o tempo de decaimento de estados de superfícies excitados ($n > 1$) a baixas temperaturas (tempo de relaxação), onde o espalhamento de elétrons é determinado principalmente pela sua interação com os *ripples*. O interesse nesse problema surgiu principalmente com a sugestão de que estados de superfície ocupando os dois níveis mais baixos de energia, $n = 1$ e $n = 2$, podem ser utilizados como *bits* para um computador quântico, chamados também de *qubits*, onde as transições de um nível para outro podem ser facilmente controladas por um campo de microondas [21], [22], [23], [24], [25].

Uma vez que o tempo de execução do computador é limitado pelo tempo de decaimento de um elétron do primeiro estado excitado para o estado fundamental, o hélio líquido se mostra ideal, já que o tempo de relaxação devido ao espalhamento *elétron-ripple* é da ordem de $\tau \sim 10^{-7} s$ [25], sendo o maior tempo conhecido em toda a matéria condensada. Esse elevado tempo de relaxação é também importante na leitura dos *qubits*, uma vez que essa leitura deve ser simultânea. Isto é, não é desejável que durante a leitura de um *qubit* o outro *qubit* mude o seu estado [23].

Além do elevado tempo de relaxação, as baixas densidades eletrônicas, mencionadas an-

teriormente, facilitam a construção de microestruturas, que são usadas no controle dos *qubits*. Recentemente, tem sido proposto na literatura a implementação de esferas ou pequenos pilares metálicos sobre o substrato que sustenta o hélio líquido [21], [23], [24]. A ilustração de um desses modelos é apresentada na Figura 1.4. Essas estruturas geram um potencial de confinamento lateral, aprisionando elétrons lateralmente e assim gerando os *qubits*.

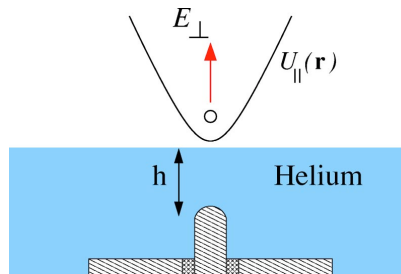


Figura 1.4: Modelo da amostra experimental de um microeletrodo submerso no hélio líquido a uma profundidade h $0.5 \mu\text{m}$. O elétron está submetido a um campo elétrico externo, gerado pelo eletrodo e por uma das placas de um capacitor. O potencial $U_{||}$ gerado é parabólico próximo do mínimo [22].

1.3 Confinamento lateral e as nanoestruturas de hélio líquido

O método apresentado na Figura 1.4 não representa a única forma de confinar elétrons lateralmente. Recentemente, estruturas de confinamento têm sido propostas através da suspensão do hélio líquido sobre um substrato que apresenta uma cavidade como ilustra a Figura 1.5. Nesse caso, devido à uma diferença de pressão entre o hélio líquido suspenso e a superfície

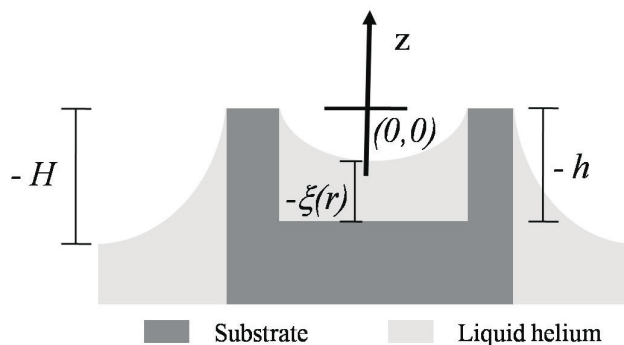


Figura 1.5: Modelo da amostra experimental: seção transversal do substrato que apresenta uma cavidade circular, com o hélio líquido suspenso. H e h representam as profundidades da superfície livre de hélio líquido e da cavidade do substrato, respectivamente.

livre, um perfil curvo é gerado, confinando os portadores de carga lateralmente [26], [27], [28],

[29]. De fato, apesar de outros modelos de confinamento lateral já existirem, é importante investigar outras alternativas de produzir um confinamento lateral, uma vez que estas podem evitar problemas inerentes a outros procedimentos. Uma das vantagens desta forma de confinamento surge da possibilidade de gerar diversas nanoestruturas amplamente estudadas em materiais semicondutores, como pontos, anéis e fios quânticos, apenas variando a forma da cavidade [29].

Mesmo com o aprimoramento das técnicas avançadas na construção de estruturas semicondutoras nos últimos anos, as propriedades eletrônicas são fortemente influenciadas pelas heterogeneidades espaciais e pelos espalhamentos oriundos das impurezas [30], [31], [32]. Por outro lado, a uniformidade e a pureza apresentada em sistemas de elétrons sobre a superfície de hélio se mostram praticamente ideais para realização de experimentos e de estudos teóricos de sistemas em baixas dimensionalidades [29].

Além disso, uma vez que o elétron flutua a $11nm$ da superfície, que é bastante grande comparado à distância entre os átomos de hélio no líquido, como mencionado anteriormente, este pode se mover praticamente livre, interagindo apenas fracamente com a superfície. Pelo fato de os elétrons não estarem incorporados em uma rede de átomos, não há efeitos de estruturas de bandas, como nos semicondutores. Desta forma, a massa efetiva m^* deve ser igual à de um elétron livre m , enquanto em heteroestruturas como *GaAs/AlGaAs* a massa efetiva é de aproximadamente $0,0067m$. Assim, elétrons em hélio líquido apresentam-se como sistemas ideais na observação de fenômenos físicos, sendo, portanto, de grande interesse acadêmico.

Levando em conta a grande quantidade de estudos realizados recentemente em sistemas de baixa dimensionalidade, como pontos, fios e anéis quânticos, é, então, natural estudar sistemas similares na superfície de hélio líquido. A realização de um sistema quase unidimensional em hélio líquido, isto é, onde os portadores de carga podem se mover em apenas uma dimensão espacial, foi primeiramente concebida teoricamente [33], [34], [35]. Com a realização experimental do sistema proposto por Kovdrya e Nikolaenko [36], estudos de diversos fenômenos nesse sistema foram realizados, como a mobilidade, as propriedades de transporte e estados eletrônicos [26], [27], [28]. Nesses trabalhos, o confinamento lateral se dava através da curvatura da superfície que era suspensa em um canal unidimensional, como ilustrado na Figura 1.5. Kovdrya [67] mostrou que o perfil de hélio líquido nesse caso poderia ser bem aproximado por um semi-círculo

$$z = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}} \right), \quad (1.4)$$

onde R representa o raio de curvatura, sendo dado por $R = \alpha / \rho g H$. Sokolov foi ainda mais além ao admitir que, para campos elétricos elevados na direção z , o elétron deveria estar localizado em uma região muito próxima do mínimo quando comparado ao raio de curvatura, isto é, $y \ll$

R . Essa consideração permitiu que várias propriedades do sistema pudessem ser estudadas de forma analítica, uma vez que o perfil de hélio líquido nesse limite se torna aproximadamente parabólico

$$z \approx \frac{y^2}{2R}, \quad (1.5)$$

e conseqüentemente o potencial sentido pelo elétron também, já que esse é dado por $V(z) = eEz$. Apesar da validade comprovada do modelo aproximativo, é interessante estudar sob quais circunstâncias e em quais sistemas essa aproximação pode ser aplicada, uma vez que essa deve ser extremamente dependente da geométrica da cavidade.

Neste presente trabalho, é apresentado um modelo para calcular a superfície de hélio líquido sobre um substrato que pode possuir, a princípio, uma cavidade de qualquer forma. A equação que descreve a superfície é obtida no Capítulo 3 e sua solução é obtida numericamente de forma autoconsistente. Essa equação é resolvida para quatro formas de cavidade apresentadas nas Figura 1.6 e as condições de parabolicidade são então checadas. Em seguida, os estado eletrônicos de elétrons presos a essas superfícies sob a ação de um campo elétrico externo são investigados e discutidos no Capítulo 4, através da solução da equação de Schrodinger.

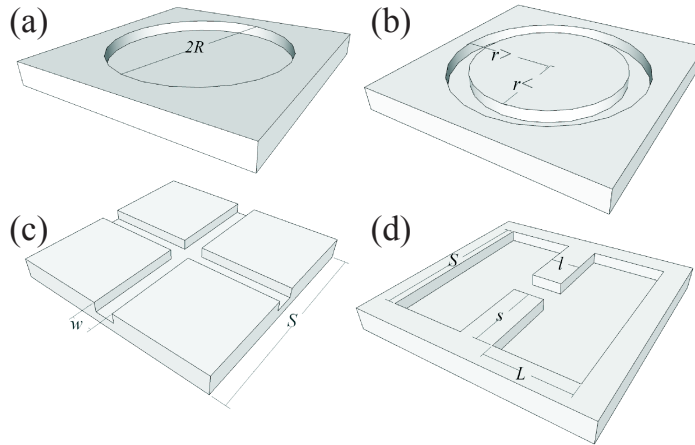


Figura 1.6: Modelo da geometria das quatro cavidades investigadas nesse trabalho: (a) uma cavidade circular de raio R ; (b) uma cavidade em forma de anel circular com raio interno $r_<$ e raio externo $r_>$; (c) a interseção entre dois canais perpendiculares de largura w ; (d) duas cavidades conectadas por um canal estreito.

Obviamente, a escolha dessas cavidades não se deu de forma arbitrária. As cavidades (b) e (d), por exemplo, já foram estudadas na literatura [29], [37], [38]. Na cavidade em forma de anel circular, é apresentado um tratamento semelhante ao utilizado neste trabalho, onde os autoestados de um elétrons sobre a superfície suspensa são calculados. Enquanto a estrutura (d) foi utilizada para o cálculo das propriedades de transporte de elétrons sobre a superfície do hélio sob a influência da constrição. No entanto, neste caso, a curvatura da superfície foi desconsi-

derada. De qualquer forma, uma vez que sistemas similares têm sido abordados na literatura, é importante do ponto de vista acadêmico estudar as propriedades da superfície para essas estruturas, uma vez que essas propriedades devem estar intrínsecas em muitos procedimentos.

Capítulo 2

Hélio líquido

O hélio líquido exibe propriedades da mecânica quântica em larga escala de uma maneira bastante diferente das outras substâncias. Obviamente, as propriedades incomuns exibidas pelo hélio em sua fase líquida poderiam a princípio ser explicadas através da solução completa da equação de Schroedinger para 10^{23} átomos em uma simples amostra do líquido. Uma vez que isso é computacionalmente inviável, devemos nos contentar apenas com o entendimento aproximado de como a equação de Schroedinger poderia levar a soluções que indicariam um comportamento similar àquele observado experimentalmente [39].

Com este sentimento, é apresentado neste Capítulo uma breve revisão bibliográfica de algumas propriedades exibidas pelo hélio líquido e dos modelos teóricos desenvolvidos na tentativa de explicar essas propriedades. Uma vez que esses assuntos não representam o foco principal desta dissertação apenas alguns poucos fenômenos são relatados aqui, não mostrando de fato a diversidade de propriedades que tornam o hélio líquido um dos assuntos mais interessantes e estudados na matéria condensada.

2.1 Propriedades

Devido ao tamanho reduzido da molécula de hélio, as forças atrativas de van der Waals que mantém o hélio em seu estado líquido ou sólido são extremamente fracas. Consequentemente o ponto de ebulição é o menor de todas as substâncias. Obviamente, espera-se também que o ponto de solidificação seja muito baixo. De fato, o hélio líquido é o único que não se solidifica a temperaturas tão próximas do zero absoluto, solidificando-se apenas sob a aplicação de pressões elevadas. Isso ocorre pois a solidificação de qualquer substância é determinada pelo balanço entre as forças de van der Waals e a energia térmica [1]. Essa foi a primeira propriedade

observada oriunda de fenômenos da mecânica quântica, já que, classicamente, no zero absoluto, todo tipo de movimento deve cessar, enquanto quânticamente isso não acontece.

As fracas forças de interação entre os átomos implicam que, para energias térmicas baixas, os efeitos quânticos não são desprezíveis como para outras substâncias, sendo necessário levar em conta a energia do ponto zero. Como uma primeira aproximação, podemos considerar um átomo do fluido, com massa m , como uma partícula livre dentro de uma pequena caixa de volume V , formado por átomos adjacentes. A energia do estado fundamental de um sistema como esse é dada por

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{8mV^{2/3}}, \quad (2.1)$$

assim, como a energia decresce com o aumento do volume molar, é de se esperar que, considerando efeitos quânticos, o volume molar aumente com o decaimento da temperatura, dificultando a solidificação. De fato, essa foi a primeira observação, realizada por Kamerlingh Onnes [40] em 1911, que diferia o hélio líquido dos fluidos comuns. Em 1924, Kamerlingh Onnes e Boks [41] apresentaram resultados da densidade do hélio em função da temperatura, onde observou-se uma mudança de comportamento em 2,2 K, como é mostrado na Figura 2.1.

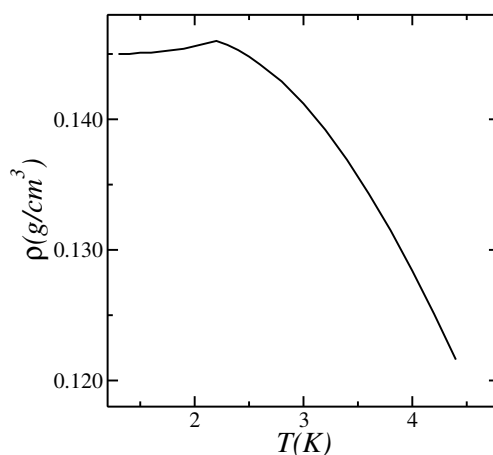


Figura 2.1: Densidade do hélio líquido sob a pressão de vapor saturado [42]

Como a massa deve ser constante durante o processo de resfriamento do hélio, espera-se que tal comportamento exibido na figura acima seja acompanhado de uma descontinuidade no coeficiente de expansão, como ilustrado na Figura 2.2.

Considerando os valores elevados do volume molar, a princípio, pode-se pensar em descrever as propriedades do hélio líquido considerando-o como um gás denso de partículas clássicas. De fato, a partir da teoria cinética dos gases, pode-se reproduzir de forma satisfatória suas propriedades térmicas e cinéticas, a temperaturas próximas ao ponto de ebulição. No entanto, a temperaturas mais baixas (abaixo de 2,17 K), a teoria clássica apresenta-se falha na descrição

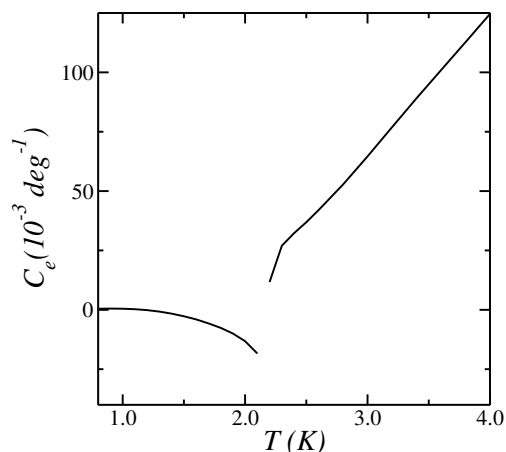


Figura 2.2: Coeficiente de expansão do hélio líquido sob a pressão de vapor saturado [43]

dos resultados experimentais [1]. A mudança de comportamento do hélio líquido em 2,17 K é acompanhada por uma singularidade da curva de calor específico, como mostra a Figura 2.3. A semelhança de tal curva com a letra λ deu origem ao nome "ponto λ " atribuído a esse tipo de singularidade.

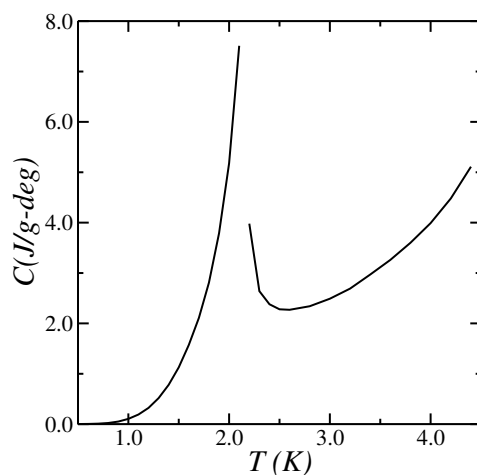


Figura 2.3: Calor específico do hélio líquido sob a pressão de vapor saturado [44]

Uma descontinuidade no calor específico representa uma transição de fase de segunda ordem. Devido a essa transição, primeiramente observada por Keesom e Wolfke [45], atribuiu-se a nomenclatura Hélio I e Hélio II ao hélio líquido acima e abaixo do "ponto- λ ", respectivamente. O Hélio I, como mencionado anteriormente, possuía características comuns aos fluidos normais, descritas pela teoria clássica. Já o Hélio II, por sua vez, apresentava características incomuns em larga escala oriundas de efeitos quânticos, sendo uma das características mais interessantes a superfluidez, isto é, a capacidade de fluir por capilares sem dissipação de energia. Vários modelos e ferramentas foram desenvolvidos na tentativa de explicar e descrever o fenômeno da

superfluidez no hélio líquido. Uma breve revisão desses modelos é apresentada a seguir.

