

Vagner H. L. Bessa

**Osciladores Log-Periódicos e tipo
Caldirola-Kanai**

Fortaleza

17 de fevereiro de 2012

Vagner H. L. Bessa

Osciladores Log-Periódicos e tipo Caldirola-Kanai

Dissertação submetida à Coordenação do
Curso de Pós-Graduação em Física, da Uni-
versidade Federal do Ceará, como requi-
sito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física

Orientador:

Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

17 de fevereiro de 2012

V465o

Bessa, Vagner Henrique Loiola

Osciladores Log-periódicos e Tipo Caldirola-Kanai / Vagner Henrique Loiola Bessa. - Fortaleza, 2012.

66 f.: il. color., enc.; 30cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2012.

Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.

1. Mecânica Quântica. 2. Física Matemática. 3. Mecânica I. Título.

CDD 530.12

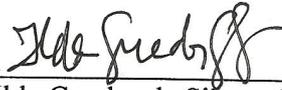
Vagner Henrique Loiola Bessa

Osciladores log-periódicos e tipo Caldirola-Kanai

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada em 24/02/2012

BANCA EXAMINADORA



Dr. Ilde Guedes da Silva - Orientador
UFC



Dr. Murilo Pereira de Almeida
UFC



Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho
UFPB

*À minha família
e
Amigos*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao professor *Ildes Guedes da Silva* pela sua orientação, que não deixou nem um pouco a desejar, durante minha graduação e mestrado. Não considero este trabalho só meu, de forma que agradeço a todos os professores do Departamento de Física da UFC pelas discussões e trocas de ideias que foram essenciais para o progresso de desenvolvimento desse meu trabalho. Agradeço também aos alunos e amigos do curso de graduação e pós-graduação: *Daniel Gomes, Davi Dantas, Diego Rabelo, Diego Ximenes, Diego Lucena, Heitor Credidio Hygor Piaget, Leandro Jader, Levi Leite, Rafael Alencar, Saulo Dantas* e *Saulo-Davi*, por todo o apoio e incentivo durante o período de estudos no Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará. Gostaria de agradecer também à minha família, na figura de *Maria Auricélia Silva Loiola* (minha mãe) e minha avó *Maria Elisa*, às quais devo o que sou hoje. À minha estimada *Dayane de Souza* e sua família, por todo o apoio e carinho que me dedicam em todos os momentos, difíceis e felizes. Finalmente, mas não menos importante, a todos os funcionários do Departamento de Física da UFC e à CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesse trabalho apresentamos as soluções clássicas e quânticas de duas classes de osciladores harmônicos dependentes de tempo, a saber: (a) o oscilador log-periódico e (b) o oscilador tipo Caldirola-Kanai. Para a classe (a) estudamos os seguintes osciladores: (I) $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$, (II) $m(t) = m_0$ e (III) $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$. Nesses três casos $\omega(t) = \omega_0 \frac{t_0}{t}$. Para a classe (b) estudamos o oscilador (IV) de Caldirola-Kanai onde $\omega(t) = \omega_0$ e $m(t) = m_0 \text{Exp}(\gamma t)$ e osciladores com $\omega(t) = \omega_0$ e $m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^\alpha$, para (V) $\alpha = 2$ e (VI) $\alpha = 4$.

Para obter as soluções clássicas de cada oscilador resolvemos suas respectivas equações de movimento e analisamos o comportamento de $q(t)$, $p(t)$ assim como do diagrama de fase $q(t)$ vs $p(t)$. Para obter as soluções quânticas usamos uma transformação unitária e o método dos invariantes quânticos de Lewis e Riesenfeld. A função de onda obtida é escrita em termos de uma função ρ , que é solução da equação de Milne-Pinney. Ainda, para cada sistema resolvemos a respectiva equação de Milne-Pinney e discutimos como o produto da incerteza evolui no tempo.

Abstract

In this work we present the classical and quantum solutions of two classes of time-dependent harmonic oscillators, namely: (a) the log-periodic and (b) the Caldirola-Kanai-type oscillators. For class (a) we study the following oscillators: (I) $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$, (II) $m(t) = m_0$ and (III) $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$. In all three cases $\omega(t) = \omega_0 \frac{t_0}{t}$. For class (b) we study the Caldirola-Kanai oscillator (IV) where $\omega(t) = \omega_0$ and $m(t) = m_0 \exp(\gamma t)$ and the oscillator with $\omega(t) = \omega_0$ and $m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^\alpha$, for $\alpha = 2$ (V) and $\alpha = 4$ (VI).

To obtain the classical solution for each oscillator we solve the respective equation of motion and analyze the behavior of $q(t)$, $p(t)$ as well as the phase diagram $q(t)$ vs $p(t)$. To obtain the quantum solutions we use a unitary transformation and the Lewis and Riesenfeld quantum invariant method. The wave functions obtained are written in terms of a function (ρ) which is solution of the Milne-Pinney equation. Furthermore, for each system we solve the respective Milne-Pinney equation and discuss how the uncertainty product evolves with time.

Sumário

Lista de Figuras

INTRODUÇÃO	p. 11
1 O MÉTODO DE LEWIS-RIESENFIELD	p. 15
1.1 Intordução	p. 15
1.2 Oscilador Harmônico com massa e frequência dependentes de tempo . .	p. 16
1.3 Médias e Princípio da Incerteza	p. 20
2 OSCILADORES LOG-PERIÓDICOS	p. 21
2.1 Introdução	p. 21
2.2 Soluções clássicas	p. 21
2.2.1 Oscilador (I): $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$	p. 21
2.2.2 Oscilador (II): $m(t) = m_0$	p. 24
2.2.3 Oscilador (III): $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$	p. 26
2.3 Soluções quânticas	p. 28
2.3.1 Oscilador (I): $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$	p. 30
2.3.2 Oscilador (II): $m(t) = m_0$	p. 33
2.3.3 Oscilador (III): $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$	p. 34
3 OSCILADORES DO TIPO CALDIROLA-KANAI	p. 37
3.1 Introdução	p. 37
3.2 Soluções clássicas	p. 38

3.2.1	Oscilador (IV): $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$	p. 38
3.2.2	Oscilador (V): $m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)^2$	p. 40
3.2.3	Oscilador (VI): $m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)^2$	p. 42
3.3	Soluções quânticas	p. 44
3.3.1	Oscilador (IV): $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$	p. 44
3.3.2	Oscilador (V): $m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)^2$	p. 45
3.3.3	Oscilador (VI): $m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)^2$	p. 47
CONCLUSÃO		p. 50
Apêndice A – Autoestados do operador Invariante e as Soluções da Equação de Schrödinger		p. 53
Apêndice B – Operador Invariante para o Oscilador Harmônico com massa e frequência dependentes de tempo		p. 57
Apêndice C – Solução da equação de autovalores do operador $I(t)$ para o oscilador harmônico dependente do tempo		p. 60
Referências		p. 63
Índice Remissivo		p. 65

Lista de Figuras

- 1 Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (I) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$ p. 23
- 2 Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (I) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$ p. 23
- 3 Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (II) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$ p. 25
- 4 Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (II) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$ p. 26
- 5 Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (III) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$ p. 27
- 6 Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (III) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$ p. 28
- 7 Gráfico de $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ para os osciladores I (normal), II e III (pontilhados) para os valores das constantes $\omega_0 = 1$, $m_0 = 1$ e $t_0 = 1$ p. 36
- 8 Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (IV) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$ e $m_0 = 1$ p. 39
- 9 Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (IV) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$ e $m_0 = 1$ p. 39

10	Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (V) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$	p. 41
11	Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (V) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$	p. 42
12	Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (VI) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$	p. 43
13	Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (V) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$	p. 44
14	Gráfico de $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ para os osciladores IV (normal), V (tracejado) e VI (pontilhado) para os valores das constantes $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$, $m_0 = 1$ e $t_0 = 2\pi$	p. 49

INTRODUÇÃO

O estudo de oscilações é encontrado em inúmeros trabalhos publicados na literatura científica. Uma razão para isso é a frequência com que este fenômeno ocorre na natureza. Seja no pêndulo de um relógio do século XVII ou no movimento dos astros celestes, o movimento oscilatório é bastante comum em sistemas físicos. As oscilações cósmicas, na recente Teoria Cosmológica de estado quasi-estacionário [1], o movimento dos planetas, as oscilações das moléculas de silício no relógio de pulso, os modos de vibrações dos átomos em redes cristalinas, as variações dos preços de ações no mercado financeiro, ou o crescimento populacional das espécies de seres vivos são exemplos de fenômenos que envolvem oscilações. O oscilador harmônico simples é o mais estudado dentre os sistemas caracterizado por um período de repetição de movimento. Isso é devido ao fato de que todo sistema oscilatório pode ser aproximado por um oscilador harmônico simples, quando considera-se pequenas amplitudes de oscilação.

Nas últimas décadas, o número de trabalhos envolvendo sistemas quânticos descritos por Hamiltonianas dependentes do tempo (sistemas não-conservativos) tem crescido bastante. Existem várias razões para isso. Uma destas razões está no fato de que tais sistemas fazem parte de uma gama de problemas ainda não completamente resolvidos. A variedade dos métodos de solução desses sistemas, o estudo da correspondência entre as descrições clássica e quântica, o interesse acadêmico e a sua relevância física são também enumerados como motivações para o estudo e análise de sistemas não conservativos, com Hamiltonianas dependentes do tempo.

Dentre as classes de sistemas dependentes do tempo, o oscilador harmônico com massa e frequência dependentes de tempo é o sistema ao qual se dá mais atenção. O motivo deve-se ao fato de se tratar de um problema com solução exata e de possuir conexões com várias outras áreas da física, tais como, ótica quântica [2, 3], teoria de campos[4] e a teoria quântica da dissipação[5, 6]. Alguns dos métodos conhecidos para se resolver problemas quânticos envolvendo Hamiltonianas dependentes do tempo são: a teoria da perturbação dependente do tempo, representação de interação, série de Dyson e o método da aproximação adiabática [7], que são formas aproximadas de se obter a solução da equação de Schrödinger. Vários autores obtiveram a função de onda de osciladores dependentes do

tempo por usarem métodos como integrais de Feynman, transformações canônicas e/ou unitárias, álgebra de Lie[8] e o método dos invariantes quânticos [9, 10]. Dentre esses, o que fornece uma solução exata para a equação de Schrödinger é o método dos invariantes quânticos, também conhecido como método de Lewis-Riesenfeld (LR), que relaciona as autofunções de um operador, chamado de invariante(constante de movimento), com a solução da equação de Schrödinger. Lewis e Riesenfeld desenvolveram e aplicaram esse método ao oscilador harmônico com frequência dependente do tempo e a uma partícula carregada submetida a um campo eletromagnético dependente do tempo[10].

Vários outros tipos de osciladores dependentes do tempo foram estudados nos últimos anos. Como exemplo temos, o oscilador pseudo-harmônico [11], o oscilador paramétrico [12] e o oscilador harmônico invertido [13].

Recentemente, Özeren[14] estudou uma classe de osciladores dependentes do tempo chamados de osciladores log-periódicos. Usando a álgebra de Lie, Özeren construiu os estados coerentes do sistema e avaliou sua evolução temporal. Estes osciladores são assim chamados devido a dependência temporal da função horária da posição, que é solução da segunda lei de Newton. Esta função apresenta comportamento senoidal, cujo argumento das funções seno e cosseno é o logarítimo do tempo, como veremos no Capítulo 2.

Oscilações log-periódicas são também observadas em outros sistemas físicos e em áreas afins, como exemplo, no comportamento do mercado financeiro. Nos trabalhos de Sornette[15] relativos ao comportamento do mercado financeiro, é observado que a função que melhor simula a quebra no mercado de ações é uma função log-periódica. Inclusive o mercado financeiro do Brasil foi usado como exemplo, para validar a predição do modelo de Sornette[16]. Em sistemas quasi-periódicos, cujo espectro de energia apresenta uma forma multifractal, o comportamento do calor específico a baixa temperatura pode ser simulado por uma função log-periódica [17]. Em materiais heterogêneos como fibras compostas, rochas, concreto sob compressão e materiais com tensão residual amplamente distribuída, a ruptura (ou quebra) é um ponto crítico característico de tais sistemas. O que pode causar rupturas em tais materiais seria uma emissão acústica. Uma das formas de simular tal sistema é o uso de uma função log-periódica, que dependerá do comprimento de onda da emissão acústica[18, 15]. O que estes sistemas possuem em comum é a quebra/ruptura característica. Em outras palavras, dada uma grandeza de importância desses sistemas, como o preço de ações do mercado, valores críticos de temperatura de uma rede cristalina ou a frequência de ressonância de hetero-estruturas, a função que caracterizará o sistema ou será usada para modelar predições no seu comportamento, poderá

apresentar uma dependência log-periódica na grandeza em importância. Essa conclusão foi obtida por Sornette[20] e está presente em vários trabalhos de sua autoria (ver Refs. [15, 19, 20] e referências contidas nesses trabalhos).

Uma outra classe de osciladores também estudada nesse trabalho é a dos osciladores tipo Caldirola-Kanai(CK), que foi introduzido na literatura como protótipo para se descrever dissipação em mecânica quântica[25]. Ainda que haja controvérsias sobre o modelo de CK descrever sistemas dissipativos ou com massa variável, vários osciladores tipo CK têm sido estudados. Por exemplo, Pedrosa, Serra e Guedes[21] obtiveram a função de onda para o oscilador CK com e sem um potencial inverso-quadrático. O oscilador CK invertido e forçado são estudados nas referências [22, 23] e [24, 13] respectivamente. Os operadores de aniquilação e criação para o oscilador CK com coeficiente de atrito complexo são apresentados na Ref.[26]

Nas Refs. [?, 27], Özeren estudou a evolução temporal dos estados coerentes de três osciladores, a saber: o oscilador de Caldirola-Kanai(CK), cuja massa varia exponencialmente com o tempo, e outros dois osciladores tipo CK, derivados a partir da expressão da massa do oscilador de CK no caso não-extensivo, ou seja, quando a massa varia no tempo de acordo com a função q -exponencial. Nestes osciladores a frequência angular é constante.

É importante ressaltar que em nenhum dos trabalhos de Özeren envolvendo os osciladores log-periódicos ou tipo CK foram obtidas as funções de onda desses sistemas. Neste trabalho usamos a representação de Schrödinger e a técnica de LR para obter as funções de onda e avaliar as médias de algumas quantidades dos osciladores tipo log-periódico e CK.

