UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTONIO WILSON RODRIGUES DA CUNHA

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS, APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO E DE TEOREMAS TIPO-LIOUVILLE

FORTALEZA

2015

ANTONIO WILSON RODRIGUES DA CUNHA

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS
APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO E DE TEOREMAS TIPO-LIOUVILLE

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

C977s Cunha, Antonio Wilson Rodrigues da
Sobre hipersuperfícies mínimas, aplicações do princípio do máximo fraco e de teoremas tipo Liouville / Antonio Wilson Rodrigues da Cunha. – 2015.
80 f. : enc. ; 31 cm

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Geometria diferencial.
Orientação: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa.

1. Estimativa de curvatura. 2. Teoremas tipo-Liouville. 3. Hipersuperfícies f- mínimas. I. Título.

CDD 516.36

ANTONIO WILSON RODRIGUES DA CUNHA

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS, APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO E DE TEOREMAS TIPO-LIOUVILLE

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovoda em: 13/03/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Antonio Caminha M. Neto

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Cícero Pedro de Aquino

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

À minha amada mãe, por todo o carinho e atenção que sempre teve pelos filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me proporcionado esta grande fase de minha vida;

Aos meus pais e a meus irmãos pelo apoio e incentivo;

À minha amada esposa Ana Lucia, pela compreensão do tempo e da distância e pelo amor que sempre demonstrou por mim;

À meu primo José Rodrigues (o Zequia) e sua esposa Jesus, Tony e Tunica, pela boa conversa e o grande incentivo que me deram;

Ao prof. Pacelli, por todo apoio, incentivo e orientação, imprescindíveis para a realização deste trabalho;

Aos professores Jorge Herbert e Luciano Mari, pelas diversas conversas que foram de suma importância para a conclusão deste trabalho;

Aos grandes amigos da UFPI: Rondinelle, Kelton, Halyson, Manuel, Isaías, Barnabé, Cícero Aquino, Paulo Alexandre, cuja amizade e espelho foram importantes na busca deste meu objetivo;

Aos professores Adriano Medeiros (UFPB) e Rondinelle Batista (UFPI), pelas parcerias produtivas durante todo esse tempo;

Aos professores Antonio Caminha (UFC), Abdênago Barros (UFC), Cícero Aquino (UFPI) e Barnabé Lima (UFPI), por terem aceitado participar da banca e pelas valiosas sugestões na escrita deste trabalho;

A todos os amigos da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos meus grandes amigos, Rondinelle, Eraldo, Tiago Veras, Daniesinho, Kelson, Kristian, Adriano, Leandro, Davi Ribeiro, Disson, Damião, Marcelo Dário, Chavinho, Tiarlos, Nazareno, João Vitor, Ederson, João Francisco e todos os amigos do racha da Matemática-UFC, pela amizade e pela grande ajuda nas horas em que precisei durante todo esse tempo;

Ao Liduino pelas noites em que suportou nossas discussões jogando uma simples sinuca.

A Andréa Dantas e Jessyca, por toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

A CAPES e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, abordamos quatro linhas de estudo, onde iniciamos com o estudo de hipersuperfícies isometricamente imersas sobre uma horobola. Em seguida estudamos Teoremas tipo Liouville para uma variedade Riemanniana completa em operadores mais gerais que o Laplaciano. Além disso, estudamos hipersuperfícies f-mínimas fechadas em uma variedade com densidade e, por fim, estudamos hipersuperfícies mínimas com bordo livre, propriamente imersas em uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional. Primeiramente, assumindo um princípio do máximo fraco e que a imersão está contida em uma horobola, i.e., um conjunto em que a função de Busemann é limitada superiormente, obtemos uma estimativa para o supremo do quociente das r-ésimas curvaturas. Além disso, sob certas condições sobre as curvaturas seccionais e assumindo que a imersão está contida em uma horobola, forçamos a validade do princípio do máximo fraco e obtemos as mesmas estimativas. Prosseguindo, obtemos, para um operador mais geral que o φ-Laplaciano, um teorema tipo-Liouville para uma variedade Riemanniana completa. Como aplicação provamos um teorema de classificação para gráficos de Killing de uma folheação. Em seguida, estabelecemos uma estimativa tipo Choi e Wang para o primeiro autovalor do f-Laplaciano em espaços com densidade, no sentido de responder parcialmente à conjectura de Yau para o primeiro autovalor do Laplaciano; além disso, obtemos uma desigualdade tipo Poincaré para esse operador. Com a estimativa obtida, pudemos estabelecer uma estimativa de volume para uma superfície fechada mergulhada em um espaço com densidade. Ainda seguindo o estudo de espaços com densidade, obtemos uma desigualdade tipo Heintze-Karcher para uma variedade compacta com bordo e verificamos que, se vale a igualdade, então a variedade é isométrica a uma bola Euclidiana. Como consequência, obtemos que, nas mesmas condições, e se a f-curvatura média satisfizer uma certa limitação inferior, então a variedade ainda é isométrica a uma bola Euclidiana. Finalmente, obtemos uma estimativa para o primeiro autovalor de Steklov, dando uma resposta parcial a uma conjectura devida a Fraser e Li. Além disso, como consequência, estabelecemos uma estimativa para o comprimento do bordo de uma superfície mínima, compacta e propriamente megulhada com bordo livre em termos de sua topologia; assim, provamos o mesmo resultado quando a superfície está mergulhada em uma bola Euclidiana 3-dimensional.

Palavras-chave: Curvatura de ordem superior. Teoremas tipo Liouville. Hipersuperfícies f-mínimas. Superfícies mínimas propriamente imersas com bordo livre.

ABSTRACT

In this work we approach four research lines, where we began with the study of isometrically immersed hypersurfaces in a horoball. Next we studied Liouville type theorems in a complete Riemannian manifold for general operators. After we studied hypersurfaces f-minimal closed on a manifold with density, and finally we studied properly embedded minimal hypersurfaces with free boundary in a n-dimensional compact Riemannian manifold. Continuing, we obtain under a more general class operator than φ-Laplacian, a Liouville type theorem for a complete Riemannian manifold, so that, prove a classification theorem for Killing graph of a foliation. Firstly, we are going to assume a weak maximum principle and that immersion is contained in a horoball, i.e., the set of bounded above Bussemann functions . We obtain an estimate for the highest quotient of r-curvatures. Moreover, under certain conditions on sectional curvature and assuming that the immersion is contained in a horoball, we forced the validity of the weak maximum principle and obtain the same estimates. Next, we establish a Choi-Wang type estimate for the first eigenvalue of the weighter Laplacian on spaces with density in responding partially to Yau's conjecture for the first eigenvalue weighter Laplacian for spaces with density, and moreover, we obtain an inequality Poincaré type. With the estimates obtained, we establish an estimate of volume for a closed surface immersed in a space with density. Still following the study of spaces with density, we obtain a type Hientze-Karcher inequality for a compact manifold with nonempty boundary , so that, we obtain that if holds the equality than the manifold is isometric to a Euclidian ball. As consequence, we obtain under same conditions that if the f-mean curvature satisfy a bounded below than the manifold is isometric to a Euclidian ball. Finally, we obtain an estimate for the nonzero first Steklov eigenvalue, where we are giving a answer partial to a conjecture by Fraser and Li. Moreover, as a consequence we establish an estimate for the total length of the boundary of the properly embedded minimal surfaces with free boundary in terms of its topology, thus, we proved the same when the surface is embedded in the Euclidean ball 3-dimensional.

Keywords: Higher order mean curvature. Liouville type theorems. f-Minimal hypersurfaces. Properly embedded minimal hypersurface with free boundary.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, sendo que o principal objeto de estudo são as hipersuperfícies isometricamente imersas em variedades de Cartan-Hadamard, teoremas tipo L^p-Liouville, hipersuperfícies f-mínimas e hipersuperfícies mínimas propriamente imersas com bordo livre. O estudo de operadores mais gerais que o Laplaciano é um dos objetos de estudo em Geometria Diferencial que tem despertado grande interesse em pesquisas atuais. Nesse sentido, iremos abordar alguns desses operadores e procurar respostas para alguns resultados em aberto. Cada capítulo contém as devidas noções preliminares para o bom entendimento dos problemas abordados.

No Capítulo 2 estudamos os operadores diferenciais lineares tipo traço da forma

$$L_r(u) = tr(P_r \mathrm{hess} u) = \mathrm{div}(P_r \,\mathrm{grad}\, u) - \langle tr(\nabla P_r), \mathrm{grad}\, u \rangle.$$

Estaremos em busca de estimar o supremo do quociente das curvaturas médias de ordem superior H_r e, assim, obter resultados de não existência de imersões sobre uma horobola. A ferramenta principal consiste em buscar condições para a validade de um princípio do máximo fraco mais geral que o já existente para o Laplaciano. Historicamente, H. Omori (1967) provou que em uma variedade Riemanniana aberta M com curvatura seccional K limitada inferiormente, $K \geq C > -\infty$, e para qualquer função $u \in C^2(M)$ com $u^* = \sup_M u < \infty$, existe uma sequência $(x_k)_{k \geq 1}$ em M satisfazendo

$$i.)\ u(x_k) > u^* - 1/k, \quad ii.)\ |\,\mathrm{grad}\, u(x_k)| < 1/k, \quad iii.)\ \triangle u(x_k) < 1/k\,.$$

