



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

EDSON MOREIRA DANTAS JUNIOR

ANÁLISE NÃO LINEAR DE COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

FORTALEZA
2014

EDSON MOREIRA DANTAS JUNIOR

ANÁLISE NÃO LINEAR DE COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO O MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Evandro Parente Junior, D.Sc.

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

-
- D211a Dantas Júnior, Edson Moreira.
 Análise não linear de compósitos laminados utilizando o método dos elementos finitos / Edson
 Moreira Dantas Júnior. – 2015.
 121 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de
Engenharia Estrutural e Construção Civil, Pós-Graduação em Engenharia Civil, Fortaleza, 2015.
 Área de Concentração: Mecânica Computacional.
 Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.
1. Materiais laminados. 2. Método dos elementos finitos. I. Título.

EDSON MOREIRA DANTAS JUNIOR

ANÁLISE NÃO LINEAR DE COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil: Estruturas e Construção Civil, da
Universidade Federal do Ceará, como
requisito parcial para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia Civil. Área de
concentração: Estruturas.

Aprovada em 29 /08 /2014.

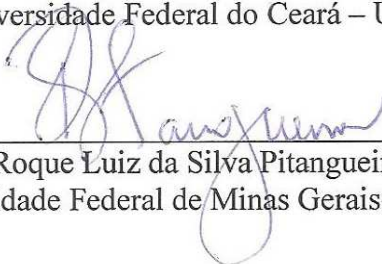
BANCA EXAMINADORA



Prof. Evandro Parente Júnior, Dr. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, Dr.
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Roque Luiz da Silva Pitangueira, Dr.
Universidade Federal de Minas Gerais- UFMG

À meu Deus,
Que nunca me abandonou.

AGRADECIMENTOS

Somente após uma conquista é que realmente percebemos a grandeza da mesma.

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, pela sua presença, sua força e seu amor em tantos momentos difíceis que tive em minha vida durante este trabalho.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer aos meus pais Edson Moreira Dantas e Rita de Cássia Colares Dantas. Por todo o amor e confiança depositado em mim. Sem sua sabedoria, amizade e exemplo de vida, nunca seria o profissional nem o homem que sou. Ao meu irmão Leonardo André Colares Dantas, a quem tanto amo e admiro (e quem sempre esteve disposto a me fazer companhia madrugada à dentro nos estudos)

De modo especial gostaria de agradecer a minha amada esposa Débora Hanah Bezerra Vale Dantas, a quem tanto admiro e amo: Sem o seu apoio e sua paciência eu jamais teria conseguido vencer mais essa etapa em nossas vidas.

Também gostaria de agradecer aos meus grandes amigos de turma Lucas “TSU” Façanha e Crystina “TURNER” Montenegro. É incrível como grandes amizades acontecem no meio de grandes sufocos. Sem as nossas forças tarefas e sem os nossos cafezinho eu jamais teria conseguido.

Não posso deixar de agradecer aos outros grandes amigos que estiveram presentes durante este trabalho Elias Barroso e Iuri Montenegro: Sem vocês até hoje eu estaria engatinhando na arte da programação, Luiz Mororó e Pedro Sanderson: Sem vocês o ABAQUS ainda seria um grande mistério para mim, David “Pacas” e Daniel Goes Brito pelas nossas conversas sobre psicologia, política e filosofia onde sempre houve respeito, amizade e um grande crescimento mútuo.

Também gostaria de agradecer a Josy: Sem seus cafezinhos bem quentes durante a tarde meu rendimento não seria o mesmo, eu jamais teria feito tantos amigos e as maiores idéias deste trabalho talvez não tivessem surgido.

Jamais poderia deixar de agradecer aos professores Tereza Denyse Pereira de Araújo, aos meus orientadores Antônio Macário Cartaxo Melo e principalmente ao grande amigo e mestre Evandro Parente Junior (entre nós conhecido carinhosamente como “Oráculus Parente Junior”), muito obrigado por me forçar a extrair o melhor de mim e a sempre estar tão presente nos momentos de dúvida. Obrigado pela orientação profissional, pelo exemplo pessoal e pela incrível amizade que desenvolvemos ao longo dos anos: Você me mostrou o real sentido e valor da vida acadêmica. Obrigado também a CAPES pelo incentivo financeiro, ao Departamento de Construção Civil e Estruturas e a Universidade Federal do Ceará pela infra-estrutura disponibilizada.

Espero, num futuro próximo, ter a oportunidade de desenvolver novos trabalhos com todos vocês.

“Um das principais características da existência humana, está na capacidade de se elevar acima das condições biológicas, psicológicas e sociológicas, de crescer para além delas.”

Viktor Frankl.

RESUMO

Materiais compósitos vem sendo amplamente estudados devido aos seus inúmeros benefícios em relação aos materiais metálicos, principalmente a elevada razão resistência/peso, bom isolamento térmico e boa resistência à fadiga. Compósitos laminados, foco do presente trabalho, são produzidos pelo empilhamento de um conjunto de lâminas, cada uma composta de fibras unidirecionais ou bidirecionais imersas em uma matriz polimérica. As estruturas de materiais compósitos apresentam comportamento não linear, tanto físico quanto geométrico. Devido à elevada resistência, estruturas de material compósito tendem a ser bastante esbeltas, podendo apresentar grandes deslocamentos e problemas de estabilidade. Adicionalmente, a consideração da não linearidade física também é importante para a simulação de falha de estruturas laminadas. Um dos modos de falha mais importantes destas estruturas é a delaminação, que consiste no descolamento de duas lâminas adjacentes. No projeto de estruturas laminadas, o Método dos Elementos Finitos é a ferramenta de análise mais utilizada devido a sua robustez, precisão e relativa simplicidade. A fim de permitir a análise não linear de estruturas laminadas submetidas a grandes deslocamentos, foi desenvolvida neste trabalho uma formulação de elementos finitos sólidos laminados baseados na abordagem Lagrangiana Total. A simulação do início e propagação da delaminação foi realizada neste trabalho utilizando Modelos de Zona Coesiva. Para este fim, foi desenvolvida uma formulação de elementos isoparamétricos de interface com espessura nula e utilizados diferentes modelos constitutivos para representar a relação entre as tensões e os deslocamentos relativos das faces da trinca coesiva, incluindo tanto o caso de modo I puro quanto de modo misto. As formulações desenvolvidas neste trabalho foram implementadas no software de código aberto FAST utilizando a filosofia de Programação Orientada a Objetos. Estas implementações são apresentadas utilizando as convenções da UML. Vários exemplos foram utilizados para verificar e validar as implementações realizadas. Exce-lentes resultados foram obtidos utilizando elementos sólidos laminados na análise de estruturas de casca, mesmo empregando malhas com apenas um elemento sólido na espessura. No que diz respeito à delaminação, verificou-se que o uso de Modelos de Zona Coesiva requer muito cuidado na escolha dos parâmetros utilizados na análise, principalmente no que diz respeito à relação tensão-deslocamento relativo, tamanho dos elementos e método de integração numérica. Contudo, utilizando-se a integração de Newton-Cotes e elementos de interface de tamanho adequado, obteve-se uma concordância muito boa com resultados teóricos e experimentais disponíveis na literatura. De forma geral, verificou-se que o modelo coesivo exponencial apresenta maior robustez e eficiência computacional que o modelo bilinear.

Palavras-chave: Materiais Compósitos, Método dos Elementos Finitos, Análise Não Linear, Delaminação, Modelos de Zona Coesiva.

ABSTRACT

Composite materials has been widely studied through the years because of its benefits compared to metals (elevated resistance/weight ratio, good thermal isolation and good fatigue resistance). Laminate composites are the focus of this work. Produced by stacked layers of fibers embedded on polymeric matrices, structures of composite materials presents material and geometrical non-linear behavior. Because of its elevated resistance, composite materials allow designers to create very slender structures which might present large displacements and stability problems. Additionally, considering material non-linearity is also important for collapse simulation of laminated structures. One of the most important failure modes on laminated structures is delamination. Delamination is the detachment of adjacent layers. On laminated structures simulation, the Finite Element Method is one of the most used analysis tool. It is a robust, precise and relative simple operating tool. Intending analyzing non-linear behavior of laminated structures subjected to large displacements, was developed on this work a laminated solid finite element formulation based on Full Lagrangian formulation. Simulation of delamination beginning and propagation was developed on this work using Cohesive Zone models. To achieve this goal, an isoparametric formulation of interface finite elements without thickness and many constitutive models to represent the relation tension $\times$ displacement jump (relative displacement between crack faces) were developed. These models consider pure mode I and mixed mode. The formulations developed on this work were implemented on the open source finite element code FAST using Oriented Object Programming philosophy. These implementations are presented on UML conventions. Many examples were tested for verifying and validating all the implementations. Excellent results were obtained using laminated solid elements on the analysis of a shell structure, even using meshes with only one element through thickness. On the delamination analysis, was verified that Cohesive Zone Models are very sensible related to the parameters used on the analysis, mainly tension $\times$ displacement jump model, size of elements and numerical integration. Spite of it, using Newton-Cotes integration and interface elements of appropriate size, good agreements were obtained compared with theoretical results obtained on literature. In general, was observed that cohesive exponential model presents greater robustness and computational efficiency than bilinear model.

Key-words: Composite Materials, Finite Element Method, Non Linear Analysis, Delamination, Cohesive Zone Models.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diferentes tipos de materiais compósitos.	11
Figura 2 – Tipos de lâminas reforçadas por fibras.	12
Figura 3 – Orientação da lâmina.	12
Figura 4 – Esquema de laminação.	13
Figura 5 – Diferentes modos de falha da fibra.	16
Figura 6 – Diferentes modos de falha da matriz.	17
Figura 7 – Parâmetros de resistência básicos da lâmina.	18
Figura 8 – Modelos utilizados para a representação da falha progressiva.	20
Figura 9 – Falha progressiva.	21
Figura 10 – Degradação brusca x degradação gradual.	22
Figura 11 – Teste para a obtenção da energia crítica de fratura em abertura transversal.	23
Figura 12 – Delaminação interna: (a) disposição no laminado (b) Efeito na estabilidade global.	24
Figura 13 – Delaminação próxima à superfície: (a) Aberta em tensão; (b) Fechada em tensão (c) Aberta em flambagem (d) Fechada em flambagem (e) Borda flambada (f) Borda flambada com trinca secundária.	24
Figura 14 – Modos de propagação de trinca.	25
Figura 15 – Formação e crescimento da delaminação do modo II na interface das camadas: (a) formação de microtrincas; (b) crescimento e abertura das microtrincas (c) coalescência das microtrincas acompanhado das “pontas de cisalhamento.	26
Figura 16 – Representação gráfica do método do comprimento de arco.	34
Figura 17 – Elemento BRICK20 e sequência de laminação.	38
Figura 18 – Sistemas de coordenadas Global (laminado) e local assim como seus vetores unitários.	44
Figura 19 – Representação das tensões na ponta das trincas dos diferentes modelos.	46
Figura 20 – Esquemático da zona coesiva	47
Figura 21 – Tensões na zona coesiva	48
Figura 22 – Fissuras incorporadas em modelos numéricos.	49
Figura 23 – Representação das formulações (a) extrínseca e (b) intrínseca.	50
Figura 24 – Curvas tração-deslocamento relativo.	52
Figura 25 – Superfícies interna superior e inferior de um sólido contínuo modelado para ilustrar formulação coesiva.	53
Figura 26 – Elemento de interface 8 nós 3D	55

Figura 27 – Curvas das leis constitutivas.	58
Figura 28 – Algoritmo do Modelo Constitutivo Bilinear.	61
Figura 29 – Algoritmo do Modelo Constitutivo Exponencial.	65
Figura 30 – Estrutura global do FAST.	69
Figura 31 – Estrutura dos algoritmos de solução implementados no FAST.	72
Figura 32 – Diagrama de classe mostrando as chamadas das funções para montagem da matriz de rigidez e vetor forças interna local e global.	72
Figura 33 – Diagrama de classes destacando em amarelo as classes implementadas (elemento sólido laminado).	73
Figura 34 – Métodos de criação e operação dos pontos de Gauss.	73
Figura 35 – Operação dos pontos de Gauss para formar a matriz de rigidez e vetor de forças internas do elemento.	74
Figura 36 – Métodos utilizados na definição do sistema de coordenadas local dos elementos sólidos.	75
Figura 37 – Diagrama de classes destacando em amarelo as classes implementadas. .	76
Figura 38 – Diagrama destacando o funcionamento da função <i>RMatrix</i>	76
Figura 39 – Diagrama destacando o funcionamento das funções de montagem da matriz de rigidez e vetor de forças internas do elemento de interface.	77
Figura 40 – Modelo de casca abatida	79
Figura 41 – Curva resultante da análise da casca abatida isotrópica ($h = 12.7\text{mm}$). . .	80
Figura 42 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($h = 12.7\text{mm}$).	81
Figura 43 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ($h = 12.7\text{mm}$).	81
Figura 44 – Curva resultante da análise da casca abatida isotrópica ($h = 6.35\text{mm}$). . .	82
Figura 45 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($h = 6.35\text{mm}$).	83
Figura 46 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ($h = 6.35\text{mm}$).	83
Figura 47 – Modelo simétrico do cilindro.	85
Figura 48 – Curva resultante da análise do semi-cilindro laminado $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	85
Figura 49 – Curva resultante da análise do semi-cilindro laminado $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$. . .	86
Figura 50 – Curva resultante da análise do semi-cilindro laminado $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$	86
Figura 51 – Teste de um elemento para elemento de interface Q4	87
Figura 52 – Curva tensão $\times$ deslocamento relativo (modelo bi-linear).	88
Figura 53 – Curva tensão $\times$ deslocamento relativo (modelo exponencial).	88

Figura 54 – Dimensões e condições de contorno DCB.	89
Figura 55 – Malhas em elementos finitos utilizadas.	90
Figura 56 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q4, malha 200×2 e 6 pontos de Newton-Cotes.	91
Figura 57 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q4 e malha 200×2 e 12 pontos de Newton-Cotes.	91
Figura 58 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q8 e malha 200×2 e 6 pontos de Newton-Cotes.	92
Figura 59 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q8 e malha 200×2 e 12 pontos de Newton-Cotes.	92
Figura 60 – Modelo DCB discretizado em elementos finitos.	93
Figura 61 – Curvas carga $\times$ deslocamento relativo comparativas entre modelos bi-linear e exponencial.	94
Figura 62 – Curvas carga-deslocamento para um teste DCB variando a discretização da malha.	95
Figura 63 – Curvas Carga-Deslocamento para um teste DCB variando a resistência interfacial para uma malha 2×30	96
Figura 64 – Modelos ENF e MMB.	97
Figura 65 – Simulação dos modelos ENF e MMB.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Parâmetros M de análise propostos.	67
Tabela 2	– Número mínimo de elementos de interface propostos para a zona coesiva.	68
Tabela 3	– Limites de carga e os respectivos deslocamentos para $h = 12.7\text{mm}$	82
Tabela 4	– Limites de carga e os respectivos deslocamentos para $h = 6.35\text{mm}$	84
Tabela 5	– Propriedades do material.	87
Tabela 6	– Propriedades do Material.	89
Tabela 7	– Propriedade do Grafite-Epoxi.	93
Tabela 8	– Propriedades do Material.	94
Tabela 9	– Propriedades do material para os testes ENF e MMB.	96

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	Organização da Dissertação	9
2	MATERIAIS COMPÓSITOS	11
2.1	Características de um laminado	11
2.2	Comportamento mecânico de materiais compósitos reforçados por fibras	13
2.3	Falha Intralaminar	16
2.3.1	<i>Falha da fibra</i>	16
2.3.2	<i>Falha da matriz</i>	16
2.4	Critérios de falha	17
2.5	Falha de laminados	19
2.5.1	<i>Modelos de degradação brusca</i>	20
2.5.2	<i>Modelos de degradação gradual</i>	21
2.6	Delaminação	22
2.6.1	<i>Critério de início da delaminação</i>	25
2.6.2	<i>Propagação da delaminação</i>	26
3	ANALISE NÃO LINEAR	28
3.1	Equações de equilíbrio	29
3.2	Métodos de solução	30
3.2.1	<i>Controle de Carga</i>	31
3.2.2	<i>Métodos de Newton-Raphson com Restrição</i>	31
3.3	Elemento Sólido Laminado	37
3.3.1	<i>Deformações</i>	39
3.3.2	<i>Forças Internas</i>	41
3.3.3	<i>Matriz de Rigidez</i>	41
3.3.4	<i>Integração do Elemento Sólido Laminado</i>	42
3.3.5	<i>Sistema de Coordenadas Local</i>	43
4	MODELAGEM DA DELAMINAÇÃO	46
4.1	Abordagem pelo método dos Elementos Finitos	48
4.1.1	<i>As principais leis constitutivas</i>	51
4.2	Princípio dos Trabalhos Virtuais	52
4.3	Formulação do Elemento de Interface	54
4.4	Modelos Constitutivos	58

4.4.1	<i>Modelo Bi-Linear para delaminação no Modo I</i>	58
4.4.2	<i>Lei Exponencial</i>	62
4.5	Parâmetros importantes na análise da delaminação	66
5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	69
5.1	FAST e sua arquitetura global	69
5.2	Implementação do Elemento Sólido Laminado	73
5.3	Implementação dos Modelos de Zona Coesiva	75
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS	79
6.1	Elemento sólido laminado	79
6.1.1	<i>Casca abatida laminada</i>	79
6.1.2	<i>Casca cilíndrica laminada</i>	84
6.2	Modelos de Zona Coesiva	87
6.2.1	<i>Teste de um Elemento</i>	87
6.2.2	<i>Ensaio DCB - Influência de parâmetros</i>	89
6.2.3	<i>Ensaio DCB - Influência das lei constitutivas</i>	93
6.2.4	<i>Influência do comprimento da zona coesiva (Teste DCB)</i>	94
6.2.5	<i>Testes ENF e MMB</i>	96
7	CONCLUSÃO	99
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	101
	REFERÊNCIAS	102
A	ANEXO-TERMODINÂMICA COM VARIÁVEIS INTERNAS	110
B	ANEXO-DIAGRAMA DE SEQUÊNCIA SÓLIDO LAMINADO	115
C	ANEXO-DIAGRAMA DE SEQUÊNCIA ELEMENTO DE INTERFACE	116

1 INTRODUÇÃO

O uso de materiais compósitos reforçados por fibras está cada vez mais difundido nos diversos ramos industriais, merecendo um destaque as indústrias aeroespacial, naval, automotiva e de transformação. Estes materiais apresentam como principais vantagens a elevada resistência e rigidez específicas, o que permite a fabricação de componentes estruturais de alta resistência e baixo peso. Estes materiais possuem ainda outras características importantes, como alta resistência à fadiga, bom isolamento térmico e elevado amortecimento estrutural. Estas indústrias buscam elementos estruturais mais leves visando maior economia e melhores desempenhos (melhor relação peso $\times$ potência).

Dentre os diversos tipos de compósitos existentes no universo de materiais conhecidos, este trabalho tem como foco estudar o comportamento mecânico dos compósitos laminados. Estes são formados pela superposição de várias lâminas, onde cada lâmina é formada por um conjunto de fibras unidirecionais ou multidirecionais embutidas em uma matriz polimérica^{1,2}.

Dentre os vários usos de compósitos laminados, destacam-se os componentes estruturais como placas e cascas utilizados na fuselagem e asa de aeronaves, cascos de navios e outras estruturas de convés e carrocerias automotivas. Encontra-se também a utilização de compósitos laminados na indústria de transformação na forma de vasos de pressão para armazenamento de fluidos, na fabricação de tubos, utilizados na indústria química e petroquímica. Tais tubos têm sido alvo de extensas pesquisas com o objetivo de desenvolver novos projetos de gasodutos, oleodutos e risers de perfuração e de produção³⁻⁵.

No projeto de estruturas laminadas, deve-se determinar os materiais que formarão a combinação fibra/matriz e o modo como as várias lâminas serão combinadas. Este Esquema de Laminação (*layup*) é composto do número total de lâminas a ser utilizado, dos materiais que compõe cada lâmina, de sua espessura e do ângulo de orientação de suas fibras. Como o número de arranjos possíveis é muito grande, pode-se projetar estruturas laminadas específicas para as ações externas atuantes, promovendo economia de material e acentuada diminuição no peso total da estrutura⁶. Outro fator a ser considerado no projeto de estruturas laminadas diz respeito à sua análise estrutural. Uma lâmina isolada, por ser a combinação de fibras, no caso do presente trabalho, unidirecionais e uma matriz polimérica, apresenta um comportamento ortotrópico de difícil modelagem⁷.

A metodologia de projeto convencional procura verificar os limites de resistência, de forma a garantir que a estrutura possua capacidade de resistir às solicitações atuantes evitando a ocorrência de falha ou dano. Por outro lado, o conceito de projeto avançado visa, além da verificação do limite de resistência, verificar a tolerância de serviço da estrutura após a verificação de falhas⁸. Portanto, a metodologia de dimensionamento avançado aborda a resistência da estrutura, mesmo esta já estando danificada. Isto inclui a previsão do início e acúmulo de falhas na estrutura.

Os mecanismos de falha em compósitos podem ser divididos em falhas intralaminares e falhas interlaminares. As falhas de fibra, de matriz e na interface fibra/matriz são caracterizados como modos de falha intralaminar, pois ocorrem dentro de cada lâmina. Por outro lado, a delaminação, correspondente ao descolamento de lâminas adjacentes, se caracteriza como uma falha interlaminar, pois ocorre entre duas lâminas.

A delaminação é um dos tipos mais comuns de falha em compósitos reforçados por fibras devido à baixa resistência interlaminar destes materiais⁸. A delaminação pode surgir sob várias circunstâncias como em casos de cargas de impacto transversais à superfície do laminado, defeitos de fabricação, como vazios e bolhas e devido a descontinuidades em uma estrutura como furos ou bordos livres.

Um aspecto importante é que a perda de adesão entre lâminas é um defeito extremamente difícil de detectar, o que torna difícil a realização de manutenções preditivas. Isto pode acarretar acidentes e aumento do custo de projetos.

A delaminação pode causar uma redução significativa da rigidez a flexão. Desta forma, quando o laminado está sujeito a cargas compressivas, pode ocorrer flambagem local das lâminas comprometendo a estabilidade da estrutura⁸. Contudo, é importante notar que a ocorrência do fenômeno da delaminação em si não significa que a estrutura está inutilizada, pois mesmo com a rigidez reduzida o material ainda possui capacidade de carga. Portanto, modelos que permitam simular a propagação de trincas interlaminares podem fornecer as tolerâncias de projeto e as ferramentas de decisão necessárias para o reparo ou substituição de componentes da estrutura.

Ferramentas de análise confiáveis e eficientes são necessárias para melhorar os projetos e torna-los mais econômicos. Estas ferramentas devem permitir determinar o início do processo de falha e a evolução da falha na estrutura. Algumas soluções analíticas utilizando a Mecânica da Fratura Linear Elástica tem sido propostas para problemas simples. Entretanto, em problemas de geometria complexa e onde diferentes materiais compósitos estejam envolvidos torna-se difícil recorrer a esta alternativa. Uma alternativa eficiente para contornar estas limitações é a utilização de modelos de zona coesiva (MZC). Estes modelos simulam mecanismos complexos de abertura e propagação de trinca de forma simples e eficiente.

Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos, que é o método mais utilizado na análise de estruturas de materiais compósitos, torna-se uma alternativa viável para a solução de problemas reais complexos.

Motivado por estas questões, decidiu-se desenvolver uma ferramenta capaz de simular a delaminação em compósitos laminados. Para que este objetivo fosse atingido, foi necessário formular e implementar em um software de código aberto, elementos finitos sólidos laminados. O FAST (*Finite Element Analysis Tool*), software escolhido para implementação, possui, além das ferramentas de análise tradicionais, ferramentas de análise para projetos utilizando compósitos laminados.

Para que esta implementação também pudesse contribuir com as ferramentas de

análise já existentes no FAST, buscou-se implementar elementos finitos sólido laminado não linear geométrico utilizando a formulação Lagrangiana Total.

O segundo passo necessário para o desenvolvimento desta ferramenta foi a implementação de elementos de interface assim como as leis constitutivas necessárias para simular a delaminação.

Para que estes objetivos fossem atingidos, utilizou-se os conceitos de programação orientada a objetos (POO), assim como as ferramentas UML, sendo este um dos focos deste trabalho.

Por fim, exemplos numéricos foram apresentados ao final desta discussão com a intenção de validar os modelos implementados e discutir as particularidades de projeto de cada modelo.

1.1 Organização da Dissertação

A dissertação foi dividida em 7 capítulos. No Capítulo 2, será apresentada uma introdução aos materiais compósitos reforçados por fibras, com destaque para o seu comportamento mecânico. Assim, as matrizes constitutivas no sistema local e global e a matriz de transformação para esta mudança de coordenadas serão apresentadas. Também será apresentada uma introdução sobre os tipos de falha em compósitos laminados assim como alguns critérios utilizados em projeto para a previsão destas falhas.

O Capítulo 3 apresenta os conceitos e técnicas de análise não linear de estruturas importantes para o desenvolvimento deste trabalho, incluindo a formulação do Princípio dos Trabalhos Virtuais e a discussão dos métodos incrementais-iterativos utilizados neste trabalho. Em seguida, é apresentada a formulação do elemento finito sólido laminado desenvolvido neste trabalho.

O Capítulo 4 aborda as questões relacionadas à modelagem da delaminação. Inicialmente, aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais para um meio descontínuo e a formulação do elemento de interface é apresentada. Em seguida, apresenta-se uma breve discussão a respeito da termodinâmica com variáveis internas e os requisitos que a 2ª lei da termodinâmica impõe sobre os modelos constitutivos. As leis constitutivas utilizadas para representar o comportamento da trinca coesiva são apresentadas e discutidas. Ao fim deste capítulo, é feita uma discussão sobre os parâmetros que influenciam as análises utilizando elementos de interface, seu comportamento e recomendações práticas para a sua utilização.

O Capítulo 5 trata das questões ligadas à implementação computacional dos elementos finitos e leis constitutivas discutidas nos capítulos anteriores. Como o software FAST utiliza a filosofia de programação orientada a objetos, buscou-se, através das ferramentas UML explicar a relação entre as classes deste software de elementos finitos contextualizando assim o presente trabalho.

O Capítulo 6 contém os exemplos numéricos utilizados para validar os modelos

computacionais implementados. Inicialmente, são apresentados exemplos mostrando o comportamento não linear geométrico do elemento sólido laminado. Estes exemplos levam em conta tanto geometrias com curvaturas abatida como com curvaturas acentuadas. Em seguida, são apresentados exemplos tratando do problema da delaminação. Alguns destes exemplos têm por objetivo comparar a eficácia dos modelos implementados, assim como a influência dos parâmetros numéricos utilizados nas simulações. Também será mostrada a influência dos diferentes tipos de elementos implementados utilizados para a realização das análises.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho e seus comentários finais, além de sugestões para trabalhos futuros.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS

Materiais compósitos resultam da combinação de dois ou mais materiais, em uma escala macroscópica, com o objetivo de obter um novo material melhor que cada uma das suas partes isoladamente². O novo material, assim obtido, deve possuir homogeneidade se analisado em nível macroscópico. Portanto, devem ser utilizadas técnicas que propoçionem a correta combinação dos vários componentes de um material compósito, de modo a fornecer homogeneidade e uniformidade ao seu comportamento mecânico. Materiais compósitos podem ser classificados de acordo com a forma de combinação entre os dois ou mais materiais². Assim, uma primeira classificação seria:

- a) **Compósitos Particulados:** São aqueles que apresentam partículas macroscópicas imersas em uma matriz (Figura 2a). Um clássico exemplo de compósito particulado é o concreto.
- b) **Compósitos Fibrosos:** São formados por fibras longas imersas em uma matriz que atua como transmissora de tensões e protetora das fibras (Figura 2b). As fibras mais utilizadas neste tipo de compósito são as de carbono e vidro, imersas em matrizes poliméricas, como resinas.
- c) **Compósitos Laminados:** Compostos de várias camadas, ou lâminas, de diferentes materiais, podendo, inclusive, serem de compósitos fibrosos ou particulados (Figura 2c).

Figura 1 – Diferentes tipos de materiais compósitos.

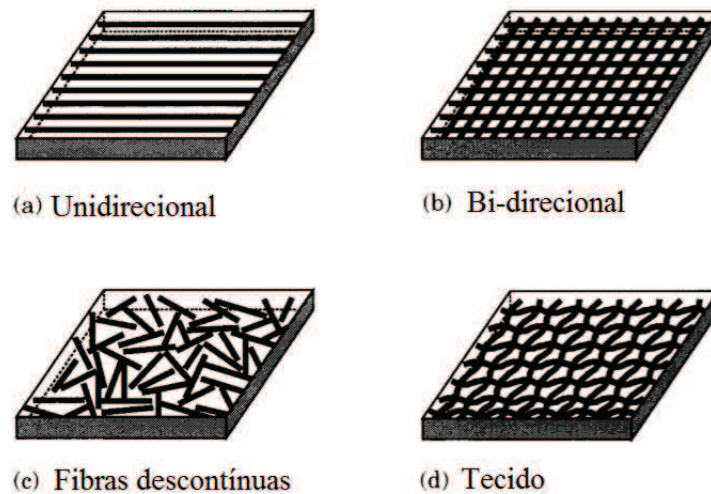


Fonte: Rocha (2013)⁶.

2.1 Características de um laminado

A lâmina é o elemento básico para a construção de compósitos laminados. Uma lâmina reforçada por fibras consiste em um conjunto de fibras, com uma orientação específica ou não, imersas em uma matriz polimérica. As fibras podem ser contínuas ou descontínuas, unidirecionais ou bidirecionais, trançadas ou com distribuição aleatória, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Tipos de lâminas reforçadas por fibras.



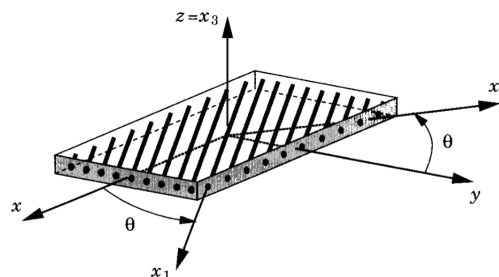
Fonte: Reddy (2004).²

Um laminado é um conjunto de lâminas empilhadas de tal forma que se alcance uma rigidez e uma resistência maior que cada um dos materiais que formam o composto individualmente.

No caso de aplicações de alto desempenho normalmente são utilizadas lâminas que possuem fibras paralelas (lâminas unidirecionais) com orientação e espessura específicas.

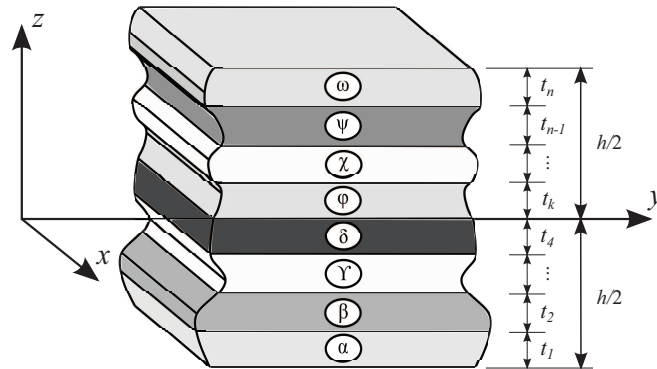
A Figura 3 ilustra um exemplo de disposição das orientações e empilhamento. Este, é conhecido como esquema de laminação ou *stacking sequence*. O desempenho estrutural dos compósitos laminados reforçados por fibras dependem do número de camadas, espessura das camadas, resistência dos materiais envolvidos e esquema de laminação utilizado. O esquema de laminação define o arranjo dos ângulos de orientação das camadas e sua sequência ao longo da espessura do laminado, por exemplo, $[\alpha/\beta/\gamma/.../\omega]$, onde α é a orientação das fibras da primeira camada, β é a orientação das fibras da segunda camada e assim por diante. O ângulo de orientação é medido no sentido anti-horário a partir do eixo x , conforme mostrado na Figura 3. A numeração das camadas é feita de baixo para cima, no sentido positivo do eixo z , como ilustrado na Figura 4.

Figura 3 – Orientação da lâmina.



Fonte: Reddy (2004).²

Figura 4 – Esquema de laminação.



Fonte: Mororó (2013).⁹

Os laminados são geralmente classificados como *cross-ply* e *angle-ply*. Um laminado é denominado *cross-ply*, quando possui fibras orientadas somente a 0° ou 90° . Assim, a laminação $[0/90/0/90/0]$ corresponde a um laminado *cross-ply* com cinco camadas. Quando o laminado possui uma laminação qualquer, em outras palavras, se o laminado possuir pelo menos uma fibra orientada em um ângulo diferente de 0° ou 90° , o laminado é denominado *angle-ply*. Por exemplo, $[30/90/-45/0]$ é um laminado *angle-ply* com quatro camadas.

2.2 Comportamento mecânico de materiais compósitos reforçados por fibras

Duas abordagens podem ser utilizadas na análise do comportamento de uma lâmina:

- a) Micromecânica: considera os materiais constituintes da lâmina, fibra e matriz, de forma isolada, observando as interações entre eles.
- b) Macromecânica: considera a combinação das fibras e matriz como um material homogêneo.

Neste trabalho os materiais compósitos serão estudados apenas em escala macroscópica. Devido à presença das fibras, os materiais compósitos apresentam comportamento anisotrópico no sistema global. No caso de lâminas unidirecionais, i.e. com todas as fibras das lâminas paralelas, estes materiais apresentam um comportamento ortotrópico em relação a um sistema de coordenadas local (x_1, x_2, x_3) , onde 1 é a direção das fibras, 2 é a direção perpendicular as fibras no plano da lâmina e 3 é a direção transversal a lâmina, como ilustrado na Figura 3.

O comportamento mecânico de materiais compósitos antes da falha pode ser representado de forma adequada utilizando a Lei de Hooke generalizada. Desta forma, a relação

constitutiva no sistema do material pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{S}_1 \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (1)$$

onde $\mathbf{S}$ é a matriz de flexibilidade (*compliance*) do material, e o subscrito 1 indicam que as componentes são dadas no sistema local da lâmina. Seus coeficientes são dados por:^{1,2,10}

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}; & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}; & S_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}; & S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}; & S_{33} &= \frac{1}{E_3}; & S_{44} &= \frac{1}{G_{12}}; & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}; & S_{66} &= \frac{1}{G_{23}} \end{aligned} \quad (2)$$

Os índices usados nos coeficientes de flexibilidade, deformação ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ e γ_{12}), e tensões ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}$ e τ_{12}) devem-se à notação de Voigt. As variáveis E_1, E_2 e E_3 são os módulos de elasticidade nas direções de orientação das fibras, enquanto $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ são os coeficientes de Poisson e G_{12}, G_{13} e G_{23} são os módulos de elasticidade ao cisalhamento. É importante notar que materiais elásticos ortotrópicos possuem apenas nove constantes independentes, pois os coeficientes de Poisson (ν_{ij}) devem satisfazer a relação:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad i \neq j) \quad (3)$$

uma vez que a matriz $\mathbf{S}$ é simétrica ($S_{ij} = S_{ji}$). Invertendo a relação mostrada na Equação (1), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Lambda}; & Q_{12} &= E_1 \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{32}}{\Lambda}; & Q_{13} &= E_3 \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Lambda} \\ Q_{22} &= E_2 \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Lambda}; & Q_{23} &= E_2 \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Lambda}; & Q_{33} &= E_3 \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Lambda} \\ Q_{66} &= G_{12}; & Q_{44} &= G_{13}; & Q_{66} &= G_{23} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Lambda = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

onde $\mathbf{Q}$ é a matriz de rigidez constitutiva da lâmina em seu sistema local.

Embora as relações mostradas representem o material em seu sistema de coordenadas local, o equilíbrio global do laminado será feito em um sistema cartesiano global (x, y, z). Assim, na combinação das lâminas, é necessário converter a relação constitutiva de cada uma delas para tal sistema. A relação entre os dois sistemas de coordenadas pode ser dada pelo ângulo que determina a direção das fibras da lâmina, como mostrado na Figura 3.

A transformação entre as coordenadas pode ser estabelecida através de relações utilizando o ângulo θ de rotação do eixo. Fazendo as operações matriciais¹¹, a transformação das deformações é definida por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & n_1 l_1 & m_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & n_2 l_2 & m_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & n_3 l_3 & m_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

onde l, m e n são os cossenos diretores dos eixos principais em relação ao sistema global:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(x, x_1); & m_1 &= \cos(y, x_1); & n_1 &= \cos(z, x_1) \\ l_2 &= \cos(x, x_2); & m_2 &= \cos(y, x_2); & n_2 &= \cos(z, x_2) \\ l_3 &= \cos(x, x_3); & m_3 &= \cos(y, x_3); & n_3 &= \cos(z, x_3) \end{aligned} \quad (7)$$

A transformação global-local pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

onde $\mathbf{T}$ é a matriz de transformação de deformações definida na Equação (6), e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações no sistema global. Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, pode-se mostrar¹² que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (9)$$

Finalmente, a relação constitutiva no sistema global do laminado pode então ser encontrada utilizando as Equações (4), (8) e (9):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz constitutiva no sistema do laminado. A partir destes desenvolvimentos é possível obter as tensões em cada lâmina do laminado. Assim, critérios de falhas podem ser utilizados para prever até quais níveis de carregamentos a integridade estrutural de um laminado

pode ser mantida. É importante lembrar que enquanto as deformações são contínuas, as tensões apresentam descontinuidades na interface entre lâminas.