Este trabalho envolve o estudo de osciladores harmônico dependentes do tempo, com massa e/ou frequência dependentes do tempo. Pedrosa *et al* [21] obtiveram a função de onda do oscilador harmônico dependente do tempo através do uso da técnica de LR junto com uma transformação unitária*. A função de onda obtida é escrita em termos da massa, da frequência e da chamada função auxiliar. Esta função é solução de uma equação não-linear, a equação de Milne-Pinney†. Assim, com respeito ao estudo do ponto de vista quântico dos osciladores log-periódicos e tipo CK, o que nos resta é resolver tal

*Nas Refs. [28, 29, 30] Hartley e Ray desenvolveram uma técnica que transforma a equação de autovalor do operador invariante numa equação de Schrödinger independente do tempo. Essa mesma transformação, junto com a técnica de LR, é usada por Pedrosa nas Refs. [21, 31, 32]

†Esta equação é resultado da técnica dos invariantes aplicados ao oscilador harmônico dependente do tempo. Esta função determina inteiramente o operador invariante, e à ela será dada mais atenção nos capítulos subsequentes.

equação auxiliar para cada dependência temporal das funções massa e frequência de cada oscilador, para assim determinar a função de onda e então obter a médias das grandezas de interesse.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma. O Capítulo 1 é destinado a uma breve introdução da técnica de Lewis-Riesenfeld, a determinação da função de onda e de médias das grandezas de interesse. Nos Capítulos 2 e 3 apresentamos os resultados para os osciladores log-periódicos e tipo CK, respectivamente. E no final desse trabalho apresentamos a conclusão e considerações finais.

1 O MÉTODO DE LEWIS-RIESENFIELD

1.1 Introdução

Neste Capítulo faremos uma breve introdução da técnica dos invariantes quânticos para solução de problemas dependentes do tempo. A Hamiltoniana de tais sistemas depende explicitamente do tempo, de forma que, por métodos analíticos convencionais, como por exemplo a teoria da perturbação dependente do tempo ou o método variacional[7], a função de onda é uma aproximação da solução da equação de Schrödinger. A técnica dos invariantes quânticos, inicialmente estudada e desenvolvida por Lewis e Riesenfeld[10] fornece uma forma elegante e fácil de obter a função de onda exata desses sistemas.

Considere a equação de Schrödinger de um sistema descrito pela Hamiltoniana $H(t)$ dependente explicitamente do tempo

$$H(t)\psi(q, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q, t). \quad (1.1)$$

Onde q é a representa a coordenada do sistema. A técnica de Lewis-Riesenfeld supõe a existência de um operador hermitiano I , o qual é um invariante no sentido de que ele satisfaz a seguinte igualdade

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0, \quad (1.2)$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema. As autofunções (ϕ_n) do operador invariante são relacionadas com a solução da equação de Schrödinger (ψ_n) através da equação[10, 13, 33, 32, 34]

$$\psi(q, t) = e^{i\theta(t)}\phi(q, t), \quad (1.3)$$

onde $\theta(t)$ é um fator de fase dado por [10, 21, 32]

$$\hbar \frac{d\theta(t)}{dt} = \langle \phi(q, t) | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \phi(q, t) \rangle \quad (1.4)$$

Uma breve demonstração dos cálculos que levam à relação dada pela Eq. (1.3) pode ser encontrada no Apêndice A.

Assim, vemos que a teoria dos invariantes quânticos fornece uma alternativa bastante prática para se obter a função de onda de sistemas não-conservativos. Em outras palavras, a técnica de LR aplicada ao estudo de sistemas dependentes do tempo baseia-se em construir um operador invariante (I) apropriado, determinar sua autofunção (ϕ_n), encontrar o fator de fase (θ_n) e assim obter a função de onda (ψ_n). Esse processo de obtenção da função de onda, dependendo da forma do invariante de nossa escolha e do problema em questão, é composto por cálculos bem menos complexos do que os métodos de solução da equação de Schrödinger mencionados no início deste capítulo. Entretanto, este trabalho lida apenas com sistemas do tipo oscilador harmônico. A seguir aplicaremos essa teoria à Hamiltoniana quadrática em q e p e dependente explicitamente do tempo.

1.2 Oscilador Harmônico com massa e frequência dependentes de tempo

Consideremos agora um sistema descrito pela Hamiltoniana

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2, \quad (1.5)$$

cuja equação de Schrödinger na representação de posição pode ser expressa por

$$-\frac{\hbar^2}{2m(t)} \frac{\partial^2 \psi(q, t)}{\partial q^2} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2 \psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t}, \quad (1.6)$$

onde $m(t)$ é a massa e $\omega(t)$ a frequência do oscilador, que são funções dependentes do tempo. Das equações de Hamilton obtemos a seguinte equação de movimento

$$\ddot{q} + \gamma(t)\dot{q} + \omega^2(t)q = 0. \quad (1.7)$$

Lewis e Riesenfeld[10] deduziram um operador invariante para a Hamiltoniana expressa pela Eq. (1.5), com massa constante. Mais recentemente, Pedrosa *et al*[21] usou o mesmo operador invariante para obter a função de onda do oscilador harmônico com massa e frequência dependentes do tempo com e sem uma perturbação singular. Aqui faremos uso do mesmo invariante para estudar os sistemas contidos nos Capítulos 2 e 3 desse trabalho. Tal invariante pode ser escrito sob a forma

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - m \dot{\rho} q)^2 \right], \quad (1.8)$$

onde $\rho(t)$ é a chamada função auxiliar[10, 32] que satisfaz à equação geral de Milne-Pinney[36, 37]

$$\ddot{\rho} + \gamma(t)\dot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{m^2(t)\rho^3}, \quad (1.9)$$

onde $\gamma(t) = \frac{\dot{m}}{m}$. A demonstração dos cálculos para a obtenção do invariante na forma (1.8) e da equação auxiliar (Eq. (1.9)) pode ser encontrada no Apêndice B. As Eqs. (1.7), (1.9) e o invariante (1.8) constituem o chamado sistema de Ermakov [28, 30, 32] para a Hamiltoniana (1.5).

Considere a equação de autovalores para o invariante

$$I\phi_n(q, t) = \lambda_n\phi_n(q, t). \quad (1.10)$$

Ao obtermos a autofunção de I a partir desta equação, substituímos $\phi_n(q, t)$ na Eq. (1.3) para assim obtermos a função de onda do sistema. Por fim o que nos resta é resolver a equação auxiliar (1.9) e determinar o fator de fase (Eq. (1.4)), que relaciona as autofunções de $I(t)$ com a função de onda.

Hartley e Ray[21, 10, 28, 30], assim como Pedrosa, Serra e Guedes [32, 33, 21], utilizaram a técnica dos invariantes para resolver a equação de Schrödinger para a Hamiltoniana (1.5) juntamente com uma transformação unitária aplicada à equação de autovalor para $I(t)$, que a transforma numa equação semelhante à equação de Schrödinger para o oscilador harmônico independente do tempo. A função obtida como solução da Eq. (1.10) para o oscilador harmônico da Hamiltoniana (1.5) é escrita como(ver Apêndice C)

$$\phi_n(q, t) = \left(\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i m(t)}{2 \hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{m(t) \rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q}{\rho} \right]. \quad (1.11)$$

Usando a relação (1.3), podemos escrever a solução da equação de Schrödinger como

$$\psi_n(q, t) = e^{i\theta_n(t)} \left(\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im(t)}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{m(t)\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q}{\rho} \right], \quad (1.12)$$

onde a fase $\theta_n(t)$ é dada por [21, 32]

$$\theta_n(t) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{m(t')\rho^2(t')}, \quad (1.13)$$

e H_n são os polinômios de Hermite.

Uma vez obtida a função de onda, podemos calcular as médias das grandezas de interesse. Aqui, usaremos a notação de Dirac, pois esta fornece um cálculo mais direto das médias. Para isso, definimos dois operadores, $b(t)$ e $b^\dagger(t)$, dependentes do tempo, que são os operadores de abaixamento e levantamento, respectivamente, e são dados por

$$b = \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right) + i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right], \quad (1.14a)$$

e

$$b^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right) - i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right]. \quad (1.14b)$$

Os operadores b e b^\dagger satisfazem a relação de comutação

$$[b, b^\dagger] = 1, \quad (1.15)$$

e as Eqs. (1.14a) e (1.14b) fornecem

$$q = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^{1/2} \rho (b + b^\dagger), \quad (1.16a)$$

$$p = i \left(\frac{\hbar}{2} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho} - im\dot{\rho} \right) b^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + im\dot{\rho} \right) b \right]. \quad (1.16b)$$

Dessa forma, podemos reescrever o operador invariante em termos de b e b^\dagger , como

$$I(t) = \hbar \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right). \quad (1.17)$$

Aqui, introduzimos o operador hermitiano $N = b^\dagger b$, similar ao operador número para o oscilador harmônico independente do tempo, cuja equação de autovalores é dada por

$$N|n, t\rangle = n|n, t\rangle \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad (1.18)$$

e assim escrevemos $I(t)$ na forma

$$I(t) = \hbar \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (1.19)$$

Como $I(t)$ e N comutam, os autoestados normalizados $|\lambda, t\rangle$ de $I(t)$ são os mesmo autoestados normalizados de N . Dessa forma, escrevemos o espectro de autovalores de $I(t)$ como sendo

$$I|n, t\rangle = \lambda_n |n, t\rangle, \quad (1.20a)$$

$$\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.20b)$$

onde as seguintes relações são satisfeitas

$$b|n, t\rangle = n^{1/2} |n-1, t\rangle, \quad (1.21)$$

$$b^\dagger |n, t\rangle = (n+1)^{1/2} |n+1, t\rangle, \quad (1.22)$$

$$\langle n', t | n, t \rangle = \delta_{n'n}. \quad (1.23)$$

Neste ponto, observamos que os operadores b , b^\dagger e N obedecem a mesma álgebra dos operadores de abaixamento, levantamento e número que são utilizados para diagonalizar o operador Hamiltoniano do oscilador harmônico independente do tempo. Assim, temos que a solução da equação de Schrödinger pode ser escrito como

$$|n, t\rangle_s = e^{i\theta_n(t)} |n, t\rangle, \quad (1.24)$$

ou de maneira geral geral como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{i\theta_n(t)} |n, t\rangle, \quad (1.25)$$

onde c_n são constantes e $\theta_n(t)$ são os fatores de fase dados pela Eq. (1.13).

1.3 Médias e Princípio da Incerteza

Usamos as Eqs. (1.14a) e (1.14b) para obtermos q e p em termos de b e b^\dagger (Eqs. (1.16a) e (1.16b)). Então usamos as propriedades (1.21), (1.22) e (1.23), para obtermos

$$\langle q \rangle_{\psi_n} = \langle n, t | q | n, t \rangle = 0, \quad (1.26)$$

$$\langle p \rangle_{\psi_n} = \langle n, t | p | n, t \rangle = 0, \quad (1.27)$$

Assim como

$$\langle q^2 \rangle_{\psi_n} = \rho^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \quad (1.28)$$

e

$$\langle p^2 \rangle_{\psi_n} = \frac{1}{\rho^2} (1 + m^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar. \quad (1.29)$$

Dessa forma, o produto da incerteza ($\Delta q \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2}$) no estado $|\psi_n\rangle$ é dado por

$$(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = (1 + m^2 \rho^2 \dot{\rho}^2)^{1/2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar. \quad (1.30)$$

Observamos que o produto da incerteza para o oscilador harmônico dependente do tempo será mínimo no estado fundamental ($n = 0$) para $\rho = c$ (constante). Então, dada uma forma temporal para massa e frequência tal que seja gerada uma equação auxiliar cuja solução particular seja uma constante, observaremos o mínimo de incerteza para o estado fundamental de tal sistema. Por exemplo, se aplicarmos a técnica dos invariantes para o oscilador harmônico independente do tempo, veremos que $\rho = (m_0 \omega_0)^{1/2}$, e assim $(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar$, que concorda como os resultados contidos nos livros textos de mecânica quântica[35].

Nos próximos capítulos utilizaremos a técnica de LR para obtermos as funções para os osciladores investigados.

2 OSCILADORES LOG-PERIÓDICOS

2.1 Introdução

Recentemente, Özeren[14] investigou a evolução temporal dos estados coerentes de osciladores chamados de *log-periódicos*. Foram cinco conjunto de osciladores, dos quais, quatro apresentam caráter log-periódico, no sentido de que a função horária da posição apresenta como dependência temporal uma função senoidal cujo argumento é o logarítmo do tempo. Neste capítulo estudaremos três dos cinco osciladores considerados por Özeren[14], os quais são representados pelas seguintes dependências temporais de massa ($m(t)$) e constante elástica ($k(t)$) (ou frequência ($\omega(t) = \sqrt{\frac{k(t)}{m(t)}}$): (I) $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$ e $k(t) = k_0 \frac{t_0}{t}$; (II) $m(t) = m_0$ e $k(t) = k_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^2$; (III) $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$ e $k(t) = k_0$. Observe que em todos os três casos temos $\omega(t) = \omega_0 \frac{t_0}{t}$.

2.2 Soluções clássicas

Nesta seção obteremos as soluções clássicas para os casos (I), (II) e (III).

2.2.1 Oscilador (I): $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$

Temos que a equação de movimento é dada por:

$$\ddot{q} + \frac{1}{t}\dot{q} + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t^2}q = 0. \quad (2.1)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $t \rightarrow t_0 e^\tau$, obtemos

$$\frac{d^2 q(\tau)}{d\tau^2} + \omega_0^2 t_0^2 q(\tau) = 0, \quad (2.2)$$

que é a equação de movimento para o oscilador harmônico simples. Dessa forma, a solução da Eq. (2.1) é escrita como

$$q(t) = A \cos \left(\omega_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0} \right) + B \text{sen} \left(\omega_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0} \right), \quad (2.3)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. A velocidade da partícula escreve-se

$$v(t) = \omega_0 \frac{t_0}{t} \left[B \cos \left(\omega_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0} \right) - A \text{sen} \left(t_0 \omega_0 \ln \frac{t}{t_0} \right) \right] \quad (2.4)$$

e o momento canônico ($p(t) = m(t)v(t)$)

$$p(t) = m_0 \omega_0 \left[B \cos \left(\omega_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0} \right) - A \text{sen} \left(t_0 \omega_0 \ln \frac{t}{t_0} \right) \right]. \quad (2.5)$$

A Fig. 1 apresenta o comportamento dessas funções. Observamos que, tanto a posição $q(t)$ (Fig. 1(a)) e o momento $p(t)$ (Fig. 1(c)) oscilam com amplitude constante, mas com período de oscilação crescente. Em todas as figuras, consideramos $q(t_0 = 1) = 1$, $v(1) = 0$, $m_0 = 1$ e $\omega_0 = 10$.

