

Universidade Federal do Ceará

Departamento de Física

Curso de Física

Davi Monteiro Dantas

**Localização de modos fermiônicos em uma
geometria de seis dimensões do tipo
Conifold**

Fortaleza

18 de Julho de 2012

Davi Monteiro Dantas

Localização de modos fermiônicos em uma geometria de seis dimensões do tipo Conifold

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Fortaleza

18 de Julho de 2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Federal do Ceará

Biblioteca do Curso de Física

D2111 Dantas, Davi Monteiro

Localização de modos fermiônicos em uma geometria de seis dimensões do tipo Conifold
/ Davi Monteiro Dantas - 2012

80.p : il. color., enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Fortaleza, 2012. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada. Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Teoria de Campos 2... I.Título.

CDD 530.41

Davi Monteiro Dantas

Localização de modos fermiônicos em uma geometria de seis dimensões do tipo Conifold

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovado em 18 de Julho de 2012

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)

Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Wilami Teixeira da Cruz
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP

"1342656000"

RESUMO

Uma das formas de resolver o Problema de Hierarquia e por consequência unificar as forças fundamentais da natureza é assumir, sob o ponto de vista teórico, que nosso espaço quadrimensional (brana) está inserido em um espaço de dimensionalidade maior (bulk). Chamamos de dimensão extra toda aquela que não está presente em nossa brana. A idéia de incluir dimensões extras para unificação de forças fundamentais data dos anos 30 do século passado, com a inovadora proposta de Kaluza e Klein, e vem evoluindo sua formulação desde então. Assim, outras propostas inovadoras como aquela do trabalho de Randall e Sundrum, criaram novas possibilidades para o estudo, embora seja interessante citar que não possuímos nenhuma evidência experimental até o presente momento de que tais dimensões existam. Partículas fundamentais fermiônicas têm como uma de suas propriedades interessantes a existência dos modos quirais direito e esquerdo, informação esta bastante estudada no Modelo Padrão assim como em Supersimetria. Nesse trabalho tratamos sobre a localização dos modos quirais, sem massa e massivo, de campos fermiônicos de spin $1/2$ em um espaço de seis dimensões do tipo Conifold Resolvido. Este espaço possui um parâmetro regulável, o qual permite obter geometrias de outros trabalhos da literatura como casos particulares. Além desta generalização, foi possível encontrar outros resultados interessantes como o espessamento da brana e suavização do modelo estudado em 6D. Observaremos também que a relação dos modos quirais é estritamente dependente da escolha do acoplamento de campos utilizado. Para férmions livres, os modos quirais serão idênticos. Quanto à localização de Modos Massivos, verificaremos que ao reescrever a equação de Dirac, obtida a partir de nossa ação, em uma forma do tipo equação de Schrödinger, encontraremos um termo de potencial. Estudaremos que ao se utilizar os fatores derivados da sexta dimensão como um termo de acoplamento, obteremos resultado semelhante ao de um acoplamento Yukawa em cinco dimensões.

Palavras-chaves: mundo de branas, localização de férmions, conifold..

ABSTRACT

ABSTRACT. One way to solve the hierarchy problem and therefore unify the fundamental forces is to assume, under the theoretical point of view, that our four-dimensional space (Brane) is housed in a space of higher dimensionality (Bulk). We call all that extra dimension which is not present in our Brana. The idea of extra dimensions to include unification of fundamental forces date from the 30s of last century, with the innovative proposal of Kaluza and Klein, and has been evolving ever since its formulation. Thus, other innovative proposals like that of the work of Randall and Sundrum have created new possibilities for the study, although it is curious that cite not have any experimental evidence to date that these dimensions exist. Fundamental fermionic particles have as one of its interesting properties the existence of left and right chiral modes, this information widely studied in the Standard Model and Supersymmetry in the call. In this article we treat on the location of the chiral modes, massless and massive, the fermionic fields of spin $1/2$ in a six-dimensional space of type Conifold solved. This space has an adjustable parameter which allows to recover the geometry of other works of literature. Beyond this generalization was possible to find other interesting results as the thickening of the Brana and smoothing the model studied in 6D. Looking at work that the ratio of chiral modes is strictly dependent on the choice of coupling fields used. For free fermions chiral modes are identical. Regarding the location of Massive modes, we find that by rewriting the Dirac equation, obtained from our action, in a way kind of Schrödinger equation, we find a term potential. We found that when using the factors derived from the sixth dimension as a term coupling, we obtain results similar to a Yukawa coupling in five dimensions.

Keywords: braneworlds, fermion localization, conifold

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares, minha mãe e minha irmã.

Ao meu Orientador, professor Carlos Alberto de Almeida, bem como aos que contribuíram diretamente com o trabalho, em especial ao José Euclides Gomes da Silva pela grande ajuda tanto no entendimento da técnica de localização quanto no desenvolvimento da álgebra relacionada. Aos colegas que trabalham com Localização de campos Francisco Wagner Vasconcelos da Costa, Júlio César Brasil de Araújo e Luis José Silveira de Sousa pela troca de idéias. Aos membros da banca Prof. Dr. Wilami Teixeira da Cruz, sua tese me ajudou bastante a entender os passos omitidos em artigos; e ao Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra que apontou muitos pontos a serem melhorados e algumas perspectivas.

Aos colegas constituintes do LASSCO Diego ("Uhuu"), Samuel, Victor, Hudson e Ivan, além de Artur pinheiro. À ajuda especial da Dra. Luciana e do Dr. Aristeu nas correções e modificações do presente trabalho.

A toda a Universidade Federal do Ceará e ao Departamento de Física, bem como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento do trabalho. Aos colegas de turma Adriano, Cristiano, Felipe, Jorge e Josias. Aos professores Jeanlex, Renan, Ramos e Raimundo pelas disciplinas ao longo do curso de mestrado.

Aos meus amigos do Portal AWP: Bruno Martins (Bagoh), Carlos Alberto (Hiko), Diego de Niro (Mega Tornado), Rodrigo (Eiji), Luís Ganso (Evil Ganso), Felkan, Felipe Jorge(Big Phill), Alan, Thalles (Webfly), Sávio (Oaks), Sancler (Spider999) e Sérgio Neves (Pombo). Da Tiger Robocop : Alexandre, Matheus, João Victor, Newton, Sara, Vinicius, Bernardo e Turks. Da minha guilda de Vindictus: Jonatas Lazarotto (Hirak), Miguel Carreira (Feiticeira), Camila Curci(Chun), Francis(Tshamisus), Muriel, Tuvão, Pedro (Gotize), Jonathan Almeida (The Dante), Ricardo Donato (Arkinos) e Lahnwer, Marcelo Mendonça (Orlo), Teophilo (Thanatory), Arthur Medeiros (Alihanna), Melina (M82a), Segunda Letra entre outros. Aos grupos de Podcasts que ouvi Nerdcast, MRG, MDM, Podcast de Tanguinha, Toscochanchada, Papo Lendário, Visão Histórica, Gavestática, Azilacast, Orioncast, News Inside, Rapaduracast e muitos outros.

Sumário

Lista de Figuras	7
1 Introdução	9
1.1 Problema de hierarquia	9
1.1.1 Forças elementares	9
1.1.2 Escala de Planck	10
1.2 Mundo de Branas (<i>Braneworlds</i>)	12
1.2.1 Modelo de Kaluza-Klein (KK)	13
1.2.2 Modelo de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD)	15
1.2.3 Modelos de Randall-Sundrum I e II (RS-I e RS-II)	16
2 Equação de Dirac e Férmions	21
2.1 Equação de Dirac	21
2.1.1 Equação de Klein-Gordon e seus problemas	21
2.1.2 A modificação de Dirac	25
2.2 Matrizes de Dirac em dimensões maiores que quatro	28
2.3 Quiralidade	29
2.4 Lista de propriedades das matrizes de Dirac	32
3 Localização em 5D	35
3.1 Campo Escalar gerador da Membrana	35
3.1.1 Super Potencial e Deformação da Membrana	41
3.2 Localização do modo zero de um campo escalar	42
3.3 Localização de férmions em 5D	45
4 Localização de Férmions em 6D	50
4.1 Equações de Einstein em 6D	50
4.2 Localização do campo Fermiônico em 6D	51
4.2.1 Modos Quirais	51
4.2.2 Modo Zero	57
4.2.3 Modos Massivos	58

4.3	Verificação dos Resultados Obtidos	60
5	Resultados	64
5.1	O Conifold	64
5.1.1	Variações do Conifold Resolvido	65
5.2	Localização de férmions no Conifold Resolvido	69
5.2.1	Localização no C.R-I	70
5.2.2	Localização no C.R-II	72
6	Conclusões e Perspectivas	75
7	Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

1.1	Problema de hierarquia. Vazio de 10^{16} GeV entre as Escala Eletrofraca e de Planck. . .	12
1.2	Representação do "Mundo de Branas".	13
1.3	Compactificação. Orbifold S^1/\mathbb{Z}_4 [8].	14
1.4	Representação do modelo de RS-I. Duas branas separadas pela dimensão extra [8]. . .	17
1.5	Representação do modelo de RS-I. Brana-1(Escala de Planck) e Brana-2(Escala Eletrofraca)[8].	18
2.1	Mar de Dirac: Estados de energia negativa completamente preenchidos à esquerda e surgimento de um elétron no nível positivo de energia com o pósitron no nível negativo de energia à direita. A energia é separada em intervalos de $\frac{\hbar\omega}{2}$	28
2.2	Regra da mão direita.	30
2.3	Ácido Lático, fórmula $C_3H_6O_3$, exemplo de enantiômero encontrado na forma Direita (naturalmente produzido pelo corpo humano) e na forma Esquerda(artificial)[27]. . .	31
2.4	Helicidade, seta cinza representa o momento linear, seta contornando em preto o spin. .	31
2.5	Rotação do spin em um plano complexo.	32
3.1	Solução do tipo Kink.	38
3.2	Comparação entre Fatores de Warp para pequenos valores de y	39
3.3	Comparação entre Fatores de Warp para grandes valores de y	39
3.4	Comparação entre as exponenciais dos Fatores de Warp.	40
3.5	Escalar de curvatura, observe que rapidamente atinge valor constante e negativo. . . .	40
3.6	Novas formas geradas a partir da deformação do Kink.	42
3.7	Forma de $A_p(y)$, fator de warp gerado pela deformação da membrana.	42
3.8	Forma de $e^{A_p(y)}$, espessura do pico aumenta com p	43
3.9	A curvatura escalar se mantém negativa para valores de y distantes da origem. Para $p = 1$ o resultado é o mesmo da Figura(3.5). Quanto maior p menor é o módulo de R e mais larga será a distância entre os picos.	43
3.10	Integral da função $e^{-A_p(y)}$	44
3.11	relação mínima entre os fatores de Yukawa e de deformação da membrana.	47
3.12	Localização do Modo Zero Direito.	48

3.13	Localização do Modo Zero Esquerdo. A função cresce indefinidamente, impossibilitando a localização.	49
4.1	$F(c, r)$, fator relativo a Brana, quanto maior c mais estreito será o pico. O gráfico de $H(r, c_1)$, relativo à componente angular tem forma semelhante, uma vez que basta multiplicar $R_0^2 F(c, r)$ e trocamos c por c_1	63
5.1	Substituição da ponta do cone por uma esfera de raio a (parâmetro de resolução).	65
5.2	Quanto maior o valor de a , mais lentamente se chegará ao valor assintótico $G(r, a) = 1$	66
5.3	Fixando o valor de $c = 1$, quanto maior a mais rapidamente a forma exponencial é recuperada.	67
5.4	Fixando o valor de $a = 0$, quanto maior c menor e mais próximo da origem é o pico.	67
5.5	Gráfico comparativo de $\rho(r, a) \times r$	68
5.6	$F(\rho, c)$ para $C.R - II$, quanto maior c mais estreito o pico. As curvas atingem suavemente o eixo de $\rho = 0$	69
5.7	$H(\rho, a, c = 1)$ para $C.R - II$, quanto maior a maior o pico. As derivada da função se anula ao tocar o eixo $\rho = 0$	69
5.8	Modo zero para o C.R.I.	70
5.9	Potencial do Modo Massivo direito do C.R-I.	72
5.10	Modo zero para o C.R.II.	73
5.11	Potencial do Modo Massivo direito do C.R-II.	74

1 Introdução

O objetivo deste capítulo é motivar o uso das dimensões extras em Física. Mostraremos como esta técnica resolve o problema de hierarquia entre as massas das escalas de Planck e Eletrofraca, o que será útil para a unificação das forças fundamentais. Descreveremos brevemente os principais modelos que envolvem esta técnica ao longo das seções.

1.1 Problema de hierarquia

Em Física Teórica ocorre um problema de hierarquia toda vez que se trabalha com parâmetros semelhantes que contém grande divergência de valores. Trataremos aqui do problema de hierarquia associado às escalas de energias das interações fundamentais.

1.1.1 Forças elementares

Quando estudamos o Modelo Padrão [1], verificamos existir quatro tipos de forças (ou interações) fundamentais. Iremos citá-las partindo de sua atuação do microscópico ao macroscópico.

Força Nuclear Forte: Estudada pela Cromodinâmica Quântica (QCD). Responsável pela consistência do núcleo, atua tanto ligando prótons e nêutrons, como ligando quarks dentro dos prótons. Suas partículas mediadoras são os glúons. Sua intensidade cresce proporcionalmente com a distância, isto é, quanto mais distante mais forte é a interação, o que é um caso único dentre as quatro interações fundamentais. Este fato também está associado ao de não ser possível encontrar quarks isolados na natureza [1].

Força Nuclear Fraca: Estudada pela Teoria Eletrofraca. Responsável pelas interações fermiônicas, decaimento radioativo β e fusão nuclear, mediada pelos Bósons W e Z.

Força Eletromagnética: Descrita pela Eletrodinâmica Quântica (QED). Tem o Fóton como

partícula mediadora.

Força Gravitacional: Estudada pela Relatividade Geral. Hipoteticamente mediada pelo Gráviton, sendo a mais fraca das interações.

A tabela (1.1) resume o texto acima comparando as forças segundo as escalas de magnitude (tomando a força gravitacional como referência), seus mediadores, as teorias que as descrevem, e de que forma decaem com a distância

Força	Mediador	Teoria	$\sim r$	Magnitude
Forte	Glúons	QCD	1	10^{38}
Eletromagnética	phótons	QED	$1/r^2$	10^{36}
Fraca	Bósons W e Z	Teoria Eletrofraca	$e^{-m_b r}/r$	10^{25}
Gravitacional	"Gráviton"	Relatividade Geral	$1/r^2$	1

Tabela 1.1: Interações fundamentais. A constante m_b representa a massa do bóson W ou Z [1, 2].

Apresentaremos a seguir uma escala que nos será útil para melhor compreensão do regime de atuação dessas forças.

1.1.2 Escala de Planck

Foi adotada pela primeira vez em 1899, com objetivo de suprimir as principais constantes utilizadas em Física (c - velocidade da Luz, \hbar - constante reduzida de Planck, G - constante gravitacional, $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ - constante de Coulomb e K_b - constante de Boltzmann). Podemos então criar um novo Sistema de unidades naturais ([M]-massa, [L]-comprimento, [T]-tempo, [Q]-carga e $[\Theta]$ -temperatura) em função dessas constantes assumindo que [2]

$$c = \hbar = G = K_e = K_b = 1, \quad (1.1)$$

definiremos a seguir as unidades de Planck e correlacionando com suas respectivas no Sistema Internacional de Unidades (S.I)[3]:

- Massa de Planck [M]

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 2,176 \times 10^{-8} kg, \quad (1.2)$$

- Comprimento de Planck [L]

$$L_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 1,616 \times 10^{-35}m, \quad (1.3)$$

- Tempo de Planck [T]

$$T_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \sim 5,391 \times 10^{-44}s, \quad (1.4)$$

- Carga de Planck [Q]

$$Q_{pl} = \sqrt{4\pi\hbar c\epsilon_0} \sim 1,875 \times 10^{-18}C, \quad (1.5)$$

- Temperatura de Planck [Θ]

$$\Theta_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{GK_b^2}} \sim 1,417 \times 10^{32}K, \quad (1.6)$$

as unidades de comprimento, massa e cargas são extremamente pequenas se comparadas ao S.I, ou seja, a escala de Planck é ideal para analisar fenômenos quânticos.

Com base nas unidades fundamentais podemos escrever a unidade de Energia ($[E] = [M][L]^2[T]^{-2}$)

- Energia de Planck

$$E_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \sim 1,956 \times 10^9J. \quad (1.7)$$

Com base nessa escala e nas massas das partículas mediadoras previstas pelo modelo padrão, verificamos o problema de hierarquia entre as Massas de Planck e a "Massa Eletrofraca"[2, 3]. Observe a figura(1.1).

A Massa Eletrofraca (M_{ew}), tem ordem de grandeza de aproximadamente 10^3GeV , enquanto a Massa de Planck (M_{pl}) de $10^{19}GeV$, ou seja, a razão entre elas é da ordem de 10^{-16}

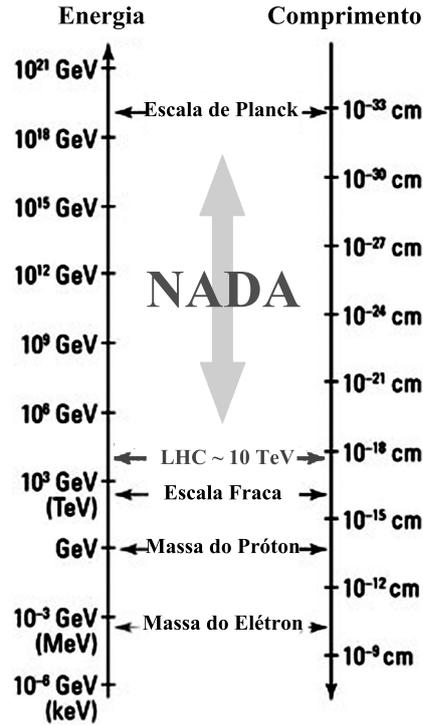


Figura 1.1: Problema de hierarquia. Vazio de 10^{16} GeV entre as Escala Eletrofraca e de Planck.

$$\frac{M_{ew}}{M_{pl}} \sim 10^{-16}. \quad (1.8)$$

Uma das maneiras de explicar tal divergência nas escalas é adotar o conceito de *Mundo de Branas*[4-7].

1.2 Mundo de Branas (*Braneworlds*)

Tratar nosso universo conhecido de três dimensões espaciais e uma temporal, (3+1)dimensões, como uma hipersuperfície quadridimensional contida em um espaço maior apresentou ser uma boa visão teórica para justificar o problema de hierarquia e unificar forças fundamentais. Embora não tenhamos ainda nenhuma comprovação experimental que tais dimensões extras existam [4-7]. Conceitualmente, definimos o nosso espaço relativístico habitual de quatro dimensões com o termo "*Brana*", qualquer outra dimensão que seja inserida além destas quatro, daremos o nome de "*dimensão extra*"¹, e por fim o espaço por completo que engloba "*Brana*" e

¹Verificaremos que estas podem ser compactificadas ou não, dependendo do modelo estudado.

"dimensões extras" de "Bulk"[5].

Dimensão do Bulk : $(4+n)D$.

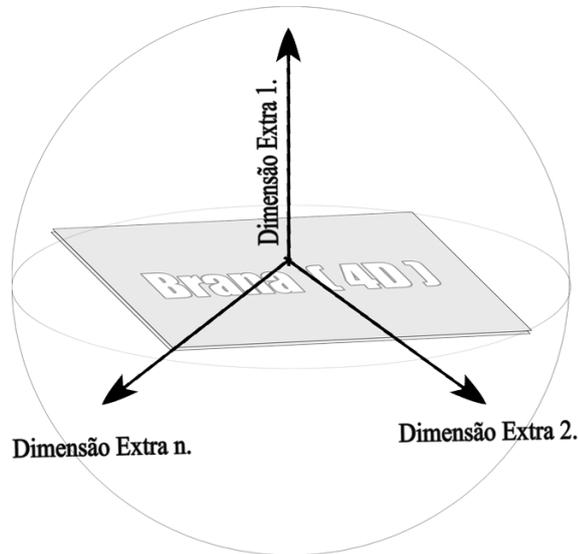


Figura 1.2: Representação do "Mundo de Branas".

Utilizaremos de agora em diante a notação de índices gregos ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) para nos referir a termos que "correm dentro" da Brana, em contraste com índices latinos em maiúsculo ($M, N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, D$) para termos que percorrem todas as dimensões do Bulk.

Explicado o conceito, iremos expor o primeiro modelo a tratar de dimensões extras como tentativa de unificar Gravidade com as outras forças fundamentais [8, 9].

1.2.1 Modelo de Kaluza-Klein (KK)

Com o objetivo primordial de unificar Gravidade e Eletromagnetismo, Theodor Kaluza e Oskar Klein [9] introduziram pela primeira vez, na década de 1920, uma dimensão extra para desenvolver seu modelo, esta quinta dimensão possui forma periódica (compactificação toroidal)[8]

$$x^5 \sim x^5 + 2\pi R, \quad (1.9)$$

o espaço total, Bulk, tem assim a forma cilíndrica, com a Brana sendo o espaço chato (Minkowski) no eixo e a quinta dimensão um círculo de raio R envolvendo-a ($M^4 \otimes S^1$).

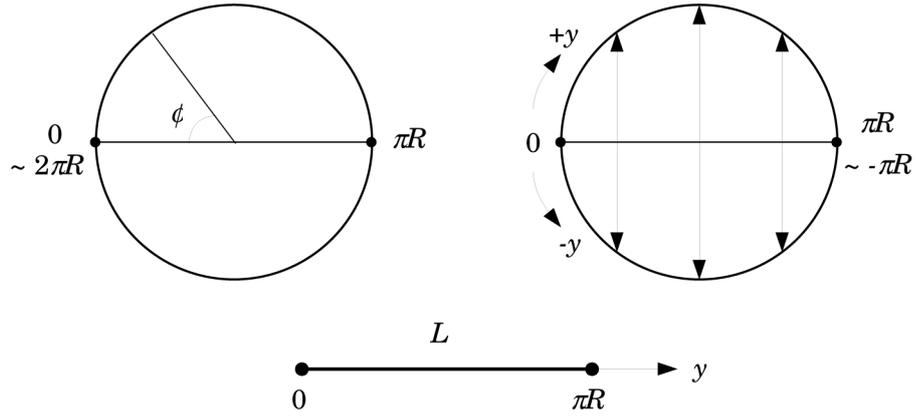


Figura 1.3: Compactificação. Orbifold S^1/\mathbb{Z}_4 [8].