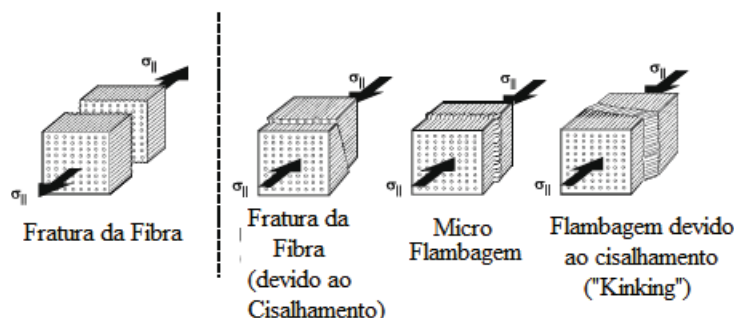
2.3 Falha Intralaminar

As falhas em laminados podem acontecer de duas formas: Intralaminar (falha dentro da lâmina) ou interlaminar (falha entre lâminas). Este item apresenta os mecanismos de falha ligados a falha intralaminar, sendo estes falha da fibra, falha da matriz e falha da interface fibra-matriz⁷. Estes mecanismos governam a falha de uma lâmina isolada e serão discutidos a seguir.

2.3.1 Falha da fibra

A falha da fibra acontece quando a tensão na direção das fibras é maior que a própria resistência da fibra na mesma direção. Os carregamentos que geram estas tensões podem ser de tração ou compressão. No caso de uma lâmina tracionada, a ruptura das fibras ocorre devido à tração gerada no conjunto de fibras (escala macroscópica). Este efeito deixa a lâmina com a aparência de um pincel após a falha¹³. Quando a lâmina é comprimida, a falha das fibras podem ocorrer devido ao cisalhamento puro, a micro-flambagem ou devido à flambagem por cisalhamento. A Figura 5 ilustra estes diferentes mecanismos de falha da fibra.

Figura 5 – Diferentes modos de falha da fibra.



Fonte: Knops (2008)¹³.

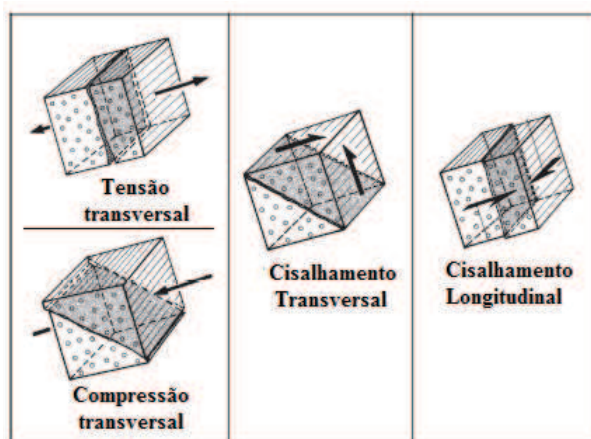
2.3.2 Falha da matriz

A falha da matriz acontece quando as tensões transversal ou cisalhante à fibra são maiores que a resistência da matriz nessas direções. Quando uma trinca aparece na matriz, ela se propaga, perpendicular à fibra, de uma camada de fibra até a próxima camada de fibra, gerando uma pequena região de descolamento entre a matriz e a fibra.

A ocorrência da trinca não significa que a lâmina está inutilizada, pois ocorre uma redistribuição de tensões entre a matriz e as fibras adjacentes de modo que só após um certa

quantidade de trincas na lâmina (densidade de trincas) a rigidez da mesma é reduzida. A Figura 6 mostra os diferentes mecanismos de falha da matriz segundo os seus carregamentos. É importante atentar que nem sempre a falha acontece em um plano paralelo ao plano de ação da força. O plano onde a falha acontece (como resultado de uma combinação das tensões atuantes) é denominado plano de ação¹³.

Figura 6 – Diferentes modos de falha da matriz.



Fonte: Knops (2008)¹³

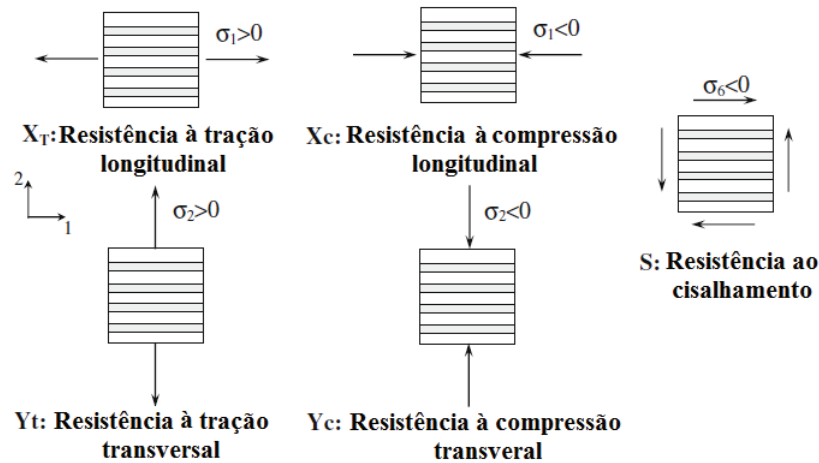
2.4 Critérios de falha

Os mecanismos de falha variam dependendo das propriedades dos materiais e dos diferentes estados de tensão ao qual o material é submetido. Análises micromecânicas para a obtenção das resistências da fibra e matriz individualmente, foram inicialmente desenvolvidas. Entretanto estes só podem prever o início da falha no laminado, já que a resistência de uma lâmina é muito maior que as resistências individuais de cada parte.

Logo, fez-se necessário o desenvolvimento de critérios que pudessem prever o comportamento global da lâmina, já que a possível interação entre os mecanismos de falha fibra-matriz dificultam a obtenção da resistência generalizada para um carregamento qualquer. Devido a estes motivos, uma abordagem macromecânica ou fenomenológica para a falha é preferível⁷.

Do ponto de vista macromecânico, a resistência de uma lâmina é uma propriedade anisotrópica, isto é, varia com a orientação. Por exemplo, é desejável relacionar a resistência ao longo de uma direção arbitrária em relação a alguns parâmetros básicos. Uma lâmina pode ser caracterizada por um número básico de parâmetros de resistências com referência as direções principais do material⁷. A Figura 7 mostra os parâmetros de resistência básicos de uma lâmina de acordo com as orientações da fibra no plano.

Figura 7 – Parâmetros de resistência básicos da lâmina.



Fonte: Pietropaoli (2012)¹⁴.

As teorias de falha macromecânica para compósitos foram propostas através da adaptação ou extensão de teorias de falha isotrópicas para levar em consideração a anisotropia das resistências e rigidezes. Estas podem ser classificadas nos seguintes grupos:

- a) Teorias não interativas: Modos de falha específicos são previstos através da comparação individual das tensões ou deformações na lâmina com as resistências correspondentes ou deformações últimas. Não são consideradas as interações entre diferentes componentes das tensões. Como exemplo, tem-se os critérios da máxima tensão e máxima deformação.
- b) Teorias interativas: Teorias nas quais todas as componentes das tensões são incluídas em uma única expressão. As falhas são previstas sem se fazer referência ao modo de falha. Tsai-Wu e Tsai-Hill são exemplos dessas teorias.
- c) Teorias parcialmente interativas: São critérios que identificam o modo de falha (falha na fibra ou falha na matriz) e utilizam expressões diferentes para cada modo. São exemplos deste tipo de critério: Hashin- Rotem e Puck.

Em 1965, Azzi e Tsai¹⁵ adaptaram a teoria de Hill¹⁶, inicialmente desenvolvida para materiais dúcteis anisotrópicos homogêneos, para anisotrópicos heterogêneos e compósitos frágeis e introduziram a teoria de Tsai-Hill. Uma adaptação do critério da tensão máxima para compósitos foi descrita por Kelly¹⁷ em 1966. Este usou para a previsão, a resistência fora do plano para compósitos unidirecionais. Em 1971, Tsai e Wu¹⁸ introduziram a teoria totalmente interativa de Tsai-Wu. Em 1973, Hashin e Rotem¹⁹ introduziram um critério parcialmente interativo.

Nos últimos anos muitas teorias vêm sendo propostas. Estas teorias geralmente combinam elementos das teorias citadas anteriormente com novos elementos. Muitas teorias

são baseadas em suposições de homogeneidade e no comportamento linear tensão-deformação do material⁷.

Em 1996, Hinton e Kaddour²⁰ organizaram um esforço mundial em busca de melhores previsões para falhas em compósitos, já que existia uma lacuna na exatidão com que as teorias conseguiam prever as falhas em estruturas laminadas²¹.

A partir deste esforço, surgiu o WWFE (World Wide Failure Exercise) que pode ser considerado os “jogos olímpicos” de falha em compósito. A primeira parte deste exercício destinou-se a previsão de falha em compósitos submetidos à estado plano de tensões (WWFE-I²²). A segunda parte deste exercício dedicou-se a previsão de compósitos em estado triplo de tensão (WWFE-II²³).

Muitas teorias de falha sugeriram, algumas apresentando excelentes resultados (Critério de Puck²⁴, Critério de Tsai-Ha²⁵, Critério de Cuntze²⁶), entretanto ainda existe uma lacuna referente à capacidade de previsão dentro dos diferentes estados de tensão ao qual um laminado pode ser submetido.

2.5 Falha de laminados

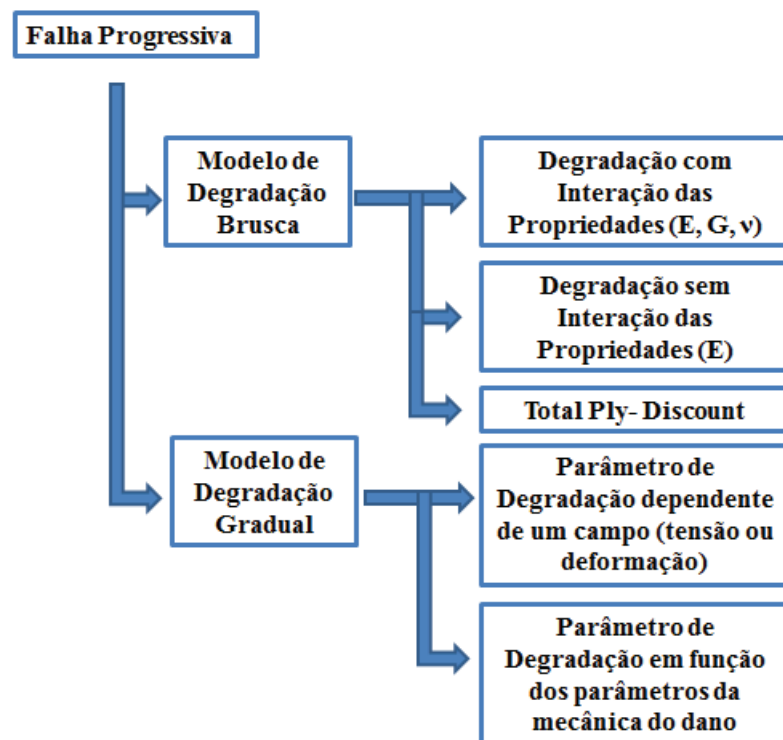
A falha no laminado pode ser causada pela falha de uma lâmina individual (falha intralaminar) ou pela separação de lâminas entre si (interlaminar).

A falha de um laminado pode ser definida pela falha da primeira lâmina (*first-ply failure*) ou da última lâmina (*ultimate-ply failure*). A falha da primeira lâmina é uma abordagem bastante conservadora. Esta considera que o laminado falha quando uma das lâminas que o constituem falhar. Para isso, conduz-se uma análise buscando o estado de tensão em cada lâmina, sua resistência e selecionando um critério apropriado de falha da lâmina.

Este critério assume que o laminado possui as mesmas propriedades e se comporta da mesma maneira que uma lâmina isolada. Isto é questionável, pois as características de uma lâmina em um laminado são diferentes daquelas isoladas. Isso se deve principalmente às tensões residuais e aos defeitos que podem ser gerados no processo de fabricação da mesma⁷.

Adicionalmente, verifica-se experimentalmente que os laminados podem suportar cargas crescentes após a falha de uma ou mais lâminas. Isto ocorre, porque após a falha de uma lâmina, as cargas resistidas por ela são redistribuídas para outras lâminas que ainda não atingiram o seu limite de resistência. Este processo continua com as lâminas falhando progressivamente com o aumento da carga até que seja esgotada a resistência de todas as lâminas, definindo a carga última (capacidade de carga) do laminado.

Figura 8 – Modelos utilizados para a representação da falha progressiva.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os modelos para simulação da falha progressiva se dividem em modelos de degradação brusca e modelos de degradação gradual, como ilustrado na Figura 8. Estes modelos serão discutidos a seguir.

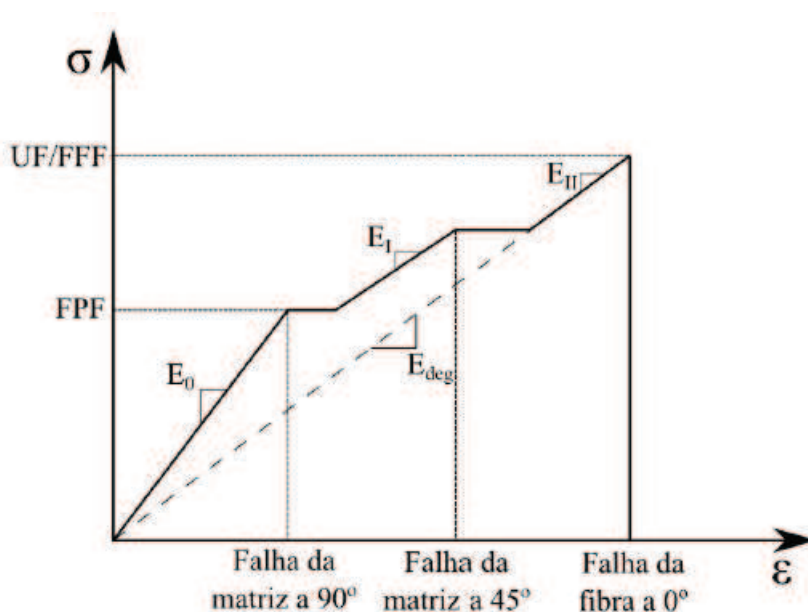
2.5.1 Modelos de degradação brusca

Os modelos de degradação brusca caracterizam-se pelo fato das propriedades da lâmina serem reduzidas bruscamente quando sua falha é detectada. A falha pode ser identificada através de um critério de falha interativo ou não. Os modelos de degradação brusca mais comuns são²⁷:

- a) Degradação não interativa de propriedades: Caracteriza-se pela degradação do módulo de elasticidade na direção da falha independentemente dos outros módulos de elasticidade, ou seja, se ouve falha da fibra degrada-se apenas o módulo de elasticidade E_1 . Esta degradação é modelada multiplicando a propriedade não danificada por um coeficiente de redução da rigidez¹⁸.
- b) Degradação interativa de propriedades: Reduz simultaneamente as propriedades relativas àquela direção de falha, por exemplo, caso a falha na lâmina seja na fibra, as propriedades degradadas serão uma combinação entre E_1 , G_1 , ν_{12} .

- c) Degradação total das propriedades (*total ply discount*): Reduz a zero todas propriedades da lâmina que apresentou falha, eliminando qualquer contribuição da lâmina para a resistência do laminado²⁷. Este método é interessante para projeto porque fornece uma estimativa do limite inferior (i.e. conservadora) da capacidade de carga do laminado. Por outro lado, uma análise realista da falha não é possível com este método simples²⁷.

Figura 9 – Falha progressiva.



Fonte: Rocha (2013)⁶.

A Figura 9 apresenta uma representação esquemática da falha progressiva de um laminado utilizando o modelo de degradação brusca, mostrando a falha da primeira lâmina (FPF) e a falha da última lâmina (UF) para um laminado com fibras a 0° , 45° e 90° . Verifica-se que a primeira falha (FPF) normalmente corresponde a uma falha de matriz e a última a uma falha da fibra.

2.5.2 Modelos de degradação gradual

Os modelos de degradação brusca apresentam uma natureza binária, ou seja, levam em conta somente o estado não danificado ou o estado de completa degradação (falha). Para representar de forma mais precisa o acúmulo e a progressão de certos modos de falha, as propriedades dos materiais precisam ser degradadas gradualmente, baseada em sua natureza física. Existem duas abordagens para a representação destes problemas:

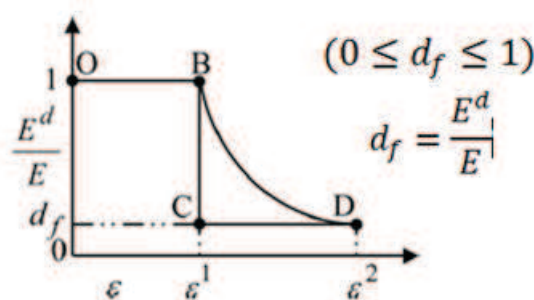
- a) *Degradação de propriedades baseadas nas variáveis de campos*, caso em que ao menos uma das propriedades é função dos campos envolvidos. Geralmente a

função degradação das propriedades dos materiais é função do histórico tensão – deformação²⁷.

- b) *Degradação das propriedades utilizando a mecânica do dano*, o valor do coeficiente de redução de rigidez é função de fator de degradação que mede dano no material²⁷.

Os modelos de degradação gradual são geralmente dependentes do modo de falha. Uma abordagem baseada na degradação controlada pela deformação é ilustrada na Figura 10, onde d_f é o fator de degradação e E_d representa a propriedade degradada. O caminho O-B-C representa uma degradação brusca, enquanto o caminho O-B-D representa uma degradação gradual (suavizada). Uma motivação importante para o uso de modelos de degradação gradual é que a variação da rigidez do laminado é mais suave que no caso da degradação brusca, melhorando a convergência dos métodos numéricos de análise não linear, como o Método de Newton-Raphson.

Figura 10 – Degradação brusca x degradação gradual.



Fonte: Rocha (2013)⁶

Embora os métodos utilizando a mecânica do dano contínuo, com uma base física mais sólida, sejam os mais indicados para melhor avaliar a progressão do dano, eles exigem o conhecimento de um grande número de parâmetros experimentais de difícil obtenção. Tais parâmetros geralmente não são fornecidos por fabricantes e exigem ensaios de alto custo para sua determinação¹⁴.

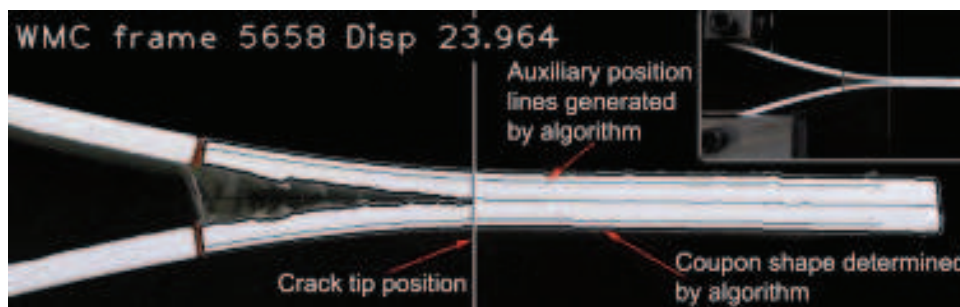
Rocha⁶, utilizou com sucesso modelos de degradação brusca e gradual na análise não linear de cascas abatidas. Maiores detalhes sobre estes modelos podem ser encontrados em seu trabalho.

2.6 Delaminação

A falha interlaminar (mais conhecida como delaminação) consiste na separação (descolamento) de duas lâminas adjacentes unidas através de uma matriz polimérica ou adesivadas. É uma forma de falha predominantemente causada por defeitos de manufatura, impacto

transversal de objetos, alta concentração de tensão em bordos livres ou descontinuidades geométricas. Quando o laminado é submetido a cargas externas a delaminação pode se propagar, levando ao colapso em uma carga inferior àquela que ocorreria sem delaminação. A Figura 11 mostra um ensaio para obter a energia crítica de fratura em abertura transversal. Aqui é possível observar o comportamento macroscópico da propagação da delaminação.

Figura 11 – Teste para a obtenção da energia crítica de fratura em abertura transversal.



Fonte: Lahuerta (2014)²⁸

Existem duas linhas de projetos em compósitos: A primeira visa evitar que a estrutura sofra o início da delaminação, enquanto a outra linha considera que, uma vez que o dano esteja presente na estrutura, é importante determinar o nível de tensão que aquela estrutura pode suportar e como este defeito irá evoluir. Este tipo de projeto é baseado no conceito de Carga Última (UL)

Um exemplo disto é a simulação da evolução da delaminação realizada para o caso de defeitos prévios causados por impactos ou outros acidentes, onde uma certa delaminação é detectada por inspeções e é necessário determinar se a estrutura ainda pode operar ou se precisa passar por reparos.

A delaminação pode ser gerada por tensões fora do plano diferentes de zero (σ_z , τ_{xz} , $\tau_{yz} \neq 0$). Tensões de cisalhamento interlaminar tendem a deslizar uma lâmina sobre a sua adjacente, enquanto tensão de tração (abertura) tende a separar uma lâmina da outra transversalmente. Em ambos os casos a tensão interlaminar pode causar a separação das lâminas.

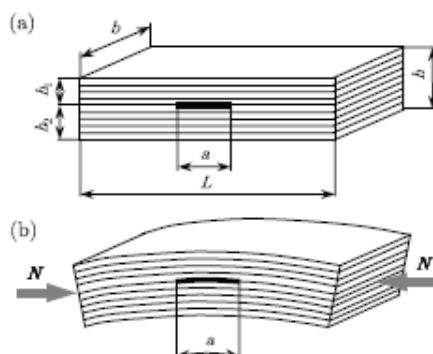
A tensão interlaminar é função principalmente da sequência de laminação. Logo, esta pode ser controlada através de um projeto adequado da mesma⁷. Existem dois tipos básicos de delaminação^{29,30}: Delaminações internas e delaminações superficiais.

Delaminações internas são originadas nas camadas internas do laminado e podem acontecer devido à interação entre a matriz polimérica trincada e a interface da fibra. Estas reduzem consideravelmente a capacidade de carga da estrutura em compósitos. Em particular, quando cargas de compressão são aplicadas, todo o comportamento a flexão do laminado é afetado. Também sob compressão, estruturas esbeltas podem sofrer flambagem local, das lâminas, ou global do laminado^{14,31}, levando a delaminação por flambagem.

Apesar de a delaminação separar o laminado em duas partes diferentes, existe uma

interação entre a deformação das duas partes. Devido a esta interação, as duas partes podem defletir de maneira semelhante. A Figura 12 mostra um desenho esquemático da delaminação interna.

Figura 12 – Delaminação interna: (a) disposição no laminado (b) Efeito na estabilidade global.

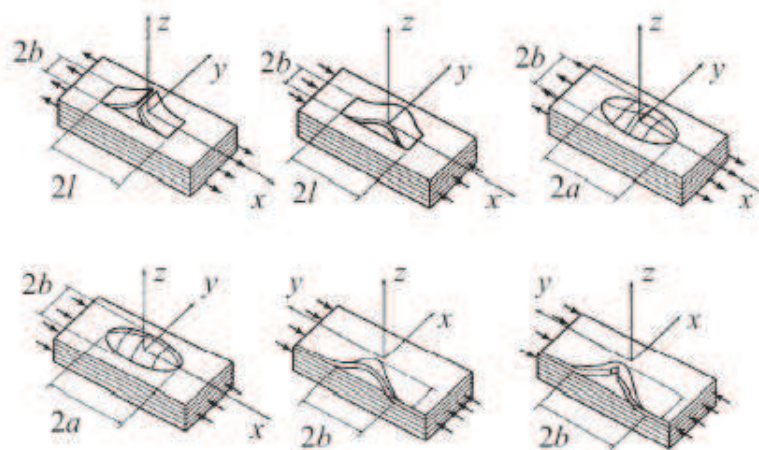


Fonte: Turon (2006)³¹.

Delaminação superficial, como o próprio nome indica, origina-se próximo à superfície do laminado e representa um cenário mais complexo do que a delaminação interna. A deformação da parte delaminada não é tão influenciada pela deformação do resto do laminado. Logo, a deformação da parte delaminada não segue necessariamente a deformação do resto da estrutura. Consequentemente não só o crescimento da parte delaminada deve ser levado em conta como também a sua estabilidade local³¹.

Bolotin^{29,30} classificou os diferentes tipos de delaminação próxima à superfície que podem ser originados em cascas compósitas em diferentes situações de carregamento, como ilustrado na Figura 13.

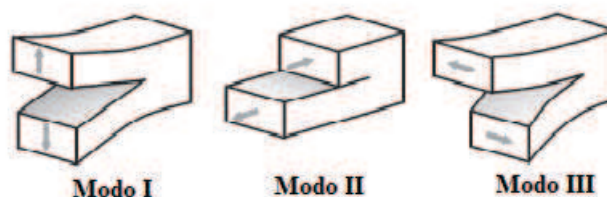
Figura 13 – Delaminação próxima à superfície: (a) Aberta em tensão; (b) Fechada em tensão (c) Aberta em flambagem (d) Fechada em flambagem (e) Borda flambada (f) Borda flambada com trinca secundária.



Fonte: Bolotin (1996).²⁹

Em nível microscópico, o crescimento de uma trinca interlaminar é precedido pela formação de uma zona de dano na frente da trinca. O tamanho e o formato da zona de deformação (ou dano) é bem variável, dependendo da rigidez da resina e dos modos de propagação da trinca, ilustrados na Figura 14. A zona de dano na ponta da trinca para os modos II ou III é maior que para o modo I.

Figura 14 – Modos de propagação de trinca.



Fonte: Turon (2006).³¹

Existe uma diferença nas zonas de deformação/dano entre sistemas com matrizes frágeis e dúcteis. Para matrizes frágeis a zona de deformação/dano é bem menor que para materiais dúcteis. Para o modo I, o carregamento em sistemas frágeis resulta em microtrincas na zona da ponta de trinca. Sua coalescência e crescimento resultam no avanço da trinca.

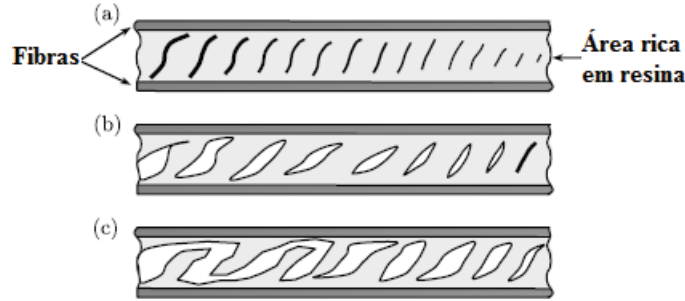
Algumas vezes, o avanço da trinca ocorre através do descolamento entre matriz e fibra antes da coalescência das micro trincas ocorrerem. Para sistemas dúcteis a deformação plástica em volta da ponta da trinca precede o avanço da trinca. O avanço da trinca geralmente acontece por rasgamento, mas o avanço da trinca por descolamento interfacial também é bastante observado em compósitos com resinas mais dúcteis³¹.

A delaminação nos modos II e III, que acontecem devido ao cisalhamento, ocorrem de modo muito distinto. Microtrincas formam-se a uma distância considerável na frente da ponta da trinca, em um ângulo de 45° ao plano das camadas. Estas trincas crescem até que atinjam as fibras que cercam as regiões ricas em resina entre as camadas. As fibras acima e abaixo da região onde as trincas se formam são responsáveis por travar o crescimento das microtrincas. Logo, a coalescência das microtrincas é necessária para a propagação e avanço da macrotrinca (Figura 15). Esta coalescência geralmente ocorre na interface fibra-matriz na forma de “telhado ondulado”. O processo de fratura para o modo II da delaminação tem a aparência de uma ruptura dúctil, com ocasional descolamento de fibra.

2.6.1 Critério de início da delaminação

O início da delaminação pode ser determinado simplesmente através de uma relação comparativa das tensões com suas devidas resistências³¹. O critério mais utilizado^{7,8,31-33} considera uma interação quadrática entre as tensões normais (t_1) e de cisalhamento (t_2 e t_3)

Figura 15 – Formação e crescimento da delaminação do modo II na interface das camadas: (a) formação de microtrincas; (b) crescimento e abertura das microtrincas (c) coalescência das microtrincas acompanhado das “pontas de cisalhamento”.



Fonte: Turon (2006)³¹.

existentes no laminado:

$$\sqrt{\left(\frac{t_3}{\sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{t_1}{\tau_{s1}}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\tau_{s2}}\right)^2} = 1 \quad \text{para } t_3 > 0 \quad (11)$$

Para modo I puro:

$$\sqrt{\left(\frac{t_3}{\sigma_n}\right)^2} = 1 \quad \text{para } t_1, t_2 = 0 \quad (12)$$

Para modo II puro:

$$\sqrt{\left(\frac{t_1}{\tau_{s1}}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\tau_{s2}}\right)^2} = 1 \quad \text{para } t_3 \leq 0 \quad (13)$$

onde t_3 é a tensão normal à lâmina, t_1 e t_2 são os cisalhamentos transversais, σ_n , τ_{s1} e τ_{s2} são as resistências transversal e cisalhante, respectivamente^{33,34}.

2.6.2 Propagação da delaminação

A propagação da delaminação é prevista quando a taxa de liberação de energia (G_I , G_{II} , G_{III}) for igual à energia de resistência à fratura correspondente do material (G_{Ic} , G_{IIc} , G_{IIIc}). A transição entre o início da delaminação e sua propagação é controlada pelas leis constitutivas que caracterizam o acúmulo de energia dentro do material. O critério de propagação é geralmente formulado independentemente do critério de início. O critério de falha para propagação da delaminação pode ser expresso como:

$$f_{\text{propagação}} = f(G_i) - 1 = 0 \quad (14)$$

Existem diferentes formas adotadas na literatura para definir os critérios de propa-

gação. Um destes critérios é dado pela seguinte expressão³¹:

$$f_{\text{propagação}} = f(G_i) = \left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\beta + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIc}}\right)^\gamma - 1 = 0 \quad (15)$$

Onde α , β e γ são parâmetros que devem ser ajustados utilizando resultados experimentais. Os valores de $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ou $\alpha = \beta = \gamma = 2$ são frequentemente escolhidos quando não existem dados experimentais disponíveis. Os valores seleccionados correspondem ao critério de falha linear ou quadrático, respectivamente.

Kenane e Benzeggagh³⁵ propõem um critério de falha apenas para a propagação nos modos I e II:

$$f_{\text{propagação}} = \frac{G_T}{G_c} - 1 = 0 \quad (16)$$

Onde G_T é igual a soma das taxas de liberação de energia nos modos I, II e III e G_c é a taxa de liberação de energia crítica para o modo misto. Esta depende das taxas de liberação de energia crítica dos modos independentes:

$$G_c = G_{Ic} + (G_{IIc} - G_{Ic}) \left(\frac{G_{II}}{G_T}\right)^\eta \quad (17)$$

sendo η um parâmetro de correção para diferentes tipos de materiais.

3 ANÁLISE NÃO LINEAR

Muitos fenômenos da natureza podem ser modelados a partir de simplificações lineares. Entretanto, quando deseja-se obter bons resultados para a descrição de fenômenos mais complexos, modelos não lineares tornam-se necessários. Contudo, a consideração de fenômenos não lineares aumenta tanto a complexidade matemática dos modelos, como o custo computacional da solução.

No caso de problemas estruturais, as não linearidades mais importantes são:

- a) Não Linearidade Geométrica (NLG): Ocorre em estruturas que apresentam grandes deslocamentos e, possivelmente, grandes deformações. Desta forma, as relações entre deslocamentos e deformações passam a ser não lineares.
- b) Não Linearidade Física (NLF): Ocorre quando a relação tensão-deformação do material é não linear (e.g. elasticidade não linear, plasticidade, fluência).
- c) Não Linearidade de Contato: Ocorre quando as condições de contorno não são constantes, envolvendo a possibilidade de contato ou perda de contato entre sólidos distintos ou partes de um mesmo sólido.

Os três tipos de não linearidade serão tratadas neste trabalho. Este capítulo se dedica especialmente a não linearidade geométrica de sólidos laminados. A não linearidade física e de contato serão abordadas nos capítulos seguintes no qual os problemas de delaminação serão tratados.

Para considerar grandes deslocamentos em uma análise por elementos finitos, faz-se necessário a utilização dos termos de deformação não lineares³⁶. Estes tornam as forças internas e, conseqüentemente, a matriz de rigidez, dependentes dos deslocamentos. Com isso, a análise deve ser feita utilizando algum método numérico iterativo.

Existem basicamente três abordagens para a formulação de elementos finitos geometricamente não lineares: a formulação Lagrangiana Total, a Lagrangiana Atualizada e a Corrotacional.

Na formulação Lagrangiana Total, os termos de deformação de Green-Lagrange e as tensões de Piola-Kirchhoff II são utilizados, visto que tal medida de deformação é insensível aos deslocamentos de corpo rígido. Além disso, tanto tensões quanto deformações em qualquer instante de tempo são definidas a partir da configuração inicial da estrutura. Esta abordagem caracteriza-se pela sua formulação simples e facilidade de implementação computacional, sendo amplamente utilizada na análise de estruturas laminadas sujeitas a grandes deslocamentos⁶.

Na formulação Lagrangiana Atualizada, os termos de deformação de Green-Lagrange também são utilizados, mas as tensões e deformações em um instante de tempo $t + \Delta t$ não são definidas a partir da configuração inicial, mas a partir da última configuração de equilíbrio, logo, as tensões de Piola-Kirchhoff II não podem mais ser utilizadas, mas sim as tensões reais de Cauchy⁶.

Para a formulação Corrotacional, utiliza-se um sistema global fixo, no qual os deslocamentos podem ser grandes, e um sistema local que acompanha o elemento, no qual deslocamentos são pequenos. Desta forma, isola-se as parcelas de deslocamento de corpo rígido de forma explícita, permitindo o uso das matrizes lineares no sistema local. As matrizes globais não-lineares são obtidas a partir de transformações entre os dois sistemas de coordenadas⁶.

As abordagens Lagrangiana Atualizada e Corrotacional são mais utilizadas para a formulação de elementos de pórtico e de casca submetidos a grandes deslocamentos e rotações, pois nestes elementos o cálculo das deformações de Green-Lagrange é complexo. Por outro lado, no caso de elementos contínuos bi e tridimensionais a aplicação da abordagem Lagrangiana Total leva a uma formulação simples.

Assim, a abordagem Lagrangiana Total foi utilizada neste trabalho para a formulação de elementos sólidos laminados para análise não linear com grandes deslocamentos. A formulação desenvolvida e os métodos de solução das equações não lineares de equilíbrio serão mostrados a seguir.

3.1 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio do problema podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). De acordo com o PTV, o equilíbrio ocorre quando o trabalho virtual interno (δU) é igual ao trabalho virtual externo (δW_{ext}), qualquer que seja o deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}$, desde que este seja pequeno e obedeça as condições de contorno essenciais do problema¹¹. Matematicamente:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS + \sum \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{F}_i \quad (18)$$

onde $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ é o vetor de deformações virtuais, $\boldsymbol{\sigma}$ é vetor das tensões de Piola-Kirchhoff II, $\mathbf{b}$ são as forças de corpo, $\mathbf{q}$ são as forças de superfície e $\mathbf{F}$ são as cargas concentradas. Devido ao uso das deformações de Green-Lagrange e tensões de Piola-Kirchhoff II, todas as integrações são realizadas na configuração inicial (indeformada) da estrutura.

No Método dos Elementos Finitos os deslocamentos no interior dos elementos são interpolados a partir dos deslocamentos nodais e as deformações são obtidas a partir do uso de relações cinemáticas apropriadas, como será discutido posteriormente. Assim, a Equação (18) pode ser escrita como:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (19)$$

onde $\mathbf{g}$ é o vetor de forças internas e $\mathbf{f}$ é vetor das cargas externas. Como os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ são arbitrários, o equilíbrio do modelo de elementos é dado por

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (20)$$

Os vetores de forças internas e externas da estrutura são montados a partir da soma dos vetores de cada elemento. As expressões necessárias à obtenção do vetor de forças internas do elemento laminado serão apresentadas posteriormente.

Finalmente, é importante notar que a Equação (20) é válida para problemas com não linearidade geométrica e física, independentemente dos modelos constitutivos utilizados para descrever o comportamento dos materiais.