2.2 Condensado de Bose-Einstein e o modelo dos dois fluidos

Em 1938, F. London [46], [47] sugeriu que a transição de fase no hélio líquido ocorreria devido ao mecanismo de condensação característico do gás de Bose-Einstein distorcidos pela presença das forças de interações entre as moléculas, que no caso de um líquido não poderiam ser desconsideradas. Seu modelo, que tratava a transição como um problema de ordem-desordem no espaço do momento, parecia bastante sugestivo, uma vez que os modelos baseados em ordem e desordem no espaço real haviam falhado. Apesar de mostrar que um gás de Bose-Einstein apresentava qualitativamente efeitos similares ao Hélio II, sua teoria não era muito convincente, uma vez que era extremamente complicado entender como as propriedades de um líquido poderiam ser interpretadas, mesmo de forma qualitativa, a partir da teoria dos gases. Assim, apesar de explicar alguns efeitos cinéticos, como a superfluidez e a transição de fase, para compreender bem os fenômenos abaixo da temperatura de transição, um tratamento mais rigoroso, baseado na solução de um problema de muitos corpos, deveria ser realizado [48].

Para evitar as dificuldades de uma teoria molecular rigorosa, Tisza [49] [50] [51] foi o primeiro a empregar qualitativamente as propriedades de um gás de Bose-Einstein degenerado para desenvolver uma teoria macroscópica consistente. Sua teoria fenomenológica, chamada de modelo dos dois fluidos, representava uma ferramenta matemática poderosa na descrição de diversos resultados experimentais e na previsão de resultados ainda parcialmente desconhecidos [52]. O ponto principal da teoria consistia na definição do "líquido de Bose-Einstein", que unia algumas propriedades de um líquido com as propriedades de um gás de Bose-Einstein em um método auto-consistente, estendendo a noção de condensação no espaço do momento. Assim, Tisza admitiu que abaixo do ponto de condensação ("ponto- λ ") o sistema possuía um caráter heterogêneo, isto é, baseava-se na idéia de que o hélio líquido era composto por uma mistura de dois fluidos (um normal e outro superfluido). Desta forma, em qualquer ponto do espaço a densidade poderia ser escrita como

$$\rho = \rho_s + \rho_n, \quad (2.2)$$

onde ρ_s e ρ_n representavam as densidades das componentes superfluida e normal, respectivamente. Isso implicava também na existência de dois campos de velocidade, cada campo associado a uma componente, denominados por \vec{v}_s e \vec{v}_n . A densidade de corrente de massa \vec{J} era então dada por

$$\vec{J} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n. \quad (2.3)$$

Na temperatura zero, o hélio deve ser puramente superfluido. Com o crescimento da temperatura alguns tipos de excitações das moléculas começam a aparecer. Essas excitações constituem o fluido normal. Após o ponto- λ a componente surperfluida deveria obviamente se anular, assim

$$\rho = \begin{cases} \rho_s & \text{se } T = 0 \text{ K} \\ \rho_n & \text{se } T = T_\lambda \end{cases}. \quad (2.4)$$

A parte superfluida, por sua vez, corresponde à fase condensada do líquido de Bose-Einstein e é do modelo de Bose-Einstein que se sabe que a superfluidiez como um todo representa virtualmente um único estado quântico, possuindo, então, contribuição nula para a entropia do sistema, $s_s = 0$. Assim, a componente normal do superfluido deve ser responsável por todas as excitações térmicas no líquido e, conseqüentemente, a entropia do fluido deve ser completamente atribuída ao fluido normal. Uma vez que a superfluidiez é representada por um único estado quântico, não deve haver mecanismos de colisões usuais no superfluido, porém, devem existir flutuações na densidade ρ_s do superfluido devido à componente normal [53]. Assim, é assumido que o coeficiente de viscosidade do superfluido é nulo:

$$\eta_s = 0. \quad (2.5)$$

O modelo baseado nas assertivas anteriores descreveu diversas propriedades [1], [52]. No entanto, esse não passava de uma ferramenta matemática que não representava de fato a realidade física de tal tipo de sistema, já que, fisicamente, o hélio não é formado por dois tipos de fluidos. Com esse sentimento, Landau [54] [55] resolveu tratar o hélio líquido como uma única entidade e através da quantização da hidrodinâmica tentar explicar o fenômeno da superfluidiez. Sua teoria, junto a outras contribuições na matéria condensada, rendeu-lhe o prêmio Nobel em Física.

2.3 Teoria de Landau para a superfluidiez

Em 1941, Landau [54] mostrou que todo fluido quântico possuía o estado no qual esse era superfluido. Para isso, Landau considerou a quantização de um sistema arbitrário de partículas interagentes, definindo os seguintes operadores

$$\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}), \quad (2.6)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left[\vec{p}_{\alpha} \delta(\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) + \delta(\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \vec{p}_{\alpha} \right], \quad (2.7)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \vec{j} + \vec{j} \frac{1}{\rho} \right), \quad (2.8)$$

onde \vec{R} é um vetor que localiza um ponto arbitrário do sistema e \vec{r}_α representa o raio de partícula de massa m_α com momento \vec{p}_α . Tais operadores possuem seus análogos clássicos, sendo ρ a densidade, \vec{v} a velocidade e \vec{j} a densidade do fluxo de massa.

Como a energia de um fluido depende apenas de sua densidade e velocidade [52], é possível observar que $\nabla \times \vec{v}$ comuta com o Hamiltoniano do sistema apenas se $\nabla \times \vec{v} = 0$, o que implica que todo fluido quântico possui um estado estacionário no qual o rotacional do campo velocidade é nulo, exibindo então, superfluidez, já que o campo é conservativo. Qualquer outro estado do sistema no qual $\nabla \times \vec{v} \neq 0$ é chamado de estado de vórtice. Landau ainda argumentou que não deveria existir um estado de vórtice no qual $\nabla \times \vec{v} \neq 0$ fosse arbitrariamente pequeno sobre todo o volume do fluido, então, entre os níveis de energia do estado de movimento potencial e de vórtice deve existir um intervalo de energia Δ .

Todo estado fracamente excitado do sistema deveria ser oriundo de uma combinação de excitações elementares [54]. Landau propôs a existência de dois tipos de excitações elementares, os fônons, com energia $\epsilon_{fon} = pc$ onde p representa o momento e c a velocidade do som no meio e os rótons, com energia dada por

$$\epsilon_{rot} = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}, \quad (2.9)$$

onde μ representa a massa efetiva da excitação e \vec{p} o seu momento. Note que os rótons precisam de uma energia mínima para serem excitados. Assim, a temperaturas suficientemente baixas, mais precisamente abaixo de 0.5 K, as únicas excitações presentes são as ondas sonoras longitudinais quantizadas (fônons). Os rótons são excitados apenas quando há mais energia disponível ao sistema, isto é, a temperaturas mais altas. Como será visto mais adiante, esse *gap* de energia Δ é de extrema importância para o surgimento da superfluidez.

Landau foi ainda mais além ao sugerir que essas excitações eram da mesma classe, diferindo-se apenas pelo momento. Na Figura 2.4, é representada a curva de dispersão sugerida por Landau. Nas proximidades da origem, isto é, para números de onda k próximos de zero, a curva é descrita pela energia dos fônons, enquanto nas proximidades do mínimo local é descrita pelos rótons. A temperaturas baixas apenas os estados próximo de $p = 0$ e do mínimo estão excitados, de tal forma que as únicas excitações importantes são os fônons e os rótons.

Anos depois, mais precisamente em 1958, tal modelo sugerido por Landau foi confirmado através do experimento de espalhamento de nêutrons, primeiramente realizado por Palevsky [56] e em seguida repetido inúmeras vezes em diversos laboratórios. Um dos resultados mais

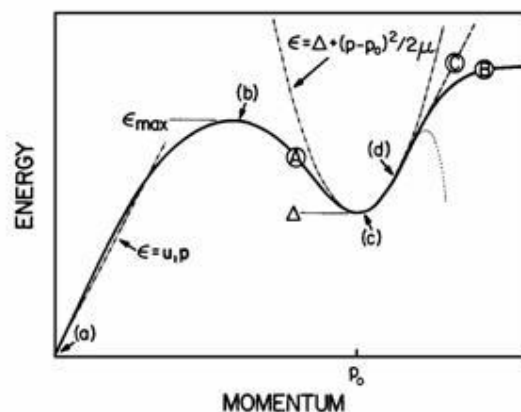


Figura 2.4: Espectro de excitação do hélio superfluido sugerido por Landau em 1947[55]

precisos foi realizado por Henshaw e Woods [57] em 1961, obtendo experimentalmente a curva das excitações do hélio líquido na sua fase superfluida. Na Figura 2.5 é apresentado o *fit* dos resultados experimentais obtidos por Henshaw e Woods

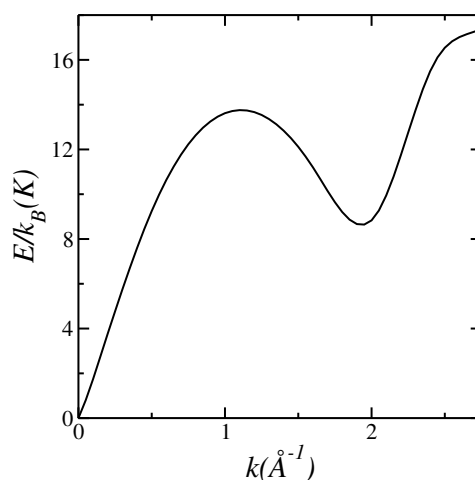


Figura 2.5: Espectro de excitação do hélio superfluido obtido através do experimento de espalhamento de nêutron[57]

Segundo as equações sugeridas por Landau para o espectro das excitações, os parâmetros ideais utilizados para o *fit* da curva experimental, ilustrada na Figura Figura2.2, são: $c = 239\text{ms}^{-1}$, $p_0/\hbar = 19.1\text{nm}^{-1}$, $\Delta/k_B = 8.65\text{K}$ e $\mu = 0.16m_4$

2.3.1 Condição de Landau para superfluidez

Como um sistema quântico não realiza troca de energia continuamente, excitações devem ser criadas para absorver a energia dissipada. Para analisar sob quais circunstâncias essas excitações surgem, considera-se uma quantidade de massa M de hélio líquido fluindo através

de uma fenda estreita com velocidade \vec{v} . Assim, o momento e a energia dessa quantidade são dados, respectivamente, por

$$\vec{P} = M\vec{v}, \quad (2.10)$$

$$E = \frac{1}{2}M\|\vec{v}\|^2. \quad (2.11)$$

Considerando que uma excitação seja criada com momento \vec{p} e energia $\varepsilon(\vec{p})$, o momento e a energia do fluido passam a ser

$$\vec{P}' = \vec{p} + M\vec{v}, \quad (2.12)$$

$$E' = \varepsilon(\vec{p}) + \frac{1}{2}M\|\vec{v}\|^2 + \vec{p} \cdot \vec{v}. \quad (2.13)$$

Para que essa excitação seja criada, a energia do sistema com a excitação deve ser menor do que a energia do sistema sem a excitação, uma vez que não há fornecimento de energia para o sistema. Matematicamente, isso significa que $E' - E < 0$. Assim, decorre imediatamente que a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\varepsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v} < 0. \quad (2.14)$$

Note que, para que a equação acima seja satisfeita a excitação deve ser criada no sentido oposto ao fluxo do fluido, $\vec{p} \cdot \vec{v} < 0$. Dessa forma, a condição para o surgimento da excitação pode ser reescrita como

$$\|\vec{v}\| > \frac{\varepsilon(\vec{p})}{\|\vec{p}\|}. \quad (2.15)$$

Assim, define-se uma velocidade crítica, $\vec{v}_c = (\varepsilon(\vec{p})/\|\vec{p}\|)_{min}$, tal que se a velocidade relativa entre o fluido quântico e a fenda for menor do que v_c , nenhuma excitação será criada, não havendo dissipação de energia. Decorre imediatamente que os valores de p para os quais a razão $\varepsilon(\vec{p})/\|\vec{p}\|$ é nula são tais que

$$\frac{d\varepsilon(p)}{dp} = \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (2.16)$$

No caso da curva de excitações do He II, existem duas soluções para a equação acima. A primeira solução ocorre na origem, na região dos fônons, onde a curva apresenta comportamento linear, assim

$$v_c = (\varepsilon(\vec{p})/\|\vec{p}\|) = c = 239ms^{-1}. \quad (2.17)$$

A segunda solução dá-se na região de mínimo local, dos rótons, onde a solução da equação (2.16) retorna o seguinte valor

$$v_c = \frac{\varepsilon(\vec{p})}{\|\vec{p}\|} \approx \frac{\Delta}{p_0} = 58ms^{-1}. \quad (2.18)$$

Note que na ausência do *gap* de energia Δ , separando os fônons dos rótons, a superfluidez não ocorreria, uma vez que a velocidade crítica seria $v_c = 0$. Isso junto com o fato de que não há nenhum outro tipo de excitação abaixo da curva de Landau garantem um valor finito para v_c e, conseqüentemente, possibilitam o aparecimento da superfluidez no hélio líquido.

2.3.2 Estatística das excitações e o modelo dos dois fluidos

A temperaturas suficientemente baixas, apenas alguns fônons e rótons estão presentes no hélio líquido, sendo as interações entre esses desprezíveis. Assim, pode-se admitir que essas excitações fracamente interagentes formam um gás ideal[58]. Uma vez que os fônons obedecem à estatística de Bose e os rótons obedecem a qualquer estatística já que $\Delta \gg k_B T$, esse gás deve obedecer a estatística de Bose, onde o número de excitações, a uma temperatura T com momento no intervalo $d^3 \vec{p}$, é

$$n_{\vec{p}} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{e^{\beta E} - 1} d^3 \vec{p}, \quad (2.19)$$

onde $\beta = (k_B T)^{-1}$. Considerando que inicialmente o hélio líquido esteja no seu estado de superfluidez, isto é, que a corrente de densidade de massa seja dada por $\rho_0 \vec{v}_s$, onde ρ_0 é a densidade do fluido e \vec{v}_s a velocidade do superfluido. Quando as excitações são criadas devido a um aumento na temperatura, a nova densidade de corrente de massa é dada por

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{v}_s + \langle \vec{p} \rangle, \quad (2.20)$$

onde $\langle \vec{p} \rangle$ é o momento médio das excitações por unidade de volume. A energia das excitações que se encontram em equilíbrio com as paredes no referencial do reservatório, como visto na Seção anterior, deve ser dada por $E = E(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s$. Assim, utilizando a Equação (2.19) obtém-se que

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \frac{(2\pi\hbar)^3 \vec{p}}{e^{\beta(E(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s)} - 1} d^3 \vec{p}. \quad (2.21)$$

Expandindo a Equação (2.21) até primeira ordem em \vec{v}_s , pode-se escrever $\langle \vec{p} \rangle = -\rho_n \vec{v}_s$, onde

$$\rho_n = -\frac{\beta}{3} \int \frac{p^2}{(e^{\beta E(p)} - 1)^2} e^{\beta E(p)} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2.22)$$

Dessa forma, o vetor densidade de corrente se torna $\vec{j} = (\rho_0 - \rho_n) \vec{v}_s$. Agora, levando em conta o fato de que as excitações podem se espalhar com velocidade \vec{v}_n . Para um observador que também se move com essa velocidade a distribuição permanece a mesma dada anteriormente. Porém, no referencial inercial, essas excitações parecem possuir uma energia $E + \vec{p} \cdot \vec{v}_n$. Assim,

nesse caso, a distribuição se torna

$$n(E + \vec{p} \cdot \vec{v}_n) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{e^{\beta E} - 1} d^3 \vec{p}. \quad (2.23)$$

ou de forma similar

$$n(E) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{e^{\beta(E - \vec{p} \cdot \vec{v}_n)} - 1} d^3 \vec{p}. \quad (2.24)$$

Lembrando novamente que a energia da excitação é dada por $E = E(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s$, obtém-se de forma análoga que

$$\langle \vec{p} \rangle = -\rho_n(\vec{v}_s - \vec{v}_n), \quad (2.25)$$

que resulta em

$$\vec{j} = (\rho_0 - \rho_n)\vec{v}_s + \rho_n\vec{v}_n. \quad (2.26)$$

Quando T vai para zero é possível mostrar através de um processo de limite que ρ_n tende a zero. Assim, Landau, concluiu que o hélio líquido abaixo do ponto λ se comporta como uma mistura de dois fluidos, um que apresenta superfluidez e outro que comporta normalmente (formado pelas excitações), mostrando então que o formalismo dos dois fluidos, primeiramente sugerido por Tisza, provinha do espectro de energia das excitações elementares do hélio líquido.