Seguindo neste estudo, o resultado de Omori foi estendido a variedades Riemannianas com curvatura de Ricci limitada inferiormente, $\mathrm{Ric}_M \geq C > -\infty$, nos trabalhos de Cheng e Yau (1977, 1975). Com isto, esses resultados ficaram conhecidos como *princípio do máximo de Omori-Yau*. Recentemente, o princípio do máximo de Omori-Yau foi estudado por Pigola, Rigoli e Setti (2005), por meio de uma abordagem diferente; assim, eles estenderam o princípio do máximo de Omori e Yau para uma classe maior de variedades e operadores. Dentre outros resultados, eles mostraram que se M é uma variedade aberta então a existência de uma função própria $\gamma \in C^2(M)$, satifazendo certas propriedades implica a validade do princípio do máximo de Omori-Yau em M. Uma vez existindo aplicações geométricas em que a condição $|\,\mathrm{grad}\, u|(x_k) < 1/k$ não é necessária, Pigola, Rigoli e Setti (2005) introduziram o conceito de princípio do máximo fraco, i.e., para qualquer função de classe C^2 em M e limitada superiormente, existe uma sequência $(x_k)_{k\geq 1}$ em M satisfazendo:

$$i.)\ u(x_k) > u^* - 1/k, \qquad ii.)\ \triangle u(x_k) < 1/k.$$

Com o objetivo de estimar as curvaturas médias de ordem superior, Alías, Dajczer e Rigoli (2013) introduziram uma versão mais geral do princípio do máximo fraco para o operador L_r. Considerando numa variedade Riemanniana M, um operador linear semi-elíptico $L_r(u) = tr(P_r \mathrm{hess} u)$, onde $u \in C^2(M)$, e $q \in C^0(M)$ uma função não-negativa tal que $q > 0$ fora de um compacto os autores estabeleceram o princípio do máximo q-fraco no infinito vale em M se, para qualquer função $u \in C^2(M)$ com $u^* := \sup_M u < \infty$, existe uma sequência $(x_k)_{k\geq 1}$ em M tal que

$$i.)\ \ u(x_k) > u^* - 1/k, \quad ii.)\ \ q(x_k) \cdot L_r u(x_k) < 1/k.$$

Eles então provaram que, se uma hipersuperfície $\varphi\colon M^n \to N^{n+1}$ está contida em uma bola geodésica $B_N(R)$ de N, então, sob condições apropriadas sobre as curvaturas seccionais K_M e K_N, vale a estimativa

$$\sup_M \sqrt[j+1]{H_{j+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{j+1}}{H_j}\right) \geq C_b(R), \ \ \forall\ 1 \leq j \leq r\,,$$

eles provaram também que, se valer a igualdade, então $\varphi(M) = \partial B_N(R)$ (veja Teorema 1 de 2013). Em seguida, Albanese, Alías e Rigoli (2013) provaram que, sob as mesmas condições, se a hipersuperfície estiver contida em um cone não-degenerado de $\mathbb{R}^{n+1}$, então

$$\sup_M \sqrt[j+1]{H_{j+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{j+1}}{H_j}\right) \geq \frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}} \cdot \frac{a^2}{\mathrm{dist}(v^\perp, \varphi(M))} > 0, \ \ \forall\ 1 \leq j \leq r, \tag{1}$$

onde $\mathrm{dist}(v^\perp, \varphi(M))$ é a distância entre $\varphi(M)$ e o hiperplano $v^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a v passando pela origem (veja Teorema 4.3 de 2013).

Mediante o estudo da estimativa acima, propomos uma vertente que seja um pouco mais geral do que abordado em (Albanese, Alías, Rigoli, 2013). Assim, consideramos hipersuperfícies contidas em uma horobola de N, i.e., o conjunto definido por

$$\mathcal{B}_{\sigma,R} = \{p \in N; b_\sigma(p) \leq R\},$$

onde b_σ é uma função de Busemann em N. A princípio, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 1.1 *Seja $\varphi\colon M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica two-sided de uma variedade Riemanniana aberta n-dimensional M em uma variedade de Cartan-Hadamard N, com curvatura seccional $-B \leq K_N \leq -A$, para certas constantes $B \geq A > 0$. Suponha que $H_{r+1} \neq 0$ em M, para algum $2 \leq r \leq n-1$, que $\varphi(M)$ tem um ponto elíptico e que $\varphi(M) \subset \mathcal{B}_{\sigma,R}$. Se o princípio do máximo q-fraco vale em M, para $q = 1/trP_r$, então a*

r-curvatura H_r e a $(r+1)$-curvatura H_{r+1} de φ satisfazem as desigualdades

$$\sup_M \sqrt[r+1]{H_{r+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}\right) \geq \sqrt{A}.$$

Em seguida, usamos as condições 1.) e 2.) no teorema abaixo para implicar a validade do princípio do máximo q-fraco e, assim, usando o teorema acima, provar o teorema principal a seguir. Provamos o seguinte.

Teorema 1.2 *Seja $\varphi\colon M^n \hookrightarrow N^{n+1}$ uma imersão isométrica two-sided de uma variedade Riemanniana aberta n-dimensional M em uma variedade de Cartan-Hadamard N, com curvatura seccional $-B \leq K_N \leq -A$, para certas constantes $B \geq A > 0$. Suponha que $H_{r+1} \neq 0$ em M, para algum $2 \leq r \leq n-1$, que $\varphi(M)$ tem um ponto elíptico e $\varphi(M) \subset \mathcal{B}_{\sigma,R}$. Se uma das seguintes condições for satisfeita,*

1.) *as curvaturas seccionais de M satisfazem*

$$K_M(x) \geq -F^2(\rho_M(x)), \quad \rho_M(x) = \mathrm{dist}_M(x_0, x)$$

onde $F \in C^1([0,\infty))$, $F(0) = 1$, $F' \geq 0$ e $\dfrac{1}{F} \notin L^1(+\infty)$, ou

2.) *a imersão $\varphi\colon M \to N$ é própria e vale a seguinte limitação para a curvatura radial ao longo das geodésicas partindo de $y_0 \in N$,*

$$K_N^{\mathrm{rad}}(y) \geq -\widetilde{F}^2(\rho_N(y))$$

onde $\rho_N(y) = \mathrm{dist}_N(y_0, y)$, $\widetilde{F}(0) = 1$, $\widetilde{F}' \geq 0$, e $\dfrac{1}{\widetilde{F}} \notin L^1(+\infty)$,

então, para $q = 1/trP_r$, o princípio do máximo q-fraco vale em M. Em particular, a r-curvatura média H_r e a $(r+1)$-curvatura média H_{r+1} de φ satisfazem

$$\sup_M \sqrt[r+1]{H_{r+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}\right) \geq \sqrt{A},$$

No Capítulo 3, estudamos propriedades tipo Liouville para um operador diferencial que é uma extensão natural do φ-Laplaciano em uma variedade Riemanniana M. Essencialmente, estudamos o seguinte operador

$$\mathcal{L}u = e^{\phi}\mathrm{div}(e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^{\sharp}),$$

onde $^{\sharp} : T^*M \to TM$ é o isomorfismo musical. Recentemente, Lira, Rigoli e Alías (2015) propuseram o estudo do operador acima em uma variedade Riemanniana completa M e conseguiram propriedades interessantes com gráficos de Killing, além de um princípio do máximo fraco. Nosso objetivo foi estudar o trabalho de Rigoli e Setti (2001) e procurar extensões naturais de resultados tipo-Liouville obtidos por eles, além de buscar aplicações geométricas para gráficos de Killing. Neste sentido, nosso ambiente de trabalho foi uma variedade Riemanniana completa. Como primeiro resultado importante, obtivemos para o operador $\mathcal{L}$ o seguinte teorema tipo L^p-Liouville para funções $\mathcal{L}$-subharmônicas em $(M, \langle,\rangle)$.

Teorema 1.3 *Seja $(M, \langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana completa e seja $u \in C^1$ uma função $\mathcal{L}$-subharmônica não-negativa. Suponha que $\varphi(x,0) = 0$, $\varphi(x,t) > 0$ para todo $t > 0$ e que $\varphi(x,t) \leq A(x)t^\delta$, para $t \geq 0$, algum $\delta > 0$ e $A(x) > 0$. Além disso, assuma que para algumas funções h_- e h_+ tem-se $0 < h_- \leq h \leq h_+$. Se $\inf_M \frac{h_-}{h_+}\frac{1}{A(x)^{1/\delta}} = \frac{1}{C_0^{1/\delta}}$ para algum $C_0 > 0$ e*

$$\left(\int_{\partial B_r} h_+(r)u^p e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} \notin L^1(+\infty) \tag{2}$$

para algum $p > \delta$, então u é constante.

Uma primeira consequência do Teorema 1.3 foi o seguinte corolário, que sob uma condição de crescimento polinomial da integral de h_+ sobre a esfera ∂B_t, obtemos um teorema tipo-Liouville. Essenciamente, provamos o seguinte.

Corolário 1.1 *Assuma o seguinte crescimento polinomial da integral abaixo*

$$\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi} \leq Cr^{\epsilon-1}, \tag{3}$$

para algum $\epsilon \geq 0, C > 0$ e r suficientimente grande. Seja $u \in C^1(M)$ uma função não-negativa $\mathcal{L}$-subharmônica em $(M, \langle,\rangle)$. Se para algumas funções contínuas h_- e h_+ tem-se $0 < h_- \leq h \leq h_+$ e existem $p > \delta$, $C_1 > 0$ tais que

$$u^p \leq C_1 r^{\delta-\epsilon+1}(\log r)^\delta, \tag{4}$$

para $r \gg 1$, então u é constante.

Uma segunda consequência do Teorema 1.3 é um resultado geométrico que classifica um gráfico de Killing como uma folha da folheação de Killing. Essencialmente, provamos o seguinte

Teorema 1.4 *Seja $\bar{M}$ uma variedade Riemanniana completa munida com um campo de Killing completo Y e seja M uma folha integral da folheação de Killing. Seja u uma função C^∞ não-negativa tal que*

$$u^p|Y|^2 \in L^1(M, dM), \quad \text{para} \quad p > 1. \tag{5}$$

Seja $\psi_u(x) = \Psi(x, u(x))$, $x \in M$, um gráfico de Killing em M tal que

$$|\nabla u| = O\left(\frac{1}{|Y|}\right) \quad \text{quando} \quad x \to \infty. \tag{6}$$

Se o vetor curvatura média aponta na mesma direção de Y, então u é constante e o gráfico é uma folha da folheação.

