

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA**

SAMUEL BATISTA BASTOS

**Não-comutatividade em problemas com massa
dependente da posição**

FORTALEZA, CEARÁ

2012

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA**

SAMUEL BATISTA BASTOS

**Não-comutatividade em problemas com massa
dependente da posição**

Dissertação submetida à coordenação do curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos Almeida

Co-orientador:

Profa. Dra. Luciana Angelica da Silva Nunes

FORTALEZA, CEARÁ

2012

Dedico esta dissertação ao meu tio, prof. Leoni Bastos “tio Nêna” (in memorian).

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Francisco Bezerra Bastos e Urbania Batista Bastos e às minhas irmãs Sâmia Batista Bastos, Francilane Batista Bastos e Francivania Batista Bastos, pelo imenso apoio e por acreditarem na minha dedicação.

A minha namorada Valdenisia Silvano Monteiro, por seu amor e sua compreensão. Obrigado pela paciência e por estar sempre ao meu lado, amo você.

Ao meu caro orientador Prof. Dr. Carlos Alberto Santos Almeida, pelo acolhimento e oportunidade, por seus incentivos e ensinamentos constantes. Pelo exemplo de profissional que é, acreditando no meu potencial e motivando sempre a formação e a pesquisa.

A Profa. Dra. Luciana Angélica da Silva Nunes por também ter me orientado e incentivado. Pelas revisões e sugestões que foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação. Sem dúvida, não conseguiria chegar ao final deste trabalho sem sua ajuda. Sou muito grato.

Aos professores do departamento Dr. Ricardo Renan Landin, Dr. José Ramos Gonçalves e Dr. Raimundo Nogueira Costa Filho pelas ótimas aulas e contribuição na minha formação acadêmica.

Ao Prof. Dr. Aristeu Lima pelas revisões, sugestões, por ter esclarecido muitas dúvidas. Teve muita importância para o andamento desta pesquisa. Obrigado por ter aceito participar da banca examinadora desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Marcelo Batista Hott, externo ao programa, por ter aceito participar da banca examinadora e pelos esclarecimentos, críticas e sugestões. Acrescentou bastante a esta dissertação.

Aos amigos do LASSCO: Júlio César, Diego Frankin (véi do Uhuu), Davi Monteiro, Victor Santos, José Euclides, Hudson Pacheco, Francisco Wagner (Pikachu), Luis José e Adevaldo, pelos momentos edificantes nas diversas discussões sobre física e assuntos aleatórios. Compartilho com vocês os méritos do trabalho.

Aos demais amigos da Pós-Graduação em Física da UFC: Adriano, Jorge Roberto, Cristiano, Josias, Ancelmo, Jorge Luis (Capuan), Bruno Mesquita, Saulo, Rafael Duarte.

Aos professores do IFCE, Dr. Márcio André de Melo Gomes, Raimundo Vanderley Sombra e Ewerton Wagner Santos Caetano, por seus incentivos e por mostrarem em suas aulas a beleza da física.

Aos amigos da graduação no IFCE e de longas jornadas, PH Silva e Adriano Braga, por estarem presentes desde o começo dessa trajetória.

A coordenação da Pós-Graduação em Física da UFC pelo total suporte aos alunos.

Aos funcionários e professores do Departamento de Física que de alguma forma con-

tribuíram para a conclusão deste mestrado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao Reginaldo da banquinha por vender fiado, pelos papos descontraídos e pelo futebol.

*“All powers of mind, all force of will
May lie in dust when we are dead,
But love is ours, and shall be still
When earth and seas are lead.”
(James Clerk Maxwell)*

Resumo

Nos últimos anos é crescente o interesse pelo estudo de teorias em espaços não-comutativos. As teorias de campos não-comutativas são relacionadas com compactificações da Teoria M, teoria de cordas em cenários não-triviais e no efeito Hall quântico. Por outro lado, o papel da não-comutatividade em teorias de uma partícula encontra grandes aplicações quando analisado em cenários de mecânica quântica e mecânica quântica relativística. Nestes contextos os estudos das equações de Schrodinger e Dirac com massa dependendo da posição (MDP) tem despertado muita atenção na literatura. Sistemas dotadas de MDP constituem modelos úteis para o estudo de muitos problemas físicos. Em particular, eles são usados para estudar a densidade de energia em problemas de muitos corpos, determinando as propriedades eletrônicas de heteroestruturas semicondutoras e também para descrever as propriedades de heterojunções e pontos quânticos. A investigação de efeitos relativísticos, em particular, é importante para sistemas contendo átomos pesados ou dopagem por ions pesados. Para esses tipos de materiais, o estudo das propriedades da equação de Dirac, no caso em que a massa torna-se variável é de grande interesse. No presente trabalho analisamos a equação de Dirac com massa dependendo da posição, na forma de potencial tipo-Coulomb mais um termo de confinamento, num espaço não-comutativo e calculamos as correções no espectro de energia devido à presença do termo de massa modificado.

Abstract

In recent years, there is growing interest in the study of theories in non-commutative spaces. Theories fields of non-commutative are related with compactifications of M theory, string theory and the quantum Hall effect. Moreover, the role of the non-commutativity of theories of a particle finds large applications when analyzed in scenarios quantum mechanics and relativistic quantum mechanics. In these contexts studies the Schrodinger and Dirac equations with mass depending on the position (MDP) has attracted much attention in the literature. Systems endowed with MDP models are useful for the study of many physical problems. In particular, they are used to study the energy density in problems of many bodies, determining the electronic properties of semiconductor heterostructures and also to describe the properties of heterojunctions and quantum dots. The investigation of relativistic effects, in particular it is important for systems containing heavy atoms or doping by heavy ions. For these types of materials, the study of the properties of the Dirac equation, in the case where the mass becomes variable is of great interest. In this paper we analyze the Dirac equation with mass depending on the position, in form of potential like-Coulomb added a term of confinement in a non-commutative space and calculate the corrections to the energy spectrum due to presence of the mass term modified.

Sumário

1	Introdução	p. 10
2	A Equação de Dirac	p. 14
2.1	Covariância da Equação de Dirac	p. 17
2.2	Soluções da Equação de Dirac para Partícula Livre	p. 18
2.2.1	Estados de Energia Negativa	p. 21
3	Não-Comutatividade do Espaço	p. 24
3.1	Introdução Histórica	p. 24
3.2	Operadores de Weyl	p. 25
3.3	O Produto Estrela	p. 27
3.4	O Mapa de Seiberg-Witten	p. 30
4	Aproximação Não-Relativística da Equação de Dirac	p. 33
4.1	A Transformação de Foldy-Wouthuysen	p. 33
4.2	Transformação de Foldy-Wouthuysen com a Massa Dependente da Posição	p. 37
4.3	Transformação de Foldy-Wouthuysen com a Massa Dependente da Posi- ção Não-Comutativa	p. 38
5	Equação de Dirac Não-Comutativa com Massa Dependendo da Posição	p. 41
5.1	Aproximação não-relativística do Hamiltoniano modificado	p. 43
5.2	Correções de energia	p. 46
5.2.1	Soluções para $\lambda \neq 0$ e $K = 0$ (ou r muito pequeno)	p. 48
5.3	Correções de energia devido à presença do termo de massa modificado .	p. 49

6 Conclusões e Perspectivas	p. 53
Apêndice A – Propriedades das matrizes de Dirac	p. 55
A.1 Forma das matrizes de Dirac	p. 55
A.2 Propriedades das matrizes de Dirac	p. 57
Referências Bibliográficas	p. 58

1 Introdução

A física no século XX passou por uma grande revolução. O surgimento da teoria da Relatividade Especial e da Mecânica Quântica proporcionou uma descrição consistente dos fenômenos físicos além dos limites das teorias clássicas vigentes. A teoria da Relatividade Especial proposta por Einstein em 1905 explica eventos físicos que ocorrem quando objetos se deslocam com velocidades próximas à velocidade da luz [1]. Já a Mecânica Quântica desenvolvida por Bohr, Heisenberg, Schrodinger e outros [2], consegue descrever o comportamento de objetos muito pequenos, com dimensões próximas às dos átomos.

A união dessas duas vertentes da física levou a formulação da Mecânica Quântica Relativística. A Mecânica Quântica Relativística propõe o estudo das funções de onda que obedecem as equações relativísticas de Klein-Gordon, para partículas de spin-0, e as de Dirac para partículas de spin-1/2. Existem outras equações relativísticas conhecidas na literatura que são válidas para partículas massivas de spin maiores, como por exemplo a equação de Proca para partículas de spin-1 e a equação de Rarita-Schwinger para partículas de spin-3/2.

O sucesso da Mecânica Quântica Relativística é verificado pela teoria de Dirac. A equação de Dirac consegue descrever naturalmente o spin intrínseco e a helicidade dos elétrons. A helicidade está relacionada à direção de movimento de uma partícula. Objetos de spin-1/2, possuem helicidades -1 e $+1$, por exemplo.

A equação de Dirac prevê que para cada partícula de energia positiva existe uma antipartícula com mesma massa e spin, porém com energia negativa. Além disso, quando uma partícula carregada entra em contato com sua antipartícula há uma aniquilação de ambas, gerando uma energia que produz fótons.

No entanto, uma descrição mais completa e mais coerente das partículas elementares está no contexto da Teoria Quântica de Campos (TQC). Para a TQC as partículas são interpretadas como modos de vibração de campos fundamentais que preenchem o espaço-tempo.

Recentemente, tem surgido um grande interesse no estudo de teorias no espaço não-comutativo. As teorias de campos não-comutativas estão relacionadas à teoria de cordas, à gravitação quântica, ao efeito Hall quântico na matéria condensada, e há ainda várias explicações no contexto da mecânica quântica e mecânica quântica relativística. A geometria não-comutativa teve origens nos trabalhos de Weyl e Moyal [3], que estudaram métodos de quantização do espaço de fase. Mas foi Snyder o primeiro a desenvolver uma teoria consistente para coordenadas de espaços não-comutativos. [?]

A idéia de Snyder era que se pudesse encontrar uma descrição coerente para a estrutura do espaço-tempo de modo que as divergências em teoria quântica de campos pudessem ser eliminadas. Ela deve ser equivalente a um “cut-off” ultravioleta Λ , em integrações no espaço dos momenta para calcular diagramas de Feynman, que implicitamente leva a uma escala de comprimento fundamental Λ^{-1} abaixo do qual todos os fenômenos são ignorados.

Por outro lado, uma vez que o programa de renormalização da teoria quântica de campos provou ser bem sucedido em prever, com precisão, valores numéricos para observáveis físicos na Eletrodinâmica Quântica (EDQ), essa idéia de não-comutatividade foi abandonada. Seu retorno aconteceu apenas em meados dos anos 1980 quando a noção de estrutura para um cenário de não-comutatividade foi generalizado por Connes, Woronowicz e Drinfeld [4], [5]. Juntamente com a definição de uma integração generalizada, isto levou a uma descrição algébrica do operador espaço-tempo, não-comutativo, permitindo definir uma teoria de calibre (gauge) de Yang-Mills em uma classe de espaços não-comutativos (NC). A teoria de Yang-Mills é um exemplo concreto de física em espaços NC.

Outro exemplo de aplicação física de teorias em espaços NC é o uso de uma forma modificada do mecanismo de Kaluza-Klein em que as dimensões escondidas são substituídas por estruturas não-comutativas. Neste contexto, o campo de Higgs é um campo de gauge discreto Z_2 em um espaço NC, considerado como um tipo de excitação interna de Kaluza-Klein. Isto leva a uma prova automática do mecanismo de Higgs, independente dos detalhes do potencial de Higgs. Os parâmetros de entrada são as massas de todos os quarks e léptons, enquanto a massa de Higgs é uma previsão do modelo. Contudo, esta abordagem acabou sendo esquecida. No entanto, o modelo levou a um renascimento da idéia de Snyder de que a relatividade geral clássica iria quabrar na escala de Planck porque o espaço-tempo não seria mais descrito por uma variedade diferencial. Nessas escalas, flutuações quânticas gravitacionais tornam-se grandes e não podem ser ignoradas.

Uma evidência teórica mais concreta para a não-comutatividade do espaço-tempo

veio da teoria de cordas, uma forte candidata para uma teoria quântica da gravidade. As cordas, da teoria de cordas, têm comprimento intrínseco finito l_s . Baseado na análise de amplitudes de espalhamento de cordas em altas energias [6], as relações de incerteza de Heisenberg de cordas modificadas têm sido postuladas na forma

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p \right) \quad (1.1)$$

onde x é o operador posição, p o operador momentum e l_p^2 é o comprimento de Planck. Quando $l_s = 0$ a relação acima dá a predição da mecânica quântica usual. Porém, (1.1) sugere que o tamanho de uma corda cresce com sua energia. Além do mais, minimizando (1.1) com relação a Δp se produz um limite inferior absoluto na mensurabilidade, $(\Delta x)_{min} = l_s^2$. Dessa forma, teoria de cordas dá uma realização explícita da noção de coordenadas espalhadas do espaço-tempo. Geralmente, relações de incerteza do espaço-tempo têm sido postuladas na forma

$$\Delta x^i \Delta x^j = l_p^2$$

Assim, as configurações do espaço-tempo são espalhadas e a noção de ponto torna-se sem sentido. No limite de baixa energia $l_p \rightarrow 0$, se recupera o espaço clássico usual com coordenadas comutantes em escalas de grandes distâncias.