A teoria de Landau foi muito bem sucedida na reprodução dos resultados experimentais, mostrando como as propriedades macroscópicas provêm do espectro de energia por ele sugerido. No entanto, a base teórica do modelo da hidrodinâmica quântica é questionável, já que a forma da curva de dispersão e seus parâmetros não podem ser obtidos de forma direta na sua teoria, não explicando o motivo da ausência de mais estados excitados com energias mais baixas.

Em 1954, Feynman [59], a partir de primeiros princípios e usando argumentos de simetria obteve a curva de dispersão do hélio líquido baseado na natureza das funções de ondas que representavam as excitações [58]. A forma de sua curva estava em perfeito acordo com a sugerida por Landau, explicando assim a ausência de estados excitados com menor energia. No entanto, essa apresentava sérias discrepâncias quantitativas.

2.4 Fenômeno de Superfície e o filme de hélio

Uma das consequências mais impressionantes da superfluidez foi observada primeiramente em 1922 por Kamerlingh Onnes [60]. Em seu experimento, onde colocou um reservatório imerso em outro maior contendo hélio líquido, a uma temperatura abaixo do ponto- λ , ele observou que a transferência do fluido de um recipiente para outro ocorria de forma extremamente

rápida, sendo mais rápida quanto menor fosse a temperatura. Kamerlingh Onnes tentou explicar tal fenômeno através da destilação. No entanto, a transferência ocorria de forma rápida demais para ser explicada por destilação simples. A explicação para esse fenômeno surgiu somente em 1938, quando Daunt e Mendelssohn [61] [62] mostraram que tal transferência ocorria através de um filme fino formado nas paredes do recipiente.

Esse é um comportamento natural quando se levam em conta as propriedades superfluidas do hélio líquido. As paredes expostas do recipiente entram em equilíbrio térmico com o vapor saturado formado acima do hélio líquido, absorvendo então uma camada fina de hélio superfluido. Por sua vez essa camada pode fluir sem dissipação de energia até que a pressão osmótica esteja balanceada[52].

2.4.1 Filmes finos e filmes suspensos

As paredes de um substrato imerso parcialmente no hélio líquido são cobertas por uma camada fina de hélio líquido. Essa camada fina, também conhecida como filme fino, possui espessura determinada pela interação de van der Waals entre o hélio e o substrato (recipiente). Tal interação pode ser expressada em termos do potencial por unidade de massa [8], [53]

$$\mu' = -\frac{\gamma}{\rho d^n}, \quad (2.27)$$

onde d representa a espessura do filme, ρ a densidade do hélio líquido e γ um coeficiente característico do material, chamado também de constante de van der Waals. Se o filme fino possuir espessura $d < 20 \text{ nm}$, γ assume um valor constante por volta de $5 \times 10^{-22} \text{ J}$. No entanto para filmes mais espessos, γ passa a ser função aproximadamente do inverso da espessura. Por sua vez n deve assumir valores entre 3, para filmes com espessura da ordem de 1 nm e 4, para filmes com espessura da ordem de 30 nm .

Uma das formas de estimar a espessura do filme fino se dá através do potencial químico. O potencial químico por unidade de massa para o hélio líquido em repouso, a uma altura z com temperatura T , deve ser dado pela expressão

$$\mu = \frac{p}{\rho} - sT + gz - \frac{\gamma}{\rho d^n} \quad (2.28)$$

onde p representa a pressão por unidade de massa, $\rho = 0,145 \text{ g/cm}^3$ é a densidade do hélio, gz é a energia potencial por unidade de massa, s é a entropia por unidade de massa e o último termo representa o potencial da interação de van der Waals do hélio líquido com o substrato. Os dois primeiros termos do potencial químico podem ser obtidos diretamente através da energia

livre de Gibbs para um fluido em repouso. Enquanto os outros termos devem ser adicionados posteriormente de acordo com o sistema em questão.

Para encontrar a espessura do filme fino de hélio, que sobe em uma parede vertical, a uma altura H , usa-se o fato de que no equilíbrio termodinâmico o potencial químico deve ser constante em toda a superfície. Assim, obtém-se que

$$d \approx \left(\frac{\gamma}{gH} \right)^{1/n} \quad (2.29)$$

Quando o substrato não é plano, mas possui elevações, sob certas condições o hélio líquido não segue a forma do substrato, mas sim preenche o espaço formado entre as elevações devido as forças capilares. Assim, nas regiões entre essas elevações, a superfície do hélio líquido deixa de ser plana, assumindo formas curvas, conhecidas também como menisco ou superfície suspensa. A condição para formação do menisco é de que a distância entre as elevações seja menor do que o comprimento de capilaridade l_c

$$l_c = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}, \quad (2.30)$$

onde α representa a tensão superficial do hélio líquido. Como será visto no próximo capítulo, uma das formas para calcular essa superfície suspensa se dá também através do potencial químico.

Capítulo 3

Perfis das superfícies do filme de hélio líquido para as diferentes cavidades

Nos últimos anos, um número grande de artigos foi publicado considerando elétrons na superfície de hélio líquido suspenso sobre um substrato que apresenta uma cavidade. Várias formas de cavidade foram propostas na literatura, porém, apenas recentemente o cálculo exato da superfície de hélio foi apresentado [29]. Até então, como mencionado na Introdução, apenas aproximações para a superfície haviam sido sugeridas ou, em muitos casos, a influência da curvatura era simplesmente desconsiderada.

Neste Capítulo, é encontrado através de um modelo simples a equação diferencial que descreve a superfície de hélio suspenso na cavidade de um substrato de vidro. O substrato deve estar contido no interior de um reservatório de hélio líquido. Devido ao fenômeno de superfluididade do hélio, uma camada fina deve então se formar na superfície do substrato, gerando uma corrente de massa até à região da cavidade que deve ser preenchida pelo superfluido, até que o sistema como um todo entre em equilíbrio, formando uma superfície curva como ilustrado na Figura 1.5, apresentada na Introdução. É justamente na região da cavidade que o cálculo da superfície apresentado neste Capítulo se baseia. Veremos que a quantidade de hélio no reservatório externo representa uma peça fundamental neste trabalho, uma vez que a superfície pode ser facilmente alterada ao retirar ou acrescentar hélio líquido nesse reservatório, isto é, ao variar H .

Em seguida, com o intuito de gerar estruturas de confinamento e de investigar as aproximações realizadas por Kovdrya, a equação diferencial que descreve a superfície é apresentada para os quatro substratos mencionados na Introdução. É também realizado um estudo do comportamento da superfície com a variação de H .

3.1 Equação diferencial para a superfície

Para encontrar a equação diferencial que descreve a superfície, $\xi(x, y)$, é preciso utilizar o fato de que todo sistema físico tende ao equilíbrio, que é caracterizado por ser a configuração de menor energia do sistema. Assim, após esperar o tempo necessário, o sistema aqui estudado também deverá assumir o seu estado de menor energia apresentando uma superfície estática. Uma vez que o interesse aqui se dá apenas no cálculo dessa superfície estática, a definição de equilíbrio termodinâmico será o ponto de partida na procura da equação que a descreve. Portanto, considerando um deslocamento infinitesimal $\delta\xi$ da superfície, é um fato bastante conhecido que no equilíbrio termodinâmico o trabalho δW_T para realizar esse deslocamento deve ser nulo [63], isto é

$$\delta W_T = 0. \quad (3.1)$$

Por outro lado, nota-se que para ocorrer um deslocamento no perfil do hélio líquido é preciso realizar um acréscimo no volume cercado pela superfície que separa os dois meios, n_1 e n_2 , que em nosso caso são a atmosfera e o hélio líquido. Nessa superfície atuam então duas diferentes pressões p_1 e p_2 , de tal forma que o trabalho necessário para realizar um pequeno acréscimo dV no volume total deve ser dado por [64]

$$dW_V = \bar{p}dV, \quad (3.2)$$

onde

$$\bar{p} = p_1 - p_2. \quad (3.3)$$

Sendo dS , um elemento infinitesimal da superfície, o elemento de volume, dV , pode ser escrito como um produto $dV = d\xi dS$. Assim, o trabalho necessário para aumentar todo o volume encerrado pela superfície de separação deve ser dado por

$$\delta W_V = \int (p_1 - p_2) d\xi dS. \quad (3.4)$$

No entanto, esse não deve ser o único trabalho realizado sobre o sistema, uma vez que para realizar um aumento no volume total é preciso também realizar um acréscimo na superfície de separação δS . Assim, é fundamental considerar também a contribuição para realizar uma mudança na área, δS , que por sua vez, deve ser diretamente proporcional a esta variação, $dW_S = \alpha \delta S$ [63], onde a constante de proporcionalidade α representa a tensão superficial do hélio líquido. Dessa forma, o trabalho total deve ser dado pela soma dos dois trabalhos, isto é,

$$dW_T = dW_V + dW_S, \quad (3.5)$$

ou melhor,

$$dW_T = \int (p_1 - p_2) d\xi dS + \alpha \delta S. \quad (3.6)$$

Substituindo a Equação (3.6) na condição de equilíbrio termodinâmico (3.1), obtém-se uma equação integral que representa o ponto de partida na obtenção da equação diferencial,

$$\int (p_1 - p_2) d\xi dS + \alpha \delta S = 0. \quad (3.7)$$

No entanto, retirar as informações sobre a superfície a partir da equação acima parece ser bastante complicado, sendo conveniente passá-la para a forma diferencial. Para representar esta última equação através de uma equação diferencial parcial, deve-se primeiramente parametrizar a superfície. Utilizando os parâmetros x e y das coordenadas cartesianas pode-se escrever a equação paramétrica para a superfície como

$$\vec{\sigma}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + [\xi(x, y) - h]\hat{k}. \quad (3.8)$$

onde a origem do sistema está representada na Figura 1.5, com os eixos x e y paralelos ao substrato. Agora, lembrando que o elemento de área de uma superfície pode ser obtido através de sua parametrização pela seguinte expressão

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} \right\| dx dy, \quad (3.9)$$

temos que,

$$dS = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dx dy, \quad (3.10)$$

ou melhor,

$$S = \iint \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dx dy. \quad (3.11)$$

Admitindo que a função $\xi(x, y)$ varia suavemente, pode-se expandir o integrando em binômio de Newton, obtendo-se

$$S = \iint \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 1 \right] dx dy, \quad (3.12)$$

tal que a variação da superfície é dada por

$$\delta S = \iint \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \delta \xi}{\partial y} \right\} dx dy. \quad (3.13)$$

Integrando por partes, encontra-se

$$\delta S = - \int \int \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \delta \xi dx dy. \quad (3.14)$$

Substituindo então as Equações (3.14) e (3.10) na Equação (3.7), obtém-se que

$$p_2 = p_1 - \alpha \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right). \quad (3.15)$$

Esta última equação descreve o perfil que se deseja encontrar. No entanto, as pressões p_1 e p_2 não são conhecidas a princípio, assim, faz-se necessário a utilização do potencial químico por unidade de massa, μ , que como mencionado anteriormente deve ser a energia livre de Gibbs acrescido do potencial gravitacional e da interação de van der Waals do hélio com o substrato,

$$\mu = \frac{p}{\rho} - sT - gH - \frac{\gamma}{\sigma \xi^3(x,y)}, \quad (3.16)$$

onde p é a pressão por unidade de massa, $\rho = 0,145g/cm^3$ a densidade do hélio, $\gamma = 9,5 \times 10^{-15}erg$ a constante de acoplamento de van der Waals para o substrato de vidro, s a entropia específica por unidade de massa, $gz(r)$ a energia potencial por unidade de massa na altura $z(r)$ e g a aceleração da gravidade. Consequentemente, o potencial químico total por unidade de massa da superfície livre de hélio líquido na altura $-H$ é dado por

$$\mu_1 = \frac{p_1}{\rho} - sT - gH, \quad (3.17)$$

e o potencial químico do líquido de hélio suspenso é

$$\mu_2 = \frac{p_2}{\rho} - sT + gz(x,y) - \frac{\gamma}{\sigma \xi^3(x,y)}, \quad (3.18)$$

onde, pela parametrização da superfície, temos que, $z(x,y) = \xi(x,y) - h$. Utilizando a condição de que no equilíbrio termodinâmico o potencial químico deve ser constante na superfície, $\mu_1 = \mu_2$, facilmente pode-se encontrar uma expressão que relaciona o termo $p_1 - p_2$ aos parâmetros conhecidos do sistema,

$$p_1 = p_2 + g\rho (\xi(x,y) + H - h) - \frac{\gamma}{\xi^3(x,y)}. \quad (3.19)$$

Substituindo a Equação (3.19) na Equação (3.15), obtém-se a equação diferencial que descreve a superfície de hélio líquido suspenso

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{g\rho}{\alpha} (\xi(x,y) + H - h) - \frac{\gamma}{\alpha \xi^3(x,y)}. \quad (3.20)$$

É fácil notar que essa equação é não linear devido ao termo $\gamma/\alpha\xi^3(x,y)$. Para contornar o problema de encontrar uma solução analítica para uma equação não linear, como a descrita acima, faz-se necessária a utilização de métodos numéricos. Assim, os resultados mostrados na próxima Seção foram obtidos através do método das diferenças finitas combinado com o método da relaxação [65].

3.2 Resultados para os perfis

A equação que descreve a superfície obtida na seção anterior foi resolvida para quatro diferentes formas de substratos, gerando então diferentes superfícies. Os substratos serão novamente apresentados a seguir com o intuito de facilitar a leitura desta Seção. É apresentado, então, um estudo de como essas superfícies são modificadas com a variação do banho de hélio, H . Para todas as geometrias, as profundidades das cavidades foram consideradas iguais, $h = 3000nm$, uma vez que a variação desta não representa uma forma prática, do ponto de vista experimental, no ajuste da superfície. Como condição de contorno, utilizou-se o fato de que nas bordas da cavidade a superfície deve assumir o valor h , isto é, deve estar colada no topo da cavidade. Para um dos casos, no entanto, também utilizaram-se condições de contorno periódicas, o que significa que o sistema estudado representa apenas uma célula que deve se repetir periodicamente, simulando um sistema muito grande.

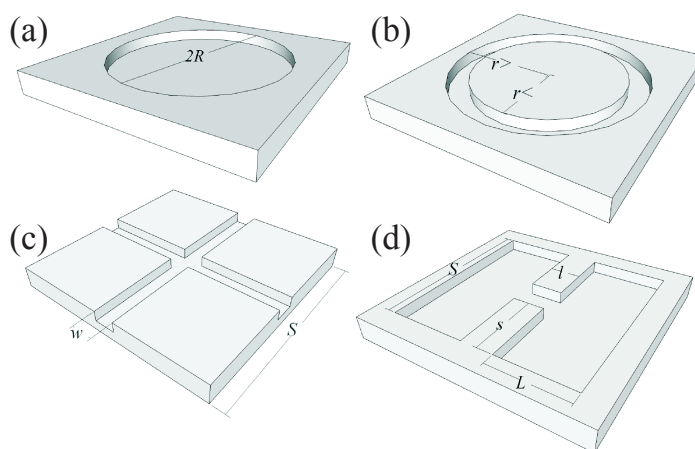


Figura 3.1: Modelo da geometria das quatro cavidades investigadas neste trabalho: (a) uma cavidade circular de raio R ; (b) uma cavidade em forma de anel circular com raio interno $r_<$ e raio externo $r_>$; (c) a interseção entre dois canais perpendiculares de largura w ; (d) duas cavidades conectadas por um canal estreito.