3.2 Métodos de solução

No caso de cargas independentes do deslocamento, as equações não lineares de equilíbrio podem ser escritas como

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} = 0 \quad (21)$$

onde $\mathbf{u}$ representa o vetor de deslocamentos nodais, $\mathbf{g}$ é o vetor de forças internas, $\mathbf{q}$ é a carga de referência, $\mathbf{r}$ é o vetor dos resíduos (forças desbalanceadas) e λ é um fator de proporcionalidade (fator de carga) que controla a aplicação do carregamento ($\mathbf{f} = \lambda \mathbf{q}$).

Variando o fator de carga e determinando-se os deslocamentos nodais correspondentes pode-se determinar as curvas cargas-deslocamento (caminhos de equilíbrio) da estrutura. Estas curvas são fundamentais para a interpretação dos resultados de análises não lineares, permitindo a determinação da capacidade de carga da estrutura, tipos de falha, estabilidade e caminhos pós-críticos, etc.

Como as equações de equilíbrio são não lineares, sua solução exige a utilização de métodos numéricos apropriados. O Método de Newton-Raphson é o mais utilizado na solução destas equações. Neste método, as equações de equilíbrio são linearizadas:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \Rightarrow \mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \quad (22)$$

onde o subscrito n representa o valor do novo resíduo, $\mathbf{K}_T$ é a matriz de rigidez tangente e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$ é igual ao vetor de forças internas $\mathbf{q}$. Como a carga não depende dos deslocamentos, a matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \quad (23)$$

A Equação (22) pode ser reescrita considerando que o novo resíduo deve se anular ($\mathbf{r}_n = \mathbf{0}$). Assim:

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} - \delta \lambda \mathbf{q} = -\mathbf{r} \quad (24)$$

Infelizmente, este sistema de equações não pode ser resolvido, porque contém $n + 1$ incógnitas,

mas apenas n equações, onde n é o número de graus de liberdade da estrutura. A seguir, serão apresentadas formas de resolver este problema.

3.2.1 Controle de Carga

No Método do Controle de Carga, o fator de carga λ é mantido constante durante cada passo. Portanto, $\delta\lambda$ é igual a zero durante todas as iterações. Desta forma, a Equação (24) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r} \quad (25)$$

Após o cálculo do incremento de deslocamentos, os deslocamentos nodais são atualizados como

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \quad (26)$$

Em seguida, os deslocamentos atualizados são utilizados para calcular o vetor de forças internas e o novo resíduo, de acordo com a Equação (21). O processo iterativo deve continuar até que o resíduo das equações de equilíbrio seja suficientemente pequeno:

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{f}\|)} \leq TOL \quad (27)$$

onde TOL é uma tolerância numérica prescrita.

3.2.2 Métodos de Newton-Raphson com Restrição

Devido a necessidade de superar tanto os fenômenos de “*snap-through*” como “*snap-back*”, Wempner³⁷ e Riks³⁸ propuseram o Método do Comprimento de Arco, posteriormente modificado por vários autores, como Ramm³⁹ e Crisfield⁴⁰.

Como o sistema de equações de equilíbrio, Equação (21), consiste em n equações e $n + 1$ incógnitas, a ideia principal destes métodos consiste em adicionar uma equação de restrição relacionando os incrementos de carga ($\Delta\lambda$) e deslocamento ($\Delta\mathbf{u}$). Logo, tem-se o seguinte sistema equações:

$$\begin{bmatrix} r(\mathbf{u}, \lambda) \\ a(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (28)$$

A restrição $a(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)$ pode ser reescrita como $a(\mathbf{u}, \lambda)$ sendo:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u} &= \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta\lambda &= \lambda - \bar{\lambda} \end{aligned} \quad (29)$$

onde $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\lambda})$ corresponde ao último ponto de equilíbrio conhecido e $(\mathbf{u}, \lambda)$ corresponde ao ponto que se deseja determinar. Desta forma, a Equação (28) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} r(\mathbf{u}, \lambda) \\ a(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (30)$$

Linearizando a Equação (30) e anulando o novo resíduo e o novo valor da restrição chega-se a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{q} \\ a_{,\mathbf{u}}^T & a_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ a \end{bmatrix} \quad (31)$$

Tomando apenas a primeira equação do sistema anterior, tem-se que

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} = \delta \lambda \mathbf{q} - \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{u} = \delta \lambda \delta \mathbf{u}_1 - \delta \mathbf{u}_2 \quad (32)$$

onde

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_1 = \mathbf{q} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_2 = \mathbf{r} \quad (33)$$

Substituindo a Equação (32) na segunda equação do sistema de Equações (31) obtém-se a expressão que permite a determinação do incremento do fator de carga:

$$\delta \lambda = \frac{a_{,\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u}_2 - a}{a_{,\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u}_1 + a_{,\lambda}} \quad (34)$$

Conhecidos $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \lambda$, as variáveis correspondentes à nova iteração $i + 1$ são calculadas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u} \\ \lambda_{i+1} &= \lambda_i + \delta \lambda \end{aligned} \quad (35)$$

Caso necessário, os incrementos calculados em cada passo podem ser calculados como

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{i+1} &= \Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda_{i+1} &= \Delta \lambda_i + \delta \lambda \end{aligned} \quad (36)$$

Obviamente, no início de um novo passo estes incremento são nulos: $\Delta \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ e $\Delta \lambda_0 = 0$. Alternativamente, estes incrementos podem ser calculados a partir da diferença entre os valores atuais e os valores correspondentes ao último ponto de equilíbrio conhecido:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_{i+1} - \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \lambda_{i+1} &= \lambda_{i+1} - \bar{\lambda} \end{aligned} \quad (37)$$

A forma específica de cada método incremental-iterativo é determinada pela restrição $a(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda)$ utilizada para relacionar os incrementos de carga e deslocamento. Em todos os métodos discutidos neste trabalho, o processo iterativo é baseado no Método de Newton-Rapshon, sendo necessário a utilização da matriz de rigidez tangente.

No caso do Controle de Deslocamento, a restrição utilizada é dada por:

$$a = u^j - u_p = \mathbf{e}_j^T \mathbf{u} - u_p \quad (38)$$

onde u_p é o deslocamento prescrito e $\mathbf{e}_j$ é um vetor unitário cujas componentes são todas nulas com exceção da componente de controle j . Considerando que $a_{,\mathbf{u}} = \mathbf{e}_j$ e $a_{,\lambda} = 0$, a Equação (34) no caso de Método do Controle de Deslocamento é dada por

$$\delta \lambda = \frac{\delta \mathbf{u}_2^j - a}{\delta \mathbf{u}_1} \quad (39)$$

Considerando que no início da primeira iteração, correspondente ao preditor, o resíduo é nulo, então $\delta \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$. Assim:

$$\delta \lambda = \frac{-a}{\delta \mathbf{u}_1^j} = \frac{u_p - \mathbf{u}^j}{\delta \mathbf{u}_1^j} = \frac{\Delta u_p}{\delta \mathbf{u}_1^j} \quad (40)$$

onde Δu_p é o incremento escolhido para o deslocamento de controle. Como a restrição a utilizada no Método de Controle de Deslocamento é linear, neste caso o Método de Newton-Rapshon é exato e a restrição é nula em todas as demais iterações. Assim, nas iterações após o preditor, o incremento do fator de carga é calculado como

$$\delta \lambda = \frac{\delta \mathbf{u}_2^j}{\delta \mathbf{u}_1^j} \quad (41)$$

No caso dos Métodos de Comprimento de Arco, a restrição pode ser escrita como:

$$a = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \psi^2 \Delta \lambda^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q}) - \Delta l^2 \quad (42)$$

onde Δl é o incremento do comprimento de arco da curva de equilíbrio $(\mathbf{u}, \lambda)$ e ψ é um fator de escala entre os termos de carga e deslocamento. Esta equação pode ser entendida como um hipersfera de raio Δl no espaço $\Re^{n+1}$. A restrição é responsável por assegurar que todos os pontos obtidos durante o processo iterativo estejam a uma distância Δl do último ponto convergido (i.e. sobre a curva carga-deslocamento), como ilustrado na Figura 16.

Derivando a Equação (42) obtém-se os termos da Equação (34) necessários ao cál-

derando $a = 0$, o incremento do fator de carga é calculado como:

$$\delta\lambda = \frac{\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_2}{\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_1} \quad (45)$$

Um interpretação geométrica da forma proposta por Ramm é que o incremento de carga calculado da forma acima faz com que o deslocamento iterativo ($\delta\mathbf{u}$) seja ortogonal ao deslocamento incremental ($\Delta\mathbf{u}$) acumulado no passo corrente:

$$\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}^T (\delta\lambda \delta\mathbf{u}_1 - \delta\mathbf{u}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\lambda = \frac{\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_2}{\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_1} \quad (46)$$

Crisfield⁴⁰ também considerou $\psi = 0$, mas utilizou diretamente a forma quadrática da restrição para o cálculo do fator de carga na nova iteração. Considerando que a restrição é satisfeita de forma exata ao final da nova iteração, tem-se que:

$$a_{i+1} = \Delta\mathbf{u}_{i+1}^T \Delta\mathbf{u}_{i+1} - \Delta l^2 = 0 \quad (47)$$

Onde o novo incremento de deslocamentos é dado por

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1} = \Delta\mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_i + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_1 - \delta\mathbf{u}_2 \quad (48)$$

Substituindo este incremento na Equação (47) chega-se a uma equação do 2º grau dada por:

$$A \delta\lambda^2 + B \delta\lambda + C = 0 \quad (49)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u}_1 \\ B &= 2\delta\mathbf{u}_1^T (\Delta\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_2) \\ C &= (\Delta\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_2)^T (\Delta\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_2) - \Delta l^2 \end{aligned} \quad (50)$$

Resolvendo-se esta equação obtém-se duas raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$. De acordo com Crisfield⁴⁰, o procedimento para escolher a raiz apropriada consiste em calcular o vetor dos novos deslocamentos incrementais $\Delta\mathbf{u}_{i+1}$ para ambas as soluções e escolher aquela que fizer o menor ângulo com o incremento anterior ($\Delta\mathbf{u}_i$). A ideia desta escolha é evitar mudanças bruscas nos deslocamentos incrementais de uma iteração para outra, melhorando a convergência do método.

As expressões apresentadas anteriormente para cálculo do incremento de fator de carga ($\delta\lambda$) no Método do Comprimento de Arco não podem ser utilizadas na primeira iteração de um novo passo (i.e. incremento) porque neste caso o deslocamento incremental acumulado é nulo ($\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Assim, a primeira iteração de um novo passo é conhecida como preditor e deve ser tratada de forma especial.

Como o preditor se inicia em um ponto de equilíbrio, tem-se que o resíduo é nulo e, em consequência, tem-se que $\delta \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$. Desta forma, o incremento de deslocamento no final do preditor é dado por

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \lambda_p \delta \mathbf{u}_1 \quad (51)$$

Substituindo esta expressão na restrição do comprimento de arco, tem-se:

$$a_p = \Delta \lambda_p^2 \delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_1 - \Delta l^2 = 0 \quad (52)$$

Portanto, o incremento de carga correspondente ao preditor pode ser calculado a partir da expressão:

$$\Delta \lambda_p = \frac{s \Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_1}} \quad (53)$$

onde s indica o sinal (positivo ou negativo) do incremento de carga. A escolha do sinal do preditor de carga pode ser feita analisando o número de pivôs negativos na matriz de rigidez tangente após fatoração ($s = 1$ caso $\mathbf{K}_T$ seja positiva definida). Nesse caso, quando a curva passa por um ponto limite, um pivô negativo surge e, assim, o preditor tende a fazer a curva caminhar para baixo (trecho instável). Porém, pivôs negativos também surgem quando a curva passa por pontos de bifurcação, mas o caminho não necessariamente se torna descendente. Assim, em tais casos, a utilização deste método causaria uma oscilação em torno do ponto de bifurcação. Outros trabalhos buscam utilizar outras medidas para calcular o sinal do preditor⁴¹.

Por fim, torna-se necessário definir um valor para comprimento de arco (Δl) inicial e atualizar este valor a cada passo. Como o comprimento de arco é um parâmetro geométrico com pouco significado físico, é interessante definir o seu valor inicial a partir de um incremento de carga, como no Método do Controle de Carga. Assim, utilizando a Equação (53) pode-se calcular

$$\Delta l = \Delta \lambda_0 \sqrt{\delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_1} \quad (54)$$

onde $\Delta \lambda_0$ é o incremento de carga inicial.

É importante notar que, dependendo do ponto em que se esteja na curva carga-deslocamento, pode ser necessário utilizar um comprimento de arco menor para que a convergência seja atingida. Tal fato ocorre, notadamente, na proximidade de pontos limites. Por outro lado, em regiões bem comportadas, como trechos em que o caminho de equilíbrio apresenta curva de baixa curvatura, o comprimento de arco pode ser aumentado, de modo a diminuir o número de passos e, portanto, o esforço computacional. Uma forma simples de atingir este objetivo é adaptar o comprimento de arco de acordo com o número de iterações necessárias à

convergência:

$$\Delta I_{s+1} = \Delta I_s \sqrt{\frac{I_d}{I_s}} \quad (55)$$

Nesta expressão, I_d é o numero alvo de iterações para o próximo passo, ou seja, o número de iterações que se espera utilizar para atingir a convergência e I_s é o número de iterações utilizadas no passo anterior (s).

3.3 Elemento Sólido Laminado

Existem diferente formas de modelar os compósitos laminados. Os mais utilizados consistem na abordagem da Teoria da Camada Equivalente (*Equivalent Single Layer*) utilizada na modelagem de cascas e placas. Nesta abordagem, a contribuição de cada camada (*layer*) é considerada utilizando a integração através da espessura com a intensão de formar uma única lâmina equivalente⁴². Esta abordagem transforma efetivamente o problema tridimensional em um problema bidimensional através da utilização das hipóteses cinemáticas baseadas nas diversas teorias de placas, como a Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (*First Order Shear Deformation Theory*, FSDT), a Teoria de Deformação de Cisalhamento de Alta Ordem (*Higher Order Shear Deformation Theory*, HSDT), a Teoria Zigzag (*Zigzag Theory*), entre outras^{43,44}.

Apesar dos elementos finitos baseados nestas teorias apresentarem uma boa performance na análise de laminados, eles não são capazes de captar todas as tensões transversais, que são a causa do fenômeno da delaminação^{7,8,45}.

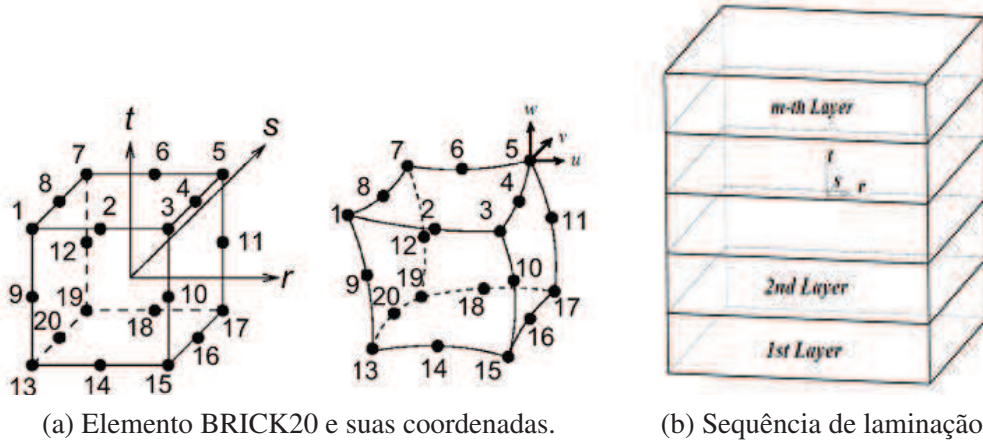
Uma outra alternativa é o uso de elementos sólidos que são capazes de captar estados de tensão tridimensionais e assim representar o fenômeno da delaminação. Com esta visão, diferentes formulações como elementos *solid-shell*⁴⁶, *shell kinematic assumptions*⁴⁷ podem ser utilizadas, assim como *Assumed Natural Strain* (ANS) e *Enhanced Assumed Strain* (EAS)^{48,49}.

Apesar da eficiência destes elementos, sua formulação é bastante complexa e a implementação computacional em um software de elementos finitos é bastante trabalhosa. Devido a estas dificuldades, optou-se por utilizar elementos sólidos paramétricos desenvolvidos utilizando a abordagem Lagrangiana Total. A formulação destes elementos para caso de materiais homogêneos e isotrópicos é bastante conhecida dentro da literatura, porém o mesmo não ocorre com o caso de laminados.

Como discutido no Capítulo 2, estes materiais não são nem homogêneos nem isotrópicos. Um solução para utilizar elementos homogêneos seria empregar uma discretização refinada de forma que houvesse um elemento por lâmina. Contudo, esta abordagem é proibitiva nos casos práticos, pois é comum o uso de laminados com um número elevados de lâminas. Assim, é necessário adaptar a formulação convencional destes elementos de forma a permitir a análise de estruturas laminadas utilizando apenas um elemento na espessura do laminado.

O número de nós, coordenadas paramétricas, graus de liberdade e sequência de laminação encontram-se representados na Figura 17. É importante notar que as lâminas são empilhadas na direção da espessura, que no elemento desenvolvido e implemento neste trabalho corresponde sempre à direção da coordenada paramétrica t . O sentido do empilhamento corresponde ao sentido positivo da coordenada t , como ilustrado na Figura 17b.

Figura 17 – Elemento BRICK20 e sequência de laminação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os deslocamentos u, v, w dentro do elemento são interpolados a partir dos deslocamentos nodais (u_i, v_i, w_i):

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (56)$$

onde N_i são as funções de forma¹¹ e n é o numero de nós. Estas equações podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (57)$$

onde:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} \quad (58)$$

Logo, a matriz de interpolação dos deslocamentos $\mathbf{N}$ é formada por uma série de sub-matrizes correspondentes a cada nó. É importante notar que as matrizes deformação-deslocamento $\mathbf{B}$, discutidas a seguir, apresentam o mesmo padrão.

Utilizando a formulação isoparamétrica, a geometria do elemento é mapeada utili-

zando as mesmas funções de forma utilizadas para interpolar os deslocamentos:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i; \quad z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \quad (59)$$

onde x_i, y_i, z_i são as coordenadas nodais do elemento no sistema global. Para obter as derivadas que compõe a matriz deformação-deslocamento, é necessário definir a matriz Jacobiana ($\mathbf{J}$), para assim transformar as derivadas das coordenadas paramétricas para cartesianas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_{i,r} x_i & \sum_{i=1}^n N_{i,r} y_i & \sum_{i=1}^n N_{i,r} z_i \\ \sum_{i=1}^n N_{i,s} x_i & \sum_{i=1}^n N_{i,s} y_i & \sum_{i=1}^n N_{i,s} z_i \\ \sum_{i=1}^n N_{i,t} x_i & \sum_{i=1}^n N_{i,t} y_i & \sum_{i=1}^n N_{i,t} z_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,r} \\ N_{i,s} \\ N_{i,t} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

3.3.1 Deformações

Como a abordagem não linear é o foco, a formulação Lagrangiana Total será utilizada. Esta abordagem é baseada na utilização das deformações de Green-Lagrange:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{,z}^2 + v_{,z}^2 + w_{,z}^2) \\ u_{,x} u_{,y} + v_{,x} v_{,y} + w_{,x} w_{,y} \\ u_{,x} u_{,z} + v_{,x} v_{,z} + w_{,x} w_{,z} \\ u_{,y} u_{,z} + v_{,y} v_{,z} + w_{,y} w_{,z} \end{bmatrix} \quad (61)$$

É interessante notar que as deformações são compostas por uma parcela linear e uma parcela não linear:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ w_{,x} + u_{,z} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & 0 & v_{,x} & 0 & 0 & w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & 0 & v_{,y} & 0 & 0 & w_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & u_{,z} & 0 & 0 & v_{,z} & 0 & 0 & w_{,z} \\ u_{,y} & u_{,x} & 0 & v_{,y} & v_{,x} & 0 & w_{,y} & w_{,x} & 0 \\ u_{,z} & 0 & u_{,x} & v_{,z} & 0 & v_{,x} & w_{,z} & 0 & w_{,x} \\ 0 & u_{,z} & u_{,y} & 0 & v_{,z} & v_{,y} & 0 & w_{,z} & w_{,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Com objetivo relacionar as deformações de Green-Lagrange com os deslocamentos nodais do elemento, é interessante definir o vetor auxiliar $\boldsymbol{\beta}$ que contém as derivadas dos

deslocamentos:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ N_{i,y} & 0 & 0 \\ N_{i,z} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & N_{i,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (63)$$

onde a matriz $\mathbf{G}$ tem a mesma forma da matriz $\mathbf{N}$ definida anteriormente. Utilizando o vetor $\boldsymbol{\beta}$, as deformações de Green-Lagrange podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} = \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \quad (64)$$

onde matriz constante $\mathbf{H}$ é dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

e a matriz $\mathbf{A}$ é aquela que multiplica do vetor $\boldsymbol{\beta}$ na Equação (62).

Utilizando a relação $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}\mathbf{u}$, definida na Equação (63), pode-se escrever as deformações de Green-Lagrange como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}\mathbf{G}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{B}_0\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{B}_L\mathbf{u} \quad (66)$$

ou simplesmente

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{B}_L \quad (67)$$

Nesta equação, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}\mathbf{G}$ à matrix correspondente à parcela linear da relação deformação-deslocamento, enquanto $\mathbf{B}_L = \mathbf{A}\mathbf{G}$ corresponde à parcela não linear desta relação.

3.3.2 Forças Internas

O vetor de forças internas do elemento ($\mathbf{g}$) é obtido a partir da parcela interna do trabalho virtual:

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (68)$$

Devido ao uso da formulação Lagrangiana Total, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor das tensões de Piola-Kirchhoff II e a deformação virtual é obtida a partir da variação da deformação de Green-Lagrange. Partindo da Equação (66) pode-se mostrar³⁶ que:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u} \quad (69)$$

onde

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \quad (70)$$

Substituindo a Equação (69) na Equação (68) e considerando-se deslocamentos virtuais nodais ($\delta \mathbf{u}$) arbitrários o vetor de forças internas do elemento pode ser calculada como

$$\mathbf{g} = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (71)$$

É importante notar, que devido a utilização da formulação Lagrangiana Total, a integral acima é calculada na geometria inicial (indeformada) do elemento.

3.3.3 Matriz de Rigidez

Como discutido anteriormente, a matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}_T$), utilizada nas iterações de Newton-Rapshon, é obtida através da diferenciação do vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T d\boldsymbol{\sigma} dV + \int_V d\bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) d\mathbf{u} \quad (72)$$

onde $\mathbf{K}_E$ representa a matriz de rigidez dependente do material e $\mathbf{K}_G$ representa a matriz de rigidez geométrica.

O incremento de tensões pode ser escrito como:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} = \mathbf{C}_T \bar{\mathbf{B}} d\mathbf{u} \quad (73)$$

onde

$$\mathbf{C}_T = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (74)$$

é a matriz constitutiva tangente. Portanto, a parcela da matriz de rigidez tangente dependente do material pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_E = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \bar{\mathbf{B}} dV \quad (75)$$

Finalmente, diferenciando-se a matriz $\bar{\mathbf{B}}$ em relação aos deslocamentos nodais pode-se mostrar³⁶ que:

$$\mathbf{K}_G = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV \quad (76)$$

onde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{S}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (77)$$

3.3.4 Integração do Elemento Sólido Laminado

É importante notar que as Equações (56) a (77) são idênticas para elementos laminados e convencionais (i.e. homogêneos). Entretanto, nos elementos laminados a matriz constitutiva $\mathbf{C}$ muda lâmina a lâmina. Em consequência disso, as tensões e a matriz constitutiva são descontínuas na direção da espessura, apesar dos deslocamentos e deformações serem contínuos no elemento. Desta forma, os procedimentos de integração utilizados para elementos convencionais não podem ser utilizados em elementos laminados.

No caso de elementos laminados, a integração do vetor de forças internas e da matriz de rigidez do elemento devem ser realizadas camada por camada. O procedimento proposto neste trabalho será discutido utilizando a matriz elástica como exemplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| dr ds dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| dr ds dt + \dots \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| dr ds dt \\ &\dots + \int_{t_m}^{t_{m+1}=1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| dr ds dt \end{aligned} \quad (78)$$

onde m é o numero de lâminas do compósito e t_k é a coordenada paramétrica da face inferior da k -ésima lâmina.

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas de elementos isoparamétricos são geralmente integrados utilizando a quadratura de Gauss, na qual as coordenadas e os pesos são definidos dentro de um intervalo padrão $[-1, 1]$. Contudo, as integrais correspondentes a cada lâmina estarão em intervalos paramétricos diferentes do padrão, impedindo a utilização direta da quadratura de Gauss.

Assim, a fim de utilizar os mesmos pontos e pesos de Gauss, as coordenadas paramétricas dos pontos de Gauss na direção da espessura devem ser mapeadas utilizando a expressão:

$$t = \frac{t_{k+1} + t_k}{2} + \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} t' \quad (79)$$

onde t' representa as coordenadas paramétricas no intervalo padrão $[-1, 1]$. Derivando-se esta expressão verifica-se que o incremento dt para a k -ésima lâmina é dado por:

$$dt = \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} dt' \quad (80)$$

Logo, a matriz de rigidez pode ser calculada a partir de:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= \sum_{k=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| dr ds dt \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} dr ds dt' \end{aligned} \quad (81)$$

Finalmente, utilizando a quadratura de Gauss:

$$\mathbf{K}_E = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NPG} (\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}|)_i \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} W_i \quad (82)$$

onde W_i são os pesos de Gauss. É importante notar que o mesmo procedimento é aplicado ao vetor de forças internas $\mathbf{g}$ e a matriz de rigidez geométrica $\mathbf{K}_G$.

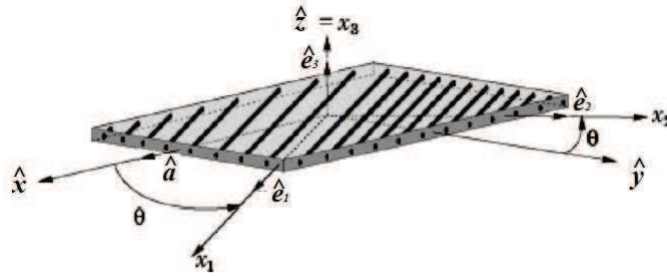
Considerando que o elemento deve produzir resultados consistentes independente do número de lâminas, recomenda-se a utilização em cada lâmina do mesmo número de pontos de Gauss utilizados na integração do elemento homogêneo correspondente. Assim, caso o elemento laminado seja um BRICK20, recomenda-se a utilização de integração com $2 \times 2 \times 2$ (integração reduzida) ou $3 \times 3 \times 3$ (integração completa) em cada lâmina.

3.3.5 Sistema de Coordenadas Local

Como discutido no Capítulo 2, materiais compósitos reforçados por fibras podem ser considerados como ortotrópicos em um sistema de coordenadas local. A Figura 18 mostra o sistema de coordenadas do material, onde x_1 está alinhado com a direção da fibra, x_2 corresponde a direção “*in-plane*” perpendicular à direção das fibras e x_3 está alinhado com a direção da espessura (fora do plano). Esta figura também mostra o sistema de coordenadas do laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e o ângulo θ que define a orientação das fibras de cada lâmina. É importante notar que o sistema do laminado e o sistema das lâminas (material) tem o mesmo vetor normal ao plano.

Em elementos de placa e casca baseados na Teoria de Camada Equivalente, a matriz constitutiva de cada camada, referente aos eixos $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, é integrada através da espessura do

Figura 18 – Sistemas de coordenadas Global (laminado) e local assim como seus vetores unitários.



Fonte: O autor.⁵⁰

laminado para que sua matriz constitutiva seja calculada. Esta abordagem não é utilizada para os elementos sólidos apresentados neste trabalho. Ao invés disso, a matriz constitutiva de cada lâmina é transformada para o sistema global utilizando a Equação (10) e utilizada diretamente na integração da matriz de rigidez do elemento, como discutido na seção anterior.

Portanto, neste trabalho os eixos do laminado são utilizados somente para a definição das direções das lâminas. Um vetor unitário $\hat{\mathbf{a}}$ é utilizado para definir a direção do vetor $\hat{\mathbf{x}}$ do laminado em relação ao sistema global. Por exemplo, no caso de uma casca cilíndrica $\hat{\mathbf{a}}$ corresponde a um vetor unitário na direção axial do cilindro.

O vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_3$ na direção da espessura, é calculado a partir da derivada das coordenadas do elemento $\mathbf{x}$ em relação à coordenada paramétrica t :

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{x}_{,t}}{|\mathbf{x}_{,t}|} \quad (83)$$

onde

$$\mathbf{x}_{,t} = \sum_{i=1}^n N_{i,t} \mathbf{x}_i \quad (84)$$

O vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_1$ que define o eixo x_1 é calculado através da rotação do vetor $\hat{\mathbf{a}}$ de um ângulo θ em relação ao eixo $\hat{\mathbf{e}}_3$.

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{R}_o \cdot \hat{\mathbf{a}} \quad (85)$$

Onde $\mathbf{R}_o$ é definido utilizando a fórmula de Rodriguez⁹:

$$\mathbf{R}_o = \mathbf{I} + \sin(\theta) \cdot \mathbf{S} + (1 - \cos(\theta)) \cdot \mathbf{S}^2$$

onde: $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_3 \\ n_3 & 0 & -l_3 \\ -m_3 & l_3 & 0 \end{bmatrix}$ (86)

Sendo

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{Bmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \end{Bmatrix} \quad (87)$$

Finalmente, o vetor $\hat{\mathbf{e}}_2$ é calculado através do produto vetorial dos vetores anteriores:

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (88)$$

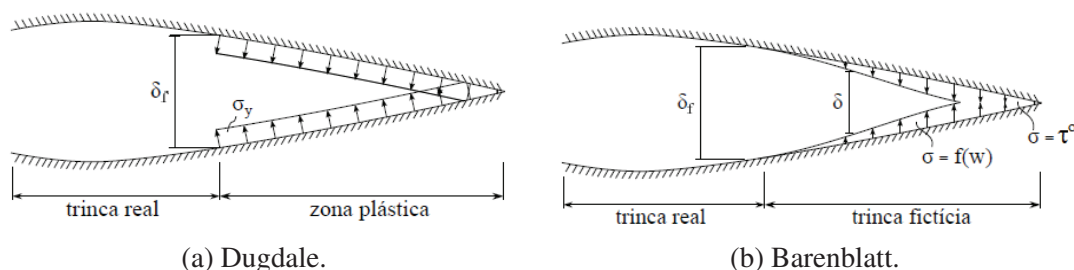
Como a tríade $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ é composta por vetores unitários ortogonais, suas componentes no sistema global são os cossenos diretores utilizados na Equação (6) para montar a matriz de transformação $\mathbf{T}$. É importante notar que, como os elementos podem ser curvos, o sistema de coordenadas local definido por estes três vetores pode variar ao longo do elemento. Assim, estes vetores devem ser calculados para cada ponto de Gauss utilizado na integração do elemento.

4 MODELAGEM DA DELAMINAÇÃO

A delaminação pode ser um dos mais importantes modos de falha de estruturas compósitas, levando a uma perda significativa da integridade estrutural. Recentemente, grandes progressos tem sido feito no desenvolvimento de ferramentas para a previsão de dano interlaminar. A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) tem se mostrado uma ferramenta efetiva para a previsão do crescimento da delaminação. Técnicas como o VCCI (*Virtual Crack Closure Integral*), proposta por Rybicki⁵¹ e modificado por Raju⁵², têm sido utilizadas com sucesso. Krueger⁵³ resumiu estes métodos de forma bem clara em seu trabalho. Outros métodos, como Método da Integral J⁵⁴, o Método da Extensão de Trinca Virtual⁵⁵ e o Método da Rigidez Derivada⁵⁶ também foram utilizados com este intuito. Entretanto, para estes métodos serem aplicados é necessário a existência de uma trinca inicial, pois eles não permitem simular o aparecimento da trinca, mas apenas a sua propagação.

Uma abordagem para a simulação da delaminação pode ser desenvolvida utilizando o Modelo de Trinca Coesiva (MTC)⁸. A ideia deste modelo é que as trincas discretas se originam e crescem a partir da aglutinação ou coalescência de microfissuras existentes na região da ponta da trinca (região de processo). Dugdale⁵⁷ introduziu o conceito de que a tensão no material é limitada pela tensão de escoamento e que na ponta da trinca forma-se um pequena zona plástica. Barenblatt⁵⁸ introduziu forças coesivas em um nível molecular para solucionar o problema de equilíbrio em corpos elásticos com trincas. Estes modelos, embora considerados similares, diferem, já que o primeiro assume que na zona de plasticidade na ponta da trinca a tensão é constante e igual a tensão de escoamento, enquanto o outro supõe que a tensão (σ) varia conforme o deslocamento relativo entre as faces da trinca, como mostra a Figura 19.

Figura 19 – Representação das tensões na ponta das trincas dos diferentes modelos.



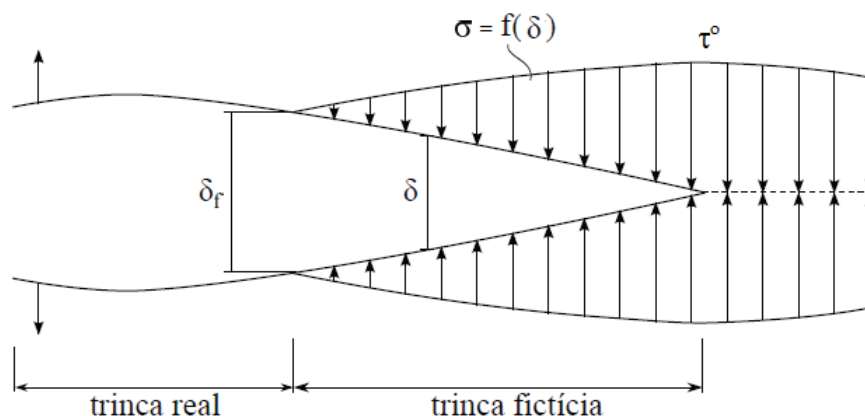
Fonte: Montenegro (2014)⁵⁹.

A lei constitutiva que modela o amolecimento simplifica os complexos mecanismos que acontecem no material ao longo da frente da trinca, onde uma grande quantidade de energia é dissipada no processo de fratura. Para compósitos laminados, estes mecanismos incluem a nucleação, crescimento e coalescência de microcavidades.

Hillerborg et al.⁶⁰ desenvolveram um modelo aplicando os conceitos de zona coesiva e batizaram-no de *Fictitious Crack Model* (Modelo de Trinca Fictícia), para investigar a

fratura em materiais parcialmente frágeis como o concreto. Este foi desenvolvido para representar o comportamento das fissuras que possuem uma região onde há transmissão de esforços entre as suas faces (Figura 20). O modelo de Hillerborg foi formulado para modo I das fraturas de concreto, podendo ser aplicado igualmente a outros materiais quase-frágeis, e depois estendido para o modo misto (modo I e II)⁶¹.

Figura 20 – Esquemático da zona coesiva



Fonte: Montenegro (2014)⁵⁹.

O trabalho de Hillerborg et al. teve dois focos principais:

- a) A tensão resistente τ^0 e a curva de amolecimento, que permite que o material não rompa logo após atingir τ^0 .
- b) A fissura coesiva pode se manifestar em qualquer material, mesmo sem haver microfissuras preexistentes.

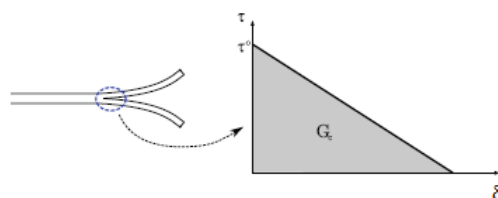
Esta afirmações contrariaram as abordagens construídas nos trabalhos de Barenblatt e Dugdale, que restringia a fissura coesiva a análises de fraturas próxima a fissuras preexistentes.

Os Modelos de Zona Coesiva (MZC) permitem tanto simular o início da delaminação como o seu crescimento sem a necessidade de especificar uma trinca inicial. A lei coesiva-decoesiva relaciona a tensão interna com a diferença de deslocamentos entre 2 faces adjacentes. Desta forma, a tensão entre as faces da trinca não cai bruscamente a zero como na Mecânica da Fratura Linear Elástica, sendo reduzida paulatinamente à medida que os deslocamentos relativos entre as faces da trinca aumentam.

A propriedade do material que relaciona a tensão que atua entre as faces da trinca à abertura δ , é encontrada através da relação $\sigma = f(\delta)$. A função $f(\delta)$ é conhecida como função de amolecimento do material e é determinada através de ensaios mecânicos. A tensão transferida, no modo I, é normal às faces da fissura. As duas propriedades mais importantes para a curva de amolecimento são a tensão resistente τ^0 , e a taxa de liberação de energia crítica

G_c . A Figura 21 ilustra esta relação. Quando a área sob o gráfico é igual à taxa de liberação de energia crítica G_c , a tração é reduzida a zero e a nova superfície de trinca é formada.