No Modelo KK se introduz um campo escalar não massivo, $\phi(x^\mu, x^5)$, que permeia o Bulk. O campo será responsável pela construção de estados quantizados de momento na dimensão periódica[8].

$$p^5 = \frac{n}{R}, \quad (1.10)$$

onde n é inteiro. O campo foi escolhido da seguinte forma

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{inx^5/R}. \quad (1.11)$$

A equação de movimento será então

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_5 \partial^5) \phi = 0, \quad (1.12)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^n(x^\mu) = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \phi^n(x^\mu). \quad (1.13)$$

Devido a eq.(1.17), existirá uma série infinita de valores de $m^2 = (n/R)^2$, ou seja, as massas serão quantizadas em valores dependentes do raio da dimensão extra².

Para que haja unificação é esperado que o valor deste raio seja da ordem de $R \sim 10^{-24}m$, algo realmente pequeno e inacessível, o que explicaria o fato de não verificarmos a existência de outras dimensões além das quatro conhecidas.

Na próxima subseção mostraremos de forma resumida, um modelo mais abrangente do modelo KK.

²A esta série damos o nome de "*Torre de massas de Kaluza-Klein*"[8, 9].

1.2.2 Modelo de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD)

O Modelo ADD [10], elaborado em 1998, busca resolver o Problema de Hierarquia incluindo não apenas uma, mas ao menos duas dimensões extras compactificadas. Neste modelo as dimensões fora da Brana passam a permitir ordem de milímetros [3, 8, 10]. Outro detalhe é a restrição de que *apenas o campo Gravitacional tem a capacidade de existir em todo espaço (Bulk). Os outros campos, de escala eletrofraca, estão aprisionadas na Brana* [8]. Dessa forma o que amenizaria a intensidade gravitacional seria sua dispersão em outras dimensões.

O trabalho [10] pretende localizar gravidade com uma métrica n -dimensional, fatorizável, dada por

$$ds_d^2 = ds_4^2 - ds_{n-4}^2. \quad (1.14)$$

Uma maneira de entender como a adição de dimensões altera o comportamento da Gravidade é utilizar a Lei de Gauss para a Gravitação. Para um espaço $(4 + n)$ dimensional (bulk) devemos analisar os casos da lei para escalas onde as distâncias são muito menores ou muito maiores que o raio destas dimensões extras, R . [3]

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{m_1 m_2}{M_{pl(4+n)}^{(n+2)}} \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (r \ll R), \quad (1.15)$$

e para o caso onde as massas são separadas por uma distância muito maior que o raio da dimensão extra

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{m_1 m_2}{M_{pl(4+n)}^{(n+2)} R^n} \frac{1}{r}, \quad (r \gg R). \quad (1.16)$$

O segundo caso deve coincidir com a expressão clássica da energia potencial gravitacional.

$$V_c(\mathbf{r}) = -\frac{m_1 m_2}{M_{pl}^2} \frac{1}{r}, \quad \left(G = \frac{1}{M_{pl}^2}\right). \quad (1.17)$$

Assim criamos uma diferença entre massa que está contida na Brana (M_{pl}) e a massa que está inserida em todo Bulk ($M_{pl(4+n)}^{2+d}$), unificaremos então as escalas igualando seus valores de massa

$$M_p l^2 = M_{pl(4+n)}^{n+2} R^n = M_{ew}^{n+2} R^n. \quad (1.18)$$

podemos verificar que para $n = 1 \rightarrow R \sim 10^{17} m$, o valor não concorda com experimentos feitos nessas medidas, sendo assim descartado [3, 8]. Para $n = 2 \rightarrow R \sim 10^{-3} m$, o resultado

revela que se realmente existirem dimensões extras haveria reformulação das Leis de Newton para escalas milimétricas.

Por fim, resumiremos os modelos de Randall-Sundrum I e II, mostraremos quais as diferenças que estes modelos possuem quando comparado ao ADD e KK.

1.2.3 Modelos de Randall-Sundrum I e II (RS-I e RS-II)

Observe que o tamanho dos raios das dimensões extras vem crescendo de acordo com o modelo estudado. O Modelo RS supõe uma métrica inovadora em cinco dimensões, onde há dependência dos termos de dimensão extra e brana, uma métrica não fatorizável chamada de "warped" [8, 10, 11]

$$ds_5^2 = g_{MN} dx^M dx^N = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (1.19)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é nossa métrica de Minkowski; $A(y)$ é o chamado fator de warp (fator de "entrocamento/ urdidura", responsável por mesclar termos da dimensão extra com os termos inerentes à Brana) e y é a dimensão extra não compacta, uma exclusividade do modelo RS.

A idéia Modelo RS-I propõe um Bulk com *duas Branas*. Iremos notar mais à frente que uma delas representará a Escala Eletrofraca e a outra a Escala de Planck. Entre as Branas existe a *dimensão extra "estendida"*³ que ligará as escalas, como visto na figura (1.4).

Consideramos a seguinte ação em cinco dimensões (S_H é a ação de Einstein-Hilbert e S_M a ação de matéria)

$$S = S_M + S_H = \int d^4x \int_{y=0}^{y=L} \sqrt{-g} (M^3 R - \Lambda) dy, \quad (1.20)$$

onde g é o determinante da métrica, M é a massa fundamental em 5D, R o escalar de curvatura de Ricci e Λ a constante cosmológica.

Obteremos a forma do Fator de Warp, $A(y)$, através da equação de Einstein

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \kappa_5^2 T_{MN}, \quad (1.21)$$

onde $\kappa_5 = \frac{1}{2M^3}$ é a constante gravitacional de Newton para 5D e T_{MN} é o tensor que tem a

³Large extra dimension

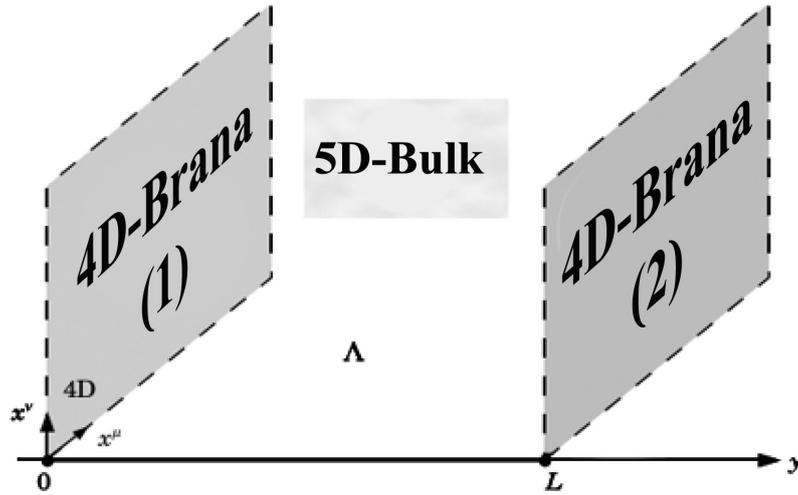


Figura 1.4: Representação do modelo de RS-I. Duas branas separadas pela dimensão extra [8].

forma

$$T_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{MN}}. \quad (1.22)$$

Deixando detalhes sobre a forma dos tensores para os próximos capítulos, encontraremos a relação entre o fator de warp e os termos da ação

$$6A(y)^{\prime 2} = -\frac{\Lambda}{2M^3}, \quad (1.23)$$

com esse resultado notamos que $A(y)$ só terá valor real se a constante cosmológica assumir valor negativo, isso indica que o espaço entre as branas deve ser do tipo *Anti-de Sitter* (AdS_5) [11]. Dando continuidade aos cálculos, escreveremos o fator de warp como a constante

$$A^{\prime 2} = -\frac{\Lambda}{12M^3} \equiv k^2, \rightarrow A(y) = \pm k|y|, \quad (1.24)$$

veja que o valor obtido em (1.24) será inserido na métrica (1.19). Assim, apenas o valor negativo será eleito para que a exponencial seja finita em todo y

$$ds_5^2 = g_{MN} = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (1.25)$$

No processo acima, obtivemos qual a forma que a métrica deve possuir para concordar com a ação do campo tomado. Faremos agora uma demonstração de como a técnica desenvolvida pelo modelo RS-I resolve o problema de Hierarquia de Escalas Fraca e de Planck.

Foi tomado que a *Brana-2* situada em $y = L$ confinaria os campos materiais. Considere o campo escalar de Higgs com a ação

$$S_{Higgs} = \int \sqrt{-g_2} (g_2^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - t^2)^2) d^4x = \int e^{-4kL} (e^{2kL} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - v^2)^2) d^4x, \quad (1.26)$$

onde $\lambda = 12kM^3$ é a tensão na Brana (2)⁴. Redefinindo $H = e^{kL} \tilde{H}$

$$S_{Higgs} = \int [\eta^{\mu\nu} D_\mu \tilde{H}^\dagger D_\nu \tilde{H} - \lambda (\tilde{H}^\dagger \tilde{H} - (e^{-kL} v^2)^2)] d^4x, \quad (1.27)$$

o valor obtido na expressão acima difere do valor convencional da ação do campo escalar de Higgs apenas pelo fator $e^{-kL} v$, o qual chamaremos de v_{eff} [8, 11].

O fator encontrado é responsável por ajustar as escalas de Planck e Eletrofraca. Tomemos a Brana-1, situada em $y = 0$, como a que está sob domínio da escala de Planck e a Brana-2, situada em $y = L$, como a que contém a escala de TeV (Eletrofraca), ver figura(1.5). Teremos que o fator de decaimento deverá ser

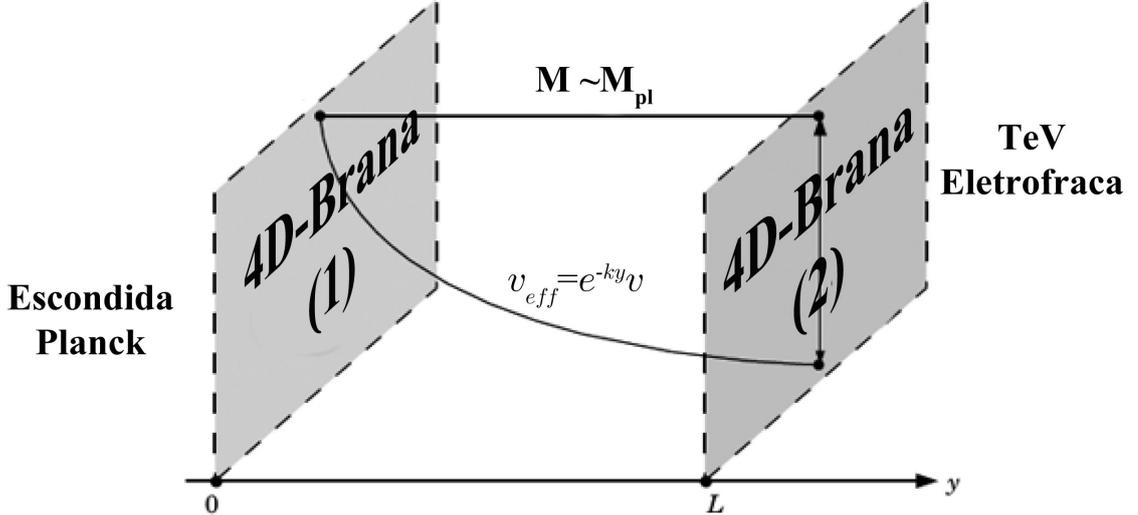


Figura 1.5: Representação do modelo de RS-I. Brana-1(Escala de Planck) e Brana-2(Escala Eletrofraca)[8].

$$\frac{M_{ew}}{M_{pl}} = e^{-kL} \sim 10^{-16} \quad \rightarrow \quad kL \sim \ln 10^{16} \sim 35, \quad (1.28)$$

onde k pode ser interpretado como um parâmetro de ajuste fino [8].

⁴As tensões nas Branas possuem mesmos módulos, porém sinais contrários[8].

Obteremos a ação em 5D considerando a métrica de (1.19) como um termo de perturbação na ação (1.20).

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \int_{y=0}^{y=L} e^{-2k|y|} \sqrt{-g^0} R^{4D}(h_{\mu\nu}^{(0)}) dy \\ &= M_{ew}^3 \left(\frac{1 - e^{-2kL}}{k} \right) \int d^4x \sqrt{-g^0} R^{4D}(h_{\mu\nu}^{(0)}), \end{aligned} \quad (1.29)$$

assim obtemos a massa de Planck efetiva como

$$M_{pl}^2 = \left(\frac{1 - e^{-2kL}}{k} \right) M_{ew}^3 \quad (1.30)$$

ou seja, como esperado, a massa de Planck decairá exponencialmente conforme a distância entre as Branas, L .

No Modelo de Randall-Sundrum II existe apenas a Brana de Planck que decai para a escala Eletrofraca quando fizermos o comprimento da dimensão extra tender ao infinito [8, 12].

Finalizamos aqui nosso capítulo introdutório que se destinou a apresentar o Problema de Hierarquia de Massas e sua resolução via técnica de dimensão extra, seguiremos agora com a dissertação fazendo uma prévia de cada capítulo.

Trataremos no Capítulo 2 da equação de Dirac, suas matrizes e propriedades. Apresentaremos um histórico de como Dirac resolveu os problemas conceituais da equação de Klein-Gordon e obteve sucesso ao unir Quântica e Relatividade. Verificaremos as relações relativísticas das matrizes de Dirac e exporemos suas formas em mais dimensões.

No Capítulo 3, resumiremos o método de deformação de membrana que suaviza o modelo de Randall-Sundrum. Este método servirá de base para entender como a escolha da geometria favorece a localização de campos.

O capítulo 4 inicia a parte principal da presente dissertação. Escolheremos um métrica de seis dimensões diagonal que descreva os fatores de warp dependente apenas da coordenada de dimensão radial. Encontraremos as funções localizadoras do campo fermiônico em termos desta métrica. Verificaremos a validade dos resultados encontrados ao reproduzir trabalhos conhecidos da literatura.

A parte central da dissertação se dará no capítulo 5. Nele apresentaremos a geometria Conifold e suas variações, logo após, aplicaremos as técnicas do capítulo 4 para localizar férmions. Observaremos o comportamento dos modos sem massa e concluiremos que a geometria

estudada suaviza *defeitos do Tipo Corda*. Para o modo Massivo encontraremos um potencial semelhante ao gerado por um acoplamento Yukawa em cinco dimensões ao assumir a sexta dimensão do Conifold Resolvido como um termo de acoplamento geométrico.

2 Equação de Dirac e Férmions

O objetivo deste capítulo é servir de fundamento para os elementos que envolvam espinhores, matrizes de Dirac e suas propriedades. Exporemos também conceitos como quiralidade que serão úteis no tratamento de localização de campo fermiônico nos capítulos posteriores.

2.1 Equação de Dirac

É uma equação de onda quântica relativística desenvolvida por Paul Dirac, elaborada em 1928, com intuito de corrigir as falhas presentes na equação de Klein-Gordon [13, 14].

Iremos expor os problemas encontrados na formulação de Klein-Gordon e mostrar como Dirac os resolveu nas seções seguintes. Acompanharemos a referência [13] para desenvolver os cálculos.

2.1.1 Equação de Klein-Gordon e seus problemas

A equação de *Klein-Gordon* foi elaborada em 1926 e buscava descrever um elétron relativístico, geralmente ela nos é apresentada quando iniciamos o estudo de Teoria de Campos. Antes de mostrarmos sua expressão faremos um breve histórico de como foi concebida.

Apresentaremos a seguir as diferenças fundamentais entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Relativística.

Em Mecânica Quântica podemos representamos os estados de nosso sistema como vetores normalizados $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert ($\mathcal{H} : |\langle\phi|\psi\rangle|^2$)[15]. Escrevemos em termos da matriz densidade $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, onde a probabilidade do sistema se encontrar em um estado ϕ é dada por $\langle\phi|\rho|\psi\rangle$. Os Observáveis Físicos são dados em termos de operadores auto adjuntos ($A = A^\dagger$) do espaço \mathcal{H} e calculamos o valor esperado desses operadores através da integral $\langle\psi|A|\psi\rangle$.

Uma das formas de representar a evolução temporal de um sistema quântico é dada pela

representação de Schrödinger, onde as funções de onda dos estados são dependentes do tempo¹, $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

realizando a mudança $|\psi(t_2)\rangle = U(t_1, t_2) |\psi(t_1)\rangle$, sendo $U(t_1, t_2)$ unitário:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} U(t_1, t_2) = H(t_2) U(t_1, t_2). \quad (2.2)$$

Transformações de estados em *Quântica* utilizam operadores unitários (ou anti-unitários), os quais representam simetrias no espaço Hilbert². Essa característica preserva o módulo do produto escalar e a propriedade comutante com o operador H .

Já em *Relatividade* os estados que regem a natureza são independentes do referencial adotado. Denotamos um ponto no espaço-tempo através das coordenadas (x_i, t_i) , e postulamos que a velocidade da luz, c , é absoluta (invariante segundo transformações de referenciais). Escrevemos a expressão de Causalidade da Relatividade como a diferença entre pontos no espaço tempo.

$$c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 \geq 0 \quad t_1 - t_0 \geq 0, \quad (2.3)$$

e modificamos os referenciais relativísticos através de transformações do grupo de Poincaré (translações no espaço-tempo), rotações e Transformações de Lorentz (*Boost*).

Assim ao relacionar as duas Mecânicas encontramos alguns problemas conceituais, como por exemplo a definição de *ponto* em cada uma delas [13]. Em *Relatividade* tomamos o momento de uma partícula de massa m , como $p = mc$ e a idéia de ponto não difere da proposta em *Matemática*, porém em *Quântica*, o *princípio da incerteza* ($\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$) limita nossa precisão. Verificaremos a seguir a problemática gerada pela primeira tentativa de unificação dos conceitos.

Em 1926, Oskar Klein e Walter Gordon partiram da equação de Schrödinger livre de potencial [15] para desenvolver sua própria formulação.

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \phi(\mathbf{r}, t) = E \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

¹Uma representação alternativa é a de Heisenberg, onde os operadores que evoluem no tempo. $A = A(t)$.

²*Teorema de Wigner*[13].

as representações dos operadores Momento e Energia são

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad e \quad E \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.5)$$

então,

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) = i\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.6)$$

A solução obtida para a equação de Schrödinger é uma onda plana

$$\phi(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt}, \quad (2.7)$$

onde w é a frequência angular da onda e \mathbf{k} é o número de onda.

Introduzimos conceitos relativísticos em (2.4) ao supor que a energia será escrita da forma

$$E^2 = (\mathbf{p}c)^2 - (mc^2)^2, \quad (2.8)$$

aplicando as formas dos operadores \mathbf{p} e E , encontraremos

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.9)$$

Assumindo que nosso espaço é do tipo Minkowski, $diag(-c^2, 1, 1, 1)$, faremos nosso $\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi(x)$ e encontraremos a chamada *equação de Klein-Gordon*, definida por

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi(x) = [\square - (mc/\hbar)^2]\phi(x) = 0, \quad (2.10)$$

que, semelhantemente à equação de Schrödinger, também possui solução do tipo onda plana

$$\phi(x) = e^{ik_\mu x^\mu} \quad (2.11)$$

onde k_μ são os números de onda e $k_0 = c^2w$, sendo w a frequência angular da onda.

Aparentemente o objetivo de descrever uma partícula sob domínios quânticos e relativísticos estaria completo, porém há dois problemas essenciais em (2.10), o de *não possuir corrente de probabilidade nem energias positivamente definidas*[13, 14].

Analisemos o que ocorre com a corrente de probabilidade.

As ondas que obedecem à equação de Schrödinger devem respeitar a seguinte relação de continuidade[14]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0, \quad (2.12)$$

sendo: ρ e \mathbf{j} a densidade e a corrente de probabilidade, respectivamente. A densidade de probabilidade é calculada como

$$\rho = |\phi(x)|^2 = \phi^* \phi, \quad (2.13)$$

e a corrente de probabilidade:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} \nabla (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \quad (2.14)$$

assim, utilizando (2.14) em (2.12), teremos:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\nabla (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right) = \frac{\hbar}{2mi} (\phi^* \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi^*), \quad (2.15)$$

dessa forma a equação da continuidade, (2.12) com (2.13) e (2.14), será expressa como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\phi^* \phi)}{\partial t} - \frac{\hbar}{2mi} (\phi^* \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi^*) = \\ & \phi^* \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \phi \right) + \phi \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} - \frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \phi^* \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

é a partir de (2.16) que redefinimos densidade de probabilidade da equação de Klein-Gordon

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right), \quad (2.17)$$

também encontramos uma nova forma para a corrente de probabilidade

$$\mathbf{j}^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \frac{i\hbar}{m} \phi^* (\overleftrightarrow{\partial}_0, \overleftrightarrow{\nabla}) \phi = \frac{i\hbar}{m} \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi, \quad (2.18)$$

aqui, denotamos o operador $\overleftrightarrow{\partial}^\mu$ como

$$A \overleftrightarrow{\partial}^\mu B \equiv \frac{1}{2} \left(A \partial^\mu B - (\partial^\mu A) B \right), \quad (2.19)$$

por fim, encontraremos a nova equação de continuidade da forma³:

$$\partial_\mu \mathbf{j}^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^*) = 0. \quad (2.20)$$

Alertemos para o erro em (2.17). A probabilidade não proíbe valores negativos. Acompanhe que (2.13) é descrita por um módulo quadrado da função de onda que garante apenas valores positivos, enquanto a nova formulação não possui restrição semelhante. Outro problema está na expressão (2.8), verifique que para $p = 0 \rightarrow E = \pm mc^2$, logo assim como a probabilidade, as energias também *não são positivamente definidas*. Assumir valores negativos para a energia, seria admitir que um elétron poderia decair infinitamente [14].