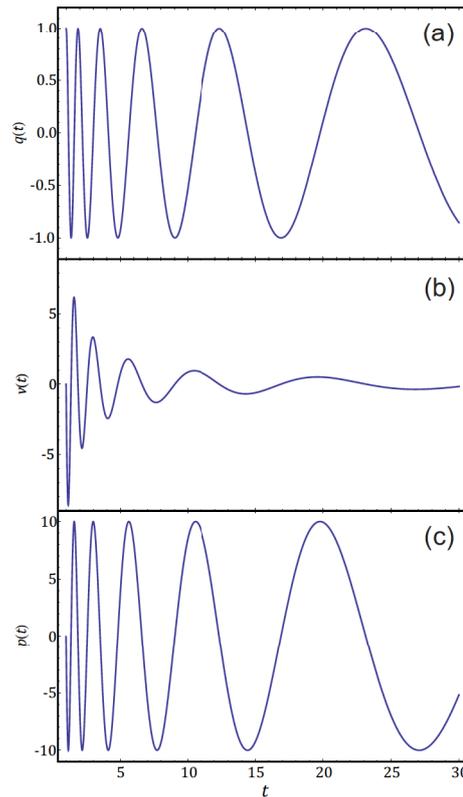


Figura 1: Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (I) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$.

Tal comportamento é um tanto quanto impressionante, visto que este sistema trata-se de um sistema dependente do tempo (não-conservativo), pois vemos aqui a partícula oscilando sob os mesmos pontos de retorno, o que é característico do oscilador harmônico independente do tempo. Entretanto, a velocidade se reduz com o tempo, o que representa o o amortecimento do sistema.

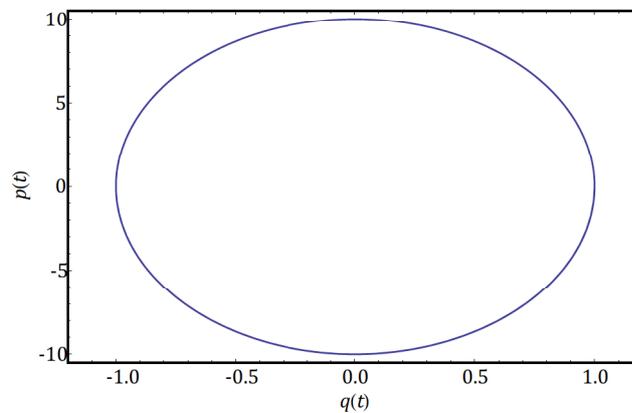


Figura 2: Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (I) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$.

Outro fato bastante impressionante que podemos observar está na Fig. 2, que mostra

o espaço de fase para este sistema. Observamos aqui que ele é similar ao do oscilador harmônico independente do tempo, cujo espaço de fase é representado por uma elipse. Uma forma clara de se entender o que ocorre é observar que a energia mecânica desse sistema ($E \propto \frac{1}{2t}$) diminui à mesma taxa que a energia potencial ($V(q, t) = \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2 \propto \frac{1}{2t}$), de forma que a curvatura do potencial parabólico diminui, ou seja, a concavidade do potencial quadrático varia à mesma taxa que a energia diminui.

2.2.2 Oscilador (II): $m(t) = m_0$

Para este oscilador a equação de movimento é dada por:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \frac{t_0^2}{t^2} q = 0. \quad (2.6)$$

Fazendo a substituição $q(t) \rightarrow t^{1/2}x(t)$, obtemos a equação

$$\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{4\omega_0^2 t_0^2 - 1}{4t^2}x = 0, \quad (2.7)$$

que é similar à Eq. (2.1). Assim, a solução da Eq. (2.6) escreve-se

$$q(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \left[A \cos \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) + B \text{sen} \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) \right] \quad (2.8)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

A velocidade e o momento são, respectivamente, dados por

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{tt_0}} \left\{ \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} B + A \right] \cos \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) - \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} A + B \right] \text{sen} \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) \right\} \quad (2.9)$$

$$p(t) = \frac{m_0}{2\sqrt{tt_0}} \left\{ \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} B + A \right] \cos \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) - \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} A + B \right] \text{sen} \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) \right\}. \quad (2.10)$$

A Fig. 3 apresenta o comportamento dessas funções. Diferentemente do oscilador (I),

aqui observamos que, enquanto a posição $q(t)$ (Fig. 3(a)) oscila com amplitude crescente, o momento $p(t)$ (Fig. 3(c)) oscila com amplitude decrescente. Em ambos os casos o período de oscilação também é crescente.

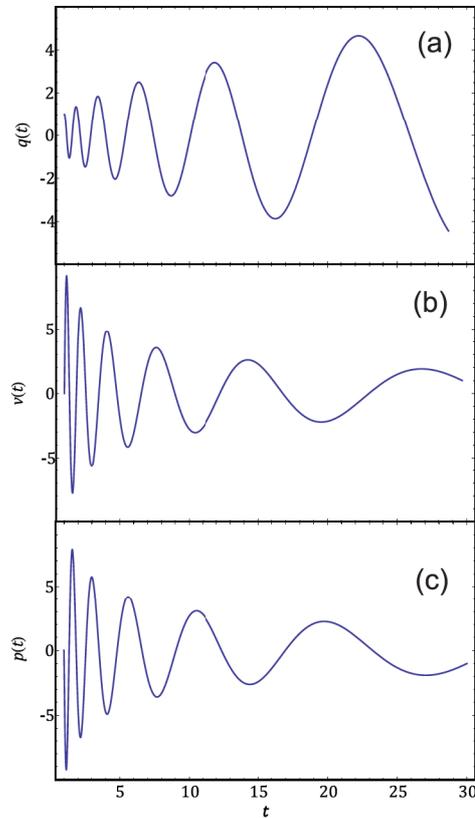


Figura 3: Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (II) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$.

A velocidade (Fig. 3(b)), devido à massa ser constante, apresenta a mesma forma funcional do momento, ou seja, diminui com t , o que representa o amortecimento do sistema. Fig. 4 mostra o espaço de fase para este sistema. Diferentemente do oscilador (I), evidenciamos mais claramente o efeito dissipativo desse sistema, pois o espaço de fase se trata de uma curva não fechada, o que é característico de sistemas não-conservativos.

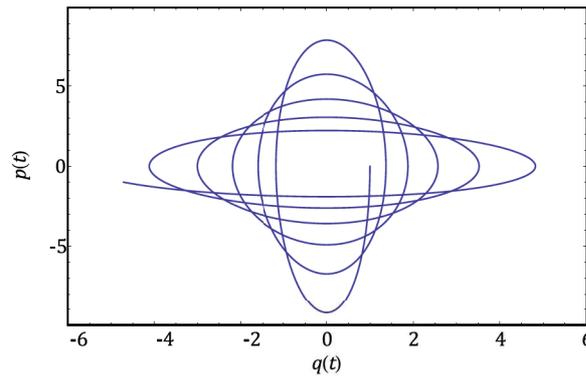


Figura 4: Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (II) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$.

Todavia, este oscilador apresenta um comportamento um tanto estranho, em se tratando da função $q(t)$, pois esta oscila sob valores de amplitude crescentes, ou seja, a partícula oscila entre pontos de retorno cada vez mais distantes um do outro. O que permite isso ocorrer é, que diferente do oscilador (I), a diminuição da frequência $\omega(t)$ não é mais compensada pelo aumento da massa, o que faz com que a partícula sujeita ao potencial $\frac{1}{2}m_0\omega(t)q^2$ se torna cada vez menos confinada ao mesmo.

2.2.3 Oscilador (III): $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$

Neste caso a equação de movimento é dada por:

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + \omega_0^2 \frac{t_0^2}{t^2}q = 0. \quad (2.11)$$

Mediante a substituição $q(t) \rightarrow t^{-1/2}x(t)$ obtermos

$$\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{4\omega_0^2 t_0^2 - 1}{4t^2}x = 0, \quad (2.12)$$

que é idêntica à Eq. (2.7). Assim, a solução da Eq. (2.11) é dada por

$$q(t) = \sqrt{\frac{t_0}{t}} \left[A \cos \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) + B \text{sen} \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) \right] \quad (2.13)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

A velocidade e o momento são dados por

$$v(t) = \frac{1}{2t} \sqrt{\frac{t_0}{t}} \left\{ \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} B + A \right] \cos \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) - \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} A + B \right] \text{sen} \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) \right\} \quad (2.14)$$

e

$$p(t) = \frac{m_0 \sqrt{t t_0}}{2} \left\{ \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} B + A \right] \cos \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) - \left[(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} A + B \right] \text{sen} \left(\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right) \right\}, \quad (2.15)$$

respectivamente.

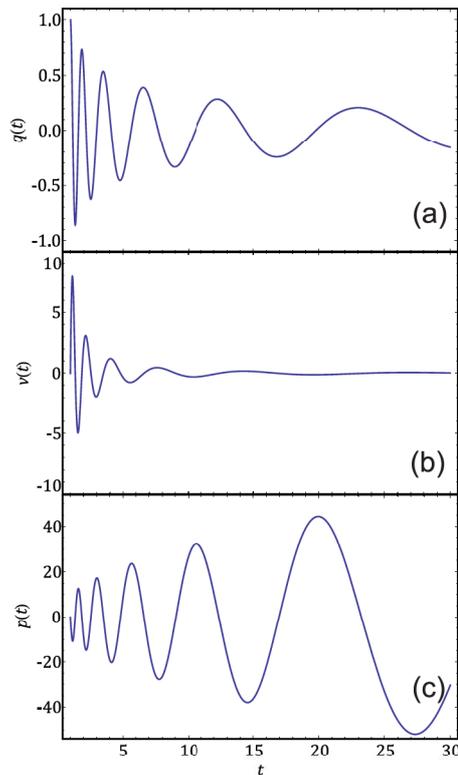


Figura 5: Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (III) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$.

A Fig. 5 apresenta o comportamento dessas funções. O comportamento observado aqui é exatamente o oposto ao do oscilador (II), em se tratando das funções $q(t)$ e $p(t)$. Aqui observamos que, enquanto a posição $q(t)$ (Fig. 5(a)) oscila com amplitude decrescente, o momento $p(t)$ (Fig. 5(c)) oscila com amplitude crescente. E mais uma vez observamos que em ambos os casos o período de oscilação é crescente. Todavia, a veloci-

dade (Fig. 5(b)) oscila sob decrescente amplitude, o que representa o amortecimento do sistema, que ocorre de forma mais rápida que nos casos anteriores.

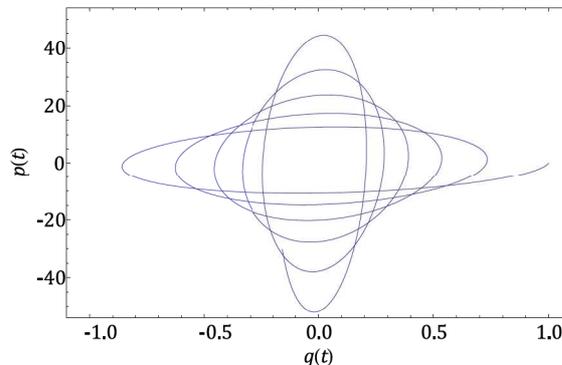


Figura 6: Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (III) com condições iniciais $q(t_0 = 1) = 1$ e $v(t_0 = 1) = 0$ e constantes $\omega_0 = 10$ e $m_0 = 1$.

A Fig. 6 mostra o espaço de fase para este sistema, que também é característico de sistemas não-conservativos, visto que se trata de uma curva não fechada. Nessa caso, temos o que geralmente ocorre em sistemas oscilatórios não-conservativo, visto que a posição da partícula oscila sob pontos de retorno cada vez mais próximos um do outro. O gráfico de $q(t)$ (Fig. 5(a)) é similar ao do oscilador independente do tempo com amortecimento subcrítico, pois apresenta o mesmo padrão de amortecimento.

Vemos que os três casos até aqui estudados têm em comum o efeito de amortecimento evidenciado na diminuição da velocidade. Entretanto, por mais que os três osciladores apresentem o amortecimento, diferentes comportamentos são apresentados com respeito à função horária da posição $q(t)$. Enquanto que para o oscilador (I), $q(t)$ oscila com amplitude constante, para os casos (II) e (III) a amplitude varia: aumenta para (II) e diminui para (III). O oposto ocorre com a quantidade de movimento $p(t)$, cuja amplitude diminui para (II) e aumenta para (III), enquanto que para (I) a amplitude de $p(t)$ se mantém constante. Assim, concluímos o estudo do comportamento clássico dos osciladores log-periódicos aqui apresentados.

2.3 Soluções quânticas

Como vimos no Capítulo 1, para obter a função de onda do oscilador harmônico dependente do tempo, devemos resolver a equação de Milne-Pinney (Eq. (1.9))

$$\ddot{\rho} + \gamma(t)\dot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{m^2(t)\rho^3}.$$

Uma vez obtida a função auxiliar ρ , podemos obter a função de onda, e assim toda as informações relacionadas às propriedades quânticas do sistema. O único problema está no fato de a equação auxiliar se trata de uma equação não-linear. Assim, achar uma solução que satisfaça à condição que tenhamos o operador I como hermitiano pode ser algo complicado de se realizar. Para resolver a Eq. (1.9) para os vários osciladores estudados neste trabalho, seguimos o procedimento utilizado nas referências [36], [37] e [38].

Primeiramente, façamos a substituição $\rho \rightarrow \zeta(t)y$ na Eq. (1.9) para obtermos

$$\zeta \ddot{y} + \left(2\dot{\zeta} + \gamma(t)\zeta\right) \dot{y} + \left(\ddot{\zeta} + \gamma(t)\dot{\zeta} + \omega^2(t)\right) y = \frac{1}{m^2(t)\zeta^3} \frac{1}{y^3}. \quad (2.16)$$

Observe que se escolhermos uma dessas funções, $\zeta(t)$ ou $y(t)$, a outra será solução da equação diferencial resultante. Dessa forma, fazemos uma escolha, seja em $\zeta(t)$, tal que a equação resultante seja independente de derivadas primeiras. Assim, nossa escolha é da forma $2\dot{\zeta} + \gamma(t)\zeta = 0$. E então, obtemos

$$\ddot{y} + \left(\omega^2(t) - \frac{\gamma(t)}{2} - \frac{\gamma^2(t)}{4}\right) y = \frac{1}{m^2(t)\zeta^4} \frac{1}{y^3}, \quad (2.17)$$

onde $\zeta(t)$ é dado por

$$\zeta(t) = \zeta_0 e^{-\frac{1}{2} \int \gamma(t) dt}. \quad (2.18)$$

A a Eq. (2.16) é denominada de equação auxiliar transformada.