No Capítulo 4 estudamos hipersuperfícies em espaços com densidade, isto é, espaços do tipo $M_f = (M, \overline{g}, \overline{\mu})$, onde $\overline{\mu} = e^{-f} d\overline{\nu}$ e f é uma função suave em M. A origem do estudo acompanha a busca para resolver a conjectura de Yau para o primeiro autovalor do Laplaciano, i.e., $\lambda_1(\Delta) = n$ para uma hipersuperfície mínima fechada na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Em meados de 1983, Choi e Wang (1983) deram uma resposta parcial mostrando que se $\varphi : \Sigma^n \to M^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima compacta mergulhada numa variedade Riemanniana compacta com $Ric_M \geq k > 0$, então $\lambda_1(\Sigma) \geq k/2$. Anos depois, Barros e Bessa (1999) melhoraram a estimativa de Choi e Wang. Eles provaram que se $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima compacta mergulhada, então $\lambda_1(\Sigma) \geq n/2(1 + \rho(\varphi))$ para uma constante positiva $\rho(\varphi) \in (0, 1]$ dependendo da imersão.

Recentemente, estudando hipersuperfícies f-mínimas sobre espaços com densidade, Li e Wei (2015) mostraram que se $\varphi : \Sigma^n \to M^{n+1}$ é uma hipersuperfície f-mínima fechada mergulhada sobre uma variedade com densidade $(n+1)$-dimensional M com $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$, então o primeiro autovalor do f-Laplaciano satisfaz $\lambda_1^f(\Sigma) \geq k/2$. Entende-se por Ric_f o tensor definido por

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, f,$$

chamado de Bakry-Èmery tensor de Ricci, e f-Laplaciano por

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, u \rangle.$$

Seguindo o que foi provado por Li e Wei (2015), propomos melhorar a estimativa dada por eles e assim, obter uma estimativa tão ótima quanto à estimativa de Barros e Bessa 1999. Para isto, consideramos um problema auxiliar de Dirichlet do tipo

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_f w &= 0, \quad \text{em } \Omega_1 \\ w &= \xi, \quad \text{no } \partial\Omega_1 = \varphi(\Sigma), \end{cases} \tag{7}$$

onde ξ é a primeira autofunção para o problema de autovalores fechado

$$\Delta_f \xi + \lambda_1^f(\Sigma)\xi = 0$$

e Ω_1 será definido a posteriore. Assim, conseguimos um resultado que melhora a estimativa de Li e Wei 2015 e, além disso, obtemos uma desigualdade tipo-Poincaré em espaços com densidade, onde podemos observar que se vale a igualdade, então a conjectura de Yau vale em espaços com densidade. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.5 *Seja $\varphi : \Sigma^n \to M^{n+1}$ uma hipersuperfície f-mínima, fechada e mergulhada em uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional $(M, \overline{g}, e^{-f} d\overline{\nu})$ fechada e com densidade, tal que* $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$. *Seja $w : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ a solução do problema (7). Então* *i.)*

$$\frac{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} \geq k.$$

ii.) O primeiro autovalor não-nulo é limitado inferiormente por

$$\lambda_1^f \geq \frac{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} \left[1 - \sqrt{1 - k\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}}\right] > \frac{k}{2}.$$

Como uma consequência, mostramos uma estimativa de f-volume de uma superfície f-mínima fechada Σ^2 em uma variedade M^3 com densidade, tal que $\operatorname{Ric}_f \geq K > 0$ em termos da topologia de Σ^2. Provamos o seguinte.

Corolário 1.2 *Seja Σ^2 uma superfície f-mínima fechada de gênero γ mergulhada em uma variedade Riemanniana 3-dimensional M_f compacta com densidade, tal que $\operatorname{Ric}_f \geq k > 0$. Então*

$$\int_\Sigma d\mu \leq \frac{16\pi}{k(1+\delta(\varphi))}(1+\gamma)e^{\sup_M f}.$$

Ainda no Capítulo 4, propomos estudar em espaços com densidade uma desigualdade tipo Hientze-Karcher, onde impomos uma condição geométrica na curvatura do bordo da variedade. Em meados de 1987, Ros (1987) mostrou que se M é uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional compacta com bordo, com $\operatorname{Ric} \geq 0$ e se a curvatura média do bordo ∂M satisfaz $H > 0$ em toda parte, então

$$\int_{\partial M} \frac{1}{H} \geq (n+1)\operatorname{Vol}(M),$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, M é isométrica à bola Euclidiana. Uma consequência importante que Ros (1987) obteve foi o renomado Teorema de Alexandrov (1958) para curvaturas de ordem superior. Ele mostrou que se $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço Euclidiano com H_r constante, então $\varphi(M)$ é a esfera.

Nossa contribuição neste trabalho foi obter a desigualdade de Ros (1987) em espaços com densidade. A dificuldade encontrada foi impor a condição no tensor de Ricci-Bakry-Èmery. Obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.6 *Seja $\overline{\Omega}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana compacta com densidade e com bordo suave $\partial\overline{\Omega} = M$ tal que $\operatorname{Ric}_f \geq K^2$, onde $K = \max_{\overline{\Omega}} |\overline{\operatorname{grad}} f|$. Seja H_f a f-curvatura média do bordo M. Se H_f é positiva em toda parte, então*

$$\int_M \frac{1}{H_f} e^{-f} dM \geq \frac{n+2}{n+1}\operatorname{Vol}_f(\overline{\Omega}). \tag{8}$$

Se a igualdade ocorre, então $\overline{\Omega}$ é isométrica à bola Euclidiana.

Como consequência, obtemos um resultado tipo-Reilly (1980), ou seja, mostramos o seguinte.

Corolário 1.3 *Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta com densidade, com bordo $\partial M \neq \emptyset$ e $\mathrm{Ric}_f \geq K^2$, onde K é como no Teorema 1.6. Se a f-curvatura média do bordo satisfaz*

$$H_f \geq \frac{(n+1)A_f}{(n+2)V_f}$$

, então M é isométrica a uma bola Euclidiana.

No Capítulo 5 estudamos hipersuperfícies $\Sigma \hookrightarrow M$ mínimas, compactas e propriamente mergulhadas, com bordo livre, i.e., a curvatura média é nula e Σ toca o bordo ∂M ortogonalmente ao longo do bordo $\partial\Sigma$. Essencialmente, obordaremos o estudo do primeiro autovalor de Steklov com a intensão de melhorar uma estimativa dada por Fraser e Li (2014) e responder a um questionamento deixado em (Fraser, Li, 2014) para o primeiro autovalor de Steklov. A conjectura diz o seguinte.

"*Seja Σ uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada na bola unitária Euclidiana $\mathbb{B}^n$, com bordo livre em $\partial\mathbb{B}^n$. Então $\sigma_1(\Sigma) = 1$?*"

Neste trabalho, Frazer e Li (2014) propuseram-se a responder este questionamento e conseguiram uma resposta parcial. Eles mostraram que dada uma variedade Riemanniana M^n compacta, orientável, com bordo não-vazio, e suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e que o bordo ∂M é estritamente convexo com respeito ao normal interior. Seja $k > 0$, uma constante tal que a segunda forma fundamental do bordo satisfaz $A^{\partial M}(v,v) \geq k > 0$ para qualquer vetor unitário $v \in \partial M$. Se Σ é uma hipersuperfície mínima compacta propriamente mergulhada em M com bordo livre no ∂M e, ou Σ é orientável ou o primeiro grupo fundamental de M é finito, então o primeiro autovalor de Steklov satisfaz $\sigma_1(\Sigma) \geq k/2$. Com isto, um questionamento natural é a tentativa de melhorar a estimativa de Frazer e Li (2014)da mesma forma como Barros e Bessa (1999) estenderam a estimativa de Choi e Wang (1983). A resposta foi afirmativa, e agora temos uma resposta parcial próxima da conjectura citada acima. Provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.7 *Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, orientável e com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e que o bordo ∂M é estritamente convexo com respeito ao normal unitário interior. Seja $k > 0$ uma constante tal que $A^{\partial M}(v,v) \geq k > 0$ para qualquer vetor unitário v em ∂M.*

Seja $\varphi\colon \Sigma \to M$ uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada em M, com bordo livre em ∂M. Se Σ é orientável ou $\pi_1(M)$ é finito, então vale a desigualdade estrita

$$\sigma_1(\Sigma) > \frac{k}{2},$$

onde $\sigma_1(\Sigma)$ é primeiro autovalor não-nulo de Steklov da aplicação de Dirichlet-Neumann em Σ.

A busca de dar uma limitação para o primeiro autovalor de Steklov σ_1 teve início com Weinstock (1954), onde ele mostra que se Σ é um domínio simplesmente conexo e compacto, então $\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2\pi$. Isto foi estendido por Frazer e Shoen (2011) para superfícies Riemanniana arbitrárias com bordo, onde eles mostram que se Σ é uma superfície compacta de gênero g com γ componentes de bordo, então

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g+\gamma).$$

Neste sentido, obtemos como consequências do Teorema 1.7 os seguintes corolários.