Figura 21 – Tensões na zona coesiva



Fonte: Turon (2006).³¹

Os Modelos de Zona Coesiva são mais eficientes que os modelos de Mecânica da Fratura devido a sua capacidade de representar o início da trinca e sua propagação. Desta forma, tanto as análises de tolerância de serviço da estrutura danificada, como as análises de resistência as tensões da estrutura íntegra podem ser realizados com a mesma ferramenta de análise.

Existem outros métodos que também vem sendo utilizados para descrever o crescimento de trincas sem um caminho de crescimento pré-determinado como as formulações “enriquecidas”^{62,63} ou Método dos Elementos Finitos Estendido/Generalizado (XFEM/GFEM)⁶⁴. Entretanto, estes métodos possuem uma abordagem mais complexa que a utilizada na abordagem de zona coesiva.

Este capítulo apresentará uma formulação de elementos de interface utilizando leis constitutivas baseadas na mecânica do dano, incluindo a termodinâmica dos processos irreversíveis.

4.1 Abordagem pelo método dos Elementos Finitos

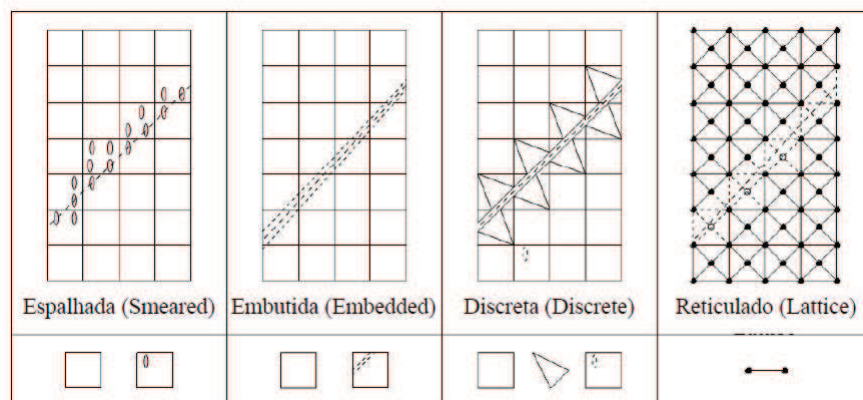
As principais abordagens para a simulação do processo de abertura e propagação de trincas pelo Método dos Elementos Finitos, pode ser dividida em três grupos:

- a) Abordagens contínuas que descrevem o processo de fratura por modelos constitutivos de alta ordem, como modelos integrais não locais (*Integral-type nonlocal models*)^{65,66}.
- b) Em modelos contínuos com descontinuidades, onde as fraturas são descritas como deslocamentos descontínuos, que são contidas dentro da descrição de continuidade do material⁶⁷.
- c) Em abordagens discretas que descrevem o processo de fratura não linear com a falha de elementos discretos, como treliças e vigas⁶⁸.

A trinca, assim como seu crescimento, pode ser incorporada à malha de elementos finitos através de diferentes métodos. Na Figura 22, algumas estratégias são mostradas, como

o tratamento de trincas espalhadas (*smeared crack*), trincas embutidas na malha (*embedded crack*) e a que trata o fraturamento como falha de elementos discretos. A figura ainda apresenta a malha de uma modelagem que utiliza elementos reticulados (*lattice model*). As duas principais estratégias empregadas para fraturas em materiais quase-frágeis são as trincas espalhadas e as trincas discretas^{61,69}, apesar de alguns autores incluírem o modelo de trincas reticuladas⁶¹.

Figura 22 – Fissuras incorporadas em modelos numéricos.



Fonte: Saouma (2000)⁷⁰.

Os modelos utilizando fissuras espalhadas e embutidas são baseadas nas formulações com base na mecânica do contínuo^{69,70}, enquanto as fissuras discretas possuem formulações mais compatíveis com a mecânica da fratura⁷⁰.

No conceito da trinca espalhada, a formulação tradicional do MEF é utilizada com elementos que são dependentes das relações tensão-deformação obtidas após a abertura δ (aplicada) no elemento interceptado pela trinca. As fraturas, dentro desta abordagem, são representadas através de um número infinito de trincas paralelas com aberturas infinitesimais⁶¹. As trincas são incorporadas através de leis constitutivas (tensão-deformação) do material, que deve ser necessariamente não linear e apresentar comportamento de amolecimento (*softening*)⁶⁹. A propagação destas é simulada pela redução da rigidez e resistência do material⁶¹. As deformações são decompostas entre uma parte contínua e uma parte considerando a trinca. A principal vantagem deste método é, normalmente, a ausência da necessidade de modificar a topologia da malha durante a progressão da fratura^{61,69,71}. A principal desvantagem é a limitação dos modos de deformação advindos do Método dos Elementos Finitos baseado em deslocamentos que, geralmente, não acomoda campos de descontinuidade facilmente, exceto quando as descontinuidades são alinhadas com as bordas dos elementos. Outros problemas já foram apontados e solucionados com abordagens secundárias, entretanto, algumas das soluções encontradas funcionam bem em determinados casos, mas apenas parcialmente bem em outros^{69,72,73}.

Em abordagens utilizando trinca discreta, a trinca estende-se entre os elementos e as forças coesiva são simuladas utilizando elementos de interface conectando os nós de ambos os lados da trinca. Os elementos devem considerar o deslocamento relativo entre as faces, prevenir

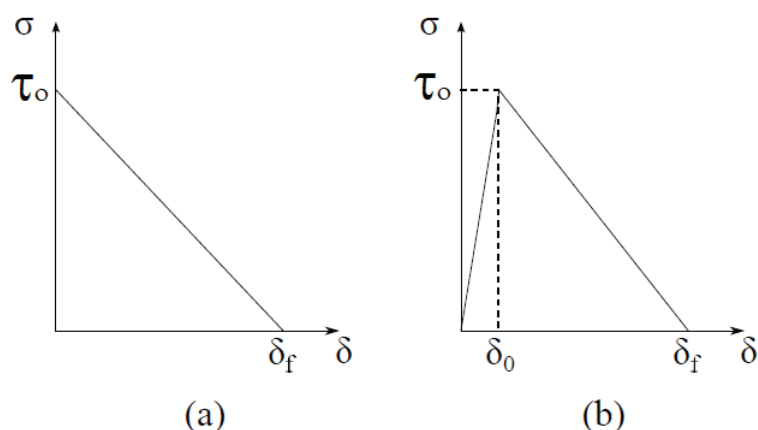
interpenetração das faces e estimar precisamente as tensões ao longo e através da interface^{59,74}.

O conceito de elementos de interface já foi dividido entre diversos elementos na literatura, com a criação de elementos com diferentes denominações e formulações, basicamente, semelhantes. A principal diferença entre estes elementos são: a espessura do elemento (finita ou nula), formulação constitutiva baseada em deformações ou deslocamentos, número de nós duplos (linear ou quadrático) e esquema de integração^{59,74}.

O primeiro elemento de interface com altura nula foi proposto por Goodman et al. [7] para uso na geotecnia, desde então diversos outros autores basearam-se na sua formulação. O elemento formulado era formado de 4 nós e 8 graus de liberdade, e por causa de sua formulação simples, implementação numérica fácil e resposta normal robusta foi amplamente empregado, mesmo possuindo deficiências cinemáticas associadas à resposta tangente.

Os modelos coesivos podem diferir também entre formulações intrínsecas ou extrínsecas (Figura 23). A diferença entre estas formulações está, basicamente, na forma como os elementos que representarão a trinca são inseridos na geometria inicial e na maneira como a inicialização da trinca é modelada.

Figura 23 – Representação das formulações (a) extrínseca e (b) intrínseca.



Fonte: Montenegro (2014)⁵⁹.

Na formulação intrínseca, os elementos coesivos são introduzidos entre elementos contínuos desde o início da análise. O critério de propagação da trinca é incorporado ao modelo constitutivo dos elementos de interface⁷⁵. As tensões coesivas crescem de zero até um ponto de tensão máxima e, então, decrescem gradualmente até zero, permitindo assim, o descolamento completo das faces. Xu et al.⁷⁶ e Camacho et al.⁷⁷ propuseram colocar elementos coesivos entre cada par de elementos. Esta idéia é largamente utilizada nas simulações de delaminação em materiais de múltiplas camadas utilizando elementos de interface^{31,78}, uma vez que no caso da delaminação o caminho da trinca é conhecido a priori, correspondendo a ligação entre duas lâminas.

Na formulação extrínseca, os elementos são inseridos adaptativamente, através de algoritmos que refazem a malha, apenas após a previsão da falha da interface ser detectada⁷⁹. Portanto, nessa situação o critério de propagação é externo ao elemento de interface. Quando as tensões agindo ao longo da interface entre dois elementos contínuos atingem um valor crítico, permite-se que a interface abra conforme a relação tensão-separação introduzindo elementos de interface com lei coesiva ao longo da interface danificada⁷⁵. Esta abordagem tem sido utilizada para modelar o crescimento de trincas coesivas no concreto^{80,81} e para modelar o crescimento de trincas em materiais dúcteis^{82,83}.

Segundo Tvergaard e Hutchinson⁸², em comparação a outros parâmetros coesivos, como a resistência do material τ^0 e a energia de fraturamento coesivo G_c , a influência do formato da curva tensão-deslocamento relativo na resposta numérica, geralmente, é relativamente fraca. Já Chandra et al.⁸⁴ defende que a curva constitutiva depende do material e processos inelásticos micromecânicos e, logo, a forma da curva deve refletir esses comportamentos, de outra forma, os resultados não têm importância significativa.

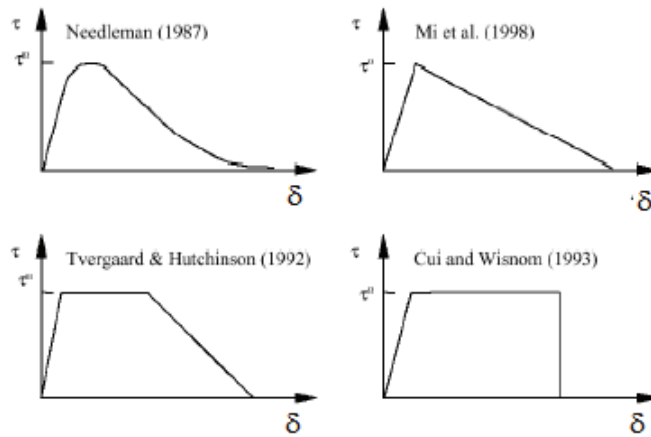
4.1.1 As principais leis constitutivas

A definição das equações constitutivas que relacionam tração ao deslocamento relativo em uma interface pode ser feita usando uma abordagem fenomenológica ou física. A abordagem física para definir as equações constitutivas usa métodos que derivam diretamente as equações constitutivas. Existem diversos métodos na literatura utilizando o teste de tração direta^{85,86}, a partir de medidas utilizando a integral J e a abertura de trinca final^{87,88} ou utilizando a teoria fractal⁸⁹. A calibração fenomenológica das equações constitutivas é alcançado utilizando os resultados obtidos em testes experimentais. Equações constitutivas são determinadas comparando a resposta do teste de uma amostra (curva carregamento-deslocamento) com os dados resultantes de análises de previsão utilizando diferentes parâmetros. Existem basicamente dois grupos de análises para ajustar as equações constitutivas utilizando dados experimentais⁹⁰. O primeiro grupo são técnicas que usam curvas suavizadas definidas *a priori* por um conjunto de parâmetros, ajustados a partir de dados experimentais. O segundo grupo usa pontos característicos ou propriedades das curvas de carga-deslocamento (pico de carga ou área sob o gráfico). Muitos destes modelos têm sido propostos. Os mais simples utilizam equações constitutivas bilineares^{34,45,78,91}. Entretanto, existem modelos mais sofisticados^{82,92-94}. Alguns destes modelos são mostrados na Figura 24.

Needleman⁹⁴ desenvolveu uma lei coesiva-decoesiva a partir da ideia de um potencial energético para simular o crescimento de trincas em sólidos isotrópicos dúcteis e frágeis. Este baseou-se na lei universal da relação entre energia de abertura e separação atômica de Smith-Ferrante proposta em Rose et al.¹⁰¹. Esta lei é largamente aplicada como uma lei exponencial coesiva, apesar da natureza das tensões tangenciais precisarem ser adicionalmente impostas, visto que a relação foi voltada para interfaces atômicamente finas. Needleman⁵⁹ e muitos outros autores na literatura já apresentaram inúmeras expressões do potencial com a

forma exponencial de Rose et al.¹⁰¹ representando os deslocamentos tangenciais de diferentes maneiras.

Figura 24 – Curvas tração-deslocamento relativo.



Fonte: Turon (2006)³¹.

Alfano⁹⁵ investigou a influência dos formatos das leis constitutivas comparando as leis bilinear, trapezoidal, exponencial e linear-parabólica sob testes estáticos. Para um típico teste de viga-dupla em balanço, as soluções encontradas foram praticamente independentes do formato das leis utilizadas. Uma verificação numérica para medir o grau de precisão das leis constitutivas mostrou que a lei trapezoidal apresentou o pior resultado tanto em termos de estabilidade numérica como em termos de convergência da solução por elementos finitos à solução exata. A lei exponencial foi provada ser a ótima em termos de precisão enquanto, a bilinear apresentou a maior harmonização entre custo computacional e precisão³¹.

4.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Reescrevendo a Equação (18) do princípio dos trabalhos virtuais aplicados a um volume contínuo, descrito na seção 3.1, em notação indicial, tem-se:

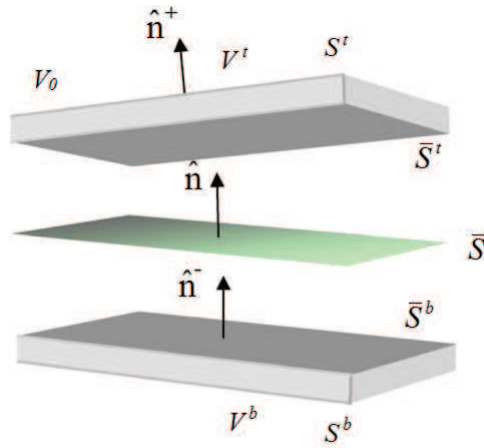
$$\delta U_{int} = \delta W_{ext} \Rightarrow \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_S T_i \delta u_i dS + \int_V b_i \delta u_i dV \quad (89)$$

onde as forças por unidade de volume são descritas por b_i , atuando no corpo de volume V , e as forças de superfície por T_i , atuando na superfície S inteira do corpo. Por simplicidade, a formulação visa considerar apenas pequenos deslocamentos. Entretanto, esta pode ser estendida seguindo os trabalhos desenvolvidos por Ortiz⁹⁶ e Goyal⁹⁷.

Se os componentes dos deslocamentos são descontínuos ao longo de uma superfície de um corpo, o Princípio dos Trabalhos Virtuais não pode ser aplicado ao corpo inteiro, mas pode ser reescrito para cada subregião na qual suas derivadas são contínuas⁹⁷. Suponha um volume indeformado V separado em dois domínios V^t e V^b por uma superfície $\bar{S}$ fortemente

descontínua através de V como mostra a Figura 25. Esta superfície é definida pelo seu vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$. Duas superfícies são unidas a $\bar{S}$: A superfície inferior de V^t denotada por $\bar{S}^t$ e a superfície superior de V^b denotada por $\bar{S}^b$. Cada uma dessas superfícies é definida pelos seus respectivos vetores normais como mostrado na Figura 25.

Figura 25 – Superfícies interna superior e inferior de um sólido contínuo modelado para ilustrar formulação coesiva.



Fonte: Adaptado de Goyal (2004)⁹⁷.

A superfície de interface $\bar{S}$ é uma superfície interna ao corpo e coincidente a $\bar{S}^t$ e $\bar{S}^b$. A medida em que a análise evolui, estas superfícies mantêm-se ligadas apenas pela lei constitutiva que descreve o comportamento da interface.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicados a cada domínio V^t e V^b , resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{V^t} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV^t + \int_{\bar{S}^t} T_i^t \delta u_i^t d\bar{S}^t &= \int_{V^t} b_i \delta u_i dV^t + \int_{S^t} T_i \delta u_i dS^t \\ \int_{V^b} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV^b + \int_{\bar{S}^b} T_i^b \delta u_i^b d\bar{S}^b &= \int_{V^b} b_i \delta u_i dV^b + \int_{S^b} T_i \delta u_i dS^b \end{aligned} \quad (90)$$

A resultante das componentes das tensões agindo em qualquer superfície interior deve obedecer a terceira lei de Newton. Entretanto, as componentes da tensão não são necessariamente contínuas⁹⁷. Logo, as equações de equilíbrio nas superfícies de interface são:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^t \hat{n}_i^t dS^t + \sigma_{ij}^b \hat{n}_j^b dS^b &= 0 \quad \text{ou, de forma equivalente,} \\ T_i^t d\bar{S}^t + T_i^b d\bar{S}^b &= 0 \quad \forall x_i \in S \end{aligned} \quad (91)$$

somando a Equação (91) na Equação (90) e substituindo $T_i^b d\bar{S}^b$ por $-T_i^t d\bar{S}^t$, obtém-se:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_{\bar{S}} T_i^t (\delta u_i^t - \delta u_i^b) d\bar{S}^t = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_S T_i \delta u_i dS \quad (92)$$

Tomando as componentes de tensão T_i agindo na superfície $\bar{S}$ e aplicando a terceira lei de Newton tem-se a seguinte relação a partir da Equação (91):

$$T_i^t dS^t = -T_i^b dS^b = -T_i d\bar{S} \quad \forall x_i^{t,b} \in S^{t,b} \quad e \quad x \in \bar{S} \quad (93)$$

Assim, o lado esquerdo da Equação (92) pode ser modificado utilizando a Equação (93), permitindo que o Princípio dos Trabalhos Virtuais seja reescrito incluindo as superfícies coesivas da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_{\bar{S}} T_i \delta \Delta_i d\bar{S} = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_S T_i \delta u_i dS \quad (94)$$

onde T_i no termo do trabalho virtual interno representa as componentes das tensões interfaciais agindo na superfície média deformável da trinca.

As componentes do deslocamento relativo são descritas no sistema global através da diferença entre os deslocamentos das duas faces da trinca:

$$\Delta_i = u_i^t - u_i^b \quad (95)$$

A Equação (94) é a base para a análise de fraturas em sólidos contínuos utilizando os MZC. Esta equação consegue descrever separadamente a contribuição do trabalho virtual do sólido base através do primeiro termo do trabalho interno (U_{int}) e a contribuição da trinca (segundo termo do trabalho interno) para o balanço da equação do Trabalho Virtual.

4.3 Formulação do Elemento de Interface

A formulação de elementos de interface de espessura nula será discutida a seguir. Como exemplo ilustrativo, a geometria e topologia de um elemento 3D de 8 nós é mostrada na Figura 26.

O vetor dos deslocamentos nodais $\mathbf{u}$ no sistema global é dado por:

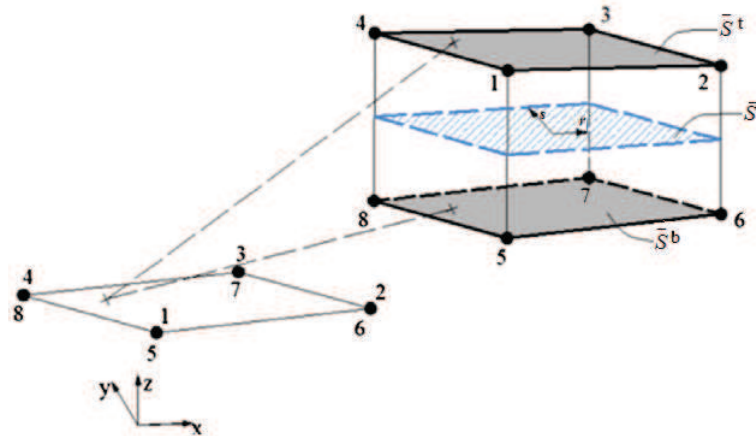
$$\mathbf{u}^T = \left[u_1^t \quad v_1^t \quad w_1^t \quad \dots \quad u_n^t \quad v_n^t \quad w_n^t \quad | \quad u_1^b \quad v_1^b \quad w_1^b \quad \dots \quad u_n^b \quad v_n^b \quad w_n^b \right] \quad (96)$$

Os deslocamentos relativos do elemento são dados por:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n N_i u_i^t - N_i u_i^b = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (97)$$

onde N_i representa as funções de forma do elemento, n representa o numero de nós em cada

Figura 26 – Elemento de interface 8 nós 3D



Fonte: Adaptado de Evangelista (2013).⁹⁸

face do elemento e $\mathbf{B}$ representa a matriz deformação-deslocamento:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & \dots & | & -N_i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_i & 0 & \dots & | & 0 & -N_i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_i & \dots & | & 0 & 0 & -N_i & \dots \end{bmatrix} \quad (98)$$

A superfície de referência $\bar{S}$ ilustrada na Figura 25 é definida como a superfície média entre as superfícies superior e inferior do elemento:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \mathbf{x}_i^t + N_i \mathbf{x}_i^b}{2} \quad (99)$$

É importante notar que modelos constitutivos da zona coesiva são definidos em termos da relação entre tensão e deslocamentos relativos para cada modo de fratura, enquanto as equações de equilíbrio do MEF são escritas no sistema de coordenadas global. É conveniente definir um sistema de coordenadas locais no qual as direções são tangentes e normal à superfície média do elemento correspondentes aos Modos II/III e Modo I, respectivamente. Inicialmente, os vetores tangentes são computados como:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_{,r}; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_{,s} \quad (100)$$

logo, o vetor normal é calculado por:

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \quad (101)$$

Entretanto, os vetores $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ não são sempre perpendiculares. Logo, visando definir uma base ortogonal, o vetor $\mathbf{a}_1$ é definido como o primeiro vetor tangencial do sistema local,

enquanto $\mathbf{a}_3$ é utilizado para calcular o vetor normal do sistema:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_3|} \quad (102)$$

Finalmente, o segundo vetor tangencial do sistema local é calculado como:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \quad (103)$$

A transformação dos deslocamentos do global (Δ) para o sistema local (δ) é realizada através da relação:

$$\delta = \mathbf{R}\Delta \quad (104)$$

onde a matriz de rotação $\mathbf{R}$ é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (105)$$

sendo:

$$\mathbf{e}_1 = \{l_1 \quad m_1 \quad n_1\}; \quad \mathbf{e}_2 = \{l_2 \quad m_2 \quad n_2\}; \quad \mathbf{e}_3 = \{l_3 \quad m_3 \quad n_3\} \quad (106)$$

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, pode-se mostrar que as tensões podem ser transformadas do sistema local para o global através da seguinte relação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^T \mathbf{t} \quad (107)$$

onde $\mathbf{t}$ são as tensões coesivas no sistema local.

O vetor de forças internas $\mathbf{g}$ do elemento de interface é obtido a partir do PTV:

$$\delta W_{int} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \int_{\bar{S}} \delta \Delta^T \mathbf{T} d\bar{S} \quad (108)$$

Utilizando a Equação (97) e a Equação (107), o vetor de forças internas pode ser escrito como:

$$\mathbf{g} = \int_{\bar{S}} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{t} |\mathbf{J}| d\bar{S} \quad (109)$$

onde $\bar{S}$ corresponde a superfície média do elemento. Esta integral pode ser escrita em coordenadas paramétricas como:

$$\mathbf{g} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{t} |\mathbf{J}| dr ds \quad (110)$$

onde $|\mathbf{J}| = ||\mathbf{a}_3||$. Finalmente, em uma implementação computacional, esta integração é realizada numericamente utilizando a quadratura apropriada:

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{t} |\mathbf{J}|)_i W_i \quad (111)$$

onde N é o número de pontos de integração, i indica o índice do ponto de integração e W_i é o peso correspondente.

Vários autores^{31,45,98,99} observaram que a utilização da integração de Gauss em elementos de interface podem causar problemas numéricos que dificultam a convergência da análise (oscilações espúrias). Estes estudos mostraram que deve-se utilizar a integração de Newton-Cotes no lugar da integração da Gauss. Entretanto, é recomendado a utilização de um pouco a mais pontos de Newton-Cotes além do mínimo necessário para a obtenção da integração exata. Deve-se analisar bem qual o número ideal de pontos já que a utilização excessiva de pontos de Newton-Cotes também geram problemas de convergência.

Como discutido no Item 3.1, a solução da equação de equilíbrio não linear é realizada geralmente utilizando um processo iterativo baseado no Método de Newton-Raphson. A matriz tangente ($\mathbf{K}_T$) de um elemento de interface, necessária para calcular as iterações de Newton-Raphson, é obtida pela diferenciação das forças internas do elemento em relação aos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\bar{S}} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\delta}} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\Delta}} \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}}{\partial \mathbf{u}} d\bar{S} = \int_{\bar{S}} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{C}_T \mathbf{R} \mathbf{B} d\bar{S} \quad (112)$$

onde:

$$\mathbf{C}_T = \partial \mathbf{t} / \partial \boldsymbol{\delta} \quad (113)$$

é a matrix constitutiva tangente do modelo constitutivo. Do mesmo modo que as forças internas, esta equação pode ser escrita em coordenadas paramétricas como:

$$\mathbf{K}_T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{C}_T \mathbf{R} \mathbf{B} |\mathbf{J}| dr ds \quad (114)$$

da mesma forma que para as forças internas, esta integração é realizada numericamente utilizando a quadratura apropriada:

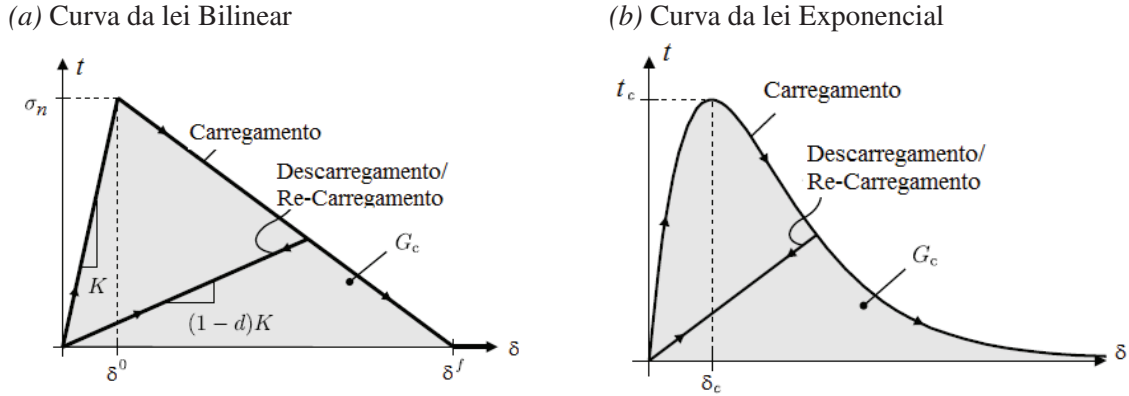
$$\mathbf{K}_T = \sum_{i=1}^N (\mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{C}_T \mathbf{R} \mathbf{B} |\mathbf{J}|)_i W_i \quad (115)$$

É importante notar que $\mathbf{K}_T$ será simétrica sempre que $\mathbf{C}_T$ for simétrica.

4.4 Modelos Constitutivos

Com a intenção de investigar o efeito das relações tensão-deslocamento relativos sobre a convergência da análise e precisão dos resultados, dois modelos constitutivos diferentes serão utilizados para representar o comportamento de trincas coesivas. A Figura 27 ilustra as características gerais dos modelos considerados.

Figura 27 – Curvas das leis constitutivas.



Fonte: Balzani (2008)⁹⁹.

O modelo constitutivo bi-linear utiliza duas curvas lineares para representar o carregamento, enquanto o modelo exponencial utiliza somente uma curva exponencial. Ambos os modelos incluem a evolução do dano e comportamento de carregamento/descarregamento de/para a origem como mostrado na Figura 27.

4.4.1 Modelo Bi-Linear para delaminação no Modo I

Um modelo bi-linear para a delaminação em modo misto foi apresentado por Turon³¹. Aqui, este modelo foi simplificado para capturar o Modo I somente. Para este modelo, utilizou-se o potencial apresentado por Turon³¹:

$$\Psi(\delta, d) = (1 - d) \frac{1}{2} K \delta^2 + \frac{1}{2} d K \langle -\delta \rangle^2 \quad (116)$$

onde δ é o deslocamento relativo no modo I, K é a rigidez não danificada, d é o parâmetro de dano e $\langle \bullet \rangle$ são as funções de Macaulay, definidas por:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases} \quad (117)$$

As equações constitutivas para a interface são obtidas a partir da diferenciação da

energia livre em relação ao deslocamento relativo, logo:

$$t = \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = (1-d)K\delta + dK\langle -\delta \rangle \quad (118)$$

Para este modelo, a lei constitutiva é descrita por:

$$t = \begin{cases} K\delta & \text{se } \delta_{max} \leq \delta_0 \quad \text{or} \quad \delta < 0 \\ K_s\delta & \text{se } \delta_0 < \delta_{max} < \delta_f \\ 0 & \text{se } \delta_{max} \geq \delta_f \end{cases} \quad (119)$$

onde:

$$K_s = (1-d)K \quad (120)$$

onde K_s é a rigidez secante, δ_{max} é o deslocamento máximo obtido ao longo da análise, δ_0 é o deslocamento limite antes do início do dano (ou seja, o limite elástico inicial) e δ_f é o deslocamento final antes da propagação da trinca em um determinado ponto material. É importante notar que a rigidez inicial K deve possuir um valor elevado, pois a mesma atua como um fator de penalidade que previne interpenetrações durante a compressão. Estes parâmetros estão ilustrados na Figura 27, onde:

$$\delta_0 = \frac{\sigma_n}{K}, \quad \delta_f = \frac{2G_{Ic}}{\sigma_n}, \quad (121)$$

G_{Ic} é a taxa de liberação de energia crítica para o modo I (equivalente a área da Figura 27) e σ_n é a resistência à tração (abertura) da interface.

A variável de dano pode ser facilmente encontrada através da semelhança de triângulos no trecho de amolecimento na Figura 27, onde:

$$\frac{(1-d)K\delta}{\sigma_n} = \frac{\delta_f - \delta}{\delta_f - \delta_0} \quad (122)$$

$$d = \left(\frac{\delta_{max} - \delta_0}{\delta_f - \delta_0} \right) \frac{\delta_f}{\delta_{max}} \quad (123)$$

Logo, o modelo deve assegurar que a dissipação de energia durante a evolução do dano seja sempre positiva.

A matriz tangente constitutiva é obtida através da diferenciação das tensões (t) em relação ao deslocamento relativo δ , logo;

$$C_T = \frac{\partial t}{\partial \delta} = (1-d)K - K\delta \frac{\partial d}{\partial \delta} + \frac{\partial d}{\partial \delta} K\langle -\delta \rangle + dKH(-\delta) \quad (124)$$

onde $H(x)$ é a função *Heaviside Unit Step*.

$$H(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (125)$$

Como o modelo trata apenas do modo I de abertura, o elemento de interface não possui rigidez nas direções II e III. Logo, todos os termos da matriz $\mathbf{C}_T$ são iguais a zero, exceto para o modo I. Este é descrito abaixo:

$$C_T = \frac{\partial t}{\partial \delta} = \begin{cases} K & \text{se } \delta \leq 0 \\ K_s & \text{se } \delta < \delta_{max} \\ \frac{-\sigma_n}{\delta_f - \delta_0} & \text{se } \delta_0 < \delta < \delta_f \\ 0 & \text{se } \delta \geq \delta_f \end{cases} \quad (126)$$

Na intenção de confirmar que o processo de fissuração é termodinamicamente admissível, deve-se verificar se este satisfaz a desigualdade de Clausius-Duhem, como discutido no Anexo A. Para isso é necessário verificar as condições da Equação (171) para que a mesma seja termodinamicamente admissível:

$$-A d\alpha \geq 0 \quad (127)$$

onde α é a variável interna do sistema e A é dado por:

$$A = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\frac{1}{2}K\delta^2 + \frac{1}{2}K\langle -\delta \rangle^2 \quad (128)$$

Quando $\delta \leq 0$ tem-se $A = 0$ e a condição é satisfeita. Por outro lado, quando $0 \leq \delta \leq \delta_{max}$, d permanece constante e $d\alpha = 0$, assim, a condição é satisfeita. Finalmente, quando $\delta \geq \delta_{max}$:

$$d\alpha = \frac{\partial d}{\partial \delta_{max}} = \frac{\delta_0}{\delta_f - \delta_0} \frac{\delta_f}{\delta_{max}^2} \geq 0 \quad (129)$$

Assim, verifica-se a lei constitutiva como termodinamicamente admissível.

A Figura 28 mostra o algoritmo utilizado na implementação do modelo Bilinear. O índice $n+1$ caracteriza o passo vigente enquanto o índice n caracteriza o passo anterior. Inicialmente, faz-se necessário uma breve explicação sobre a utilidade da variável $Status_{Iter}^{n+1}$ e $Status^{n+1}$. A variável $Status_{Iter}^{n+1}$ é responsável pela escolha da matriz tangente correta para cada iteração dependendo do deslocamento relativo da iteração.

Se a variável $Status_{Iter}^{n+1} = COMPRESSION$, a matriz tangente será igual ao valor da penalidade K . Caso a variável $Status_{Iter}^{n+1} = ELASTIC$, a matriz tangente será igual a matriz secante. De outra forma, se $Status_{Iter}^{n+1} = DAMAGE$, então a matriz secante será igual ao valor de $\mathbf{C}_t$ que está entre $\delta_0 \leq \delta \leq \delta_f$ na Equação 126. Finalmente, se $Status_{Iter}^{n+1} = FAILURE$, a matriz tangente é igual à zero.

A variável $Status^{n+1}$ será igual à variável $Status_{Iter}^{n+1}$ da última iteração onde houve convergência do passo. Assim, estas variáveis são responsáveis por controlar os parâmetros da análise de acordo com a evolução do dano ou não.

Como mostrado na Figura 28, no início de cada iterações, iguala-se a variável de dano da iteração (d_{Iter}^{n+1}), o deslocamento relativo máximo da iteração ($\delta_{maxIter}^{n+1}$) e o $Status^{n+1}$ da iteração ($Status_{Iter}^{n+1}$) a estes último valores convergidos do passo anterior.