O próximo passo, de acordo com a Ref. [36], é considerar uma regra de superposição como forma de obter a solução da equação de Milne-Pinney. O método usado consiste em aplicar o teorema de Noether, que relaciona quantidades conservadas de um sistema Lagrangiano aos grupos de simetria que tornam a integral da ação* invariante. Na obtenção do invariante através do teorema de Noether, é possível demonstrar que podemos relacionar as soluções da equação não-linear (2.17) com as soluções da equação homogênea associada

$$\ddot{f}_{1,2} + \left(\omega^2(t) - \frac{\gamma(t)}{2} - \frac{\gamma^2(t)}{4}\right) f_{1,2} = 0, \quad (2.19)$$

*Integral dada por $\int L(q, \dot{q}, t) dt$, onde $L(q, \dot{q}, t)$ é a Lagrangiana do sistema.

onde, $f_{1,2}$ são duas soluções independentes dessa equação. Segundo as Refs. [36, 37, 38] esta relação é dada por

$$y = \frac{\sqrt{2}}{|W|} \sqrt{I_1 f_1^2 + I_2 f_2^2 \pm \left(4I_1 I_2 - \frac{1}{m^2(t)\zeta^4} W^2\right)^{1/2}} f_1 f_2, \quad (2.20)$$

onde $W = f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2$ é o Wronskiano das soluções $f_{1,2}$, e I_1 e I_2 são constantes positivas tais que $4I_1 I_2 \geq \frac{W^2}{m^2(t)\zeta^4}$.

O restante desta seção é destinada à obtenção da função auxiliar para os osciladores log-periódicos, a análise da função de onda, o estudo da média dos operadores q , p , q^2 e p^2 e do produto da incerteza na solução da equação de Schrödinger.

2.3.1 Oscilador (I): $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$

Para este oscilador a equação auxiliar e a equação auxiliar transformada são dadas, respectivamente, por

$$\ddot{\rho} + \frac{1}{t} \dot{\rho} + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t^2} \rho = \frac{t_0^2}{m_0^2} \frac{1}{t^2 \rho^3} \quad (2.21)$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{4t^2} (4\omega_0^2 t_0^2 - 1) y = \frac{1}{m_0^2 \zeta_0^4 y^3}. \quad (2.22)$$

Neste caso, a função $\zeta(t)$ escreve-se

$$\zeta(t) = \zeta_0 \sqrt{\frac{t_0}{t}}. \quad (2.23)$$

Considere a equação homogênea associada à Eq. (2.22)

$$\ddot{f}_{1,2} + \frac{1}{4t^2} (4\omega_0^2 t_0^2 - 1) f_{1,2} = 0, \quad (2.24)$$

a qual, é similar à Eq. (2.6). Desse forma, as duas soluções para a Eq. (2.24) podem ser escritas como

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \cos\left(\omega_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0}\right) \quad (2.25)$$

e

$$f_2(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \sin \left(\omega_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0} \right). \quad (2.26)$$

O Wronskiano destas soluções é dado por $W = \omega_0$.

Usando a Eq. (2.20), que relaciona a solução da equação Milne-Pinney transformada com as soluções da equação homogênea associada, obtemos, para $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{m_0 \zeta_0^2}$

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{m_0 \zeta_0^2} \sqrt{\frac{t}{t_0}}. \quad (2.27)$$

Assim, a solução da equação auxiliar o oscilador (I) é

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{m_0 \omega_0}}, \quad (2.28)$$

que é constante.

Substituindo a Eq. (2.28) na Eq. (1.12) obtemos a seguinte função de onda

$$\psi_n = e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_0 t_0 \ln \left(\frac{t}{t_0}\right)} \left[\frac{m_0 \omega_0}{\pi \hbar (n!)^2 2^{2n}} \right]^{1/4} \exp \left(-\frac{m_0^2 \omega_0^2}{2\hbar} q^2 \right) \times H_n \left[\left(\frac{m_0^2 \omega_0^2}{\hbar} \right)^{1/2} q \right], \quad (2.29)$$

que é similar àquela para o oscilador harmônico independente do tempo. A única diferença está na fase, que nesse caso possui o expoente logarítmico.

O produto da incerteza no estado $|\psi_n\rangle$ é dado por

$$(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar, \quad (2.30)$$

que é mínimo para $n = 0$, visto que $\rho = \text{constante}$.

Devido à similaridade entre a álgebra envolvida na obtenção dos autoestados de I com o caso do oscilador harmônico independente do tempo, podemos diretamente obter os estados coerentes[†] para o oscilador harmônico dependente do tempo:

$$|\beta, t\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{(n!)^{1/2}} e^{i\theta_n(t)} |n, t\rangle, \quad (2.31)$$

[†]Estados coerentes são estados de mínima incerteza, que são gerados a partir do estado fundamental através de um operador unitário (operador deslocamento). Estes estados formam um conjunto completo e normalizado, mas não ortogonais. Eles foram primeiramente estudados por Schrödinger[39] com o objetivo de se obter uma combinação linear de estados do oscilador harmônico para os quais a energia quântica do oscilador mais se aproximasse do valor correspondente da energia clássica. E foi a partir da década de 1960 que so tornaram populares por serem úteis na descrição do campo da radiação[40]

onde θ_n é dado pela Eq. (1.13) e o número complexo $\beta(t)$ satisfaz a equação de autovalores

$$b(t)|\beta, t\rangle = \beta(t)|\beta, t\rangle, \quad (2.32)$$

com

$$\beta(t) = \beta(t_0)e^{2i\theta_0(t)}, \quad (2.33)$$

e

$$\theta_0(t) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{m(t')\rho^2(t')}. \quad (2.34)$$

Nos estados coerentes, as variâncias de q (Δq) e de p (Δp) e o produto da incerteza são dados, respectivamente, por

$$\Delta q_\beta = \sqrt{\langle q^2 \rangle_\beta - \langle q \rangle_\beta^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\rho, \quad (2.35)$$

$$\Delta p_\beta = \sqrt{\langle p^2 \rangle_\beta - \langle p \rangle_\beta^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{1}{\rho} (1 + m^2 \dot{\rho}^2 \rho^2)^{1/2} \quad (2.36)$$

e

$$(\Delta p \Delta q)_\beta = \frac{\hbar}{2} (1 + m^2 \dot{\rho}^2 \rho^2)^{1/2}. \quad (2.37)$$

Se $m(t)\dot{\rho}\rho \neq 0$, $(\Delta p \Delta q)_\beta$ não será mínimo, indicando que os estados $|\beta, t\rangle$ não são estados de mínima incerteza (estados coerentes). Na verdade, estes estados são chamados estados comprimidos (ver Refs. [28, 29, 33]).

Para $\rho = (m_0\omega_0)^{-1/2}$, $\dot{\rho} = 0$ e $(\Delta p \Delta q)_\beta = \frac{\hbar}{2}$, indicando que os estados $|\beta, t\rangle$ são relmente estados coerentes “puros.”

Para $n = 0$, temos também que $(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \frac{\hbar}{2}$. Nesse estado a função de onda é dada por

$$\psi_0 = e^{-i\frac{1}{2}\omega_0 t_0 \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)} \left[\frac{m_0\omega_0}{\pi\hbar}\right]^{1/4} \exp\left(-\frac{m_0^2\omega_0^2}{2\hbar}q^2\right), \quad (2.38)$$

que corresponde à representação no espaço de coordenada do estado coerente $|\beta, t\rangle$.

2.3.2 Oscilador (II): $m(t) = m_0$

A equação auxiliar para este oscilador é dada por

$$\ddot{\rho} + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t^2} \rho = \frac{1}{m_0^2 \rho^3}. \quad (2.39)$$

Como não há termos de primeira ordem na derivada nessa equação, não há necessidade de se aplicar a substituição de variável. Dessa forma, considere a equação homogênea associada

$$\ddot{f}_{1,2} + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t^2} f_{1,2} = 0, \quad (2.40)$$

que é idêntica à Eq. (2.6). Assim, as duas soluções independentes dessa equação são

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \cos \left[\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right] \quad (2.41)$$

e

$$f_2(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \sin \left[\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right]. \quad (2.42)$$

O Wronskiano destas soluções é dado por $W = \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2t_0}$.

Usando a Eq. (2.20), que relaciona a solução da equação Milne-Pinney com as soluções da equação homogênea associada à esta, obtemos, para $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{m_0} \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2t_0}$

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{m_0}} \frac{\sqrt{t}}{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/4}}. \quad (2.43)$$

A função de onda e o produto da incerteza são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & e^{-\frac{i}{2}(n+\frac{1}{2}) \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \ln \left(\frac{t}{t_0}\right)} \left[\frac{m_0 (4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2\pi \hbar (n!)^2 2^{2n} t_0^2} \right]^{1/4} \times \frac{1}{t^{1/2}} \\ & \times \exp \left\{ \frac{m_0 t}{4\hbar} \left[i - \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \right] q^2 \right\} H_n \left[\left(\frac{m_0}{2\hbar} (4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2} \right)^{1/2} \frac{q}{\sqrt{t}} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

e

$$(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \frac{2\omega_0 t_0}{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar. \quad (2.45)$$

Para $\rho \propto \sqrt{t}$, temos que $\dot{\rho} \neq 0$ e $(\Delta p \Delta q)_\beta > \frac{\hbar}{2}$, indicando que os estados $|\beta, t\rangle$, para

este oscilador, correspondem aos estados comprimidos.

No estado $\psi_0(q, t)$, que corresponde a $n = 0$, o produto da incerteza é maior que $\frac{\hbar}{2}$. Dessa forma, a função de onda nesse estado, dada por

$$\begin{aligned} \psi_0(q, t) = e^{-\frac{i}{4} \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)} \left[\frac{m_0 (4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2\pi \hbar t_0^2} \right]^{1/4} \times \frac{1}{t^{1/4}} \\ \times \exp \left\{ \frac{m_0 t}{4\hbar} \left[i - \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \right] q^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

representa o estado comprimido do sistema na representação de posição.

2.3.3 Oscilador (III): $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$

A equação auxiliar para este oscilador é dada por

$$\ddot{\rho} + \frac{2}{t} \dot{\rho} + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t^2} \rho = \frac{t_0^4}{m_0^2 t^4} \frac{1}{\rho^3}, \quad (2.47)$$

e a equação auxiliar transformada por

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t^2} y = \frac{1}{m_0^2 \zeta_0^4 y^3}. \quad (2.48)$$

Aqui, a função $\zeta(t)$ é expressa por

$$\zeta(t) = \zeta_0 \frac{t_0}{t}. \quad (2.49)$$

Considere a equação homogênea associada à Eq. (2.48) que é idêntica à Eq. (2.6). Assim, as duas soluções independentes dessa equação são

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \cos \left[\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right] \quad (2.50)$$

e

$$f_2(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \sen \left[\frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \ln \frac{t}{t_0} \right]. \quad (2.51)$$

O Wronskiano destas soluções é dado por $W = \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2t_0}$.

Usando a Eq. (2.20), que relaciona a solução da equação Milne-Pinney transformada com as soluções da equação homogênea associada à esta, obtemos, para $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{m_0 \zeta_0^2} \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2t_0}$

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{m_0}} \frac{t_0}{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (2.52)$$

Com isso obtemos a função de onda e o produto da incerteza

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & e^{-\frac{i}{2}(n+\frac{1}{2}) \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)} \left[\frac{m_0 (4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{\pi \hbar t_0 (n!)^2 2^{2n+1}} \right]^{1/4} \times t^{1/2} \\ & \times \exp \left\{ \frac{m_0 t}{4\hbar} \left[i - \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \right] q^2 \right\} \times H_n \left[\left(\frac{m_0}{2\hbar t_0} \right)^{1/2} (4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/4} \sqrt{t} q \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \frac{2\omega_0 t_0}{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar, \quad (2.54)$$

Novamente, para $\rho \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$, temos que $\dot{\rho} \neq 0$ e $(\Delta p \Delta q)_\beta > \frac{\hbar}{2}$, indicando que os estados $|\beta, t\rangle$, para este oscilador, também correspondem aos estados comprimidos. Para $n = 0$ temos $(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} > \frac{\hbar}{2}$. Portanto o estado

$$\begin{aligned} \psi_0(q, t) = & e^{-\frac{i}{4} \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)} \left[\frac{m_0 (4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{2\pi \hbar t_0} \right]^{1/4} \times t^{1/4} \\ & \times \exp \left\{ \frac{m_0 t}{4\hbar} \left[i - \frac{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}{t_0} \right] q^2 \right\} \times \end{aligned} \quad (2.55)$$

corresponde à representação de coordenada do estado comprimido do sistema.

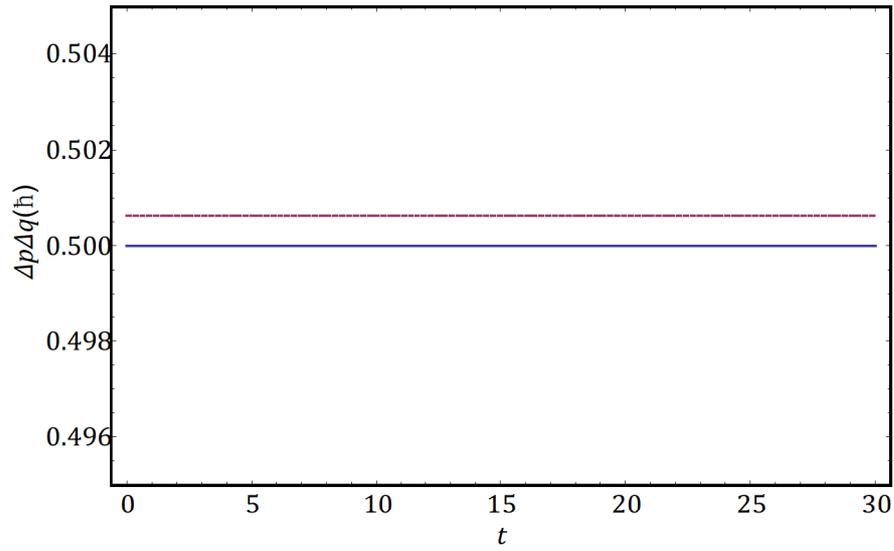


Figura 7: Gráfico de $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ para os osciladores I (normal), II e III (pontilhados) para os valores das constantes $\omega_0 = 1$, $m_0 = 1$ e $t_0 = 1$

A Fig. 7 mostra o gráfico do produto da incerteza no estado fundamental ($n = 0$) em função do tempo. A linha mais inferior representa $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ para o oscilador I, que de acordo com Eq. (2.30) é mínimo. Para os osciladores II e III temos as curvas tracejada. Nesses dois casos, $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ é o mesmo (ver Eqs. (2.45) e (2.54)).