A partir desses dois problemas Dirac resolveu reformular a equação de Klein-Gordon e criou sua própria equação ao adicionar elementos matriciais.

³Observe que ao se incluir Relatividade à equação de Schrödinger, a *densidade de probabilidade* se torna uma componente da *corrente de probabilidade*.

2.1.2 A modificação de Dirac

Dirac verificou o problema na formulação de Klein-Gordon e resolveu substituir os seguintes termos [16]

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{i} + \beta m \right) \Psi \equiv H \Psi, \quad (2.21)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e β são matrizes 4×4 hermitianas, anti-comutantes e de quadrado unitário⁴. A nova função de onda assume caráter de espinor (4×1)

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}_{4 \times 1}, \quad (2.22)$$

verificaremos nas próximas seções que o biespinor $\Phi_{2 \times 1}$ representará a quiralidade positiva, enquanto $\chi_{2 \times 1}$ a quiralidade negativa.

Como dito, α e β obedecem às propriedades:

$$\{\alpha_j, \alpha_k\}_{j \neq k} = 0 \quad (2.23)$$

$$\{\alpha_j, \beta\} = 0 \quad (2.24)$$

$$\alpha_j^2 = \beta^2 = I_4, \quad (2.25)$$

sendo I_4 a matriz identidade. As matrizes α^j são escritas em função das matrizes de Pauli, σ^i .

$$\alpha^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (2.26)$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

A matriz β é definida a seguir

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

⁴Um resumo das propriedades mais importantes das matrizes de Dirac será feito ao final do capítulo.

Observe que recuperamos uma equação semelhante a de Klein-Gordon ao se operar duas vezes a equação de Dirac

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{i} + \beta m \right) \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{i} + \beta m \right) \Psi = \\ &= \left(-\nabla^2 + m^2 \right) \Psi(x, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

As matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ e β formam o grupo no qual são escritas as *Matrizes de Dirac*, γ^M , que definiremos com suas propriedades a seguir [16]

$$\gamma^0 = \beta \quad (2.30)$$

$$\gamma^i = \beta \alpha^i \quad (2.31)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Utilizando a notação "*Slash*" de Feynmann, $\not{\phi} \equiv a_\mu \gamma^\mu$ [13], escreveremos:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \rightarrow \not{\partial}_\mu, \quad (2.33)$$

sendo assim, podemos reescrever a equação de Dirac na forma relativística ($\Psi(x, t) \rightarrow \psi(x)$)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = (i\not{\partial} - m)\Psi(x) = 0, \quad (2.34)$$

ou seja, o espinor sugerido por Dirac satisfaz à equação de Klein-Gordon.

Verifiquemos agora como essas modificações corrigem a corrente de probabilidade. Aplicamos o complexo conjugado na expressão (2.34)

$$-\Psi^\dagger (i\not{\partial}_\mu^\dagger + m) = 0, \quad (2.35)$$

onde denotamos que $\not{\partial}_\mu^\dagger$ é o operador derivada atuando à esquerda em um espinor conjugado. A forma conjugada do espinor será representada como

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi \gamma^0, \quad (2.36)$$

combinando (2.34) e (2.35) teremos

$$i\bar{\Psi} (\not{\partial}^\dagger + \not{\partial}) \Psi = 0 \rightarrow \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0, \quad (2.37)$$

o que denota que a corrente de probabilidade assumirá a forma

$$j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi. \quad (2.38)$$

Devido a esta nova formulação, diferentemente do que ocorre com a equação de Klein-Gordon, *a densidade de probabilidade será positivamente definida*, observe a prova abaixo:

Nossa densidade de probabilidade é tratada como o termo temporal, j^0 , da nova corrente de probabilidade j^μ , e tem sua forma:

$$\rho = j^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \bar{\Psi}\Psi = \Phi^\dagger\Phi + \chi^\dagger\chi \geq 0 \quad (2.39)$$

$$\mathbf{j} = j^i = \bar{\Psi}\gamma^i\Psi = \Phi^\dagger\sigma^i\Phi + \chi^\dagger\sigma^i\chi, \quad (2.40)$$

onde o índice $i = 1, 2, 3$, representa a parte espacial da corrente.

Veja que da forma que Dirac propôs suas matrizes, obtemos como resultando uma densidade de probabilidade escrita como a soma dos módulos quadrados de cada biespinor (2.39), ou seja, ela é sempre positiva.

A resposta para solucionar os estados de energias negativas foi assumir o chamado "*Mar de Dirac*", preditor das *antipartículas*[14].

Foi proposto que o vácuo seria formado por infinitos "*buracos*" que contém um par matéria-antimatéria, cada buraco seria responsável por aprisionar o elétron, evitando sua detecção. Ao se perturbar o vácuo, excitaríamos o elétron e poderíamos removê-lo do poço, ou seja, criaríamos matéria a partir de um suposto vazio. Ao nível energético abandonado pelo elétron se deu o nome de *pósitron* que possui mesma massa e spin, porém carga elétrica oposta, e^+ .

Corrigidos os problemas de probabilidade e energia, finalizaremos a seção com outra relação curiosa da equação de Dirac, obtida ao separar seu espinor em cada biespinor na forma a seguir [13]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\Phi + \frac{1}{i}\sigma\cdot\nabla\chi \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = -m\chi + \frac{1}{i}\sigma\cdot\nabla\Phi, \quad (2.42)$$

o resultado (2.41) e (2.42) são semelhantes à duas equações de Maxwell

$$(\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial(i\mathbf{B})}{\partial t} = \frac{1}{i}\mathbf{S}\cdot\nabla(\mathbf{E})$$

$$(\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{i}\mathbf{S}\cdot\nabla(i\mathbf{B}),$$

onde $(\mathbf{S}^i)_{jk} \equiv \frac{\xi_{ijk}}{i}$ é uma matriz que representa partículas de spin-1 (Bósons) dada pelas matrizes de Gell-Mann. Para o caso de Dirac, a matrizes de spin $\frac{1}{2}$ (Férmions) são as de Pauli e os Campos \mathbf{E} , $i\mathbf{B}$ são substituídos pelos espinores Φ , χ [13].

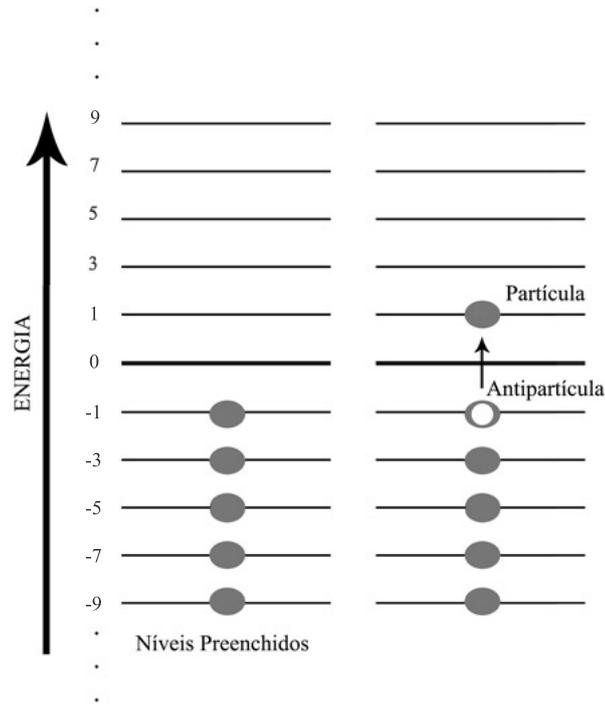


Figura 2.1: Mar de Dirac: Estados de energia negativa completamente preenchidos à esquerda e surgimento de um elétron no nível positivo de energia com o pósitron no nível negativo de energia à direita. A energia é separada em intervalos de $\frac{\hbar\omega}{2}$.

2.2 Matrizes de Dirac em dimensões maiores que quatro

O objetivo deste tópico é expor, de forma sucinta, as outras matrizes necessárias para a localização em seis dimensões. Não nos aprofundaremos em detalhes quanto a formalismos de grupo dessas matrizes, recomendamos as referências [17, 18] para estes detalhes.

Observe que existem justamente quatro matrizes de Dirac em nosso espaço quadridimensional. Associamos cada matriz à uma dimensão, ou seja, ao se adicionar novas dimensões deveremos buscar a forma de novas matrizes para descrever o novo espaço.

Livros de Teoria Quântica de Campos [13, 14, 17] costumam mostrar uma quinta matriz de Dirac, mesmo sem acrescentar nenhuma dimensão extra, isso ocorre devido a propriedades interessantes da atuação dessa matriz no espinor. A quinta matriz é apresentada como o produto

$$\gamma^5 \equiv i \prod_{j=0}^3 \gamma^j = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

A ordem dimensional das matrizes varia de acordo com a expressão $2^{\frac{D}{2}}$ [18], onde D representa a dimensão do espaço trabalhado, para dimensões ímpares escolhemos o menor valor menor inteiro da divisão. Por exemplo, para $D = 4$ as matrizes serão 4×4 assim como também o são para $D = 5$, já para um espaço de seis dimensões eles terão dimensão 8×8 .

É interessante também deixar claro que a forma das novas matrizes variam segundo a base em que estão escritas. Utilizaremos aqui a *representação de Dirac*, outras representações frequentes são as de Weyl e Majorana.

Observe que a nova matriz obtida em (2.43) ainda preserva o anticomutador da equação (2.32), $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ e $\{\gamma^5, \gamma^5\} = 2I$.

Como o objetivo deste trabalho é Localizar Campos Fermiônicos em variedades de até seis dimensões, a sexta matriz também deve ser explicitada, diferentemente da quinta, ela é rarissimamente encontrada em artigos e livros que não contenham variedade com mais de quatro dimensões. O artigo da referência [19] generaliza a forma dos espinores e das matrizes para n dimensões, dela poderemos encontrar a forma de γ^6 como

$$\gamma^6 = \begin{pmatrix} 0 & -i_{4 \times 4} \\ i_{4 \times 4} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

a qual também atende às características do anticomutação com as outras matrizes. Verificaremos que todas essas matrizes também obedecem a chamada *álgebra de Clifford* para espaços maiores

$$\{\gamma^M, \gamma^N\} = -2\eta^{MN}. \quad (2.45)$$

2.3 Quiralidade

A informação importante quanto a quinta matriz de Dirac será exposta aqui, mas primeiro deveremos tratar do que é *quiralidade*.

A palavra deriva do grego e está relacionada à "assimetria da mão", isto é quanto dizemos que alguém é destro ou canhoto estamos fazendo uma distinção quanto a mão dominante, isto pode parecer fora de contexto aqui, mas lembremos que quando estudamos produtos vetoriais e suas rotações definimos a orientação do vetor resultante do produto pela "Regra da mão direita", quando a rotação acompanha o mesmo movimento da mão direita dizemos que a orientação do

vetor é positiva e negativa do contrário. Ver figura (2.2). Da mesma forma associamos um giro para direita como Positivo e para Esquerda como negativo.

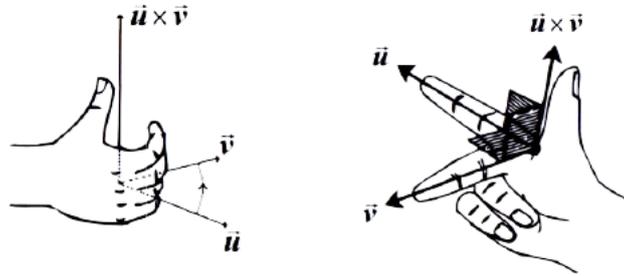


Figura 2.2: Regra da mão direita.

Simetrias quirais são encontradas em várias áreas da ciência. Em Química é apresentada como uma forma de diferenciar isômeros (compostos com mesma fórmula molecular, porém com estrutura e arranjo diferentes), especificamente com isômeros ópticos ou enantiômeros, mesmo com estrutura parecidas entre si, que lhes dariam praticamente as mesmas propriedades físico-químicas, ainda assim são encontradas diferenças entre os compostos quando aplicamos luz. Aos compostos que respondem desviando a luz para direita chamados de dextrógiros e aos que desviam a luz para a esquerda de levógiros.

A figura (2.3) mostra a diferença estrutural de moléculas que possuem essa propriedade.

Em Farmacologia a diferença de quiralidade entre aminoácidos pode levar a resultados bastante diferentes. Este foi o caso trágico do medicamento *Talidomida* [20], que possui seu isômero direito com efeito sedativo, mas seu isômero esquerdo proporcionava efeito não previsto em gestantes. O ocorrido proveu um grande incentivo no estudo de enantiômeros para prevenir outros casos semelhantes.

Iremos fazer uma introdução do conceito de quiralidade em Física seguindo a referência [21].

Sob o ponto de vista da Mecânica Quântica, todas as partículas materiais possuem momento angular intrínseco (spin) que assume valores semi inteiros positivos ou negativos.

Quando uma partícula material se move em uma direção ela desenvolve um momento li-

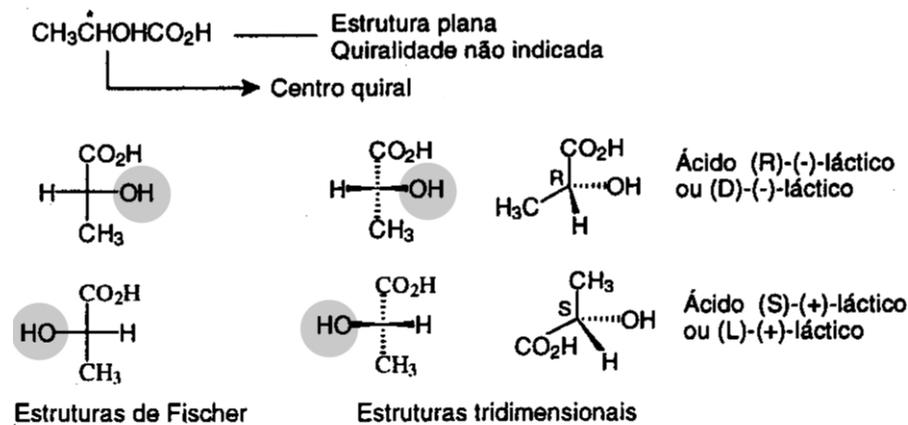


Figura 2.3: Ácido Láctico, fórmula $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_3$, exemplo de enantiômero encontrado na forma Direita (naturalmente produzido pelo corpo humano) e na forma Esquerda(artificial)[27].

near nesta, então considerando o movimento total devemos incluir momentos lineares e spin. Definiremos Helicidade como a forma que o movimento da partícula está orientado com seu spin, caso o spin aponte para a mesma direção de propagação diremos que a partícula apresenta *helicidade positiva*, quando oposto *helicidade negativa*.

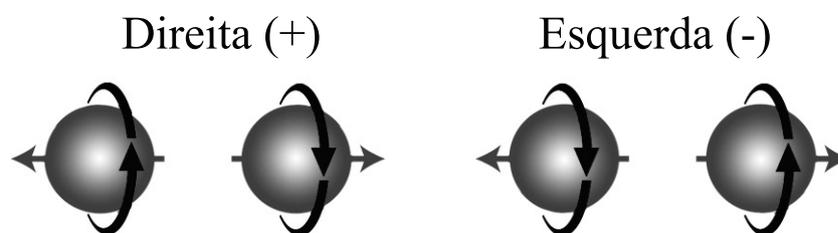


Figura 2.4: Helicidade, seta cinza representa o momento linear, seta contornando em preto o spin.

Partículas de massa zero são capazes de se mover com velocidade da luz e não podemos colocá-las em um referencial de repouso (pois a velocidade da luz é absoluta). Já partículas materiais permitem redefinir o referencial e assim alterar os módulos e direção dos momentos lineares de acordo com esta mudança, porém inalterando seu spin. A Massa é o parâmetro que define se helicidade é algo intrínseco de uma partícula. Para partículas não massivas helicidade e spin representam, então, a mesma grandeza.

A quiralidade está associada a rotações do Grupo de Lorentz [17]. Trabalhando na base de Weyl, temos a seguinte propriedade das componentes de seu espinor

$$\frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 + \gamma^5}{2} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Verificamos que a quinta matriz, γ^5 atua no espinor, Ψ , separando seus modos direito, ψ_R , e esquerdo, ψ_L . Observe também que o modo esquerdo é obtido a partir de uma subtração, enquanto o modo direito de um soma.

Exporemos nos capítulos de localização mais detalhes de como a quinta matriz atuam em férmions massivos.

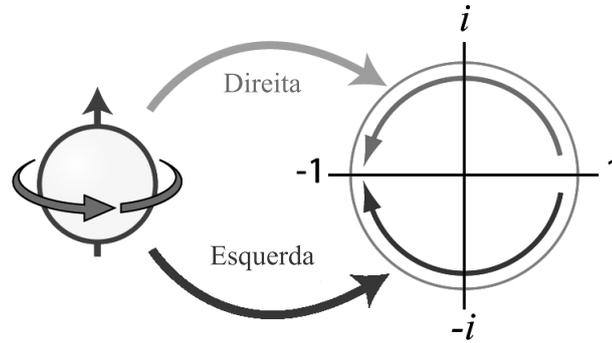


Figura 2.5: Rotação do spin em um plano complexo.

2.4 Lista de propriedades das matrizes de Dirac

Com o intuito de facilitar a consulta iremos resumir as propriedades mais importantes abaixo

- Assinatura da métrica de Minkowski utilizada

$$\eta^{MN} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1) \quad (2.47)$$

- Álgebra de Clifford

$$\{\gamma^M, \gamma^N\} = \gamma^M \gamma^N + \gamma^N \gamma^M = -2\eta^{MN} I, \quad (2.48)$$

- Transição para uma base contravariante

$$\gamma_M = \eta_{MN} \gamma^N = \{-\gamma^0, +\gamma^1, +\gamma^2, \dots, +\gamma^n\}. \quad (2.49)$$

- Propriedade do traço das matrizes

O Traço, $tr(M)$ de uma matriz é definido como a soma dos elementos de sua diagonal principal, em qualquer matriz o traço tem as seguintes identidades

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B), \quad (2.50)$$

$$tr(rA) = rtr(A), \quad (2.51)$$

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA). \quad (2.52)$$

Seguem algumas propriedades do traço nas matrizes de Dirac

$$tr(\gamma^\mu) = 0, \quad (2.53)$$

assim como o traço de todo produto que envolva um número ímpar de matrizes também será.

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^\mu_\nu, \quad (2.54)$$

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}), \quad (2.55)$$

$$tr(\gamma^5) = tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0, \quad (2.56)$$

$$tr(\gamma^6) = 0, \quad (2.57)$$

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.58)$$

onde ε é o símbolo de *Levi-Civita*, que gera sinal positivo para permutações pares, negativo para ímpares e nulo se houverem índices repetidos.

- Produtos interessantes

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I \quad (2.59)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu. \quad (2.60)$$

- Na base de Dirac temos a coleção de matrizes em cinco dimensões

$$\gamma^i = \beta\alpha^j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\gamma^5 \equiv i \prod_{j=1}^4 \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

- Para seis dimensões as matrizes são construídas de forma semelhante como escritas em cinco, porém utilizamos as matrizes obtidas em quatro dimensões no lugar das matrizes de Pauli, assim elas possuirão ordem 8×8 .

$$\gamma^i = \beta\alpha^j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}_{8 \times 8} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{4 \times 4}^j \\ -\gamma_{4 \times 4}^j & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}, \quad (2.65)$$

- A forma da sexta matriz pode ser verificada na referência [19]

$$\gamma^6 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}, \quad (2.66)$$

3 Localização em 5D

Estudaremos nesse capítulo uma técnica para suavizar o modelo proposto por Randall-Sundrum [22-24]. Acompanharemos a descrição da técnica segundo a referência [22], onde foi utilizado um campo escalar para gerar a quinta dimensão. A proposta do capítulo é demonstrar o mecanismo de localização do campo fermiônico em cinco dimensões e como este depende da geometria (métrica). Verificaremos que a escolha da métrica será fundamental para a obtenção de novos resultados.

3.1 Campo Escalar gerador da Membrana

Durante o capítulo de introdução, mostramos na seção (1.2.3) como o modelo de Randall-Sundrum resolveu o problema de hierarquia entre as escalas de Planck e Eletrofraca ao supor uma dimensão extra não compacta. Relembre que a seguinte métrica foi utilizada para a resolução, onde x representa os termos da brana e y a dimensão extra

$$g_{MN}dx^M dx^N = dS_5^2 = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3.1)$$

Iremos propor uma modificação no modelo partindo de uma métrica semelhante

$$g_{MN}dx^M dx^N = dS_5^2 = e^{A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3.2)$$

onde $A(y)$ é o novo *fator de warp*, o qual será obtido a partir da equação de Einstein segundo uma ação que acoplará gravidade com um campo escalar

$$S = \int \mathcal{L} dV = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\partial\phi(y))^2 - V(\phi(y)) \right) d^4x dy, \quad (3.3)$$

sendo g o determinante da métrica (3.2).

Foi escolhido um campo escalar $\phi(y)$ que depende apenas da dimensão extra, y , ou seja, o campo escalar atua como um gerador da quinta dimensão.

Aplicaremos agora a métrica (3.2) e a ação (3.3) na equação de Einstein

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R + g_{MN}\Lambda = \frac{8\pi g}{c^4}T_{MN}, \quad (3.4)$$

onde R_{MN} é o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura, Λ a constante cosmológica, T_{MN} o tensor energia-momento. Lembremos que os índices M e N correm em todo o Bulk (1 até 5).

Seguiremos mostrando as formas dos tensores para continuação dos cálculos. Iniciaremos com o termo à direita da equação.