Veremos no capítulo 2 uma descrição da equação de Dirac e como ele conseguiu evitar a ocorrência de densidades de probabilidades negativas que apareciam na equação de Klein-Gordon, além disso foi possível prever a existência de antipartículas.

Estudamos no capítulo 3 como se dá a quantização de Weyl e suas propriedades e como são as relações de comutação entre as coordenadas do espaço não-comutativo. Também estudaremos o produto de funções nesse espaço, que é chamado de produto estrela (ou produto Moyal). Ainda nesse capítulo, veremos uma forma de transformação de um campo de gauge não-comutativo em um campo de gauge comutativo através do mapa de Seiberg-Witten.[7]

No capítulo 4 buscamos o limite não-relativístico do Hamiltoniano de Dirac, no contexto de uma teoria de massa efetiva bastante discutida em física da matéria condensada, através de uma transformação de Foldy-Wouthuysen. Estendemos essa transformação para o caso do Hamiltoniano modificado devido à não-comutatividade do espaço. Dessa forma, encontramos o limite não-relativístico do Hamiltoniano de Dirac no cenário em que consideramos a massa dependente da posição no espaço não-comutativo. Usando a representação de Foldy-Wouthuysen (FW) obtemos um termo adicional referente à não-comutatividade do espaço. Esse termo está ausente quando consideramos o espaço

ordinário comutativo ($\theta \rightarrow 0$).

No capítulo 5, fazemos uma investigação da massa dependente da posição sob a forma de um potencial tipo-Coulomb (proporcional a $1/r$) somado a um termo confinante (proporcional a r), onde inserimos a não-comutatividade dessas coordenadas por um “shift”. Através de uma aproximação não-relativística (representação FW) do Hamiltoniano de Dirac θ -modificado encontramos um Hamiltoniano análogo a um Hamiltoniano não-relativístico de uma partícula submetida a uma campo elétrico externo com acoplamento mínimo. Para o átomo de Hidrogênio, o termo devido à não-comutatividade do espaço realiza o papel do campo magnético (efeito Zeeman) e do spin (do próton ou nêutron), o que implica que em uma interação elétron-nêutron. Além disso, esse termo remove as degenerescências dos níveis de energia, permitindo um “split” em subníveis não degenerados.

Calculamos, ainda no capítulo 5, as correções de energia, usando teoria de perturbação, devido à presença do termo não-comutativo no Hamiltoniano de Dirac com MDP, sob a forma

$$m(\vec{r}) = m_0 + \frac{\lambda}{r} + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} \right) L_z \theta. \quad (1.2)$$

Com isso, usando apenas a contribuição de uma distribuição esférica de massa, podemos chegar a uma expressão idêntica à expressão para o átomo de Hidrogênio no contexto de não-comutatividade. Essas correções que encontramos são dadas em termos do parâmetro λ . Se esse parâmetro tiver valor igual ao valor do quadrado da carga elétrica, chegamos aos mesmos resultados das estimativas de $|\theta|$ para os níveis $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$.

2 A Equação de Dirac

Em meados de 1926, o físico austríaco Erwin Schrödinger desenvolveu a Mecânica Quântica Ondulatória, cujo resultado principal é a Equação de Schrödinger (ES). Essa equação descreve a evolução temporal do estado quântico de um sistema físico, similar ao da segunda Lei de Newton para a Mecânica Clássica.

Podemos escrever a ES como uma equação diferencial que possui derivadas de primeira ordem em relação ao tempo enquanto as derivadas em relação às coordenadas espaciais são de segunda ordem. Em geral costuma-se escrever a ES sob a forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi, \quad (2.1)$$

onde o operador Hamiltoniano associado à partícula $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})$ contém tanto o operador energia cinética como o operador energia potencial V . A fim de termos uma descrição relativística foi então desenvolvida equação de Klein-Gordon (KG). Ela é a equação de movimento capaz de descrever partículas sem spin e pode ser escrita matematicamente como uma equação de segunda ordem na derivada espacial, bem como na derivada temporal:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \nabla^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Contudo, existe um grande inconveniente para o uso da KG, a saber: esta equação não corresponde a uma densidade de probabilidade positiva definida, isso contribui para uma interpretação física nada simples.

As dificuldades com a interpretação da probabilidade negativa da função de onda encontrada na equação de Klein-Gordon, levaram Dirac a propor que a equação a ser satisfeita pela função de onda, fosse de primeira ordem em relação ao tempo, e também em relação ao espaço, por covariância, o que evita distribuições de probabilidade negativas.

A ED pode ser escrita como uma equação tipo-Schrodinger da forma (2.1), contanto que o Hamiltoniano $\hat{H}$ seja escolhido de modo que os requisitos da relatividade especial possam ser satisfeitos.

Assumindo que a partícula a ser descrita tenha massa de repouso m e denotando por c a velocidade da luz no vácuo, podemos escrever a ED como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = [c\vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla}) + \beta mc^2] \psi. \quad (2.2)$$

Em (2.2) adotamos para o operador Hamiltoniano $\hat{H}$ a forma,

$$\hat{H} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2, \quad (2.3)$$

onde $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ representa o operador momentum da partícula e $\vec{\alpha}$ e β são matrizes cujas componentes satisfazem

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$\beta^2 = 1.$$

Desse modo a função de onda ψ adquire caráter espinorial e é denotada por uma matriz coluna.

Uma escolha usual de conjuntos de matrizes que satisfazem essas condições é

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

onde

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

($\vec{\sigma}$) são as matrizes de Pauli e I é a matriz identidade 2×2 [1].

A fim de escrever a ED de maneira mais suscinta, introduziremos as matrizes γ de Dirac em termos de $\vec{\alpha}$ e β :

$$\gamma^0 = \beta$$

$$\gamma^i = \beta \alpha_i$$

sendo

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i).$$

As matrizes de Dirac são matrizes 4×4 e obedecem a relação de anticomutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço que estamos estudando [2].

Em termos dessas matrizes, a ED fica:

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0 \quad (2.6)$$

onde $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ é definida como sendo a derivada covariante. Essa é a forma covariante da ED e ψ é uma matriz coluna com quatro componentes chamada de espinor de Dirac.

É importante observar que o espinor de Dirac ψ deve satisfazer a equação de KG. Multiplicando a equação (2.6) por $i\gamma_\nu \partial^\nu$ e tomando $\hbar = c = 1$, vem

$$-\gamma_\nu \gamma^\mu \partial^\nu \partial_\mu \psi - im\gamma_\nu \partial^\nu \psi = 0. \quad (2.7)$$

Usando (2.6), ficamos com

$$\gamma_\nu \gamma^\mu \partial^\nu \partial_\mu \psi + m^2 \psi = 0. \quad (2.8)$$

Aplicando a relação de anticomutação das matrizes de Dirac (2.5) a equação (1.8) fica

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi + m^2 \psi = 0 \quad (2.9)$$

que é a equação de Klein-Gordon. Portanto, vimos que o espinor de Dirac satisfaz as relações relativísticas entre energia, massa e momento.

Outra propriedade importante da ED está relacionada à sua corrente de probabilidade

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi,$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é um espinor adjunto de ψ . Tomando o índice $\mu = 0$, vemos:

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^* \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

é positiva. j^0 pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade para a partícula em questão, a ED deixa claro essa interpretação de que j^0 é positivo definido, ao contrário

da equação de Klein-Gordon.

2.1 Covariância da Equação de Dirac

A física descrita por qualquer equação relativística deve ser independente do referencial de Lorentz adotado. Portanto para uma descrição física verdadeira, a equação deve ser invariante com respeito a escolha do sistema de coordenadas. Considere um referencial F , e um observador R e coordenadas x^μ . O observador R “vê” uma partícula descrita pela equação de onda $\psi(x^\mu)$ que obedece a equação (2.7). Em outro referencial F' com um observador R' e coordenadas x'^ν dadas por

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu \Rightarrow \partial_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu,$$

R' descreve a mesma partícula por $\psi'(x'^\nu)$ que satisfaz a

$$i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \psi'(x'^\nu) - m\psi'(x'^\nu) = 0. \quad (2.10)$$

A covariância de Lorentz implica que as matrizes γ são as mesmas em ambos referenciais. Contudo, isso não ocorre com os espinores, que se transformam da seguinte forma

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad (2.11)$$

onde $S(\Lambda)$ tem de ser uma matriz unitária, $S^\dagger = S^{-1}$. Aplicando S na ED (2.6), ficamos com

$$(i\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu - m) S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = 0.$$

Em seguida, multiplicando por $S(\Lambda)$, obtemos

$$(iS(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu S^{-1}(\Lambda)\partial'_\nu - m) \psi'(x') = 0,$$

de tal forma que a matriz de transformação deve satisfazer:

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\nu. \quad (2.12)$$

Vamos agora considerar transformações infinitesimais

$$\Lambda^\nu_\mu \simeq g^\nu_\mu + \delta w^\nu_\mu$$

e

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4} A^{\mu\nu} \delta w_{\mu\nu}.$$

$A_{\mu\nu}$ é antissimétrico em μ e ν e $A^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. $\sigma^{\mu\nu}$ são geradores de Poincaré atuando em campos de spin-1/2. Para transformações finitas

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4} A^{\mu\nu} \delta w_{\mu\nu}\right).$$

O espinor adjunto $\bar{\psi} = \psi^\dagger \psi^0$ se transforma da seguinte forma

$$\psi'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi} S^\dagger(\Lambda)$$

Assim, $\bar{\psi}(x) = \psi(x)$ é um escalar.

2.2 Soluções da Equação de Dirac para Partícula Livre

A ED admite soluções de onda plana da forma

$$\psi(x) = e^{(-ip \cdot x)/\hbar} u(p) \quad (2.13)$$

onde $u(p)$ é um espinor de 4-componentes que também satisfaz a ED

$$(\not{p} - mc)u(p) = 0 \quad (2.14)$$

sendo $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu = \gamma^\mu p_\mu = \not{p}$. O produto escalar de dois espinores u e u' é dado por

$$u^* u' = \sum_{\mu=1}^4 \bar{u}_\mu u'_\mu = \tilde{u} \gamma^0 u' \quad (2.15)$$

O Hamiltoniano $H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$ é hermitiano dentro deste produto escalar [8]:

$$u'^* H u = \sum_{\mu, \nu=1}^4 \bar{u}'_\mu H_{\mu\nu} u_\nu = (H u')^* u \quad (2.16)$$

desde que $\mu = \mu^*$ e $\nu = \nu^*$, seus autovalores são portanto reais. A equação (2.15) é um sistema de 4 equações lineares homogêneas para as componentes $u_{\mu\nu}$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, para que só existam soluções não triviais se $\det(\not{p} - mc) = (p^2 - m^2 c^2)^2 = 0$. Dessa forma, soluções existem apenas se $p^2 = m^2 c^2$, ou seja, apenas se $p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$. Seja $u_+(\vec{p})$ na solução para $cp_0 = E(\vec{p}) = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$ tal que $u_+(\vec{p})$ satisfaz a equação

$$(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)u_+(\vec{p}) = E(\vec{p})u_+(\vec{p}). \quad (2.17)$$

Se escrevermos $u_+ = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ onde u_1 e u_2 tem duas componentes cada, e adotando a representação (2.4) para $\vec{\alpha}$ e β , temos

$$\left(c \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} mc^2 \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = E(\vec{p}) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Assim, encontramos que u_1 e u_2 obedecem as seguintes equações:

$$c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_2 + mc^2 u_1 = E(\vec{p}) u_1 \quad (2.18)$$

$$c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_1 + mc^2 u_2 = E(\vec{p}) u_2 \quad (2.19)$$

Desde que $E(\vec{p}) + mc^2 \neq 0$,

$$u_2 = c \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + mc^2} u_1 \quad (2.20)$$

substituindo este valor de u_2 em (2.19), encontramos que

$$\left(c^2 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{E(\vec{p}) + mc^2} + mc^2 \right) u_1 = E(\vec{p}) u_1 \quad (2.21)$$

Desde que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2$ e

$$\frac{c^2 \vec{p}^2}{E(\vec{p}) + mc^2} = \frac{E(\vec{p})^2 - m^2 c^4}{E(\vec{p}) + mc^2} = E(\vec{p}) + mc^2 \quad (2.22)$$

A equação (2.20), de forma análoga, é satisfeita. Há, portanto, duas soluções linearmente independentes de energia positiva para cada momento $\vec{p}$, que corresponde, por exemplo, à escolha $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Isto pode também ser visto de outra forma. O operador Hamiltoniano $H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$ comuta com o operador hermitiano

$$s(\vec{p}) = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (2.23)$$

Onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

$s(\vec{p})$ é chamado de operador helicidade ou simplesmente helicidade da partícula, e corresponde fisicamente ao spin da partícula paralelo à direção do movimento. As soluções são portanto escolhidas para ser simultaneamente autofunções de H e $s(\vec{p})$. Desde que $s^2(\vec{p}) = 1$ os autovalores de $s(\vec{p})$ são ± 1 . Para um dado momentum e sinal da energia, as soluções podem ser classificadas de acordo com os autovalores $+1$ ou -1 de $s(\vec{p})$. Uma classificação similar para as soluções de energia negativa $-\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$ para um dado

momentum tem também duas soluções linearmente independentes que correspondem aos autovalores $+1$ ou -1 de $s(\vec{p})$. Em resumo, para um dado momentum p há quatro soluções linearmente independentes da ED, caracterizado por $p_0 = \pm cE(\vec{p})$, $s(\vec{p}) = \pm 1$.