Nota-se que os dois primeiros casos apresentados nesta Seção, ilustrados pelas Figuras 3.1(a) e 3.1(b), apresentam simetria circular. Dessa forma, devido a essa simetria, a superfície não deve apresentar variações ao longo da direção angular, sendo extremamente conveniente

resolver a Equação (3.20) em coordenadas cilíndricas, onde o problema se resumirá apenas a uma única coordenada, a radial, como mostra a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{g\rho}{\alpha} (\xi(r) + H - h) - \frac{\gamma}{\alpha \xi^3(r)}. \quad (3.21)$$

Em particular, para a cavidade cilíndrica de raio R , o perfil de hélio líquido deve apresentar derivada nula no centro da cavidade, pois apenas assim a simetria circular é garantida. Assim, as condições de contorno podem ser expressas por $\xi(R) = h$ e $\xi'(0) = 0$. A superfície de forma geral deve ser dada então por uma rotação de 2π do resultado obtido para o perfil em torno do eixo normal à cavidade. Obviamente, pode-se assumir também como condições de contorno, $\xi(R) = \xi(-R) = h$, e em seguida reproduzir a superfície através de uma rotação de apenas π em torno do eixo z . No entanto, do ponto de vista computacional esta não representa a escolha mais esperta, uma vez que exigiria o dobro de pontos no *grid* espacial.

Como será discutido posteriormente, para o caso da cavidade em forma de casca cilíndrica de raio interno $r_<$ e raio externo $r_>$, Figura 3.1(b), apesar da simetria do substrato não é possível saber a exata posição do mínimo local, de tal forma que a condição de contorno para o ponto de mínimo da função ξ não pode ser utilizada como para o caso da cavidade cilíndrica. Assim, as condições de contorno utilizadas devem ser as condições de contorno usuais, isto é, $\xi(r_<) = h$ e $\xi(r_>) = h$.

3.2.1 Resultados para a cavidade cilíndrica

Os perfis de hélio para o substrato de cavidade cilíndrica são apresentados na Fig.3.2 (a), para um banho de hélio $H = 10\text{cm}$, onde foram considerados diversos valores para raio da cavidade, $R = 300\text{nm}$ (preto, linha sólida), 500nm (vermelho, linha tracejada), 700nm (azul, linha pontilhada), 900nm (verde, linha tracejada-pontilhada), 1500nm (amarelo, linha tracejada-pontilhada-pontilhada). Um ampliação dos resultados para $R = 300$ e 500nm é mostrada na Figura 3.2 (b), onde *fits* parabólicos para essas curvas são ilustrados através de símbolos. Surpreendentemente, as parábolas fitam perfeitamente os resultados numéricos obtidos, o que implica que, apesar de a Equação (3.21) possuir uma forma complicada, com um termo não-linear, uma solução polinomial de segunda ordem $\xi(r) = ar^2 + br + c$ deve satisfazer a essa equação diferencial, pelo menos sob algumas circunstâncias especiais.

Para encontrar as circunstâncias sob as quais a superfície é paraboloidal, é escolhido um polinômio de segunda ordem que satisfaz as condições de contorno, o que nos leva a $b = 0$ e $c = h - aR^2$. Assim, a solução deve ser da forma $\xi(r) = a(r^2 - R^2) + h$. Substituindo-a na

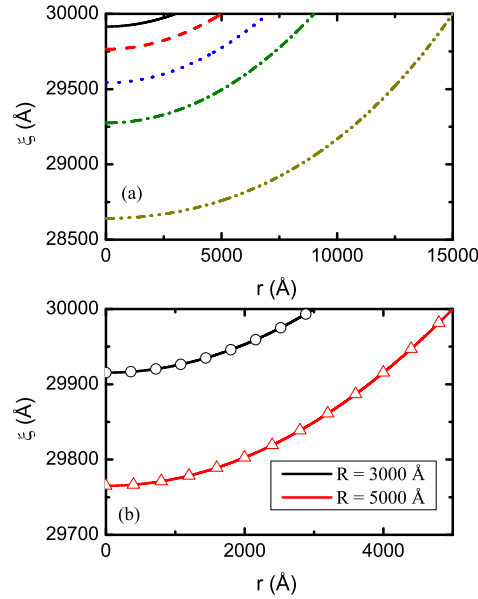


Figura 3.2: (a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade cilíndrica para diversos valores de raio R : 300 (preto, linha sólida), 500 (vermelho, linha tracejada), 700 (azul, linha pontilhada), 900 (verde, linha tracejada-pontilhada) e 1500 nm (amarelo, linha tracejada-pontilhada-pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi $h = 3000$ nm e o banho de hélio tomado foi $H = 10$ cm. (b) Ampliação dos resultados obtidos em (a) para $R = 300$ e 500 nm, com *fits* polinomiais de segunda ordem para esses resultados representados por símbolos.

equação diferencial (3.21), obtém-se

$$a \left[4 - \frac{\rho g}{\alpha} (r^2 - R^2) \right] = \frac{\rho g H}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha h^3 [1 + a(r^2 - R^2)/h]^2}. \quad (3.22)$$

O termo $(r^2 - R^2)$ assume o valor máximo quando $r = 0$. Nesse caso, o lado esquerdo da Equação (3.22) possui um termo $4 - \rho g R^2 / \alpha$. Substituindo os valores de ρ , g e α , observa-se que $\rho g / \alpha \approx 10^{-14} \text{Å}^{-2}$, então $\rho g R^2 / \alpha$ assume valores da ordem de 4 apenas quando $R \approx 10^7 \text{Å}$, que é bem além das dimensões dos sistemas estudados nesse trabalho. Quando $r \rightarrow R$, o segundo termo do lado esquerdo da equação é ainda menor, de tal forma que esse pode ser muito bem aproximado por $4a$. Por outro lado, considerando os valores de banhos de hélio tomados neste trabalho, que são da ordem de $H \approx 5 \times 10^8 \text{Å}$, pode-se estimar o valor do primeiro termo do lado direito da expressão $\rho g H / \alpha \approx 10^{-6} \text{Å}^{-1}$. Considerando que a profundidade da cavidade do substrato é $h \approx 10^4 \text{Å}$, o segundo termo do lado direito da equação é apenas da ordem de 10^{-9} , podendo então ser desprezado. Dessa forma, a Equação (3.22) pode ser resumida, sob as condições impostas nesse trabalho, a

$$a = \frac{\rho g H}{4\alpha}. \quad (3.23)$$

A concavidade prevista aqui é praticamente a mesma encontrada por Kovdrya e Monarkha [67], para filmes de hélio suspenso em um substrato com canais unidimensionais, exceto pelo fator $1/2$, que se deve à dimensionalidade do sistema tratado. Isto confirma a validade da aproximação parabólica nos trabalhos anteriores, mas apenas sob certas circunstâncias. Além disso, sob essas condições a parábola possui a mesma concavidade independentemente do raio, podendo ser modificada apenas variando o banho de hélio H . As parábola utilizada no *fit* dos resultados para $R = 300$ e 500nm , com $H = 10\text{cm}$ na Figura 3.2 possui uma concavidade $a = 9,398 \times 10^{-6} \text{ \AA}^{-1}$, que é muito próxima da encontrada pela Equação (3.23).

3.2.2 Resultados para a cavidade em forma de casca cilíndrica

Antes de estudar as condições de parabolicidade para o caso da cavidade em forma de casca cilíndrica, é interessante analisar como se comporta o perfil quando o raio interno $r_<$ é mantido fixo e o raio externo $r_>$ é alterado. Através dos resultados observados na Figura (3.3), o perfil para raios externos maiores atinge valores menores. De fato, este é um resultado esperado pelo menos na maioria dos casos, já que aumentar o raio externo mantendo raio interno fixo significa aumentar o volume da cavidade a ser preenchido pelo hélio líquido. Assim, como o banho de hélio é mantido constante, $H = 1\text{cm}$, o ponto de mínimo do perfil deve assumir valores cada vez mais baixos com o crescimento do raio externo.

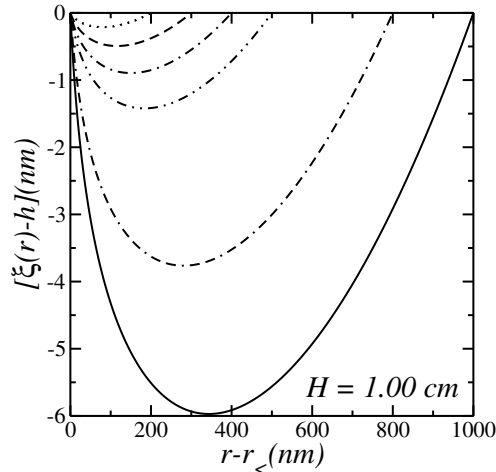


Figura 3.3: Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade em forma de casca cilíndrica, com raio interno $r_< = 20$ nm, para diversos valores de raio externo $r_>$: 220 (linha pontilhada), 320 (linha tracejada), 420 (linha tracejada-pontilhada), 520 (linha tracejada-pontilhada-pontilhada), 820 nm (linha tracejada-tracejada-pontilhada) e 1020 nm (linha sólida). A profundidade da cavidade considerada foi $h = 3000$ nm e o banho de hélio tomado foi $H = 1$ cm.

Como foi mostrado anteriormente para a cavidade cilíndrica, os limites impostos nas dimensões do sistema nos levam a uma solução parabólica para o perfil de hélio líquido. O

mesmo não ocorre para a cavidade em forma de casca cilíndrica, como pode ser visto pela Figura 3.3, onde os perfis são claramente assimétricos. Ao variar o banho de hélio, a assimetria permanece e a parabolicidade não é obtida, como mostrado na Figura 3.4 através dos resultados obtidos para três valores de banhos de hélio diferentes $H = 3, 6$ e 9cm , onde os símbolos ilustram a tentativa de aproximar as curvas por um polinômio de segunda ordem.

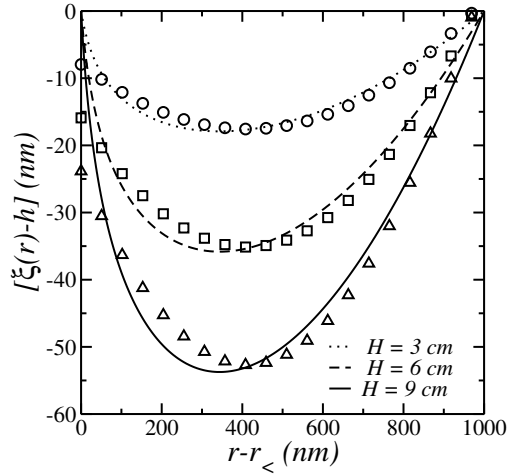


Figura 3.4: Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade em forma de casca cilíndrica, com raio interno $r_< = 20\text{ nm}$ e $r_> = 1020$, para diversos valores de banho de hélio, H : 3 (linha pontilhada), 6 (linha tracejada) e 9 cm (linha sólida). Os símbolos representam a tentativa de aproximar as respectivas curvas por parábolas. A profundidade da cavidade considerada foi $h = 3000\text{ nm}$ e o banho de hélio tomado foi $H = 1\text{ cm}$.

De fato, espera-se que a parabolicidade do sistema nesse caso dependa bem mais da razão entre os raios externos e internos do que propriamente do banho de hélio, uma vez que o efeito da tensão superficial é uma função do perímetro do círculo de centro na origem e de raio $|\vec{r}|$. Essa dependência proporciona tal assimetria mostrada anteriormente, já que a tensão superficial se manifesta de forma diferente nas partes mais internas, próximas de $r_<$ e mais externas, próximas de $r_>$. No entanto, ao fazer o raio médio do sistema assumir valores altos comparados com a largura do canal, que foi mantida fixa ($r_> - r_< = 100\text{ nm}$), como ilustrado na Figura 3.5 (a), essa diferença entre as partes próximas de $r_<$ e as próximas de $r_>$ passa a ser desprezível e observa-se que o perfil passa a assumir uma forma simétrica. A tentativa de aproximar as curvas numéricas por parábolas, representadas pelos símbolos na Figura 3.5(b), mostram que essa curva para a qual os perfis devem convergir com o crescimento do raio médio deve ser uma parábola.

Uma vez que o arco de uma circunferência deve ser aproximado de uma reta quando o raio desta vai para infinito, por razões intuitivas, é de se esperar então que esta parábola obtida para a cavidade em forma de casca cilíndrica com valores elevados de raio médio seja exatamente

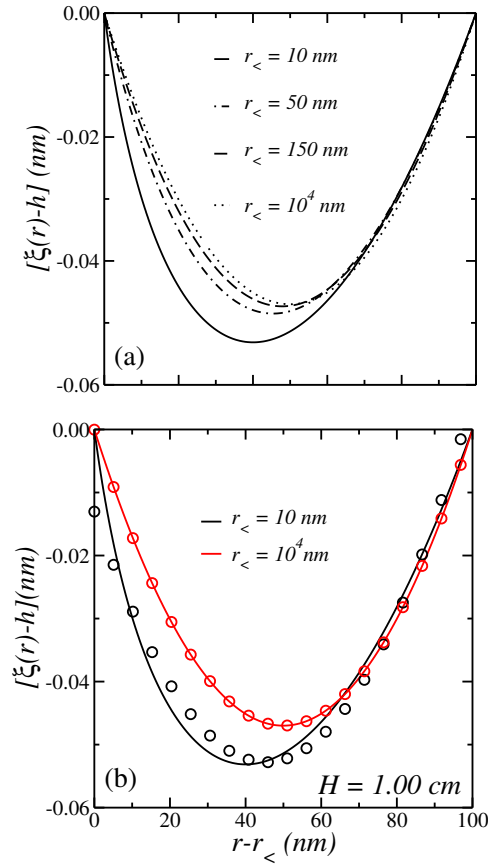


Figura 3.5: (a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre uma cavidade em forma de casca cilíndrica para diversos valores de raio interno $r_<$: 10 (sólida), 50 (tracejada-pontilhada), 150 (tracejada) e 10000 nm (pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi de $h = 3000$ nm e o banho de hélio tomado foi $H = 1$ cm. (b) Ampliação das curvas apresentadas no item (a) para os raios internos 10 e 10^4 nm. Em todos os casos a espessura da cavidade foi mantida fixa, valendo $dR = 100$ nm

a mesma obtida por Kovdrya e Monarkha [67], isto é, esta parábola deve possuir a mesma parabolicidade, que é dada por

$$a = \frac{\rho g H}{2\alpha}. \quad (3.24)$$

Outro resultado interessante, que foge ao senso comum, pode ser observado também através dos resultados apresentados na Figura 3.5, onde o aumento do raio médio e o consequente aumento do volume a ser preenchido pelo hélio líquido não provocam um decaimento do ponto mínimo da superfície e sim um levantamento.

3.2.3 Substrato com duas cavidades retangulares ligadas por uma cavidade estreita

Na Figura 3.6, é apresentado um dos modelos para substratos sugeridos neste trabalho para o cálculo de superfície, que consiste basicamente de duas cavidades de formas retangulares, conectadas por uma cavidade mais estreita. Na verdade, como mencionado na Introdução, esse modelo já foi proposto em outros trabalhos na literatura. No entanto, em nenhum destes, os efeitos oriundos da superfície foram levados em conta, tornando imprescindível o seu estudo aqui. As dimensões utilizadas para esse sistema, quando não mencionadas, são: $S = 450$ nm, $s = 100$ nm, $L = 400$ nm e $l = 100$ nm.

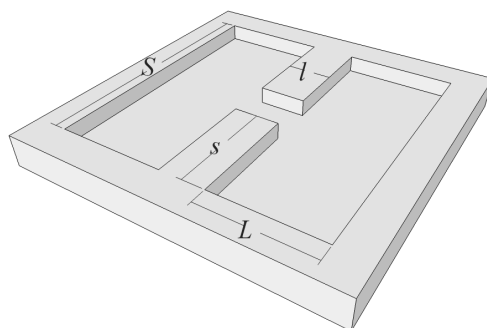


Figura 3.6: Substrato com duas cavidades retangulares conectadas por um canal estreito. As cavidades retangulares apresentam dimensões $S = 450$ nm e $L = 400$ nm. Já a canaleta apresenta um comprimento dado por $l = 100$ nm e uma largura dada por $S - 2s$, com $s = 100$ nm quando não especificado.