O tensor energia-momento é obtido a partir de uma relação com o lagrangiano de matéria (\mathcal{L}_{mat}), que obedece a equação de Euler Lagrange ,

$$\partial_M \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_M \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (3.5)$$

a relação é a seguinte

$$\begin{aligned} T_{MN} &= 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{MN}} + g_{MN} \mathcal{L}_{mat} \\ &= \partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left(\frac{1}{2} \partial_P \phi \partial^P \phi + V(\phi) \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

obtemos também

$$\partial_P [\sqrt{-g} g^{PN} \partial_N \phi] = \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.7)$$

Tomaremos o valor da constante cosmológica como zero. Substituindo os valores encontrados pelo tensor energia-momento (3.6) na equação de Einstein (3.4) teremos

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + g_{MN} \Lambda = 2 \left[\partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left(\frac{1}{2} \partial_P \phi \partial^P \phi + V(\phi) \right) \right]. \quad (3.8)$$

A curvatura escalar é calculada a partir da contração com o tensor de Ricci

$$R = g^{MN} R_{MN}. \quad (3.9)$$

Por sua vez o tensor de Ricci é dado pela contração do tensor de Riemman

$$\begin{aligned} R_{MN} &= R_{MPN}^P \\ &= \partial_Q \Gamma_{MN}^P - \partial_N \Gamma_{MQ}^P + \Gamma_{MN}^R \Gamma_{QR}^P - \Gamma_{MQ}^R \Gamma_{RN}^P, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde os Γ são os chamados símbolos de Christoffel denotados por

$$\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2} g^{PQ} (\partial_M g_{QN} + \partial_N g_{QM} + \partial_Q g_{MN}). \quad (3.11)$$

observe que todos os elementos encontrados até aqui são dependentes exclusivamente da métrica. Exporemos nossa métrica em forma matricial

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} -e^{2A(y)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2A(y)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2A(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

concluimos que $g = e^{4A(y)}$.

Observe que haveriam n^3 símbolos Christoffel a serem calculados . Contudo a forma diagonal de nossa métrica e sua dependência exclusiva de (y) elimina a maioria desses termos, restando apenas os oito listados a seguir

$$\Gamma_{51}^1 = \Gamma_{52}^2 = \Gamma_{53}^3 = \Gamma_{54}^4 = \partial_y A(y) = A'(y); \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{22}^5 = \Gamma_{33}^5 = \Gamma_{44}^5 = -\Gamma_{11}^5 = -e^{2A(y)} A'(y), \quad (3.14)$$

e com isso, R_{MN} será apenas

$$R_{22} = R_{33} = R_{44} = -R_{11} = -e^{2A(y)} [4A'(y)^2 + A''(y)] \quad (3.15)$$

$$R_{55} = -4[5A'(y)^2 + A''(y)]. \quad (3.16)$$

e a curvatura escalar

$$R = -4[5A'(y)^2 + 2A''(y)]. \quad (3.17)$$

Encontrados todos os termos nas expressões (3.12-3.17), encontraremos os seguintes sistemas por (3.6) e (3.7)

Para a dimensão extra, $M=N=5$

$$6A'^2 = \phi'^2 - 2V(\phi). \quad (3.18)$$

Para os termos relativos à Brana, $M=N=1,2,3,4$.

$$-3A''^2 - 6A'^2 = 2V(\phi) + \phi'^2. \quad (3.19)$$

Somando as relações (3.18) com (3.19) encontraremos

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2, \quad (3.20)$$

e a Euler-Lagrange (3.5) tomará a forma

$$4A''^2 - \phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (3.21)$$

A equação (3.20) relaciona as derivadas em y do fator de warp com o campos escalar, enquanto a equação (3.21) relaciona essas derivadas com a derivada do potencial desse campo. Teremos várias soluções para as equações acima. Verificaremos que adotando uma solução do tipo Kink¹ para o campo escalar, obteremos uma interessante variação do Modelo RS que demonstraremos a seguir

$$\phi(y) = \tanh(y). \quad (3.22)$$

O gráfico da solução (3.22) é exposto na figura (3.1).

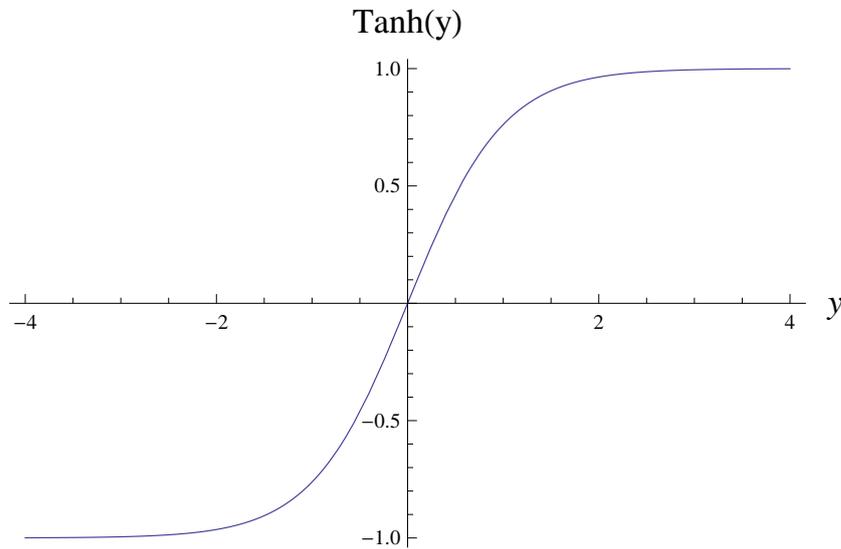


Figura 3.1: Solução do tipo Kink.

Com a forma sugerida, obteremos pela equação (3.20)

$$A''(y) = -\frac{2}{3} [\operatorname{sech}^2(y)],$$

integrando em y

$$A'(y) = -\frac{2}{9} [2 + \operatorname{sech}^2(y)\tanh(y)],$$

integrando novamente encontraremos a forma final de nosso fator de warp como

$$A(y) = -\frac{[4\ln[\cosh(y)] + \tanh^2(y)]}{9}. \quad (3.23)$$

¹Kinks possuem perfil na forma de tangente hiperbólica e são famosos no estudo de ondas solitárias e sólitons [25]

Obtido o novo fator de warp, verificaremos seu comportamento pelo gráfico das figuras (3.2) e (3.3)

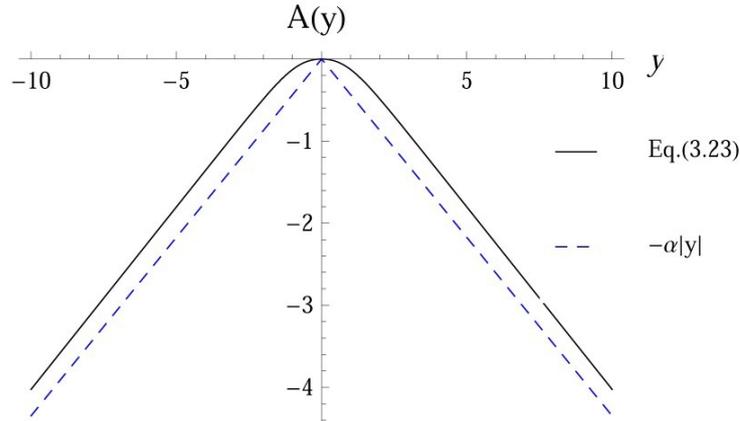


Figura 3.2: Comparação entre Fatores de Warp para pequenos valores de y .

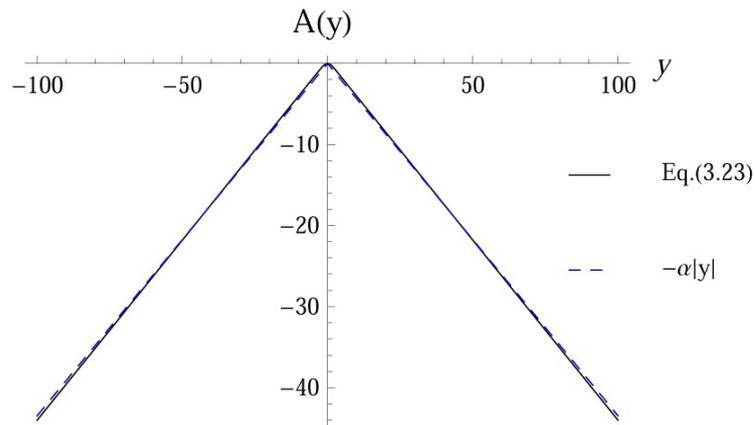


Figura 3.3: Comparação entre Fatores de Warp para grandes valores de y .

Verifique que o fator de warp obtido se assemelha muito ao do modelo de Randall-Sundrum. Observe pela figura (3.2) que para as regiões próximas à brana ($y \sim 0$) o fator de warp encontrado toca o eixo y suavemente, diferente da forma de módulo proposta por RS. Pela figura (3.3), para regiões afastadas da brana ($y \rightarrow \infty$) não verificamos diferenças entre os Modelos. Sendo assim, podemos concluir que

$$e^{2A(y)} \sim e^{-\alpha|y|}, \quad y \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

como pode ser verificado na figura (3.4).

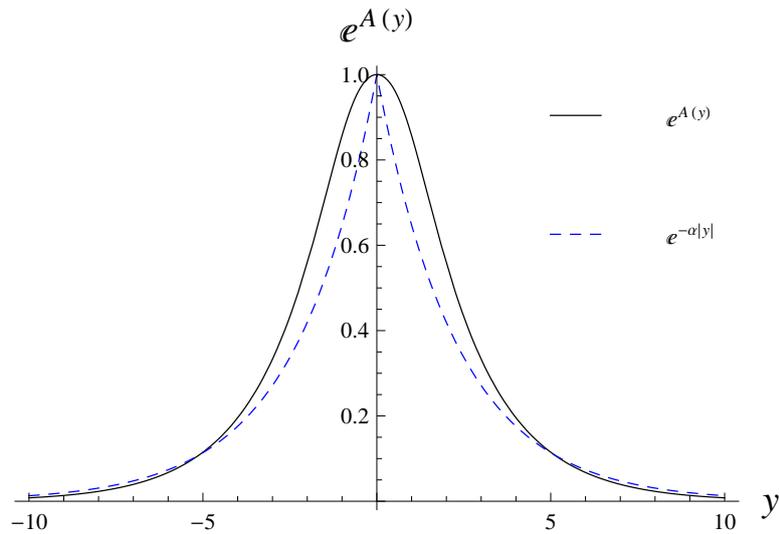


Figura 3.4: Comparação entre as exponenciais dos Fatores de Warp.

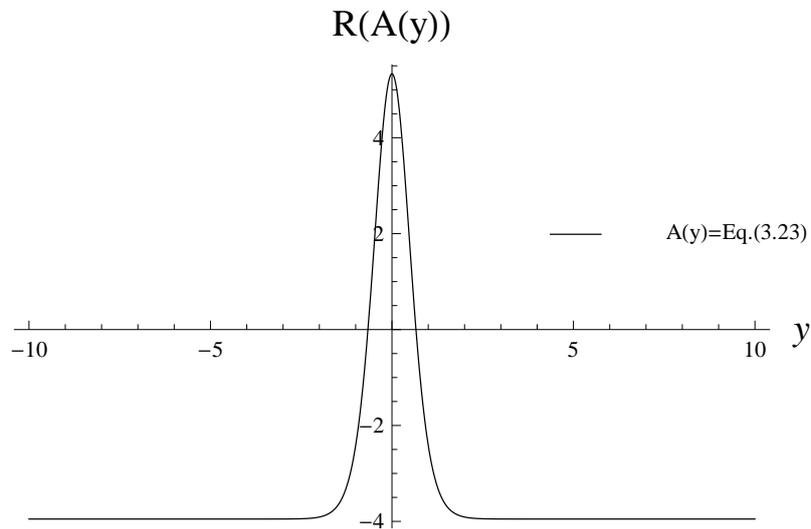


Figura 3.5: Escalar de curvatura, observe que rapidamente atinge valor constante e negativo.

Observe que o pico da curva proposta pelo Modelo RS é bem mais acentuado que no obtido em (3.25). O escalar de curvatura, figura (3.5), tem suas singularidades removidas e concorda com o modelo RS longe da origem de y . Ele adquire valor constante e negativo, característica do espaço anti-De Sitter (AdS_5)[11].

Seguindo ainda a referência [22], iremos apresentar uma técnica que fará a brana possuir uma espessura variável.

3.1.1 Super Potencial e Deformação da Membrana

Definiremos um potencial auxiliar ao campo escalar, denominado de superpotencial, $W(\phi)$, [26, 27]

$$\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} = \phi' \quad (3.25)$$

e a partir daí relacionamos $W(\phi)$ com o potencial escalar, $V(\phi)$, por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{3} W(\phi)^2 \quad (3.26)$$

Deformar a membrana é fazer a seguinte modificação no superpotencial, transformando o $W(\phi)$ em um $W_p(\phi)$, como sugerido em [28]

$$\frac{\partial W_p(\phi)}{\partial \phi} = \phi^{\left(\frac{p-1}{p}\right)} - \phi^{\left(\frac{p+1}{p}\right)} = \phi'_p \quad (3.27)$$

Esta modifica a solução do tipo Kink na forma $\phi(y) \rightarrow \phi^{\frac{1}{p}}(y)$, ou seja

$$\phi_p(y) = \tanh^p\left(\frac{y}{p}\right) \quad (3.28)$$

onde p são inteiros ímpares e positivos.

A deformação do kink é mostrada na figura (3.6). Observe que para $p = 1$ mantemos a forma de nossa solução padrão. Para valores maiores de p há a divisão do kink inicial em dois outros novos, um positivo e outro negativo (defeito tipo "Two-Kink"[22]). Veja também que quanto maior o valor de p maior é a espessura da região que separa os dois defeitos.

A nova forma do campo escalar, $\phi_p(y)$, modifica o fator de warp, $A(y) \rightarrow A_p(y)$, em

$$A_p(y) = -\frac{1}{6} \left(\frac{p}{2p+1} \right) \tanh^{2p}\left(\frac{y}{p}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{p^2}{2p-1} - \frac{p^2}{2p+1} \right) \times \left[\cosh\left(\frac{y}{p}\right) - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{2n} \tanh^{2n}\left(\frac{y}{p}\right) \right]. \quad (3.29)$$

Apesar da expressão (3.29) se tornar bem mais complexa do que a original (3.23), ela ainda preserva sua característica suave. O perfil modular de (3.29) é exibido na figura (3.7).

O gráfico de $e^{2A_p(y)}$ será mostrado a seguir. Como previsto, o parâmetro p amplia a espessura da região que denominamos de brana.

Por fim plotaremos o gráfico da curvatura escalar, verificaremos que ela tenderá a um valor negativo e constante para $y \rightarrow \infty$, concordando com o modelo RS.

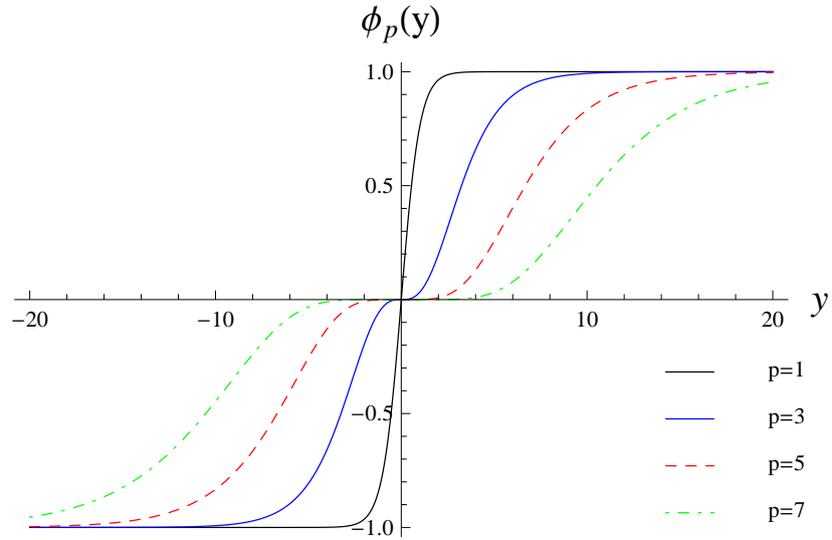


Figura 3.6: Novas formas geradas a partir da deformação do Kink.

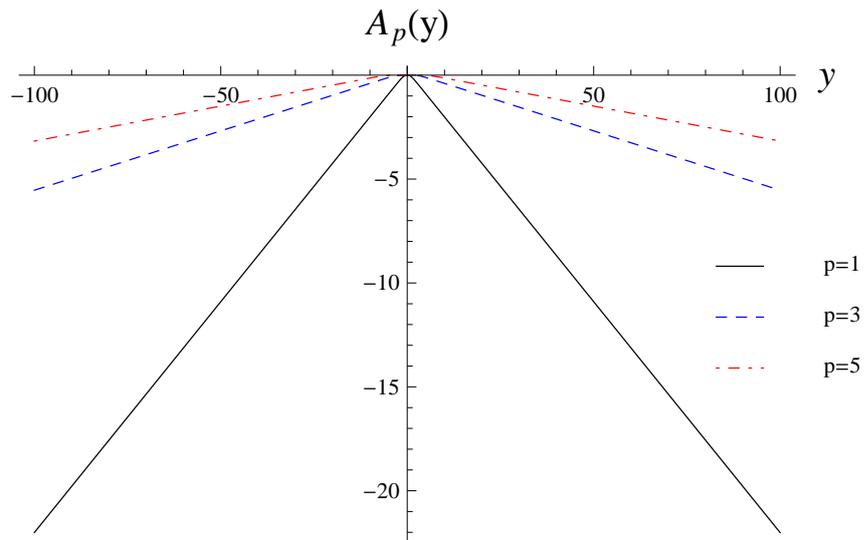


Figura 3.7: Forma de $A_p(y)$, fator de warp gerado pela deformação da membrana.

3.2 Localização do modo zero de um campo escalar

Utilizaremos a estrutura estudada na seção anterior como um cenário de nosso modelo em cinco dimensões. Localizaremos o campo escalar como exemplo.

Partiremos da ação

$$S = \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{-g} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \right) d^4 x dy, \quad (3.30)$$

realizando procedimento semelhante ao da seção anterior, encontraremos a equação de movi-

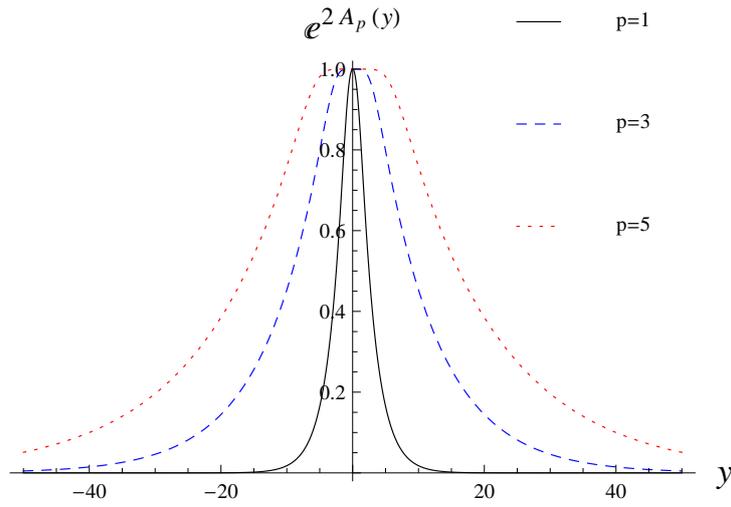


Figura 3.8: Forma de $e^{A_p(y)}$, espessura do pico aumenta com p .

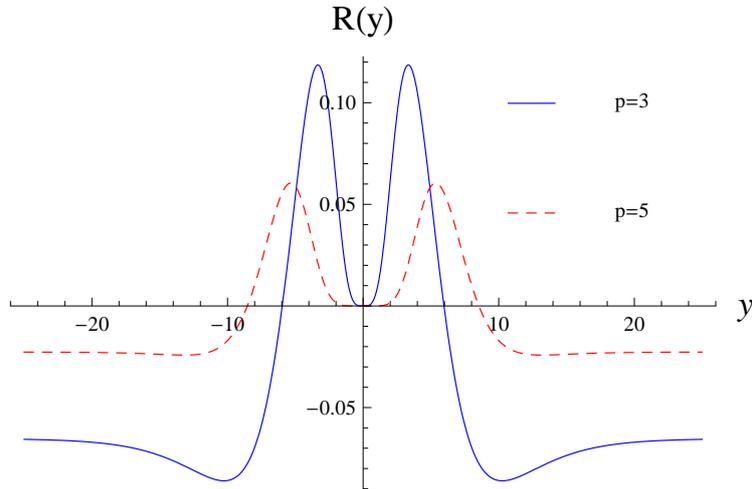


Figura 3.9: A curvatura escalar se mantém negativa para valores de y distantes da origem. Para $p = 1$ o resultado é o mesmo da Figura(3.5). Quanto maior p menor é o módulo de R e mais larga será a distância entre os picos.

mento

$$\partial_M \left[\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \right] \Phi = 0, \quad (3.31)$$

Dessa forma, separando os componentes de dimensão extra, y , dos componentes de brana, x , obteremos

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Phi + e^{2A_p(y)} \partial_y \left[e^{2A_p(y)} \partial_y \Phi \right] = 0. \quad (3.32)$$

Faremos a seguinte suposição na forma de Φ para observar o comportamento isolado da

componente do campo escalar na dimensão extra

$$\Phi(x, y) = \chi(x)\psi(y), \quad (3.33)$$

substituindo (3.33) em (3.31)

$$4A'_p \left(\frac{d\psi}{dy} \right) + \left(\frac{d^2\psi}{dy^2} \right) = -m^2 e^{-2A_p(y)} \psi, \quad (3.34)$$

Para o modo de massa zero escolheremos a solução de ψ como uma constante [22].

$$\psi(y) = c \quad (3.35)$$

Aplicando o resultado na ação (3.1) encontraremos a integral

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{-g} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \right) d^4 x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(y) e^{2A_p(y)} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi d^4 x \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 e^{2A_p(y)} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi d^4 x. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Numericamente não podemos tratar de valores infinitos, então analisaremos a convergência da integral para valores suficientemente grandes.

Fazendo o valor do campo como $\psi = 1$, obteremos o gráfico da figura (3.10).