Figura 28 – Algoritmo do Modelo Constitutivo Bilinear.

```

 $d_{Iter}^{n+1} = d^n;$ 
 $\delta_{maxIter}^{n+1} = \delta_{max}^n;$ 
 $Status_{Iter}^{n+1} = Status^n;$ 
se  $\delta_{Iter}^{n+1} < 0$  então
     $Status_{Iter}^{n+1} = COMPRESSION;$ 
     $K_s = K;$ 
senão
    se  $\delta_{Iter}^{n+1} < \delta_{maxIter}^{n+1}$  então
         $Status_{Iter}^{n+1} = ELASTIC;$ 
         $K_s = (1 - d_{Iter}^{n+1}) \cdot K;$ 
    senão
        se  $\delta_{Iter}^{n+1} < \delta_f$  então
             $Status_{Iter}^{n+1} = DAMAGE;$ 
             $\delta_{maxIter}^{n+1} = \delta_{Iter}^{n+1};$ 
             $d_{Iter}^{n+1} = \left( \frac{\delta_{Iter}^{n+1} - \delta_0}{\delta_f - \delta_0} \right) \frac{\delta_f}{\delta_{Iter}^{n+1}};$ 
             $K_s = (1.0 - d_{Iter}^{n+1}) \cdot K;$ 
        senão
             $Status_{Iter}^{n+1} = FAILURE;$ 
             $\delta_{maxIter}^{n+1} = \delta_{Iter}^{n+1};$ 
             $d_{Iter}^{n+1} = 1.0;$ 
             $K_s = 0.0;$ 
        fim
    fim
fim
 $t = K_s \delta_{maxIter}^{n+1};$ 
se  $g - f < Tol$  então
     $d^{n+1} = d_{Iter}^{n+1};$ 
     $\delta_{max}^{n+1} = \delta_{maxIter}^{n+1};$ 
     $Status^{n+1} = Status_{Iter}^{n+1};$ 
senão
    Retorna ao início;
fim

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, o algoritmo checa se o deslocamento relativo da iteração (δ^{n+1}) foi menor do que zero, ou seja, checa se está havendo compressão. Se sim, a variável $Status_{Iter}^{n+1}$ assumirá o valor *COMPRESSION* e a secante assume o valor da penalidade K , caso contrário, o algoritmo verifica se o deslocamento relativo da iteração é menor do que o deslocamento relativo máximo iterativo.

Caso o deslocamento relativo da iteração seja menor que o deslocamento relativo máximo iterativo, a variável $Status_{Iter}^{n+1}$ será igual à *ELASTIC* e consequentemente, a secante é igual a penalidade multiplicada por $(1 - d_{Iter}^{n+1})$.

Caso contrário, se δ^{n+1} da iteração for maior que o deslocamento relativo máximo da iteração, e menor que o δ_f , então $Status_{Iter}^{n+1}$ assume o valor *DAMAGE*, o deslocamento relativo máximo da iteração assume o próprio valor do deslocamento relativo da iteração e uma nova variável de dano iterativa é calculada. Consequentemente uma nova secante é calculada.

Em último caso, quando o deslocamento relativo da iteração é maior que δ_f , a variável $Status_{Iter}^{n+1}$ assume o valor *FAILURE*, o deslocamento relativo máximo iterativo assume o valor do próprio deslocamento relativo da iteração, a variável de dano iterativo assume o valor máximo 1 e a secante assume o valor zero.

Em seguida, o algoritmo calcula as tensões multiplicando a secante calculada pelo deslocamento relativo iterativo obtido e posteriormente verifica se houve convergência da iteração. Se houver convergência, as variáveis de dano (d^{n+1}), de deslocamento relativo máximo (δ_{max}^{n+1}) e $Status^{n+1}$ do passo, são igualadas as suas respectivas variáveis iterativas. Caso contrário, o algoritmo volta ao início.

4.4.2 Lei Exponencial

A lei coesiva proposta é inspirada nos trabalhos de de-Andreas¹⁰⁰, Ortiz⁹⁶ e Balzani⁹⁹. Estes trabalhos introduzem um potencial de Smith-Ferrante¹⁰¹, que lida com uma relação tensão-deslocamento relativo. Com a intenção de simular o modo misto de propagação de trinca, este modelo define um deslocamento uniaxial efetivo (δ) como:

$$\delta = \sqrt{\langle \delta_3 \rangle^2 + \phi^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \quad (130)$$

onde $\langle \delta_3 \rangle$ são os colchetes de Macaulay aplicados ao deslocamento relativo na direção de abertura, δ_1 e δ_2 são os componentes do deslocamento relativo nas direções 1 e 2 e ϕ é o fator de ponderação para as mesmas direções.

O potencial de Smith-Ferrante¹⁰¹ em termos de deslocamento efetivo é dado por:

$$\Psi = e t_c \delta_c \left(1 - \left(1 + \frac{\delta_{max}}{\delta_c} \right) e^{-\frac{\delta_{max}}{\delta_c}} \right) \quad (131)$$

onde δ_{max} representa o deslocamento máximo efetivo já alcançado durante a análise e δ_c é o deslocamento crítico. Esta função não leva em conta nenhuma restrição de contato. Balzani⁹⁹,

propôs adicionar uma nova equação à este potencial para evitar a interpenetração das superfícies coesivas:

$$\Psi = et_c \delta_c \left(1 - \left(1 + \frac{\delta_{max}}{\delta_c} \right) e^{-\frac{\delta_{max}}{\delta_c}} \right) + \frac{1}{2} K \langle -\delta_3 \rangle^2 \quad (132)$$

Utilizando esta abordagem, as tensões são facilmente obtidas através da diferenciação dos potenciais em relação aos deslocamentos relativos:

$$t_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \delta_i} \quad (133)$$

Logo, utilizando as Equações (132) e (130), quando o dano evolui as tensões podem ser calculadas como:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{t_c}{\delta_c} e^{1-\frac{\delta_{max}}{\delta_c}} \phi^2 \delta_1 \\ t_2 &= \frac{t_c}{\delta_c} e^{1-\frac{\delta_{max}}{\delta_c}} \phi^2 \delta_2 \\ t_3 &= \frac{t_c}{\delta_c} e^{1-\frac{\delta_{max}}{\delta_c}} \langle \delta_3 \rangle - K \langle -\delta_3 \rangle \end{aligned} \quad (134)$$

Da mesma forma que para o modelo Bilinear, deve-se assegurar que a dissipação de energia durante a evolução do dano seja sempre positiva. Quando o dano evolui, calcula-se um novo valor para a matriz secante a partir do novo δ_{max} . Caso o dano não evolua, a matriz secante é calculada usando o maior δ_{max} convergido durante a análise. Isto permite que o modelo carregue e descarregue de acordo com a Figura 27.

De acordo com Balzani⁹⁹, um critério de iteração quadrática assume resistências ao cisalhamento iguais para os modos II e III (τ_s) e define a tensão crítica t_c igual a resistência a tração para o modo I $t_c = \sigma_n$. Com algumas manipulações algébricas, é possível mostrar que t é equivalente a:

$$t = \sqrt{\langle t_3 \rangle^2 + \phi^{-2} (t_1^2 + t_2^2)} \quad (135)$$

logo, ϕ corresponde a razão entre σ_n e τ_s , que pode ser determinada através de resultados experimentais.

A matriz tangente pode ser obtida através diferenciação em relação aos deslocamentos relativos:

$$C_{ij} = \frac{\partial t_i}{\partial \delta_j} \quad (136)$$

Quando o dano evolui ($Status = DAMAGE$), a matriz tangente é simétrica e dada por:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{t_c}{\delta_c} e^{(1-\frac{\delta}{\delta_c})} \phi^2 \left(1 - \frac{\delta_1^2}{\delta_{max} \delta_c}\right) \\
 C_{22} &= \frac{t_c}{\delta_c} e^{(1-\frac{\delta}{\delta_c})} \phi^2 \left(1 - \frac{\delta_2^2}{\delta_{max} \delta_c}\right) \\
 C_{33} &= \frac{t_c}{\delta_c} e^{(1-\frac{\delta}{\delta_c})} \left(1 - \frac{\langle \delta_3 \rangle^2}{\delta_c \delta_{max}}\right) - KH(-\delta_3) \\
 C_{12} &= -\frac{t_c}{\delta_c^2 \delta_{max}} e^{(1-\frac{\delta}{\delta_c})} \phi^4 \delta_1 \delta_2 \\
 C_{13} &= -\frac{t_c}{\delta_c^2 \delta_{max}} e^{(1-\frac{\delta}{\delta_c})} \phi^2 \delta_1 \langle \delta_3 \rangle \\
 C_{23} &= -\frac{t_c}{\delta_c^2 \delta_{max}} e^{(1-\frac{\delta}{\delta_c})} \phi^2 \delta_2 \langle \delta_3 \rangle
 \end{aligned} \tag{137}$$

Quando acontece o descarregamento/carregamento elástico, a matriz tangente constitutiva corresponde simplesmente à matriz secante.

A energia de fratura no modo misto G_c , segue o critério de B-K para materiais compósitos laminados proposto por Kenane e Benzeggagh³⁵. Este é definido em função das taxas de liberação de energias críticas nos modos puros. Esta formulação foi definida para β fixo durante as análises, ou seja, este não é um modo misto variável.

$$G_c = G_{Ic} + (G_{IIc} - G_{Ic}) \beta^\eta \tag{138}$$

onde:

$$\beta = \frac{G_{shear}}{G_T} = \left(\frac{\delta_{shear}}{\delta_T} \right)^2 \tag{139}$$

where $\delta_T = \sqrt{\langle \delta_3 \rangle^2 + \delta_{shear}^2}$ e $\delta_{shear} = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$. De acordo com Balzani⁹⁹, o deslocamento crítico δ_c e a rigidez K são definidas como:

$$\begin{aligned}
 \delta_c &= \frac{G_c}{e t_c} \\
 K &= \frac{(e t_c)^2}{G_c}
 \end{aligned} \tag{140}$$

Novamente com a intenção de verificar a admissibilidade termodinâmica do processo de fissuração utilizando a lei constitutiva proposta por Balzani, buscou-se checar a desigualdade de Clausius-Duhem. Como o problema não é definido com uma variável de dano explícita (definida em função somente do δ_{max}), deve-se verificar se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \delta_{max}} \geq 0 \tag{141}$$

logo, derivando a Equação (131):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \delta_{max}} = e t_c \frac{\delta_{max}}{\delta_c} e^{-\frac{\delta_{max}}{\delta_c}} \geq 0 \quad (142)$$

Portanto, verifica-se que o modelo é termodinamicamente admissível.

O algoritmo da Figura 29 mostra o funcionamento do modelo constitutivo exponencial.

Figura 29 – Algoritmo do Modelo Constitutivo Exponencial.

```

 $\delta_{maxIter}^{n+1} = \delta_{max}^n;$ 
 $Status_{Iter}^{n+1} = Status^n;$ 
se  $\delta_I^{n+1} ter < \delta_{maxIter}^{n+1}$  então
    |  $Status_{Iter}^{n+1} = ELASTIC;$ 
senão
    |  $Status_{Iter}^{n+1} = DAMAGE;$ 
    |  $\delta_{maxIter}^{n+1} = \delta_{Iter}^{n+1};$ 
fim

 $Ks = \frac{\sigma_n}{\delta_c} e^{\left(1 - \frac{\delta_{maxIter}^{n+1}}{\delta_c}\right)};$ 
 $Ks_1 = Ks \cdot \phi^2;$ 
 $Ks_2 = Ks \cdot \phi^2;$ 
 $Ks_3 = Ks;$ 
se  $\delta < 0$  então
    |  $Ks_3 = K;$ 
senão
    | Sai do Condicional
fim

 $t_1 = Ks_1 \delta_{Iter1}^{i+1};$ 
 $t_2 = Ks_2 \delta_{Iter2}^{i+1};$ 
 $t_3 = Ks_3 \delta_{Iter3}^{i+1};$ 
se  $g - f < Tol$  então
    |  $\delta_{max}^{n+1} = \delta_{maxIter}^{n+1};$ 
    |  $Status^{n+1} = Status_{Iter}^{n+1};$ 
senão
    | Retorna ao início;
fim

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma que algoritmo da Figura 28, igualam-se as últimas variáveis da iteração as suas respectivas variáveis convergidas no passo anterior. Entretanto, neste algoritmo utiliza-se apenas duas variáveis de controle: o deslocamento uniaxial efetivo (δ) e *Status*.

Da mesma forma que o algoritmo bilinear, verifica-se se existe evolução do dano. Caso o deslocamento relativo da iteração seja menor do que o máximo deslocamento relativo

iterativo já atingido, entende-se que não houve evolução do dano. Logo a variável $Status_{Iter}^{n+1}$ é atribuída como *ELASTIC*. Caso contrário, $Status_{Iter}^{n+1} = DAMAGE$ e a variável de deslocamento máximo efetivo é atualizada com o deslocamento uniaxial efetivo da iteração vigente (δ_{Iter}^{n+1}).

Em seguida, os termos da matriz secante são calculados. Após este cálculo, é checado se existe compressão, ou seja, se o deslocamento uniaxial efetivo da iteração é menor que zero. Caso isso seja verdade, substitui-se o termo da matriz secante responsável pelo modo de abertura pela penalidade K. Em seguida, calcula-se as tensões em cada direção multiplicando-se os termos da matriz secante calculados por cada deslocamento relativo da iteração, em suas respectivas direções.

Assim, após todas estas operações, verifica-se a convergência da iteração. Caso esta tenha ocorrido, atualiza-se o deslocamento uniaxial efetivo δ^{n+1} e a variável $Status^{n+1}$. Caso contrário, passa-se para uma nova iteração.

4.5 Parâmetros importantes na análise da delaminação

O problema da delaminação, quando simulado numericamente, apresenta certas dificuldades de convergência. Isso devido a simulação do processo de amolecimento (*softening*) envolvido no fenômeno físico. Alguns autores tem buscado a obtenção de parâmetros que facilitem a convergência das análises^{31,45}.

Em um modelo de elementos finitos utilizando a abordagem de zona coesiva, a descrição completa do material é dividida em propriedades de fratura capturadas pelo modelo constitutivo da zona coesiva e as propriedades do material contínuo capturadas pelas regiões contínuas em volta da trinca. Para se obter uma análise bem sucedida utilizando elementos finitos de interface, duas condições devem ser atingidas:

- a) A contribuição dos elementos de interface para a flexibilidade global do modelo deve ser pequena suficiente para evitar a introdução de flexibilidades fictícias no modelo.
- b) O tamanho do elemento deve ser menor que o comprimento da zona coesiva³¹.

Vários trabalhos propõe o um valor ideal para rigidez fictícia do elemento de interface. Daudeville et al.¹⁰² calculou a rigidez em termos da espessura e do módulo de elasticidade, Zou et al.¹⁰³, baseado em sua própria experiência, sugerem que rigidez de interface esteja entre 10^4 e 10^7 vezes o valor da resistência a tração por unidade de comprimento. Camanho et al.³⁴ obtiveram resultados precisos para espécimes de grafite-epóxi utilizando valores de 10^6 N/mm³. Turon³¹ apresenta uma metodologia para se estimar a rigidez utilizando equações que mostram que a elasticidade efetiva de um material compósito não será afetada pela superfície de interface, desde que $E_3 \ll Kh/2$, ou seja:

$$K = \frac{\alpha_{cz} E_3}{h/2} \quad (143)$$

sendo h a espessura total da peça e α_{cz} é um parâmetro de ajuste que deve ser muito maior que 1 ($\alpha_{cz} \gg 1$). Entretanto, valores muito grandes da rigidez de interface K podem levar a oscilações espúrias da tração, por isso a rigidez de interface deve ser grande o suficiente para fornecer uma rigidez elevada para não tornar o modelo excessivamente flexível, mas pequena o suficiente para reduzir problemas numéricos como a oscilação espúria das tensões nos elementos. De acordo com Turon⁸, para valores de α_{cz} maiores que 50, a perda de rigidez devido aos elementos de interface é de menos de 2%, o que é suficientemente preciso para a maioria dos problemas.

É importante lembrar que a trinca só se propaga quando a taxa de liberação de energia é igual a Energia Crítica de Fratura. O comprimento da zona coesiva (l_{cz}) é descrito como o comprimento da ponta da trinca até a distância onde a máxima tensão coesiva é alcançada. Esta conclusão foi tomada após uma sequência de estudos^{57,58,104–106} que resultou no seguinte modelo para o comprimento da zona coesiva em um corpo infinito sob carregamento remoto:

$$l_{cz} = ME \frac{G_c}{(\sigma_n)^2} \quad (144)$$

onde G_c é a taxa de liberação de energia crítica, σ_n é a resistência máxima de abertura no modo I da interface, E é o módulo de elasticidade (sendo no caso de materiais ortotrópicos, E_3) e M é um parâmetro que depende de cada modelo coesivo proposto. A Tabela 2 mostra os parâmetros M para os principais modelos existentes na literatura.

Tabela 1 – Parâmetros M de análise propostos.

	l_{cz}	M
Hui et al ¹⁰⁵ .	$\frac{2}{3\pi} E \frac{G_c}{(\tau^o)^2}$	0.21
Irwin ¹⁰⁴ .	$\frac{1}{\pi} E \frac{G_c}{(\tau^o)^2}$	0.31
Dugdale ⁵⁷ , Barenblatt ⁵⁸	$\frac{\pi}{8} E \frac{G_c}{(\tau^o)^2}$	0.40
Rice ¹⁰⁶ , Falk et al ¹⁰⁷ .	$\frac{9\pi}{32} E \frac{G_c}{(\tau^o)^2}$	0.88
Hillerborg ⁶⁰	$E \frac{G_c}{(\tau^o)^2}$	1.00

Fonte: Turon³¹

Na tentativa de obter resultados precisos utilizando MZC (modelo de zona coesiva), as tensões na zona coesiva devem ser representadas de forma adequada pela discretização de elementos finitos. O número de elementos de interface na zona coesiva é dado por:

$$N_{ecz} = \frac{l_{cz}}{l_e} \quad (145)$$

onde l_e é o tamanho do elemento de interface na direção da propagação da trinca.

Quando a discretização na direção de propagação é pobre, a distribuição de tensões à frente da ponta da trinca não é representada precisamente. Entretanto, a definição do número mínimo de elementos que deve ser usado ainda não é algo bem estabelecido. Turon³¹ comenta os resultados de alguns estudos, estes serão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2 – Número mínimo de elementos de interface propostos para a zona coesiva.

	N_{ecz}
Moes e Belytschko/ Carpinteri et al.	10 elementos
Falk et al.	2 à 5 elementos
Mi et al.	2 elementos
Dávila e Camanho et al.	3 elementos

Fonte: Turon (2006)³¹.

Como já foi comentado anteriormente, uma das dificuldades de se utilizar modelos de zona coesiva é que malhas muito refinadas devem ser utilizadas e isto acarreta análises com alto custo computacional. Para a propagação da delaminação, Alfano e Crisfield⁴⁵ observaram que a variação da resistência máxima de interface não apresentavam grande influência nos resultados, já que o grande responsável pela propagação da trinca é a taxa de liberação de energia crítica, mas que, reduzindo esta resistência melhorava a convergência das soluções. Utilizar uma resistência menor para a interface, aumenta a zona coesiva e consequentemente aumenta o número de elementos de interface na zona coesiva. Logo, a resposta ao *softening* é melhor representada com uma resistência a tração na interface reduzida apesar da distribuição de tensão próxima a ponta da trinca ser alterada. É possível desenvolver uma estratégia para adaptar o comprimento da zona coesiva à um determinado tamanho de elemento. O procedimento consiste na determinação de um valor $\overline{\sigma}_n$ de resistência máxima de interface fictícia requerida para um determinado número de elementos (N_{ecz}) na zona coesiva. A partir da Equação (144) e Equação (145) pode-se determinar o seguinte parâmetro:

$$\overline{\sigma}_n = \sqrt{\frac{ME G_c}{N_{ecz} l_e}} \quad (146)$$

Finalmente, a resistência de interface é escolhida como:

$$T = \min(\sigma_n, \overline{\sigma}_n) \quad (147)$$

Ao reduzir a resistência máxima de interface, aumenta-se o comprimento da zona coesiva. Logo, o modelo consegue capturar melhor o comportamento de *softening* à frente da ponta da trinca. Entretanto, quando se utiliza esta técnica, a distribuição das tensões no material base (*bulk*) onde a trinca se propaga torna-se menos precisa. Obviamente, a energia dissipada é calculada de forma coerente, o que permite a propagação da ponta da trinca.

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional dos modelos de zona coesiva discutidos no capítulo anterior foi desenvolvida no *software* de elementos finitos de “código aberto” (*open source*) FAST (*Finite Element Analysis Tool*). O FAST é desenvolvido na linguagem C++ e utiliza os conceitos de programação orientada a objetos (POO). O foco principal deste programa é fornecer uma estrutura flexível para futuras extensões (futuros trabalhos científicos).

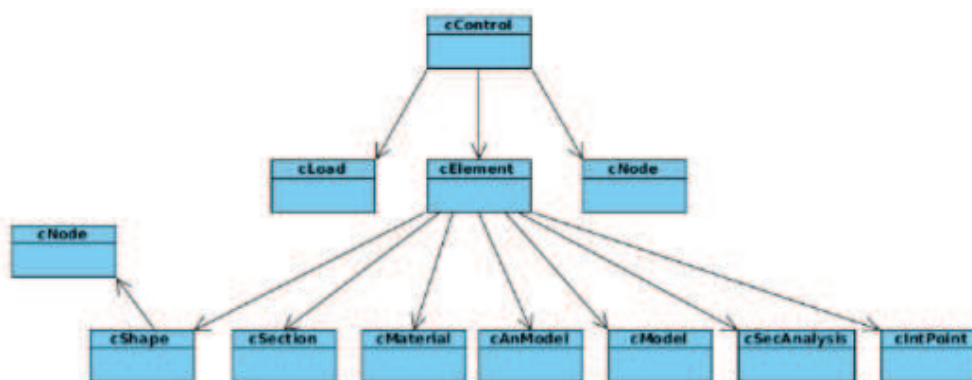
O FAST está em desenvolvimento contínuo no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará.

5.1 FAST e sua arquitetura global

A estrutura do *software* faz uso dos conceitos de polimorfismo na tentativa de evitar operações desnecessárias e repetições nos códigos, melhorando assim a eficiência computacional e facilitando a vida de futuros programadores.

A estrutura global do FAST é mostrada na Figura 30. As linhas conectando as classes mostram uma associação básica entre os objetos das classes. Esta estrutura será discutida nas seções seguintes.

Figura 30 – Estrutura global do FAST.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A classe *cControl* é a classe-base do programa. Os algoritmos globais dos diversos tipos de análise (linear, não linear, estático, dinâmico, ...) estão implementados nesta classe assim como os métodos associados a estes algoritmos, incluindo a numeração dos graus de liberdade, a montagem das matrizes globais (rigidez, massa, ...), dos vetores globais (força interna e externa), a impressão dos dados de saída, etc.

A classe *cElement* é responsável pelas informações necessárias para um elemento específico (nós, seção...) e realizar os cálculos requeridos pela classe *cControl*, incluindo o cálculo das forças internas do elemento, matriz de rigidez e tensões. Uma característica importante da classe *cElement* é sua habilidade de gerenciar diferentes tipos de elementos (treliça, pórtico,

paramétrico, lagrangiano total paramétrico, ...) de acordo com a necessidade do usuário, de uma forma bastante genérica.

A classe *cElmParam* gerencia os diferentes elementos paramétricos. Esta classe tem a capacidade de utilizar diferentes elementos para diferentes tipos de problemas (estado plano de tensão, placas espessas, sólidos...), dimensões (1D, 2D e 3D), diferentes graus de interpolação (linear, quadrático ...), funções de forma (triangulares, quadrilaterais, hexaédricas, ...), quadratura numéricas (Gauss, Lobatto, Newton-Cotes,...) e materiais e modelos constitutivos diferentes (isotrópico, ortotrópico, elástico, viscoelástico,...).

Com o intuito de gerenciar os diferentes aspectos de forma uniforme e genérica, *cElmParam* utiliza diferentes classes: *cAnModel*, *cShape*, *cIntPoint*, *cMaterial*, *cSection*, *cConstModel* e *cSecAnalysis*.

A classe *cAnModel* gerencia os aspectos relacionados as equações diferenciais que caracterizam o problema a ser resolvido (estado plano de tensão, estado plano de deformação, análise de sólido, placa espessa, casca abatida, ...). Ela define o comportamento genérico dos diferentes modelos implementados para que problemas de características físicas diferentes possam ser resolvidos. Ela calcula, dependendo do problema a ser resolvido, matrizes (constitutiva, transformação, deformação-deslocamento lineares e não linear, tensão...) recebendo a informação necessária de outras classes com o propósito de obter a matriz de rigidez dos elementos e vetor de forças internas.

A classes *cShape* é a responsável pelos aspectos de interpolações (funções de forma, derivada das funções de forma, vetor de referências locais, jacobiano para elementos 2D e 3D,..) para cada elemento. Alguns *shapes* de elementos existentes no FAST são: Barra (L2), Viga (L3), Triangular (T3, T6), Plano (Q4, Q8, Q9), Sólido (BRICK8, BRICK20). Outra particularidade da classe *cShape* é que esta classe lida com os nós que formam cada elemento através de uma lista de objetos de tipo *cNode*.

A classe *cIntPoint* é uma classe simples responsável por criar os pontos de integração (Gauss, Lobatto, Newton-Cotes) para cada elemento. Depois da criação destes pontos, um modelo constitutivo é associado a todos os pontos através da classe *cSecAnalysis*.

A classe *cSection* é responsável por armazenar informações relativas à geometria e materiais que compõem a seção transversal do elemento. Ela possui uma conexão com a classe *cMaterial* para organizar as entradas de informações particulares dos elementos. Esta classe lida com as mais diversas propriedades dos elementos como espessura nos elementos de casca e camadas/espessura/direção das fibras no caso de elementos compósitos laminados.

A classe *cSecAnalysis* lida com as informações necessárias para a integração dos elementos. Os objetos desta classe são responsáveis por adicionar um modelo constitutivo a cada ponto de integração de um elemento específico e através disto obter as tensões e matriz tangente para cada ponto de integração.

A classe *cMaterial* é uma classe de armazenamento. Ela armazena as propriedades do material utilizadas num elemento.

A última mas não menos importante classe à ser apresentada é a classe *cConsModel*. Esta classe promove uma interface comum para as diferentes relações constitutivas implementadas no programa (isotrópica elástica, ortotrópica elástica, viscoelástica, Hashin, Tsai-Wu, etc). Os principais métodos desta classe são responsáveis por calcular o vetor de tensões e a matrix tangente de acordo com o modelo desejado.

A arquitetura do FAST é projetada para que todos os objetos do software sejam criados ao longo da leitura do arquivo de entrada. Isto é realizado através de uma busca pelos *labels* principais do programa no arquivo de entrada e após encontrados, estes chamam automaticamente uma função de leitura.

Com a intenção de exemplificar como isto funciona, analisaremos a função *cElement :: ReadBrick20TL*. Quando o *label* “%ELEMENT.BRICK20TL” é encontrado, esta função é chamada e sua definição garante que cada objeto do tipo *cElement* criado esteja associado a uma identificação (*id*), a um tipo de *shape* (BRICK20) e a um modelo de análise (*Solid*). Após criado, este elemento é automaticamente armazenado no vetor de elementos (*VecElm*).

Em seguida a função *cElemParam :: Read* é chamada, pois *cElemParam* é herdeira da classe *cElement*. Nesta função são associadas outras informações ao elemento como a seção (*Section*) e a incidência do elemento (nós).

Em seguida os pontos de integração são criados e um modelo constitutivo é associado a cada ponto através da função *cSecAnalysis::Create* existente na classe *cSecAnalysis*.

No caso dos elementos sólido laminados, os modelos constitutivos são criados diretamente na classe *cSecAnLaminatedSolid* sem a necessidade de passar pela função *cSecAnalysis::Create*. Após a criação de todos os pontos do elemento, todas as operações de parametrização das coordenadas “*t*” são realizadas na própria classe *cElemParam*.

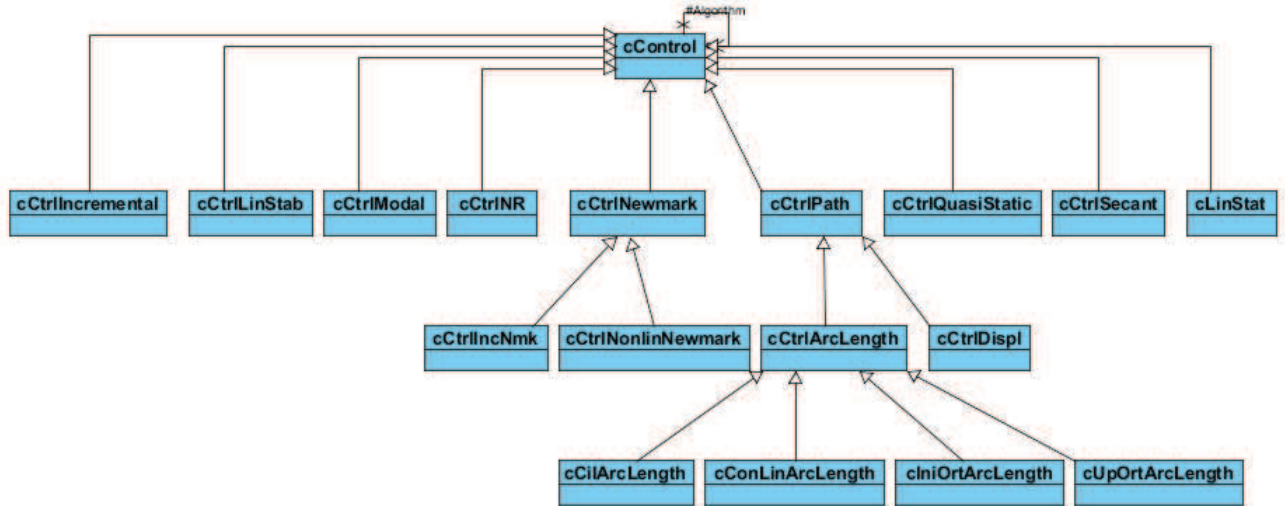
Existe uma diferença básica na implementação dos elementos estruturais de viga e treliça (2D e 3D), casca abatida e elementos contínuos (estado plano e sólido). Os elementos de viga e treliça são implementados como filhos da classe *cElement*. Todas as suas operações de integração (quando requeridas pelo elemento) para obter as forças internas e matrizes de rigidez são realizadas em suas próprias classes sem a necessidade de interação com outras classes.

No caso do elemento de casca e elementos contínuos, ambos foram implementado como filhos da classe *cElementParam*. A diferença básica entre estes dois tipos de elementos está no cálculo das tensões para a obtenção do vetor de forças internas $\mathbf{g}$ e da matriz não linear geométrica $\mathbf{K}_G$. Os elementos de casca são pré-integrados ao longo de suas lâminas para a obtenção das deformações e tensões em cada ponto de integração, já que cada ponto de integração possui correlação com pontos de integração criados e distribuídos na direção da espessura. Esta operação acontece na classe *cSecAnalysis*. Já nos elementos contínuos, a tensão em cada ponto é obtida diretamente a partir do modelo constitutivo sem a necessidade de nenhuma pré-operação. A medida que as tensões em cada ponto são obtidas, os elementos vão sendo integrados na classe *cElemParam*.

Após a leitura e criação dos elementos, a função virtual *Solver* é chamada. Para cada

método de solução existe uma classe responsável por realizar as diferentes operações requeridas. A Figura 31 mostra os diferentes métodos de solução implementados no FAST.

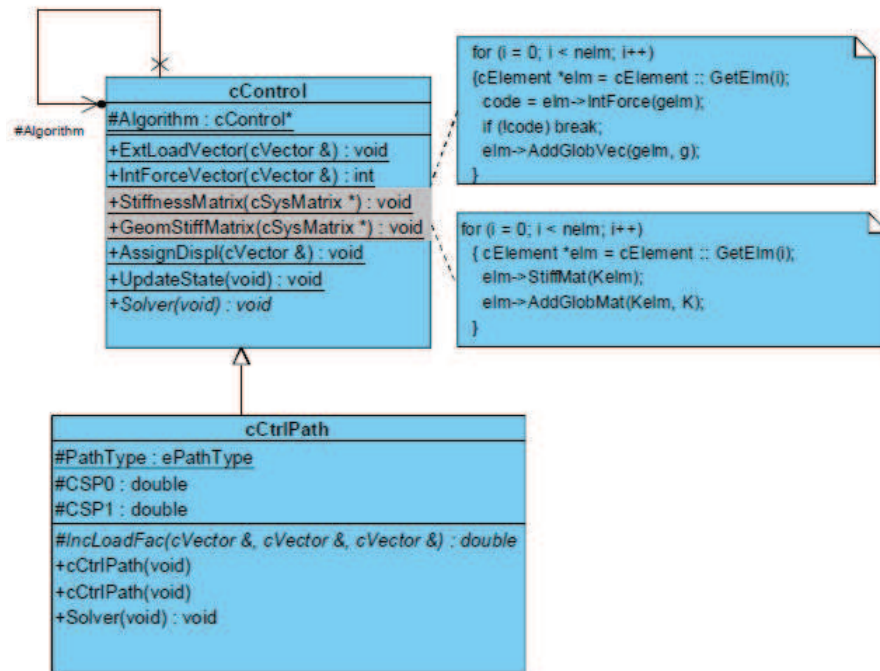
Figura 31 – Estrutura dos algoritmos de solução implementados no FAST.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 32 mostra alguns métodos da classe *cControl*.

Figura 32 – Diagrama de classe mostrando as chamadas das funções para montagem da matriz de rigidez e vetor forças interna local e global.



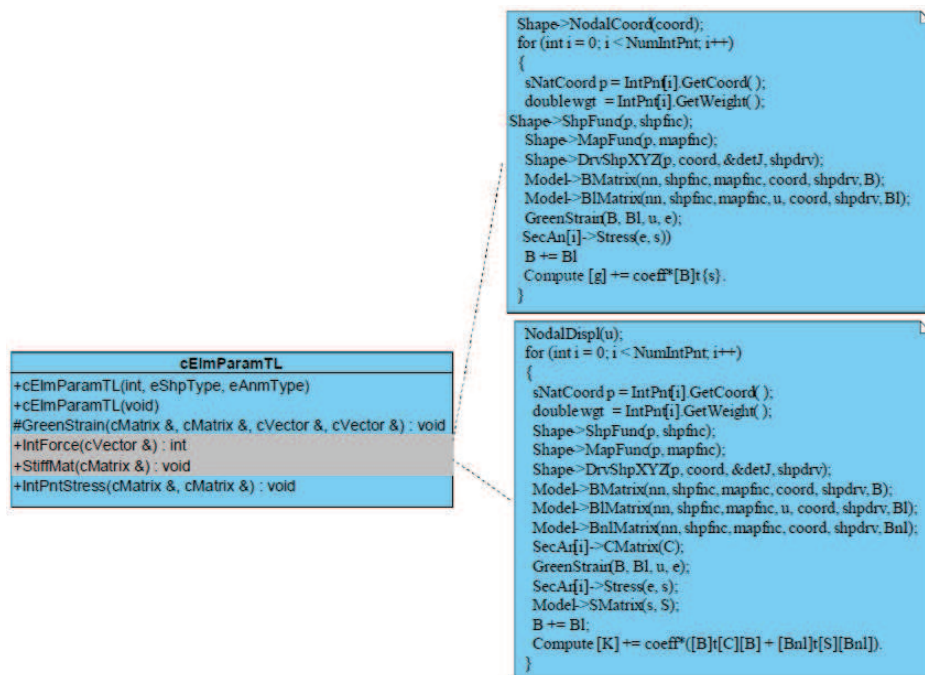
Fonte: Elaborado pelo autor.

A função *Solver*, entre outras ações, é responsável por montar o vetor de forças externas através do método *cControl :: ExtLoadVector* e a matriz de rigidez através do método

Entretanto, outros métodos tiveram que ser implementados ou modificados nas classes existentes. Estas alterações foram realizadas para a implementação do elemento sólido laminado. Como o elemento sólido é um elemento paramétrico, a função *cElmParam :: Read* é chamada para a associação das outras informações relativas ao elemento. As Figuras 34 mostram o funcionamento da função *Read*. Nesta função é implementada a rotina responsável pela criação e modificação dos pontos de Gauss de acordo com a quantidade de lâminas especificadas. Nesta função, objetos da classe *cSecAnalysisLaminatedSolid* são criados com a intenção de associar um modelo constitutivo a cada ponto de Gauss criado.

As Figuras 35 mostram o funcionamento das funções de criação da matriz de rigidez e força interna dos elementos sólido não linear Lagrangiano total.

Figura 35 – Operação dos pontos de Gauss para formar a matriz de rigidez e vetor de forças internas do elemento.



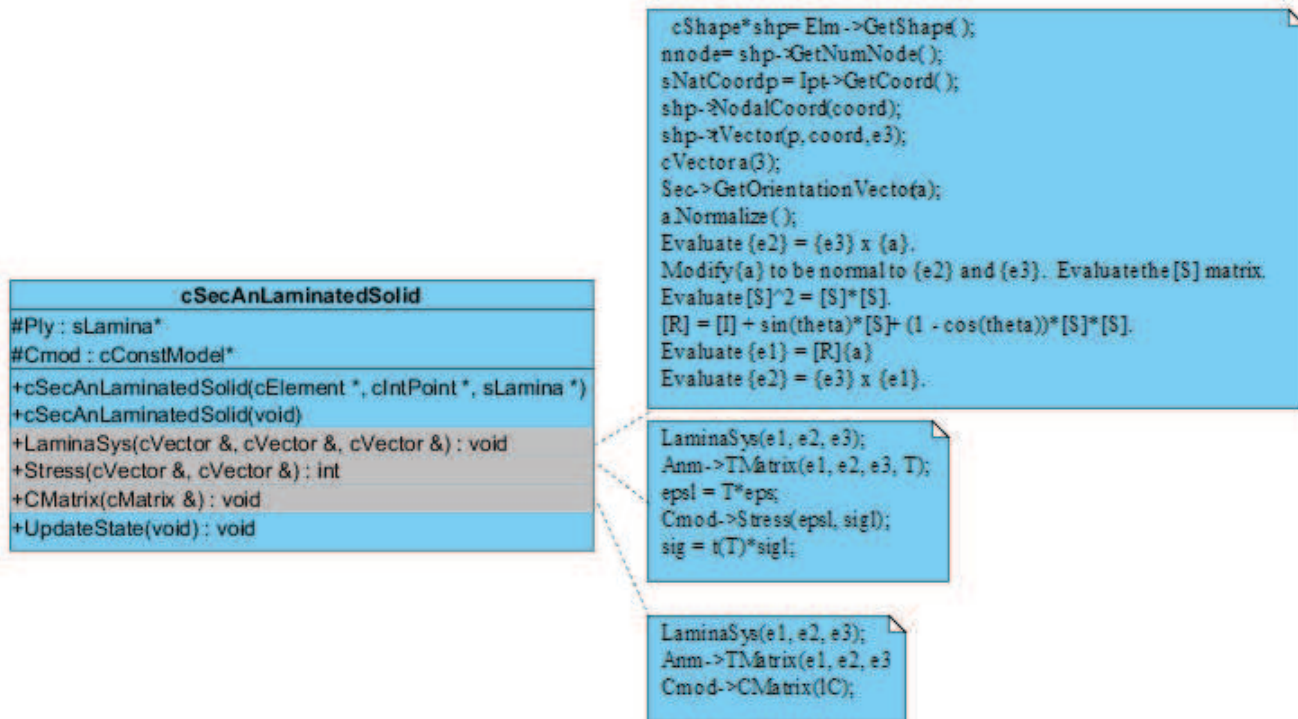
Fonte: Elaborado pelo autor.