Corolário 1.4 *Seja M^3 uma variedade Riemanniana 3-dimensional compacta, orientável e com bordo não-vazio ∂M. Suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e o bordo ∂M é estritamente convexo com respeito ao normal interior unitário. Seja $k > 0$ uma constante tal que $A^{\partial M}(v,v) \geq k > 0$ para qualquer vetor unitário v em ∂M. Seja $\varphi\colon \Sigma^2 \to M^3$ uma superfície mínima propriamente mergulhada, compacta de gênero g com γ componentes de bordo com comprimento total $L(\partial\Sigma)$ e bordo livre em ∂M. Então*

$$L(\partial\Sigma) < \frac{4\pi}{k}(g+\gamma). \tag{9}$$

Corolário 1.5 *Seja Σ uma superfície mínima, compacta e propriamente mergulhada na bola unitária B^3, com bordo livre em ∂B^3. Então $L(\partial\Sigma) < 4\pi(g+\gamma)$.*

Corolário 1.6 *Seja Σ uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada na bola unitária B^n, com bordo livre em ∂B^n. Então $\sigma_1 > \frac{1}{2}$.*

2 ESTIMATIVA DE CURVATURA DE ORDEM SUPERIOR

Neste capítulo estudamos o operador tipo traço L_r, e estendemos um resultado de Albanese, Alías e Rigoli (2013) para hipersuperfícies isometricamente imersas em uma horobola (veja (Cunha, Medeiros, 2015)). A ferramenta básica para tal extensão é um princípio do máximo fraco de Omori-Yau mais geral, estabelecido em (Albanese, Alías, Rigoli, 2013). A intenção do estudo foi motivada por um trabalho devido a (Alías, Dajczer, Rigoli, 2013), onde foi provado uma estimativa de curvatura de ordem superior para hipersuperfícies isometricamente imersas em uma bola geodésica.

2.1 O q-Omori-Yau fraco para o operador L_r

Iniciamos esta seção com algumas definições necessárias à compreensão do conteúdo deste capítulo. Para tanto, seja $\varphi : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica two-sided de uma variedade Riemanniana completa M^n em uma variedade Riemanniana N^{n+1}. Uma vez que a imersão é two-sided, podemos tomar um campo de vetores normal unitário η globalmente definido ao longo de φ. Seja $A_\eta(X) = -\overline{\nabla}_X\eta$, $X \in TM$, a segunda forma fundamental da imersão com respeito a η, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de N. Sabemos que os autovalores $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ de A são as curvaturas principais da hipersuperfície $\varphi(M)$. Com isto, podemos definir as funções simétricas elementares S_r das curvaturas principais por $S_0 = 1$ e para $1 \le r \le n$ por

$$S_r = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \kappa_{i_1}\cdots\kappa_{i_r}. \tag{10}$$

Desta forma, a r-ésima curvatura média de ordem superior tem a seguinte definição.

Definição 2.1 *A r-ésima função curvatura média de ordem superior H_r é definida por*

$$\binom{n}{r} H_r = S_r.$$

Podemos observar que $H_0 = 1$ e $H_1 = \frac{1}{n}S_1 = \frac{1}{n}tr(A) = H$, a função curvatura média de φ.

Uma outra ferramenta de interesse em nosso estudo são os tensores de Newton $P_r : TM \to TM$, definidos por $P_0 = I$ e indutivamente por

$$P_r = S_r I - AP_{r-1},$$

de forma que $P_r(x) : T_xM \to T_xM$ é um operador linear auto-adjunto com os mesmos autovetores de A. Fixando um ponto $x \in M$, seja $e_1, \dots, e_n$ uma base ortonormal diagonalizando $A(x)$, com autovalores λ_j. Seja $A_j(x) = A(x)|_{e_j^\perp} : e_j^\perp \to e_j^\perp$ e $S_k(A_j)$ a k-ésima função simétrica associada a A_j, onde $k \le n-1$.

O lema a seguir retrata três propriedades bem conhecidas na literatura (1997) e que serão úteis na demonstração do Teorema 2.4.

Lema 2.1 *As seguinte identidades são válidas para cada* $r = 1, \ldots, n-1$.

(*a*) $P_r(e_j) = S_r(A_j)e_j$, para $j = 1, \ldots, n$;

(*b*) $tr(P_r) = \sum_{j=1}^{n} S_r(A_j) = (n-r)S_r = c_r H_r$;

(*c*) $tr(AP_r) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_r(A_j) = (r+1)S_{r+1} = c_r H_{r+1}$,

onde

$$c_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}.$$

Dada uma função $u \in C^2(M)$ e um campo $X \in TM$, definimos o operador simétrico hess$u : TM \to TM$ por

$$\text{hess } u(X) = \nabla_X \operatorname{grad} u, \tag{11}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M. Assim, fica bem definido a forma bilinear simétrica $\operatorname{Hess} u \colon TM \times TM \to C^\infty(M)$, dada por

$$\operatorname{Hess} u(X,Y) = \langle \text{hess } u(X), Y \rangle. \tag{12}$$

Definição 2.2 *Associado a cada tensor de Newton P_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem auto-adjunto $L_r \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, definido por*

$$L_r(u) = tr(P_r \text{hess } u) = \operatorname{div}(P_r \operatorname{grad} u) - \langle tr(\nabla P_r), \operatorname{grad} u \rangle. \tag{13}$$

Uma vez que a divergência do tensor P_r é dada por

$$(\operatorname{div} P_r)(Y) = tr(X \to (\nabla P_r)(X,Y)),$$

podemos ver o operador (13) como sendo

$$L_r(u) = tr(P_r \text{hess } u) = \operatorname{div}(P_r \operatorname{grad} u) - \langle \operatorname{div} P_r, \operatorname{grad} u \rangle. \tag{14}$$

É importante observar que os operadores L_r são elípticos (semi-elípticos) se, e somente se, os operadores P_r são positivo definidos (semi-definidos).

Para nossos propósitos, necessitaremos de uma versão do princípio do máximo fraco de Omori-Yau para o operador L_r. Voltando brevemente ao histórico do princípio do máximo, em (Omori, 1967), verificou-se que em uma variedade Riemanniana aberta M com curvatura seccional limitada inferiormente, $K \geq C > -\infty$, e para qualquer função

$u \in C^2(M)$ com $u^* = \sup_M u < \infty$, existe uma sequência $(x_k)_{k\geq 1}$ em M satisfazendo

$$i.)\ u(x_k) > u^* - 1/k, \quad ii.)\ |\operatorname{grad} u|(x_k) < 1/k, \quad iii.)\ \triangle u(x_k) < 1/k\,. \tag{15}$$

Em seguida, o resultado acima foi estendido a variedades Riemannianas com curvatura de Ricci limitada inferiormente, $\mathrm{Ric}_M \geq C > -\infty$, no trabalho de Yau (1975). Com isto, esses resultados ficaram conhecidos como o *princípio do máximo de Omori-Yau.*

Mais recentemente, o princípio do máximo de Omori-Yau foi estudado por Pigola, Rigoli e Setti (2005) com uma abordagem diferente e, assim, eles o estenderam a classes maiores de variedades e operadores (2005, Observação 1.2 e Exemplos 1.13, 1.14). Eles mostraram que, se existe uma função suave e própria $\gamma \in C^2(M)$ satisfazendo certas propriedades, onde M é uma variedade aberta, então vale o princípio do máximo de Omori-Yau em M (2005, Teorema 1.9).

Em muitas aplicações geométricas, a condição *ii.)* no princípio do máximo de Omori-Yau não é necessária (veja 2005, Teorema 1.15). Isto motivou Pigola, Rigoli e Setti (2003, 2005) a introduzir o conceito de *princípio do máximo fraco*, com na próxima definição.

Definição 2.3 *O princípio do máximo fraco vale em uma variedade Riemanniana M se, para qualquer função $u \in C^2(M)$ com $u^* < \infty$, existe uma sequência $(x_k)_{k\geq 1}$ em M satisfazendo às condições*

$$i.)\ u(x_k) > u^* - 1/k, \qquad ii.)\ \triangle u(x_k) < 1/k.$$

Neste sentido, Alías, Dajczer e Rigoli (2013) introduziram uma versão mais geral do princípio do máximo fraco para o operador L_r. Mais precisamente, dada uma variedade Riemanniana M e um operador linear semi-elíptico $L_r(u) = tr(P_r \mathrm{hess} u)$, onde $u \in C^2(M)$, seja $q \in C^0(M)$ uma função não-negativa tal que $q > 0$ fora de um compacto.

Definição 2.4 *O princípio do máximo q-fraco no infinito vale em M se, para qualquer função $u \in C^2(M)$ com $u^* := \sup_M u < \infty$, existe uma sequência $(x_k)_{k\geq 1}$ em M tal que*

$$i.)\ u(x_k) > u^* - 1/k, \quad ii.)\ q(x_k) \cdot L_r u(x_k) < 1/k. \tag{16}$$

Observação 2.1 A função u necessita ser suave apenas em vizinhanças dos pontos x_k. Isto foi observado em (Pigola, Rigoli, Setti, 2005, Observação 1.11).