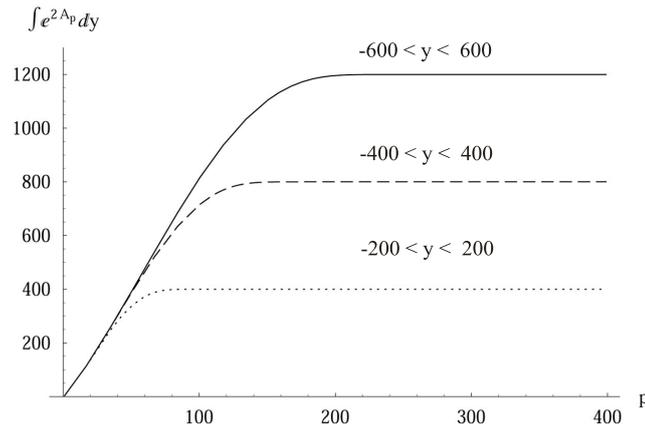


Figura 3.10: Integral da função $e^{-A_p(y)}$.

Verificamos haver convergência em todos os intervalos tomados, embora atinjam valores distintos para cada bloco de y tomado. A convergência é a garantia da localização de um modo ao longo da dimensão y . Concluimos que para $p \rightarrow \infty$ a exponencial terá largura infinita, esse fenômeno é conhecido como "Splitting"[22] e no caso delocaliza o modo zero.

3.3 Localização de férmions em 5D

Nesta seção utilizaremos um acoplamento tipo Yukawa para tratar a localização de férmions de spin $\frac{1}{2}$ em dimensões extras.

Tomaremos a seguinte ação em cinco dimensões para férmions de spin $\frac{1}{2}$ acoplados com gravidade e com um campo escalar

$$S = \int \sqrt{-g} [\bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi - f \bar{\Psi} \phi \Psi] d^5x, \quad (3.37)$$

onde f é o termo de acoplamento Yukawa, ϕ nosso campo escalar gerador da membrana, Γ^M o conjunto de matrizes de Dirac em um espaço curvo (mostraremos detalhes a seguir), D_M a derivada covariante e $\Psi, \bar{\Psi}$ o espinor de Dirac e seu conjugado.

O espinor de Dirac é decomposto em duas partes

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}_{4 \times 1}. \quad (3.38)$$

A métrica utilizada será a mesma proposta na seção inicial do capítulo

$$ds^2 = e^{2[A_P(y)]} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.39)$$

Iniciaremos o processo de localização ao resolver a equação de Dirac presente na ação (3.37)

$$[\Gamma^M D_M + f \phi_p] \Psi(x, y) = 0, \quad (3.40)$$

separando suas componentes em termos de brana e dimensão extra encontraremos

$$[\Gamma^\mu D_\mu + \Gamma^5 D_5 + f \phi_p] \Psi(x, y) = 0, \quad (3.41)$$

onde as derivadas covariantes são dadas por

$$D_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_M^{\overline{MN}} \gamma_{\overline{M}} \gamma_{\overline{N}}, \quad (3.42)$$

a conexão de spin, $\omega_M^{\overline{MN}}$ definida pela forma [29, 30]

$$\omega_M^{\overline{MN}} = \eta^{\overline{NP}} \xi_N^{\overline{M}} (\partial_M \xi_P^N + \xi_P^N \Gamma_{PM}^N), \quad (3.43)$$

onde os $\xi_M^{\overline{M}}$ são as chamadas vielbeins [29], responsáveis por relacionar métricas planas ($\eta_{\overline{MN}}$) com métricas em espaços curvos (g_{MN}).

Correlacionando nossa métrica curva (3.38) com uma métrica plana (Minkowski)

$$g_{MN} = \xi_M^M \xi_N^N \eta_{MN} \quad \rightarrow \quad \xi_M^M = (g_{MN})^{\frac{1}{2}} \delta_M^M,$$

obteremos os seguintes valores para nossas vielbeins

$$\xi_{\bar{\mu}}^{\mu} = e^{A_p(y)} \delta_{\bar{\mu}}^{\mu} \quad \rightarrow \quad \xi_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} = e^{-A_p(y)} \delta_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}}, \quad (3.44)$$

$$\xi_5^5 = \xi_{\bar{5}}^{\bar{5}} = 1. \quad (3.45)$$

Encontradas as relações em (3.44) e (3.45), escreveremos as matrizes no espaço curvo como

$$\Gamma^M = \xi_M^M \gamma^{\bar{M}},$$

logo

$$\Gamma^{\mu} = e^{-A_p(y)} \gamma^{\bar{\mu}} \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\mu} = e^{A_p(y)} \gamma^{\bar{\mu}} \quad (3.46)$$

$$\Gamma^5 = \Gamma_{\bar{5}} = \gamma^{\bar{5}} = \gamma_{\bar{5}}. \quad (3.47)$$

Verificando a forma da métrica, encontraremos as únicas conexões de spin [22]

$$\omega_{\mu}^{\bar{5}\bar{\mu}} = 2A(y) \gamma_{\bar{5}} \gamma_{\bar{\mu}}. \quad (3.48)$$

Construímos a derivada covariante a seguir

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{1}{2} A'_p(y) \gamma_{\bar{5}} \gamma_{\bar{\mu}} \quad e \quad D_{\bar{5}} = \partial_{\bar{5}}. \quad (3.49)$$

Devemos agora aplicar as matrizes de Dirac nas conexão de spin encontradas

$$\Gamma^{\mu} D_{\mu} = \Gamma^{\mu} \partial_{\mu} + \frac{1}{2} A'_p(y) \Gamma^{\mu} \gamma_{\bar{5}} \gamma_{\bar{\mu}} = \Gamma^{\mu} \partial_{\mu} + 2A'_p(y) \Gamma^5, \quad e \quad \Gamma^{\bar{5}} D_{\bar{5}} = \Gamma^{\bar{5}} \partial_{\bar{5}}. \quad (3.50)$$

Nossa equação de Dirac será

$$\begin{aligned} & [\Gamma^M D_M + f\phi(y)] \Psi(x, y) = \\ & \left[\Gamma^{\mu} \partial_{\mu} + \left(\partial_{\bar{5}} + \frac{1}{2} A'_p(y) \right) \Gamma^{\bar{5}} + f\phi(y) \right] \Psi(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Como feito para o modo não massivo do campo escalar, separaremos as variáveis de $\Psi(x, y)$ na forma

$$\Psi(x, y) = \psi(x) \alpha(y), \quad (3.52)$$

A forma como as matrizes Γ^{μ} e $\Gamma^{\bar{5}}$ atuam no espinor para o modo sem massa é a seguinte

$$\Gamma^{\mu} D_{\mu} \psi(x) = 0 \quad e \quad \Gamma^{\bar{5}} \psi = \pm \psi \quad (3.53)$$

Calculando primeiramente o modo zero direito faremos $\Gamma^5\Psi = +\Psi$, que torna a equação (3.51) em

$$2A'_p\alpha(y) + \alpha'(y) + f\phi_p\alpha(y) = 0. \quad (3.54)$$

Assim, verificamos que a solução para o Modo zero direito na forma exponencial dada por

$$\alpha(y) = e^{-2A_p(y) - \int f\phi_p(y)dy}. \quad (3.55)$$

Para que o modo seja localizado é necessário que a expressão encontrada em (3.55) seja finita.

Relembre que o fator $A_p(y)$, (3.29), sempre assume valores menores que zero, mas devido ao sinal negativo será sempre positivo. A exponencial em questão, será convergente quando os valores gerado pela integral, $\int [f\phi_p(y)]dy$ superarem em módulo os valores de $2A_p(y)$. Foi verificado em [22] que somente haverá localização do modo zero direito quando se verificar a relação.

$$f > \frac{8p}{12p^2 - 3}, \quad (3.56)$$

sendo p inteiro e ímpar. O valor mínimo para que o modo direito seja localizado será $f > \frac{3}{85} \sim 0.228$. Para outros valores de p , veja o gráfico da figura (3.11)

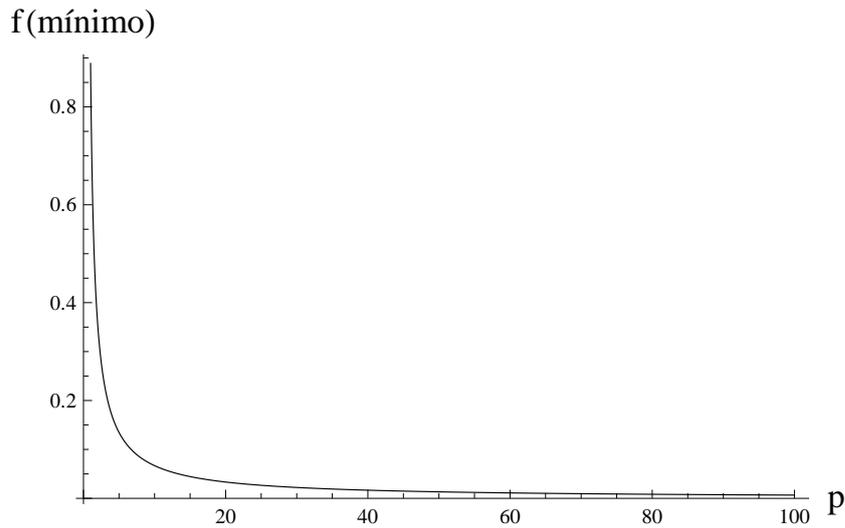


Figura 3.11: relação mínima entre os fatores de Yukawa e de deformação da membrana.

Dando continuidade à localização dos modos zero. Encontraremos a equação para quiralidade Esquerda, $\Gamma^5\Psi = -\Psi$, como

$$2A'_p\alpha(y) + \alpha'(y) - f\phi_p\alpha(y) = 0, \quad (3.57)$$

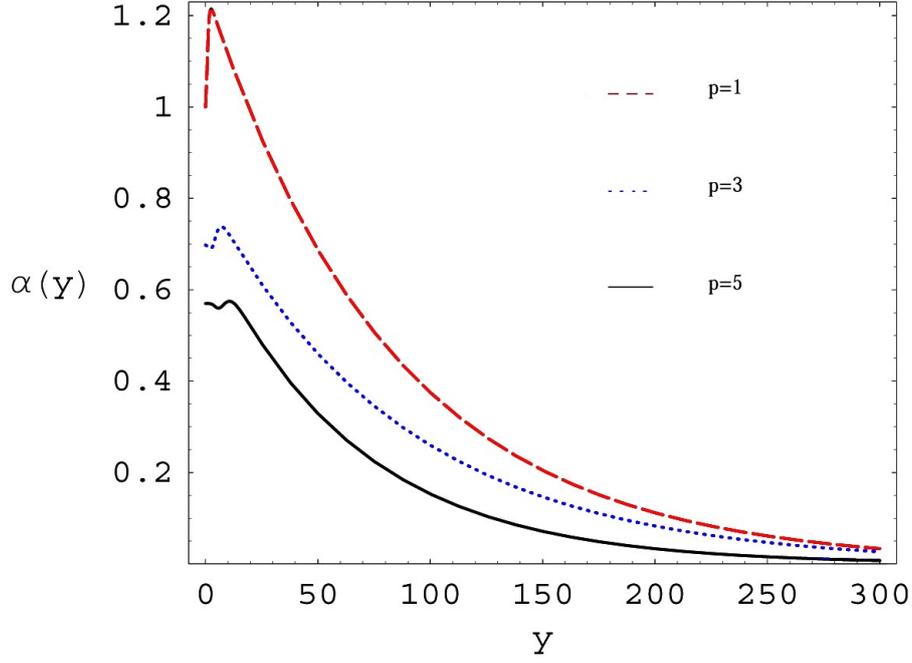


Figura 3.12: Localização do Modo Zero Direito.

a qual possui solução

$$\alpha(y) = e^{-2A_p(y) + \int f \phi_p(y) dy}. \quad (3.58)$$

Como teremos apenas fatores positivos no argumento da exponencial, $\alpha(y)$, crescerá indefinidamente e o modo zero esquerdo não será localizado. Veja a figura (3.13).

Como feito na seção final da localização do campos escalar, seção (3.2), iremos verificar a normalização das nossas soluções. A separação de variável tomada permitirá escrever a ação como

$$\begin{aligned} \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} dy \sqrt{g} \bar{\Psi}(x, y) \Gamma^M D_M \Psi(x, y) = \\ \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy (e^{2A_p(y)} |\alpha(y)|^2). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como verificado, o termo $\int_{-\infty}^{+\infty} dy (e^{2A_p(y)} |\alpha(y)|^2)$ é finito apenas para o modo de quiralidade positiva desde que seja observada a relação (3.56).

Apresentaremos a localização do modo massivo durante o desenvolvimento do capítulo 4.

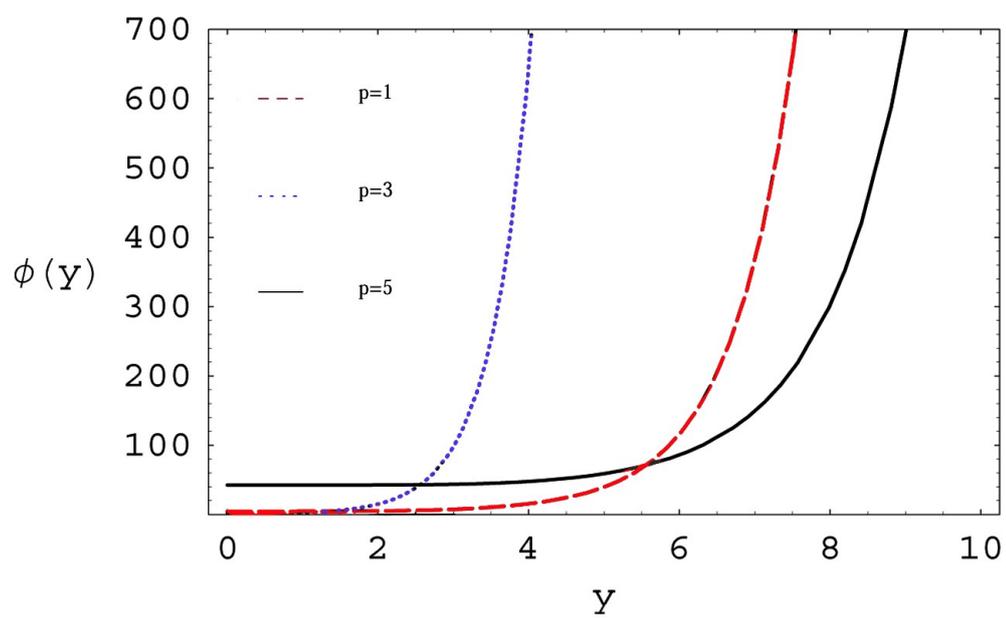


Figura 3.13: Localização do Modo Zero Esquerdo. A função cresce indefinidamente, impossibilitando a localização.

4 Localização de Férmions em 6D

Os Capítulos 4 e 5 são os capítulos centrais dessa dissertação. Neste capítulo iremos tratar da equação de Dirac para um cenário geral de seis dimensões. Obtidas as expressões generalizadas poderemos encontrar os mesmos resultados presentes em [22, 23, 31 e 32] como casos particulares. No capítulo 5 iremos tratar de uma geometria ainda inédita sob o ponto de vista de localização de férmions, o *Conifold*.

4.1 Equações de Einstein em 6D

A equação de Einstein em seis dimensões é dada por

$$R_{MN} - \frac{R}{2}g_{MN} = \Lambda g_{MN} + K_6^2 T_{MN}, \quad (4.1)$$

onde g_{MN} é a métrica de nosso espaço, R_{MN} o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura, Λ a constante cosmológica, K_6^2 a constante gravitacional em seis dimensões e T_{MN} o tensor energia-momento. Os índices M, N variam tomando valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Escolheremos uma métrica diagonal para seis dimensões, com fatores generalizados

$$g_{MN} dx^M dx^N = ds_6^2 = F(r)\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + G(r)dr^2 + H(r)d\theta^2, \quad (4.2)$$

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} -F(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H(r) \end{pmatrix}_{6 \times 6}. \quad (4.3)$$

Não entraremos em detalhes de como a métrica estará relacionada com a constante cosmológica e o tensor energia-momento. Verificamos durante a localização de férmions da seção (3.3), que necessitaremos dos símbolos de Christoffel para calcular as conexões de spin. Nos

limitaremos a expor os símbolos de Christoffel obtidos para a métrica (4.3); são eles:

$$\Gamma_{51}^1 = \Gamma_{52}^2 = \Gamma_{53}^3 = \Gamma_{54}^4 = \frac{F'(r)}{2F(r)}; \quad (4.4)$$

$$\Gamma_{22}^5 = \Gamma_{33}^5 = \Gamma_{44}^5 = -\Gamma_{11}^5 = -\frac{F'(r)}{2G(r)}; \quad (4.5)$$

$$\Gamma_{55}^5 = \frac{G'(r)}{2G(r)}; \quad (4.6)$$

$$\Gamma_{66}^5 = -\frac{H'(r)}{2G(r)}; \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{65}^6 = \frac{H'(r)}{2H(r)}. \quad (4.8)$$

Guardando o resultado acima, poderemos seguir com nosso objetivo de analisar a localização de férmions em um cenário de seis dimensões.

4.2 Localização do campo Fermiônico em 6D

Utilizando como referências os trabalhos em cinco dimensões [22], [23] e [24] e os dois trabalhos em seis dimensões [31] e [32] ao longo de toda a seção.

A motivação para trabalharmos com seis dimensões é de que o modelo de Randall-Sundrum não consegue localizar o campo vetorial (spin 1) em cinco dimensões. Dessa forma, se introduziu uma outra dimensão extra (compactificada) para permitir a localização desse campo. A geometria de seis dimensões estudada em [31] e [32] é o chamado *Defeito Tipo Corda*.

4.2.1 Modos Quirais

Tomaremos a seguinte ação para férmions de spin $\frac{1}{2}$ em seis dimensões [31], [32]

$$S = \int \sqrt{-g} \bar{\Psi} [i\Gamma^M D_M + Q_{Ext}(r)] \Psi d^6 x, \quad (4.9)$$

onde D_M é a derivada covariante, Γ^M são as matrizes de Dirac no sistema curvo, $\bar{\Psi}$, Ψ são os espinores de Dirac e $Q_{Ext}(r)$ o termo relacionado ao acoplamento de campos externos¹.

Deveremos então resolver a equação de Dirac em seis dimensões

$$[\Gamma^M D_M + Q_{Ext}(r)] \Psi(x, r, \theta) = 0, \quad (4.10)$$

¹Assumirá o valor do acoplamento *Yukawa* ($Q = f\phi$) para reproduzir os resultados de [22-24] em cinco dimensões.

separando as componentes em termos de brana e dimensões extras

$$[\Gamma^\mu D_\mu + \Gamma^5 D_5 + \Gamma^6 D_6 + Q_{Ext}(r)]\Psi(x, r, \theta) = 0, \quad (4.11)$$

Relacionando as matrizes de Dirac no espaço curvo com as do espaço plano

$$\Gamma^M = (\xi_{\bar{M}}^M) \gamma^{\bar{M}}, \quad (4.12)$$

onde os índices com barra percorrem o espaço plano e os sem barra o espaço curvo. Temos que

$$g_{MN} = \eta_{\bar{N}\bar{M}} \xi_{\bar{M}}^{\bar{N}} \xi_{\bar{N}}^{\bar{M}}, \quad (4.13)$$

devido à forma diagonal de nossa métrica

$$\xi_{\bar{M}}^M = (g_{MN})^{-\frac{1}{2}} \delta_{\bar{M}}^M, \quad (4.14)$$

assim os valores não nulos das vielbeins serão

$$\xi_{\bar{\mu}}^\mu = F^{-\frac{1}{2}}(r) \delta_{\bar{\mu}}^\mu \quad \rightarrow \quad \xi_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} = F^{\frac{1}{2}}(r) \delta_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}}; \quad (4.15)$$

$$\xi_{\bar{5}}^5 = G^{-\frac{1}{2}}(r) \quad \rightarrow \quad \xi_{\bar{5}}^{\bar{5}} = G^{\frac{1}{2}}(r); \quad (4.16)$$

$$\xi_{\bar{6}}^6 = H^{-\frac{1}{2}}(r) \quad \rightarrow \quad \xi_{\bar{6}}^{\bar{6}} = H^{\frac{1}{2}}(r). \quad (4.17)$$

Concluimos que as transformações das matrizes nos espaços curvo e plano serão dadas por

$$\Gamma^\mu = F(r)^{-\frac{1}{2}} \gamma^\mu, \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\bar{\mu}} = F(r)^{\frac{1}{2}} \gamma_{\bar{\mu}}; \quad (4.18)$$

$$\Gamma^5 = G(r)^{-\frac{1}{2}} \gamma^5, \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\bar{5}} = G(r)^{\frac{1}{2}} \gamma_{\bar{5}}; \quad (4.19)$$

$$\Gamma^6 = H(r)^{-\frac{1}{2}} \gamma^6, \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\bar{6}} = H(r)^{\frac{1}{2}} \gamma_{\bar{6}}. \quad (4.20)$$

Definiremos a derivada covariante da forma

$$D_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_M^{\bar{M}\bar{N}} \gamma_{\bar{M}} \gamma_{\bar{N}} + Q_{I_M}, \quad (4.21)$$

o termo $Q_{I_M}(x, r, \theta)$ representa um termo de *acoplamento interno* observado na referência [32]²

e o termo ω_p^{ab} é a chamada *conexão de Spin* dada por [29, 30]

$$\omega_M^{\bar{M}\bar{N}} = \xi_{\bar{N}}^{\bar{M}} \left(\partial_M \xi^{\bar{N}\bar{N}} + \xi^{P\bar{N}} \Gamma_{PM}^{\bar{N}} \right), \quad (4.22)$$

que poderemos escrever de uma forma mais compacta, uma vez que

$$\xi^{\alpha x} = \eta^{xc} \xi_c^\alpha,$$

²Nela o acoplamento interno assume valor $Q_I = -ieA_M$, sendo A_M um campo de calibre.