A classe *cSecAnalysisLaminatedSolid* foi implementada no software especialmente para este tipo de elemento. Nesta classe estão implementados importantes métodos para o funcionamento do elemento sólido laminado. Entre elas pode-se destacar a *cSecAnLaminatedSolid :: LaminaSys* responsável pela obtenção dos vetores que compõem o sistema de coordenadas local de cada ponto de Gauss. Esta função necessita das funções de forma e do vetor normal $\hat{e}_3$ em cada ponto de Gauss "t". Este é calculado na função *cShapeSolid :: NormalVector* implementada na classe *cShapeSolid*.

Para o cálculo das tensões e da matriz constitutiva, faz-se necessário calcular o tensor de rotação **T**. Este é calculado através da função *cSolid :: TMatrix* implementada na classe *cSolid* dos modelos de análise. A Figura 36 mostra a relação entre os objetos e os métodos

utilizados nestas definições.

Figura 36 – Métodos utilizados na definição do sistema de coordenadas local dos elementos sólidos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

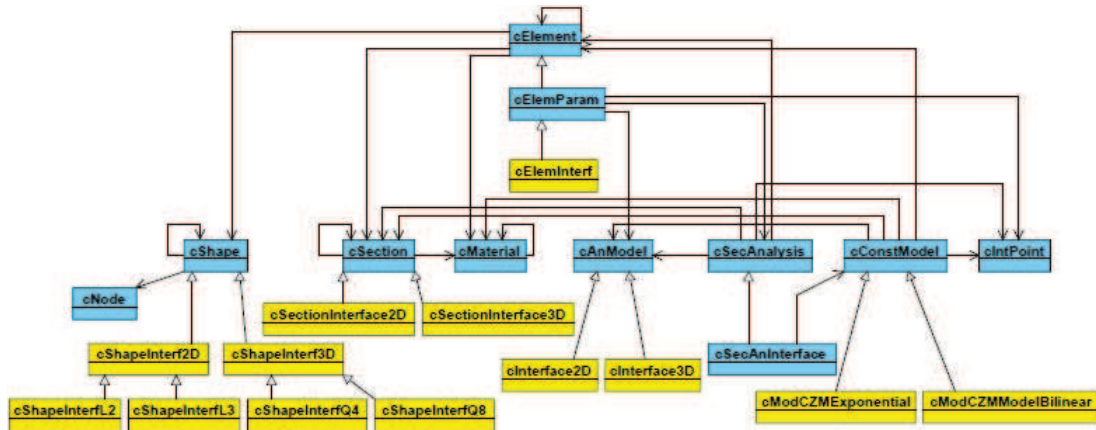
O Anexo B mostra o diagrama de sequência do objeto da classe de controle *cControl*. Este ilustra a interação entre os objetos desta classe para a montagem da matriz de rigidez de um elemento sólido laminado.

5.3 Implementação dos Modelos de Zona Coesiva

A Figura 37 mostra o diagrama de classes destacando em amarelo as classes criadas para a implementação do elemento de interface e Modelo de Zona Coesiva.

Neste contexto, uma nova classe (*cElementInterf*) para a implementação de elementos de interface foi criada. Esta nova classe é derivada de *cElemParam*. A decisão de criar uma nova classe foi tomada com a intenção de evitar cálculos computacionais desnecessários, já que algumas operações utilizadas em elementos paramétricos comuns não são necessárias para este elemento, gerando assim uma melhora de desempenho da ferramenta. A função *cElementInterf::StiffMat* ao invés de obter a derivada das funções de forma, da mesma forma que a classe *cElemParam*, ela obtém apenas as funções de forma a partir das classes *cShapeInterf2D* ou *cShapeInterf3D* para o cálculo dos deslocamentos relativos globais. Em seguida, a matriz de rotação **R** é obtida a partir da função *RMatrix* implementada nas classes *cShapeInterf2D* ou *cShapeInterf3D*. Esta, é necessária para o cálculo dos deslocamentos relativos locais e o cálculo da matriz de rigidez constitutiva local.

Figura 37 – Diagrama de classes destacando em amarelo as classes implementadas.

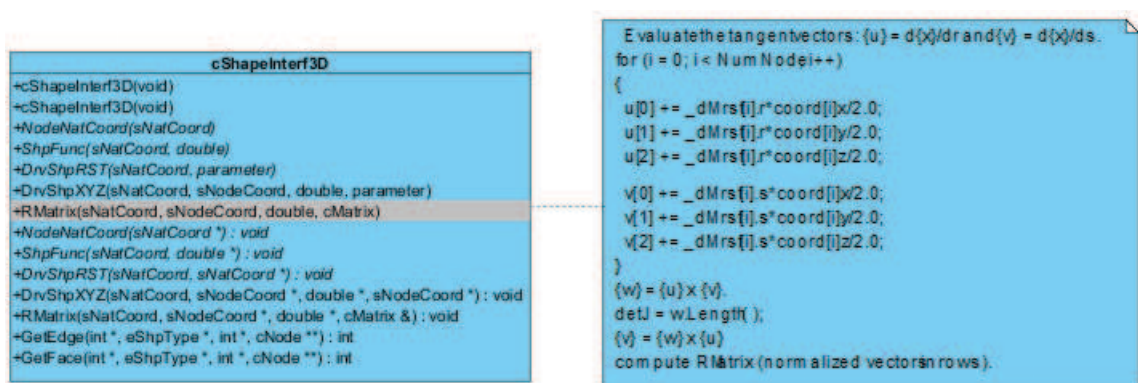


Fonte: Elaborado pelo autor.

A matriz de rigidez constitutiva local é calculada na função *CMatrix* implementada na classe *cSecAnInterfaceMixedMode*, apenas com fins de gerenciamento de informação, mas realmente implementada na classe *cConstModel*. Utilizando o polimorfismo, diferentes funções *CMatrix* podem ser chamadas dependendo do modelo constitutivo que for associado ao elemento.

Nesta classe também está implementado o método *cElemParam :: IntForce* responsável pelo cálculo do vetor de forças internas. Inicialmente, esta função obtém os deslocamentos relativos globais. Em seguida, a matriz de rotação **R** é calculada e os deslocamentos relativos locais são obtidos. A Figura 38 destaca o método responsável pela montagem de **R**.

Figura 38 – Diagrama destacando o funcionamento da função *RMatrix*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A matriz de rotação é necessária para o cálculo das tensões locais a partir da função *cSecAnInterfaceMixedMode :: Stress*. Entretanto, esta possui somente a função de gerenciamento, já que a função que realmente calcula as tensões está implementada na classe *cConstModel* e, conseqüentemente, também utiliza o conceito de polimorfismo para os diferentes modelos constitutivos implementados.

As chamadas dessas funções acontecem de forma semelhante ao mostrado anteriormente na Figura 35. Entretanto, como o elemento de interface implementado é para análise linear, a implementação das funções mudou significativamente. A Figura 39 mostra estas diferenças:

Figura 39 – Diagrama destacando o funcionamento das funções de montagem da matriz de rigidez e vetor de forças internas do elemento de interface.

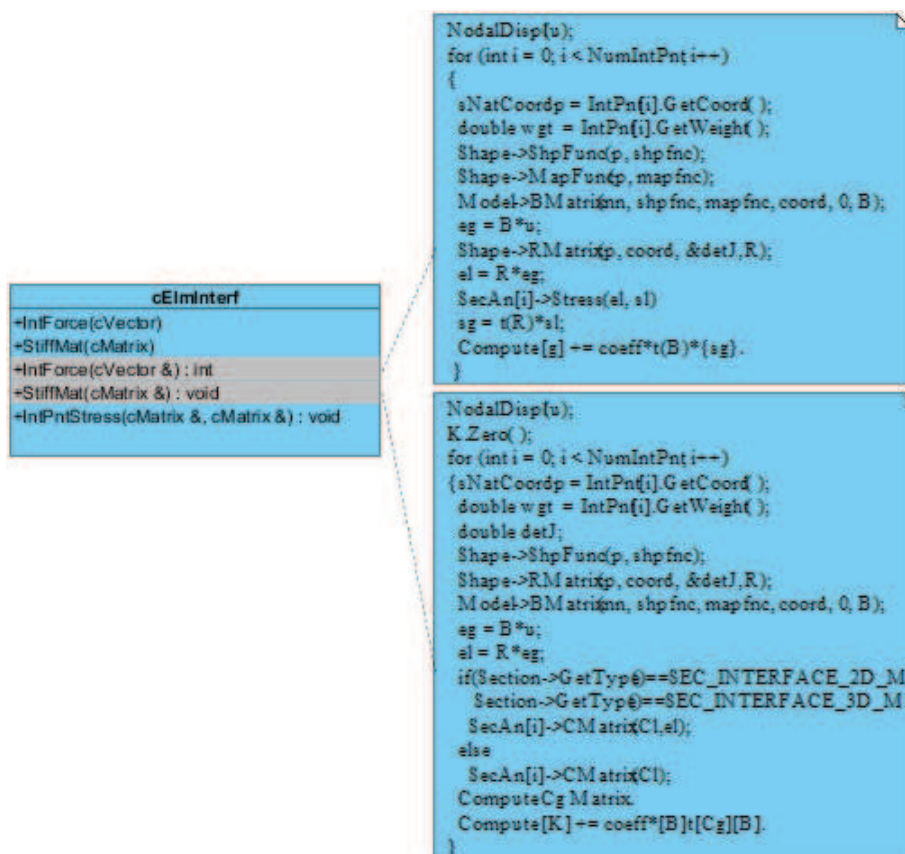


Diagrama destacando o funcionamento das funções de montagem da matriz de rigidez e vetor de forças internas do elemento de interface.

Novos modelos de análise foram criados, herdeiro da classe *cAnModel* para possibilitar a implementação dos elementos de interface. A única operação feita nestas novas classes é a montagem da matriz deformação-deslocamento feita pela função *BMatrix*. Esta depende somente das funções de forma e não de suas derivadas. Devido a isto, uma nova classe foi implementada para elementos de diferentes dimensões (*cInterface2D* e *cInterface3D*).

Na classe *cSection*, novas classes (*cSectionInterface2D* e *3D*) tiveram que ser criadas para lidar com elementos de diferentes dimensões, propriedades e materiais.

Na classe *cShape*, novas classes (*cShapeInterface2D* e *3D*) tiveram que ser criadas para lidar com os elementos de interface. Estas armazenam as propriedades geométricas comum aos elementos de interface 2D e 3D. As classes *cShapeInterfL2* e *L3* (para elementos de interface 2D de 4 e 6 nós) e *cShapeInterfQ4* e *Q8* (para elementos de interface 3D de 8 e 16 nós). Os cálculos da matriz de rotação **R** e do jacobiano são realizados nestas classes, na mesma função

RMatrix.

A classe *cIntPoint* foi modificada para implementar a integração de Newton-Cotes.

Na classe *cConstModel*, para a implementação dos modelos coesivos, as classes *cModCZMexponential* e *cModCZMmodelIbilinear* foram criadas. Elas são responsáveis por gerenciar as variáveis internas (variáveis de dano) de acordo com a evolução do dano e através dela obter a tensão e a matriz tangente. Diferentes modelos de dano podem ser implementados da que os apresentados na Figura 37.

O Anexo C mostra o diagrama de sequência do objeto da classe de controle *cControl* ilustrando a obtenção da matriz de rigidez do elemento de interface a partir da interação com os outros objetos do código.

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

As formulações e implementações desenvolvidas neste trabalho foram verificadas através da comparação com *benchmarks* conhecidos e validadas através da comparação com resultados experimentais disponíveis na literatura.

Uma análise crítica também será realizada com o intuito de analisar as limitações destes modelos. Inicialmente serão apresentadas análises utilizando elementos sólidos laminados e na sequência estes elementos serão utilizando em conjunto com elementos de interface utilizando os modelos de zona coesiva.

Os resultados numéricos e experimentos existentes na literatura serão comparados utilizando as curvas de carga-deslocamento.

6.1 Elemento sólido laminado

Dois exemplos numéricos são apresentados nesta seção no intuito de verificar a implementação do elemento sólido laminado não linear. Estes exemplos visam verificar tanto a eficácia da formulação Lagrangiana Total quanto a eficiência da integração na seção laminada utilizando um único elemento sólido ao longo da espessura das cascas.

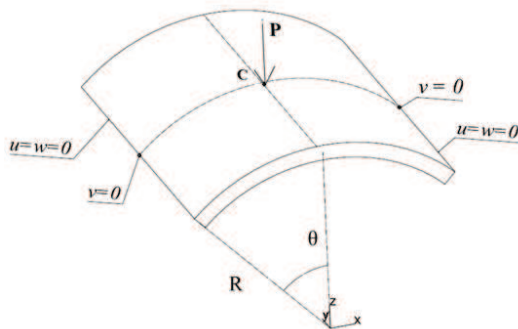
Ambos os exemplos foram modelados no software acadêmico FAST descrito no capítulo anterior utilizando elementos BRICK20. Um PC utilizando a terceira geração de processador core i7 e 8Gb RAM foi utilizado para o processamento das análises.

6.1.1 Casca abatida laminada

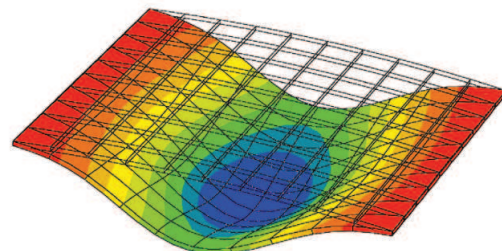
O primeiro exemplo foi extraído dos *benchmarks* de casca apresentados em Sze et al.¹⁰⁸ (Figura 40).

A medida que um sólido começa a ficar mais fino (razão de aspecto 0.1) espera-se um comportamento bem próximo ao de uma casca. Este é apresentado em vários trabalhos,

Figura 40 – Modelo de casca abatida



(a) Modelo geométrico e condições de contorno.



(b) Modelo em elementos finitos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

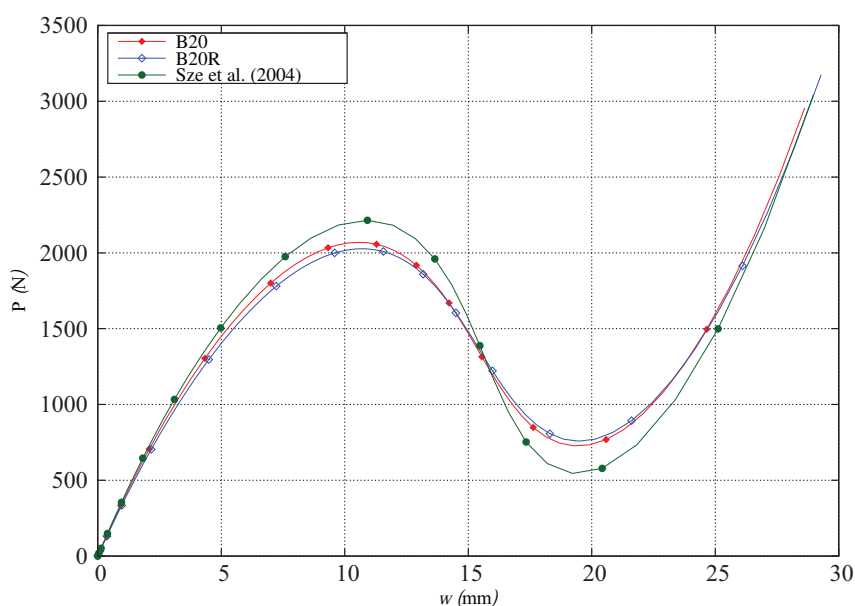
sendo um exemplo clássico em análise não linear de cascas.

As dimensões do modelo geométrico, carregamentos e condições de contorno são apresentados na Figura 40, onde o raio médio é $R = 2540\text{mm}$, o comprimento $L = 508\text{mm}$ e $\theta = 0.1$ rad. Nas bordas laterais os deslocamento em x e z são nulos ($u = w = 0$) e nos nós centrais de cada bordo, todos os deslocamentos são restringidos ($u = v = w = 0$). Isso é feito na tentativa de evitar movimentos de corpo rígido na direção y .

Inicialmente realizou-se a análise considerando o material isotrópico, $E = 3102.75$ MPa e $\nu = 0.3$. Para o caso laminado, $E_1 = 3300$ MPa, $E_2 = 1100$ MPa, $G_{12} = 660$ MPa e $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$. Duas laminações *cross-ply* foram consideradas: $[0/90/0]$ e $[90/0/90]$. A espessura de cada lâmina é igual a 4.233mm para espessura total de 12.7mm e 2.116mm para uma espessura total de 6.35mm . A simetria não foi explorada para o problema e uma malha de 10×10 elementos foi utilizada para os dois casos. O deslocamento w no nó central da casca foi plotado para cada valor de carga aplicada, já que o mesmo é o ponto de aplicação da carga.

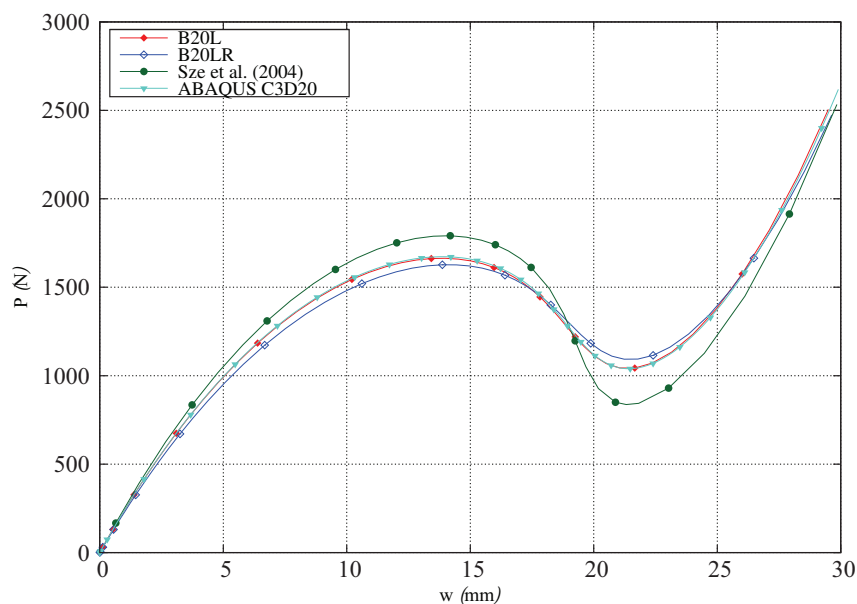
Em todos os casos o método do comprimento de arco foi utilizado para traçar o caminho de equilíbrio não linear. A Figura 41, Figura 42 e Figura 43 mostram os resultados para $h = 12.7\text{mm}$. Estes, comparam os resultados obtidos utilizando integração reduzida, integração completa, resultados obtidos por Sze et al.¹⁰⁸ e os resultados obtidos no software comercial ABAQUS utilizando o elemento sólido laminado padrão de 20 nós (C3D20). Nas legendas, B20 é equivalente a BRICK20 com integração completa e os sufixos “L” e “R” significam laminado e integração reduzida ($2 \times 2 \times 2$), respectivamente. É importante notar que as integrações são realizadas lâmina à lâmina. O carregamento inicial para todas as análises foi de 1N .

Figura 41 – Curva resultante da análise da casca abatida isotrópica ($h = 12.7\text{mm}$).



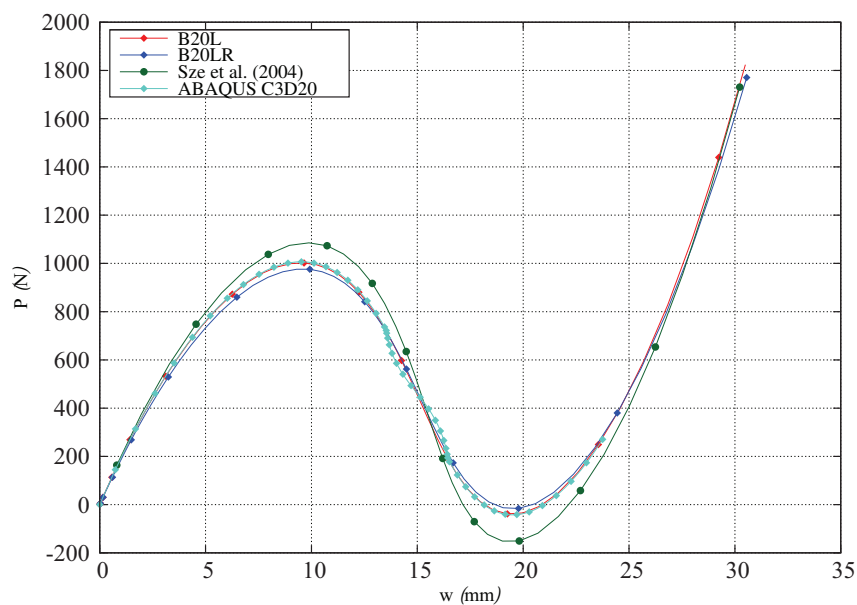
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($h = 12.7\text{mm}$).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ($h = 12.7\text{mm}$).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores das cargas nos pontos limites, os deslocamentos dos pontos limites e os parâmetros utilizados para o comprimento de arco são descritos na Tabela 3. É possível observar que o caminho não linear apresenta os mesmos aspectos para todas as curvas traçadas. Para todos estes casos a integração completa apresenta uma carga crítica maior que a apresentada pela integração reduzida (apesar desses serem bem próximos). De toda forma, em todos os

casos, a carga crítica encontrada pelo elemento sólido é menor que as cargas obtidas utilizando elementos de casca.

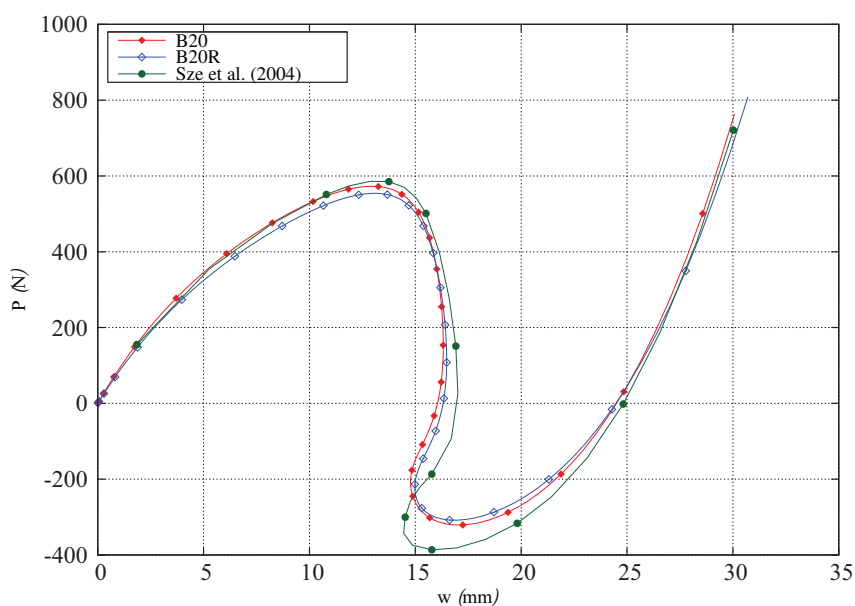
Tabela 3 – Limites de carga e os respectivos deslocamentos para $h = 12.7\text{mm}$.

Espessura (mm)	Modelo	Laminação	Carga Limite (N)	w (mm)	Fator de Passo	Número de Passos
12.7	B20	-	2070.1	10.5	0.1	84
12.7	B20R	-	2026.3	10.8	0.1	84
12.7	Sze et al. (2004)	-	2215.2	10.9	0.1	
12.7	B20L	[90/0/90]	1663	13.4	0.1	70
12.7	B20LR	[90/0/90]	1627.3	13.9	0.1	70
12.7	Sze et al. (2004)	[90/0/90]	1790.8	14.2		
12.7	ABAQUS	[90/0/90]	1672.7	13.9	-	138
12.7	B20L	[0/90/0]	1001.7	9.7	0.1	90
12.7	B20LR	[0/90/0]	975.1	9.3	0.1	90
12.7	Sze et al. (2004)	[0/90/0]	1084.6	9.9		
12.7	ABAQUS	[0/90/0]	1006.6	9.5	-	1001

Fonte: Elaborada pelo autor.

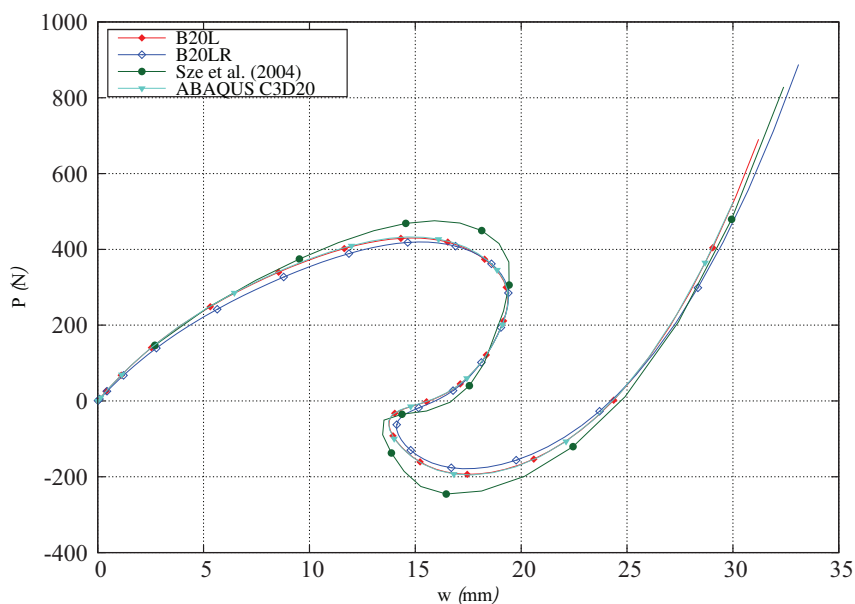
A Figura 44, Figura 45 e Figura 46 mostram os resultados para $h = 6.35\text{mm}$. Estas figuras comparam os resultados da análise com integração completa, reduzida, os resultados obtidos por Sze et al. ¹⁰⁸ e os resultados obtidos no ABAQUS. O carregamento inicial utilizado para a análise é 1N.

Figura 44 – Curva resultante da análise da casca abatida isotrópica ($h = 6.35\text{mm}$).



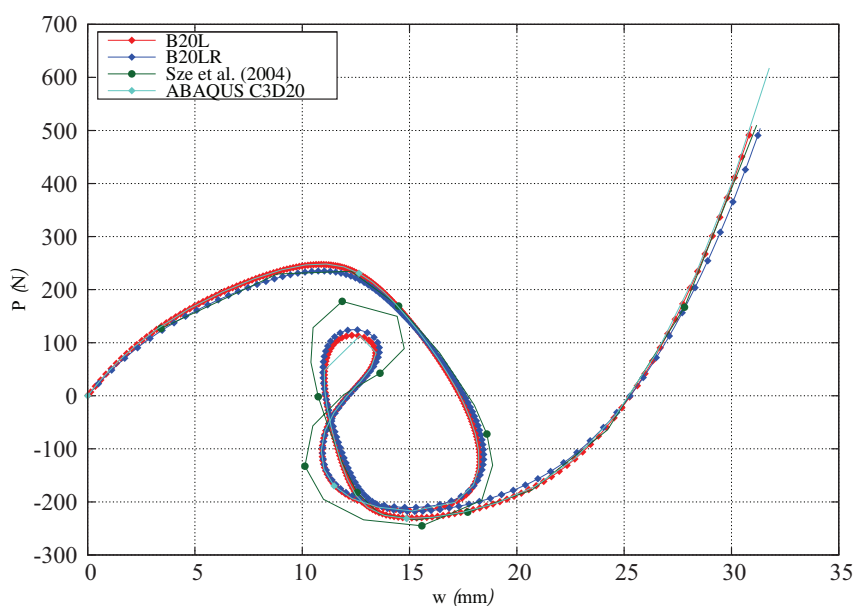
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($h = 6.35\text{mm}$).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Curva resultante da análise da casca abatida com laminação $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ($h = 6.35\text{mm}$).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores das cargas nos pontos limites, o deslocamento dos pontos limites e os parâmetros utilizados para o comprimento de arco estão descritos na Tabela 4.

Como esperado, as cargas no ponto limite utilizando a integração completa são maiores que as calculadas utilizando a integração reduzida. É interessante notar que o resultados obtidos utilizando elementos sólidos para cascas mais finas ($h = 6.35\text{mm}$) são mais próximos aos resultados esperados do que para cascas mais espessas ($h = 12.7\text{mm}$). Na verdade, os

valores de cargas nos pontos limites são inferiores aos obtidos através dos modelos de casca, exceto para o laminado $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Uma das possíveis causas para isto deve-se ao fato dos modelos sólidos considerarem o efeito do cisalhamento enquanto que alguns modelos de casca desprezam o cisalhamento transversal.

Tabela 4 – Limites de carga e os respectivos deslocamentos para $h = 6.35\text{mm}$

Espessura (mm)	Modelo	Laminação	Carga Limite (N)	w (mm)	Fator de Passo	Número de Passos
6.35	B20	-	573.1	12.7	0.1	151
6.35	B20R	-	554.3	13.1	0.1	151
6.35	Sze et al. (2004)	-	586.3	12.9	0.1	
6.35	B20L	$[90/0/90]$	429.6	14.3	0.1	270
6.35	B20LR	$[90/0/90]$	418.2	14.6	0.1	270
6.35	Sze et al. (2004)	$[90/0/90]$	475.5	15.9		
6.35	ABAQUS	$[90/0/90]$	432.6	14.6	-	67
6.35	B20L	$[0/90/0]$	247.5	10.8	0.3	2000
6.35	B20LR	$[0/90/0]$	235.2	10.8	0.3	2000
6.35	Sze et al. (2004)	$[0/90/0]$	234.6	12.3		
6.35	ABAQUS	$[0/90/0]$	248.3	11.1	-	71

Fonte: Elaborada pelo autor.

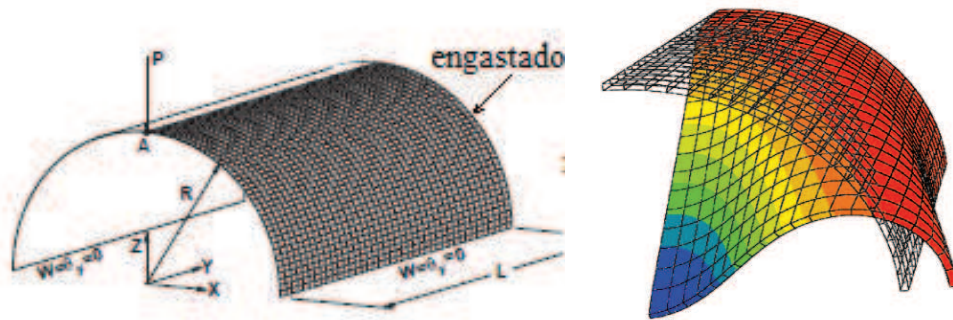
6.1.2 Casca cilíndrica laminada

Com o intuito de verificar a capacidade do elemento sólido laminado de representar os diferentes esquemas de laminação em geometrias com curvatura elevada, realizou-se diferentes análises em uma casca cilíndrica. Estas análises foram realizadas baseando-se no trabalho de Sze et al.¹⁰⁸. As simulações consistem nas análises de um semi-cilindro sujeito a uma carga transversal em um dos seus bordos, de acordo com a Figura 47.

Para estas análises, três laminações foram simuladas: Duas laminações *cross-ply* ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$) e uma *angle-ply* simétrica $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$. Todas as simulações foram comparadas com simulações realizadas no ABAQUS e com os resultados obtidos por Sze et al.¹⁰⁸, exceto o da laminação *angle-ply*, já que este exemplo não foi encontrado na literatura.

Para todos os casos explorou-se a simetria do problema, como mostrado na Figura 47. Uma malha 20×20 elementos foi utilizada. As unidades da espessura total do laminado (0.03), do comprimento do cilindro (3.048) e do raio de curvatura (1.016) não são especificados neste exemplo¹⁰⁸. Da mesma forma, as propriedades do material são dadas por: $E_1 = 2.0685 \times 10^7$, $E_2 = 0.517125 \times 10^7$, $G_{12} = G_{13} = 0.7956 \times 10^7$, $G_{23} = 0.198894 \times 10^7$, e $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$.

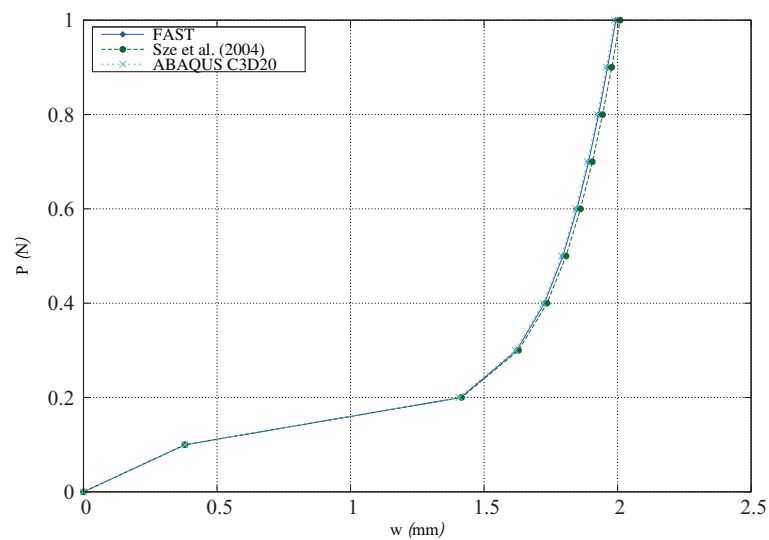
Figura 47 – Modelo simétrico do cilindro.



(a) Modelo geométrico e condições de contorno¹⁰⁸. (b) Modelo em elementos finitos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

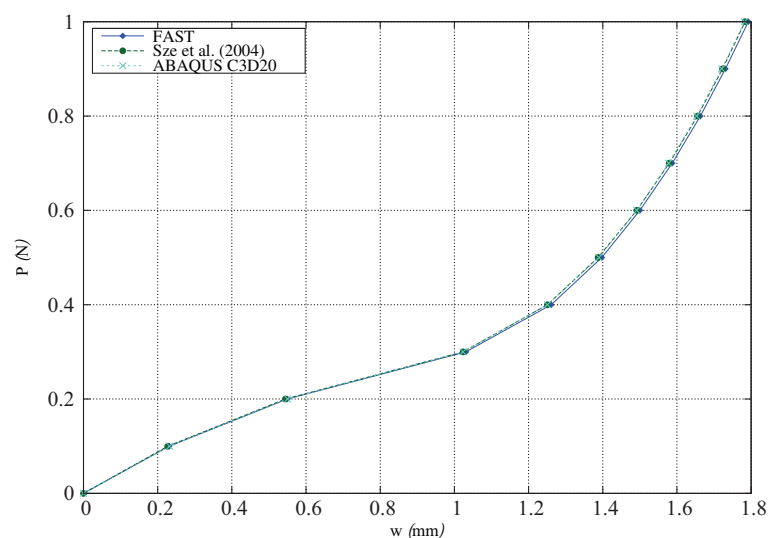
A Figura 48, Figura 49 e Figura 50 apresentam os resultados das análises realizadas.

Figura 48 – Curva resultante da análise do semi-cilindro laminado $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$.



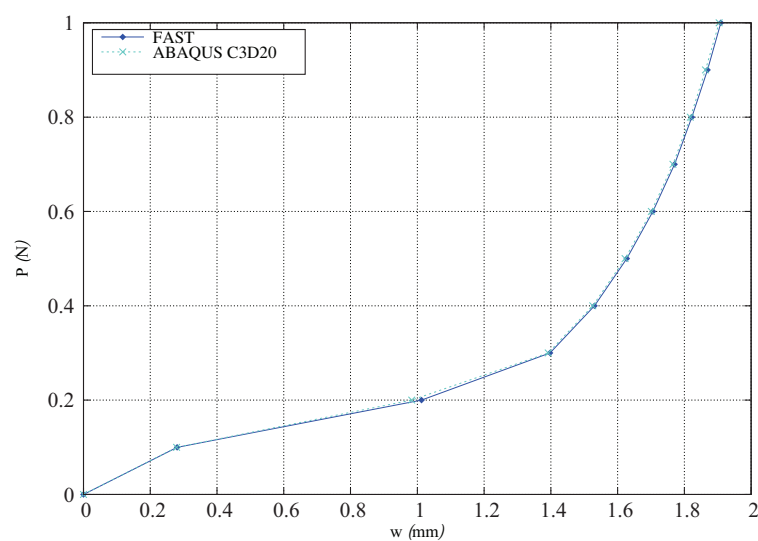
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49 – Curva resultante da análise do semi-cilindro laminado $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 50 – Curva resultante da análise do semi-cilindro laminado $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar que as análises apresentam resultados muito próximos confirmando assim a eficácia do elemento em simular o comportamento não linear geométrico de estruturas laminadas. Também observa-se que o elemento sólido apresentado neste trabalho não apresentou problema de travamento (*shear locking*) mesmo utilizando somente um elemento na espessura.