Antecipadamente, pode-se concluir através de uma análise da geometria do substrato, que nas regiões próximas do centro das cavidades retangulares, a superfície $\xi(x, y)$ deve assumir seu valor mínimo nas duas direções espaciais x e y , uma vez que essa região se encontra mais distante das bordas. Por outro lado, na parte central do canal, o hélio líquido também deve assumir um valor de mínimo na direção perpendicular à direção do canal. Esse mínimo, no entanto, deve ser obviamente mais elevado que os dois mínimos formados na região central de cada cavidade retangular, já que este se encontra em uma região mais próxima das bordas da cavidade. Dessa forma, na direção paralela ao canal deve haver um ponto de máximo local exatamente no centro do sistema, formando, então, um "ponto de sela", isto é, um ponto que em uma dada direção representa um máximo local e em outra direção representa um ponto de mínimo. Esse resultado é ilustrado de forma qualitativa através do gráfico apresentado na Figura 3.7, obtido através da solução numérica da Equação (3.20), na qual a condição de contorno utilizada para esse sistema foi de que, nas bordas, a função $\xi(x, y)$ deve assumir o valor $h = 3000$ nm. No gráfico apresentado pela Figura 3.7 as cores dão a noção de profundidade da superfície $\xi(x, y)$. A cor vermelha representa valores mais elevados da superfície, isto é, mais próximos

de h e a cor azul representa as regiões onde o hélio líquido é mais profundo.

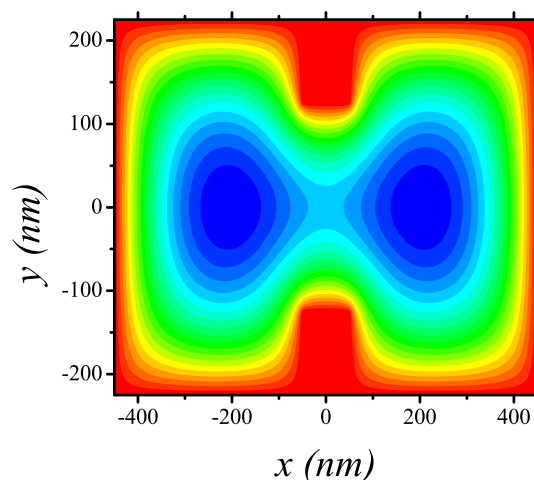


Figura 3.7: Resultado numérico para a superfície de hélio líquido suspensa sobre duas cavidades retangulares ligadas por uma canaleta, com banho de hélio $H = 6$ cm. As cores dão a noção de profundidade da superfície $\xi(x, y)$. A cor vermelha representa valores mais elevados da superfície, isto é, mais próximos de h e a cor azul representa as regiões onde o hélio líquido é mais profundo.

Para uma visualização mais simples, na Figura 3.8 o perfil de hélio líquido suspenso é apresentado através de um corte na superfície em $y = 0$ para diferentes valores de banho de hélio, $H = 3, 6$ e 9 cm. Claramente, é possível observar que os pontos de mínimo e o ponto de máximo não decrescem na mesma proporção com o aumento do banho de hélio. Uma vez que o banho de hélio é facilmente ajustável, esse resultado é extremamente importante, já que a altura da barreira, isto é, a distância relativa entre o máximo local e os pontos de mínimo da superfície, pode ser facilmente regulada no experimento.

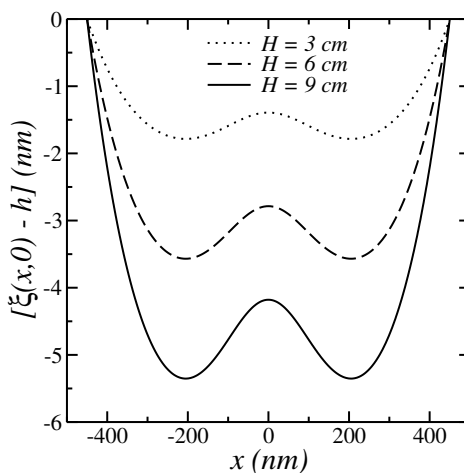


Figura 3.8: Perfis da superfície de hélio líquido para duas cavidades retangulares conectadas, considerando três valores de banho de hélio H : 3 (linha pontilhada), 6 (linha tracejada) e 9 cm (linha sólida).

Para mostrar essa propriedade explicitamente, a altura da barreira foi calculada para diversos valores de banho de hélio, tornando possível a construção do resultado apresentado na Figura 3.9. Impressionantemente, apesar da não linearidade da equação diferencial que descreve a superfície, a altura da barreira cresce de forma linear com o aumento do banho de hélio, H . A princípio pode-se pensar que essa propriedade deve ser exclusiva da geometria do sistema. No entanto, para mostrar que isso não é verdade, o gráfico foi construído considerando três larguras diferentes para a cavidade, indicando que esse resultado a princípio não depende da escolha das dimensões do sistema. De fato, isso também pode ser facilmente observado para o caso da cavidade cilíndrica, onde foi mostrado que a parabolicidade deve variar linearmente com o banho de hélio H , tendo como consequência imediata que o valor de mínimo da superfície também deve decrescer linearmente com H . Dessa forma, essa propriedade parece ser oriunda da própria equação, não dependendo das condições de contorno do sistema.

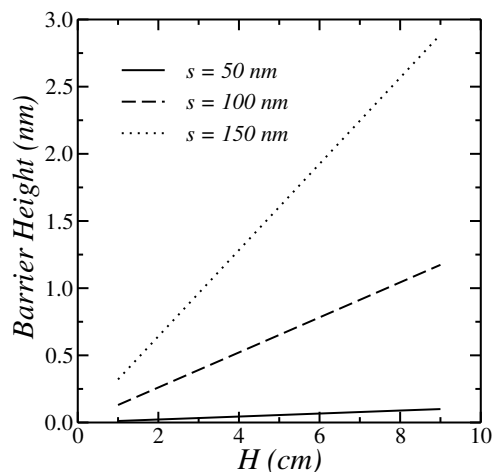


Figura 3.9: Altura da barreira de hélio líquido para diferentes valores da largura da cavidade, definida por $S - 2s$.

O resultado apresentado na Figura 3.9 mostra também uma outra forma de alterar a altura da barreira, que se dá através do ajuste da largura do canal, variação que não é experimentalmente viável. Assim, não será dado foco para esse tipo de ajuste.

3.2.4 Substratos com cavidades cruzadas

O substrato que apresenta cavidades cruzadas é definitivamente um dos sistemas mais interessantes para estudar efeitos da superfície de hélio líquido sobre sistemas físicos, pois, como será visto posteriormente, a forma desta superfície permite um controle no transporte dos portadores de carga. O modelo para esse tipo de substrato é apresentado na Figura 3.10, onde as dimensões consideradas, quando não especificadas, foram $w = 150$ nm e $S = 500$ nm.

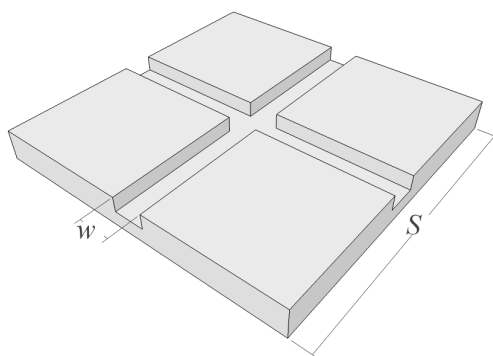


Figura 3.10: Substrato com duas cavidades em formas de canais que se interceptam perpendicularmente. As cavidades apresentam dimensões $w = 150$ nm e $S = 500$ nm, quando não especificadas.

Para este caso especificamente, além das condições de contornos usuais, isto é, de que nas bordas do sistema $\xi = h$, foram utilizadas condições de contorno periódicas, justificando as cavidades abertas na ilustração apresentada na Figura 3.11, assim, o sistema representa apenas uma célula que deve se repetir periodicamente. O resultado representado na Figura 3.11 ilustra de forma qualitativa a solução obtida a partir da resolução da Equação (3.20) para essa geometria.

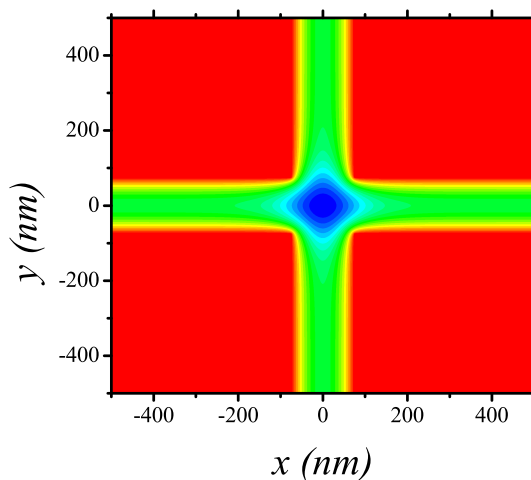


Figura 3.11: Resultado numérico para a superfície de hélio líquido suspensa sobre um substrato que apresenta cavidades em forma de canais que se interceptam perpendicularmente, com banho de hélio $H = 6$ cm. As cores dão a noção de profundidade da superfície $\xi(x,y)$. A cor vermelha representa valores mais elevados da superfície, isto é, mais próximos de h e a cor azul representa as regiões onde o hélio líquido é mais profundo.

Analogamente à Seção anterior, a análise da geometria da cavidade nos levaria à percepção da existência de um mínimo global no centro da célula e de um máximo local na metade da distância entre duas células vizinhas. Fazendo um corte da superfície em $y = 0$, essa afirmação

pode ser facilmente verificada, como ilustrado na Figura 3.12.

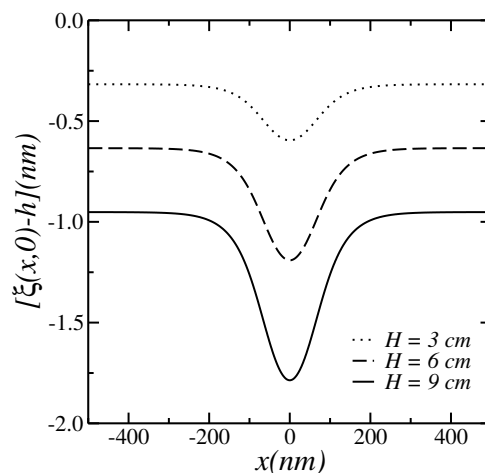


Figura 3.12: Perfis da superfície de hélio líquido para duas cavidades que se cruzam ortogonalmente, considerando três valores de banho de hélio H : 3 (linha pontilhada), 6 (linha tracejada) e 9 cm (linha sólida).

Novamente, a existência desses pontos de máximo e mínimo nos levam à definição da altura da barreira que claramente pode ser ajustada variando o banho de hélio. Através do resultado apresentado na Figura 3.13, observa-se que a altura da barreira para essa geometria também cresce linearmente com o aumento do banho de hélio, comprovando a afirmação de que essa propriedade deve ser uma característica oriunda da equação da superfície, sendo inerente ao tipo de sistema considerado.

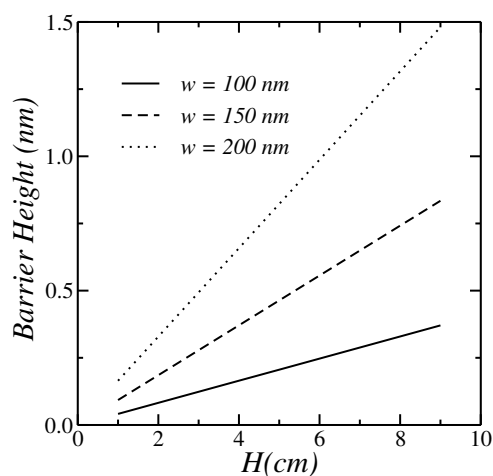


Figura 3.13: Altura da barreira de hélio líquido para diferentes valores de largura da cavidade, w .

Capítulo 4

Elétrons confinados em superfícies de hélio

Um dos benefícios da suspensão de filmes de hélio em substratos com cavidades é a possibilidade de gerar estruturas de confinamento eletrônico. Um vez que o elétron esteja depositado sobre a superfície de hélio suspensa, este se encontra confinado lateralmente devido às barreiras impostas pela própria superfície. Por outro lado, para garantir que o elétron esteja sempre sobre a superfície, um campo elétrico externo é aplicado na direção normal ao substrato. O confinamento em duas ou mais direções, por sua vez, nos permite gerar nanoestruturas de confinamentos, como anéis e pontos quânticos.

Neste Capítulo, serão abordadas três formas de confinamentos diferentes a partir das superfícies estudadas anteriormente. Uma vez que o confinamento de um elétron na cavidade em forma de canal circular já foi amplamente estudado [29], essa estrutura não será investigada aqui.

4.1 Hamiltoniano

Na Introdução, foi mostrado que um elétron a uma distância z de uma superfície plana de hélio líquido deve polarizá-la, gerando uma interação de carga-imagem que prende o elétron à superfície. Na presença de um campo elétrico externo F , esse elétron deve ser empurrado ainda mais contra a superfície, que ocupa a região $z < 0$ do espaço. Por outro lado, o princípio da exclusão de Pauli impede que o elétron penetre na superfície, representando um potencial de aproximadamente 1 eV. Dessa forma, o potencial total sentido pelo elétron nessas condições é dado por

$$V(z) = \begin{cases} -\Lambda/z + Fz & \text{se } z > 0 \\ V_0 \approx 1eV & \text{se } z < 0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde $\Lambda \equiv e(\varepsilon - 1)/4(\varepsilon + 1)$, com $\varepsilon = 1,057$.

Uma vez que a superfície considerada é curva, o potencial apresentado pela Equação (4.1) não é mais válido. No entanto, é bastante conhecido que os espaçamentos entre os níveis de energia na direção z são grandes quando comparados às temperaturas típicas do hélio líquido, de tal forma que o sistema é essencialmente bidimensional. Assumindo que o elétron está vinculado a se mover apenas sobre a superfície bidimensional, descrita por $\xi(x, y)$, o campo elétrico externo $\vec{F} = F\hat{z}$ produz um confinamento lateral $V_F = eFz = eF\xi(x, y)$. De fato, a curvatura da superfície, por si só, também produz um potencial de confinamento lateral, mesmo na ausência de campo elétrico externo [66]. No entanto, o potencial da curvatura intrínseca é muito pequeno se comparado ao potencial produzido pelo campo elétrico, então, esse pode ser desprezado para uma boa aproximação. Além disso, uma vez que a constante dielétrica do hélio líquido é muito próxima da constante dielétrica do vácuo, o efeito carga-imagem pode também ser desconsiderado. Assim, o Hamiltoniano do sistema deve ser dado por

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla_{2D}^2 + eF[\xi(x, y) - \xi_{min}], \quad (4.2)$$

onde ∇_{2D}^2 representa o laplaciano no plano das coordenadas x e y , e ξ_{min} representa o referencial na direção z para o potencial, sendo dado por $\xi_{min} = \min[\xi(x, y)]$. Note que não há menção de nenhum termo de interação do elétron com o substrato. De fato, essa interação deve existir e deve ser proporcional ao inverso do quadrado da distância entre o elétron e o substrato[13]. No entanto, a escolha apropriada para a profundidade da cavidade torna a distância elétron-substrato relativamente grande, fazendo que essa interação seja desprezível.

Uma vez que $\xi(x, y)$ é conhecido e considerando que o elétron está fortemente preso à superfície, isto é, considerando que o elétron ocupa apenas o estado fundamental na direção z , as energias de confinamento no plano podem ser encontradas através da solução da equação de Schroedinger $\hat{H}\Psi = E\Psi$. A equação foi resolvida para todos os casos apresentados no capítulo anterior, exceto para a cavidade em forma de canal circular, uma vez que esse caso já foi estudado na literatura.

Para cavidade cilíndrica, a equação de Schroedinger pode ser resolvida de forma analítica, já que o potencial deve ser parabólico. Para esse sistema, devido sua simplicidade, será considerada a presença de dois elétrons que interagem via potencial de Coulomb, sob ação de um campo magnético externo na direção z . Para os outros sistemas, no entanto, a resolução da equação não se dá de forma analítica, uma vez que não se conhece, nem mesmo de forma aproximada, uma expressão analítica para os potenciais. Para contornar esse problema, as derivadas na expressão (4.2) para o Hamiltoniano são aproximadas através do método de diferenças fi-

nitais, de tal forma que a equação de Schroedinger se torna uma matriz pentadiagonal. Essa equação matricial de autovalores é então resolvida numericamente, obtendo-se assim os níveis de energia E_n e as autofunções Ψ_n que definem os estados acessíveis do elétron.