teremos $\xi^{N\bar{N}} = \eta^{N\bar{P}}\xi_P^N$ e $\xi^{P\bar{N}} = \eta^{P\bar{N}}\xi_P^P$. Assim

$$\omega_M^{\bar{M}\bar{N}} = \eta^{N\bar{P}}\xi_P^{\bar{M}}\left(\partial_M\xi_P^N + \xi_P^P\Gamma_{PM}^N\right). \quad (4.23)$$

A forma diagonal de nossa métrica e sua dependência exclusiva da coordenada radial, r , nos indicam que somente os candidatos listados são possivelmente não nulos

$$\omega_\mu^{\bar{5}\bar{\mu}}, \quad \omega_5^{\bar{5}\bar{5}}, \quad \omega_6^{\bar{5}\bar{6}} \quad e \quad \omega_5^{\bar{6}\bar{6}}. \quad (4.24)$$

Calcularemos cada um deles a seguir

$$\omega_\mu^{\bar{5}\bar{\mu}} = \eta^{\mu\bar{\mu}}\xi_5^{\bar{5}}\left(\partial_5\xi_\mu^5\delta_\mu^5 + \xi_\mu^\sigma\Gamma_{\sigma\mu}^5\right),$$

como μ e $\bar{\mu}$ correm de 1-4, os valores dos primeiros termos dentro do parênteses é nulo

$$\omega_\mu^{\bar{5}\bar{\mu}} = G^{\frac{1}{2}}(r)\xi_\mu^\sigma\Gamma_{\sigma\mu}^5 = G^{\frac{1}{2}}(F^{-\frac{1}{2}}\delta_\mu^\mu)\left(\frac{-F'}{2G}\right),$$

daí

$$\omega_\mu^{\bar{5}\bar{\mu}} = -\frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}F^{-\frac{1}{2}}F'\delta_\mu^\mu. \quad (4.25)$$

Para o próximo termo

$$\begin{aligned} \omega_5^{\bar{5}\bar{5}} &= \eta^{\bar{5}\bar{5}}\xi_5^{\bar{5}}\left(\partial_5\xi_5^5\delta_5^5 + \xi_5^\sigma\Gamma_{\sigma 5}^5\right) \\ &= G^{\frac{1}{2}}\left((\partial_5G^{-\frac{1}{2}}) + G^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{G'}{2G}\right)\right) \\ &= G^{\frac{1}{2}}\left((\partial_5G^{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}G^{-\frac{3}{2}}G'\right), \end{aligned}$$

observe que pela regra da cadeia, $(\partial_5G^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}G^{-\frac{3}{2}}G')$, ou seja

$$\omega_5^{\bar{5}\bar{5}} = 0. \quad (4.26)$$

Seguindo.

$$\begin{aligned} \omega_6^{\bar{5}\bar{6}} &= \eta^{\bar{6}\bar{6}}\xi_5^{\bar{5}}\left(\partial_6\xi_6^5 + \xi_6^\sigma\Gamma_{\sigma 6}^5\right) \\ &= G^{\frac{1}{2}}\xi_6^6\Gamma_{66}^5 \end{aligned}$$

$$\omega_6^{\bar{5}\bar{6}} = -\frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}H'. \quad (4.27)$$

Por fim

$$\begin{aligned} \omega_5^{\bar{6}\bar{6}} &= \eta^{\bar{6}\bar{6}}\xi_6^{\bar{6}}\left(\partial_5\xi_6^6 + \xi_6^\sigma\Gamma_{65}^6\right) \\ &= H^{\frac{1}{2}}\left((\partial_5H^{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}H^{-\frac{3}{2}}H'\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Verificamos que os únicos termos não nulos foram

$$\omega_{\mu}^{\bar{5}\bar{\mu}} = -\frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}F^{-\frac{1}{2}}F'\delta_{\mu}^{\bar{\mu}} \quad e \quad \omega_6^{\bar{5}\bar{6}} = -\frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}H'. \quad (4.29)$$

Assim as derivadas covariantes (4.21) serão calculadas a seguir

Para termos que variam de 1 a 4, brana, teremos

$$\begin{aligned} D_{\mu} &= \partial_{\mu} - \frac{1}{8}G^{-\frac{1}{2}}F^{-\frac{1}{2}}F'\delta_{\mu}^{\bar{\mu}}\gamma_{\bar{5}}\gamma_{\bar{\mu}} + Q_{I_{\mu}} \\ &= \partial_{\mu} + \frac{1}{8G}\frac{F'}{F}\Gamma_{\bar{5}}\Gamma_{\mu} + Q_{I_{\mu}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para a dimensão radial

$$D_5 = \partial_5 + Q_{I_5}. \quad (4.31)$$

Para a dimensão angular

$$\begin{aligned} D_6 &= \partial_6 - \frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}H'\gamma_{\bar{5}}\gamma_{\bar{6}} + Q_{I_6} \\ &= \partial_6 + \frac{1}{8G}\frac{H'}{H}\Gamma_{\bar{5}}\Gamma_6 + Q_{I_6}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

nas equações (4.31) e (4.33) colocamos todas as matrizes em sua representação no espaço curvo.

Encontramos assim a equação de Dirac separada em suas variáveis

$$\begin{aligned} \Gamma^M D_M &= \left(\left[\Gamma^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{1}{4G}\frac{F'}{F}\Gamma^{\mu}\Gamma_{\mu}\Gamma_{\bar{5}} + \Gamma^{\mu}Q_{I_{\mu}} \right] + \right. \\ &\left. + \left[\Gamma^5\partial_5 + \Gamma^5Q_{I_5} \right] + \left[\Gamma^6\partial_6 + \frac{1}{4G}\frac{H'}{H}\Gamma^6\Gamma_6\Gamma_{\bar{5}} + \Gamma^6Q_{I_6} \right] \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde verificamos o valor dos produtos³ $\Gamma^{\mu}\Gamma_5\Gamma_{\mu} = -2\delta_{\mu}^{\bar{\mu}}\Gamma^{\bar{\mu}}$ e $\Gamma^6\Gamma_5\Gamma_6 = -2\Gamma^5$. Teremos por fim

$$\Gamma^M D_M = \left\{ \left[\Gamma^{\mu}(Q_{I_{\mu}} + \partial_{\mu}) \right] + \Gamma^5 \left[(Q_{I_5} + \partial_5) \frac{1}{4G} \left(\frac{4F'}{F} + \frac{H'}{H} \right) \right] + \left[\Gamma^6(Q_{I_6} + \partial_6) \right] \right\}. \quad (4.34)$$

Substituindo esse resultado em nossa equação de Dirac obteremos

$$\begin{aligned} \{ \Gamma^M D_M + Q_{Ext}(r) \} \Psi(x, r, \theta) &= \left\{ \left[\Gamma^{\mu}(Q_{I_{\mu}} + \partial_{\mu}) \right] + \right. \\ &\left. + \Gamma^5 \left[(Q_{I_5} + \partial_5) + \frac{1}{4G} \left(\frac{4F'}{F} + \frac{H'}{H} \right) \right] + \left[\Gamma^6(Q_{I_6} + \partial_6) \right] + Q_{Ext}(r) \right\} \Psi(x, r, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Simplificando a notação faremos duas redefinições. Primeiramente agruparemos todos os termos que envolvem acoplamento definindo um Q_M como

$$Q_M(x, r, \theta) \equiv \Gamma^M Q_{I_M}(r) + Q_{Ext}(r), \quad (4.36)$$

³A referência [31] trabalha com uma "*p* - brana", ou seja uma brana com dimensão *p*. Para quatro dimensões $p = (\delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 + \delta_4^4) = 4$

dessa forma

$$\begin{aligned} & \{\Gamma^M D_M + Q_{Ext}(r)\} \Psi(x, r, \theta) = \\ & \left\{ (\Gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma^5 \left[\partial_5 + \frac{1}{4G} \left(\frac{4F'}{F} + \frac{H'}{H} \right) \right] + \Gamma^6 \partial_6) + Q_M \right\} \Psi(x, r, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

tomaremos também o termo que foi gerado a partir das conexões de spin como um $W(r)$

$$W(r) \equiv \frac{1}{4G} \left(\frac{4F'}{F} + \frac{H'}{H} \right). \quad (4.38)$$

As mudanças reduzem a expressão (4.36) da seguinte forma

$$\left\{ (\Gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma^5 [\partial_5 + W(r)] + \Gamma^6 \partial_6) + Q_M(x, r, \theta) \right\} \Psi(x, r, \theta) = 0. \quad (4.39)$$

Até o presente momento não dissertamos sobre como as matrizes de Dirac atuam no espinor. Assumiremos que ele pode ser decomposto em suas variáveis isoladamente [23, 24]

$$\begin{aligned} \Psi(x, r, \theta) &= \psi(x) \alpha(r) \Theta(\theta) \\ &= [\psi_R(x) \alpha_R(r) + \psi_L(x) \alpha_L(r)] \sum_l e^{il\theta}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

Mostraremos agora como as matrizes atuam nesse espinor [22, 23, 24, 31, 32]

$$\Gamma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) = m \psi_L(x) \quad e \quad \Gamma^\mu \partial_\mu \psi_L(x) = m \psi_R(x), \quad (4.41)$$

assim para $m = 0$ (modo zero)

$$\Gamma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) = \Gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = 0. \quad (4.42)$$

Para a quinta matriz

$$\gamma^5 \psi_R(x) = +\psi_R(x) \quad e \quad \gamma^5 \psi_L(x) = -\psi_L(x), \quad (4.43)$$

Para a sexta matriz

$$\gamma^6 \psi_R(x) = +i\psi_R(x) \quad e \quad \gamma^6 \psi_L(x) = i\psi_L(x). \quad (4.44)$$

Posto isto. Aplicando o espinor em cada operação da equação (4.40), encontraremos

$$\left\{ \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x, r, \theta) + \Gamma^5 [\partial_5 + W(r)] \Psi(x, r, \theta) + \Gamma^6 \partial_6 \Psi(x, r, \theta) + Q_M(x, r, \theta) \right\} \Psi(x, r, \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(\Gamma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) \right) \alpha_R(r) + \left(\Gamma^\mu \partial_\mu \psi_L(x) \right) \alpha_L(r) + \right. \\
&\quad + \left(\Gamma^5 \psi_R(x) \right) [\partial_5 + W(r)] \alpha_R(r) + \left(\Gamma^5 \psi_L(x) \right) [\partial_5 + W(r)] \alpha_L(r) + \\
&\quad \left. + \left(\Gamma^6 \psi_R(x) \right) \alpha_R(r) \partial_6 + \left(\Gamma^6 \psi_L(x) \right) \alpha_L(r) \partial_6 + Q_M [\psi_R(x) \alpha_R(r) + \psi_L(x) \alpha_L(r)] \right\} \sum_l e^{il\theta} \\
&= \left\{ m \psi_L(x) \alpha_R(r) + m \psi_R(x) \alpha_L(r) + \right. \\
&\quad + [\partial_5 + W(r)] \psi_R(x) \alpha_R(r) - [\partial_5 + W(r)] \psi_L(x) \alpha_L(r) + \\
&\quad \left. (-l + Q_M) [\psi_R(x) \alpha_R(r) + \psi_L(x) \alpha_L(r)] \right\} \sum_l e^{il\theta} = 0, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

isolando os termo de quiralidade ψ_R de ψ_L , encontraremos as relações para cada modo quiral

Para o Modo Direito, $\psi_R(x)$

$$\left\{ m \alpha_L(r) + [\partial_5 + W(r) + Q_M - l] \alpha_R(r) \right\} \psi_R(x) \sum_l e^{il\theta} = 0, \tag{4.46}$$

definiremos

$$P_R(r) \equiv W(r) + Q_M(x, r, \theta) - l, \tag{4.47}$$

assim o *Modo Direito* será expresso como

$$\left\{ m \alpha_L(r) + [\partial_5 + P_R] \alpha_R(r) \right\} \psi_R(x) \sum_l e^{il\theta} = 0 \tag{4.48}$$

semelhantemente, isolando os espinores esquerdos na equação (4.46)

Para o Modo Esquerdo, $\psi_L(x)$

$$\left\{ m \alpha_R(r) - [\partial_5 + W(r)] \alpha_L(r) + (Q_M - l) \alpha_L(r) \right\} \psi_L(x) \sum_l e^{il\theta} = 0, \tag{4.49}$$

neste caso chamaremos

$$P_L(r) \equiv W(r) - Q_M(x, r, \theta) + l, \tag{4.50}$$

que torna a expressão final do *Modo Esquerdo* como

$$\left\{ m \alpha_L(r) - [\partial_5 + P_L] \alpha_R(r) \right\} \psi_L(x) \sum_l e^{il\theta} = 0. \tag{4.51}$$

Veja que nas relações encontradas acima há cruzamento de termos da componente radial, $\alpha_R(r)$ e $\alpha_L(r)$, como esperado pela forma da equação (4.42).

A seguir localizaremos os modo quirais para massa zero.

4.2.2 Modo Zero

Continuando a seção anterior, iremos particularizar as equações de modo Direito e Esquerdo, (4.49) e (4.52) para $m = 0$.

O *Modo Zero Direito*, toma a forma

$$\left\{ [\partial_5 + P_R] \alpha_R(r) \right\} \psi_R(x) \sum_l e^{il\theta} = 0, \quad (4.52)$$

ou seja, para que a nulidade seja obedecida, devemos resolver a equação diferencial de primeira ordem em $\alpha_R(r)$

$$\alpha'_R(r) + P_R \alpha_R(r) = 0. \quad (4.53)$$

Verificamos possuir solução exponencial, como mostrado abaixo

$$\alpha_{R_{Zero}}(r) = C_{R0} e^{-\int P_R(r) dr}, \quad (4.54)$$

sendo C_{R0} uma constante. Modificamos a notação, $\alpha_{R_{Zero}}$, para indicar que estamos localizando o modo zero direito.

De forma similar, encontraremos o *Modo Zero Esquerdo* a partir de

$$-\{\alpha'_R(r) + P_L \alpha_R(r)\} = 0, \quad (4.55)$$

daí

$$\alpha_{L_{Zero}}(r) = C_{L0} e^{-\int P_L(r) dr}, \quad (4.56)$$

onde C_{L0} é uma constante.

Poderemos utilizar as relações para encontrar a distribuição de férmions não massivos ao longo da dimensão radial bastando informar os *fatores de warp* do cenário e os acoplamentos de campos.

Observe que a diferença quando a localização dos modos direito e esquerdo está definida apenas por uma mudança de sinal no termo de acoplamento (observando as definições de P_R e P_L em (4.48) e (4.51)). Logo *para casos livres de acoplamento os modos direito e esquerdo são semelhantes, podendo diferir apenas pelo valor de suas constantes.*

Retornaremos ao processo de localização assumindo que a massa pode ser diferente de zero.

4.2.3 Modos Massivos

O intuito desta seção é encontrar para os *modos massivos* uma expressão semelhante à uma equação de Schrödinger

$$[-\partial_z^2 + V(z)]f(z) = m^2 f(z). \quad (4.57)$$

Como sugerido nas referências [22, 23 e 24], devemos supor que seja necessário efetuar uma mudança quanto a forma da variável radial para que a métrica se torne *conforme*. Assumiremos que esta seja representada na forma

$$\frac{dz}{dr} = Z(z), \quad (4.58)$$

assim nossa antiga variável r será expressa em termos de z e nossas equação para localizações de modos (4.47) e (4.52) serão reescritas como

$$\left\{ m\alpha_L(z) + [\partial_z + P_R]\alpha_R(z) \right\} \psi_R(x) \sum_l e^{il\theta} = 0, \quad (4.59)$$

$$\left\{ m\alpha_R(z) - [\partial_z + P_L]\alpha_L(z) \right\} \psi_L(x) \sum_l e^{il\theta} = 0. \quad (4.60)$$

Trabalhando apenas com os termos de dimensão radial (dentro das chaves), verificaremos que podemos isolar (4.61) na forma $(\alpha_L(z) = -\frac{1}{m}[\partial_z + P_R]\alpha_R(z))$, e substituir seu valor em (4.60) para obter o *Modo Massivo Direito*. Analogamente ao isolar na (4.60) em $(\alpha_R(z) = \frac{1}{m}[\partial_z + P_L]\alpha_L(z))$ e aplicar em (4.61) encontrando o resultado que contém somente o *Modo Massivo Esquerdo*. Efetuando as substituições encontraremos

$$[\partial_z + P_L][\partial_z + P_R]\alpha_R(z) = -m^2\alpha_R(z) \quad (4.61)$$

$$[\partial_z + P_R][\partial_z + P_L]\alpha_L(z) = -m^2\alpha_L(z). \quad (4.62)$$

Note que a única diferença das equações (4.62) e (4.63) está na ordem que iremos multiplicar os $P_{R/L}$ de acordo com a quiralidade.

Calculando primeiramente o *Modo Massivo Direito*

$$\begin{aligned} & [\partial_z + P_L][\partial_z + P_R]\alpha_R(z) = [\partial_z + P_L][\alpha'_R(z) + P_R\alpha_R(z)] \\ & = [\alpha''_R(z) + (P_R + P_L)\alpha'_R(z) + (P'_R + P_L P_R)\alpha_R(z)] = -m^2\alpha_R(z), \end{aligned} \quad (4.63)$$

recordando dos valores de $P_L = W(r) - Q_M + l$ e $P_R = W(r) + Q_M - l$. Faremos uma particularização que é exposta e [31] e [32] a chamada solução tipo *Onda-S* ("*s-wave*") para fazermos $l = 0$.

Expressaremos (4.64) como

$$[\alpha_R'' + (2W)\alpha_R' + (W' + Q_M' + W^2 - Q_M^2)\alpha_R] = -m^2\alpha_R, \quad (4.64)$$

com o intuito de escrevermos uma equação semelhante a de Schrödinger (4.58), modificaremos $\alpha_R(z)$ na forma

$$\alpha_R(z) = K(z)\tilde{\alpha}_R(z). \quad (4.65)$$

Assim suas derivadas serão

$$\alpha_R'(z) = K'\tilde{\alpha}_R + K\tilde{\alpha}_R', \quad (4.66)$$

$$\alpha_R''(z) = K''\tilde{\alpha}_R + 2K'\tilde{\alpha}_R' + K\tilde{\alpha}_R'', \quad (4.67)$$

Substituindo a forma de $\alpha_R(z)$ escolhida em (4.66) na equação (4.65) e agrupando em termos de derivadas do $\tilde{\alpha}_R(z)$ encontraremos

$$K\tilde{\alpha}_R'' + [2(K' + WK)]\tilde{\alpha}_R' + [K'' + 2WK' + K(W' + Q_M' + W^2 - Q_M^2)]\tilde{\alpha}_R = -m^2K\tilde{\alpha}_R \quad (4.68)$$

Ora, desejamos que a expressão acima, (4.69), não possua derivada primeira em z (ver equação (4.58)). Assim, devemos anular o termo

$$[2(K' + WK)] = 0 \quad \rightarrow \quad K(z) = e^{-\int W(z)dz}, \quad (4.69)$$

com a mudança em $K(z)$, é possível ajustar a expressão dos modos massivos na forma desejada em (4.58). Calculando as derivadas de $K(z)$ encontraremos

$$K(z) = e^{-\int W(z)dz}, \quad (4.70)$$

$$K'(z) = -W(z)K(z) \quad (4.71)$$

$$K''(z) = (W^2(z) - W'(z))K(z). \quad (4.72)$$

A equação (4.69) será modificada como

$$\begin{aligned} K\tilde{\alpha}_R'' + K[Q_M' - Q_M^2]\tilde{\alpha}_R &= -m^2K\tilde{\alpha}_R \\ &= \\ \left(\partial_z^2 + [Q_M' - Q_M^2]\right)\tilde{\alpha}_R &= -m^2\tilde{\alpha}_R, \end{aligned} \quad (4.73)$$

com isto concluímos nosso objetivo de escrever uma expressão para o *modo massivo direito* na forma de uma *equação tipo Schrödinger*, onde o potencial é representado por

$$V_R(z) = -Q_M'(z) + Q_M^2(z), \quad (4.74)$$

para o modo esquerdo, como visto a única mudança nos cálculos será a ordem de P_L atuar primeiro na função localizadora α_L , isto alterará a (4.64), deixando-a na forma

$$[\alpha_L''(z) + (P_L + P_R)\alpha_R'(z) + (P_L' + P_R P_L)\alpha_L(z)] = -m^2\alpha_L(z) \quad (4.75)$$

$$[\alpha_L'' + (2W)\alpha_L' + (W' - Q_M' + W^2 - Q_M^2)\alpha_L] = -m^2\alpha_L, \quad (4.76)$$

ou seja, o potencial do *modo massivo esquerdo*, trocará o sinal da derivada primeira do termo de acoplamento, sendo assim

$$V_L(z) = Q_M'(z) + Q_M^2(z). \quad (4.77)$$

Observe que os potenciais descritos em (4.75) e (4.78) são estritamente dependentes do termo de acoplamento de campos.

O objetivo de analisar a localização dos modos massivos para uma geometria genérica em seis dimensões foi alcançado. Iremos averiguar sua validade ao substituirmos métricas já conhecidos na literatura a seguir.

4.3 Verificação dos Resultados Obtidos

Verificaremos agora a validade das relações obtidas durante a secção (4.2) ao aplicar as métricas e acoplamentos das referências [22], [23], [31] e [32].

Para cinco dimensões temos as referências [22] e [23] (tratadas no Capítulo 3) que utilizam a métrica

$$ds_5^2 = e^{2[A_P(y)]}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.78)$$

onde $A_P(y)$ é expressa no capítulo 3, equação(3.29)

Temos a seguinte ação

$$S = \int \sqrt{-G} [\bar{\Psi}\Gamma^M D_M\Psi + f\bar{\Psi}\phi\Psi] d^5x. \quad (4.79)$$

Aplicando a técnica descrita neste capítulo escreveremos nossos parâmetros como

$$F(r) = e^{2[A_P(y)]}, \quad G(r) = 1, \quad Q(r) = f\phi, \quad (4.80)$$

como estamos tratando de cinco dimensões o termo da sexta dimensão, $H(r)$, é desprezado assim como seus índices l .