6.2 Modelos de Zona Coesiva

Neste ítem serão mostradas as análises realizadas utilizando modelos de zona coesiva. Inicialmente realizou-se o teste de um elemento de interface e em seguida foram realizadas simulação da delaminação no modo I puro (DCB), modo II puro (ENF) e modo misto (MMB).

6.2.1 Teste de um Elemento

Inicialmente o teste de um elemento foi realizado para verificar a implementação dos elementos de interface e dos modelos constitutivos coesivos. Modelou-se dois elementos sólidos contínuos BRICK8 conectados por um elemento de interface de 8 nós (Q4). A base de um dos elementos contínuos foi engastada enquanto que o topo do outro elemento foi traçado. A Figura 51 mostra o modelo após a abertura. Utilizou-se os mesmos parâmetros utilizados por Evangelista et al.⁹⁸. Modelou-se uma barra de comprimento $L = 0.1\text{m}$ e uma área de seção transversal quadrada de lado 0.025m . As propriedades do material estão descritas na Tabela 5.

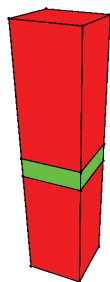
Tabela 5 – Propriedades do material.

E (GPa)	ν	σ_n (MPa)	G_{Ic} (N/m)	K_0 (Pa/m)
27.0	0.0	5.0	99.1	5e13

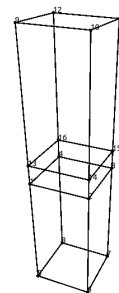
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 51 – Teste de um elemento para elemento de interface Q4

(a) Elemento de interface Q4 após abertura



(b) Modelo simulado (faces e arestas)

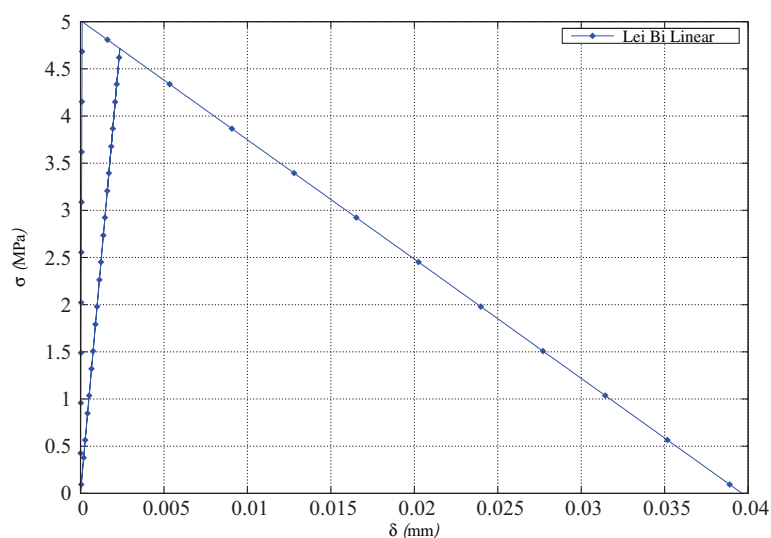


Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras 52 e 53 mostram as curvas carga-deslocamento relativo traçada para o teste de um elemento utilizando tanto o modelo constitutivo bilinear quanto o exponencial. Aplicou-se um carregamento distribuído máximo bastante elevado na face superior da ordem de 26.75KN . Utilizou-se Método de Controle de Carga com carregamento proporcional de forma

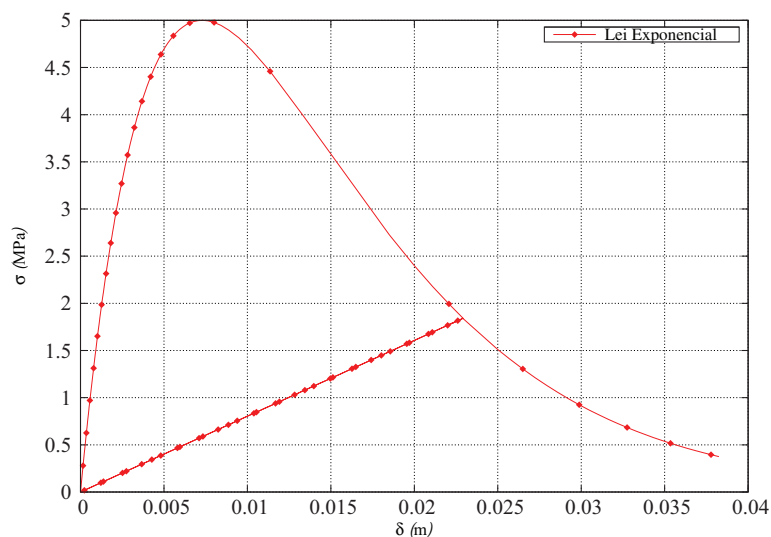
a considerar carregamento, descarregamento e re-carregamento do modelo. Assim, à 0.5 da carga total, retornou-se o valor da carga aplicada à zero e em seguida carregou-se o modelo novamente até o valor do carregamento máximo.

Figura 52 – Curva tensão $\times$ deslocamento relativo (modelo bi-linear).



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 53 – Curva tensão $\times$ deslocamento relativo (modelo exponencial).



Fonte: Elaborado pelo autor

Observou-se que ao ser atingida a resistência máxima de interface, o elemento de interface começou a ser danificado, diminuindo assim o valor de sua rigidez. Quando o conjunto foi descarregado, não houve recuperação da rigidez anterior, assim o descarregamento aconteceu linearmente, com o valor da rigidez danificada do elemento de interface. Em seguida, quando o conjunto foi recarregado, a relação tensão $\times$ deslocamento apresentou comportamento

linear até o novo valor da resistência da interface (recalculado utilizando a rigidez danificada). A partir deste valor, a rigidez do elemento de interface é degradada novamente. Isto acontece sucessivamente até que o valor de sua rigidez seja igual a zero, no caso do modelo bilinear e muito próximo de zero no caso do modelo exponencial.

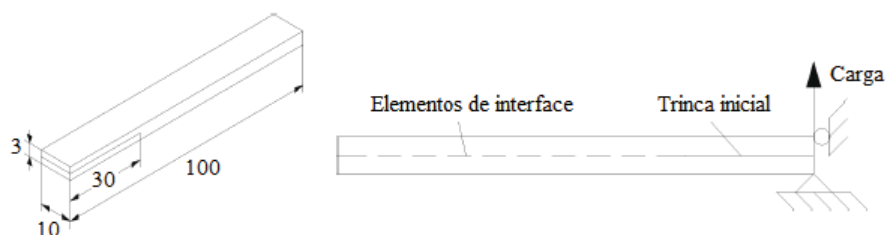
6.2.2 Ensaio DCB - Influência de parâmetros

Um dos testes encontrados na literatura para a obtenção da taxa de liberação de energia no modo I é o DCB (*Double Cantilever Beam*). Consequentemente este é um dos exemplos comparativos mais utilizados para testar a eficácia dos elementos coesivos implementados, assim como para se estudar os efeitos das variações dos parâmetros utilizados para realização da análise de formação e propagação de trincas.

Dois testes DCB foram simulados visando, além da validação dos modelos implementados, o estudo da influência dos parâmetros utilizados para ambas as leis. O primeiro é baseado no trabalho desenvolvido por Gonçalves et al.¹⁰⁹, onde simulou-se a propagação da trinca entre duas vigas isotrópicas coladas. Neste estudo buscou-se avaliar a eficácia da lei bilinear e a influência dos seus parâmetros nas análises. O segundo é baseado no trabalho de Dávila e Camanho¹¹⁰ e visa avaliar qual das duas leis implementadas apresenta maior facilidade de convergência. As propriedades do material utilizadas na análise estão descritas na Tabela 6.

O primeiro modelo possui comprimento $L = 100\text{mm}$, largura de $W = 10\text{mm}$, espessura total $e = 3\text{mm}$ e uma pré-trinca de 30mm . A Figura 54 mostra as dimensões do modelo assim como suas condições de contorno.

Figura 54 – Dimensões e condições de contorno DCB.



Fonte: Gonçalves et al. (1999)¹⁰⁹.

Tabela 6 – Propriedades do Material.

E_{11} (GPa)	ν	G_{Ic} (N/m)	σ_n (MPa)
69	0.3	55	20

Fonte: Gonçalves (1999)¹⁰⁹.

Os parâmetros estudados foram:

- Efeito da discretização.

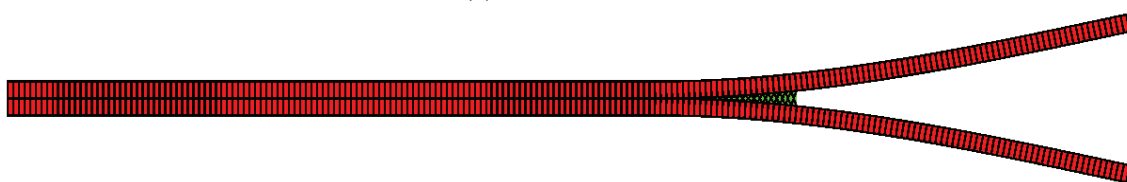
- b) Variação do número de pontos de Newton-Cotes.
- c) Variação da rigidez fictícia K .
- d) Grau de interpolação do elemento.

Malhas 100×2 e 200×2 foram analisadas para os diferentes parâmetros listados acima (Figura 55).

Figura 55 – Malhas em elementos finitos utilizadas.



(a) Malha 100×2 .



(b) Malha 200×2 .

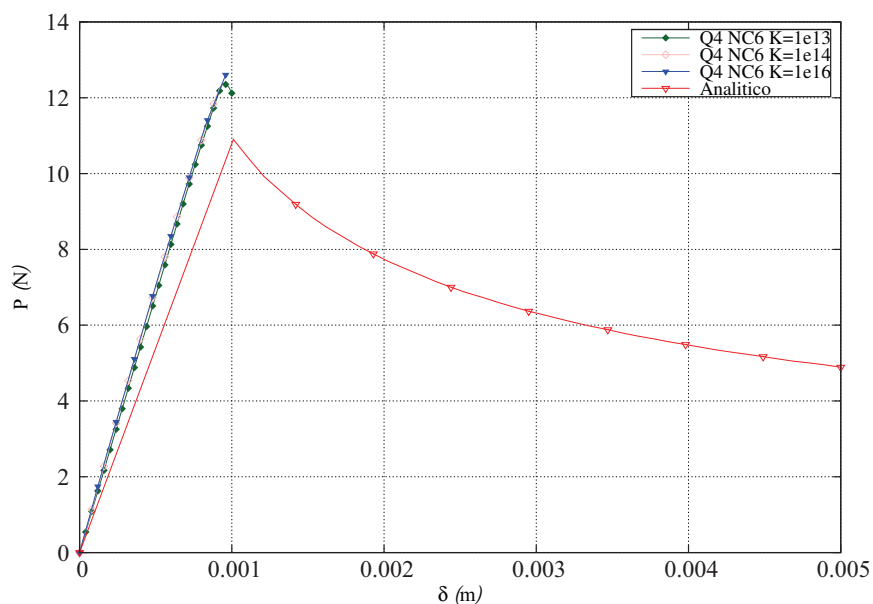
Fonte: Elaborado pelo autor.

Inicialmente, optou-se pela malha 100×2 com elementos de interface Q4, utilizando o controle de deslocamento como algoritmo de solução. Entretanto, não observou-se a convergência nos trechos de amolecimento, o que levou a testes utilizando o comprimento de arco, também sem sucesso. Então, buscou-se variar o número de pontos de Newton-Cotes (de 4 à 12) e novamente não obteve-se sucesso. Repetiu-se todos os procedimentos anteriores utilizando elementos de interface Q8, também sem sucesso.

Assim em uma tentativa de conseguir a convergência nestes trechos a qualquer custo, dobrou-se a taxa de liberação de energia proposta no problema. Observou-se que o modelo convergia tanto para elementos de interface Q4 e Q8. Isto era esperado de acordo com as Equações 144 e 145, já que aumentando G_c obtém-se um comprimento de zona coesiva maior. Entretanto este não era o problema que queríamos solucionar, assim percebeu-se que esta discretização não era suficiente para encontrar-mos a solução.

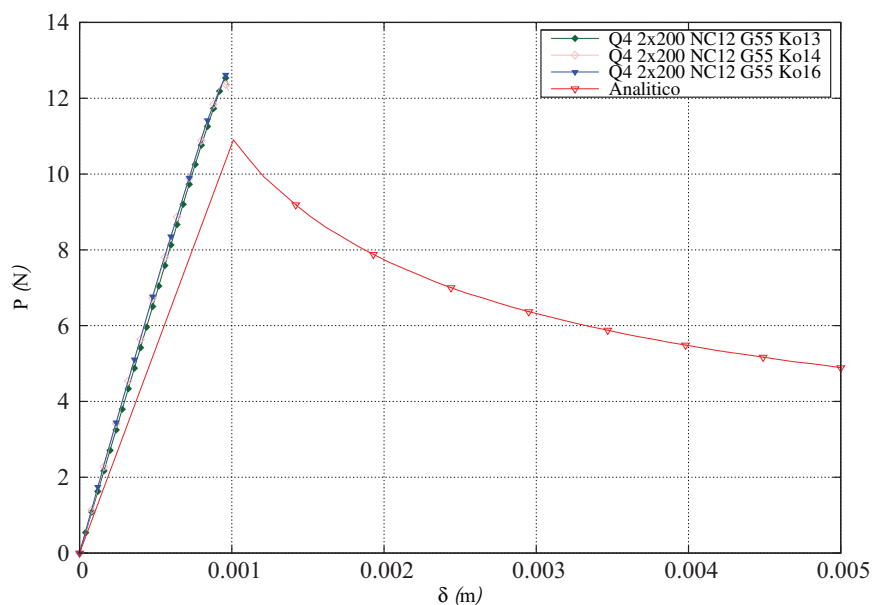
Em seguida, buscou-se utilizar a discretização 200×2 . Utilizou-se os algoritmos de controle de deslocamento e o comprimento de arco. Ambos não apresentarão grandes diferenças nos resultados encontrados. As Figuras 56 e 57 mostram os resultados para esta discretização utilizando elementos de interface Q4 para 6 e 12 pontos de Newton-Cotes. Observou-se que existe uma pequena tendência à convergência para valores de K menores que o valor máximo analisado. Entretanto este não se mostra um fator determinante para o sucesso ou não da convergência da análise.

Figura 56 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q4, malha 200×2 e 6 pontos de Newton-Cotes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

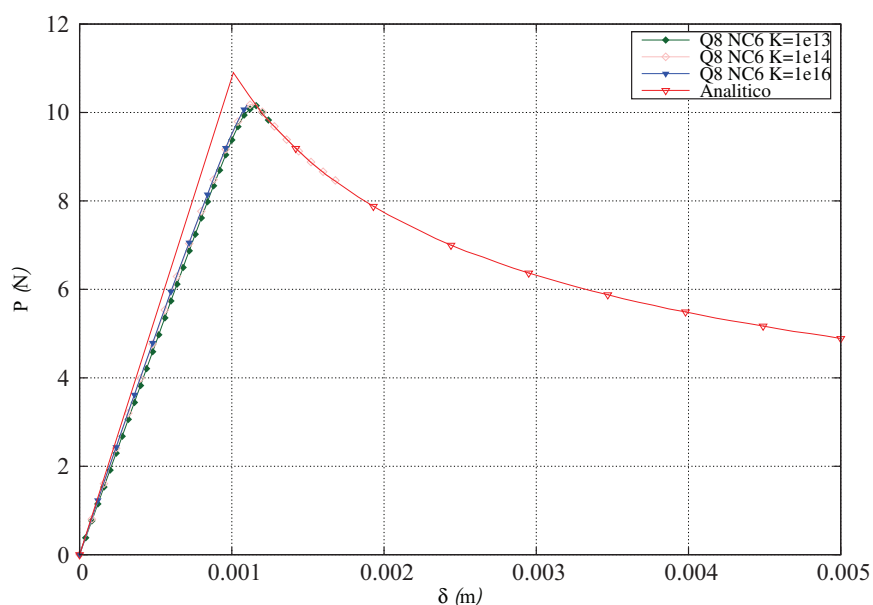
Figura 57 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q4 e malha 200×2 e 12 pontos de Newton-Cotes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

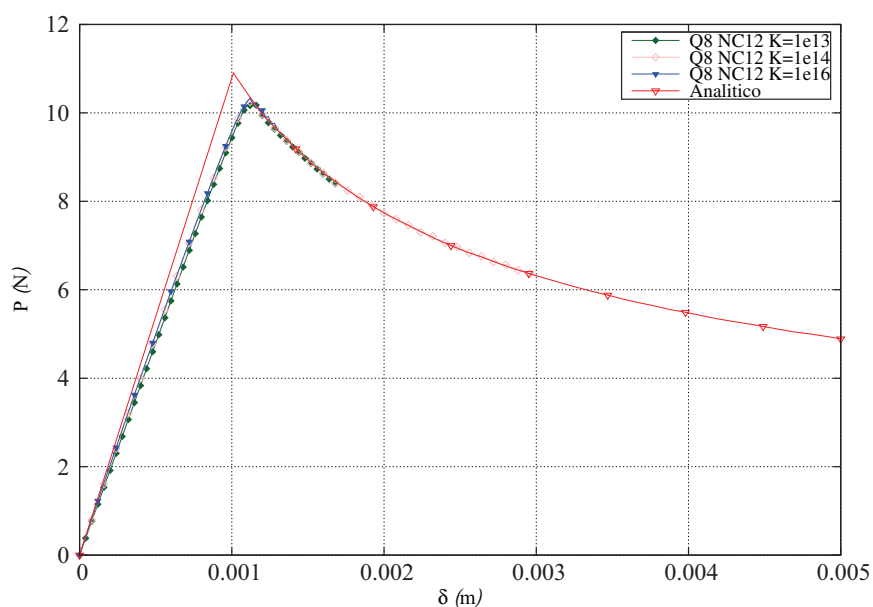
A Figura 58 e Figura 59 mostram os resultados para uma malha 200×2 utilizando elementos de interface Q8 para 6 e 12 pontos de Newton-Cotes. Observou-se que elementos Q8 apresentam um desempenho melhor que Q4. Logo, pode-se observar que a utilização de elementos de maior grau de interpolação nas análises favorecem a convergência.

Figura 58 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q8 e malha 200×2 e 6 pontos de Newton-Cotes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 59 – Curvas do modelo DCB utilizando elementos Q8 e malha 200×2 e 12 pontos de Newton-Cotes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Outro fator importante é a utilização de vários pontos de Newton-Cotes. Estes podem facilitar a convergência ou não, logo deve-se analisar qual o número de pontos de Newton-Cotes ótimo para cada tipo de análise. O mesmo equivale para a rigidez fictícia K , pois a utilização de K bem pequenos não significa necessariamente que o modelo computacional irá

ter mais facilidade de convergência.

6.2.3 Ensaio DCB - Influência das lei constitutivas

Com o intuito de verificar a influência das diferentes leis constitutivas na eficiência da convergência, validar os modelos computacionais e checar a interação entre os modelos sólido laminado e interface, realizou-se uma comparação entre os modelos implementados utilizando como base os resultados experimentais obtidos por Dávila & Camanho¹¹⁰.

O corpo de prova foi modelado como um laminado unidirecional contendo uma pré-trinca de 55mm que parte da extremidade carregada, possui 150mm de comprimento, 2mm de largura e é composta de duas lâminas espessas de 1.98mm. As propriedades do material (Grafite-epoxi) utilizado no experimento encontram-se na Tabela 7.

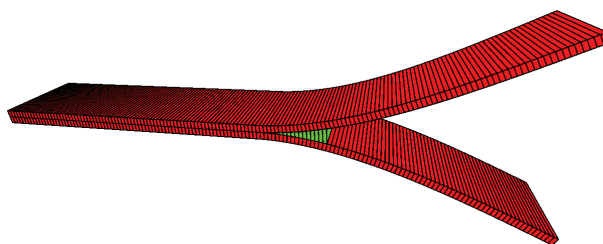
Tabela 7 – Propriedade do Grafite-Epoxi.

E_{11} (GPa)	$E_{22} = E_{33}$ (GPa)	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)
150.0	11.0	6.0	3.7
$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}	G_{Ic} (N/m)	σ_n (MPa)
0.25	0.45	352.0	60.0

Fonte: Turon (2007)¹¹¹.

O modelo foi discretizado com uma malha de 150×2 elementos utilizando elementos sólidos laminados BRICK20 para a modelagem das lâminas e 95 elementos de interface Q8 entre as duas lâminas. Da mesma forma que o teste anterior (e como deve ser um modelo clássico de DCB), as cargas foram aplicadas em uma das pontas do modelo, em sentidos opostos, enquanto que a outra face é engastada ($u = v = w = 0$). A Figura 60 mostra o modelo DCB.

Figura 60 – Modelo DCB discretizado em elementos finitos.



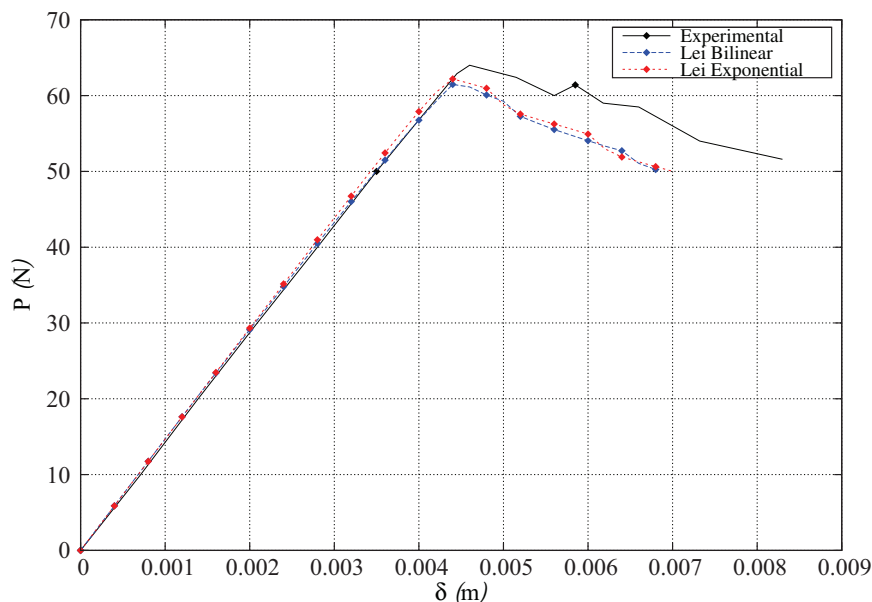
Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado da simulação é mostrado na Figura 61. Para a obtenção da convergência numérica do modelo bilinear foi necessário reduzir a sua resistência a tração σ_0 , de acordo com o indicado por Turon¹¹¹.

O modelo exponencial foi capaz de conduzir a análise sem necessidade de ajustes. Este resultado era esperado, pois a curva exponencial apresenta um suavidade (e continuidade)

maior que a curva bi-linear. Isto acaba se tornando um fator primordial para o sucesso da análise.

Figura 61 – Curvas carga×deslocamento relativo comparativas entre modelos bi-linear e exponencial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2.4 Influência do comprimento da zona coesiva (Teste DCB)

Na intenção de verificar a influência do comprimento da zona coesiva na convergência da solução, várias análises foram realizadas variando o número de elementos na zona coesiva. Os resultados foram comparados com os experimentos apresentados por Balzani⁹⁹.

Como anteriormente foi verificado que o modelo constitutivo exponencial apresenta melhor eficiência de convergência, utilizou-se o mesmo modelo constitutivo para a realização das análises seguintes.

O modelo utilizado para verificar o modo I possui um comprimento de 150mm, largura de 25.4mm e espessura total de 3.05mm. Uma região pré-delaminada é inserida na metade da espessura e possui comprimento de 31.75mm. As propriedades utilizadas na análise encontram-se na Tabela 8.

Tabela 8 – Propriedades do Material.

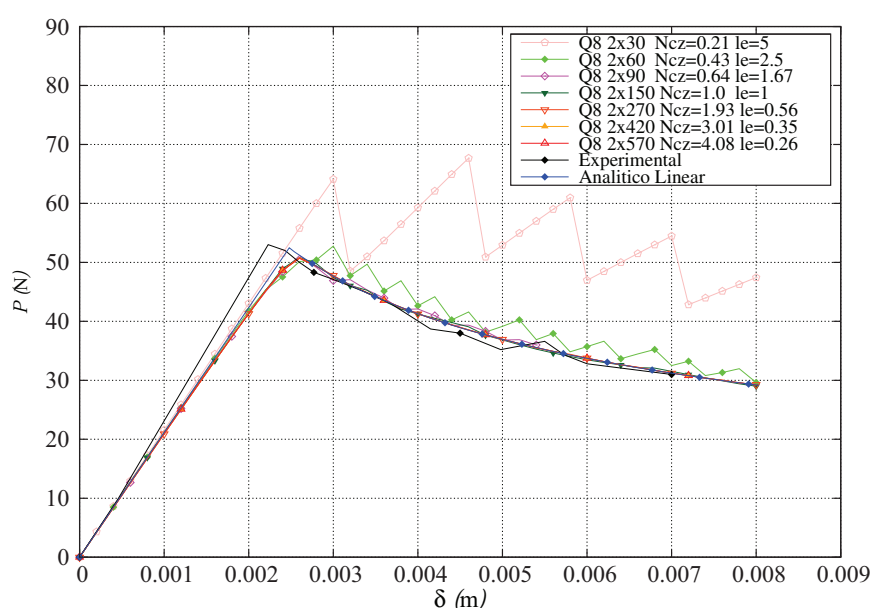
E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}	ν_{23}	G_{Ic} (N/m)	σ_n^0 (MPa)	τ_s^0 (MPa)
138	8.96	7.1	3.446	0.3	0.25	222	51.7	91.7

Fonte: Balzani (2008)⁹⁹.

Inicialmente calculou-se um comprimento de zona coesiva de 0.655mm utilizando os valores apresentados na Tabela 8 e considerando o parâmetro M igual à 0.88, sendo este o

mesmo obtido por Rice¹⁰⁶. Várias análises foram realizadas variando o número de elementos na zona coesiva (e consequentemente o tamanho dos elementos) em uma faixa de 0.2 à 4 elementos. Para este caso a análise mostra que para obter-se resultados coerentes com os resultados experimentais e a resposta analítica faz-se necessário, no mínimo 0.64 elementos na zona coesiva, isto é, menos de um elemento na zona coesiva ($l_e = 1.67$). Entretanto, mesmo para os melhores resultados, a análise se mostrou um pouco menos rígida que os valores obtidos experimentalmente assim como a própria resposta analítica. A Figura 62 mostra estes resultados.

Figura 62 – Curvas carga-deslocamento para um teste DCB variando a discretização da malha.

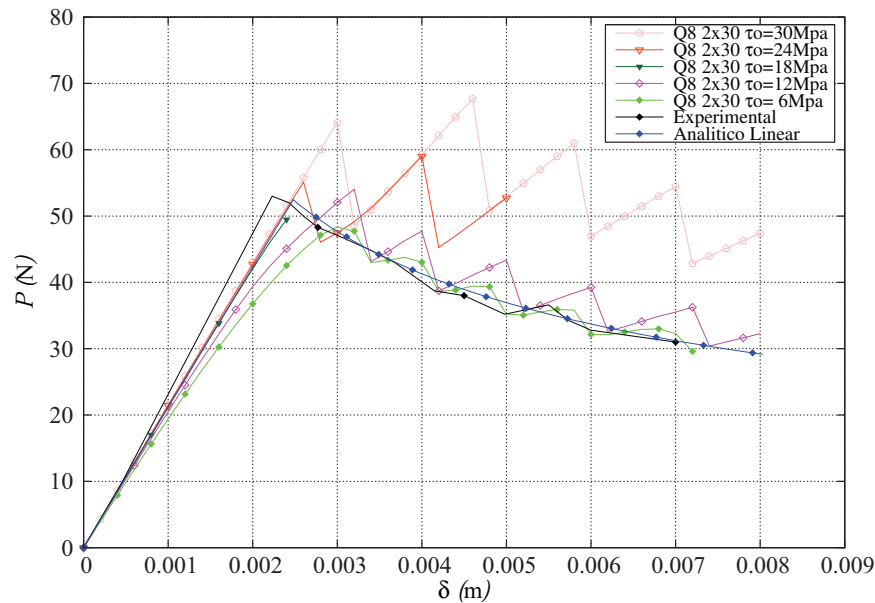


Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo Turon³¹, o erro obtido utilizando malhas grosseiras está relacionado com a capacidade do modelo de representar as tensões próximas a ponta da trinca.

Em seguida, verificou-se o efeito da resistência interfacial nas simulações para uma malha fixa. Apesar da Equação 146 indicar que a tensão interfacial σ_n se relaciona com o número de elementos na zona coesiva e o tamanho l_e do elemento, desejou-se verificar como as análises procederiam variando unicamente a resistência interfacial. A Figura 63 mostra os resultados obtidos nessa análise.

Figura 63 – Curvas Carga-Deslocamento para um teste DCB variando a resistência interfacial para uma malha 2x30.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados mostram que a diminuição da tensão interfacial tende a melhorar a convergência do modelo, entretanto para modelos mais robustos faz-se necessário utilizar a Equação 146 para uma melhor estimativa da relação discretização $\times$ tensão de interface.

6.2.5 Testes ENF e MMB

Outras simulações foram realizadas no intuito de validar a capacidade de simulação no modo II puro e no modo misto. Para isso simulou-se os testes ENF (*End-Notched Flexure*) e MMB (*Mixed-Mode Bending Test*) para taxas de mistura de 20%, 50% e 80%. Estes resultados foram comparados com soluções analíticas presentes na norma ASTM (D6671/D6671M-06) para testes de fratura em compósitos.

Tabela 9 – Propriedades do material para os testes ENF e MMB.

E_{11} (GPa)	$E_{22} = E_{33}$ (GPa)	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}
120.0	10.5	5.25	3.48	0.3	0.5
G_{Ic} (N/m)	G_{IIc} (N/m)	σ_n (MPa)	τ_s (MPa)	η	
260.0	1002	15.0	30.0	2.0	

Fonte: Turon (2010)¹¹².

O corpo de prova simulado possui comprimento de 150mm, largura de 20mm e espessura de 3.1mm (duas lâminas de 1.55mm). Uma malha 210x2 foi gerada para as análises. Elementos sólidos laminados Q8 foram utilizados para simular o compósito enquanto que 49

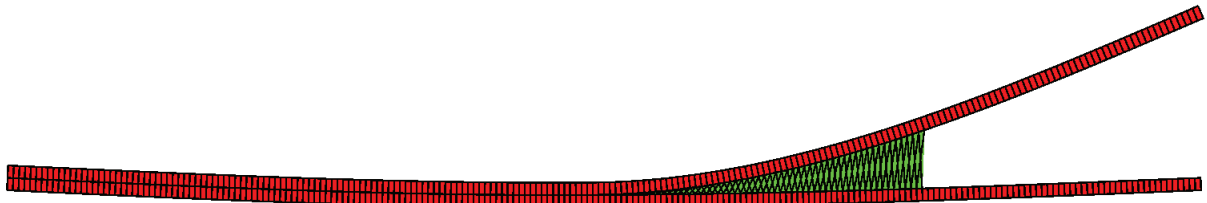
elementos de interface de 6 nós (L3) foram utilizados entre as duas lâminas (estado plano de tensão). As propriedades do compósito são mostradas na Tabela 9.

As condições de contorno e carregamento para os testes ENF e MMB são definidas de acordo com Turon¹¹². Elementos coesivos modelados somente com prevenção para interpenetração são usados para simular a pré-trinca existente. A Figura 64 mostra as malhas deformadas para as simulações dos testes ENF e MMB.

Figura 64 – Modelos ENF e MMB.



(a) Modelo MMB discretizado deformado.



(b) Modelo ENF discretizado deformado.

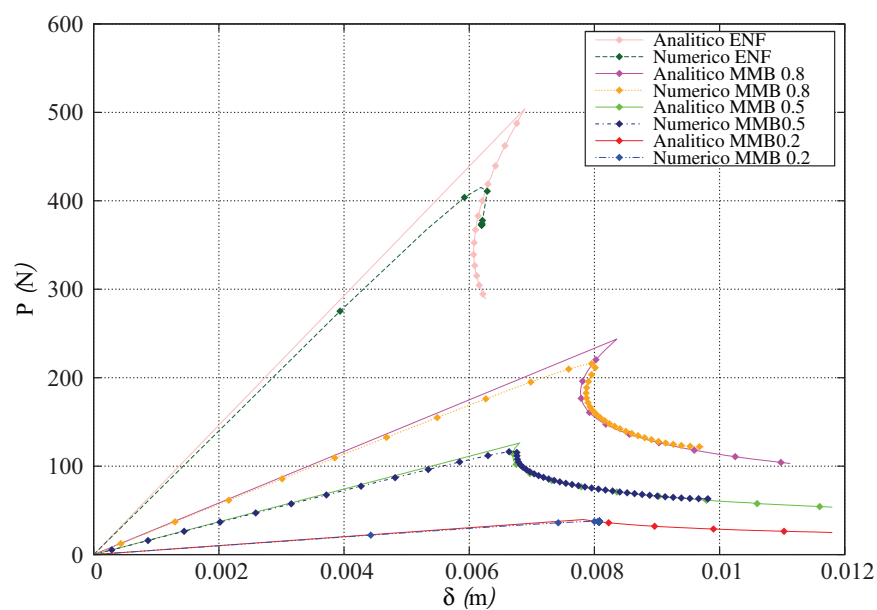
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os modelos para o MMB são simulados variando as relações entre o tamanho do braço de alavanca do aparato de teste e a proporção das forças aplicadas de acordo com Turon¹¹². Para a obtenção do deslocamento do ponto de aplicação da carga, a Equação 148 é utilizada:

$$w = \frac{c+L}{L}w_m + \frac{c}{L}w_e \quad (148)$$

onde w_n é o deslocamento vertical do nó central da viga, w_e é o deslocamento do nó da extremidade da viga, L é o comprimento da metade do modelo e c é o tamanho do braço da alavanca. Os resultados são apresentados na Figura 65.

Figura 65 – Simulação dos modelos ENF e MMB.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para estes testes, a taxa de liberação de energia foi mantida fixa para cada caso em questão. O modelo mostra boa concordância com os resultados obtidos por Turon¹¹², apesar de em alguns casos a carga máxima encontrada ser menor que na solução analítica.

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou desenvolver uma ferramenta de análise capaz de captar o início e propagação de falhas devido à delaminação em estruturas laminadas. Para isso, procurou-se utilizar um método computacional, já que soluções analíticas são muito específicas, que gerasse resultados confiáveis e de implementação computacional relativamente simples. O Método dos Elementos Finitos foi o método escolhido para a solução de problemas com estruturas de geometrias complexas.

Como primeiro passo para solução deste problema, foi necessário escolher o tipo de elemento finito que seria usado para representar uma estrutura sólida laminada. Este elemento deveria oferecer uma implementação relativamente simples assim como a capacidade de representar um estado de tensão 3D de forma satisfatória.

O segundo passo foi implementar um elemento finito que fosse capaz de representar, de forma satisfatória, o início e a propagação de trincas. O MEF oferece algumas opções para a simulação deste tipo de falha, entretanto a que melhor se enquadrou nos propósitos deste trabalho foram os elementos de interface utilizando os modelos constitutivos coesivos para a modelagem deste problema.

Para a simulação da estrutura laminada, optou-se por utilizar elementos finitos sólidos laminados. Estes elementos provaram ser elementos extremamente eficientes em representar o campo de tensões além de apresentarem uma forma de implementação relativamente simples. Estes são baseados na idéia da integração lâmina à lâmina para a obtenção das rigidezes e força interna no elemento.

Também com o intuito de contribuir com o software de análise existente (FAST), implementou-se o elemento finito não linear geométrico. Para isto utilizou-se a formulação Lagrangiana Total. O uso desta formulação foi vantajosa pois permitiu a representação das tensões e deformações em relação a configuração indeformada da estrutura tornando assim sua implementação mais simples.

Para a solução das equações não lineares foram apresentados os principais métodos de traçado do caminho carga-deslocamento a partir do uso do Método de Newton-Raphson. Tanto o Método do Controle de Carga, como o Método do Controle de Deslocamento e o Comprimento de Arco foram discutidos.