4.2 Ponto Quântico

Pontos quânticos são nanoestruturas caracterizadas pelo confinamento dos portadores de carga nas três dimensões espaciais. Essas estruturas já foram amplamente estudadas em materiais semicondutores. Uma das formas de gerar um ponto quântico se dá através da aplicação do campo elétrico sobre um elétron que se encontra confinado lateralmente na superfície gerada sobre a cavidade cilíndrica, que como visto anteriormente, pode ser perfeitamente aproximada por uma parábola sob certas condições. Considerando apenas um elétron nessa superfície, o potencial experimentado por este é $V(z) = eEz$. Com a condição de que o elétron está sobre a superfície, $z = ar^2$, obtém-se que $V(z(r)) = eaEr^2$, ou melhor

$$V(z(r)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2, \quad (4.3)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{2aeE/m}$. Dessa forma, o potencial sentido por um elétron em uma superfície parabólica deve também ser parabólico, com frequência ω_0 , sendo a a parabolicidade da superfície, obtida no Capítulo anterior, dada por $a = \rho gH/4\alpha$. Assim, esse problema pode ser facilmente resolvido, como será mostrado a seguir.

4.2.1 Solução da Equação de Schroedinger para o ponto quântico

Com a aproximação parabólica para o potencial e considerando dois elétrons que interagem via potencial de Coulomb, pode-se escrever o potencial do sistema confinado como

$$V = \frac{1}{2}m\omega_0^2r_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2r_2^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|r_1 - r_2|}. \quad (4.4)$$

Por outro lado, se o sistema estiver sujeito a um campo magnético externo aplicado na direção do eixo da parábola, a energia cinética do sistema é dada por

$$K = \frac{1}{2m}[\vec{p}_1 - e\vec{A}_1]^2 + \frac{1}{2m}[\vec{p}_2 - e\vec{A}_2]^2. \quad (4.5)$$

Assim, o Hamiltoniano, que deve ser a energia total do sistema, $H = K + V$, pode ser escrito como

$$H = \frac{1}{2m}[\vec{p}_1 - e\vec{A}_1]^2 + \frac{1}{2m}[\vec{p}_2 - e\vec{A}_2]^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2r_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2r_2^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|r_1 - r_2|}. \quad (4.6)$$

Para resolver a equação de Schroedinger correspondente ao Hamiltoniano descrito anteriormente é preciso realizar uma mudança de coordenadas, de tal forma que a equação se torne separável. Usando a coordenada do centro de massa $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ e a coordenada relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, o Hamiltoniano pode ser reescrito como $H = H_r + H_R$, onde

$$H_r = \frac{1}{2\mu}(\vec{p} + q\vec{A})^2 + \frac{1}{4}m\omega_0^2 r^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.7)$$

$$H_R = \frac{1}{2M}(\vec{P} + Q\vec{A}) + m\omega_0^2 R^2, \quad (4.8)$$

com $q = \frac{e}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}m$, $Q = 2e$ e $M = 2m$. Além disso, a introdução desse novo sistema de coordenadas dá origem a novos operadores de momento

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad (4.9)$$

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_R = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (4.10)$$

Assumindo um *gauge* simétrico para o potencial vetor \vec{A} de um campo magnético aplicado na direção z , lê-se

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 - \frac{i\hbar\omega_c}{2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.11)$$

$$H_R = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 - \frac{i}{2}\hbar\omega_c\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2}M\omega^2 R^2, \quad (4.12)$$

onde $\omega_c = eB/m$ é a frequência de ciclotron e $\omega = \omega_0 + \omega_c^2/4$. A separabilidade da equação de Schroedinger nos permite escrever a função de onda para duas partículas na forma $\Psi(\vec{r}, \vec{R}) = \Psi_r(\vec{r})\Psi_R(\vec{R})$, resumindo o problema de uma equação de autovalor com duas coordenadas para dois problemas de autovalores de apenas uma coordenada,

$$H_R\Psi_R(\vec{R}) = E_R\Psi_R(\vec{R}), \quad (4.13)$$

$$H_r\Psi_r(\vec{r}) = E_r\Psi_r(\vec{r}). \quad (4.14)$$

Assumindo que $\Psi_R(\vec{R}) = \Gamma(R)\Phi(\phi)$ e $\Psi_r(\vec{r}) = \Upsilon(r)\Omega(\phi)$, pode-se tirar vantagem da simetria circular do problema para resolver as equações para ϕ e φ , com $\Phi(\phi) = e^{iL\phi}$ e $\Omega(\phi) = e^{il\phi}$. Como a função de onda é necessariamente periódica na direção angular (com período 2π), é obtido que $L, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A equação para parte radial do centro de massa, $\Gamma(R)$, por sua vez, é dada por

$$\frac{d^2\Gamma}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\Gamma}{dR} - \frac{L^2\Gamma}{R^2} - \frac{ML\omega_c\Gamma}{\hbar} - \frac{M^2\omega^2 R^2\Gamma}{\hbar^2} + \frac{2M\epsilon_R\Gamma}{\hbar} = 0, \quad (4.15)$$

realizando a seguinte mudança de variável $\zeta = R^2/2a^2$, onde $a = \sqrt{\hbar/2M\omega}$, obtém-se a seguinte equação

$$\zeta \frac{d^2\Gamma}{dR^2} + \frac{d\Gamma}{dR} - \frac{L^2\Gamma}{4\zeta} - \frac{\omega_c L\Gamma}{4\omega} - \frac{\zeta\Gamma}{4} + \frac{\varepsilon_R\Gamma}{2\omega\hbar} = 0. \quad (4.16)$$

Ao admitir uma solução da forma $\Gamma(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{2}} \zeta^{\frac{|L|}{2}} F(\zeta)$ para equação acima, a equação de Laguerre Generalizada é obtida

$$\zeta F'' + [(|L| + 1) - \zeta]F' + \left(\frac{\varepsilon_R}{2\omega\hbar} - \frac{\omega_c L}{4\omega} - \frac{|L|}{2} - \frac{1}{2}\right)F = 0, \quad (4.17)$$

onde, para garantir a convergência da solução, o último termo entre parênteses que multiplica $F(\zeta)$ deve ser um inteiro N . Dessa forma, é obtido que a energia da parte radial do centro de massa é dada por

$$\varepsilon_R = (2N + |L| + 1)\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_c L. \quad (4.18)$$

Infelizmente, a equação para $\Upsilon(r)$ não pode ser resolvida por métodos analíticos, então será utilizado um método numérico desenvolvido em [69] baseado no método de diferenças finitas. A equação para a parte radial da coordenada relativa pode ser escrita na forma adimensional como

$$\Upsilon'' + \frac{1}{r}\Upsilon' + \left(\varepsilon_r - \frac{a_0\mu\omega^2}{2R_y}r^2 - \frac{l^2}{r^2} - \frac{2}{r} - \frac{l\hbar\omega_c}{2R_y}\right)\Upsilon = 0, \quad (4.19)$$

onde as variáveis de espaço e energia foram divididas pelo raio de Bohr, a_0 , e a energia de Rydberg R_y , respectivamente. Através da resolução numérica dessa equação, obtém-se a contribuição das coordenadas relativas ε_r para as autoenergias totais do sistema $E = \varepsilon_R + \varepsilon_r$.

4.2.2 Efeito Zeeman

Ao Hamiltoniano do sistema, deve ser acrescentado ainda o termo de interação dos momentos magnéticos dos elétrons, $\vec{\mu}_1$ e $\vec{\mu}_2$, com o campo magnético aplicado, \vec{B} , conhecido como efeito Zeeman. Uma vez que o elétron possui momento magnético μ , dado por

$$\vec{\mu}_i = \frac{e\vec{S}_i}{m_e c}, \quad (4.20)$$

onde o índice i denota o elétron $i = 1, 2$ com spin S_i , então, para os elétrons 1 e 2, os momentos magnéticos são respectivamente $\mu_1 = e\vec{S}_1/m_e c$ e $\mu_2 = e\vec{S}_2/m_e c$. Uma vez que o momento magnético total do sistema deve ser dado pela soma dos dois momentos magnéticos, $\mu_T = \mu_1 + \mu_2$, a interação do momento magnético total do sistema com o campo magnético externo pode ser expressada da seguinte forma [68]

$$H_S = -(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2) \cdot \vec{B}, \quad (4.21)$$

$$H_S = \frac{e\vec{S}}{m_e c} \cdot \vec{B}, \quad (4.22)$$

onde \vec{S} é dado por $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Como elétrons são partículas de *spin* 1/2, o *spin* total do sistema S pode ser 1 para o estado tripleto ou 0 para o estado singleto. Por outro lado, como o campo magnético \vec{B} aponta na direção positiva do eixo z , isto é, $\vec{B} = B\hat{z}$, a energia de interação total deve ser dada por

$$H_S = \left(\frac{eB}{m_e c} \right) S_z, \quad (4.23)$$

sendo S_z a componente na direção \hat{z} do vetor \vec{S} . Assim, o Hamiltoniano do sistema, H_T , deve ser dado pela soma do antigo Hamiltoniano, H , utilizado no começo desta Seção, com o termo de interação dos *spins* dos elétrons com o campo magnético, H_S , isto é $H_T = H + H_S$. Dessa forma, uma vez que H_S comuta com H , os autovalores, E_T , do novo Hamiltoniano serão dados pela soma $E_T = E + E_S$ e as autofunções devem ser dadas pelo produto das autofunções de cada Hamiltoniano separadamente. Assim, determinar as novas energias do sistema consiste basicamente no problema de encontrar os autovalores m de S_z , isto é, resolver a equação

$$S_z|S, m\rangle = m\hbar|S, m\rangle. \quad (4.24)$$

Porém, é um fato bastante conhecido que os valores que m pode assumir, para que a identidade acima seja satisfeita, são $|S|, |S-1|, \dots, -|S-1|, -|S|$. Com $S = 0$ ou 1, m deve assumir então os valores 0, para $S = 0$, ou $-1, 0$ ou 1 , para $S = 1$. Dessa forma, os autovalores de $S_z = S_{z1} + S_{z2}$ são 0 e $\pm\hbar$, para o estado tripleto, e 0, para o estado singleto [68]. Portanto, E_S pode assumir os seguintes valores $E_{S=1} = 0, \pm eB\hbar/m_e c$ ou $E_{S=0} = 0$.

4.2.3 Resultados

Energia do centro de massa

O primeiro resultado, apresentado para dois elétrons em um potencial parabólico sob a ação de um campo magnético, é decorrente da expressão da energia para o centro de massa ϵ_R , através da qual é possível observar que na ausência de campo magnético, isto é, para $\omega_c = 0$, a existência de valores positivos e negativos para o número quântico orbital L define estados degenerados, já que neste caso, a energia dos estados depende apenas do valor absoluto de L . Por outro lado, a presença de um campo magnético externo provoca um acréscimo na energia de $\hbar\omega_c L/2$, que depende do sinal de L . Dessa forma, estados com o mesmo valor absoluto para L possuem diferentes acréscimos na energia, quebrando a degenerescência destes. De fato, esse é um resultado bastante conhecido, que já foi previsto anteriormente [70], [71]. Para ilustrar

melhor este fato, é apresentado na Figura 4.1 o resultado da energia da parte radial do centro de massa em função do campo magnético B , para os números quânticos $N = 0$ e $N = 1$, considerando $L = 0, \pm 1, \dots, \pm 4$. As curvas sólidas em preto representam as energias para o número quântico $N = 0$ e as curvas tracejadas em vermelho são as energias para $N = 1$.

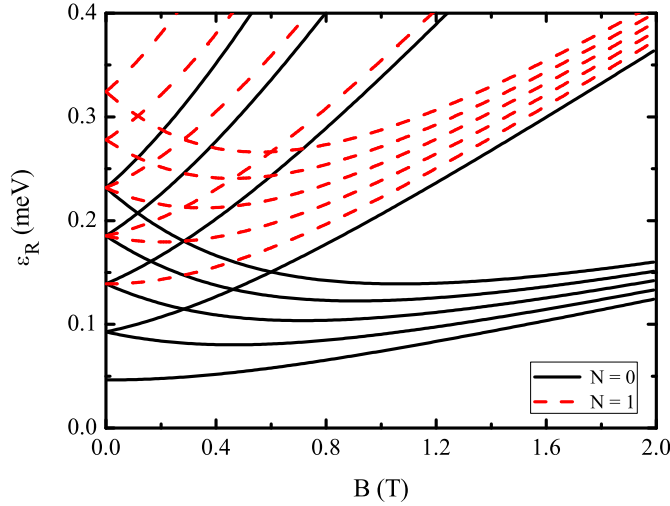


Figura 4.1: Espectro de energia da parte radial do centro de massa como função do campo magnético para dois elétrons interagentes em um ponto quântico parabólico com concavidade $a = \sigma g H / 4\alpha = 9.38 \times 10^{-6} \text{Å}^{-1}$ que corresponde a um ponto quântico de hélio líquido com banho de hélio $H = 10$ cm e profundidade da cavidade $h = 3000$ nm. O campo elétrico externo utilizado foi de $E = 3$ kV/cm.

Energia total e as transições singleto-triplete

A solução completa do problema tratado nesta Seção conduz também a transições do tipo singleto-triplete no spin total do sistema à medida que o campo magnético aumenta. Essas transições podem ser observadas através da representação gráfica dos níveis energéticos, variando com o campo magnético externo, como ilustrado na Figura 4.2. Neste resultado, é apresentada a energia total do sistema para diferentes valores de ℓ , onde é possível observar o cruzamento das curvas para $S = 0$ e $S = 1$. Uma vez que o sistema tende a estar no estado de menor energia, em todos os casos em que esse cruzamento ocorrer de uma curva mais energética para uma outra menos energética decorrente da variação de B , o estado do sistema deve ser alterado.

Este fenômeno é bastante conhecido e também já foi investigado na literatura [71]. No entanto, é interessante, do ponto de vista didático, apresentar a justificativa para estas transições, uma vez que não aparecem de forma explícita na solução do problema. De fato, estas transições decorrem diretamente do fato de os elétrons serem férmions, isto é, partículas de *spin* semi-

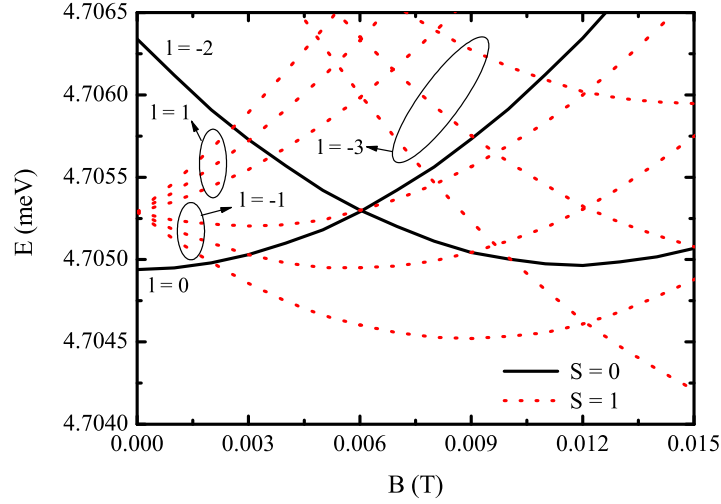


Figura 4.2: Espectro de energia total do sistema como função do campo magnético para dois elétrons interagentes em um ponto quântico parabólico com concavidade $a = \sigma g H / 4 \alpha = 9.38 \times 10^{-6} \text{ \AA}^{-1}$, que corresponde a um ponto quântico de hélio líquido com banho de hélio $H = 10 \text{ cm}$ e profundidade da cavidade $h = 3000 \text{ nm}$. O campo elétrico externo utilizado foi de $E = 3 \text{ kV/cm}$.

inteiro que apresentam funções anti-simétricas. Conseqüentemente, mediante uma troca na posição dos dois elétrons, deve haver uma mudança de sinal no estado do sistema, $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$. Uma vez que a função de onda total do sistema é escrita como $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_R(\vec{R})\Psi_r(\vec{r}) = \Gamma(R)\Phi(\phi)\Upsilon(r)\Omega(\varphi)$, onde $\Omega(\varphi) = e^{i\ell\varphi}$, ao realizar uma troca nas posições dos dois elétrons o ângulo do vetor coordenada relativa deve se tornar $\varphi + \pi$. Portanto, a solução da parte angular da coordenada relativa ficaria $e^{i\ell(\varphi+\pi)}$, ou melhor $e^{i\ell\varphi}e^{i\ell\pi}$. Nota-se, no entanto, que apenas no caso em que ℓ é ímpar, a função de onda trocará de fato de sinal. Assim, no caso em que ℓ é par, a mudança de sinal deverá ocorrer devido aos *spins* dos elétrons. Sabe-se que para um sistema com dois elétrons os possíveis estados de *spin* total do sistema são

$$|\Psi_{S=1}\rangle = \begin{cases} |++\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |--\rangle \end{cases} \quad (4.25)$$

ou

$$|\Psi_{S=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (4.26)$$

Nota-se, no entanto, que o único estado em que há mudança de sinal, quando a posição dos dois elétrons é trocada, é o estado singleto, $|\Psi_{S=0}\rangle$. Então, as curvas de energia em que ℓ assume valores pares correspondem ao estado singleto, e as ímpares correspondem ao estado tripleto, $|\Psi_{S=1}\rangle$.