Uma forma explícita para duas soluções linear independentes para energia positiva e momentum $\vec{p}$ é dada por

$$u_+^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E(\vec{p}) + mc^2}{2E\vec{p}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + mc^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$u_+^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E(\vec{p}) + mc^2}{2E(\vec{p})}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + mc^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde a constante de normalização requer que $u^*u = 1$. Note que estas duas soluções são ortogonais entre si, ou seja,

$$u_+^{(r)*}(\vec{p})u_+^{(s)}(\vec{p}) = \delta_{rs}$$

com $r, s = 1, 2$. As soluções acima não são autofunções de $s(\vec{p})$. Soluções de energia positiva correspondentes a helicidade definida são obtidas notando que a equação $s(\vec{p})u_+^{(\pm)}(\vec{p}) = \pm u_+^{(\pm)}(\vec{p})$ implica que

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})u_1^{(\pm)} = \pm u_1^{(\pm)}$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})u_2^{(\pm)} = \pm u_2^{(\pm)}$$

onde $\pm u_1^{(\pm)}$ e $\pm u_2^{(\pm)}$ são as componentes superior e inferior, respectivamente, de $\pm u_+^{(\pm)}$, e $\vec{n}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{p}$, $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$. Portanto $u_1^{(\pm)}$ normalizado é dado por

$$u_1^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2(n_3 + 1)}} \begin{bmatrix} n_3 + 1 \\ n_1 + in_2 \end{bmatrix}$$

e

$$u_1^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2(n_3 + 1)}} \begin{bmatrix} -n_1 + in_2 \\ n_3 + 1 \end{bmatrix}.$$

Uma autofunção normalizada de energia positiva com helicidade +1 é então dada por

$$u_+^{(+)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}} \sqrt{\frac{E(\vec{p}) + mc^2}{2E(\vec{p})}} \begin{bmatrix} n_3 + 1 \\ n_1 + in_2 \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E(\vec{p})+mc^2} \begin{bmatrix} n_3 + 1 \\ n_1 + in_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Aliás, notamos que no limite não relativístico as componentes u_2 de uma solução de energia positiva são da ordem de v/c vezes u_1 , e portanto pequenas.

$$u_2^* u_2 = \frac{c^2 \vec{p}^2}{(E(\vec{p}) + mc^2)^2} u_1^* u_1 \approx \left(\frac{mv}{2mc} \right)^2 u_1^* u_1 \approx \frac{1}{4} \left(\frac{v}{c} \right)^2 u_1^* u_1 \quad (2.27)$$

No caso limite de uma partícula em repouso, $\vec{p} = 0$, os quatro espinores linearmente independentes, que neste caso também são tomados como autofunções de Σ_3 , são:

(i) para $p_0 = mc^2$

$$\Sigma_3 = +1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Sigma_3 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) para $p_0 = -mc^2$

$$\Sigma_3 = +1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Sigma_3 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.1 Estados de Energia Negativa

Apesar da ED resolver o problema da densidade de probabilidade negativa encontrada na equação de Klein-Gordon, temos notado que a ED admite soluções de energia negativa. Sua interpretação física gerou grande dificuldade por algum tempo, se caso existisse uma partícula com energia negativa ela estaria acelerada na direção oposta à da força externa. Como os autolvalores de γ^0 são ± 1 há duas soluções de energia negativa. Para cada valor de p , há duas soluções de energia positiva, correspondentes aos estados de uma partícula de spin-1/2, e duas soluções de energia negativa adicionais. O espectro de energia das

soluções é mostrado na figura (2.1) [9], e o problema representa o mesmo que existia na equação de Klein-Gordon. Um elétron em um estado de energia pode saltar para um estado de energia negativa, e em cascata para “baixo” até $E = -\infty$, emitindo nesse processo uma quantidade infinita de radiação eletromagnética. A solução de Dirac para este problema tem como base o fato que elétrons têm spin-1/2 e portanto obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Dirac supôs que o estado de energia negativa já está completamente cheio, e o princípio de exclusão de Pauli impede que qualquer elétron a mais seja capaz de entrar no “mar” de estados negativos. Este “mar” de Dirac é o vácuo, assim, na teoria de Dirac, o vácuo não é “nada”, mas um mar infinito de elétrons, prótons, neutrinos, neutrons e todas as outras partículas de spin-1/2 de energia negativa.

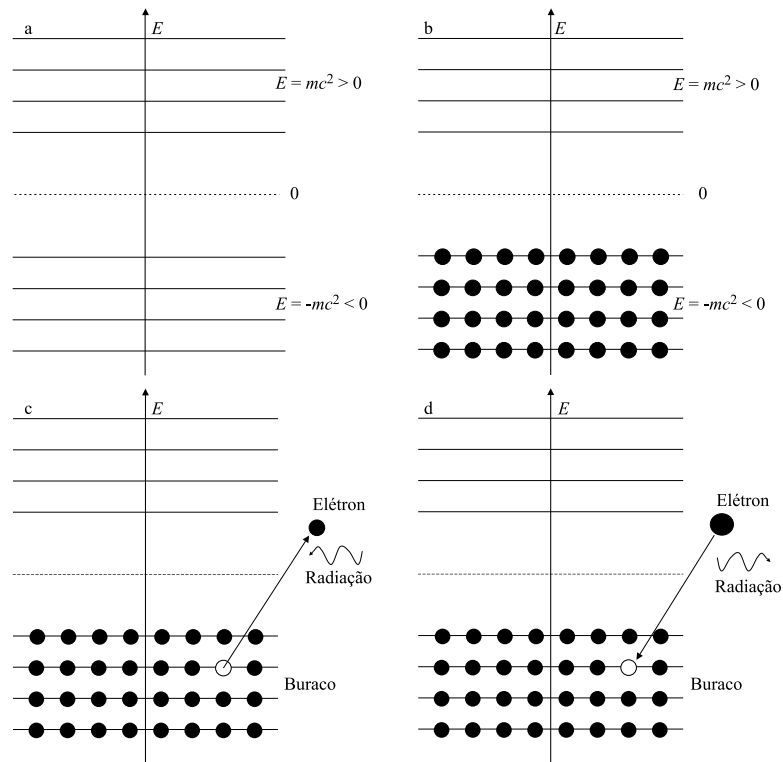


Figura 2.1: Em (a) é mostrado a estrutura dos níveis de energia positiva e negativa. Os estados de energia negativa estão todos ocupados (b). Na parte (c) vemos que um desses estados pode ser arrancado por um fóton e pode criar um par partícula-antipartícula. E (d) a aniquilação de pares produz radiação, par de fótons.

Esta teoria faz uma previsão importante, para supor que ocorre uma vaga no “mar” de elétrons, deve haver um “buraco” com energia $|E|$. Um elétron com energia E pode preencher esse buraco, emitindo energia $2E$, e deixando o vácuo [2]:

$$e^- + \text{buraco} \rightarrow \text{energia},$$

então o buraco efetivamente tem carga e^+ e energia positiva. Essa partícula e^+ é chamada

de pósitron, a antipartícula do elétron, que foi descoberto experimentalmente em 1932 por Anderson e garantiu o prêmio Nobel de 1933 para Dirac. Contudo, a teoria de Dirac prevê a existência de antipartículas não somente para o elétron, mas para todas as partículas de spin-1/2.

A previsão e descoberta de antipartículas tornou-se um dos fatos marcantes na história da física. A ED tem sido muito bem sucedida em suas previsões e aplicações, e apesar do sucesso da resolução do problema de energias negativas, a ED descreve a dinâmica tanto de partículas como de antipartículas.

3 Não-Comutatividade do Espaço

3.1 Introdução Histórica

Do ponto de vista de Heisenberg: quantidades físicas são governadas pela álgebra não-comutativa [10]. Snyder, em 1946, motivado pela necessidade de controle das divergências que têm atormentado teorias como Eletrodinâmica Quântica (EDQ), foi quem primeiro formalizou esta idéia. A idéia por trás da não-comutatividade do espaço-tempo é muito inspirada pela mecânica quântica. Um espaço de fase é definido substituindo as variáveis posição e momentum canônicos x^i, p^j por operadores hermitianos $\hat{x}^i, \hat{p}^j$. O espaço de fase torna-se “espalhado” e a noção de pontos é substituída por uma célula de Planck. No limite clássico $\hbar \rightarrow 0$, se recupera o espaço ordinário. Neste cenário, o estudo de propriedades de espaços é feito em termos puramente algébricos, abandonando a noção de ponto. Como na quantização de um espaço clássico, um espaço-tempo não comutativo é definido substituindo coordenadas x^i por operadores hermitianos $\hat{x}^i$ que obedecem as relações de comutação [11]

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \quad (3.1)$$

O caso mais especial de (3.1) é onde θ^{ij} é uma matriz antissimétrica $N \times N$ constante de valor real com dimensões de comprimento ao quadrado. Desde que as coordenadas não mais comutam, elas não podem ser simultaneamente diagonalizadas (não sendo possível medir com precisão a posição da partícula) e devido à relação de incerteza do espaço

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{1}{2} |\theta^{ij}| \quad (3.2)$$

um ponto nesse espaço é substituído por uma célula de Planck de dimensão dada pela área de Planck. Assim, em distâncias de ordem do comprimento de onda de Planck, o espaço-tempo perde sua estrutura de variedade contínua e suave e deve ser substituído por algum tipo de estrutura não-comutativa.

Muitas das idéias gerais por trás da não-comutatividade são baseadas em grande parte

nos alicerces da mecânica quântica. Dentro do formalismo de quantização canônica, Weyl introduziu uma elegante prescrição para associar um operador quântico a uma função clássica no espaço de fase [12]. Esta técnica fornece uma forma sistemática para descrever espaços NC em geral e para estudar teorias de campo nele definidos

3.2 Operadores de Weyl

Definimos um espaço não-comutativo substituindo as coordenadas locais x^i de $\mathbb{R}^D$ por operadores hermitianos $\hat{x}^i$ obedecendo as relações de comutação (3.1). Os $\hat{x}^i$ geram então uma álgebra não-comutativa dos operadores. A quantização de Weyl fornece uma correspondência entre a álgebra de campos em $\mathbb{R}^D$ e estes operadores, e pode ser pensado como um análogo dos operadores-estado correspondentes da teoria quântica de campos local. Dado a função $f(x)$ e seus coeficientes de Fourier, introduzimos o símbolo de Weyl

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{-ik_i \hat{x}^i}, \quad (3.3)$$

onde temos escolhido o operador simétrico de Weyl ordenando a prescrição, por exemplo, $\hat{W}[e^{-ik_i x^i}] = e^{-ik_i \hat{x}^i}$. O operador de Weyl $\hat{W}[f]$ é hermitiano se $f(x)$ tem valor real. Podemos escrever (3.3) da seguinte forma

$$\hat{W}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x) \quad (3.4)$$

onde

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_i \hat{x}^i} e^{-ik_i x^i}. \quad (3.5)$$

O operador (3.5) é hermitiano, $\hat{\Delta}(x)^\dagger = \hat{\Delta}(x)$, e descreve uma base mista para operadores e campos no espaço-tempo. Desta forma podemos interpretar o campo $f(x)$ como a representação da coordenada espacial do operador de Weyl $\hat{W}[f]$. Note que no caso comutativo $\theta^{ij} = 0$, (3.5) se reduz a função delta $\delta^D(\hat{x} - x)$ e $\hat{W}[f] |_{\theta=0} = f(\hat{x})$.

Podemos introduzir derivadas de operadores através de uma derivação linear anti-hermitiana $\hat{\partial}_i$ que é definida pelas relações de comutação

$$[\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j, \quad [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0 \quad (3.6)$$

Assim, vemos que

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(x)] = -\partial_i \hat{\Delta}(x) \quad (3.7)$$

que após integração por partes em (3.5) leva a

$$[\hat{\partial}_i, \hat{W}[f]] = \int d^D x \partial_i f(x) \hat{\Delta}(x) = \hat{W}[\partial_i f] \quad (3.8)$$

De (3.8) segue também que operadores de translação podem ser representados por operadores unitários $e^{\nu^i \hat{\partial}_i}$, $\nu \in \mathbb{R}^D$, com

$$e^{\nu^i \hat{\partial}_i} \hat{\Delta}(x) e^{-\nu^i \hat{\partial}_i} = \hat{\Delta}(x + \nu). \quad (3.9)$$

A propriedade (3.9) implica que qualquer traço cíclico Tr definido na álgebra dos operadores de Weyl tem a característica que $Tr(\hat{\Delta}(x))$ é independente de x em $\mathbb{R}^D$. De (3.5) segue que o traço Tr é exclusivamente dado por uma integração sobre o espaço-tempo

$$Tr(\hat{W}[f]) = \int d^D x f(x) \quad (3.10)$$

onde escolhemos a normalização $Tr(\hat{\Delta}(x)) = 1$. Neste sentido, o operador Tr é equivalente a integração sobre as coordenadas NC $\hat{x}^i$. Contudo, como a base $\hat{\Delta}(x)$ não é um elemento da álgebra dos campos e assim seu traço não é definido por (3.10). Desse modo, ele deve ser simplesmente pensado como um objeto que interpola entre campos no espaço-tempo e operadores de Weyl, cujo traço é fixo por uma dada normalização.