Tendo definido o princípio do máximo q-fraco, Alías, Dajczer e Rigoli (2013) estenderam estimativas de curvatura média de Jorge e Xavier (1981) e estimativas de curvatura média de ordem superior de Ranjbar-Motlagh (2001). Mais precisamente, eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 2.1 (Alías-Dajczer-Rigoli, 2013) *Seja $\varphi\colon M^n \hookrightarrow N^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional*

N. Suponha que:

i.) *As curvaturas seccionais de N são limitadas superiormente, $K_N \leq b$.*

ii.) *$\varphi(M) \subset B_N(R)$, onde $B_N(R)$ é uma bola geodésica de N com centro em p e raio $R < \min\{\mathrm{inj}_N(p), \pi/(2\sqrt{b})\}$. Aqui $\mathrm{inj}_N(p)$ é o raio de injetividade de N em p e $\pi/(2\sqrt{b})$ é substituído por $+\infty$, caso $b \leq 0$.*

iii.) *As curvaturas seccionais de M são limitadas inferiormente como segue:*

$$K_M(x) \geq -F^2(\rho_M(x)), \quad \rho_M(x) = \mathrm{dist}_M(x_0, x),$$

onde $F \in C^1([0,\infty))$, $F(0) = 1$, $F' \geq 0$ e $\dfrac{1}{F} \notin L^1(+\infty)$.

iv.) *$H_{r+1} \neq 0$ em M, para algum $2 \leq r \leq n-1$.*

Se $\varphi(M)$ tem um ponto elíptico, então

$$\sup_M \sqrt[j+1]{H_{j+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{j+1}}{H_j}\right) \geq C_b(R), \quad 1 \leq j \leq r\,. \tag{17}$$

Aqui,

$$C_b(t) = \begin{cases} \sqrt{b}\cot\sqrt{b}t, & se \quad b > 0 \\ 1/t, & se \quad b = 0 \\ \sqrt{-b}\coth\sqrt{-b}t, & se \quad b < 0. \end{cases}$$

Além disso, se existe $p_0 \in M$, tal que $\varphi(p_0) \in \partial B_N(R)$ e $\sup_M \left(\dfrac{H_{j+1}}{H_j}\right) = C_b(R)$, para algum $1 \leq j \leq r$, então $\varphi(M) = \partial B_N(R)$.

A hipótese de $\varphi(M)$ ter um ponto elíptico significa que existe um ponto $p_0 \in M$ tal que a segunda forma fundamental de φ em p_0, com respeito à orientação apontando para o interior é positiva definida.

Uma versão do Teorema 2.1 foi obtido por Albanese, Alías e Rigoli (2013) para hipersuperfícies contidas em cones não-degenerados de $\mathbb{R}^{n+1}$. Eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 2.2 (Albanese-Alías-Rigoli, 2013) *Seja $\varphi\colon M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Suponha que*

i.) *$\varphi(M)$ está contida em um cone não-degenerado, i.e.*

$$\varphi(M) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, v, a) = \left\{tw : \, t \geq 0, \, w \in \mathbb{R}^{n+1}, \, |w| = 1, \, \langle v, \, w\rangle \geq a \in (0,1)\right\}.$$

ii.) *As curvaturas seccionais de M são limitadas inferiormente como segue:*

$$K_M(x) \geq -F^2(\rho_M(x)), \quad \rho_M(x) = \mathrm{dist}_M(x_0, x),$$

onde $F \in C^1([0,\infty))$, $F(0) = 1$, $F' \geq 0$ e $\dfrac{1}{F} \notin L^1(+\infty)$.

iii.) *$H_{r+1} \neq 0$ em M, para algum $2 \leq r \leq n-1$.*

Se $\varphi(M)$ tem um ponto elíptico, então

$$\sup_M \sqrt[j+1]{H_{j+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{j+1}}{H_j}\right) \geq \frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}} \cdot \frac{a^2}{\mathrm{dist}(v^\perp, \varphi(M))} > 0, \;\; 1 \leq j \leq r. \tag{18}$$

Aqui $\mathrm{dist}(v^\perp, \varphi(M))$ *é a distância entre* $\varphi(M)$ *e o hiperplano* $v^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ortogonal a* v *e passando pela origem.*

A distância de $\varphi(M)$ ao hiperplano $v^\perp$ descrita no teorema acima é definida por

$$\mathrm{dist}(v^\perp, \varphi(M)) = \inf_{x_0 \in M} \langle \varphi(x_0), v \rangle.$$

2.2 Imersões em horobolas

Esta seção contém o teorema principal deste capítulo e aborda essencialmente o estudo de hipersuperfícies contidas em uma horobola. Como visto na Seção 2.1, Alías, Dajczer e Rigoli (2013) estudaram hipersuperfícies contidas em uma bola geodésica B_R de uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e com isto, conseguiram provar o Teorema 2.1. Prosseguindo, Albanese, Alías e Rigoli (2013) estudaram hipersuperfícies isometricamente imersas em cones não-degenerados de $\mathbb{R}^{n+1}$ e, assim, estenderam o Teorema 2.1. Nosso objetivo será estudar hipersuperfícies contidas em horobolas, e com isto, obter estimativas semelhantes às citadas acima.

Necessitaremos de algumas definições básicas para compreender a relevância de um resultado para outro e assim, estabelecer os critérios necessários para a prova do nosso teorema. Para isto, seja N uma variedade de Cartan-Hadamard, i.e., uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional não-positiva.

Definição 2.5 *Uma geodésica* $\sigma : [0, +\infty) \to N$*, parametrizada pelo comprimento de arco, é chamada um raio se, para* $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$*,*

$$d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|.$$

É importante observar que, se N é completa e não-compacta, então para todo $o \in N$ existe um raio σ tal que $\sigma(0) = o$ (veja 2008, Exercício, Cap. 07).

Definição 2.6 *Seja* $\sigma \colon [0, +\infty) \to N$ *um raio geodésico partindo de* $\sigma(0) = o$*. A função de Busemann de* N *com respeito a* σ *é a função* $b_\sigma \colon N \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$b_\sigma(x) = \lim_{t \to +\infty} b_{\sigma(t)}(x),$$

onde, para $t \geq 0$*,*

$$b_{\sigma(t)}(x) = \rho_{\sigma(t)}(x) - \rho_{\sigma(t)}(o) = \rho_{\sigma(t)}(x) - t,$$

e $\rho_p(x) = d(p, x)$ *denota a função distância de* N*, a partir de um ponto* p*.*

O campo gradiente de uma função de Busemann tem uma propriedade interessante, semelhante com o campo gradiente de uma função distância. O próximo lema explicita tal propriedade.

Lema 2.2 *A função de Busemann b_σ é convexa e seu campo gradiente satisfaz $|\nabla b_\sigma| = 1$.* Para uma prova veja (1992, Lema 4.12).

Uma vez que $t \mapsto b_{\sigma(t)}(x)$ é monótona decrescente e limitada por $|b_{\sigma(t)}(x)| \leq \rho_o(x)$, temos que o limite $b_\sigma(x)$ existe e é finito. Além disso, uma vez que N é de Cartan-Hadamard, foi provado em (Eberlein, 1977) que b_σ é de classe C^2. Para mais detalhes sobre funções de Busemann recomendamos ao leitor as referências (2015, 1992).

Necessitamos do seguinte lema de comparação do Hessiano de b_σ, devido a Bessa, Lira, Pigola, e Setti (2015).

Lema 2.3 *Assuma que a curvatura seccional K_N de N satisfaz*

$$-B \leq K_N \leq -A,$$

para contantes $B \geq A > 0$. Então,

$$\sqrt{A}(g_N - db_\sigma \otimes db_\sigma) \leq \text{Hess } b_\sigma \leq \sqrt{B}(g_N - db_\sigma \otimes db_\sigma),$$

no sentido de formas quadráticas.

A fim de enunciarmos nosso resultado precisamos, ainda, da seguinte definição.

Definição 2.7 *Uma* **horobola** *em N é a região definida por*

$$\mathcal{B}_{\sigma,R} = \{b_\sigma \leq R\},$$

onde $R > 0$ e b_σ é a função de Busemann com respeito ao raio σ.

Observação 2.2 *Observemos que as funções de Busemann, no caso do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, são as funções afim e as horobolas são os semi-espaços. Além disso, temos também que os cones não-degenerados de uma variedade de Cartan-Hadamard N estão contidos em horobolas de N.*

De posse dos conceitos anteriores, agora podemos enunciar e provar o resultado principal deste capítulo (veja 2015).

Teorema 2.3 *Seja $\varphi\colon M^n \hookrightarrow N^{n+1}$ uma imersão isométrica two-sided de uma variedade Riemanniana aberta n-dimensional M em uma variedade de Cartan-Hadamard $(n+1)$-dimensional N, com curvatura seccional $-B \leq K_N \leq -A$, para certas contantes $B \geq A > 0$. Suponha que $H_{r+1} \neq 0$ em M, para algum $2 \leq r \leq n-1$, e que $\varphi(M)$ tem um ponto elíptico. Se a imersão estiver contida em uma horobola, i.e., $\varphi(M) \subset \mathcal{B}_{\sigma,R}$, e uma das seguintes condições for satisfeita,*

1.) *as curvaturas seccionais de M satisfazem*

$$K_M(x) \geq -F^2(\rho_M(x)), \quad \rho_M(x) = \text{dist}_M(x_0, x),$$

onde $F \in C^1([0,\infty))$, $F(0)=1$, $F' \geq 0$ *e* $\dfrac{1}{F} \notin L^1(+\infty)$, *ou*

2.) *a imersão* $\varphi\colon M \to N$ *é própria e vale a seguinte limitação para a curvatura radial ao longo das geodésicas partindo de* $y_0 \in N$,

$$K_N^{\mathrm{rad}}(y) \geq -\widetilde{F}^2(\rho_N(y)), \tag{19}$$

onde $\rho_N(y) = \mathrm{dist}_N(y_0, y)$, $\widetilde{F}(0)=1$, $\widetilde{F}' \geq 0$, *e* $\dfrac{1}{\widetilde{F}} \notin L^1(+\infty)$,

então a r*-curvatura média* H_r *e a* $(r+1)$*-curvatura média* H_{r+1} *de* φ *satisfazem*

$$\sup_M \sqrt[r+1]{H_{r+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}\right) \geq \sqrt{A}. \tag{20}$$

Lembre-se de que uma imersão ser two-sided significa que existe um campo normal unitário globalmente definido.

Para provar o Teorema 2.3, primeiramente provaremos um resultado mais geral, onde assumimos a validade do princípio do máximo q-fraco em M em vez de assumir as condições 1.) e 2.) acima. Então, mostramos que as condições 1.) e 2.) implicam a validade do princípio do máximo q-fraco em M, para uma função q adequada. Provamos o seguinte.