Dimensão mínima do sistema

Do ponto de vista experimental, é interessante também analisar o tamanho do sistema mínimo que permite a presença de dois elétrons confinados no sistema aqui estudado. Para isso, são apresentados na Figura 4.3 a função de onda do estado fundamental e o potencial efetivo sentido por um elétron, considerando que o outro esteja na origem do sistema.

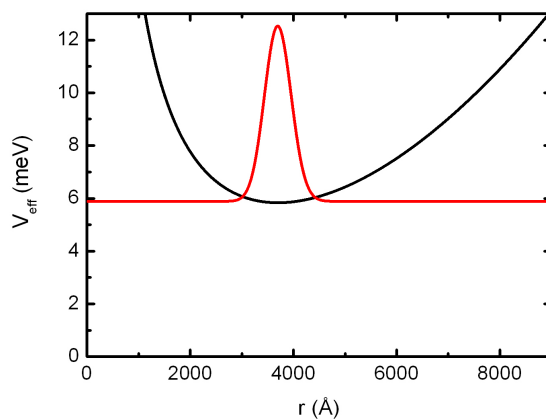


Figura 4.3: Função de onda do estado fundamental (Vermelho) e potencial efetivo (Preto) para um elétron, considerando que o segundo elétron esteja na origem. Resultados obtidos para um banho de hélio, $H = 10$ cm.

É possível observar através do resultado obtido na Figura 4.3 que, para realizar um experimento com banho de Hélio $H = 10$ cm, e profundidade $h = 3000$ nm, é preciso ter no mínimo uma cavidade com diâmetro em torno de $2R \approx 4500$ Å, uma vez que sendo menor, a distância relativa entre os dois elétrons seria maior do que a dimensão da cavidade.

4.3 Ponto quântico duplo

A aplicação de um campo elétrico externo sobre um elétron que se encontra confinado lateralmente por uma superfície suspensa em um substrato que apresenta duas cavidades retangulares ligadas por um canal dá origem a dois pontos quânticos interagentes. Esta interação pode ser ajustada de duas formas diferentes. Ao variar o banho de hélio, o valor mínimo da superfície decresce, enquanto nas bordas a superfície deve permanecer inalterada, devido às condições de contorno. Assim, o potencial efetivo experimentado pelo elétron é alterado, uma vez que esse é dado por $eF [\xi(x, y) - \xi_{min}]$. Outra forma similar consiste em variar diretamente o valor absoluto do campo elétrico F . Essa similaridade é decorrente do fato de que o potencial efetivo varia linearmente com os dois parâmetros. Esse resultado é bem ilustrado pelas Figuras

4.4 (a) e 4.4 (b), onde os potenciais são calculados sob variações do campo elétrico e do banho de hélio, respectivamente.

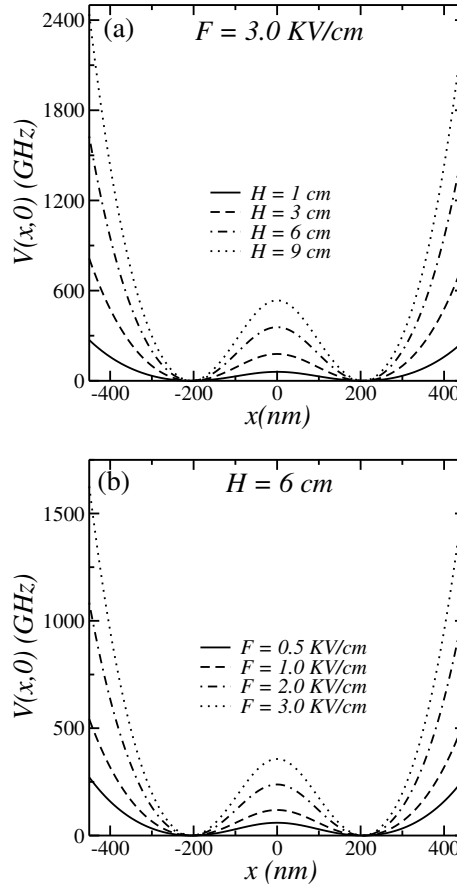


Figura 4.4: (a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre duas cavidades retangulares ligados por um canal para diversos valores banho de hélio H : 1 (sólida), 3(tracejada), 6(tracejada-pontilhada) e 9 cm(pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi de $h = 3000 \text{ nm}$ e o campo elétrico tomado foi $F = 3.0 \text{ kV/cm}$. (b) Perfis gerados a partir de uma variação do campo elétrico F : 0.5 (sólida), 1(tracejada), 2(tracejada-pontilhada) e 3 cm(pontilhada), com $H = 6 \text{ cm}$.

Uma decorrência imediata dos resultados apresentados acima é a investigação da influência desses parâmetros sobre os estados eletrônicos de superfície, isto é, investigar de forma qualitativa e quantitativa como os parâmetros H e F influenciam nas energias permitidas do sistema.

A presença de dois mínimos nos potenciais, separados por um ponto de máximo, indicam a possível existência de estados degenerados, uma vez que para um único nível energético com energia E abaixo da energia da barreira E_B devem existir duas funções de onda, cada uma com um máximo em um dos mínimos do potencial. Na verdade, a degenerescência deveria ocorrer de fato quando a barreira que separa os dois mínimos fosse infinita. No entanto, uma vez que a existência de uma barreira de potencial infinita não é palpável fisicamente, a degenerescência aqui mencionada refere-se às diferenças energéticas imensuráveis do ponto de vista experimen-

tal. É apresentada, nos resultados ilustrados pelas Figuras 4.5 (a) e (b), a influência da variação do banho de hélio sobre as diferenças energéticas dos estados supostamente degenerados para dois valores de campos elétricos diferentes.

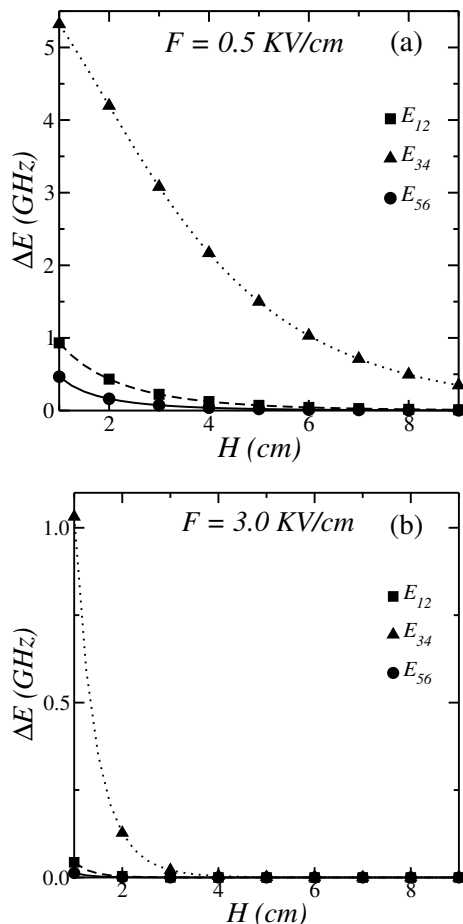


Figura 4.5: (a) Diferenças energéticas entre os estados quase degenerados para diversos valores de banho de hélio: E_{12} (quadrados), E_{34} (triângulos) e E_{56} (círculos), com $F = 0.5 \text{ kV/cm}$. (b) Resultados similares para um campo elétrico externo $F = 3.0 \text{ kV/cm}$ são também apresentados. As curvas são apenas um guia, para facilitar a visualização dos resultados.

Como esperado, observa-se através da Figura 4.5 (a) que o crescimento do valor numérico de H torna essas diferenças energéticas cada vez menores. A forma como estas energias se aproximam, por sua vez, também depende do campo elétrico. Esta última afirmação pode ser facilmente verificada através de uma comparação rápida dos resultados apresentados nas Figuras 4.5 (a) e 4.5 (b), onde é possível observar, através da escala energética, que para campos elétricos mais intensos as energias se encontram mais próximas. Uma vez que a frequência de transição é baixíssima, os níveis energéticos E_1 e E_2 , E_3 e E_4 , e E_5 e E_6 são, do ponto de vista experimental, degenerados. É interessante então analisar o comportamento dos níveis energéticos não degenerados com a variação do campo elétrico externo F e do banho de hélio

H . São apresentados primeiramente nas Figuras 4.6 (a) e 4.6 (b) os resultados obtidos para dois valores de banho de hélio, $H = 3$ e 9 cm, onde a variação das energias se deve à variação do campo elétrico.

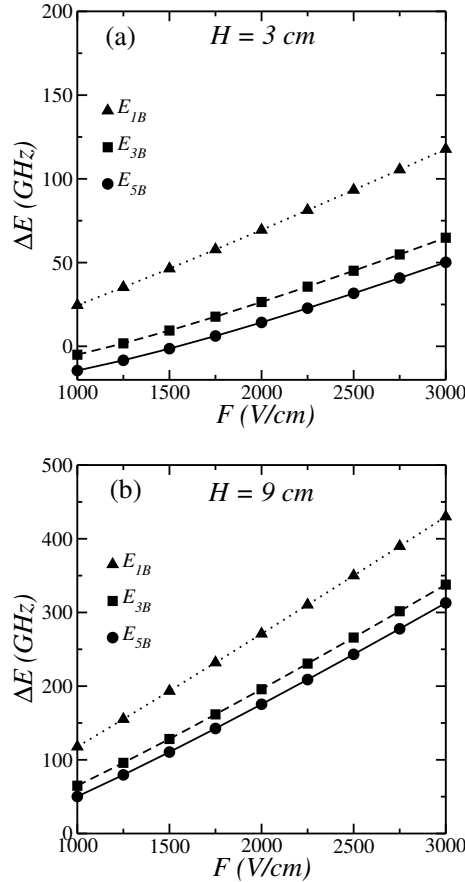


Figura 4.6: (a) Diferenças energéticas entre os estados não degenerados e a barreira de potencial, considerando diversos valores de campo elétrico: E_{1B} (triângulos), E_{3B} (quadrados) e E_{5B} (círculos), com $H = 3$ cm. (b) Resultados similares para um banho de hélio $H = 9$ cm são também apresentados. As curvas são apenas um guia, para facilitar a visualização dos resultados.

Nos gráficos apresentados na Fig. 4.6, as diferenças energéticas são dadas na forma $E_{nm} = E_m - E_n$, onde $n = 1, 3$ ou 5 . O índice B , por sua vez, está associado à energia da barreira de potencial situada entre as duas cavidades. Assim, $E_{nB} > 0$ implica que o nível energético encontra-se abaixo da barreira, enquanto $E_{nB} < 0$ representa estados confinados acima da barreira. Dessa forma, é possível observar que, através da variação do campo elétrico externo, os níveis de energia podem ser ajustados abaixo ou acima da barreira de potencial para valores menores de H . O ajuste destas energias com o campo elétrico se torna claramente mais eficaz para banhos de hélio mais elevados uma vez que a inclinação das curvas são mais elevadas, no entanto, nesses casos fica cada vez mais difícil posicionar as primeiras energias acima da barreira de potencial. De forma similar, são apresentados nas Figuras 4.7 (a) e 4.7 (b) os resultados,

agora, mantendo fixo o campo elétrico externo e variando o banho de hélio.

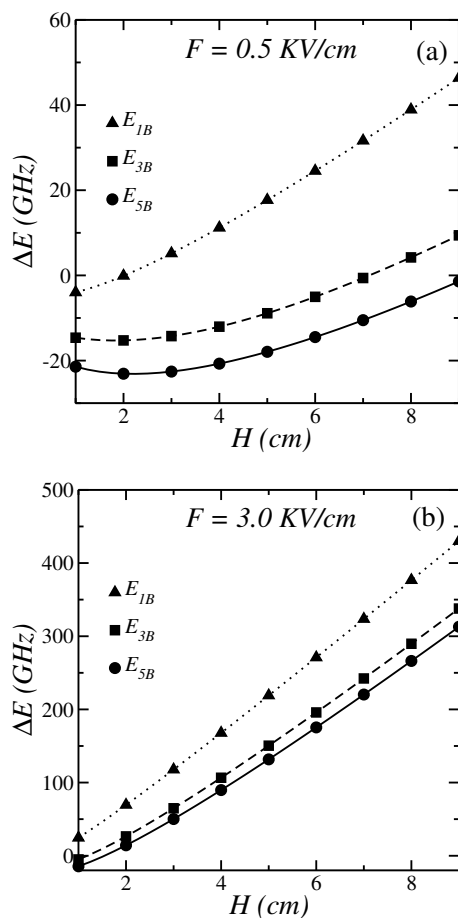


Figura 4.7: (a) Diferenças energéticas entre os estados não degenerados e a barreira de potencial, considerando diversos valores de banho de hélio: E_{1B} (triângulos), E_{3B} (quadrados) e E_{5B} (círculos), com $F = 0.5 \text{ kV/cm}$. (b) Resultados similares para um campo elétrico $F = 3.0 \text{ kV/cm}$ são também apresentados.

Do resultado apresentado na Figura 4.7 (a) é possível observar uma mudança de comportamento para as curvas E_{3B} e E_{5B} em $H = 2 \text{ cm}$, decorrente de dois regimes de confinamento existentes nesse sistema. Inicialmente, em $H = 1 \text{ cm}$, o terceiro e o quinto níveis energéticos se encontram bastante elevados, não "enxergando" a presença da barreira, de tal forma que, ao aumentar o banho de hélio, o poço se torna mais profundo e o nível energético deve aumentar, distanciando-se da barreira. No entanto, para valores de banhos de hélio a partir de $H = 2 \text{ cm}$, a presença da barreira torna-se considerável, alterando o comportamento da variação de E_5 e E_3 com H .

4.4 Múltiplos pontos quânticos

Uma vez que os níveis energéticos podem ser ajustados com a variação do banho de hélio ou do campo elétrico externo, como visto na seção anterior, o confinamento de elétrons nas superfícies suspensas em calhas duplas, com aplicação de condições periódicas de contorno, se torna de extrema importância. De fato, o posicionamento dos níveis de energia acima e abaixo da barreira de potencial através da variação desses parâmetros pode funcionar como uma ferramenta importante no controle de transporte eletrônico em sistemas de hélio líquido. As variações dos potenciais com H e F são apresentadas nas Figuras 4.8 (a) e 4.8 (b).

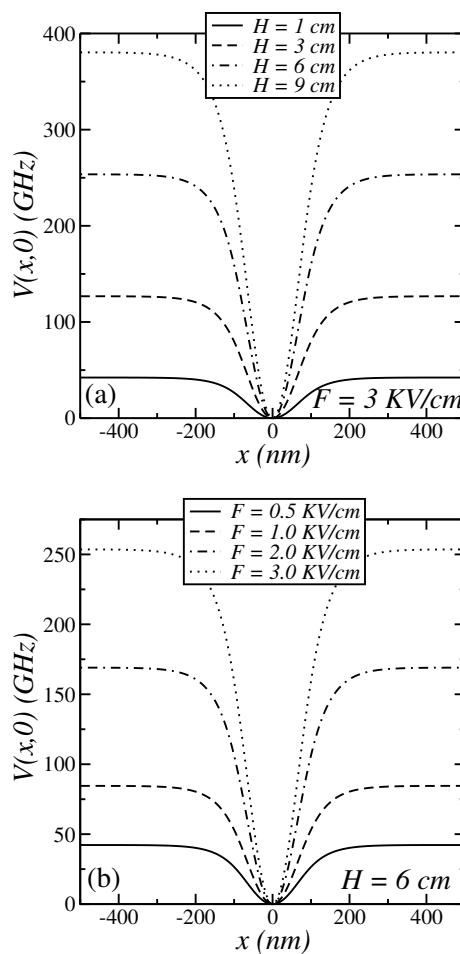


Figura 4.8: (a) Perfis de hélio líquido suspenso sobre duas cavidades em forma de canais que se interceptam ortogonalmente para diversos valores de banho de hélio H : 1 (sólida), 3 (tracejada), 6 (tracejada-pontilhada) e 9 cm (pontilhada). A profundidade da cavidade considerada foi de $h = 3000$ nm e o campo elétrico tomado foi $F = 3.0$ kV/cm. (b) Perfis gerados a partir de uma variação do campo elétrico F : 0.5 (sólida), 1 (tracejada), 2 (tracejada-pontilhada) e 3 cm (pontilhada), com $H = 6$ cm.