3 OSCILADORES DO TIPO CALDIROLA-KANAI

3.1 Introdução

Para o oscilador de Caldirola-Kanai (CK), a massa é dada por $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$, onde γ é um número real positivo, e a frequência de oscilação dada por $\omega = \omega_0$ (constante). Dessa forma, a Hamiltoniana deste sistema é escrita como

$$H(t) = e^{-\gamma t} \frac{p^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 e^{\gamma t} q^2, \quad (3.1)$$

que fornece uma equação de movimento do tipo

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.2)$$

que é idêntica à equação de movimento do oscilador harmônico com amortecimento.

Na Ref. [27], Özeren estudou um oscilador cuja massa depende do tempo sob a forma $m(t) = t^\alpha$, e cuja Hamiltoniana é expressa por

$$H = \frac{p^2}{2t^\alpha} + \frac{t^\alpha}{2} \omega_0^2 q. \quad (3.3)$$

Ele chamou esse oscilador de “*Lane-Emden-type Kanai-Caldirola oscillator.*” Aqui traduzimos apenas como oscilador tipo Caldirola-Kanai, devido à sua equação de movimento,

$$\ddot{q} + \frac{\alpha}{t} \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.4)$$

ser similar a de um oscilador harmônico com amortecimento dependente do tempo. Özeren considerou os casos $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$.

Afim de considerarmos o valor de tempo inicial $t = 0$ e assim podermos comparar com o oscilador de CK (oscilador IV), escrevemos a massa dos osciladores tipo CK na forma

$m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^\alpha$ e estudamos os casos $\alpha = 2$ (oscilador V) e $\alpha = 4$ (oscilador VI).

3.2 Soluções clássicas

3.2.1 Oscilador (IV): $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$

Neste caso temos que a equação de movimento é dada por

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (3.5)$$

Observe que esta equação é idêntica ao oscilador amortecido independente do tempo, de forma que sua solução será

$$q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [Ae^{i\Omega_0 t} + Be^{-i\Omega_0 t}], \quad (3.6)$$

onde $\Omega_0^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$, e A e B são constantes que dependem das condições iniciais. Dessa forma, $q(t)$ dependerá da escolha dos valores para ω_0 e γ , de forma que teremos três classes de osciladores amortecidos, a saber: (i) $\omega_0 > \gamma/2$, ou amortecimento subcrítico; (ii) $\omega_0 = \gamma/2$, ou amortecimento crítico; (iii) $\omega_0 < \gamma/2$, ou amortecimento supercrítico.

Como veremos, ao utilizarmos a teoria de LR devemos obter apenas soluções com $\omega_0 > \gamma/2$. Este caso corresponde ao oscilador com amortecimento subcrítico. Assim, a posição $q(t)$, a velocidade $v(t)$ e o momento $p(t)$ são dados, respectivamente, por

$$q(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t), \quad (3.7)$$

$$v(t) = e^{-\gamma t/2} \left[\left(B \Omega_0 - A \frac{\gamma}{2} \right) \cos \Omega_0 t - \left(A \Omega_0 + B \frac{\gamma}{2} \right) \sin \Omega_0 t \right] \quad (3.8)$$

e

$$p(t) = m_0 e^{\gamma t/2} \left[\left(B \Omega_0 - A \frac{\gamma}{2} \right) \cos \Omega_0 t - \left(A \Omega_0 + B \frac{\gamma}{2} \right) \sin \Omega_0 t \right] \quad (3.9)$$

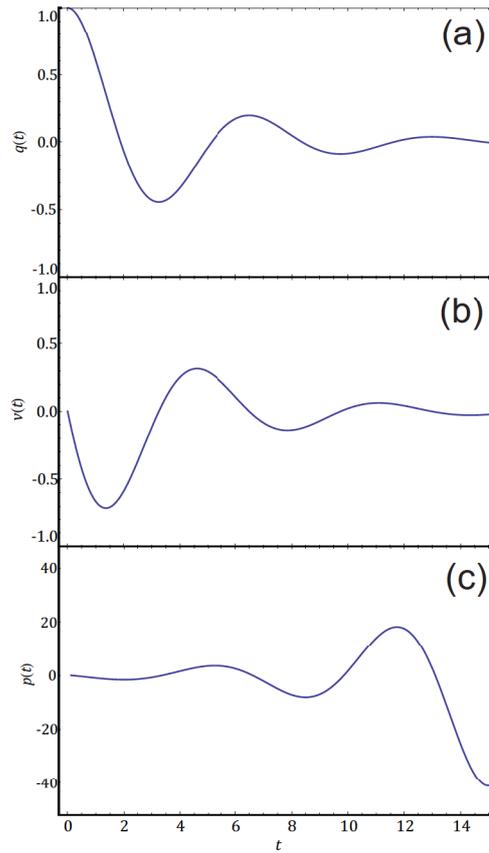


Figura 8: Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (IV) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$ e $m_0 = 1$.

A Fig. 8 apresenta o comportamento das funções $q(t)$, $v(t)$ e $p(t)$. Em todas as figuras consideramos $q(0) = 1$, $v(0) = 0$, $m_0 = 1$, $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0.5$. O comportamento observado aqui é o mesmo de um oscilador independente do tempo com amortecimento subcrítico, exceto pelo momento $p(t) = m_0 e^{\gamma t} \dot{q}$ (Fig. 8(c)), que para o oscilador IV oscila sob crescente amplitude.

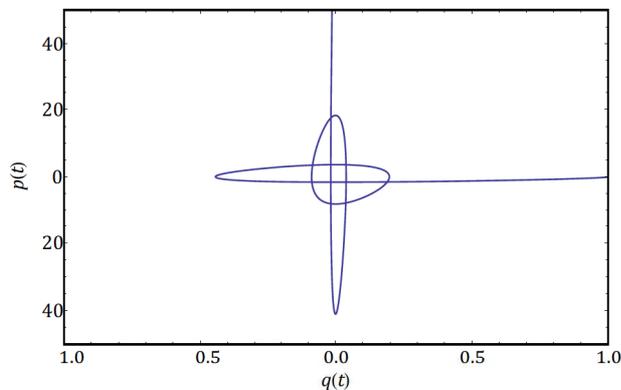


Figura 9: Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (IV) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$ e $m_0 = 1$.

A Fig. 9 mostra o espaço de fase. Assim como para os osciladores log-periódicos, o gráfico $q(t)$ vs $p(t)$ do oscilador IV se trata de uma curva não fechada, o que caracteriza o sistema com sendo não conservativo.

3.2.2 Oscilador (V): $m(t) = m_o \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)^2$

A equação de movimento nesse caso é escrita como

$$\ddot{q} + \frac{2}{t+t_0}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.10)$$

que é similar a do oscilador anterior, mas agora com o fator de amortecimento dependente do tempo ($\gamma = \frac{2}{t+t_0}$). A solução da Eq. (3.10) é dada por

$$q(t) = A \frac{\text{sen}[\omega_0(t+t_0)]}{\omega_0(t+t_0)} + B \frac{\text{cos}[\omega_0(t+t_0)]}{\omega_0(t+t_0)}, \quad (3.11)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. A velocidade e o momento são dados, respectivamente, por

$$v(t) = -\frac{1}{\omega_0(t+t_0)} \left\{ \left(\frac{A}{(t+t_0)} + \omega_0 B \right) \text{sen}[\omega_0(t+t_0)] + \left(\frac{B}{(t+t_0)} - \omega_0 A \right) \text{cos}[\omega_0(t+t_0)] \right\} \quad (3.12)$$

e

$$p(t) = -\frac{m_0}{\omega_0 t_0^2} (t+t_0) \left[\left(\frac{A}{(t+t_0)} + \omega_0 B \right) \text{sen}[\omega_0(t+t_0)] + \left(\frac{B}{(t+t_0)} - \omega_0 A \right) \text{cos}[\omega_0(t+t_0)] \right]. \quad (3.13)$$

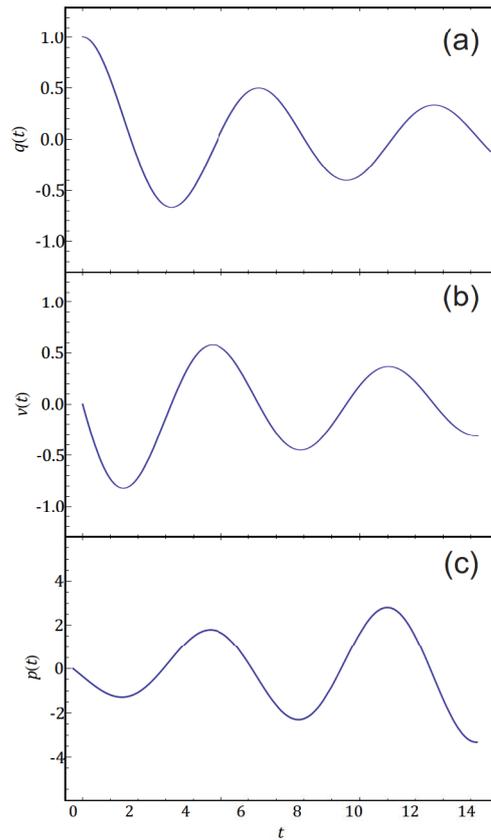


Figura 10: Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (V) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$.

As Figs. 10(a) e 10(c) mostram o comportamento das funções $q(t)$ e $p(t)$, respectivamente. Observamos aqui a semelhança com o caso do oscilador (III), no qual a amplitude de movimento diminui enquanto que a amplitude do momento aumenta. Razão para este comportamento deve-se à dependência temporal da massa, a qual nos dois casos é proporcional à potência quadrada do tempo. A diferença está no período de movimento, que é variável no caso (III), mas aqui é constante durante todo movimento. Isso devido à frequência angular $\omega(t)$ ser constante no caso (V), enquanto que para os osciladores log-periódicos, ela varia com o inverso do tempo. Fig. 10(b) mostra o comportamento da velocidade, a qual oscila sob amplitude cada vez menor, caracterizando o efeito dissipativo do sistema.

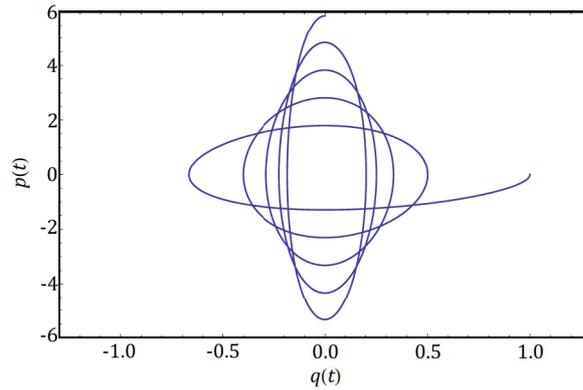


Figura 11: Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (V) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$.

Para o espaço de fase, temos seu comportamento mostrado na Fig. 11. Observamos que o gráfico é uma curva aberta, como é observada em sistemas não-conservativos. Aqui, vemos o mesmo comportamento observado nas Figs. 10(a) e 10(c): enquanto a posição diminui sua amplitude, o momento aumenta.

3.2.3 Oscilador (VI): $m(t) = m_o \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)^2$

A equação de movimento nesse caso é escrita como

$$\ddot{q} + \frac{4}{t+t_0}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (3.14)$$

que é similar a do oscilador anterior com o fator de amortecimento dado por ($\gamma = \frac{2}{t+t_0}$). A solução da Eq. (3.14) escreve-se

$$q(t) = \frac{1}{\omega_0(t+t_0)^2} \left\{ A \left[\frac{\text{sen}[\omega_0(t+t_0)]}{\omega_0(t+t_0)} - \cos[\omega_0(t+t_0)] \right] + B \left[\text{sen}[\omega_0(t+t_0)] + \frac{\cos[\omega_0(t+t_0)]}{\omega_0(t+t_0)} \right] \right\}, \quad (3.15)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. A velocidade e o momento canônico são dados, respectivamente, por

$$v(t) = \frac{1}{\omega_0(t+t_0)^2} \left\{ \left(\omega_0 A - \frac{3A}{\omega_0(t+t_0)^2} - \frac{3B}{\omega_0(t+t_0)} \right) \text{sen}[\omega_0(t+t_0)] + \left(\omega_0 B - \frac{3B}{\omega_0(t+t_0)^2} + \frac{3A}{\omega_0(t+t_0)} \right) \cos[\omega_0(t+t_0)] \right\} \quad (3.16)$$

e

$$p(t) = \frac{m_0}{\omega_0 t_0^4} (t + t_0)^2 \left\{ \left(\omega_0 A - \frac{3A}{\omega_0 (t + t_0)^2} - \frac{3B}{\omega_0 (t + t_0)} \right) \text{sen} [\omega_0 (t + t_0)] \right. \\ \left. + \left(\omega_0 B - \frac{3B}{\omega_0 (t + t_0)^2} + \frac{3A}{\omega_0 (t + t_0)} \right) \text{cos} [\omega_0 (t + t_0)] \right\}. \quad (3.17)$$

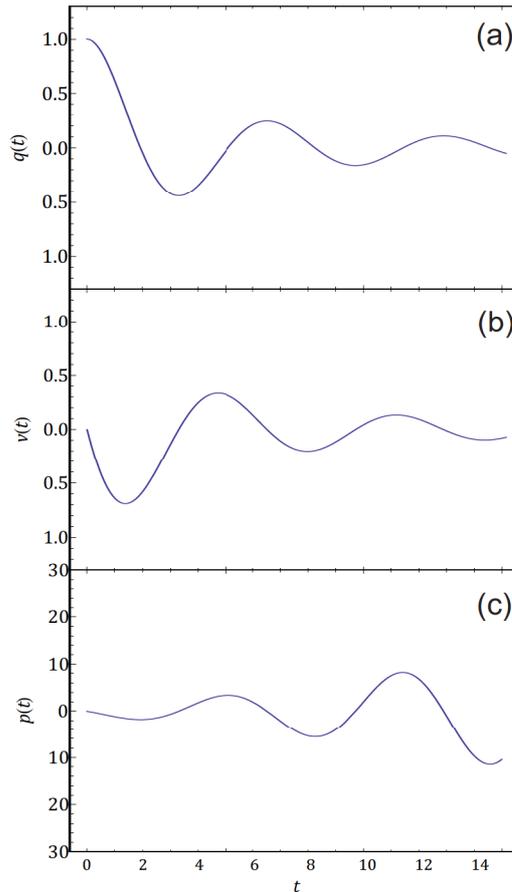


Figura 12: Gráfico mostrando o comportamento das funções (a) $q(t)$, (b) $v(t)$ e (c) $p(t)$ para o oscilador (VI) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$.