Teorema 2.4 *Seja* $\varphi\colon M^n \hookrightarrow N^{n+1}$ *uma imersão isométrica two-sided de uma variedade Riemanniana aberta* n*-dimensional* M *em uma variedade de Cartan-Hadamard* N*, com curvatura seccional* $-B \leq K_N \leq -A$*, para certas constantes* $B \geq A > 0$*. Suponha que* $H_{r+1} \neq 0$ *em* M*, para algum* $2 \leq r \leq n-1$*, que* $\varphi(M)$ *tem um ponto elíptico e que* $\varphi(M) \subset \mathcal{B}_{\sigma,R}$*. Se o princípio do máximo* q*-fraco vale em* M*, para* $q = 1/\mathrm{tr}P_r$*, então a* r*-curvatura* H_r *e a* $(r+1)$*-curvatura* H_{r+1} *de* φ *satisfazem*

$$\sup_M \sqrt[r+1]{H_{r+1}} \geq \sup_M \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}\right) \geq \sqrt{A}. \tag{21}$$

Demonstração: Consideremos as funções $h_A(t) = e^{\sqrt{A}t}$ e $\phi_A(t) = \int_0^t h_A(s)ds$. Observe que $\phi_A''(t) - \sqrt{A}\phi_A'(t) = 0$. Defina a função $f\colon \mathcal{B}_{\sigma,R} \subset N \to \mathbb{R}$ por

$$f(y) = \phi_A \circ b_\sigma(y),$$

onde b_σ é uma função de Busemann em N.

Defina $u\colon M \to \mathbb{R}$ por $u(x) = f \circ \varphi(x)$. Veja que $u \in C^2(M)$ (veja 1977) e $u^* = \sup_M u < \infty$, pois a imersão está contida em uma horobola e $\phi_A(t)$ é crescente.

Por hipótese, o princípio do máximo q-fraco vale em M, logo existe uma sequência $(x_k)_{k\geq 1}$ em M, tal que $u(x_k) \to u^*$ e $q(x_k) \cdot L_r u(x_k) < 1/k$. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base ortonormal de T_xM, tal que $P_r(e_i) = \mu_i e_i$, $\mu_i \geq 0$.

Como a imersão é isométrica, temos que $\mathrm{grad}\, f = \mathrm{grad}\, u + \langle \mathrm{grad}\, f, \eta\rangle \eta$. Com isto, a equação de Gauss implica a seguinte expressão

$$\operatorname{Hess}_M u(e_i, P_r(e_i)) = \operatorname{Hess}_N f(e_i, P_r(e_i)) + \langle \operatorname{grad} f, \eta\rangle \langle II(e_i), P_r(e_i)\rangle. \tag{22}$$

Aqui, II significa a segunda forma fundamental da imersão. Além disso, a Hessiana de f é dada por

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess}_N f(e_i, e_i) &= \operatorname{Hess}_N (\phi_A \circ b_\sigma)(e_i, e_i) = \langle \nabla_{e_i} \operatorname{grad}(\phi_A \circ b_\sigma), e_i\rangle \\
&= \phi_A'(b_\sigma)\langle \nabla_{e_i} \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle + \langle e_i(\phi_A'(b_\sigma)) \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle \\
&= \phi_A'(b_\sigma) \operatorname{Hess}_N b_\sigma(e_i, e_i) + e_i(\phi_A'(b_\sigma))\langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle \\
&= \langle \operatorname{grad}(\phi_A'(b_\sigma)), e_i\rangle\langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle + \phi_A'(b_\sigma) \operatorname{Hess}_N b_\sigma(e_i, e_i) \\
&= \phi_A''(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle^2 + \phi_A'(b_\sigma) \operatorname{Hess}_N b_\sigma(e_i, e_i).
\end{aligned} \tag{23}$$

Combinando as expressões (22), (23) e a definição de L_r, obtemos

$$\begin{aligned}
L_r(u) &= \operatorname{tr}(P_r \operatorname{hess}_M u) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r \operatorname{hess}_M u(e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{hess}_M u(e_i), P_r(e_i)\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
L_r(u) &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Hess}_M u(e_i, P_r(e_i)) \\
&= \sum_{i}^{n} [\operatorname{Hess}_N f(e_i, P_r(e_i)) + \langle \operatorname{grad} f, \eta\rangle\langle II(e_i), P_r(e_i)\rangle] \\
&= \sum_{i}^{n} \mu_i \operatorname{Hess}_N f(e_i, e_i) + \langle \operatorname{grad} f, \eta\rangle\langle II(e_i), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i}^{n} \mu_i \left[\phi_A''(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle^2 + \phi_A'(b_\sigma) \operatorname{Hess}_N b_\sigma(e_i, e_i)\right] \\
&\quad + \sum_{i}^{n} \phi_A'(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, \eta\rangle\langle II(e_i), P_r(e_i)\rangle.
\end{aligned} \tag{24}$$

Uma vez que $-B \leq K_N \leq -A$, o Teorema de Comparação do Hessiano de b_σ (Lema 2.3) implica

$$\operatorname{Hess}_N b_\sigma(e_i, e_i) \geq \sqrt{A}\left\{\langle e_i, e_i\rangle - \langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle^2\right\}.$$

Assim, usando o fato que $\phi_A''(t) - \sqrt{A}\phi_A'(t) = 0$, obtemos da expressão (24) que

$$\begin{aligned}
L_r(u) &= \sum_i^n \mu_i \left[\phi''_A(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle^2 + \phi'_A(b_\sigma)\operatorname{Hess}_N b_\sigma(e_i,e_i)\right] \\
&\quad + \sum_i^n \phi'_A(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, \eta\rangle\langle II(e_i), P_r(e_i)\rangle \\
&\geq \sum_i^n \mu_i \left[\phi''_A(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle^2 + \phi'_A(b_\sigma)\left(\sqrt{A}\left\{\langle e_i,e_i\rangle - \langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle^2\right\}\right)\right] \\
&\quad + \sum_i^n \phi'_A(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, \eta\rangle\langle II(e_i), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_i^n \mu_i \left(\phi''_A(b_\sigma) - \sqrt{A}\phi'_A(b_\sigma)\right)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, e_i\rangle^2 + \sum_i^n \mu_i \phi'_A(b_\sigma)\sqrt{A} \\
&\quad + \sum_i^n \phi'_A(b_\sigma)\langle \operatorname{grad} b_\sigma, \eta\rangle\langle II(e_i), P_r(e_i)\rangle \\
&= \phi'_A(b_\sigma)\left[\sqrt{A}\sum_i^n \mu_i + \langle \operatorname{grad} b_\sigma, \eta\rangle \sum_i^n \langle e_i, IIP_r(e_i)\rangle\right] \\
&= \phi'_A(b_\sigma)\left[\sqrt{A}tr(P_r) + \langle \operatorname{grad} b_\sigma, \eta\rangle tr(IIP_r)\right] \\
&\geq \phi'_A(b_\sigma)\cdot c_r \cdot \left[\sqrt{A}H_r - H_{r+1}\right],
\end{aligned}$$

onde, na última passagem, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o Lema 2.2 e o Lema 2.1. Como $q = 1/c_r H_r$, segue que

$$q(x)L_r(u(x)) \geq \phi'_A(b_\sigma(\varphi(x)))\cdot\left[\sqrt{A} - \frac{H_{r+1}}{H_r}(\varphi(x))\right].$$

Aplicando a expressão acima em x_k (para k suficientemente grande) e usando o fato de que $q(x_k)L_r u(x_k) \leq 1/k$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} &\geq \phi'_A(b_\sigma(\varphi(x_k)))\cdot\left[\sqrt{A} - \frac{H_{r+1}}{H_r}(\varphi(x_k))\right] \\
&\geq \phi'_A(b_\sigma(\varphi(x_k)))\cdot\left[\sqrt{A} - \sup_M \frac{H_{r+1}}{H_r}\right] \\
&\geq \phi'_A(b_0)\cdot\left[\sqrt{A} - \sup_M \frac{H_{r+1}}{H_r}\right],
\end{aligned} \tag{25}$$

onde b_0 é uma cota inferior para b_σ. Fazendo $k \to \infty$, obtemos que

$$\sup_M \frac{H_{r+1}}{H_r} \geq \sqrt{A}.$$

Por fim, a desigualdade de Gärding (1959, 2004) implica que

$$H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}},$$

ou seja

$$\frac{1}{H_r} \leq \frac{1}{\left(H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}\right)^r} = H_{r+1}^{-\frac{r}{r+1}} = H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}-1} = H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}} H_{r+1}^{-1} = \sqrt[r+1]{H_{r+1}} H_{r+1}^{-1}.$$

Logo,

$$\frac{H_{r+1}}{H_r} \leq \sqrt[r+1]{H_{r+1}}.$$

Isto prova a desigualdade (21) e finaliza a prova do Teorema 2.4.

De posse do Teorema 2.4, para provar o Teorema 2.3 precisamos do seguinte critério de suficiência devido a Albanese, Alías e Rigoli, no espírito de (2005, Teorema. 1.9), para a validade do princípio do máximo q-fraco.