Pela equação (4.39)

$$W = \frac{F'}{GF} = \frac{(e^{2[A_P(y)]})'}{e^{2[A_P(y)]}} = 2A'_p(y). \quad (4.81)$$

O termo para o modo direito dado em (4.48) será

$$P_R(r) = W(r) + Q_M = 2A'_p(y) + f\phi. \quad (4.82)$$

Para o modo não massivo direito, segundo (4.55), encontraremos

$$\alpha_{Rzero} = e^{-\int P_R(r)dr} = e^{-2A_p(y) - \int f\phi dy}, \quad (4.83)$$

Resultado *idêntico ao exposto na equação (3.55)*.

Analogamente, para o modo esquerdo

$$\alpha_{Lzero} = e^{2A_p(y) + \int f\phi dy}. \quad (4.84)$$

Mesmo *resultado obtido em (3.58)*.

Acompanhando diretamente pelas referências [22] e [23]. Verificamos para o modo massivo a mudança de variável que deve ser feita é dada por

$$\frac{dz}{dy} = Z(z) = e^{-2A_p(z)}, \quad (4.85)$$

assim os potenciais enunciados em (4.75) e (4.78) tomarão forma na nova variável z como

$$V_R(z) = f\phi'(z)e^{A_p(z)} + fA'_p(z)\phi(z)e^{A_p(z)} + f^2\phi^2(z)e^{2A_p(z)}, \quad (4.86)$$

$$V_L(z) = -f\phi'(z)e^{A_p(z)} - fA'_p(z)\phi(z)e^{A_p(z)} + f^2\phi^2(z)e^{2A_p(z)}. \quad (4.87)$$

Os resultados encontrados aqui concordam com os obtidos nas equações(19) e (20) do trabalho [23].

Para seis dimensões temos dois trabalhos que localizam modo zero fermiônico, são eles [31] e [32]. Ambos utilizam a mesma métrica (*de um defeito tipo corda*)

$$ds_6^2 = e^{-cr}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2e^{-c_1r}, \quad (4.88)$$

$$F(r) = e^{cr}, \quad G(r) = 1, \quad H(r) = R_0^2e^{c_1r}, \quad (4.89)$$

onde R_0^2 é uma constante de ajuste de unidades. Aqui adotamos a solução tipo "Onda-S", onde $l = 0$ (mais detalhes nas próprias referências). Traçamos o gráfico das exponenciais $e^{-c_i r}$ na figura (4.1).

Também é utilizada a mesma ação para férmions livres

$$S = \int \sqrt{-G} [\bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi] d^5 x. \quad (4.90)$$

A forma de $W(r)$ é comum aos dois trabalhos

$$W(r) = \frac{1}{4G} \left(\frac{4F'}{F} + \frac{H'}{H} \right) = -c - \frac{c_1}{4}, \quad (4.91)$$

A diferença entre os trabalhos acontece por [31] *não utilizar qualquer tipo de acoplamento*, assim $Q_M = 0$. Logo

$$P_R(r) = P_L(r) = -c - \frac{c_1}{4}, \quad (4.92)$$

para que haja distinção de modos quirais deve existir algum tipo de acoplamento, seja ele interno ou externo, isto pode ser verificado nesse trabalho. Os Modos zero Direito e Esquerdo tem mesma expressão dada por

$$\alpha_{zero} = C_0 e^{-\int P(r) dr} = C_0 e^{-(cr+c_1r)}, \quad (4.93)$$

que pode ser checado ao se observar a (53) de [31] ao se substituir os valores dados segundo a notação do próprio trabalho ($p = 4, P = e^{cr}, Q = e^{c_1 r}$) e C_0 sendo uma constante na variável r .

Verificamos também que a função localizadora deve assumir valores negativos para a constante c para que seja convergente. Observe que da forma que a métrica (4.89) é definida, devemos tomar valores positivos de c . Impor valores negativos para a constante é assumir que a *tensão da brana é negativa*[22][31] que difere da localização de gravidade, onde $c > 0$.

Para [32]. Existe um termo de acoplamento mínimo inserido na derivada covariante, é ele

$$Q_{I_M} = -iq A_M \quad \rightarrow \quad Q_M = -iq \Gamma^M A_M \quad (4.94)$$

onde $A_M = A_\mu(x) + A_r(r) + A_\theta(r)$, é um *Campo de Calibre*.

Assim seu modo zero direito terá a forma

$$\alpha_{R_{zero}} = e^{-\int [W(r)+Q_M(x,r)] dr}$$

$$= e^{-\left[cr+c_1r+q\left(\int iA_r(r)-R_0^2e^{\frac{c_1}{2}r}A_\theta(r)dr\right)\right]}, \quad (4.95)$$

que concorda com o resultado da referência [32] em sua equação (3.13). Nele foi verificado que apenas o modo direito seria localizado com a restrição para a forma do campo de calibre

$$A_\theta(r) = \lambda e^{-\frac{c_1}{2}r}, \quad (4.96)$$

onde é requerido o valor mínimo $\lambda > \frac{cR_0}{4q}$ para que haja localização do Modo Direito.

Verificado que nossos cálculos reproduzem com sucesso trabalhos anteriores, iremos seguir com o Capítulo 5. Aplicaremos os resultados aqui obtidos em uma variedade inédita sob o ponto de vista de localização de férmions.

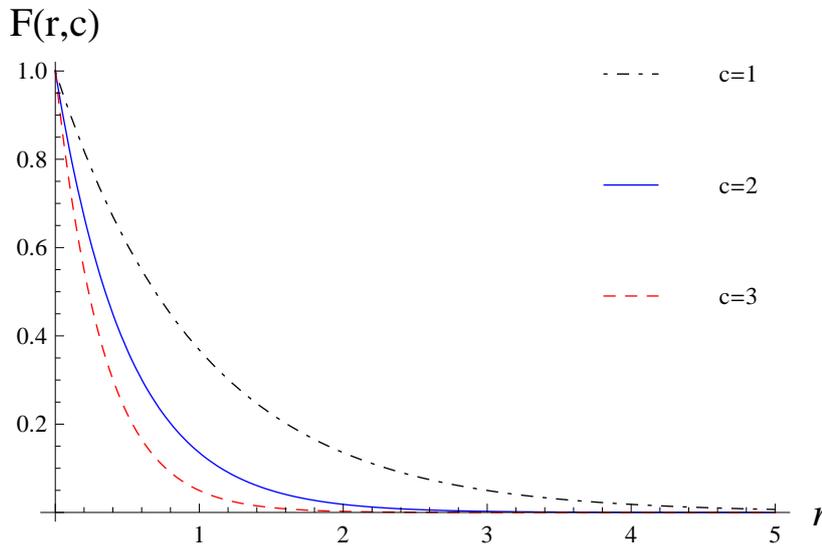


Figura 4.1: $F(c, r)$, fator relativo a Brana, quanto maior c mais estreito será o pico. O gráfico de $H(r, c_1)$, relativo à componente angular tem forma semelhante, uma vez que basta multiplicar $R_0^2 F(c, r)$ e trocamos c por c_1 .

5 Resultados

Neste capítulo apresentaremos detalhes da geometria Conifold resolvido em um espaço de seis dimensões. Observaremos que esta geometria suaviza um defeito tipo corda [31], [32] semelhante ao que Modelo de Branas deformadas (Capítulo 3) proporciona ao modelo de Randall-Sundrum em cinco dimensões.

Utilizaremos uma seção bidimensional do Conifold resolvido para construir nosso bulk. Escreveremos nossa métrica em função dos *fatores de Warp* e aplicaremos as relações encontradas no Capítulo 4 para a localização de modos fermiônicos nesta variedade.

5.1 O Conifold

Utilizaremos para a definição do Conifold as referências [33, 34 e 35] e deixaremos as referências finais [36-41] como curiosidade de trabalhos realizados nessa geometria. Nas referências finais verificamos que a geometria também é bastante utilizada em correspondência *AdS-CFT e Princípio Holográfico*.

Varietades do tipo Conifold são estudadas em Teoria de Cordas, pela forma que se assemelham a uma variedade tridimensional de Calabi-Yau singular e não compacta [33]. Ela é definida pela quádrlica [33-35]

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0, \quad (5.1)$$

a equação define um cone sobre uma variedade em cinco dimensões. Utilizaremos uma dimensão radial extra, r , para descrever nossa métrica sobre este espaço compacto X^5 como

$$ds_6^2 = dr^2 + r^2 ds^2(X^5), \quad (5.2)$$

observe que a métrica possui uma "singularidade nua"[34] para $r = 0$. Se quisermos tratar nosso espaço como uma variedade de Einstein, deveremos fazer a seguinte compactificação do espaço X^5 [33, 34]

$$X^5 = SU(2) \times SU(2)/U(1) = T^{1,1}. \quad (5.3)$$

O que transforma a métrica em

$$ds_6^2 = dr^2 + \frac{r^2}{9} (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{r^2}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2 + d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2) \quad (5.4)$$

Um caso suave da métrica mostrada em (5.4) é o Chamado *Conifold Resolvido* que utiliza o fator $\left(\frac{r^2+6a^2}{r^2+9a^2}\right)$ como um parâmetro de suavização [33, 34]

$$ds_6^2 = \left(\frac{r^2+6a^2}{r^2+9a^2}\right) dr^2 + \frac{r^2}{9} \left(\frac{r^2+6a^2}{r^2+9a^2}\right) (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{r^2}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \left(\frac{r^2+6a^2}{6}\right) (d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2). \quad (5.5)$$

Observe que o parâmetro remove a singularidade

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^2+6a^2}{r^2+9a^2}\right) \neq \infty. \quad e \quad \lim_{r \rightarrow 0} ds_6^2 = a^2 (d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2), \quad (5.6)$$

topologicamente o resultado significa a substituição da ponta de nosso cone por uma esfera de raio a , chamado de parâmetro de resolução (Figura (5.1)).

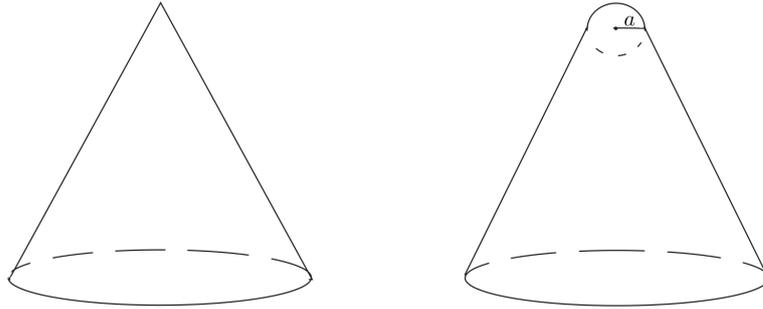


Figura 5.1: Substituição da ponta do cone por uma esfera de raio a (parâmetro de resolução).

Fixando os termos angulares $\psi, \phi_1, \theta_2, \phi_2$ na métrica (5.5), teremos um seção bidimensional em r e θ , do Conifold Resolvido, dada por

$$ds_2^2 = \left(\frac{r^2+6a^2}{r^2+9a^2}\right) dr^2 + \left(\frac{r^2+6a^2}{6}\right) d\theta^2. \quad (5.7)$$

Observemos que o resultado se assemelha ao exposto pela mudança dos fatores de warp proposto no Capítulo 3. Assim, utilizaremos a seção mostrada na equação (5.7) como base para nossas *dimensões radial e angular* do *Bulk* hexadimensional deste trabalho.

5.1.1 Variações do Conifold Resolvido

A métrica utilizada para Localizar os modos de campo fermiônicos será do tipo

$$ds_2^6 = ds_2^4 + ds_2^2 = e^{-cr} dX^2 + \left(\frac{r^2 + 6a^2}{r^2 + 9a^2} \right) dr^2 + \left(\frac{r^2 + 6a^2}{6} \right) e^{-cr} d\theta^2, \quad (5.8)$$

onde chamamos $dX^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Observe que nossa métrica se assemelha a de um defeito tipo Corda [31, 32]. Compare seus fatores

$$F(r) = e^{-cr} \rightarrow e^{-cr}, \quad G(r) = \left(\frac{r^2 + 6a^2}{r^2 + 9a^2} \right) \rightarrow 1, \quad H(r) = \left(\frac{r^2 + 6a^2}{6} \right) e^{-cr} \rightarrow R_0^2 e^{-c_1 r} \quad (5.9)$$

Perceba que nossa parte radial recai em um defeito tipo corda ao tomarmos $a = 0$. A parte angular ganha dependência quadrática na variável radial ao invés da constante, R_0^2 .

Verifique também que para $r \rightarrow \infty$ todos os fatores vão a zero, ou seja, toda modificação exposta no presente trabalho alterará apenas o comportamento da localização nas proximidade da Brana.

O Gráfico do fator referente a brana, $F(r, c)$, por coincidir com o do defeito tipo corda, é idêntico ao mostrado na figura (4.1). O fator radial, $G(r, a)$, está presente na figura (5.2) e o fator angular, $H(r, c, a)$, nas figuras (5.3) e (5.4).

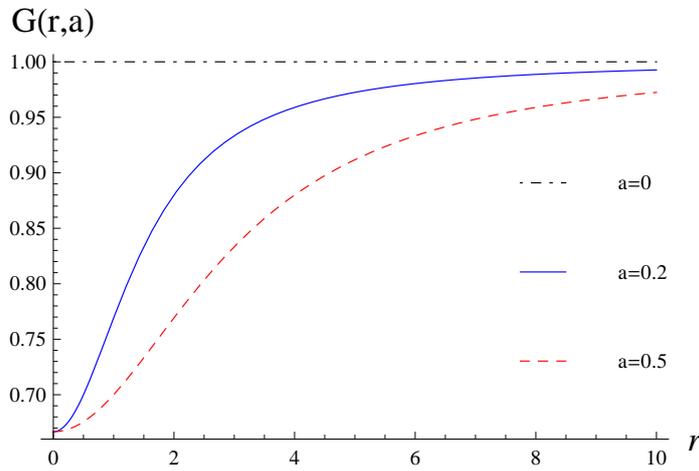


Figura 5.2: Quanto maior o valor de a , mais lentamente se chegará ao valor assintótico $G(r, a) = 1$.

Por conveniência podemos fazer a seguinte mudança de variável na coordenada radial de forma a omitir o termo de resolução no fator $G(r, a)$

$$d\rho = \frac{r^2 + 6a^2}{r^2 + 9a^2} dr. \quad (5.10)$$

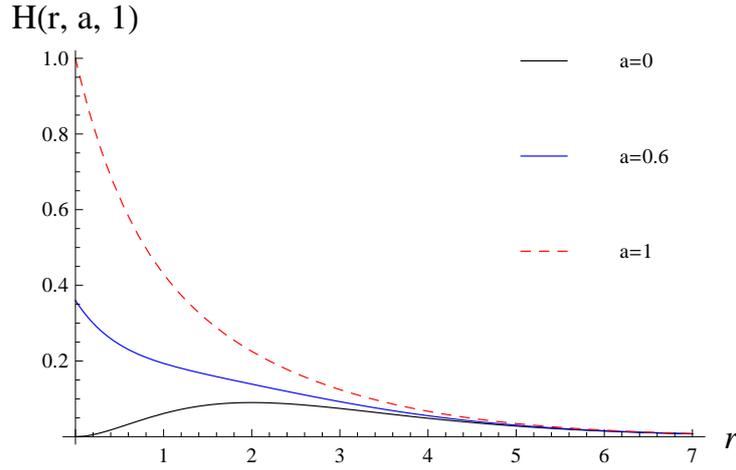


Figura 5.3: Fixando o valor de $c = 1$, quanto maior a mais rapidamente a forma exponencial é recuperada.

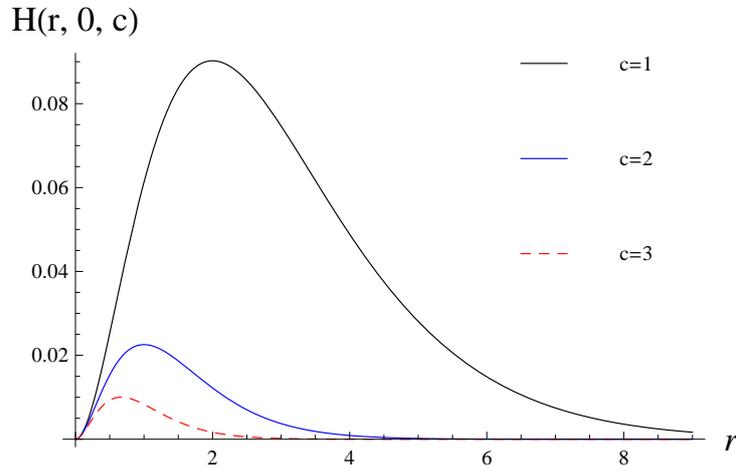


Figura 5.4: Fixando o valor de $a = 0$, quanto maior c menor e mais próximo da origem é o pico.

Com essa mudança a métrica será reescrita em termo de $\rho = \rho(r, a)$ na forma

$$ds_2^6 = e^{-c\rho} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \beta(r, a) e^{-c\rho} d\theta^2, \quad (5.11)$$

onde, definimos

$$\beta(r, a) \equiv \frac{\rho^2 + 6a^2}{6}. \quad (5.12)$$

A mudança favorece a comparações com os trabalhos [31, 32], pois com $G(r, a) = 1$, as regularizações quanto ao parâmetro a serão modificadas apenas no termo $\beta(r, a)$ que é exclusivo da componente angular. Chamaremos a métrica demonstrada em (5.11) de *Conifold Resolvido Tipo I (C.R-I)*.

Uma complicação gerada a partir da redefinição feita em (5.11), é que se quisermos calcular o valor originário de r deveríamos integrar ρ e encontraríamos uma expressão dada em termos de uma expressão *Elíptica*, porém, verifique pela figura (5.5) a correlação é biunívoca.

$$\rho(r, a) = -i\sqrt{6a^2} \text{EllipticE}\left(\arcsin\left[\sqrt{-\frac{r}{9a^2}}\right], \frac{3}{2}\right) \quad (5.13)$$

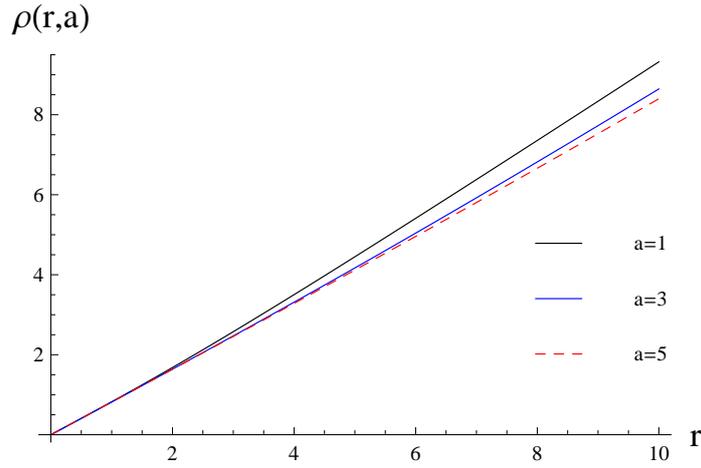


Figura 5.5: Gráfico comparativo de $\rho(r, a) \times r$.

De forma semelhante a tratada na capítulo 3, introduziremos um termo do tipo *Kink* dentro dos argumento exponenciais da métrica (5.11).

Definiremos o *Conifold Resolvido do Tipo II (C.R-II)* como

$$ds_2^6 = e^{-c\rho + \tanh(c\rho)} dX^2 + d\rho^2 + \beta(r, a) e^{-c\rho + \tanh(c\rho)} d\theta^2, \quad (5.14)$$

onde $\beta(r, a)$ permanecerá com a mesma forma de (5.12).

As novas formas de $F(\rho, c)$ e $H(\rho, a, c)$ para a suavização obtida pelo *C.R – II* são mostradas nas figuras (5.6) e (5.7) respectivamente.

Expostas as métricas dos Conifolds Resolvidos I e II, poderemos localizar os modos fermiônicos nessas variedades.

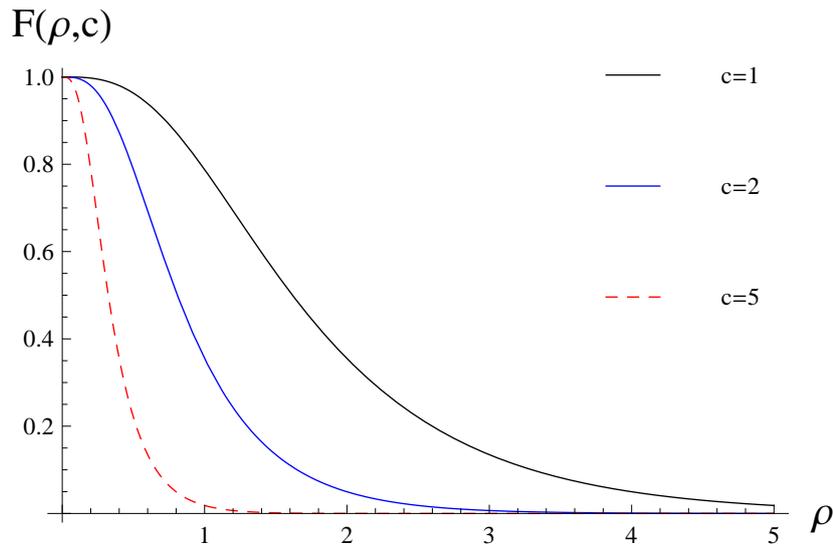


Figura 5.6: $F(\rho, c)$ para $C.R - II$, quanto maior c mais estreito o pico. As curvas atingem suavemente o eixo de $\rho = 0$.