O produto dos operadores $\hat{\Delta}(x)$ em diferentes pontos pode ser calculado como segue. Usando a fórmula de BCH,

$$e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ik'_i \hat{x}^i} = e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} k_i k'_j} e^{i(k+k')_i \hat{x}^i} \quad (3.11)$$

juntamente com (3.5), podemos derivar

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k+k')_i \hat{x}^i} e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} k_i k'_j} e^{-ik_i x^i - ik'_i y^i} \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k+k')_i z^i} \hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} k_i k'_j} e^{-ik_i x^i - ik'_i y^i} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se θ é uma matriz inversível, isto requer que a dimensão D do espaço-tempo seja par, então se pode explicitamente executar as integrações Gaussianas sobre os momenta k e k' em (3.12) para obter

$$\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij} (x-z)^i (y-z)^j} \quad (3.13)$$

Em particular, usando a normalização do traço e a antissimetria de θ^{-1} , de (3.13) segue

que os operadores $\hat{\Delta}(x)$ para $x \in \mathbb{R}^D$ formam um conjunto ortonormal,

$$Tr \left(\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) \right) = \delta^D(x - y) \quad (3.14)$$

Com (3.5), isto implica que a transformação $f(x) \xrightarrow{\hat{\Delta}(x)} \hat{W}[f]$ é inversível com inverso dado por

$$f(x) = Tr \left(\hat{W}[f] \hat{\Delta}(x) \right) \quad (3.15)$$

A função $f(x)$ obtida a partir de um operador quântico é geralmente chamada de função de distribuição de Wigner [13]. Portanto, o mapa $\hat{\Delta}(x)$ fornece uma correspondência entre campos de Wigner e operadores de Weyl, esta correspondência é chamada de correspondência Weyl-Wigner.

3.3 O Produto Estrela

Vamos considerar agora o produto de dois operadores de Weyl $\hat{W}[f]$ e $\hat{W}[g]$, correspondendo às funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. De (3.7) segue que a representação da coordenada espacial do produto desses operadores poder ser escrita como

$$Tr \left(\hat{W}[f] \hat{W}[g] \hat{\Delta}(x) \right) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \iint d^y d^D z f(y) g(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij}(x-y)^i(x-z)^j} \quad (3.16)$$

Usando (3.4), (3.3) e (3.12) conclui-se que

$$\hat{W}[f] \hat{W}[g] = \hat{W}[f \star g], \quad (3.17)$$

onde introduzimos a produto estrela de Groenewold-Moyal

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k - k') e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} k_i k'_j} e^{i k'_i x^i} \\ &= f(x) e^{\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j \right)} g(x) \\ &= f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(x). \end{aligned} \quad (3.18)$$

O produto estrela (3.18) é associativo e não comutativo e é definido para θ constante. Para $\theta = 0$ o produto se reduz ao produto ordinário de funções.

Consideremos um exemplo particular de um produto estrela. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa sobre um campo $\mathbb{K}$, então a deformação de $\mathcal{A}$ é um conjunto de séries de potências $\sum_n f_n \lambda^n$ que formam uma álgebra $\mathcal{A}[[\lambda]]$ sobre o anel da série de potências $\mathbb{K}[[\lambda]]$ em uma variável λ . A álgebra deformada tem uma propriedade que $\mathcal{A}[[\lambda]]/\mathcal{A}\lambda \cong \mathcal{A}$,

ou seja, a parte de ordem λ^0 forma uma álgebra não deformada. Pode-se então definir uma nova lei de multiplicação para a álgebra deformada $\mathcal{A}[[\lambda]]$. Para $f, g \in \mathcal{A}$, isto é dado pelo produto associativo bilinear $\mathbb{K}[[\lambda]]$

$$f \star \lambda g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n C_n(f, g) \quad (3.19)$$

que pode ser estendido a toda $\mathcal{A}[[\lambda]]$ por linearidade. O produto estrela particular (3.21) define a deformação da álgebra das funções em $\mathbb{R}^D$ para uma álgebra associativa não comutativa cujo produto coincide com os parênteses de Poisson de funções, ou seja, $f \star g = fg + \frac{i}{2} \theta^{ij} \partial_i f \partial_j g + O(\theta^2)$, com os coeficientes em uma expansão de série de potências em θ sendo expressões diferenciais bilineares em f e g . É interessante notar que o comutador Moyal com as coordenadas locais x^i pode ser usado para gerar derivadas como

$$x^i \star f(x) - f(x) \star x^i = i \theta^{ij} \partial_j f(x) \quad (3.20)$$

Em geral, o comutador estrela de duas funções pode ser representado em uma forma compacta usando um operador bi-diferencial como (3.21)

$$f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) = 2i f(x) \text{sen} \left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j \right) g(x) \quad (3.21)$$

enquanto o anticomutador estrela pode ser escrito como

$$f(x) \star g(x) + g(x) \star f(x) = 2i f(x) \cos \left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j \right) g(x) \quad (3.22)$$

Uma extensão útil de (3.21) é

$$f_1(x_1) \star \dots \star f_n(x_n) = \prod_{a < b} e^{\left(\frac{i}{2} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x_a^i} \frac{\partial}{\partial x_b^j} \right)} f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \quad (3.23)$$

Portanto, a não-comutatividade do espaço-tempo pode ser codificada através de produtos ordinários na C^* -Álgebra NC de operadores de Weyl, ou equivalentemente através da deformação do produto de C^* -Álgebra comutativa de funções no espaço-tempo do produto estrela. Note que por ciclicidade do operador traço, a integral

$$\text{Tr} \left(\hat{W}[f_1] \dots \hat{W}[f_n] \right) = \int d^D x f_1(x) \star \dots \star f_n(x) \quad (3.24)$$

é invariante sobre permutações cíclicas (não arbitrárias) de funções f_a . Em particular,

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x) g(x) \quad (3.25)$$

que se segue para funções de Schwartz sobre integração por partes sobre $\mathbb{R}^D$.

O método de quantização apresentado acima pode ser generalizado para situações mais complicadas através do qual os comutadores $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]$ não são simplesmente c-números. A situação geral é que tanto os espaços das coordenadas e momentum conjugado são NC em uma forma correlacionada. Assim os comutadores $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]$, $[\hat{x}^i, \hat{p}_j]$ e $[\hat{p}_i, \hat{p}_j]$ são funções de $\hat{x}^i$ e $\hat{p}_i$, ao invés de apenas de $\hat{x}^i$, e assim define uma álgebra de operadores pseudo-diferenciais no espaço NC. Tal situação surge em teoria de corda quando se quantiza corda aberta na presença de um B -campo não constante, e era o tipo de espaço NC que foi considerado originalmente na construção de Snyder. Se B é uma duas-forma fechada, $dB = 0$, então o produto estrela associativo neste caso é dado pela fórmula de Kontsevich para a quantização da deformação associada às estruturas de Poisson, ou seja, tensores de Poisson θ que são em geral não constantes, obedecem a identidade de Jacobi, e pode ser degenerado. Esta fórmula admite uma representação elegante em termos de expansão perturbativa da integral de caminho de Feynman para uma simples teoria topológica de corda aberta. Se B não é fechado, então o uso direto da fórmula de Kontsevich dá um operador bi-diferencial não associativo, a não associatividade sendo controlada por dB . No caso de um θ constante e não degenerado, a representação de integração funcional da fórmula de Kontsevich toma a forma simples da teoria quântica de campos topológica unidimensional e seu produto estrela (3.21) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \langle f(\eta(1))g(\eta(0))\delta^D(\eta(\pm\infty) - x) \rangle_\eta \\ &= \int D\eta \delta^D(\eta(\pm\infty) - x) f(\eta(1))g(\eta(0)) \exp\left(\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta^i(t) (\theta^{-1})_{ij} \frac{d\eta^j(t)}{dt}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aqui a integral vai sobre caminhos $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ e é entendida como uma expansão sobre as trajetórias clássicas $\eta(t) = x$, que são independentes do tempo porque o Hamiltoniano da teoria (3.29) desaparece. O caso acima a técnica descrita nesta seção tem comprovado ser um método importante para o estudo de teoria de campos não-comutativo. Por exemplo, sólitons NC estáveis, que não têm contrapartida em teoria de campo ordinária, tem sido construídos representando a álgebra do operador de Weyl em um espaço de Hilbert. As equações de campo do sóliton NC podem então ser resolvidas por qualquer operador projeção neste espaço.

3.4 O Mapa de Seiberg-Witten

Devido ao fato de o parâmetro θ^{ij} ser muito pequeno (na ordem do comprimento de Planck ao quadrado), é bastante útil considerar também expansões de uma teoria NC em termos desse parâmetro. Assim, produto estrela pode ser escrito com uma expansão em θ ,

$$f \star g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n C_n(f, g), \quad (3.27)$$

no limite comutativo $\theta \rightarrow 0$, o produto estrela se reduz ao produto pontual ordinário de funções.

Procedendo analogamente, podemos investigar a relação entre uma teoria de gauge NC, cujo campo de gauge denotamos por A_μ , com uma teoria de Maxwell, descrita em termos de um campo comutativo a_μ . Isto é feito através do mapa de Seiber-Witten.

A existência de tal mapa pode ser motivada pelo fato de que um certo limite de teoria de cordas com D -branas e um campo magnético B , pode levar tanto a uma teoria de campo efetiva comutativa como não-comutativa, dependendo do esquema de regularização usado.

Seiberg e Witten [7] propuseram que deve haver um mapa local a partir de uma teoria de gauge ordinária para uma teoria de gauge NC que satisfaz

$$A_\mu[a] + \delta_\Lambda A_\mu[a] = A_\mu[a + \delta_\lambda a], \quad (3.28)$$

onde δ_λ denota uma transformação de gauge ordinária e δ_Λ uma transformação de gauge NC. Os mapas SW são soluções da chamada relação equivalência-gauge. A equação (3.28) significa que fazer um transformação de gauge do campo de gauge NC A com parâmetro de gauge NC Λ é equivalente a uma transformação de gauge de um campo comutante a com parâmetro de gauge λ . As soluções são, contudo, não únicas, há algumas ambiguidades. Na realidade, qualquer mapa SW pode ser obtido como a composição de uma mapa SW fixo e um mapa preservando a estrutura de gauge da teoria comutativa.

Neste contexto, o parâmetro θ^{ij} desempenha o papel de um campo externo constante. Assim, uma teoria de maxwell NC deformada com θ expandido pode ser obtida onde o fóton recebe uma auto-interação via o campo de fundo θ^{ij} .

A solução da equação acima para grupos de gauge abelianos, como determinada por Seiberg e Witten, é

$$A_\mu[a] = a_\mu + \frac{g\theta^{\sigma\tau}}{2}(a_\tau \partial_\sigma a_\mu + f_{\sigma\mu} a_\tau) + O(\theta^2),$$

$$\begin{aligned}\Phi[\phi, a] &= \phi + \frac{g\theta^{\mu\nu}}{2} a_\nu \partial_\mu a_\mu \phi + O(\theta^2), \\ \Lambda[\lambda, a] &= \lambda + \frac{g\theta^{\mu\nu}}{2} a_\nu \partial_\mu a_\mu \lambda + O(\theta^2)\end{aligned}\quad (3.29)$$

onde $f_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade de campo associado a a_μ e Φ e ϕ denotam campos escalares. Generalizando para campos de gauge não abelianos a_μ , expandimos Λ em termos de θ ,

$$\Lambda[A] = \Lambda^0 + \Lambda^1[a] + \Lambda^2[a] + O(\theta^3) \quad (3.30)$$

onde Λ^n é da ordem $O(\theta^n)$. Resolvendo ordem por ordem, chegamos a

$$\begin{aligned}\Lambda^0 &= 0, \\ \Lambda^1 &= \frac{g\theta^{\mu\nu}}{4} \{\partial_\mu \lambda, a_\nu\}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Para campos escalares Φ a condição

$$\delta_\lambda \Phi[a] = \delta_\Lambda \Phi[a] = ig\Lambda[a] \star \Phi[a] \quad (3.32)$$

tem sido satisfeita. Ou seja, a transformação de gauge ordinária induz uma transformação de gauge não comutativa. Expandindo os campos em termos da não-comutatividade

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi^1[a] + \Phi^2[a] + \dots, \quad (3.33)$$

e resolvendo (2.33) ordem por ordem em θ , obtém-se a solução

$$\delta_\lambda \Phi^1[a] = ig\lambda\Phi^1 + ig\Lambda^1 - \frac{g\theta^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \lambda \partial_\nu \phi. \quad (3.34)$$

onde

$$\begin{aligned}\Phi^0 &= \phi, \\ \Phi^1 &= -\frac{g\theta^{\mu\nu}}{2} a_\nu \partial_\nu \phi + \frac{ig\theta^{\mu\nu}}{4} a_\nu \partial_\nu \phi.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Os campos de gauge A_μ têm que satisfazer

$$\delta_\lambda A_\mu[a] = \partial_\mu A_\mu[a] - ig[\Lambda_\mu[a] \star \Lambda[a]]. \quad (3.36)$$

Usando a expansão

$$\Lambda_\mu[a] = \Lambda_\mu^0 + \Lambda_\mu^1[a] + \Lambda_\mu^2[a] + \dots, \quad (3.37)$$

e resolvendo (3.37) ordem por ordem para o campo de gauge NC, temos

$$\begin{aligned} A_\mu^0 &= a_\mu, \\ A_\mu^1[a] &= -\frac{g\theta^{\tau\nu}}{4}\{a_\tau, \partial_\nu a_\mu + f_{\nu\mu}\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde $f_{\nu\mu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu - ig[a_\nu, a_\mu]$. Analogamente, temos para a intensidade de campo $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \delta_\lambda F_{\mu\nu} &= ig[\Lambda, F_{\mu\nu}], \\ F_{\mu\nu} &= f_{\mu\nu} + \frac{g\theta^{\sigma\tau}}{2}\{f_{\mu\sigma}, f_{\nu\tau}\} - \frac{g\theta^{\sigma\tau}}{4}\{a_\sigma, (\partial_\tau + D_\tau)f_{\mu\nu}\}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $D_\mu f_{\tau\nu} = \partial_\mu f_{\tau\nu} - ig[a_\mu, f_{\tau\nu}]$. Deve salientar-se que teorias de campo de gauge formuladas através do mapa SW são manifestamente IR finitas, no sentido de mistura UV/IR. Apenas as divergências UV estão presentes.