As Figs. 12(a) e 12(c) mostram o comportamento das funções $q(t)$ e $p(t)$, respectivamente, para o oscilador (VI). Observamos aqui a semelhança com o caso do oscilador (V), no qual a amplitude de movimento diminui enquanto que a amplitude o momento aumenta. A diferença está no grau de amortecimento, que é maior no caso (VI). Isso devido à massa aumentar com uma potência no tempo maior que no caso (V)(veja Eqs. 3.10 e 3.14). Fig. 12(b) mostra o comportamento da velocidade, a qual oscila sob amplitude cada vez menor, caracterizando o comportamento amortecido do sistema.

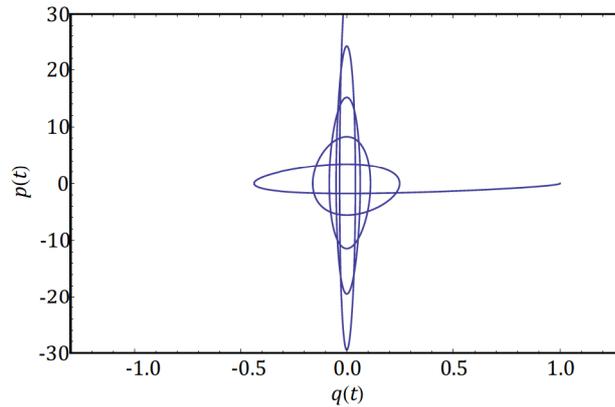


Figura 13: Gráfico mostrando o espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$) para o oscilador (V) com condições iniciais $q(0) = 1$ e $v(0) = 0$ e constantes $\omega_0 = 1$, $t_0 = 2\pi$ e $m_0 = 1$.

Para o espaço de fase, temos seu comportamento mostrado na Fig. 13. Observamos que o gráfico também se trata de uma curva aberta, como é observada no caso anterior. Aqui, também vemos o mesmo comportamento observado nas Figs. 10(a) e 10(c), que enquanto a posição diminui sua amplitude, o momento aumenta.

3.3 Soluções quânticas

3.3.1 Oscilador (IV): $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$

A equação auxiliar para o oscilador (IV) é dada por

$$\ddot{\rho} + \gamma\dot{\rho} + \omega_0^2\rho = \frac{e^{-2\gamma t}}{m_0^2} \frac{1}{\rho^3}. \quad (3.18)$$

Na Ref. [32] Pedrosa, Serra e Guedes usaram a seguinte função auxiliar, como solução da equação de Milne-Pinney para o oscilador de Caldirola-Kanai

$$\rho = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{m_0\Omega_0}}, \quad (3.19)$$

onde $\Omega_0^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$. Visto que ρ deve ser real para que o invariante seja hermitiano, o único caso de possível análise é para o qual $\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$. Com isso eles obtiveram a seguinte

função de onda para o oscilador CK

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & \left[\frac{m_0 \Omega_0}{\pi \hbar (n!)^2 2^{2n}} \right]^{1/4} \exp \left[\frac{\gamma}{4} - i \Omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] t \\ & \times \exp \left[-\frac{m_0}{2\hbar} \left(\Omega_0 + i \frac{\gamma}{4} \right) e^{\gamma t} q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{m_0 \Omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} q e^{\gamma t/2} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Da Eq. (1.30) o produto da incerteza pode ser expresso por

$$(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega_0^2} \right)^{1/2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar. \quad (3.21)$$

Assim como para os osciladores (II) e (III), os estados $|\beta, t\rangle$ para o oscilador de CK representam os estados comprimidos do sistema, pois $\dot{\rho} \neq 0$, o que indica $(\Delta p \Delta q)_\beta > \frac{\hbar}{2}$. Para $n = 0$, o estado

$$\begin{aligned} \psi_0(q, t) = & \left[\frac{m_0 \Omega_0}{\pi \hbar} \right]^{1/4} \exp \left[\frac{\gamma}{4} - i \frac{\Omega_0}{2} \right] t \\ & \times \exp \left[-\frac{m_0}{2\hbar} \left(\Omega_0 + i \frac{\gamma}{4} \right) e^{\gamma t} q^2 \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

corresponde à representação de posição dos estados comprimidos.

3.3.2 Oscilador (V): $m(t) = m_o \left(1 + \frac{t_0}{t} \right)^2$

A equação de auxiliar para este oscilador é dada por

$$\ddot{\rho} + \frac{2}{t+t_0} \dot{\rho} + \omega_0^2 \rho = \frac{t_0^4}{m_0^2 (t+t_0)^4} \frac{1}{\rho^3} \quad (3.23)$$

Com o objetivo de simplificar os cálculos subsequentes, fazemos a substituição $\tau \rightarrow t + t_0$ e obtemos

$$\ddot{\rho}(\tau) + \frac{2}{\tau} \dot{\rho}(\tau) + \omega_0^2 \rho(\tau) = \frac{t_0^4}{m_0^2 \tau^4} \frac{1}{\rho^3(\tau)}. \quad (3.24)$$

A equação auxiliar transformada é dada por

$$\ddot{y}(\tau) + \omega_0^2 y(\tau) = \frac{1}{m_0^2 c_0^4} \frac{1}{y^3}. \quad (3.25)$$

Aqui, a função $\zeta(t)$ obtida foi

$$\zeta(\tau) = \zeta_0 \frac{t_0}{\tau} \quad (3.26)$$

Considere a equação homogênea associada à (3.25)

$$\ddot{f}_{1,2} + \omega_0^2 f_{1,2} = 0. \quad (3.27)$$

Observe que esta equação é idêntica àquela para o oscilador harmônico independente do tempo. Dessa forma, suas duas soluções independentes são

$$f_1 = \text{sen}(\omega_0 \tau) \quad (3.28)$$

e

$$f_2 = \text{cos}(\omega_0 \tau), \quad (3.29)$$

cujo Wronskiano é dado por $W = -\omega_0$. Assim escolhendo $I_1 = I_2 = \frac{\omega_0}{2m_0\zeta_0^2}$, obtemos

$$y = \frac{1}{\sqrt{\omega_0 m_0}} \frac{1}{\zeta_0}. \quad (3.30)$$

Portando, para este caso, a função auxiliar obtida será

$$\rho = \frac{t_0}{\sqrt{m_0 \omega_0}} \frac{1}{(t + t_0)}. \quad (3.31)$$

Substituindo a função auxiliar encontrada na expressão para a função de onda (1.3), encontramos

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_0 t} \left[\frac{m_0 \omega_0 (t + t_0)^2}{\pi \hbar (n!)^2 2^{2n} t_0^2} \right]^{1/4} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{m_0}{2\hbar t_0} (t + t_0)^2 \left[\frac{i}{(t + t_0)} + \omega_0 \right] q^2 \right\} H_n \left[\left(\frac{m_0 \omega_0}{\hbar t_0^2} \right)^{1/2} (t + t_0) q \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

O produto da incerteza neste estado é dado por

$$(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 (t + t_0)^2} \right)^{1/2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar. \quad (3.33)$$

Observe que este é o primeiro dentre os osciladores que estudamos neste trabalho para o qual o produto da incerteza depende do tempo. Veja que para um tempo suficientemente grande, temos que o produto da incerteza tende para o valor mínimo de incerteza. Em outras palavras, no limite $t \rightarrow \infty$, $(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} \rightarrow \frac{\hbar}{2}$.

Novamente temos que os estados $|\beta, t\rangle$ representam os estados comprimidos do sistema, pois $(\Delta p \Delta q)_\beta > \frac{\hbar}{2}$. Considere $n = 0$. Neste estado, temos que

$$\begin{aligned} \psi_0(q, t) = & e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} \left[\frac{m_0 \omega_0 (t + t_0)^2}{\pi \hbar t_0^2} \right]^{1/4} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{m_0}{2\hbar t_0} (t + t_0)^2 \left[\frac{i}{(t + t_0)} + \omega_0 \right] \right\} q^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

representa os estados comprimidos na representação de coordenadas.

3.3.3 Oscilador (VI): $m(t) = m_o \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)^2$

A equação auxiliar para este oscilador é dada por

$$\ddot{\rho} + \frac{4}{t + t_0} \dot{\rho} + \omega_0^2 \rho = \frac{t_0^8}{m_0^2 (t + t_0)^8} \frac{1}{\rho^3} \quad (3.35)$$

Novamente, a fim de simplificar os cálculos subsequentes, fazemos a substituição $\tau \rightarrow t + t_0$ e obtemos

$$\ddot{\rho}(\tau) + \frac{4}{\tau} \dot{\rho}(\tau) + \omega_0^2 \rho(\tau) = \frac{t_0^8}{m_0^2 \tau^8} \frac{1}{\rho^3(\tau)}. \quad (3.36)$$

A equação auxiliar transformada é dada por

$$\ddot{y}(\tau) + \left(\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) y(\tau) = \frac{1}{m_0^2 \zeta_0^4} \frac{1}{y^3}. \quad (3.37)$$

Aqui, a função $\zeta(t)$ obtida foi

$$\zeta(\tau) = \zeta_0 \frac{t_0^2}{\tau^2} \quad (3.38)$$

Considere a equação homogênea associada à (3.37)

$$\ddot{f}_{1,2} + \left(\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) f_{1,2} = 0. \quad (3.39)$$

Observe que esta equação é idêntica àquela para o oscilador harmônico independente do tempo. Dessa forma, suas duas soluções independentes são

$$f_1 = \frac{\cos(\omega_0 \tau)}{\omega_0 \tau} + \text{sen}(\omega_0 \tau) \quad (3.40)$$

e

$$f_2 = \frac{\text{sen}(\omega_0\tau)}{\omega_0\tau} - \cos(\omega_0\tau), \quad (3.41)$$

cujo Wronskiano é dado por $W = -\omega_0$. Assim escolhendo $I_1 = I_2 = \frac{\omega_0}{2m_0\zeta_0^2}$, obtemos

$$y = \frac{1}{\sqrt{\omega_0 m_0}} \frac{1}{\zeta_0} \left[1 + \frac{1}{\omega_0^2 (t + t_0)^2} \right]^{1/2}. \quad (3.42)$$

Portando, para este caso, a função auxiliar obtida será

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{m_0\omega_0}} \frac{t_0^2}{(t + t_0)^2} \left[1 + \frac{1}{\omega_0^2 (t + t_0)^2} \right]^{1/2}. \quad (3.43)$$

Substituindo a função auxiliar encontrada na expressão para a função de onda (1.3), encontramos

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_0 \left[t - \frac{\text{arctg}[\omega_0(t+t_0)]}{\omega_0} + \frac{\text{arctg}(\omega_0 t_0)}{\omega_0} \right]} \left[\frac{m_0\omega_0 (t + t_0)^4}{\pi \hbar (n!)^2 2^{2n} t_0^4} \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 (t + t_0)^2} \right)^{-2} \right]^{1/4} \\ & \times \text{Exp} \left\{ -i \frac{m_0}{2\hbar t_0^4} \frac{(t + t_0)^4}{\omega_0^2 (t + t_0)^2 + 1} \left[\frac{2\omega_0^2 (t + t_0)^2 + 3}{(t + t_0)} - i\omega^3 (t + t_0)^2 \right] q^2 \right\} \\ & \times H_n \left[\left(\frac{m_0\omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{(t + t_0)^2}{t_0^2} \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 (t + t_0)^2} \right)^{-1/2} q \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

O produto da incerteza é dado por

$$(\Delta q \Delta p)_{\psi_n} = \left[1 + \left(\frac{2\omega_0^2 (t + t_0)^2 + 3}{\omega_0^3 (t + t_0)^3} \right)^2 \right]^{1/2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar. \quad (3.45)$$

Assim como para o oscilador (V), o produto da incerteza deste oscilador é dependente do tempo, que tende para o valor mínimo de incerteza a medida em que t se torna muito grande.

Novamente temos que os estados $|\beta, t\rangle$ representam os estados comprimidos do sistema para intervalos de tempo $t \neq \infty$, pois $(\Delta p \Delta q)_\beta > \frac{\hbar}{2}$. Considere $n = 0$. Neste estado, temos que

$$\psi_0(q, t) = e^{-i\frac{1}{2}\omega_0[t - \arctg[\omega_0(t+t_0)] + \arctg(\omega_0 t_0)]} \left[\frac{m_0 \omega_0 (t+t_0)^4}{\pi \hbar t_0^4} \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 (t+t_0)^2} \right)^{-2} \right]^{1/4} \\ \times \text{Exp} \left\{ -i \frac{m_0}{2\hbar t_0^4} \frac{(t+t_0)^4}{\omega_0^2 (t+t_0)^2 + 1} \left[\frac{2\omega_0^2 (t+t_0)^2 + 3}{(t+t_0)} - i\omega_0^3 (t+t_0)^2 \right] q^2 \right\} \quad (3.46)$$

representa os estados comprimidos na representação de coordenadas.

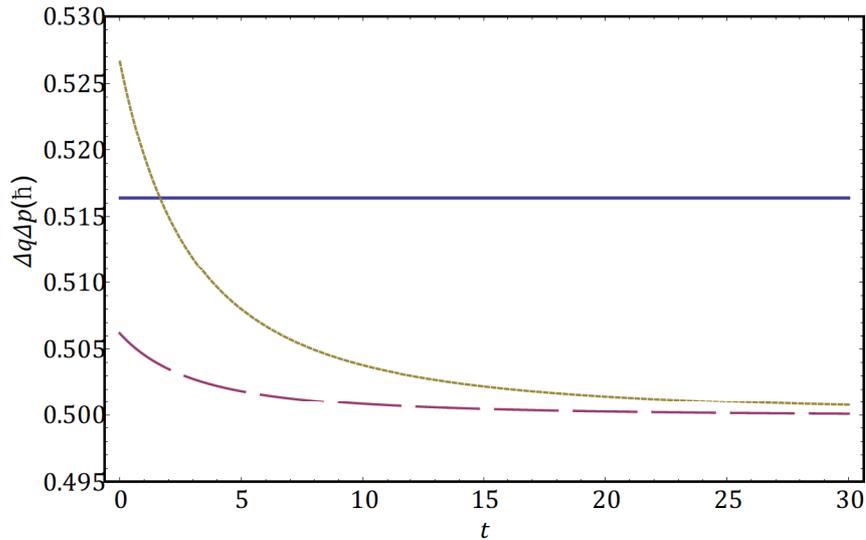


Figura 14: Gráfico de $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ para os osciladores IV (normal), V (tracejado) e VI (pontilhado) para os valores das constantes $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$, $m_0 = 1$ e $t_0 = 2\pi$

A Fig. 14 mostra o gráfico do produto da incerteza no estado fundamental ($n = 0$) em função do tempo. A linha horizontal representa $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ para o oscilador IV, que de acordo com Eq. (3.21) é independente do tempo. Para os osciladores V e VI temos as curvas tracejada e pontilhada, respectivamente. Nesses dois casos, $(\Delta q \Delta p)_{\psi_0}$ é uma função monotonicamente decrescente do tempo, indo para um valor assintótico igual a $\frac{\hbar}{2}$, que é o valor de mínima incerteza.