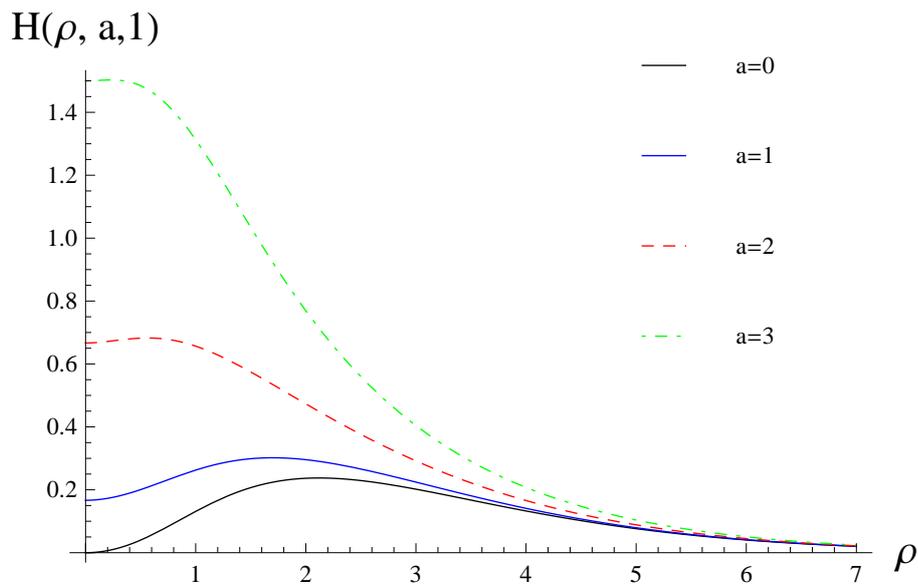


Figura 5.7: $H(\rho, a, c = 1)$ para $C.R - II$, quanto maior a maior o pico. As derivada da função se anula ao tocar o eixo $\rho = 0$.

5.2 Localização de férmions no Conifold Resolvido

Localizaremos os Modos zero e massivo relativos às métricas mostradas nas equações (5.11) e (5.14).

5.2.1 Localização no C.R-I

Dada a métrica

$$g_{MN} = e^{-c\rho} dX^2 + d\rho^2 + \frac{\rho^2 + 6a^2}{6} e^{-c\rho} d\theta^2. \quad (5.15)$$

Teremos

$$W(\rho) = \frac{1}{4G} \left(\frac{pF'}{F} + \frac{H'}{H} \right) = \frac{\rho(2-5c\rho) - 30a^2}{4(\rho^2 + 6a^2)^2}, \quad (5.16)$$

Para os casos sem acoplamento os modos zero direito e esquerdo coincidem. Observaremos sua expressão pela integral

$$\alpha(\rho, c, a) = e^{-\int W d\rho} = \frac{e^{\frac{5c\rho}{4}}}{(\rho^2 + 6a^2)^{1/4}}. \quad (5.17)$$

Verifique que para $\rho = a = 0$ a expressão (5.17) tem valor indeterminado. Veja também que para $c > 0$ a expressão terá valor não normalizável (divergindo no infinito), assim para que possamos encontrar um modo zero localizável devemos inverter a tensão da brana fazendo $c < 0$, para que a exponencial tenda assintoticamente para zero quando $\rho \rightarrow \infty$. O recurso de se fazer $c < 0$ também é verificado nos trabalhos [22, 23, 24, 31 e 32] durante a localização do campo fermiônico.

Escolhidas as condições para que a equação em (5.17) seja normalizável, isto é que admita modo zero localizável. Construiremos o gráfico da função localizadora do modo zero na figura (5.8) observando como o seu perfil varia para diferentes valores do parâmetro de resolução a .

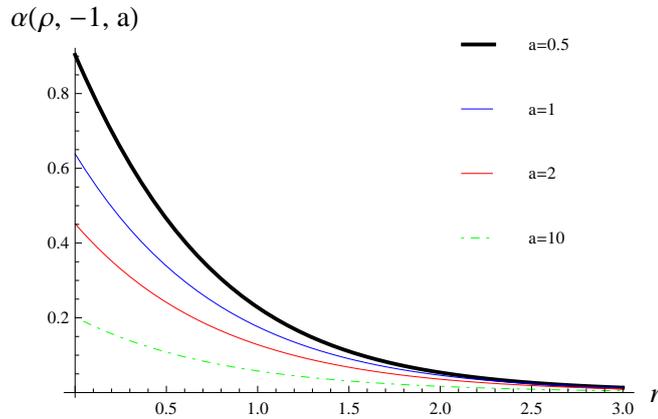


Figura 5.8: Modo zero para o C.R.I.

Conseguimos com sucesso localizar modos fermiônicos no C.R.-I e verificamos que o resultado se semelhante aos encontrados em um defeito tipo corda [31, 32], as únicas diferenças

encontradas são o comportamento singular do campo na origem de nossa brana e o parâmetro introduzido que regula a amplitude do perfil da função localizadora, diferenças essas que estão ligadas diretamente as modificações adotadas em nossa métrica.

Terminado o trabalho com modo zero, faremos um análise resumida de como será a forma do potenciais gerado nos modos massivos a partir das métricas adotadas. O estudo mais aprofundado sobre férmions massivos serão perspectivas de trabalhos futuros.

Para o modo massivo utilizaremos as equações (4.75) e (4.78). Verifique que os potenciais são construídos a partir dos termos de acoplamento, Q_M , ou seja, ele é zero para os casos não acoplados. Tomaremos o fator relativo à sexta dimensão, $H(\rho, c, a)$ em $W(\rho)$ como um termo de acoplamento(sabemos que diferentemente de um acoplamento físico, o termo não sofre influência da quiralidade). Verificaremos o que ocorre quando tal suposição é tomada.

De (4.75) teremos para o modo direito

$$V(z) = Q^2(z) - Q'(z)$$

Adotando o acoplamento

$$Q(z) = \frac{H'(\rho, c, a)}{4H(\rho, c, a)} = -\frac{\rho(2 - c\rho) - 6a^2c}{4(\rho^2 - 6a^2)}. \quad (5.18)$$

Obteremos

$$V(z) = \frac{1}{16} \left(c^2 - \frac{120a^2}{(6a^2 + \rho^2)^2} + \frac{12 - 4c\rho}{6a^2 + \rho^2} \right) \quad (5.19)$$

O potencial encontrado possui região de valor atrativo nas proximidades da brana quando a é pequeno. Conforme a cresce, o potencial assume valor repulsivo e constante. Notamos como resultado preliminar que há semelhanças dos perfis encontrados na figura (5.9) ao observarmos os perfis encontrados na localização de férmions em cinco dimensões com um acoplamento Yukawa da referência [23], ou seja, encontramos um métrica em seis dimensões com férmions livres que reproduz resultados semelhantes aos de férmions acoplados por um potencial Yukawa em cinco dimensões.

Encerrada a localização do modo zero e potencial do modo massivo do Conifold Resolvido do tipo I, iremos verificar os mesmo cálculos para o tipo II.

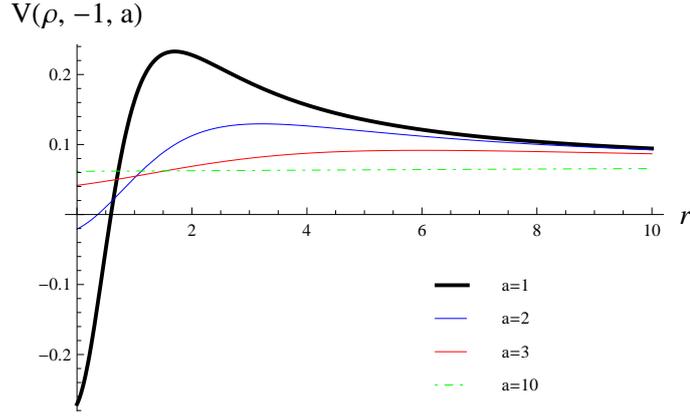


Figura 5.9: Potencial do Modo Massivo direito do C.R-I.

5.2.2 Localização no C.R-II

Tomando a métrica como

$$g_{MN} = e^{-c\rho + \tanh(c\rho)} dX^2 + d\rho^2 + \frac{\rho^2 + 6a^2}{6} e^{-c\rho + \tanh(c\rho)} d\theta^2, \quad (5.20)$$

Teremos

$$W(\rho) = \frac{1}{4G} \left(\frac{pF'}{F} + \frac{H'}{H} \right) = \frac{\rho(2-5c\rho) + 50c(\rho^2 + 6a^2) \operatorname{sech}^2(c\rho) - 30a^2c}{2(\rho^2 + 6a^2)}, \quad (5.21)$$

O modo zero será calculado pela integral da exponencial de W

$$\alpha(\rho) = e^{-\int W d\rho} = e^{\frac{1}{4} \left(5c\rho - \log[6a^2 + \rho^2] - 5 \operatorname{tanh}(c\rho) \right)}. \quad (5.22)$$

A expressão (5.22) deve assumir valores negativos de c para que admita modo zero localizável. Seu gráfico é mostrado pela figura (5.10) para diferentes valores do parâmetro a .

Verificamos existir modos zero localizáveis na geometria C.R-II. Observando a figura (5.10) verificamos que o termo $\tanh(c\rho)$ suaviza o perfil da função localizadora e permite uma espessura para a brana, esse resultado está diretamente relacionado à forma com que o mesmo parâmetro de resolução atua na métrica (discutido na seção 5.1). O resultado encontrado é semelhante ao estudado no capítulo 3 com o método de deformação de membrana. Em outras

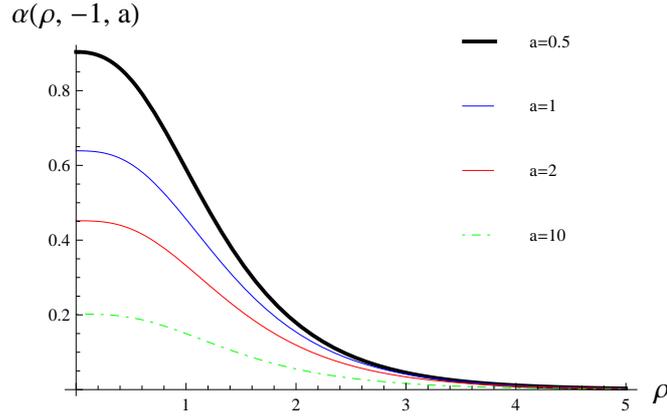


Figura 5.10: Modo zero para o C.R.II.

palavras, em seis dimensões o parâmetro de resolução desempenha o mesmo caráter de suavização que o do campo escalar introduzido em cinco dimensões. O resultado obtido em (5.22) é similar ao de um defeito do tipo corda [31, 32], com a novidade dos modos serem suavizados pelo parâmetro a .

Para o modo massivo, estudaremos qual forma terá o potencial ao se adotar o acoplamento

$$Q(z) = \frac{H'(\rho, c, a)}{4H(\rho, c, a)} = \frac{c \operatorname{sech}^2(c\rho)(\rho^2 + 6a^2) + \rho(2 - c\rho) - 6a^2c}{4(\rho^2 + 6a^2)}. \quad (5.23)$$

Obteremos substituindo (5.23) em (4.75) o potencial relativo ao modo massivo direito

$$V(z) = \left[36a^4c^2 + \rho^2(12 + c\rho(-4 + c\rho)) + 12a^2(-4 + c\rho(-2 + c\rho)) + \right. \\ \left. + c(6a^2 + \rho^2)\operatorname{sech}^2[c\rho](-2(6a^2c + \rho(-2 + c\rho)) + \right. \\ \left. + c(6a^2 + \rho^2)(\operatorname{sech}^2[c\rho] + 8\tanh[c\rho])) \right] / (16(6a^2 + \rho^2)^2), \quad (5.24)$$

cujo o gráfico está presente na figura (5.11).

O potencial nas proximidades da brana é atrativo para valores pequenos de a e repulsivo para valores grandes. Afastando se da brana atinge um valor máximo (que é tão maior quanto maior for o valor de a) em um determinado ρ e assintoticamente tende a um valor constante e positivo independentemente da escolha feita sobre a . Como também observado nos modos massivos de C.R-I, o formato do potencial encontrado para o C.R-II é similar aos obtidos pela referência [23]. Um acoplamento geométrico em seis dimensões que simularia um acoplamento físico em cinco dimensões seria um perspectiva para novos trabalhos.

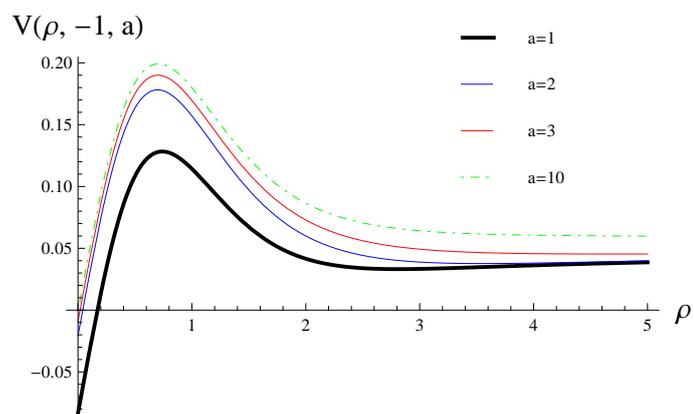


Figura 5.11: Potencial do Modo Massivo direito do C.R-II.

6 Conclusões e Perspectivas

Como visto no decorrer do Capítulo 4, conseguimos descrever com sucesso um método que localizou campos fermiônicos de spin $1/2$ em um espaço modelo hexadimensional. Para isto, partimos de uma ação de férmions em seis dimensões, a qual permitia a inclusão de um termo de acoplamento externo (inserido diretamente na equação de Dirac) e um acoplamento interno em sua derivada covariante. Encontramos a forma final dos modos localizados em função dos termos da métrica e dos acoplamentos supostos. Verificamos a validade do método durante a secção final do capítulo ao reproduzir resultados publicados na literatura. Concluimos que férmions livres possuem seus modos direito e esquerdo expressos sem distinção e somente se há localização para tensões negativas da brana (ou seja, os fatores de warp invertem seu sinal na exponencial). Demonstramos que a diferença de modos quirais é gerada pelo tipo de acoplamento utilizado e que ele é o responsável por aprisionar os modos fermiônicos. No estudo dos modos massivos observamos que devemos realizar uma série de mudanças de variáveis para encontrar uma equação semelhante a de Schrödinger. Observamos também que o potencial encontrado é escrito em função somente do termo de acoplamento.

No capítulo 5 aplicamos o método encontrado a uma variedade do tipo Conifold Resolvido, que possui um parâmetro de resolução variável. Utilizamos um secção bidimensional desta variedade para construir nosso espaço de seis dimensões. Observamos que ao adicionar de um termo de Kink no fator de warp deste espaço, obtemos a suavização da forma do campo fermiônico e espessamento da brana. O resultado é análogo ao obtido pelo método de deformação da membrana exposto no capítulo 3. Encontramos o potencial dos modos massivos ao adotar o termo de dimensão angular como um acoplamento geométrico.

Como perspectivas poderemos aplicar acoplamentos (Yukawa, campo de calibre, etc) ao modelo do Conifold e verificar como os modos quirais seriam afetados. Poderíamos também estudar novas geometrias que descrevam resultados interessantes, uma vez que a técnica automatiza a localização para variedades de seis dimensões. Uma outra perspectiva seria ampliar o método incluindo uma dependência angular nos fatores de warp para reprodução de outras variedades bem mais complexas. Aprimorar o método para dimensões maiores que seis também seria muito interessante, pois como verificado durante o capítulo 4, os cálculos em seis dimen-

sões também concordam com trabalhos realizados em dimensões menores. Podemos também analisar a ressonância dos modos massivos com o potencial encontrado.

7 Referências Bibliográficas

- [1] D.J. Griffiths. Introduction to Elementary Particles. Wiley-VCH, 2008, 3527406018, ISBN 9783527406012. 454p.
- [2] B. Greene. The Elegant Universe - Superstrings, Hidden Dimensions and the Quest for the Ultimate Theory. W.W. Norton Company, 2003, ISBN 0393058581, 9780393058581. 448p.
- [3] D. Puigh. Large Extra Dimensions, University of Washington, Seattle-2004:
<<http://pages.physics.cornell.edu/~dpuigh/academia/undergrad/LargeExtraDimensions.pdf>>. Acessado em 06 de novembro de 2011.
- [4] Aquino, Priscila Massetto de. Física além do modelo padrão em teorias com dimensões extras. São Paulo, 2007. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
- [5] P.D. Mannheim. Brane-Localizes Gravity. Connecticut: University of Connecticut, USA, 2005. 337p.
- [6] J. M. Hoff. Compactificação alternativa de dimensões extras em gravitação de Brans-Dicke, Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista (IFT/UNESP), Doutorado em Física (2009).
- [7] Araújo, Júlio César Brasil de. Extensões de cenários de branas tipo corda em seis dimensões. 55 p. : Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2012.
- [8] M.Gabella. The Randall-Sundrum Model, IPPC, EPFL (June 2006).
- [9] Kaluza, Theodor (1921). Zum Unitätsproblem in der Physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 1921: 966-972. Klein, Oskar (1926). Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeitschrift für Physik A 37 (12): 895-906.
Doi:10.1007/BF01397481

- [10] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Phys. Lett. B* 429, pp. 263-272 (1998).
- [11] Randall, Lisa and Sundrum, Raman. Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *PhysRevLett.*83, pp. 3370-3373 (1999).
- [12] Randall, Lisa and Sundrum, Raman. An Alternative to Compactification, *PhysRevLett.*83, pp. 4690-4693 (1999).
- [13] ITZYKSON, Claude; ZUBER, Jean Bernard. Quantum field theory. New York: McGraw-Hill, c1980. 705p.
- [14] RYDER, Lewis H. Quantum field theory. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 1985. 443p. [15] Sakurai, J. J. (1967). *Advanced Quantum Mechanics*. Addison Wesley. ISBN 0-201-06710-2.
- [16] Thaller, Bernd. *The Dirac equation*, Berlin : Springer-Verlag ,1992.
- [17] Maggiore, Michele. *A Modern Introduction To Quantum Field Theory- Volume 12 of Oxford Master Series in Physics*, Oxford University Press, 2005. 291p.
- [18] S. Mendel. *General relativity and matter : a spinor field theory from fermis to light-years*; Dordrecht ; Boston : D. Reidel, c41982. 208 p.
- [19] A. Pais. On Spinors in n Dimensions, *J. Math. Phys.* 3, 1135 (1962); doi: 10.1063/1.1703856.
- [20] BARREIRO, Eliezer J.; FERREIRA, Vitor. F. and COSTA, Paulo R. R.. Substâncias enantiomericamente puras (SEP): a questão dos fármacos quirais. *Quím. Nova* [online]. 1997, vol.20, n.6, pp. 647-656. ISSN 0100-4042.
- [21] TANEDO, F. Helicity, Chirality, Mass, and the Higgs. *Quantum Diaries*. Disponível em: <<http://arsphysica.wordpress.com/2011/06/24/helicidade-quiralidade-massa-e-o-higgs/>>. Acessado em 26 de março de 2012.
- [22] CRUZ, Wilami Teixeira da. *Localização de campos em membranas deformadas*. 110 p.: Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2009.
- [23] W. T. Cruz, A. R. Gomes, C. A. S. Almeida. Fermions on deformed thick branes. *High*

Energy Physics - Theory (hep-th), arXiv:1110.4651v1.

[24] C. A. S. Almeida , R. Casana , M. M. Ferreira, Jr. , and A. R. Gomes. Fermion localization and resonances on two-field thick branes. *Phys. Rev. D* 79, 125022. 2009. DOI:10.1103/PhysRevD.79.125022.

[25] DANTAS, Davi Monteiro. Colisão de kinks no modelo $\lambda\phi^4$. 37 p.: Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2009. VERAS, Diego Franklin de Souza. Dinâmica não-linear da molécula de DNA. 39 p.: Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2010.

[26] O. Dewolfe, D.Z. Freedman, S.S Gubser and A. Karch, *Phys.Rev.D* 62, 046008 (2000).

[27] K. Skenderis, P.K. Townsend, *Phys. Lett.* B46846 (1999)

[28] D. Bazeia, L. Losano, *Phys. Rev.D*73:025016, (2006).

[29] Ian D. Lawrie; *A Unified Grand Tour of Theoretical Physics (2nd)*. Institute of Physics Pub., 2002, 564 pp. 0750306041, 9780750306041.

[30] K.-S. Choi and J.E. Kim, *Quarks and Leptons From Orbifolded Superstring*, *Lect. Notes Phys.*696 (Springer, Berlin Heidelberg 2006), DOI 10.1007/b 11681670.

[31] I. Oda, *Localization of Matters on a String-like Defect*. *Phys.Lett.*B496:113-121,2000, arXiv:hep-th/0006203v2.

[32] Yu-Xiao Liu, Li Zhao, Yi-Shi Duan, *Localization of Fermions on a String-like Defect*. *JHEP* 0704:097. 2007. arXiv:hep-th/0701010v6.

[33] I.R. Klebanov and A. Murugan, *Gauge/Gravity Duality and Warped Resolved Conifold*.

[34] SILVA, J. E. G. ; ALMEIDA, C. A. S. . Scalar field localization on 3-branes placed at a warped resolved conifold. *Physical Review. D, Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, v. 84, p. 085027, 2011.

[35] SILVA, José Euclides Gomes da. *Brane resolution em conifold com torção*. 117 f. : Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2010.

- [36] K.Ohta and T.Yokono. Deformation of conifold and intersecting branes. JHEP0002(2000) 023 [hep- th/9912266].
- [37] G. Papadopoulos and A.A.Tseytlin. Complex geometry of conifolds and 5-brane wrapped on 2-sphere. OHSTPY-HEP-T-00-30, arXiv:[hep-th/0012034v5].
- [38] P. Candelas and X.C. de la Ossa. Comments On Conifolds. Nucl. Phys. B342 (1990) 246 .
- [39] L.A. PandoZayas and A.A.Tseytlin. 3D - branes on resolved conifold. hep-t h/ 0010088.
- [40] C.P. Herzog , I.R. Klebanov and P. Ouyang. D-branes on the conifold and N=1 gauge/ gravity dualities. arXiv:hep- t h/ 0205100. Remarks on the warped deformed conifold. arXiv:hep- th/0108101.
- [41] X. Amador, E. Caceres, H. Garcia, A.Guijosa. Conifold Holography. JHEP 0306 (2003) 049, arXiv:hep-th/0305257v2.