Uma versão NC do modelo padrão de física de partículas em termos da expansão de Seiberg-Witten também pode ser estudada. Isto dá origem a novos modos de acoplamentos e decaimento, que podem ser proibidos no Modelo Padrão comutativo. Por exemplo, há um novo acoplamento de fótons a partículas neutras, e o decaimento $Z \rightarrow \gamma\gamma$. Estudando tais processos experimentalmente pode-se obter limites na escala de não-comutatividade. O mapa SW também pode ser aplicado a cenários de astrofísica, por exemplo, limites para escala NC podem ser derivados de estimativas para perdas de energia induzidas em estrelas e de comparação de momentos de dipolo de neutrinos de Dirac/Majorana.

Deve ser mencionado, que o mapa de Seiberg-Witten também pode ser construído para θ^{ij} não constante. Em particular, isto tem sido feito para espaços κ -deformados e para certas classes de espaços q -deformados [14].

O mapa SW costuma ser utilizado para o estudo da equação de Dirac na presença de um campo de gauge em uma geometria não comutativa. Isto não será feito no presente trabalho. Entretanto, optamos pela apresentação e discussão do mapa nesta dissertação dada a sua importância intrínseca bem como do ponto de vista da implemetação futura de um tal estudo.

4 Aproximação Não-Relativística da Equação de Dirac

Neste capítulo iremos usar a representação de Foldy-Wouthuysen com o intuito de obter o limite não relativístico do Hamiltoniano de Dirac. Faremos uma exposição do método de Foldy-Wouthuysen para o caso geral de uma partícula descrita pela equação de Dirac.

4.1 A Transformação de Foldy-Wouthuysen

Vimos no capítulo 2, que os espinores ψ são soluções da equação de Dirac. Uma vez que o espinor ψ é uma matriz coluna de quatro componentes podemos escrevê-lo em termos de dois bi-espinores ϕ e χ :

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

onde ϕ e χ são denominados de componentes maior e menor, respectivamente. Ao tomarmos o limite não-relativístico dos espinores que representam os estados de energia positiva, as duas componentes superiores que formam ϕ tornam-se muito maiores em comparação as componentes inferiores χ , justificando a denominação acima. Para os estados de energia negativa observa-se o oposto. Daí o motivo de usarmos essa denominação de componentes maior e menor. Assim, vemos que, nessa aproximação, o espinor de Dirac fica determinado por somente duas de suas quatro componentes.

A fim de implementar a descrição física em termos de apenas duas das quatros componentes da ED, usaremos a transformação de FW [15]. Tal transformação consiste em remover do Hamiltoniano de Dirac todos os operadores “ímpares” (elementos fora das diagonais da base de Pauli-Dirac) tais como $\vec{\alpha}$, γ^i e γ^5 , uma vez que eles são responsáveis por acoplar as componentes maiores e menores do espinor. Desse modo, o Hamiltoniano transformado fica expresso como uma série de potências de $1/m$ contendo apenas opera-

dores “pares”(elementos diagonais das bases de Pauli-Dirac) do tipo β , Σ e $\mathbb{I}$, que não misturam assim as componentes maior e menor.

Vamos reproduzir o método de Foldy-Wouthuysen para o caso geral em que a presença de um campo externo que não dependa do tempo. Para isso, empregaremos a matriz de transformação canônica $U = e^{iS}$, onde S é hermitiano, obtendo a transformação

$$\psi' \rightarrow e^{iS} \psi = \psi' \quad (4.2)$$

para o espinor ψ , bem como a transformação

$$H' \rightarrow e^{iS} H e^{-iS} = H' \quad (4.3)$$

para tal Hamiltoniano. Podemos adotar para o operador S o seguinte ansatz,

$$S = - \left(\frac{i}{2m} \right) \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} w \frac{|\vec{p}|}{m} \quad (4.4)$$

onde w é uma função real a ser determinada de modo que o Hamiltoniano transformado H' seja livre de operadores ímpares. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} H' &= e^{iS} (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) e^{-iS}, \\ &= e^{iS} \beta e^{-iS} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Além disso, usando o seguinte resultado

$$\beta (\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p})^n = (-1)^n (\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p})^n \beta, \quad (4.6)$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} \beta e^{-iS} &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2m} \right)^n (\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p})^n w^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{+1}{2m} \right)^n (\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p})^n w^n \beta = e^{iS} \beta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Desse modo, o Hamiltoniano modificado H' fica:

$$\begin{aligned} H' &= e^{2iS} (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \\ &= \left[\cos \left(\frac{|\vec{p}|}{m} w \right) + \frac{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \sin \left(\frac{|\vec{p}|}{m} w \right) \right] (\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m) \\ &= \beta \left[m \cos \left(\frac{|\vec{p}|}{m} w \right) + |\vec{p}| \sin \left(\frac{|\vec{p}|}{m} w \right) \right] + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \left[|\vec{p}| \cos \left(\frac{|\vec{p}|}{m} w \right) - m \sin \left(\frac{|\vec{p}|}{m} w \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

O primeiro termo acima é diagonal, enquanto o segundo é não diagonal, devido à presença de α . Assim, é conveniente escolher a função w de forma que o coeficiente do segundo termo se anule, a saber

$$w = \frac{m}{|\vec{p}|} \tan^{-1} \left(\frac{|\vec{p}|}{m} \right). \quad (4.9)$$

Dessa forma, o Hamiltoniano transformado H' será então livre de operadores ímpares

$$\begin{aligned} H' &= \beta \left[m \frac{m}{\sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}} + |\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}} \right] \\ &= \beta \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2} = \beta E(\vec{p}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

não mescla componentes maiores com menores. A equação $H'\psi' = E'\psi'$, com β dado por (2.4), tem soluções onde a componente maior representa energias positivas e a componente menor energias negativas. Se escrevermos

$$\psi' = \phi' + \chi', \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{1}{2}(1 + \beta)\psi', \\ \chi' &= \frac{1}{2}(1 - \beta)\psi', \end{aligned}$$

então, teremos

$$H'\phi' = E(\vec{p})\phi', \quad (4.12)$$

$$H'\chi' = -E(\vec{p})\chi'. \quad (4.13)$$

Para o caso geral vamos escrever o Hamiltoniano de Dirac como

$$H = \beta m + \varepsilon + O \quad (4.14)$$

onde ε representa a parte par e O representa a parte ímpar de H .

Consideremos agora S sendo

$$S = -\frac{i}{2m}\beta O, \quad (4.15)$$

de modo que podemos escrever (4.2) e (4.3), onde $U^\dagger U = e^{-iS} e^{iS} = \mathbb{I}$.

Fazendo uso da relação de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^L A e^{-L} = A + [L, A] + \frac{1}{2!}[L, [L, A]] + \cdots + \frac{1}{n!}[L, [L, [L, \cdots, [L, A] \cdots]]] + \cdots, \quad (4.16)$$

$[L, A] = LA - AL$ é o comutador de L e A . Podemos então escrever a expansão de H'

como

$$H' = H + i[S, H] + \frac{(i)^2}{2!}[S, [S, H]] + \dots \quad (4.17)$$

Usando as relações $\beta O = -O\beta$ e $\beta\varepsilon = \varepsilon\beta$ e restringindo nossa aproximação até potências de $(1/m)^2$ vamos calcular os comutadores que aparecem em (4.17). Para o comutador $i[S, H]$ obtemos

$$\begin{aligned} i[S, H] &= i \left[-\frac{i}{2m}\beta O, \beta m + O + \varepsilon \right], \\ &= i \left\{ \left(-\frac{i}{2m}\beta O \right) (\beta m + O + \varepsilon) - (\beta m + O + \varepsilon) \left(-\frac{i}{2m}\beta O \right) \right\}, \\ &= \left\{ -O + \frac{\beta O^2}{m} + \frac{\beta}{2m}[O, \varepsilon] \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Já para $\frac{(i)^2}{2}[S, [S, H]]$ vem

$$\begin{aligned} \frac{(i)^2}{2}[S, [S, H]] &= \frac{i}{2} \left[-\frac{i}{2m}\beta O, -O + \frac{\beta O^2}{m} + \frac{\beta}{2m}[O, \varepsilon] \right], \\ &= \frac{i}{2} \left\{ \left(-\frac{i}{2m}\beta O \right) \left(-O + \frac{\beta O^2}{m} + \frac{\beta}{2m}[O, \varepsilon] \right) - \left(-O + \frac{\beta O^2}{m} + \frac{\beta}{2m}[O, \varepsilon] \right) \left(-\frac{i}{2m}\beta O \right) \right\}, \\ &= -\frac{1}{2m}\beta O^2 - \frac{1}{2m^2}O^3 - \frac{1}{8m^2}[O, [O, \varepsilon]] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) e (4.18) em (4.17), temos.

$$\begin{aligned} H' &= \beta m + \varepsilon + O - O\frac{1}{m}\beta O^2 + \frac{\beta}{m}[O, \varepsilon] - \frac{1}{2m}\beta O^2 - \frac{1}{2m^2}O^3 - \frac{1}{8m^2}[O, [O, \varepsilon]], \\ &= \beta m + \varepsilon + \frac{1}{2m}\beta O^2 + \frac{\beta}{2m}[O, \varepsilon] - \frac{1}{3m^2}O^3 - \frac{1}{8m^2}[O, [O, \varepsilon]] + \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Obtivemos acima uma série de potências em $1/m$, de forma que os termos ímpares são de ordem $(1/m)^1$ ou superiores. Assim, aplicando uma sequência de transformações canônicas em que o operador S é escolhido como

$$S = -\frac{i}{2m}\beta O', \quad (4.21)$$

com os termos ímpares restantes em H' contidos em O' , conseguiremos remover os termos ímpares remanescentes no Hamiltoniano transformado em qualquer ordem de $1/m$.

4.2 Transformação de Foldy-Wouthuysen com a Massa Dependente da Posição

Vamos agora, usando a transformação FW, determinar as possíveis alterações no Hamiltoniano provocadas pelo fato de lidarmos com a massa dependente da posição (MDP). Dado que a massa é um operador par que depende da posição, podemos escrever o Hamiltoniano sob a forma

$$H = \beta m(\vec{r}) + O. \quad (4.22)$$

Por depender da posição, o operador massa $m(\vec{r})$ não mais comuta com $\vec{p}$, de modo que S não pode ser mais escrito como (4.15). De acordo com a referência [16], podemos escrever duas possibilidades para o operador S de duas maneiras:

$$S_1 = -\frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{m(\vec{r})}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m(\vec{r})}} \quad (4.23)$$

$$S_2 = -\frac{i}{4} \left\{ \frac{1}{m(\vec{r})} \beta O + \beta O \frac{1}{m(\vec{r})} \right\}. \quad (4.24)$$

Ambas as formas S_1 e S_2 produzem o mesmo Hamiltoniano transformado para o caso em que, $O = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$. Neste trabalho usaremos S_1 para efetuarmos a transformação FW, assim

$$H' = e^{iS_1} H e^{-iS_1} = H + i[S_1, H] + \frac{(i)^2}{2!} [S_1, [S_1, H]] + \dots \quad (4.25)$$

Se nos restringirmos somente aos termos de ordem até $1/m$, como anteriormente vamos calcular os comutadores:

$$\begin{aligned} i[S_1, H] &= i \left\{ \left(\frac{-i}{2} \frac{1}{\sqrt{m(\vec{r})}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m(\vec{r})}} \right) (\beta m(\vec{r}) + O) - (\beta m(\vec{r}) + O) \left(\frac{1}{\sqrt{m(\vec{r})}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m(\vec{r})}} \right) \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \sqrt{m} + \sqrt{m} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