O cálculo das energias para diferentes valores de banho de hélio e diferentes valores de campo elétrico é apresentado nas Figuras 4.9 e 4.10, mostrando o controle sobre os níveis

energéticos do sistema. Nos dois casos, é possível mudar a dimensionalidade do sistema de quase 1D para quase 0D, apenas variando F ou H . Primeiramente, é apresentado nas Figuras 4.9 (a) e (b) o controle das energias e das diferenças energéticas, respectivamente, através da variação do banho de hélio, onde nos dois casos o nível energético E_2 é degenerado. A linha sólida em (a) representa a altura do potencial confinante do ponto quântico. Para $H < 2$, temos apenas um estado confinado no ponto, enquanto os estados excitados estão livres para trafejar pelas calhas. Quando aumentamos H , passamos a confinar mais estados no ponto, como ilustrado pelos símbolos abaixo da linha sólida na Figura 4.9 (a). Analogamente, a utilização

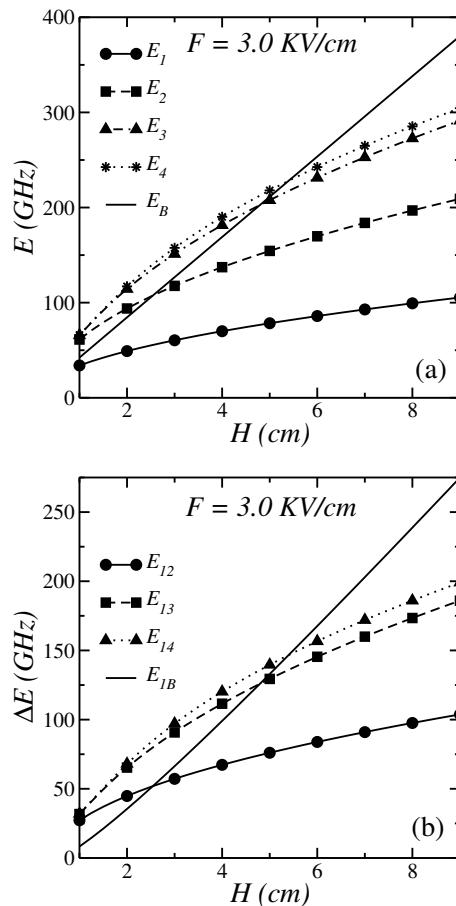


Figura 4.9: (a) Energia da barreira de potencial e as energias permitidas para a calha dupla, variando com o banho de hélio: E_B (linha sólida), E_1 (círculos) e E_2 (quadrados), E_3 (triângulos), E_4 (estrelas) com $F = 3.0$ kV/cm. (b) Diferenças energéticas entre as energias acessíveis para a calha dupla, variando com o banho de hélio: E_{1B} (linha sólida), E_{12} (círculos) e E_{13} (quadrados) e E_{14} (triângulos), com $F = 3.0$ kV/cm.

do campo elétrico pode também ser utilizada no controle do transporte como mostra a Figura 4.10. Neste caso, a escolha do banho de hélio apropriado se mostra de extrema importância, já que a escolha de um banho de hélio baixo, como o mostrado na Figura 4.10 (a) não permite um controle total, do ponto de vista que não é possível confinar os primeiros estados excitados,

mesmo para campos elétricos intensos.

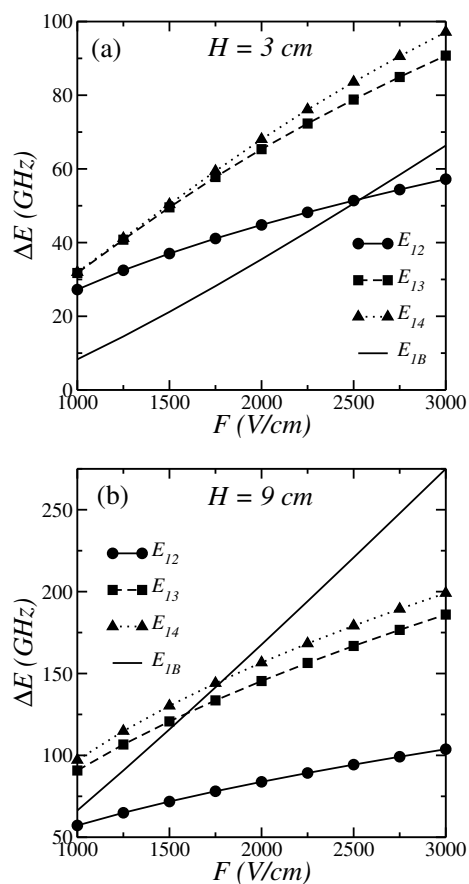


Figura 4.10: (a) Energia da barreira de potencial e as energias permitidas para a calha dupla, variando com o campo elétrico: E_B (linha sólida), E_1 (círculos) e E_2 (quadrados), E_3 (triângulos), E_4 (estrelas) com $H = 3$ cm. (b) Diferenças energéticas entre as energias acessíveis para a calha dupla, variando com o banho de hélio: E_{1B} (linha sólida), E_{12} (círculos) e E_{13} (quadrados) e E_{14} (triângulos), com $H = 9$ cm.

Assim, com os resultados apresentados até então, a utilização dos dois parâmetros no controle dos níveis de energia mostra-se extremamente importante, já que a variação de apenas um deles, sem a escolha adequada para o outro parâmetro, pode não fornecer um total controle da energia do sistema.

Capítulo 5

Conclusões

A possibilidade de encontrar uma equação diferencial que descreva a superfície de hélio líquido, quando este é suspenso em um substrato que apresenta uma cavidade, gera um conjunto de possibilidades para estudos teóricos de estruturas de confinamento em baixa dimensionalidade, uma vez que a curvatura dessa superfície possibilita o confinamento lateral de elétrons depositados sobre o hélio líquido. Algumas dessas estruturas, propostas na realização de computadores quânticos e no estudo de transporte eletrônico, foram estudadas experimentalmente, onde, em geral, a superfície fora negligenciada. No entanto, a forma e a profundidade dessas superfícies, como mostrado aqui, possuem caráter relevante na magnitude das energias acessíveis do sistema de elétrons confinados nessas superfícies, se tornando mais relevantes para superfícies mais profundas, isto é, para cavidade maiores e valores mais elevados do banho de hélio H e do campo elétrico F .

Além disso, a obtenção de potenciais parabólicos através do confinamento lateral gerado pela superfície para diversas estruturas como pontos, fios e anéis quânticos, é investigada nesta Dissertação através do cálculo real da superfície de hélio líquido suspensa. Essas soluções parabólicas são obtidas através de condições restritas na dimensão do sistema, possibilitando, nestes casos, o estudo de problemas clássicos em hélio líquido, como por exemplo, o sistema de dois elétrons em um potencial parabólico sob a ação de um campo magnético externo, onde transições do tipo singlete-triplete e a quebra da degenerescência devido à presença do campo magnético são observadas. Na verdade, mesmo que esses sistemas já tenham sido estudados de forma ampla na literatura e suas propriedades já serem bastante conhecidas, é importante estudá-los em hélio líquido, uma vez que este não apresenta impurezas, se mostrando um sistema ideal na verificação de fenômenos quânticos. Essa superfície também foi calculada para outros casos em que a parabolicidade não ocorre, onde mostrou-se que a variação do banho de hélio

pode ser utilizada para regular a profundidade desta.

Foi investigada também a possibilidade de utilizar essas estruturas no controle do transporte eletrônico em hélio líquido, através do cálculo dos autoestados para o elétrons confinados na superfície suspensa em um substrato que apresenta cavidades em formas de canais que se interceptam ortogonalmente, sendo possível confinar os estados eletrônicos, que inicialmente encontram-se acima da barreira (caracterizando o transporte unidimensional) em um ponto quântico (onde não ocorre transporte dos portadores de carga). Para isso, é possível realizar um estudo utilizando métodos de propagação temporal de pacotes de onda sobre as superfícies de hélio líquido, que certamente é uma perspectiva imediata deste trabalho.

Uma vez que elétrons na superfície de hélio líquido podem apresentar tanto propriedades quânticas quanto clássicas, outra perspectiva imediata deste trabalho é o estudo das propriedades dinâmicas dos sistemas apresentados aqui. Além disso, é interessante investigar a possibilidade de utilizar outras formas de confinamento lateral na realização de computadores quânticos em hélio líquido, uma vez que o controle individual de eletrôdos abaixo da superfície de hélio não é experimentalmente simples [23]. Dessa forma, investigar a possibilidade de utilização dessas estruturas de confinamento geométrico como *qubits* de computadores quânticos deve ser um dos temas a ser abordado futuramente.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Wilks, *The properties of liquid and solid helium, The International Series of Monographs on Physics* (1967).
- [2] H. Kamerlingh Onnes, *Leiden Comm.* **108**; *Proc. Sect. Sci. K. ne. Akad. Wet.* **11**, 168 (1908)
- [3] Tony Guenault, *Basic Superfluids* (2003).
- [4] P. L. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1937).
- [5] W. T. Sommer, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 271 (1964).
- [6] M. Cole and M. H. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1238 (1969).
- [7] V. B. Shikin, *Sov. Phys. JETP* **31**, 936 (1970).
- [8] A. M. C. Valkering, *Surface Electrons in Restricted Geometry*, PhD-Thesis, Eindhoven University of Technology (1998)
- [9] M. H. Degani, G. A. Farias e F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **72**, 125408 (2005).
- [10] P. D. Grigoriev, A. M. Dyugaev e E. V. Lebedeva, *JETP* **106**, 316 (2008).
- [11] Milton W. Cole, *Reviews of Modern Physics* **46**, 451 (1974)
- [12] G. E. Marques e N. Studart, *Phys. Rev. B* **39**, 4133 (1989).
- [13] A. C. A. Ramos *Magnetoplasmons no Sistema de Elétrons Superficiais sobre Hélio Líquido Confinado em um Potencial Parabólico*, Universidade Federal de São Carlos (2003)
- [14] R. Williams e R. S. Crandall, *Phys. Lett.* **36A**, 35 (1971).
- [15] C. C. Grimes e T. R. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 280 (1974).
- [16] C. C. Grimes e T. R. Brown, M. L. Burns e C. L. Zipfel, *Phys. Rev. B* **13**, 140 (1976).
- [17] M. Saitoh, *J. Phys. Soc. Japan* **42**, 201 (1977).
- [18] V. S. Edel'man, *Sov. Phys. Usp.* **23**, 227 (1980).

- [19] M. Wanner e P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 315 (1979).
- [20] V. V. Tatarskii, N. I. Shikina e V. B. Shikin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **82**, 747 (1982) [*Sov. Phys.-JETP* **55**, 444 (1982)].
- [21] M. I. Dykman, P. M. Platzman e P. Seddighrad, *Phys. Rev. B* **67**, 155402 (2003)
- [22] P. M. Platzman e M. I. Dykman, *Science* **284**, 1967 (1999)
- [23] Ismail KARAKURT, *Turk J. Phys.* **27**, 383 (2003)
- [24] G. Papageorgiou, P. Glasson, K. Harrabi, V. Antonov, E. Collin, P. Fozooni, P. G. Frayne, M. J. Lea, D. G. Rees e Y. Mukharsky, *App. Phys. Lett.* **86**, 153106 (2005).
- [25] Yu. P. Monarkha, S. S. Sokolov, A. V. Smorodin e N. Studart *Low Tem. Phys.* **36**, 565 (2010).
- [26] Sviatoslav S. Sokolov e N. Studart, *Phys. Rev. B* **51**, 2640 (1995)
- [27] Sviatoslav S. Sokolov, Guo-Qiang Hai e N. Studart, *Phys. Rev. B* **51**, 5977 (1995)
- [28] Sviatoslav S. Sokolov, Guo-Qiang Hai e N. Studart, *Phys. Rev. B* **52**, 15509 (1995)
- [29] A. C. A. Ramos, A. Chaves, G. A. Farias e F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **77**, 045415 (2008)
- [30] B. S. Monozon e P. Schmelcher, *Phys. Rev. B* **67**, 045203 (2003)
- [31] L. G. G. V. Dias da Silva, S. E. Ulloa e A. O. Govorov, *Phys. Rev. B* **70**, 155318 (2004)
- [32] A. Bruno-Alfonso e A. Latgé, *Phys. Rev. B* **71**, 125312 (2005)
- [33] Vl. L. Ginzburg e Yu. P. Monarkha, *Fiz. Nizk. Temp.* **4**, 1236 (1978) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **4**, 508 (1978)]
- [34] A. V. Chaplik, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **31**, 275 (1980) [*JETP Lett.* **31**, 252 (1980)]
- [35] Yu. Z. Kovdrya e V. A. Nikolaenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **12**, 1011 (1986) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **12**, 571 (1986)].
- [36] Yu. Z. Kovdrya e V. A. Nikolaenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **18**, 1278 (1992) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **18**, 894 (1992)].
- [37] D. G. Rees, I. Kuroda, C. A. Marrache-Kikuchi, M. Höfer, P. Leiderer e K. Kono, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 026803 (2011)
- [38] David Rees, Kimitoshi Kono, *J. Low Tem. Phys.* **158**, 301 (2010)
- [39] R. P. Feynman, *Progress in Low Temperature Physics* (LIVRO)
- [40] H. Kamerlingh Onnes, *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* **13**, 1903 (1911)
- [41] H. Kamerlingh Onnes e J. D. A. Boks, *Leiden Comm.* **170b** (1924)
- [42] E. C. Kerr, *J. chem. Phys.* **26**, 511 (1957)
- [43] E. C. Kerr e R. D. Taylor *Ann. Phys.* **26**, 292 (1964)

- [44] K. R. Atkins, *Liquid Helium* (Cambridge University Press) (1959)
- [45] W. H. Keesom e M. Wolfke, *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* **31**, 90 (1928) [*Leiden Commun.*, **190b**]
- [46] F. London, *Nature* **141**, 643 (1938)
- [47] F. London, *Phys. Rev.* **54**, 947 (1938)
- [48] L. Tisza, *Phys. Rev.* **72**, 838 (1947)
- [49] L. Tisza, *Nature* **141**, 913 (1938)
- [50] L. Tisza, *C. R. Paris* **207**, 1035 e 1186 (1938)
- [51] L. Tisza, *J. de phys. et rad.* **1**, 165 e 350 (1940)
- [52] F. London, *Superfluids* Vol.2, Wiley (1954)
- [53] D. R. Tilley e J. Tilley, *Superfluidity and Superconductors* 3rd edition, IOP Publishing, Bristol (1990)
- [54] L. Landau, *Phys. Rev.* **60**, 356 (1941)
- [55] L. Landau, *J. Phys. (U.S.S.R)* **11**, 91 (1947)
- [56] H. Palevsky, K. Otnes e K. E. Larsson, *Phys. Rev.* **112**, 11 (1958)
- [57] D. G. Henshaw e A. D. B. Woods, *Phys. Rev.* **121**, 1266 (1961)
- [58] M. Cohen, *The Energy Spectrum of the Excitations in Liquid Helium*, PhD-thesis, California Institute of Technology (1956)
- [59] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **94**, 262 (1954)
- [60] H. Kamerlingh Onnes, *Trans. Faraday Soc.* **18**, 53 (1922)
- [61] J. G. Daunt e K. Mendelssohn, *Nature* **141**, 911 (1938)
- [62] J. G. Daunt e K. Mendelssohn, *Nature* **142**, 475 (1938)
- [63] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluids Mechanics* 2nd edition, Butterworth Hinemann, Chapter VII, 1997.
- [64] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill (1965)
- [65] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, *Numerical Recipes in Fortran 77*, Second Edition (1992).
- [66] R.C.T. da Costa, *Phys. Rev. A* **23** 1982 (1981)
- [67] Yu. Z. Kovdrya e Yu. P. Monarkha, *Fiz. Nizk. Temp.* **12**, 1011 (1986) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **12**, 571 (1986)]
- [68] Claude Cohen-Tannoudji, Bernad Diu, Franck Laloë, *Quantum Mechanics* Vol.1, 1st edition, Wiley (1977)

- [69] F. M. Peeters and V. A. Schweigert, *Phys. Rev. B* **53**, 1468 (1996)
- [70] U. Merkt, J. Huser e M. Wagner, *Phys. Rev. B* **43**, 7320 (1991)
- [71] M. Wagner, U. Merkt e A. V. Chaplik, *Phys. Rev. B* **45**, 1951 (1992)