Teorema 2.5 (Albanese-Alías-Rigoli, 2013) *Seja M uma variedade Riemanniana aberta e seja $P\colon TM \to TM$ um tensor simétrico positivo (semi)-definido. Considere o operador linear (semi)-elíptico $L = tr(P_r \text{hess})$. Seja $q \in C^0(M)$ uma função contínua e não-negativa, com $q > 0$ fora de um conjunto compacto. Uma condição suficiente para a validade do princípio do máximo q-fraco para L é a existência de uma função $\gamma \in C^2(M)$ satisfazendo as seguinte propriedades:*

$$i.)\, \gamma(x) \to +\infty \text{ quando } x \to \infty \text{ em } M \quad ii.)\, |\nabla\gamma| \leq B \cdot F(\gamma) \quad iii.)\, qL(\gamma) \leq C \cdot F(\gamma),$$

onde ii.) e iii.) valem no complemento de um conjunto compacto, $B, C > 0$ são constantes positivas e F é uma função suave em $[0, \infty)$, satisfazendo

$$F(0) > 0, \quad F' \geq 0, \quad 1/F \notin L^1(+\infty). \tag{26}$$

Usando o Teorema 2.5, mostraremos que as hipóteses do Teorema 2.3 implicam a validade do princípio do máximo q-fraco para L_r e, assim, pelo Teorema 2.4, teremos a estimativa (20). Vejamos, a seguir, a prova do Teorema 2.3.

Prova do Teorema 2.3: Podemos assumir que M é não-compacta, pois, do contrário, o princípio do máximo q-fraco seria trivialmente satisfeito.

Assumiremos primeiro que vale a condição 1.). Neste caso, $K_M^{\text{rad}}(x) \geq -C^2 \cdot F^2(\rho_M(x))$, onde F é uma função em $[0, \infty)$ satisfazendo (26). Queremos uma função $\gamma \in C^2(M)$, satisfazendo $i.)$, $ii.)$ e $iii.)$ do Teorema 2.5. Portanto, considere a função $\gamma = \rho_M$, onde $\rho_M(x) = \text{dist}_M(x_0, x)$. Fazendo $F^2(\rho_M) = G(\rho_M)$ e $K_M^{\text{rad}}(x) \geq -C^2 G(\rho_M)$, o Teorema de Comparação do Hessiano (1979, 2005, Exemplo

1.14) implica que existe $C' > 0$ tal que

$$\mathrm{Hess}_M(\rho_M^2) \leq C'\rho_M G(\rho_M)^{1/2}\langle , \rangle = C'\rho_M F(\rho_M)\langle , \rangle.$$

Por outro lado, sendo $(e_1, \ldots, e_n)$ a base ortonormal cosiderada anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_M(\rho_M^2)(e_i, e_i) &= \langle \nabla_{e_i} \operatorname{grad} \rho_M^2, e_i\rangle = 2\langle \nabla_{e_i} \rho_M \operatorname{grad} \rho_M, e_i\rangle \\
&= 2\{\rho_M \cdot \mathrm{Hess}_M\, \rho_M(e_i, e_i) + \langle \operatorname{grad} \rho_M, e_i\rangle^2\} \\
&\geq 2\rho_M \cdot \mathrm{Hess}_M\, \rho_M(e_i, e_i).
\end{aligned}$$

Portanto, existe $C' > 0$ tal que

$$\mathrm{Hess}\, \rho_M(\, , \,) \leq C' \cdot F(\rho_M)\langle \, , \, \rangle,$$

fora de um compacto. Logo, exigindo, ademais que $(e_1, \ldots, e_n)$ diagonalize P_r em x, com $P_r e_i = \mu_i e_i$, segue do fato de P_r ser não negativo que, em x,

$$\begin{aligned}
L_r(\gamma) &= tr(P_r \mathrm{hess}_M \gamma) \\
&= \sum_i^n \langle P_r \mathrm{hess}_M \gamma(e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_i^n \langle \mathrm{hess}_M \gamma(e_i), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \mu_i\, \mathrm{Hess}\, \rho_M(e_i, e_i) \\
&\leq C' \cdot F(\rho_M) tr P_r.
\end{aligned}$$

Uma vez que $q(x) = 1/trP_r(x)$, temos que $\gamma(x) \to +\infty$ quando $x \to \infty$, $|\operatorname{grad} \gamma| = 1$ e $q(x)L_r\gamma(x) \leq C \cdot F(x)$, onde $C = C'$ se $F \neq$ constante e $C = C'/F$ se $F =$ constante. Assim, as condições $i.$), $ii.$) e $iii.$) do Teorema (2.5) são satisfeitas.

Assumindo a condição 2.), temos que, nesse caso, a imersão φ é própria e as curvaturas radiais satisfazem

$$K_N^{\mathrm{rad}}(y) \geq -\widetilde{F}^2(\rho_N(y)),$$

onde $\widetilde{F}(0) = 1$, $\widetilde{F}' \geq 0$, e $\dfrac{1}{\widetilde{F}} \notin L^1(+\infty)$. Considere a função

$$\zeta(t) = \int_0^t \frac{ds}{\widetilde{F}(s)},$$

e defina

$$\gamma(x) = (\zeta \circ \rho_N) \circ \varphi \colon M \to \mathbb{R}.$$

A condição $\dfrac{1}{\widetilde{F}} \notin L^1(+\infty)$ implica

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{\widetilde{F}(s)} ds = +\infty.$$

Assim, sendo φ própria, obtemos $\gamma(x) \to +\infty$ quando $x \to \infty$ em M, e a condição *i.*) é satisfeita. Agora, observe que

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} \gamma(x)| &= |\operatorname{grad}(\zeta(\rho_N \circ \varphi))| \\ &= |\zeta'(\rho_N \circ \varphi) \operatorname{grad}(\rho_N \circ \varphi)| \\ &= \left| \frac{1}{\widetilde{F}(\rho_N(\varphi(x)))} \right| |\operatorname{grad}(\rho_N(\varphi(x)))|; \end{aligned}$$

assim, temos

$$|\operatorname{grad} \gamma(x)| = \frac{1}{\widetilde{F}(\rho_N(\varphi(x)))}.$$

A condição $\widetilde{F}' \geq 0$ implica que $\widetilde{F}$ é não-decrescente, logo, $\widetilde{F}(\rho_N(\varphi)) \geq \widetilde{F}(0)$. Substituindo isto na expressão acima, obtemos

$$|\operatorname{grad} \gamma(x)| \leq \frac{1}{\widetilde{F}(0)} \leq \Lambda,$$

para uma constante adequada $\Lambda > 0$ e x fora de um compacto. Portanto, a condição *ii.*) é satisfeita. Para mostrar que a condição *iii.*) é satisfeita, precisamos calcular $L_r(\gamma)$ em $x \in M$ e para $\rho_M(x) \gg 1$. Para isto, seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base ortonormal de T_xM, tal que $P_r(e_i) = \mu_i e_i$ em x, com $\mu_i \geq 0$. Usando a condição $K_N^{\mathrm{rad}}(y) \geq -\widetilde{F}^2(\rho_N(y))$, vimos, pelo Teorema de Comparação do Hessiano que existe $C' > 0$ tal que

$$\operatorname{Hess}_N \rho_N(e_i, e_i) \leq C' \cdot \widetilde{F}(\rho_N)$$

fora de um compacto. Como $\zeta'(\rho_N) = 1/\widetilde{F}(\rho_N)$, obtemos

$$\zeta'(\rho_N) \operatorname{Hess}_N \rho_N(e_i, e_i) \leq C'. \tag{27}$$

Observe ainda que, sendo $\widetilde{F}' \geq 0$, temos

$$\zeta''(t) = -\frac{\widetilde{F}'(t)}{\widetilde{F}(t)^2} \leq 0. \tag{28}$$

Portanto, em x,

$$\begin{aligned}
L_r(\gamma) &= tr(P_r \mathrm{hess}_M \gamma) \\
&= \sum_i^n \langle P_r \mathrm{hess}_M \gamma(e_i), e_i \rangle \\
&= \sum_i^n \langle \mathrm{hess}_M \gamma(e_i), P_r(e_i) \rangle \\
&= \sum_i^n \left[\mathrm{Hess}_N\, (\zeta \circ \rho_N)(e_i, P_r(e_i)) + \langle \mathrm{grad}(\zeta \circ \rho_N), \eta \rangle \langle II(e_i), P_r(e_i) \rangle \right] \\
&= \sum_i^n \mu_i \left[\mathrm{Hess}_N(\zeta \circ \rho_N)(e_i, e_i) \right] + \langle \mathrm{grad}(\zeta \circ \rho_N), \eta \rangle \sum_i^n \langle e_i, IIP_r(e_i) \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, usando (28), (27) e o fato de que $|\,\mathrm{grad}\, \rho_N| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
L_r(\gamma) &\leq \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\zeta''(\rho_N) \langle \mathrm{grad}\, \rho_N, e_i \rangle^2 + \zeta'(\rho_N)\, \mathrm{Hess}\, \rho_N(e_i, e_i) \right] + tr(IIP_r) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\zeta'(\rho_N)\, \mathrm{Hess}\, \rho_N(e_i, e_i) \right] + c_r H_{r+1} \\
&\leq C' c_r H_r + c_r H_{r+1},
\end{aligned}$$

para alguma constante positiva C'.

Sem perda de generalidade podemos assumir que

$$\sup_M \frac{H_{r+1}}{H_r}(x) < +\infty;$$

portanto, sendo $\frac{H_{r+1}}{H_r}(x) \leq C''$ em M, segue de $0 < q \leq \frac{1}{trP_r}$ que

$$q(x) L_r \gamma(x) \leq C''',$$

onde $C''' = \max\{C', C''\}$. Logo, a condição *iii.)* é satisfeita, e assim terminamos a prova do Teorema 2.3.

3 TEOREMAS TIPO-LIOUVILLE PARA FUNÇÕES $\mathcal{L}$-SUBHARMÔNICAS

Neste capítulo, estudamos propriedades tipo-Liouville em uma variedade Riemanniana completa para um operador diferencial mais geral, estudado por Lira, Rigoli e Alías (2015). A idéia original é baseada no trabalho de Rigoli e Setti (2001), e estenderemos alguns resultados para tal operador (veja (Cunha, Medeiros, 2014)).