O segundo termo de (4.26) aplicado a um espinor arbitrário ψ fica:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \sqrt{m} + \sqrt{m} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \psi &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} O (\sqrt{m} \psi) + \sqrt{m} O \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \psi \right) \right\}, \\ &= -\frac{1}{2} O \left(\sqrt{m} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \psi - O \psi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim (4.26) se torna:

$$i[S_1, H] = -O + \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right). \quad (4.28)$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos para o comutador duplo:

$$\begin{aligned}
\frac{(i)^2}{2} [S_1, [S_1, H]] &= -\frac{(i)^2}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m}}, -O \right] - \frac{(i)^2}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{4} \beta \left(O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \\
&\quad - 2 \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Dessa forma, desprezando os termos de ordem superior a $1/m$, o Hamiltoniano transformado fica:

$$H' = \beta \{ m(\vec{r}) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \} \tag{4.30}$$

4.3 Transformação de Foldy-Wouthuysen com a Massa Dependente da Posição Não-Comutativa

Como vimos acima a teoria de Dirac pode ser descrita a partir da seguinte equação de autovalores

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}). \tag{4.31}$$

A fim de escrevermos a sua versão não-comutativa com MDP, é necessário substituir o produto ordinário pelo produto estrela, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m(\vec{r})] \star \psi(\vec{r}) &= E \star \psi(\vec{r}) \\
H_\theta \psi(\vec{r}) &= E \psi(\vec{r})
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde

$$H_\theta = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m(\vec{r}) + \frac{i}{2} \beta \theta^{ij} \partial_i m(\vec{r}) \partial_j$$

é o Hamiltoniano modificado por conta da não-comutatividade do espaço. É conveniente reescrever o Hamiltoniano H'_θ na forma

$$H_\theta = \beta m(\vec{r}) + O + \varepsilon \tag{4.33}$$

onde fizemos as identificações

$$\begin{aligned}
O &= \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \\
\varepsilon &= \frac{i}{2} \beta \theta^{ij} \partial_i m(\vec{r}) \partial_j = -\frac{1}{2} \beta \left(\theta^{ij} \partial_i m(\vec{r}) \right) p_j = -\frac{1}{4r} m' \beta \vec{L} \cdot \vec{\theta}.
\end{aligned}$$

Sendo $\partial_i m = \frac{dm}{dr} \frac{dr}{dx^i} = m' \frac{1}{r} x_i$.

A fim de obter o Hamiltoniano modificado H'_θ , procedemos da mesma forma como fizemos anteriormente, o que nos dá Assim

$$H'_\theta = H_\theta + i[S_1, H_\theta] + \frac{(i)^2}{2!}[S_1, [S_1, H_\theta]] + \dots \quad (4.34)$$

Usando a prescrição (4.23), podemos calcular os comutadores:

$$\begin{aligned} i[S_1, H_\theta] &= i \left[-\frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{m}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m}}, H_\theta \right] \\ &= -O + \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \varepsilon - \varepsilon \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

e novamente, desprezando os termos de ordem superior a $1/m$, temos

$$\begin{aligned} \frac{(i)^2}{2} [S_1, [S_1, H_\theta]] &= \frac{(i)^2}{2} \left[-\frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{m}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m}}, \left[-\frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{m}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m}}, H_\theta \right] \right] \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \left(-2O + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-2O + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \beta O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right\} \\ &= -\frac{\beta}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Com isso, H'_θ fica:

$$\begin{aligned} H'_\theta &= \beta \left\{ m + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} O + O \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \varepsilon - \varepsilon \frac{1}{\sqrt{m}} O \frac{1}{\sqrt{m}} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Agora substituindo $O = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ e $\varepsilon = \frac{i}{2} \beta \theta^{ij} \partial_i m \partial_j$, com $m = m(\vec{r})$, obtemos

$$\begin{aligned} H'_\theta &= \beta \left\{ m + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{i}{2} \beta \theta^{ij} \partial_i m \partial_j - \frac{i}{2} \beta \theta^{ij} \partial_i m \partial_j \frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

O Hamiltoniano acima pode ser subdividido em três termos

$$H'_\theta = \beta m + H_{\text{cinético}} + H_{NC}. \quad (4.39)$$

Os dois primeiros termos βm e $H_{\text{cinético}}$ possuem a interpretação física usual correspondendo à massa e à energia cinética, respectivamente. Já o terceiro termo advém da

não-comutatividade e constitui resultado original do presente trabalho. De (4.38) e (4.39),

$$\begin{aligned} H_{NC} &= \frac{i}{4} \beta \left[\frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \beta \theta^{ij} \partial_i m \partial_j - \beta \theta^{ij} \partial_i m \partial_j \frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right] \\ &= -\frac{i}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \partial_i m \partial_j + \partial_i m \partial_j \frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right]. \end{aligned}$$

Devido $\theta^{ij} = -\theta^{ji}$ temos

$$\theta^{ij} \partial_i m \partial_j \frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} = \theta^{ij} \partial_i m \frac{1}{\sqrt{m}} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \partial_j,$$

os outros dois termos vindos de $(\partial_j \frac{1}{\sqrt{m}})$ se anulam, daí

$$H_{NC} = -\frac{i}{4} \frac{\theta^{ij}}{\sqrt{m}} \left[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} (\partial_i m) + (\partial_i m) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \partial_j \right]. \quad (4.40)$$

Quando $\theta = 0$, nosso Hamiltoniano H'_θ se reduz a mesma expressão encontrada em [16] e é consequência do fato de $\vec{p}$ e m não comutarem.

5 Equação de Dirac Não-Comutativa com Massa Dependendo da Posição

Neste capítulo abordaremos a equação de Dirac no contexto de massa espacialmente dependente no espaço não-comutativo. Calcularemos a aproximação não relativística usando a transformação de Foldy-Wouthuysen e encontraremos as correções de energia devidas ao termo de massa modificado.

A equação de Dirac com massa dependendo da posição foi estudada inicialmente em física da matéria condensada [17], [18]. Sistemas quânticos com massa dependendo da posição constituem muitos modelos úteis para estudar vários problemas físicos. Em particular, eles são usados para estudar a densidade de energia em problemas de muitos corpos, determinando propriedades eletrônicas de heteroestruturas [19] de semicondutores e também descrevem propriedades de heterojunções e pontos quânticos. Além do mais, teorias em espaço não-comutativo tem despertado bastante interesse nos últimos anos.

A equação de Dirac com massa dependendo da equação é escrita como

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m(\vec{r})] \psi = E \psi, \quad (5.1)$$

onde $m(\vec{r})$ é a massa com dependência na posição $\vec{r}$.

Vimos no capítulo 3 que o produto de funções de variáveis NC é dado pelo produto estrela $(\star)$

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp\left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right] g(x) \approx f(x) g(x) + \frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_i f(x) \partial_j g(x) + O(\theta^2).$$

Além disso, a álgebra NC pode ser mapeada na álgebra comutativa de Heisenberg-Weyl através da transformação linear não canônica

$$(x, p) \mapsto (x', p'),$$

de tal forma que as novas coordenadas satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[x'^i, x'^j] = 0,$$

$$[p'^i, p'^j] = 0,$$

$$[x'^i, p'^j] = i\hbar\delta^{ij}.$$

Assim, em substituição ao produto estrela, fazemos uma mudança de coordenadas da seguinte forma (essa mudança recebe o nome de “Bopp shift”) [20]

$$x^i \mapsto \hat{x}^i - \frac{1}{2\hbar}\theta^{ij}\hat{p}^j$$

com $p^i = \hat{p}^i$.

Nesta dissertação, adotaremos para a massa variável $m(\vec{r})$ a seguinte expressão

$$m(\vec{r}) = m_0 + \frac{\lambda}{r} + K^2 r, \quad (5.2)$$

onde m_0 é a massa da partícula livre.

A massa variável acima contém um termo do tipo Coulomb, caracterizado pelo parâmetro λ , bem como um termo de confinamento radial, cuja magnitude é determinada pelo parâmetro K .

Escrevendo $m(\vec{r})$ no espaço não-comutativo pelo “Bopp Shift”, $m(\vec{r}) = m(\vec{r} - \frac{1}{2}\theta^{ij}p^j)$, temos

$$r = \sqrt{x^i x^i} \rightarrow r_{BS} = \sqrt{(x^i - \frac{1}{2}\theta^{ij}p^j)(x^i - \frac{1}{2}\theta^{ij}p^j)}. \quad (5.3)$$

É conveniente considerar as seguintes expansões em série de potências:

$$r_{BS} = r \left[1 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4} \vec{L} \cdot \vec{\theta} - \frac{1}{8} \theta^{ij} \theta^{jk} p^i p^k + O(\theta^3) \right) \right], \quad (5.4)$$

e

$$\frac{1}{r_{BS}} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4} \vec{L} \cdot \vec{\theta} - \frac{1}{8} \theta^{ij} \theta^{jk} p^i p^k + O(\theta^3) \right) \right], \quad (5.5)$$

onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular.

Sem perda de generalidade, vamos nos restringir ao caso em que $\theta = \theta_z$, $\theta_x = \theta_y = 0$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = L_z$ e desprezando os termos da ordem de θ^2 ou mais, temos a seguinte expressão para a massa dependente da posição em um espaço não-comutativo

$$m(\vec{r}) = m_0 + \frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta. \quad (5.6)$$

O Hamiltoniano de Dirac fica então:

$$H = H_0 + H_\theta \quad (5.7)$$

onde o Hamiltoniano H_0 é dado por

$$H_0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta \left(m_0 + \frac{\lambda}{r} + K^2 r \right) \quad (5.8)$$

e

$$H_\theta = \beta \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta \right] \quad (5.9)$$

é o Hamiltoniano θ -modificado.

5.1 Aproximação não-relativística do Hamiltoniano modificado

Utilizando a expressão (5.6) para a massa, temos para o Hamiltoniano θ -modificado

$$H_\theta = \beta m_0 + O + \varepsilon \quad (5.10)$$

com as seguintes abreviações

$$O = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \quad (5.11)$$

$$\varepsilon = \beta \left[\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta \right]. \quad (5.12)$$

Assim, o Hamiltoniano transformado H' fica, até termos de $(1/m_0)^3$:

$$H' = H_\theta + i[S, H_\theta] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, H_\theta]] + \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H_\theta]]] \quad (5.13)$$

Como já calculamos os dois primeiros comutadores da equação acima (equações 4.18 e 4.19, sendo que agora $H \rightarrow H_\theta$), precisamos calcular o último comutador e substituir no Hamiltoniano transformado. Então, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H_\theta]]] &= \frac{i}{3!} \left\{ \left(-\frac{i}{2m_0} \beta O \right) \left(-\frac{i}{2m_0} \beta O^2 - \frac{i}{2m_0^2} O^3 - \frac{1}{8m_0^2} [O, [O, \varepsilon]] \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{i}{2m_0} \beta O^2 - \frac{i}{2m_0^2} O^3 - \frac{1}{8m_0^2} [O, [O, \varepsilon]] \right) \left(-\frac{i}{2m_0} \beta O \right) \right\} \\ &= \frac{1}{6m_0^2} O^3 - \frac{1}{6m_0^3} \beta O^4 - \frac{1}{48m_0^3} \beta [O, [O, [O, \varepsilon]]]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Desse modo, juntamente com os resultados do capítulo anterior e fazendo algumas manipulações algébricas, chegamos a:

$$H' = \beta m_0 + \varepsilon + \frac{1}{2m_0}\beta O^2 - \frac{1}{3m_0^2}O^3 + \frac{1}{2m_0}\beta[O, \varepsilon] - \frac{1}{8m_0^2}[O, [O, \varepsilon]] - \frac{1}{8m_0^2}\beta O^4 - \frac{1}{48m_0^3}\beta[O, [O, [O, \varepsilon]]]. \quad (5.15)$$

É conveniente reescrever o Hamiltoniano transformado H' sob a forma:

$$\begin{aligned} H' &= \beta \left(m_0 + \frac{1}{2m_0}O^2 - \frac{1}{8m_0^2}O^4 \right) + \varepsilon - \frac{1}{8m_0^2}[O, [O, \varepsilon]] + \frac{1}{2m_0}\beta[O, \varepsilon] - \frac{1}{3m_0^2}O^3 \\ &\quad - \frac{1}{48m_0^3}\beta[O, [O, [O, \varepsilon]]] \\ &\equiv \beta m_0 + O' + \varepsilon', \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde O' e ε' são os novos operadores ímpar e par, respectivamente. A fim de eliminar os termos ímpares de H' , faremos uma segunda transformação através do operador:

$$S' = -\frac{i}{2m_0}\beta O' = -\frac{i}{2m_0}\beta \left(\frac{1}{2m_0}\beta[O, \varepsilon] - \frac{1}{3m_0}O^3 \right) \quad (5.17)$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} H'' &= e^{iS'} H' e^{-iS'} \\ &= H' + i[S', H'] + \frac{i^2}{2!}[S', [S', H']] + \frac{i^3}{3!}[S', [S', [S', H']]] \\ &= H' \left(-O' + \frac{1}{m_0}\beta O'^2 + \frac{1}{2m_0}\beta[O', \varepsilon'] \right) + \frac{1}{m_0}\beta O'^2 + \frac{1}{2m_0^2}\beta O'^3 - \frac{1}{8m_0^2}[O', [O', \varepsilon']] \\ &\quad + \frac{1}{6m_0^2}O'^3 - \frac{1}{6m_0^3}\beta O'^4 - \frac{1}{48m_0^3}\beta[O', [O', [O', \varepsilon']]] \\ &= \beta m_0 + \varepsilon' + \frac{1}{2m_0}\beta[O', \varepsilon'] - \frac{1}{3m_0^2}O'^3. \end{aligned} \quad (5.18)$$

O termo proporcional a O'^3 contém grandes potências de $(1/m_0)^2$ e, portanto, pode ser negligenciado. Então H'' é dado por

$$H'' = \beta m_0 + \varepsilon' + \frac{1}{2m_0}[O', \varepsilon'] = \beta m_0 + \varepsilon' + O'', \quad (5.19)$$

onde O'' é da ordem de $(1/m_0)^2$. Para eliminar O'' aplicamos uma terceira transformação

$$H''' = e^{iS''} H'' e^{-iS''} \quad (5.20)$$

com $S'' = -\frac{i}{2m_0}\beta O''$. Finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned} H''' &\simeq \beta m_0 + \varepsilon' \\ &= \beta \left(m_0 + \frac{1}{2m_0}O^2 - \frac{1}{8m_0^3}O^4 \right) + \varepsilon - \frac{1}{8m_0}[O, [O, \varepsilon]] \\ &\equiv H_\Phi. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Assim, substituindo (5.11) e (5.12) e inserindo os valores dos comutadores em (5.21), temos

$$\begin{aligned} H''' &= \beta \left(m_0 + \frac{1}{2m_0}p^2 - \frac{1}{8m_0^3}p^4 \right) + \frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta \\ &\quad - \frac{1}{8m_0^2} \left\{ \vec{\nabla} \left(\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta \right) + 2\vec{\Sigma} \left(\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta \right) \times \vec{p} \right\}, \\ &= \beta \left(m_0 + \frac{1}{2m_0}p^2 - \frac{1}{8m_0^3}p^4 \right) + T - \frac{1}{8m_0^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) - \frac{1}{4m_0^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{\nabla} T \times \vec{p}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde $T = \frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta$.