CONCLUSÃO

Estudamos seis diferentes osciladores com massa e/ou frequência dependentes do tempo, que foram classificados em duas classes: (a) osciladores log-periódicos e (b) osciladores tipo Caldirola-Kanai (tipo CK). Para todos os casos, obtivemos a solução da equação de movimento e analisamos o comportamento de cada oscilador a partir do gráfico das funções $q(t)$ (posição), $v(t)$ (velocidade) e $p(t)$ (momento linear), assim como do gráfico do espaço de fase ($q(t)$ vs $p(t)$). Também resolvemos a equação de Schrödinger, obtendo a função de onda através da técnica de Lewis-Riesenfeld (ou método dos invariantes quânticos). Calculamos as médias dos operadores q , p , q^2 e p^2 , assim como o produto de incerteza, para os seis osciladores considerados neste trabalho.

Para a primeira classe de osciladores estudada (os osciladores log-periódicos) consideramos os seguintes casos: (I) $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$, (II) $m(t) = m_0$ e (III) $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$. Em todos os casos $\omega(t) = \omega_0 \frac{t_0}{t}$. As soluções clássicas para estes osciladores mostram o comportamento amortecido refletido na velocidade $v(t)$, que em todos os casos oscilam sob decrescente amplitude. Para o oscilador (I), o gráfico do espaço de fase trata-se de uma curva fechada, idêntica ao espaço de fase do oscilador harmônico independente do tempo. Este resultado, a princípio, parece um tanto surpreendente, pois é esperado que em sistemas não-conservativos (como é o caso dos osciladores estudados neste trabalho), o espaço de fase seja uma curva aberta. Entretanto, se fizermos a análise do espaço de fase através da equação da elipse,

$$\frac{p^2}{(2m_0 t/t_0)} + \frac{q^2}{2t t_0^3/m_0 \omega_0^2} = E \propto \frac{1}{2t},$$

onde E é a anergia do sistema (proporcional ao inverso do tempo), veremos que a equação independerá de t , justificando a curva do espaço de fase para esse oscilador se tratar de uma curva fechada, ainda que se trate de um sistema não-conservativo. O espaço de fase dos osciladores (II) e (III) é uma curva aberta, como é de se esperar para sistemas não-conservativos. Se usarmos, mais uma vez, a equação da elipse nesses dois casos, observaremos que seriam os eixos da elipse são dependentes de t . Isto explica o fato de que, no caso (II), a curva comprime-se em relação ao eixo $p(t)$ enquanto alonga-se em relação

ao eixo $q(t)$. Para o caso (III), o comportamento é oposto em relação ao oscilador (II) quanto à forma da elipse: a curva alonga-se em relação ao eixo $p(t)$ enquanto comprime-se em relação ao eixo $q(t)$.

Para a classe (b) estudamos o oscilador de Caldirola-Kanai (IV), no qual $\omega(t) = \omega_0$ e $m(t) = m_0 \exp(\gamma t)$ e os osciladores com $\omega(t) = \omega_0$ e $m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^\alpha$, para $\alpha = 2$ (V) e $\alpha = 4$ (VI). Estes três casos apresentam comportamentos similares ao de um oscilador harmônico independente do tempo com amortecimento: tanto a posição quanto a velocidade oscilam com amplitude decrescente. Apenas o momento linear oscila com amplitude crescente, isso devido à taxa de aumento da massa ser maior do que a diminuição da amplitude da velocidade. Quanto ao espaço de fase, o gráfico para os três osciladores é uma curva não fechada, no qual, fazendo a análise da equação da elipse, observamos o “alongamento” do eixo $p(t)$ e o “achatamento” do eixo $q(t)$. Esta “conversão” na forma da curva do espaço de fase ocorre de forma abrupta para o oscilador de Caldirola-Kanai (oscilador IV), e de forma suave para os osciladores (V) e (VI).

Como já mencionamos, resolvemos a equação de Schrödinger dos seis sistemas através do método dos invariantes quânticos. O processo para a obtenção da função de onda, neste trabalho, se resumiu em obter a solução de uma equação diferencial não-linear, a equação de Milne-Pinney, que foi resolvida através do método proposto nas Refs. [36, 37, 38]. Tendo obtido as funções de onda, calculamos o produto da incerteza para os seis casos, os quais organizamos na tabela abaixo.

Osciladores log-periódicos $\omega(t) \propto \frac{1}{t}$	(I) $m(t) = m_0 \frac{t}{t_0}$	$\Delta q \Delta p = (n + \frac{1}{2}) \hbar$
	(II) $m(t) = m_0$	$\Delta q \Delta p = \left(1 + \frac{2\omega_0 t_0}{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}\right) (n + \frac{1}{2}) \hbar$
	(III) $m(t) = m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$	$\Delta q \Delta p = \left(1 + \frac{2\omega_0 t_0}{(4\omega_0^2 t_0^2 - 1)^{1/2}}\right) (n + \frac{1}{2}) \hbar$
Osciladores tipo Caldirola-Kanai $\omega(t) = \omega_0$	(II) $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$	$\Delta q \Delta p = \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega_0^2}\right)^{1/2} (n + \frac{1}{2}) \hbar$
	$m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^2$	$\Delta q \Delta p = \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 (t+t_0)^2}\right)^{1/2} (n + \frac{1}{2}) \hbar$
	$m(t) = m_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^4$	$\Delta q \Delta p = \left(1 + \frac{2\omega_0^2 (t+t_0)^2 + 3}{\omega_0^3 (t+t_0)^3}\right)^{1/2} (n + \frac{1}{2}) \hbar$

É observado que, para o estado fundamental ($n = 0$), apenas o produto da incerteza do oscilador (I) é mínimo ($\Delta q \Delta p = \hbar/2$), resultado idêntico ao oscilador harmônico independente do tempo. Além disso, apenas nos casos (V) e (VI) o produto da incerteza é dependente do tempo, o qual, para o estado fundamental, tende ao mínimo a medida que t aumenta. Entretanto esta afirmação deve ser tratada com cuidado, pois a massa $m(t)$ aumenta com t , de forma que é necessário observar as dimensões do sistemas e de seus parâmetros, a fim de verificar a validade do regime quântico para a partir de certos valores de t .

Posteriormente à conclusão deste trabalho, observamos que é possível calcular a probabilidade de transição entre dois estados, do estado n no instante t_0 para outro estado m em um instante posterior t . Esta probabilidade é dada pelo módulo quadrado da amplitude de transição, que pode ser escrita como

$$P_{n,m}(t) = \int_{t_0}^t dq \psi'_n(q, t_0) \psi_m(q, t).$$

O cálculo das probabilidade de transições destes osciladores, assim como para outras classes de osciladores ou Hamiltonianas com dependência temporal explícita, pode ser listado com perspectiva deste trabalho.

APÊNDICE A – Autoestados do operador Invariante e as Soluções da Equação de Schrödinger

Considere um sistema quântico descrito pela Hamiltoniana $H(t)$. A equação que descreve sua evolução no tempo é a equação de Schrödinger, dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_s = H(t) |\psi(t)\rangle_s, \quad (\text{A.1})$$

onde o índice s indica que o estado do sistema evolui de acordo com a equação de Schrödinger. Considere agora um operador hermitiano $I(t)$ ($I = I^\dagger$) com dependência temporal explícita, que é *invariante* obedecendo à Eq. (1.2). Ao aplicarmos a Eq. (1.2) no estado $|\psi(t)\rangle_s$ e usando a Eq. (A.1), obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I|\psi(t)\rangle_s) = H(t) (I|\psi(t)\rangle_s). \quad (\text{A.2})$$

Dessa forma, vemos que a ação do operador invariante no estado $|\psi(t)\rangle$, que é solução do sistema, gera uma nova solução da equação de Schrödinger $I|\psi(t)\rangle_s$. Esse resultado é válido para qualquer invariante, mas se supormos que $I(t)$ não possua operadores com derivadas temporais, poderemos deduzir uma regra simples para escolhermos as fases dos seus autoestados de modo que estes se tornem solução da equação de Schrödinger. Daqui por diante, procederemos com os cálculos com essa suposição.

Admitimos também que o invariante pertence a um conjunto completo de observáveis comutáveis, a fim de garantirmos a existência de um conjunto completo de autoestados de $I(t)$. Dessa forma, consideremos a equação de autovalores para o operador invariante

$$I|\lambda, k; t\rangle = \lambda|\lambda, k; t\rangle, \quad (\text{A.3})$$

onde λ é o autovalor de I e k representa o conjunto de números quânticos necessários para se definir um estado do sistema. Devido à hermiticidade do invariante, temos que

seus autovalores são reais. A relação de completeza para os autoestados de I é dada por

$$\langle \lambda', k'; t | \lambda, k; t \rangle = \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{k' k}. \quad (\text{A.4})$$

Além de os autovalores de I serem reais, eles também são independentes do tempo, o que é observado ao derivarmos equação de autovalores de $I(t)$ (Eq. (A.3)) com relação ao tempo

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + I |\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Ao aplicarmos a Eq. (1.2), obtemos

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + IH |\lambda, k; t\rangle - \lambda H |\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (\text{A.6})$$

Agora, multiplicando escalarmente esta equação por $|\lambda', k'; t\rangle$, obtemos

$$i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \lambda', k'; t | H | \lambda, k; t\rangle = 0. \quad (\text{A.7})$$

Para $\lambda' = \lambda$, a Eq. (A.7) torna-se

$$\langle \lambda, k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (\text{A.8})$$

A Eq. (A.5), multiplicada por $|\lambda, k; t\rangle$ resulta em

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda, k; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \quad (\text{A.9})$$

Assim, das eqs. (A.8) e (A.9),

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Iremos agora investigar a conexão entre os autoestados de $I(t)$ e as soluções da equação de Schrödinger. Para isso, procedemos da seguinte maneira. Sabendo que λ é independente de tempo, a Eq. (A.5) se torna

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Multiplicando escalarmente esta equação por $|\lambda', k'; t\rangle$ e usado a Eq. (A.7), obtemos

$$i\hbar (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | H | \lambda, k; t\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Para $\lambda \neq \lambda'$, a Eq. acima reduz-se a

$$i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = \langle \lambda', k'; t | H | \lambda, k; t \rangle. \quad (\text{A.13})$$

A Eq. (A.12) não é válida para $\lambda' = \lambda$, caso contrário, poderíamos afirmar que os autoestados de I satisfazem a equação de Schrödinger. No entanto, ainda não fixamos a fase do estado $|\lambda, k; t\rangle$, de forma que estamos livres para multiplicá-lo por um fator de fase dependente de tempo. Dessa forma, definimos um novo conjunto de autoestados do operador invariante, os quais se relacionam com o antigo por uma transformação de *gauge*

$$|\lambda, k; t\rangle_s = e^{i\theta_{\lambda k}(t)} |\lambda, k; t\rangle, \quad (\text{A.14})$$

onde $\theta_{\lambda k}(t)$ são funções reais dependentes de tempo. Os estados $|\lambda, k; t\rangle_s$ são autoestados do operador invariante desde que, como assumimos anteriormente, o operador $I(t)$ não contenha derivadas temporais. Sendo assim, estes estados obedecem à equação de autovalores

$$I|\lambda, k; t\rangle_s = \lambda|\lambda, k; t\rangle_s. \quad (\text{A.15})$$

Como havíamos observado, a equação (A.13) é válida para $\lambda' \neq \lambda$, e essa afirmação ainda permanece para este novo conjunto de autovalores. Agora, resta encontrarmos as fases desses autoestados de forma que os mesmos satisfaçam a equação de Schrödinger, ou seja, de forma que a Eq. (A.13) permaneça válida para $\lambda' = \lambda$. Assim, usando os novos autoestados na Eq. (A.11), obtemos

$$(\lambda - I) \left[i \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} |\lambda, k; t\rangle + \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle \right] = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \quad (\text{A.16})$$

Agora, multiplicando a equação acima por $\langle \lambda', k'; t |$ e utilizando a Eq. (A.3), obtemos

$$(\lambda' - \lambda) \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{k'k} \hbar \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = (\lambda' - \lambda) \left[\langle \lambda', k'; t | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \lambda, k; t \rangle \right]. \quad (\text{A.17})$$

A equação acima, para $\lambda' = \lambda$, reduz-se a

$$\delta_{k'k} \hbar \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle \lambda, k'; t | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \lambda, k; t \rangle. \quad (\text{A.18})$$

Para que a Eq. (A.18) seja satisfeita, os estados $|\lambda, k; t\rangle$ devem ser escolhidos de forma o lado direito da (A.18) anule-se para $k' \neq k$, e esta diagonalização é sempre possível devido ao fato de que o operador $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H$ é hermitiano. Portanto, para que o estado $|\lambda, k; t\rangle_s$

satisfaça a equação de Schrödinger, as fases devem satisfazer a equação

$$\hbar \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle \lambda, k; t | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \lambda, k; t \rangle. \quad (\text{A.19})$$

Assim, escrevemos a solução geral da equação de Schrödinger na seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle_s = \sum_{\lambda, k} c_{\lambda k} e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\lambda, k; t\rangle, \quad (\text{A.20})$$

onde os coeficientes da expansão são independentes do tempo.