Nos exemplos tratados, considerando somente a análise geometricamente não-linear dos elementos sólido laminado, notou-se uma ótima concordância com os resultados encontrados na literatura. Assim, tanto nos exemplos de casca abatida isotrópica e laminada como nos exemplos de casca cilíndrica, o elemento representou corretamente o comportamento da estrutura (tanto para o caso de casca espessa como para o caso de casca fina), superando assim as possíveis complicações relacionadas a pequena razão de aspecto analisada (*shear locking*).

Para estes exemplos utilizou-se, sempre o comprimento de arco, já que o mesmo se mostrou uma ferramenta capaz de superar os *snap-backs* e *snap-through* que apareceram nas

análises.

Em seguida, discutiu-se a respeito da caracterização da delaminação, seus mecanismos e modos de falha. Também realizou-se uma discussão a respeito das estratégias computacionais para a modelagem destes problemas. Devido à capacidade dos modelos coesivos de simular fenômenos físicos complexos de forma relativamente simples, optou-se por implementar modelos de zona coesiva. A validade destes modelos foram discutidos a partir dos princípios estabelecidos pela primeira e segunda lei da termodinâmica. Dois modelos foram estudados e implementados: O modelo bilinear modo I puro e o modelo exponencial misto não variável. A eficiência destes dois modelos em termos de velocidade de análise e rapidez de convergência foi analisada.

Algumas análises foram realizadas buscando conhecer melhor os parâmetros de influência em uma análise de delaminação utilizando o modelo bilinear modo I puro, assim como os parâmetros que influenciam as análises de modelos de zona coesiva em geral. Confirmou-se os resultados de estudos encontrados na literatura a respeito de alguns parâmetros que são importantes para a simulação da delaminação.

O primeiro parâmetro importante é a discretização da malha dos modelos em elementos finitos. O número de elementos utilizados na zona coesiva influencia na convergência do modelo. A utilização da integração de Newton-Cotes ao invés de Gauss também é algo decisivo. É importante buscar um número ótimo de pontos de Newton-Cotes para as análises, ou seja, nem sempre exagerar no número de pontos de Newton-Cotes representa garantia de convergência. Para as análises realizadas foram utilizadas integrações variando entre $5 \times 5 \times 5$ e $8 \times 8 \times 8$. A variação da rigidez fictícia “ K ”, não é um parâmetro determinante para a convergência da análise. Entretanto verificou-se que rigidezes muito elevadas dificultam ainda mais a convergência e evolução da análise. Um dos parâmetros mais importantes é o grau de interpolação dos elementos utilizados como material contínuo de base para os elementos de interface. Elementos com grau de interpolação maiores são melhores para representar o comportamento coesivo do que elementos com grau de interpolação menores.

Também para os exemplos de modo I puro, observou-se que a velocidade da análise é maior utilizando o modelo bilinear do que utilizando o modelo exponencial. Entretanto, observou-se que em alguns casos o modelo bilinear apresenta bastante dificuldade de convergência. Isto ocorre porque a curva que caracteriza o modelo bilinear possui uma descontinuidade (inflexão). Logo, o modelo exponencial mostrou-se, para o modo I, uma excelente ferramenta de análise, já que o mesmo possui uma estabilidade numérica muito maior que o modelo bilinear.

Também foi apresentado algumas recomendações para a escolha dos parâmetros adequados para a obtenção da convergência nas análises. Estas, mostraram que a convergência é fortemente influenciada pela resistência à tração de abertura e pelo número de elementos na zona coesiva. Observou-se que, quanto maior o número de elementos na zona coesiva, maior é a chance de convergência. Também observou-se que, diminuindo a resistência a tração, é

possível a convergência do problema, em termos de deslocamento. Em termos de representação das tensões ao redor da ponta da trinca, é necessário utilizar mais elementos finitos na espessura e não é possível diminuir a resistência interfacial, já que isso apresentaria resultados incoerentes com a realidade.

Como o modelo exponencial mostrou-se mais eficaz para a simulação da zona coesiva, adotou-se o mesmo para a modelagem da delaminação em modo misto fixo. Os modelos analisados apresentaram excelentes resultados comparados com os modelos existente em literatura.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

O presente trabalho abordou aspectos importantes no estudo da delaminação de materiais compósitos laminados. Entretanto, devido ao crescente desenvolvimento deste campo, novos estudos devem ser realizados afim de conhecer o comportamento de estruturas compósitas sujeitas a outros tipos de carregamentos. Assim os seguinte itens listados visão propor futuras investigações na presente linha de pesquisa:

- a) Estudo da flambagem elástica de cascas laminadas.
- b) Desenvolvimento e implementação de modelos constitutivos para consideração da falha progressiva.
- c) Análise não linear física e geométrica de cascas laminadas.
- d) Estudo da flambagem de cascas laminadas com falha progressiva.
- e) Estudo da flambagem de cascas com delaminação.

REFERÊNCIAS

- 1 JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2. ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
- 2 REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. 2. ed. CRC Press, 2004.
- 3 SILVA, R. F. **Otimização de risers de materiais compósitos**. 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, 2012.
- 4 SILVA, R. F.; TEÓFILO, F. A. F.; JR., E. P.; MELO, A. M. C.; HOLANDA, A. S. Optimization of composite catenary risers. **Marine Structures**, v. 33, p. 1–20, 2013.
- 5 F. A. F. TEÓFILO, P. S. B. BASTOS, E. P. J.; MELO, A. M. C. Bucking and postbuckling of laminate composite. **XXXII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2011.
- 6 ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade geométrica e falha progressiva**. 2013. 157 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, 2013.
- 7 DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**. 2. ed. Oxford University, 2006.
- 8 TURON, A.; CAMANHO, P. P.; COSTA, J.; DÁVILA, C. A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. **Mechanics of Materials**, v. 38, p. 1072–1089, 2006.
- 9 MORORÓ, L. A. T. **Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina**. 2013. Dissertação (Mestrado em Mecânica dos Sólidos e Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, 2013.
- 10 MENDONÇA, P. T. R. **Materiais compósitos e estruturas sanduíches: projeto e análise**. 1. ed. Barueri: Manole Ltda, 2005.
- 11 R. D. COOK, D. S. MALKUS, M. E. P. R. J. W. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. Wiley & Sons Inc., 2002.
- 12 COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. John Wiley & Sons, 2002.
- 13 KNOPS, M. **Analysis of failure in fiber polymer laminates, the theory of alfred puck**. 2. ed. Springer, 2008.
- 14 PIETROPAOLI, E. Progressive failure analysis of composite structures using a constitutive material model (usermat) developed and implemented in ansys. **Applied Composite Materials**, v. 19, 2012.
- 15 AZZI, V. D.; TSAI, S. W. Anisotropic strenght of composites. **Exp. Mech.**, v. 5, n. 9, p. 283–288, 1965.

- 16 HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. **Proceeding of the real society, Serie A**, v. 193, 1948.
- 17 KELLY, A. **Strong solids**. 1. ed. Clarendon press, Oxford, 1966.
- 18 TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strenght for anisotropic materials. **Journal of composite materials**, v. 5, p. 58–80, 1971.
- 19 E A. ROTEM, Z. H. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. **Journal of Composite Materials**, v. 7, p. 448–464, 1973.
- 20 HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S. The background to part b of the second world-wide failure exercise: Evaluation of theories for predicting failure in polymer composite laminates under three-dimensional states of stress. **Journal of Composite Materials**, v. 47, n. (6-7), p. 643–652, 2013.
- 21 M. J. HINTON, A. S. K.; SODEN, P. D. **Failure criteria in fibre reinforced polymer composites**. 1. ed. Elsevier, 2004.
- 22 HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S.; SODEN, P. D. Evaluation of failure prediction in composite laminates: background to 'part B' of the exercise. **Composites Science and Technology**, v. 62, n. 12-13, p. 1481–1488, 2002.
- 23 HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S. Maturity of 3d failure criteria for fibre-reinforced composites: Comparison between theories and experiments: Part b of wwfe-ii. **Journal of Composite Materials**, v. 47, n. (6-7), p. 925–966, 2013.
- 24 PUCK, A.; SCHÜRMANN, H. Failure theories of frp laminates by means of physically based phenomenological models. **Composites Science and technology**, v. 58, p. 1045–1067, 1998.
- 25 Y. HUANG, K. K. J.; HA, S. K. rediction of composite laminate failure with micromechanics of failure. **Journal of Composite Materials**, v. 46, p. 2563–2594, 2012.
- 26 CUNTZE, R. G. The predictive capability of failure mode concept - based strength conditions for laminates composed of ud laminae under static tri-axial stress states. **Journal of Composite Materials**, v. 46, p. 2563–2594, 2012.
- 27 GARNICH, M. R.; AKULA, V. M. K. Review of degradation models for progressive failure analisys of fiber reinforced polymer composites. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, 2009.
- 28 LAHUERTA, F.; WESTPHAL, T.; NIJSSEN, R.; VAN DER MEER, F.; SLUYS, L. Measuring the delamination length in static and fatigue mode i tests using video image processing. **Composites Part B: Engineering**, v. 63, n. 0, p. 1 – 7], year = 2014.
- 29 BOLOTIN, V. V. Delaminations in composite structures: Its origin, buckling, growth and stability, composites part b. **Engineering**, p. 1359–8368, 1996.
- 30 BOLOTIN, V. V. Mechanics of delamination in laminate composite structures. **Mechanics of Composite Materials**, v. 37, n. 5-6, p. 367–380, 2001.

- 31 TURON, A. **Simulation of delamination in composites under quase-static and fatigue loading using cohesive zone models**. 2006. 218 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universitat de Girona, Spain, 2006.
- 32 HASHIN, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. **Journal of Applied Mechanics**, v. 47, p. 329–334, 1980.
- 33 YE, L. Role of matrix resin in delamination onset and growth in composite laminates. **Composites Science and Technology**, v. 33, p. 257–277, 1988.
- 34 P. P. CAMANHO, C. G. D. E. M. F. M. Numerical simulation of mixed mode progressive delamination in composite materials. **Journal of Composite Materials**, v. 37, n. 16, 2003.
- 35 KENANE, M.; BENZEGGAGH, M. L. Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus. **Composites Science and Technology**, v. 49, p. 439–449, 1996.
- 36 CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures: essentials**. 1. ed. John Wiley & Sons, 1991.
- 37 WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, 1971.
- 38 RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, 1979.
- 39 RAMM, E. Strategies for tracing the non-linear response near limit-points. **Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, 1981.
- 40 CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snapthrough'. **Computers and Structures**, v. 13, 1981.
- 41 NETO, E. A. S.; FENG, Y. T. On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcation and snap-backs. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 179, p. 81–89, 1999.
- 42 GHUGAL, Y. M.; SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. **Composite Structures**, v. 21, n. 9, p. 775–813, 2005.
- 43 ZHANG, Y. X.; YANG, C. H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 88, n. 1, p. 147–157, 2009.
- 44 M. GHERLONE, A.; SCIUVA, M. C0 beam elements based on the refined zigzag theory for multilayered composite and sandwich laminates. **Composite Structures**, v. 93, n. 11, p. 2882–2894, 2011.
- 45 E M. A. CRISFIELD, G. A. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, p. 1701–1736, 2001.

- 46 K. RAH, W. VAN PAEPEGEM, A. M. H.; DEGRIECK, J. A mixed solid-shell element for the analysis of laminated composites. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 89, p. 805–828, 2012.
- 47 M. MOSTAFA, M. V. S.; FELIPPA, C. A. A solid-shell corotational element based on andes, ans and eas for geometrically nonlinear structural analysis. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 95, n. 2, p. 145–180, 2013.
- 48 DVORKIN, E.; BATHE, K. J. Continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. **Engineering Computations**, v. 1, n. 1, p. 77–88, 1984.
- 49 SANG-YOUL, L.; DAE-YOUNG, P. Buckling analysis of laminated composite plates containing delaminations using the enhanced assumed strain solid element. **International Journal of Solids Structures**, v. 44, n. 24, p. 8006–8027, 2007.
- 50 E. M. DANTAS JR, I. B. C. M. ROCHA, E. P. J. A. M. C. M. Solid elements for non-linear analysis of laminated composites. **XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2013.
- 51 RYBICKI, E. F.; KANNINEN, M. F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure technique. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 9, n. 4, p. 931–938, 1977.
- 52 RAJU, I. S. Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 28, p. 251–274, 1987.
- 53 KRUEGER, R. Virtual crack closure technique: History, approach, and applications. **Applied Mechanics**, v. 57, n. 2, p. 109–143, 2004.
- 54 RICE, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. **Journal for Applied Mechanics**, v. 35, p. 379–386, 1968.
- 55 HELLEN, T. K. On the method of the virtual crack extension. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, p. 187–207, 1975.
- 56 PARKS, D. M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. **International Journal of Fracture**, v. 10, n. 4, p. 487–502, 1974.
- 57 DUGDALE, D. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, p. 100–104, 1960.
- 58 BARENBLATT, G. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55–120, 1962.
- 59 MONTENEGRO, F. C. O. A. Fraturamento coesivo de materiais quase-frágeis usando elementos de interface. **Master Thesis**, 2014.
- 60 A. HILLERBORG, M. M.; PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, p. 773–782, 1976.

- 61 J. GÁLVEZ, J. CERVENKA, D. C. V. S. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 32, n. 10, p. 1567–1585, 2002.
- 62 DVORKIN, E. N. Finite element with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. **International Journal of Numerical Methods on Engineering**, v. 30, p. 541–564, 1990.
- 63 T. BELYTSCHKO, J. FISH, E. A. E. A finite element with embedded localization zones. **Computational Methods of Applied Mechanics Engineering**, v. 70, p. 58–89, 1988.
- 64 T. BELYTSCHKO, T. B. Elastic crack growth in finite elements with minimal remesh. **International journal of numerical methods on Engineering**, v. 45, n. 5, p. 601–620, 1999.
- 65 BAZANT, Z. P.; JIRÁSEK, M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, p. 1119–1149, 2002.
- 66 GRASSL, P.; JIRÁSEK, M. A plastic model with non-local damage applied to concrete. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 30, p. 71–90, 2006.
- 67 JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model: I. basic formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, p. 1269–1290, 2001.
- 68 KAWAI, T. New discrete models and their application to seismic response analysis of structures. **Nuclear Engineering and Design**, v. 48, p. 207–229, 1978.
- 69 I. CAROL, P. PRAT, C. L. Normal/shear cracking model: Application to discrete crack analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 123, p. 765–773, 1997.
- 70 SAOUMA, V. E. Fracture mechanics. (notas de aula). **Boulder: Universidade do Colorado**, 2000.
- 71 Z. P. BAZANT, J. P. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. **CRC Press**, 1997.
- 72 P. STEINMANN, K. W. Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 90, n. 1-3, p. 845–867, 1991.
- 73 P. STEINMANN, K. W. Finite element analysis of elastoplastic discontinuities. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 120, n. 11, p. 2428–2442, 1994.
- 74 KALIAKIN, V.; LI, J. Insight into deficiencies associated with commonly used zerothickness interface elements. **Computers and Geotechnics**, v. 17, n. 2, p. 225–252, 1995.
- 75 H. KIM, W. G. B. Micromechanical fracture modeling of asphalt mixture using the discrete element method. **Advances in Pavement Engineering**, , n. 16, p. 1–15, 2005.
- 76 X. XU, A. N. Numerical simulation of fast crack growth in brittle solids. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 42, n. 9, p. 1397–1434, 1994.

- 77 CAMACHO, G. T.; ORTIZ, M. Computational modelling of impact damage in brittle material. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, p. 2899–2938, 1996.
- 78 E J. LLORCA, J. S. A new three-dimensional interface finite element to simulate fracture in composites. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 11-12, p. 2977–2993, 2004.
- 79 M. ALFANO, F. FURGIUELE, A. L. C. M. G. H. P. Fracture analysis of adhesive joints using intrinsic cohesive zone models. **In: Atti del Congresso IGF**, v. 19, p. 1701–1736, 2007.
- 80 CARPINTERI, A. Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive crack propagation. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 32, p. 265–278, 1998.
- 81 T. N. BITTENCOURT, A. R. INGRAFFEA, J. L. Simulation of arbitrary cohesive crack propagation, in: Z. p. bâzant (ed.). **Fracture Mechanics of Concrete Structures**, v. Amsterdam: Elsevier, p. 339–350, 1992.
- 82 V. TVERGAARD, J. H. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 40, p. 1377–1397, 1992.
- 83 A. S. GULLERUD, X. GAO, R. H. D. R. H.-A. Simulation of ductile crack growth using computational cells: numerical aspects. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 66, p. 65–92, 2000.
- 84 N. CHANDRA, H. LI, C. S. H. G. Some issues in the application of cohesive zone models for metal–ceramic interfaces. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 10, p. 2827–2855, 2002.
- 85 COTTERELL, B.; MAI, I. Y. W. Fracture mechanics of cementitious materials. **Blackie Academic & Professional, Imprint of Chapman and Hall**, 1996.
- 86 P. BRENET, F. CONCHIN, G. F. P. R. D. R.-C. T. Direct measurement of the crack bridging tractions: a new approach to the fracture behaviour of ceramic-matrix composites. **Computational Science Technology**, v. 56, p. 817–823, 1996.
- 87 E. K. GAMSTELDT, T. K. JACOBSEN, B. F. S. Determination of cohesive laws for materials exhibiting large scale damage zones, analytical and computational fracture mechanics of nonhomogeneous materials. **B. B. Karihalov (ed.), Kluwer, Dordrecht**, p. 349–353, 2002.
- 88 B. F. SORENSEN, T. J. Determination of cohesive laws by the j integral approach. **Engineering fracture mechanics**, v. 70, p. 1841–1858, 2003.
- 89 A. CARPINTERI, P. CORNETTI, F. B. S. V. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory. **Engineering fracture mechanics**, v. 70, p. 1809–1838, 2003.
- 90 M. ELICES, G.V. GUINEA, J. G. J. P. The cohesive zone model: advantages, limitations

- and challenges. **Engineering fracture mechanics**, v. 69, p. 137–163, 2002.
- 91 J. CHEN, M. CRISFIELD, A. K. E. B. F. M.-Y. Q. Predicting progressive delamination of composite materials specimens via interface elements. **Mechanics of Composite Materials and Structures**, v. 6, p. 301–317, 1999.
 - 92 CUI, W.; WISNOM, M. A combined stress-based and fracture-mechanics model for predicting delamination in composites. **Composites**, v. 24, p. 467–474, 1993.
 - 93 U. MI, M. CRISFIELD, G. D. Progressive delamination using interface elements. **Journal of Composite Materials**, v. 32, p. 1246–1272, 1998.
 - 94 NEEDLEMAN, A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. **Journal of Applied Mechanics**, p. 524–531, 1987.
 - 95 ALFANO, G. On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models. **Composites Science and Technology**, v. 66, n. 6, p. 723–730, 2006.
 - 96 ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. **International Journal of Numerical Methods on Engineering**, v. 44, p. 1267–1282, 1999.
 - 97 GOYAL, V. K.; JOHNSON, E. R.; D'AVILA, C. G. Irreversible constitutive law for modeling the delamination process using interfacial surface discontinuities. **Composite Structures**, v. 65, p. 289–305, 2004.
 - 98 JR, F. E.; ROESLER, J. R.; PROENCA, S. P. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 97, p. 261–280, 2012.
 - 99 BALZANI, C.; WAGNER, W. An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 75, n. 9, p. 2597 – 2615, 2008.
 - 100 A. DE-ANDRÉS, J. L. PEREZ, M. O. Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminium shafts subjected to axial loading. **International Journal of Solids Structures**, v. 36, p. 2231–2258, 1999.
 - 101 J. H. ROSE, J. FERRANTE, J. R. S. Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. **Phys Rev Lett**, v. 47, n. 9, p. 675–678, 1981.
 - 102 L. DAUDEVILLE, O. A.; LADEVÈZE, P. Delamination analysis by damage mechanics. some applications. **Composites Engineering**, v. 5, n. 1, p. 17–24, 1995.
 - 103 Z. ZOU, S. R. REID, S. L.; SODEN, P. D. Modelling interlaminar and intralaminar damage in filament wound pipes under quasi-static indentation. **Journal of Composite Materials**, v. 36, n. 1, p. 477–499, 2002.
 - 104 IRWIN, G. R. Plastic zone near a crack and fracture toughness.

- 105 C.-Y. HUI, A. JAGOTA, S. J. B.; LONDONO, J. D. Crack blunting and the strength of soft elastic solids, v. 459, p. 1489–1516, 2003.
- 106 RICE, J. **The mechanics of earthquake rupture, physics of the earths interior**. Proceeding of International School of Physics - Enrico Fermi, Course 78, 1979; ed. (A. M. Dziewonski and E. Boschi), Italian Physical Society and North-Holland Publ. Co., 1980.
- 107 M. L. FALK, A. NEEDLEMAN, J. R. R. A critical evaluation of cohesive zone models of dynamics fracture. **Journal of Physique IV**, p. 543–550, 2001.
- 108 K. Y. SZE, X. H. L.; LO, S. H. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. **Finite Element in Analysis and Design**, v. 40, n. 11, p. 1551–1569, 2004.
- 109 J.P.M. GONÇALVES, M.F.S.F. DE MOURA, P. D. C.; MARQUES, A. Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation. **Engineering Computations**, v. 17, n. 1, p. 28–47, 1999.
- 110 DÁVILA, C.; CAMANHO, P. P. Decohesion elements using two and three-parameter mixed-mode criteria. **American Helicopter Society Conference**, 2001.
- 111 TURON, A.; COSTA, J.; CAMANHO, P. P.; DÁVILA, C. Simulation of delamination in composites under high-cycle fatigue. **Composites Part A: applied science and manufacturing**, v. 38, p. 2270–2282, 2007.
- 112 TURON, A.; CAMANHO, P. P.; COSTA, J.; RENART, J. Accurate simulation of delamination growth under mixed-mode loading using cohesive elements: Definition of interlaminar strengths and elastic stiffness. **Composites Structures**, v. 92, p. 1857–1864, 2010.
- 113 E. A. SOUZA NETO, D. PERIC, D. R. J. O. **Computational methods for plasticity: theory and application**. 2. ed. John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- 114 M. E. GURTIN, E. FRIED, L. A. **The mechanics and thermodynamics of continua**. 1. ed. Cambridge Press, 2010.
- 115 E. H. N. SHAPIRO, M. J. M. **Fundamentals engineering thermodynamics**. 4. ed. John Wiley & Sons, 2000.
- 116 TRUESDELL, C. **Rational thermodynamics**. McGraw-Hill, 1969.
- 117 PROENÇA, S. P. B. **Fundamentos da termodinâmica dos sólidos i e ii - notas de aula: introdução à mecânica do dano e fraturamento**. São Carlos, 2000.
- 118 E. J. L-CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solid materials**. 1. ed. Cambridge University Press, 1990.

A ANEXO-TERMODINÂMICA COM VARIÁVEIS INTERNAS

Neste anexo, apresenta-se uma breve introdução às leis termodinâmicas aplicadas a meios contínuos, esta pretende familiarizar o leitor com os princípios básicos necessários para se definir um modelo constitutivo fisicamente consistente¹¹³.

A primeira lei da termodinâmica representa um balanço de energia detalhado descrevendo a forma como a energia interna de um volume genérico Ω , a energia cinética deste volume e a taxa de calor transferida para este corpo se relacionam. Este balanço pode ser escrito como:

$$\dot{U} + \dot{K} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (149)$$

onde $\dot{U}$ é a taxa de variação de energia interna (potência interna), $\dot{K}$ é a taxa de variação da energia cinética (potência cinética), $\dot{W}$ é potência realizada pelas forças externas e $\dot{Q}$ é a taxa de calor transferido ao corpo. Cada termo da equação pode ser escrito da seguinte forma para um sólido sofrendo um processo de deformação:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u d\Omega \\ \dot{K} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 d\Omega \\ \dot{W} &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_A \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA = \dot{K} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} d\Omega \\ \dot{Q} &= - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\Omega} q d\Omega \end{aligned} \quad (150)$$

onde ρ é densidade do sólido, u é a energia interna específica por unidade de massa, $\mathbf{v}$ é vetor das velocidades, $\mathbf{b}$ é a força causada pelo campo gravitacional por unidade de massa no sólido, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões, $\mathbf{D}$ é a taxa do tensor deformação (igual a $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ sendo $\boldsymbol{\epsilon}$ o tensor deformação para pequenas deformações), $\mathbf{q}$ é o fluxo de calor por unidade de área entrando no sólido e q é a taxa de geração de calor volumétrica. O sinal negativo na primeira integral de $\dot{Q}$ é devido ao vetor normal $\mathbf{n}$ apontar para dentro da superfície. Após algumas operações e utilizando o balanço de massa¹¹⁴ é possível obter a forma intensiva da primeira lei a seguir:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q \quad (151)$$

A segunda lei da termodinâmica lei fornecesse uma forma bem clara de visualizar o grau de irreversibilidade dos processos físicos, esta é descrita através da seguinte equação:

$$\dot{S}_{total} = \dot{S}_{transf} + \dot{S}_{ger} \quad \text{onde,} \quad \dot{S}_{total} - \dot{S}_{transf} \geq 0 \quad (152)$$

onde $\dot{S}_{total}$ é a taxa de variação total da entropia associada ao volume do sólido, $\dot{S}_{transf}$ é a en-

tropia associada à taxa de transferência de entropia pelo fluxo de calor (transferência de calor), fluxo de massa (se houver) e devido a taxa de geração de calor, $\dot{S}_{ger}$ é a taxa de geração de entropia no sistema devido as irreversibilidades. De acordo com Moran¹¹⁵ e Gurtin¹¹⁴:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{total} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \\ \dot{S}_{transf} &= - \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA + \sum_{in} \left(\int_A s \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \right)_{in} - \sum_{out} \left(\int_A s \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \right)_{out} + \int_V J dV\end{aligned}\quad (153)$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \frac{\mathbf{q}}{\theta} \\ J &= \frac{\rho q}{\theta}\end{aligned}\quad (154)$$

s = entropia específica ($J/Kg \cdot K$)

θ = temperatura absoluta (K)

Como num problema de deformação simples não existe transferência de entropia pelo fluxo de massa, a desigualdade da Equação (152) pode ser escrita como¹¹⁴:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq - \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V J dV \quad (155)$$

aplicando o Teorema da Divergência¹¹⁴ obtem-se:

$$\dot{S}_{ger} = \int_V \rho \dot{s} dV - \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) dV + \int_V \frac{\rho q}{\theta} dV \geq 0 \quad (156)$$

logo, a Segunda Lei da Termodinâmica assume a forma intensiva:

$$\rho \dot{s} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \frac{\rho q}{\theta} \geq 0 \quad (157)$$

Em um processo de deformação irreversível à taxa de variação da entropia total do volume ($\dot{S}_{total}$) não pode ser igual ou menor que a taxa de variação da entropia fornecida pelo fluxo de calor e massa, somada a taxa de variação de entropia associada à geração de calor ($\dot{S}_{transf}$). Caso não haja geração de entropia ($\dot{S}_{ger} = 0$), o processo é considerado reversível e a igualdade prevalece, entretanto $\dot{S}_{ger}$ jamais pode ser menor que zero, pois nesse caso, o processo é fisicamente inconsistente (não existe)¹¹⁵.

A primeira e a segunda lei podem ser combinadas com o intuito de criar uma única expressão matemática que possa ser utilizada para averiguar se um processo é termodinamicamente admissível ou não. Usando a seguinte relação:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (158)$$

substituindo a Equação (157) na Equação (156) e sucessivamente substituindo $\nabla \cdot \mathbf{q}$ pela Equação (151) tem-se:

$$\rho \dot{s} + (-\rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho q) \left(\frac{1}{\theta} \right) - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta - \frac{\rho q}{\theta} \geq 0 \quad (159)$$

finalmente, multiplicando a Equação (159) por θ e cancelando-se ρq obtem-se a desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\rho \theta \dot{s} - \rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (160)$$

Outra forma de escrever essa desigualdade é através do conceito da energia livre específica Ψ (também conhecida como energia livre de Helmholtz por unidade de massa)^{113,114}. Este representa um potencial energético onde é possível transformar toda a energia disponível em trabalho. O potencial já é definido levando em conta a parcela de energia que é dissipada através das irreversibilidades:

$$\Psi = u - \theta s \quad \text{sendo } \dot{\Psi} = \dot{u} - \dot{\theta} s - \theta \dot{s} \quad (161)$$

substituindo na desigualdade de Clausius-Duhem e rearranjando os termos tem-se:

$$\rho(\dot{\Psi} + \dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (162)$$

A definição dos conceitos anteriores, são úteis para análise da coerência termodinâmica de uma lei constitutiva qualquer. Seja $\mathcal{B}$ um meio contínuo, os processos termodinâmicos em $\mathcal{B}$ podem ser de duas naturezas: *Termocinéticos* (formado por um par de campos $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$ e $\theta(x, t)$) ou *calordinâmicos* (formado por um conjunto de campos $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$, $u(x, t)$, $s(x, t)$, $r(x, t)$, $\mathbf{b}(x, t)$, $\mathbf{q}(x, t)$) que satisfazem os equilíbrios de momento, primeira e segunda lei.

O princípio do determinismo termodinamicamente compatível¹¹⁶ postula que a história de um processo termocinético em que a vizinhança de um ponto x de $\mathcal{B}$ foi submetido determina o processo calordinâmico para $\mathcal{B}$ no ponto x' , em particular, para materiais simples. A história local de $\mathbf{F}$, θ e $\mathbf{g}$, onde $\mathbf{F}$ é o tensor gradiente de deformação e $\mathbf{g} = \nabla \theta$ (história somente no ponto x), é suficiente para determinar a história do processo termocinético para propósitos constitutivos. O princípio do determinismo termodinâmico implica a existência de funcionais constitutivos $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{J}$ da história de $\mathbf{F}$, θ e $\mathbf{g}$, de tal forma que para um ponto x :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(x, t) &= \mathcal{F}(\mathbf{F}(x, t), \theta(x, t), \mathbf{g}(x, t)) \\ \Psi(x, t) &= \mathcal{R}(\mathbf{F}(x, t), \theta(x, t), \mathbf{g}(x, t)) \\ s(x, t) &= \mathcal{H}(\mathbf{F}(x, t), \theta(x, t), \mathbf{g}(x, t)) \\ \mathbf{q}(x, t) &= \mathcal{J}(\mathbf{F}(x, t), \theta(x, t), \mathbf{g}(x, t)) \end{aligned} \quad (163)$$

e a inequação de Clausius-Duhem vale para todos os processos termocinéticos de $\mathcal{B}$.

Uma alternativa para a descrição geral baseada na história dos funcionais é a utilização da chamada termodinâmica com variáveis internas. Sua hipótese inicial é a de que a qualquer instante do processo termodinâmico, o estado termodinâmico (definido por $\boldsymbol{\sigma}, \Psi, s$ e $\mathbf{q}$) em um dado ponto x pode ser completamente determinado por um número finito de *variáveis de estado* conhecidas. O estado termodinâmico depende unicamente do valor instantâneo de suas variáveis de estado e não de sua história passada.

Para as aplicações mais comuns é conveniente assumir que um estado termodinâmico em um ponto qualquer é determinado pela seguinte conjunto de variáveis de estado:

$$\{\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \alpha\} \quad (164)$$

onde α é um conjunto de variáveis internas associado a mecanismos de dissipação de energia.

Seguindo as hipóteses anteriores (segundo Gurtin¹¹⁴, a dependência do gradiente de temperatura na função Ψ deve ser desprezada para não contrariar a segunda lei da termodinâmica), assume-se que a energia específica livre possui a seguinte forma:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}, \theta, \alpha) \quad (165)$$

logo, a taxa de variação da mesma é dada por:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} : \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k} : \dot{\alpha}_k \quad (166)$$

onde k indica o índice de cada variável interna ligada a dissipação existente no problema. Fazendo a seguinte equivalência¹¹⁷:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} \quad (167)$$

substituindo a Equação (166) e Equação (167) na Equação (162), pode-se reescrever a desigualdade de Clausius-Duhem, da seguinte forma:

$$(\mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}) : \dot{\mathbf{F}} - \rho (s + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (168)$$

Esta equação deve valer para todos os processos possíveis, em especial os reversíveis.

Seguindo estas hipóteses^{117,118}, tem-se os dois primeiros termos da Equação (168) relacionados a processos termodinamicamente ideais. Logo, os últimos termos é quem define a admissibilidade termodinâmica de um processo irreversível. Assim pode-se reescrever a desigualdade de Clausius-Duhem para um processo qualquer irreversível da seguinte forma:

$$-A_k * \dot{\alpha}_k - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (169)$$

onde α_k representa as variáveis internas do sistema. Nesta equação, o símbolo do produto no primeiro termo representa a devida operação de multiplicação, enquanto A_k define as *forças termodinâmicas conjugadas*:

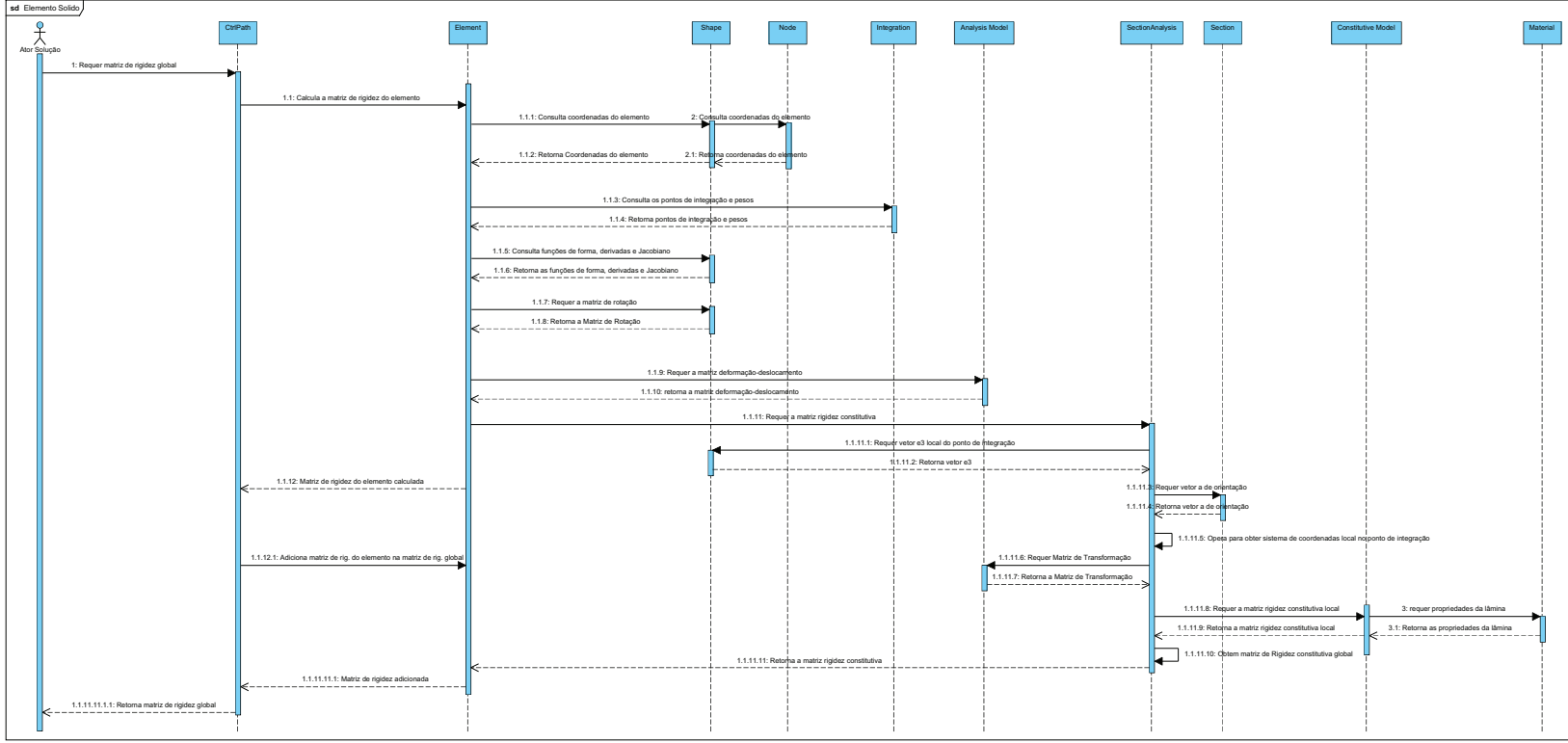
$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k} \quad (170)$$

sendo $\mathbf{A} = \{A_k\}$ e $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}$ pode-se reescrever a desigualdade como:

$$-\mathbf{A} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (171)$$

Esta equação dita que todas as dissipações de energia num processo termodinâmico real devem ser maiores do que zero.

B ANEXO-DIAGRAMA DE SEQUÊNCIA SÓLIDO LAMINADO



C ANEXO-DIAGRAMA DE SEQUÊNCIA ELEMENTO DE INTERFACE