É interessante notar que, quando $\theta = 0$ e $K^2 = 0$ temos um Hamiltoniano análogo ao Hamiltoniano da representação de FW na presença de campos externos com um acoplamento mínimo $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ (e sendo a carga do elétron e $\vec{A}$ o potencial vetor eletromagnético):

$$\hat{H} = \beta \left(m_0 + \frac{1}{2m_0}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{1}{8m_0^3}p^4 \right) + e\hat{\Phi} - \frac{1}{2m_0} \beta (\vec{\Sigma} \cdot \vec{B}) - \frac{e}{4m_0^2} \vec{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{p}) - \frac{e}{8m_0^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \quad (5.23)$$

com $\vec{E} = -\vec{\nabla} \hat{\Phi}$ sendo o campo elétrico, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ o campo magnético e considerando $\hbar = c = 1$.

Podemos fazer uma analogia ao átomo de Hidrogênio em que o potencial é escrito no espaço não-comutativo[21]. Para o átomo de Hidrogênio, a presença do termo não-comutativo remove as degenerescências dos níveis de energia, permitindo um “split” em subníveis não degenerados. O Hamiltoniano, no limite não relativístico, do átomo de hidrogênio implica que a não comutatividade desempenha o papel do campo magnético (efeito Zeeman) e do spin (do próton ou núcleon) assim, para um elétron, a não-comutatividade do espaço equivale a uma interação elétron-núcleon.

5.2 Correções de energia

Como o parâmetro θ pode ser tomado muito pequeno, vamos estudar os efeitos da não-comutatividade usando teoria de perturbação. As correções de energia ΔE^1 de primeira ordem no estado $|\psi\rangle$ são dadas por:

$$\langle \psi | H_\theta | \psi \rangle = \int d^3x \psi^* H_\theta \psi. \quad (5.24)$$

A função de onda ψ em coordenadas esféricas pode ser escrita em termos dos bi-espinores como:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \phi(r, \theta, \varphi) \\ \chi(r, \theta, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} g(r) \Omega_{jm_j}^k(\theta, \varphi) \\ if(r) \Omega_{jm_j}^{-k}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

A parte angular da função de onda é dada por

$$\Omega_{jm_j}^{\pm k}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{bmatrix} \sqrt{l \pm m_j + \frac{1}{2}} Y_{jm_j}^k(\theta, \varphi) \\ \pm \sqrt{l \mp m_j + \frac{1}{2}} Y_{jm_j}^{-k}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}$$

onde $Y_{jm_j}^{\pm k}(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos com os valores $j = l \pm \frac{1}{2}$ e $-j \leq m_j \leq +j$ [1]. Denotando por J o operador momento angular, J_z sua componente na direção Oz , $\hat{k}$ o operador paridade e σ_i as matrizes de Pauli, pode-se mostrar que os harmônicos esféricos satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} J^2 Y_{jm_j}^k(\theta, \varphi) &= j(j+1) Y_{jm_j}^k(\theta, \varphi), & j &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ J_z Y_{jm_j}^k(\theta, \varphi) &= m_j Y_{jm_j}^k(\theta, \varphi), \\ \hat{k} Y_{jm_j}^{\pm k}(\theta, \varphi) &= \mp Y_{jm_j}^{\pm k}(\theta, \varphi), & |k| &= j + \frac{1}{2} \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) Y_{jm_j}^{\pm k}(\theta, \varphi) &= -Y_{jm_j}^{\pm k}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde $\hat{r}$ é o vetor unitário real e tomamos $\hbar = 1$.

Aplicando ψ a (5.1) e usando as expressões para α e β escritas no capítulo 2, temos:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \vec{p} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} m_0 + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \left[\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta \right] \right\} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} g(r) \Omega_{jm_j}^k(\theta, \varphi) \\ if(r) \Omega_{jm_j}^{-k}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \\ = E \begin{bmatrix} g(r) \Omega_{jm_j}^k(\theta, \varphi) \\ if(r) \Omega_{jm_j}^{-k}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Assim,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \frac{1}{r} g \Omega_{jm_j}^k + m_0 + \left[\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) \right] \frac{i}{r} f \Omega_{jm_j}^{-k} = E \frac{i}{r} f \Omega_{jm_j}^{-k} \quad (5.28)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \frac{i}{r} f \Omega_{jm_j}^{-k} - m_0 - \left[\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) \right] \frac{1}{r} g \Omega_{jm_j}^k = E \frac{1}{r} g \Omega_{jm_j}^k \quad (5.29)$$

Usando a identidade [22]

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \frac{1}{r} h(r) \Omega_{jm_j}^k(\theta, \varphi) = i \left(\frac{d}{dr} + \frac{k+1}{r} \right) h(r) \Omega_{jm_j}^{-k}$$

com

$$k = \begin{cases} -(l+1), & \text{para } l = j - \frac{1}{2} \\ l, & \text{para } l = j + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.30)$$

temos o conjunto de equações para as funções radiais f e g :

$$\begin{cases} -\frac{df}{dr} + \frac{k-1}{r} f = \{E - m_0 - \left[\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta\right]\} g \\ \frac{dg}{dr} + \frac{k+1}{r} g = \{E + m_0 + \left[\frac{\lambda}{r} + K^2 r + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta\right]\} f \end{cases} \quad (5.31)$$

Como estamos considerando θ muito pequeno, a equação acima se reduz:

$$\begin{cases} -\frac{df}{dr} + \frac{k-1}{r} f = \{E - m_0 - \left(\frac{\lambda}{r} + K^2 r \right)\} g \\ \frac{dg}{dr} + \frac{k+1}{r} g = \{E + m_0 + \left(\frac{\lambda}{r} + K^2 r \right)\} f \end{cases} \quad (5.32)$$

O sistema de equações diferenciais acima é geral para qualquer valor de θ . Não existe solução analítica conhecida para as funções radiais acima, para encontrá-las é necessário fazer uso de métodos numéricos. Porém, não estamos interessados em fazer uma abordagem dessa forma. Vamos fazer uma análise do comportamento das soluções de f e g considerando $\theta = 0$, tratando o termo NC como uma perturbação. Dessa forma, o sistema de equações das funções radiais se torna:

$$\begin{cases} -\frac{df}{dr} + \frac{k-1}{r} f = \{E - m_0 - V(r)\} g \\ \frac{dg}{dr} + \frac{k+1}{r} g = \{E + m_0 + V(r)\} f \end{cases}$$

Neste trabalho nos restringiremos às soluções das funções radiais apenas para o caso do potencial tipo-Coulomb, já que a presença do termo de confinamento na equação Dirac nos leva a um sistema que não tem solução analítica. Isso implica que precisamos de métodos numéricos para determinar as soluções nesse caso. Devido a esta dificuldade, vamos fazer uma análise apenas no caso da massa tendo simetria esférica.

5.2.1 Soluções para $\lambda \neq 0$ e $K = 0$ (ou r muito pequeno)

Para resolvermos de forma analítica tal sistema de equações escrevemos (5.32) como:

$$\begin{bmatrix} \frac{df}{dr} \\ \frac{dg}{dr} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

sendo A uma matriz dada por

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1+k}{r} & E - m_0 - \frac{\lambda}{r} \\ E + m_0 + \frac{\lambda}{r} & -\frac{1-k}{r} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Para termos uma forma mais simples do sistema de equações, vamos fazer as seguintes transformações:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dr} \\ \frac{dv_2}{dr} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

de tal forma que $\tilde{A} = BAB^{-1}$. Podemos escolher a matriz B como:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & \nu - k \\ \nu - k & \lambda \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

com $\nu = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$. A matriz $\tilde{A}$ é então:

$$\tilde{A} = - \begin{bmatrix} \frac{E\lambda}{\nu} - \frac{1}{r}(1+\nu) & m_0 + \frac{k}{\nu}E \\ m_0 - \frac{k}{\nu}E & \frac{1}{r}(1-\nu) - \frac{E\lambda}{\nu} \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Com isso, ficamos agora com o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dr} = \left(-\frac{1+\nu}{r} + \frac{E\lambda}{\nu}\right)v_1 + \left(m_0 + \frac{k}{\nu}E\right)v_2 \\ \frac{dv_2}{dr} = \left(m_0 - \frac{k}{\nu}E\right)v_1 + \left(\frac{\nu-1}{r} - \frac{E\lambda}{\nu}\right)v_2 \end{cases} \quad (5.39)$$

Escrevendo o sistema acima em termos da função $v_1(r)$, encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{d^2v_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_1}{dr} + \frac{(E^2 - m_0^2)r^2 + 2E\lambda r - \nu(\nu+1)}{r^2} v_1 = 0 \quad (5.40)$$

As soluções da equação diferencial acima são dadas em termos dos polinômios de Laguerre $L_{n-1}^{2\nu+1}(x)$:

$$v_1 = Ce^{-\frac{1}{2}x} x^\nu L_{n-1}^{2\nu+1}(x), \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.41)$$

$$v_1 = 0, \quad \text{para} \quad n = 0, \quad (5.42)$$

onde adotamos $x = 2\sqrt{m_0^2 - E^2}r$ e

$$v_2 = De^{-\frac{1}{2}x} x^{\nu-1} L_n^{2\nu+1}(x) \quad (5.43)$$

onde C e D são constantes que satisfazem a relação $C = \frac{a}{Ek - m_0\nu}D$. Finalmente, com todo esse arcabouço matemático escrevemos as soluções das equações radiais da equação de Dirac:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} &= \frac{a^2}{\nu} \sqrt{\frac{(Ek - m_0\nu)n!}{m_0\lambda(k - \nu)\Gamma(n + 2\nu)}} e^{-\frac{1}{2}x} x^{\nu-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} f_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + f_2 L_n^{2\nu-1}(x) \\ g_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + g_2 L_n^{2\nu-1}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Sendo $E = \frac{m_0(n+\nu)}{\sqrt{\lambda^2 + (n+\nu)^2}}$, $n = 1, 2, \dots$

E as funções na expressão encontrada acima são $f_1 = \frac{a\lambda}{Ek - m_0\nu}$, $f_2 = k - \nu$, $g_1 = \frac{a(k-\nu)}{Ek - m_0\nu}$ e $g_2 = \lambda$.