APÊNDICE B – Operador Invariante para o Oscilador Harmônico com massa e frequência dependentes de tempo

Para estudar o oscilador harmônico dependente do tempo, Lewis e Reisenfeld [10] construíram um operador invariante dado por

$$I(t) = \frac{1}{2} [\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \mu(t) \{q, p\}] \quad (\text{B.1})$$

onde α , β e μ são funções reais dependentes do tempo e q, p é o anti-comutador de q e p . Derivando a equação acima com relação ao tempo, obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} [\dot{\alpha}q^2 + 2\alpha q\dot{q} + \dot{\beta}p^2 + 2\beta p\dot{p} + \dot{\mu} \{q, p\} + \mu (\dot{q}p + q\dot{p} + \dot{p}q + p\dot{q})]. \quad (\text{B.2})$$

Os valores de \dot{q} e \dot{p} podem ser retirados das equações de Heisenberg

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar} [q, H] = \frac{p}{2m(t)}, \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{p} = \frac{1}{i\hbar} [p, H] = -m(t)\omega^2(t)q. \quad (\text{B.4})$$

pois $[q, p] = i\hbar$. Essas equações quando combinadas, geram a equação de movimento

$$\ddot{q} + \gamma(t)\dot{q} + \omega^2(t)q = 0. \quad (\text{B.5})$$

Onde $\gamma(t) = \frac{d}{dt} \ln [M(t)]$. Dessa forma, a eq. (B.2) se torna

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \frac{1}{2} [\dot{\alpha} - 2m(t)\omega^2(t)\mu] q^2 + \frac{1}{2} \left(\dot{\beta} + \frac{2}{m(t)\mu} \right) p^2 \\ & + \frac{1}{2} \left[\dot{\mu} + \frac{\alpha}{m(t)} - m(t)\omega^2(t)\beta \right] \{q, p\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Usando o fato de que o operador I é um invariante (eq. (1.2)), obtemos o sistema de equações

$$\dot{\alpha} - 2m(t)\omega^2(t)\mu = 0, \quad (\text{B.7a})$$

$$\dot{\beta} + \frac{2\mu}{m(t)} = 0, \quad (\text{B.7b})$$

$$\frac{\alpha}{m(t)} - \beta m(t)\omega^2(t) + \dot{\mu} = 0. \quad (\text{B.7c})$$

Essas equações podem ser organizadas de forma a serem reduzidas a uma única equação diferencial, chamada de equação auxiliar do invariante do sistema. Para tal, primeiramente fazemos a substituição

$$\beta(t) = \sigma^2(t) \quad (\text{B.8})$$

Na equação (B.7b) para obtermos

$$\mu = -m\sigma\dot{\sigma}, \quad (\text{B.9})$$

que substituída, na eq. (B.7c), resulta em

$$\alpha = m^2\dot{\sigma}^2 + m^2\sigma\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma^2 + m\dot{m}\sigma\dot{\sigma}. \quad (\text{B.10})$$

E por fim, substituindo a equação acima na (B.7a), obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dt} [m^2\dot{\sigma}^2 + m^2\sigma\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma^2 + m\dot{m}\sigma\dot{\sigma}] = -2m^2\omega^2\sigma\dot{\sigma}, \quad (\text{B.11})$$

que após algumas substituições de variáveis, se torna

$$\sigma \frac{df}{d\sigma} + 3f = 0, \quad (\text{B.12})$$

onde $f = \frac{1}{\sigma} (\alpha - m^2\dot{\sigma}^2)$. A solução dessa equação resulta na mencionada equação auxiliar. Integrando a eq. (B.12), e obtemos

$$f(t) = \frac{C^2}{\sigma^3}, \quad (\text{B.13})$$

ou

$$\ddot{\sigma} + \gamma(t)\dot{\sigma} + \omega^2(t)\sigma = \frac{C^2}{m^2(t)\sigma^3}, \quad (\text{B.14})$$

onde $\gamma(t) = \frac{d}{dt} \ln[m(t)]$ e C é uma constante de integração da equação (B.12) que está elevada ao expoente 2 apenas para lembrar que ele precisa ser positiva a fim de que tenhamos apenas soluções reais da eq. (B.14) e assim garantindo que o operador invariante é hermitiano. Após fazermos a mudança de escala $\sigma(t) = C^{1/2}\rho(t)$, obtemos

$$\ddot{\rho} + \gamma(t)\dot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{m^2(t)\rho^3}, \quad (\text{B.15})$$

que é a equação auxiliar do invariante de sistema. Ela determina inteiramente o invariante (Eq. (B.1)), de forma que obtemos

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2 \right]. \quad (\text{B.16})$$

APÊNDICE C – Solução da equação de autovalores do operador $I(t)$ para o oscilador harmônico dependente do tempo

Considere a equação de autovalores para o invariante $I(t)$ (Eq. (A.15)) na representação de posição, que pode ser escrita como

$$I\phi_n(q, t) = \lambda_n\phi_n(q, t). \quad (\text{C.1})$$

Consideremos agora a seguinte transformação unitária[21, 28, 29, 30], definida pelas equações

$$\phi'_n(q, t) = \mathcal{U}\phi_n(q, t) \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{U} = \exp\left[-\frac{im(t)\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2\right], \quad (\text{C.3})$$

a qual transforma a equação de autovalores do invariante em

$$I'\phi'_n(q, t) = \lambda_n\phi'_n(q, t), \quad (\text{C.4})$$

com

$$I' = \mathcal{U}I\mathcal{U}^\dagger. \quad (\text{C.5})$$

Essa transformação fornece o operador invariante modificado na seguinte forma

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}, \quad (\text{C.6})$$

cuja equação de autovalor, ao fazermos a mudança de variável $\xi = q/\rho$, é expressa na forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\xi^2}{2} \right] \varphi_n(\xi) = \lambda_n \varphi_n(\xi), \quad (\text{C.7})$$

ou

$$I' \varphi_n(\xi) = \lambda_n \varphi_n(\xi), \quad (\text{C.8})$$

onde

$$\phi'_n(q, t) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \varphi_n(\xi) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \varphi_n(q/\rho). \quad (\text{C.9})$$

O fator de normalização $1/\rho^2$ é introduzido para que a condição

$$\int \phi_n^{*'}(q, t) \phi_n(q, t) dq = \int \varphi_n^*(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi = 1 \quad (\text{C.10})$$

seja satisfeita. A equação (C.7) representa uma equação de Schrödinger unidimensional e independente do tempo, cuja solução é bem conhecida,

$$\varphi_n(\xi) = \left(\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\hbar}\right) H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \xi \right], \quad (\text{C.11})$$

onde

$$\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.12})$$

e H_n são os polinômios de Hermite de ordem n . E assim, usando as equações (C.2), (C.3), (C.9) e (C.11), encontramos que

$$\phi_n(q, t) = \left(\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{iM(t)}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M(t)\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q}{\rho} \right]. \quad (\text{C.13})$$

Agora, resta-nos calcular as fases dos autoestados de $I(t)$ (Eq. (C.13)) para determinarmos as soluções da equação de Schrödinger. Usando a Hamiltoniana na representação de posição e a Eq. (C.3) na (1.4), após alguns cálculos, obtemos

$$\hbar \frac{d\theta_n(t)}{dt} = \langle \phi'_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i\hbar \dot{\rho}}{2\rho} - \frac{I'}{m(t)\rho^2} | \phi'_n \rangle. \quad (\text{C.14})$$

Então substituindo a Eq. (C.9) na (C.14), encontramos

$$\hbar \frac{d\theta_n(t)}{dt} = \langle \varphi_n | -\frac{I'}{m(t)\rho} | \varphi_n \rangle. \quad (\text{C.15})$$

E assim, usando a Eq. (C.8) e a condição de normalização dos estados φ_n , encontramos

$$\theta_n(t) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{m(t')\rho^2(t')}. \quad (\text{C.16})$$

Portanto, usando as eqs. (C.13) e (C.16), encontramos as soluções exatas da equação de Schrödinger,

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & e^{i\theta_n(t)} \left(\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right)^{1/2} \\ & \exp \left[\frac{im(t)}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M(t)\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Onde as fases são dadas pela Eq. (C.16) e a função acima representa a função de onda para o sistema

Encerramos este apêndice com certas observações concernentes à função de onda (C.17). Esta função coincide com a obtida por J. Y. Ji et al[41], com $\rho^2(t) = g_-(t)/\omega_I$ através do método de LR e a representação de Heisenberg. Por outro lado, quando a massa é constante, $m(t) = m_0$, a função de onda se reduz àquelas obtidas nas referências[9, 10, 28, 30]. Observamos também que quando a massa e a frequência são constantes, ou seja, $m(t) = m_0$ e $\omega(t) = \omega_0$, o que significa que $\rho(t) = (1/m_0\omega_0)^{1/2}$, a função de onda (C.17) reduz-se a função de onda do oscilador harmônico independente do tempo, tal qual encontramos na literatura.

Portanto, qualquer solução particular da Eq. (B.15) determina o operador invariante (B.16). É importante comentar que o par de equações (B.5) e (B.15) compõem o chamado sistema de Emarkov-Lewis[10, 21, 32] para a Hamiltoniana (1.5). O Invariante escrito na forma da equação (B.16) foi introduzido por Emarkov[42] e Lewis[9, 10], e hoje em dia ele é conhecido como o invariante de Emarkov-Lewis. A redescoberta deste invariante por Lewis[9] e Reisenfeld[10] tem propiciado um grande desenvolvimento ao estudo de sistemas quânticos dependentes do tempo.

Referências

- [1] H. O. G. Alfven, *Plasma Science, IEEE Transactions* **18**, 5, (1990).
- [2] R. K. Colegrave e M. S. Abdalla, *Pot. Acta* **28**, 495(1981); G.S. Agarwal e A. Kumer, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3665(1991).
- [3] L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 527(1991).
- [4] X. C. Gao, J. Fu, X. H. Li e J. Gao, *Phys Rev. A* **57**, 753(1998); X. C. Gao, J. Fu, J. Xu e X. Zou, *Phys Rev. A* **59**, 55(1999)
- [5] I. R. Senitzky, *Phys Rev.* **119**, 670(1960).
- [6] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211(1981)
- [7] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, New York), 1994, p. 72, p. 73, p. 104, p. 109, p. 318.
- [8] J. R. Choi e I. H Nahm, *Int. J. Theor. Phys.* **46** 1(2007).
- [9] H. R. Lewis, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **27**, 510(1967); *J. Math. Phys.* **9**, 1976(1968).
- [10] H. R. Lewis, Jr. e W. B. reisenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458,(1969).
- [11] D. C. Khandekar and S. V. Lawande, *J. Math. Phys.* **16**, 384 (1975).
- [12] M. Maamache, *Phys. Rev A* **52**, 936 (1995).
- [13] I. A. Pedrosa e I. Guedes, *Mod. Phys. Lett. B* **16**, 637 (2002).
- [14] S. F. Özeren, *J. of Math. Phys.* **51**, 122901 (2010).
- [15] D. Sornette, *Phys. Rep.* **297**, 239(1998); A. Johansen, O. Ledoit e D. Sornette, *Int. J. of Theor. and Appl. Finance* **3** 219 (2000); D. Sornette, *Phys. A* **284** 355 (2000).
- [16] D. O. Cajueiro, B. M. Tabak, F. K. Werneck, *Phys. A* **388** 1603 (2009).
- [17] R. O. Vallejos, R. S. Mendes, L. R. da Silva e C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **58**, 1346 (1998).
- [18] J. C. Anifrani, C. Le Floc'h, D. Sornette, B. Souillard, *J. Phys. I France* **5**, 631 (1995).
- [19] D. Stauffer, D. Sornette, *Phys. A* **252**, 271 (1998).
- [20] D. Sornette, *Proc. of National Academy of Sci. of USA* **99**, 2522 (2002).
- [21] I. A. Pedrosa, G. P. Serra e I. Guedes, *Phys. Rev. A* **56**, 4300(1997).

- [22] J. R. Choi, *Pramana* **61**, 7 (2003).
- [23] Alberes Lopes de Lima, Alexandre Rosas e I.A. Pedrosa, *Annals of Physics* **323**, 2253 (2008).
- [24] S. Baskoutas et al, *J Phys A* **27**, 2189 (1994).
- [25] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18** 393 (1941); E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3** 440 (1950).
- [26] G. Brodimas, N. Goupios e J. Jansussis *Mod. Phys. Lett. B* **21**, 1983 (2007).
- [27] S. F. Özeren, *J. of Math. Phys.***50**, 012902 (2009).
- [28] J. G Hartley e J. R. Ray, *Phys. Rev. A* **24**, 2837(1981).
- [29] J. G. Hartley e J. R. Ray, *Phys. Rev. D* **25**, 382 (1982).
- [30] J. R. Ray, *Phys. Rev. D* **25**, 3417(1982).
- [31] Célia M. A. Dantas, I. A. Pedrosa e B. Baseia, *Phys. Rev. A* **45**, 1320 (1992)
- [32] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55**, 3219(1997).
- [33] I. A. Pedrosa, *J. Math. Phys.* **28**, 2662(1987).
- [34] I. A. Pedrosa e B. Baseia, *Phys. Rev. D* **30**, 765 (1984); C. I. um, K. H. Yeon e T. F. George, *Phys. Rep.* **362**, 63 (2002); S. P. Kim, *J. Phys. A* **36**, 12089 (2003); J. R. Choi e K. H. Yeon, *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 1891 (2008).
- [35] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, New York), 1994. Griffiths, David J. *Introduction to Quantum Mechanics* 2nd Edition, (Prentice-Hall, New Jersey), 2005. Cohen-Tanoudji, C.; Diu, B. and Laloe, F. *Quantum Mechanics*, (John Wiley, San Francisco), 1997.
- [36] José F. Cariñena e Javier de Lucas, *Phys lett A* **372**, 5385(2008).
- [37] José F. Cariñena e Javier de Lucas, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **6**, 683(2009).
- [38] M. Lutzky, *Phys. Lett.***68A**, 3 (1978).
- [39] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **14**, 664(1926).
- [40] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766(1963)
- [41] J. Y. Ji, J. K. Kim, S. P. Kim e K. S. Soh, *Phys Rev. A* **52**, 3352 (1995).
- [42] V.P. Ermakov, *Univ. Izv. Kiev. Ser. III* **9** (1880)

Índice Remissivo

Autoestados de $I(t)$, 53, 55

Autovalores de $I(t)$, 53

Equação

auxiliar, 17

de autovalores de $I(t)$, 17

de Milne-Pinney, 17

de Movimento, 16

Equação de Schrödinger, 53

Estados

Coerentes, 31

Comprimidos, 32

Fator de fase, 16

Operador

de abaixamento, 18

de levantamento, 18

Invariante, 15, 53

Invariante de Lewis-Riesenfeld, 17, 57

número, 19

Produto da incerteza, 20

Transformação de *gauge*, 55

Transformação unitária, 60