5.3 Correções de energia devido à presença do termo de massa modificado

Agora, para obtermos os níveis de energia do Hamiltoniano não-comutativo, por teoria de perturbação precisamos calcular:

$$\langle \psi | H_\theta | \psi \rangle = \int d^3x \psi^* H_\theta \psi \quad (5.45)$$

onde a perturbação H_θ é dada por

$$H_\theta = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} - \frac{K^2}{r} \right) L_z \theta \right] \quad (5.46)$$

Para $K = 0$:

$$H_\theta = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{r^3} \right) L_z \theta \right]. \quad (5.47)$$

Com isso, em primeira ordem temos:

$$\begin{aligned}\Delta E_{n,l}^1 &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^\infty \frac{1}{r} dr [\psi^\dagger(L_z\theta)\psi] \\ &= \frac{\lambda}{2} \varrho \Theta\end{aligned}\quad (5.48)$$

para simplificar a equação acima, representamos

$$\varrho = \int_0^\infty \frac{1}{r} (f^2 + g^2) dr \quad (5.49)$$

$$\Theta = \int_0^{4\pi} d\Omega \Omega_{jm_j}^{\dagger k} (L_z\theta) \Omega_{jm_j}^k \quad (5.50)$$

onde $\langle S_z \rangle = \pm \frac{\hbar m_j}{2l+1}$ e $\langle L_z \rangle = \langle J_z - S_z \rangle = \hbar m_j (1 \mp \frac{1}{2l+1})$. Precisamos ainda, usar algumas propriedades dos polinômios de Laguerre associados, a saber

$$\begin{aligned}L_n^\nu(x) &= \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+1)} F(-n; \nu+1; x), \\ \int_0^\infty L_n^\beta(x) L_s^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx &= \frac{\Gamma(n-s+\beta-\alpha)\Gamma(s+\alpha+1)}{\Gamma(n-s+1)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(s+1)}\end{aligned}\quad (5.51)$$

e as relações de recorrência:

$$L_n^{\alpha+1} = \frac{1}{x} [(n+\alpha+1)L_n^\alpha - (n+1)L_{n+1}^\alpha] \quad (5.52)$$

$$L_n^{\alpha-1} = L_n^\alpha - L_{n-1}^\alpha \quad (5.53)$$

com $F(-n; \nu+1; x)$ sendo as funções hipergeométricas confluentes [23]. Dessa forma, temos as soluções para as funções radiais, que são bastante conhecidas na literatura [24], e obtemos

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{a^3}{2m_0\lambda^2\nu^2} \times \\ &\times \left[\frac{k^2(n+\nu)}{\nu(4\nu^2-1)(\nu^2-1)} \left((n+\nu)(\nu^2+1) - \frac{3m_0\lambda}{ak}\nu^2 \right) + \lambda^2(-n+2\nu) \right]\end{aligned}\quad (5.54)$$

onde $n(n+2\nu) = \frac{1}{a^2}(Ek - m_0\nu)(Ek + m_0\nu)$ e $\frac{a}{\lambda}(n+\nu) = E$. E

$$\begin{aligned}\Theta &= \theta \hbar m_j (1 \mp \frac{1}{2l+1}) \\ &= \theta m_j (1 \mp \frac{1}{2l+1}) \quad \hbar = 1\end{aligned}\quad (5.55)$$

Portanto, as correções de energia são:

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l}^1 = & \frac{\theta\lambda}{2} \frac{a^3}{2m_0\lambda^2\nu^2} \times \\ & \times \left[\frac{k^2(n+\nu)}{\nu(4\nu^2-1)(\nu^2-1)} \left((n+\nu)(\nu^2+1) - \frac{3m_0\lambda}{ak} \nu^2 \right) + \lambda^2(-n+2\nu) \right] m_j \left(1 \mp \frac{1}{2l+1} \right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Podemos notar que $n(n+2\nu) = \frac{1}{a^2}(Ek-m\nu)(Ek+m\nu)$ e $\frac{a}{\lambda}(n+\nu) = E$. Vamos fazer um análise das possíveis transições entre os níveis $N_{l,j,m_j} \rightarrow N_{l,j,m'_j}$. As regras de seleção são $\Delta l = 0$ e $\Delta m_j = 0, \pm 1$, e $N = n + |k|$ descreve o número quântico principal.

Para $(n=1, j=\frac{1}{2}, k=1, m_j=\pm\frac{1}{2})$ temos o nível $2P_{1/2}$. As correções angulares correspondentes são dados por [21]

$$\Theta_{2P_{1/2}} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

e seus autovalores são: $\Lambda_{2P_{1/2}} = \pm \frac{2}{3} |\theta|$. As correções de energia do nível $2P_{1/2}$ são então:

$$\Delta_{2P_{1/2}} = \frac{\lambda}{2} \varrho_{2P_{1/2}} \lambda_{2P_{1/2}}. \quad (5.58)$$

Para $(n=0, j=\frac{3}{2}, k=2, m_j=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2})$ temos o nível $2P_{3/2}$.

$$\Theta_{2P_{3/2}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e autovalores $\Lambda_{2P_{3/2}} = \pm |\theta|, \pm \frac{2}{3} |\theta|$. Assim as correções de energia para o nível $2P_{3/2}$ são:

$$\Delta_{2P_{3/2}} = \frac{\lambda}{2} \varrho_{2P_{3/2}} \lambda_{2P_{3/2}}. \quad (5.60)$$

Dessa forma, para obtermos uma estimativa do valor de θ precisamos ter o valor do parâmetro λ . Se nós compararmos o valor desse parâmetro com o valor da carga elétrica, teremos a estimativa para o limite de θ

$$\theta \lesssim (4GeV)^{-2}$$

para (5.58) e

$$\theta \lesssim (2GeV)^{-2}$$

para (5.60).

Nosso resultado é análogo ao átomo de Hidrogênio a menos do parâmetro λ .

6 Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos a equação de Dirac com massa dependente da posição num espaço não-comutativo.

Os capítulos iniciais deste trabalho são destinados a uma revisão do que há na literatura sobre equação de Dirac e espaços não-comutativos. Esses assuntos são muito importantes para nosso entendimento e necessários para termos uma base fundamental, nos proporcionando uma compreensão de diversas situações e aplicações.

No capítulo 2 fizemos uma revisão da equação de Dirac, mostrando sua relevância na mecânica quântica relativística. Vimos que essa equação fornece informações úteis para podermos estudar problemas que envolvem partículas de spin-1/2, como os elétrons, por exemplo.

No terceiro capítulo introduzimos um assunto bastante rico e atual: a física em um espaço-tempo não-comutativo. Ela tem despertado o interesse tanto em teoria de campos, como em outras áreas da física. Mostramos que a quantização de Weyl fornece uma correspondência entre as álgebras dos campos e operadores gerados por uma álgebra não-comutativa.

Em nossa primeira situação analisada no capítulo 4, encontramos o limite não-relativístico do Hamiltoniano de Dirac no cenário em que consideramos a massa dependente da posição no espaço não-comutativo. Usando a transformação de Foldy-Wouthuysen obtemos um termo adicional referente à não-comutatividade do espaço. Esse termo está ausente quando consideramos o espaço ordinário comutativo ($\theta \rightarrow 0$).

Dedicamos o quinto capítulo à investigação da massa dependente da posição sob a forma de um potencial tipo-Coulomb (proporcional a $1/r$) somado a um termo confinante (proporcional a r), onde inserimos a não-comutatividade dessas coordenadas por um “shift”. Fazendo uma aproximação não-relativística, através da representação FW, do Hamiltoniano de Dirac θ -modificado encontramos um Hamiltoniano análogo a um Hamiltoniano não-relativístico de uma partícula submetida a uma campo elétrico externo com

acoplamento mínimo. Para o átomo de Hidrogênio, o termo devido a não-comutatividade do espaço desempenha o papel do campo magnético (efeito Zeeman) e do spin (do próton ou nêutron), o que implica que em uma interação elétron-nêutron. Além disso, esse termo remove as degenerescências dos níveis de energia, permitindo um “split” em subníveis não degenerados.

Na segunda parte do capítulo 5 calculamos as correções de energia, usando teoria de perturbação, devido à presença do termo não-comutativo no Hamiltoniano de Dirac com massa dependendo da posição, sob a forma (5.6). Com isso, usando apenas a contribuição de uma distribuição esférica de massa, pudemos chegar a uma expressão idêntica à expressão para o átomo de Hidrogênio no contexto de não-comutatividade. Essas correções que encontramos são dadas em termos do parâmetro λ . Se esse parâmetro tiver valor igual ao valor do quadrado da carga elétrica, chegamos aos mesmos resultados das estimativas de $|\theta|$ para os níveis $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$.

Como perspectivas para estudos posteriores, tendo como base nosso trabalho, desejamos:

1. Resolver, usando métodos numéricos, a equação de Dirac para as funções radiais considerando a contribuição do potencial de confinamento radial em coordenadas não-comutativas;
2. Estender o cenário de espaço não-comutativo a outros sistemas físicos onde a massa depende da posição. Em especial, o caso em que podemos escrever

$$M(r) = m_0(1 + \eta \tanh r),$$

com η sendo um parâmetro positivo muito pequeno.

3. Considerar nesse contexto, não-comutatividade do espaço de fase;
4. Aplicar o mapa de Seiberg-Witten no gauge A_μ ;
5. Estudar não-comutatividade de spins;
6. Estender essas análises para outros contextos, como o de mundo branas e sistemas com violação da simetria de Lorentz.

APÊNDICE A – Propriedades das matrizes de Dirac

Neste apêndice, veremos de forma explícita como são as matrizes de Dirac e quais as propriedades que elas obedecem.

A.1 Forma das matrizes de Dirac

Na representação de Dira-Pauli, vimos que estas matrizes são 4×4 . A primeira matriz γ pode ser escrita como

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde I é matriz identidade 2×2 dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz γ^0 é, explicitamente

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

As matrizes de Dirac são escritas em termos das matrizes de Pauli da seguinte forma

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, na representação de Dirac-Pauli temos

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

então

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Explicitamente, por exemplo:

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

As matrizes de Dirac também podem ser escritas usando a chamada “representação chiral”. Neste caso [1],

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Propriedades das matrizes de Dirac

Vamos agora definir uma outra matriz, chamada em alguns livros, por exemplo [8], de “misteriosa” matriz γ^5 :

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.7})$$

Ela é Hermitiana $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ e seu quadrado é a matriz identidade $(\gamma^5)^2 = I$. Na representação chiral essa matriz pode ser escrita como

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

porém na representação de Dirac podemos escrevê-la como

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

é interessante notar que essas matrizes têm traço nulo. Podemos concluir que, dessas matrizes, podemos obter $(\gamma^\mu)^2 = I$. Portanto,

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4I. \quad (\text{A.10})$$

Mostrando isso forma explícita, vem que

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma_\mu &= \gamma^1\gamma_1 + \gamma^2\gamma_2 + \gamma^3\gamma_3 + \gamma^4\gamma_4 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Logo, teremos a relação

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{A.12})$$

Referências Bibliográficas

- [1] GREINER, W.; BROMLEY, D. *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. Springer, 2000. ISBN 9783540674573. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=2DAInxwvIHYC>>.
- [2] RYDER, L. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521478144. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=nnuW_kVJ500C>.
- [3] WEYL-WIGNER-MOYAL formulation of a Dirac quantized constrained system. *Physics Letters A*, volume = 269, number = 56, pages = 277 - 280, year = 2000, note = , issn = 0375-9601, doi = 10.1016/S0375-9601(00)00275-9, url = <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960100002759>, author = Domingo J Louis-Martinez,.
- [4] WORONOWICZ, S. L. Twisted SU(2) group. An example of a noncommutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, v. 1, p. 117–181, 1987.
- [5] DRINFELD, V. G. Quantum groups. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 e 2, p. 798–820, 1986.
- [6] VENEZIANO, G. A stringy nature needs just two constants. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 2, n. 3, p. 199, 1986. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/2/i=3/a=006>>.
- [7] Seiberg, N.; Witten, E. String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, v. 9, p. 32, set. 1999.
- [8] SCHWEBER, S. S. *An introduction to relativistic quantum field theory*. [S.l.: s.n.], 1961.
- [9] MACHADO, A.; PLEITEZ, V.; TIJERO, M. Usando a antimateria na medicina moderna. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 28, p. 407 – 416, 00 2006. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<http://www.scielo.br>>.
- [10] CONNES, A. *Noncommutative Geometry*. 1994.
- [11] Szabo, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rep.*, v. 378, p. 207–299, maio 2003.
- [12] DOUGLAS, M.; NEKRASOV, N. Noncommutative field theory. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, p. 977–1029, out. 2001.
- [13] HILLERY, M. et al. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Physics Reports*, v. 106, n. 3, p. 121 – 167, 1984. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157384901601>>.

- [14] Aschieri, P. et al. Twisted Gauge Theories. *Letters in Mathematical Physics*, v. 78, p. 61–71, out. 2006.
- [15] FOLDY, L. L.; WOUTHUYSEN, S. A. On the dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 78, p. 29–36, Apr 1950. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.78.29>>.
- [16] CAVALCANTE, F. S. A. et al. Form of the quantum kinetic-energy operator with spatially varying effective mass. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 55, p. 1326–1328, Jan 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.55.1326>>.
- [17] KOHN, W.; LUTTINGER, J. M. Quantum theory of electrical transport phenomena. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 108, p. 590–611, Nov 1957. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.590>>.
- [18] WANNIER, G. H. On the energy band structure of insulators. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 76, p. 438–439, Aug 1949. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.76.438>>.
- [19] BENDANIEL, D. J.; DUKE, C. B. Space-charge effects on electron tunneling. *Phys. Rev.*, v. 152, p. 683–692, Dec 1966. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.152.683>>.
- [20] Bertolami, O.; Queiroz, R. Phase-space noncommutativity and the Dirac equation. *Physics Letters A*, v. 375, p. 4116–4119, nov. 2011.
- [21] Adorno, T. C. et al. Dirac equation in noncommutative space for hydrogen atom. *Physics Letters B*, v. 682, p. 235–239, nov. 2009.
- [22] BJORKEN; DRELL. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.: s.n.], 1964.
- [23] ARFKEN, G. B.; WEBER, J. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.: s.n.], 2005.
- [24] Khodja, L.; Zaim, S. New treatment of the noncommutative dirac equation with a coulomb potential. *ArXiv e-prints*, out. 2011.