3.1 O operador $\mathcal{L}$-Laplaciano

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa. Fixando uma origem o, denote por $r := r(x) = \text{dist}(o, x)$ a função distância ao ponto o. Sejam $B_r(p)$ e $\partial B_r(p)$ a bola geodésica e a esfera geodésica em (M, g), de raio $r > 0$ e centradas em $p \in M$. Definimos os volumes por

$$\text{vol}(B_r(p)) = \int_{B_r(p)} dv \quad \text{e} \quad \text{vol}(\partial B_r(p)) = \int_{\partial B_r(p)} dS,$$

onde dS é a medida de Hausdorff em $\partial B_r(p)$.

Para nossos propósitos, considere uma função $\varphi : M \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que $\varphi(\cdot, t) \in C^0(M)$ para todo $t \in [0, +\infty)$ e $\varphi(x, \cdot) \in C^1((0, +\infty)) \cap C^0([0, +\infty))$ para todo $x \in M$, satisfazendo, ademais, as seguintes condições

$$\text{i)}\varphi(x, 0) = 0, \ \text{ii)}\varphi(x, t) > 0, \text{ para todo } t > 0, \ \text{iii)}\varphi(x, t) \leq A(x)t^{\delta}, \ \text{para } t \geq 0, \tag{29}$$

para algum $\delta > 0$ e $A(x) \in C^0(M)$, $A(x) > 0$. Assim, dada uma função $u \in C^1(M)$ consideremos em M o operador (φ, h)-Laplaciano

$$\mathcal{L}u := \mathcal{L}_{\varphi,h}u = \text{div}_{\phi}\left(|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^{\sharp}\right), \tag{30}$$

onde $^{\sharp} : T^*M \to TM$ denota o isomorfismo musical, logo, $h(\nabla u, \cdot)^{\sharp}$ é o campo em M definido por

$$\langle h(\nabla u, \cdot)^{\sharp}, Y\rangle = h(\nabla u, Y), \quad \forall Y \in T_xM,$$

$\phi \in C^{\infty}(M)$ e h é um 2-tensor covariante simétrico e positivo definido em M. Lembre-se de que na definição de $\mathcal{L}$, temos que $\text{div}_{\phi}X = e^{\phi}\text{div}(e^{-\phi}X)$.

Observe que, se h é o tensor métrico de M, $\varphi(x, t) = \widetilde{\varphi}(t)$ e ϕ é constante, então o operador $\mathcal{L}$ torna-se o $\widetilde{\varphi}$-Laplaciano estudado por Rigoli, Salvatore e Vignati (2000). Um dos interesses relevantes para o estudo do operador (30) é o fato de podermos relacioná-lo ao operador da curvatura média para gráficos. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1 (Operador da curvatura média para gráficos) Seja $\mathcal{L}$ o operador definido em (30). Tome h para ser o tensor métrico de M. Assim, temos o operador curvatura média para gráficos em produtos warped da forma $M \times_{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}} \mathbb{R}$, dado por

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{W_u}\right) - \frac{1}{2\gamma W_u}\langle \nabla\gamma, \nabla u\rangle, \tag{31}$$

onde

$$\varphi(x,t) = \frac{t}{\sqrt{\gamma + t^2}} \ , \ \phi = \log\sqrt{\gamma}$$

e

$$W_u = \sqrt{\gamma + |\nabla u|^2}.$$

Observando ainda que o campo coordenado $X = \frac{\partial}{\partial t}$ na direção da linha real é um campo de Killing, temos que a função $\gamma : M \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\gamma = \frac{1}{|X|^2}.$$

O gráfico $\Sigma(u) \subset M \times_{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}} \mathbb{R}$ de uma função $u \in C^2(M)$ tem curvatura média prescrita $H : M \to \mathbb{R}$ se, e somente se, u satisfaz à equação

$$\mathcal{L}u = nH.$$

Para mais detalhes sugerimos o leitor consultar a referência (Lira, Alías, Rigoli 2015). Outro exemplo que podemos levar em consideração é o operador ϕ-Laplaciano em M, dado por

$$\Delta_\phi u = \Delta u - \langle \nabla\phi, \nabla u\rangle,$$

obtido quando h é o tensor métrico de M e $\varphi(x,t) = t$.

Finalizando esta seção, assumiremos ainda que, para certas funções contínuas h_- e h_+, definidas em $[0, +\infty)$, o tensor h satisfaz a condição adicional

$$0 < h_-(r) \leq h(Y,Y) \leq h_+(r) \tag{32}$$

para todo $Y \in T_xM$ tal que$|Y| = 1$ e todo $x \in \partial B_r$; além disso, assumimos que

$$\inf_M \frac{h_-(r(x))}{h_+(r(x))}\frac{1}{A(x)^{1/\delta}} = \frac{1}{C_0^{1/\delta}}, \tag{33}$$

para algum $C_0 > 0$.

O operador $\mathcal{L}$ pode ser visto como a generalização intrínseca natural, para variedades Riemannianas, dos operadores elípticos singulares, totalmente quasi-lineares, considerados por Pucci, Serrin e Zou (2000, 2004 e 1999).

3.2 Um teorema tipo-Liouville

Nesta seção provaremos um teorema tipo L^p-Liouville para uma variedade Riemanniana completa em relação ao operador $\mathcal{L}$, e daremos algumas consequências do crescimento polinomial da expressão

$$\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi}\right).$$

Além disso, obtemos na subseção uma belíssima aplicação para gráficos de Killing. Com isto, ganhamos extensões naturais de alguns resultados tipo-Liouville devidos a Rigoli e Setti (2001) e damos uma noção geométrica quando impomos condições no vetor curvatura média do gráfico. Para tomar fim em nossos propósitos precisamos fixar algumas definições em relação ao operador $\mathcal{L}$.

Definição 3.1 *Uma função $u \in C^1(M)$ é dita ser $\mathcal{L}$-subharmônica se $\mathcal{L}u \geq 0$ em M. Se a desigualdade for trocada por $\leq$, ou $=$, a função u é dita $\mathcal{L}$-superhamônica ou $\mathcal{L}$-harmônica, respectivamente em M.*

Analogamente à definição de parabolicidade para o Laplaciano, também podemos definir para o operador $\mathcal{L}$.

Definição 3.2 *A variedade M é dita ser $\mathcal{L}$-parabólica se as únicas funções $u \in C^1(M)$, $\mathcal{L}$-subharmônicas tal que $u^* = \sup_M u < +\infty$, são as funções constantes.*

Seguindo esta terminologia, Lira, Rigoli e Alías (2015) provaram um critério de parabolicidade para uma variedade Riemanniana completa $(M, \langle , \rangle)$. Eles provaram que sob às condições (29), (32) e (33), se vale

$$\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} \notin L^1(+\infty),$$

então $(M, \langle , \rangle)$ é $\mathcal{L}$-parabólica. A prova segue de uma belíssima aplicação do seguinte teorema. Por questão de completude e a fim de usarmos argumentos análogos para provar o Lema 3.1 faremos a prova.

Teorema 3.1 (Alías-Lira-Rigoli, (2015)) *Seja $\mathcal{L}$ o operador definido em* (30) *com h e φ satisfazendo às condições* (29), (32) *e* (33). *Seja $\xi \in C^0(\mathbb{R})$ e seja u uma solução não-constante C^1 em M da desigualdade diferencial*

$$\mathcal{L}u \geq |\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u)\xi(u). \tag{34}$$

Assuma que existam funções $\alpha \in C^1(I)$ e $\beta \in C^0(I)$ definidas em um intervalo $I \supset u(M)$ tal que

$$\alpha(u) \geq 0, \tag{35}$$

$$\alpha'(u) + \xi(u)\alpha(u) \geq \beta(u) > 0. \tag{36}$$

Então existem R_0 dependendo apenas de u e uma constante $C > 0$ independente de α e β, tais que, para todo $r > R \geq R_0$,

$$\left(\int_{B_R} \beta(u)\varphi(x, |\nabla u|)|\nabla u| h_-(r)e^{-\phi}\right)^{-1} \geq C\left(\int_R^r \left(\int_{\partial B_r} h_+(r)e^{-\phi}\frac{\alpha(u)^{1+\delta}}{\beta(u)^{\delta}}\right)^{-1/\delta}\right)^{\delta}. \quad (37)$$

Demonstração: Consideremos o campo de vetores contínuo

$$W = \alpha(u)e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^{\sharp}.$$

Usando a definição de divergência no sentido das distribuições em M e a hipótese (34), temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(W) &= \alpha(u)\operatorname{div}\left(e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^{\sharp}\right)\\ &\quad + e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)\alpha'(u)h(\nabla u, \nabla u)\\ &\geq e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u)[\alpha'(u) + \xi(u)\alpha(u)].\end{aligned}$$

Assim, usando (32) e (36) temos que

$$\operatorname{div}(W) \geq \beta(u)|\nabla u|\varphi(x, |\nabla u|)h_-(r)e^{-\phi}.$$

Integrando sobre B_t e aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{\partial B_t}\langle W, \nabla r\rangle \geq \int_{B_t}\beta(u)|\nabla u|\varphi(x, |\nabla u|)h_-(r)e^{-\phi}.$$

Por outro lado, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (32) implicam

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_t}\langle W, \nabla r\rangle &= \int_{\partial B_t}\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)\langle h(\nabla u, \cdot)^{\sharp}, \nabla r\rangle e^{-\phi}\\ &= \int_{\partial B_t}\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla r)e^{-\phi}\\ &\leq \int_{\partial B_t}\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h_+(r)\langle\nabla u, \nabla r\rangle e^{-\phi}\\ &\leq \int_{\partial B_t}\alpha(u)\varphi(x, |\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\partial B_t}\alpha(u)\varphi(x, |\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi} \geq \int_{B_t}\beta(u)|\nabla u|\varphi(x, |\nabla u|)h_-(r)e^{-\phi}.$$

Observe que multiplicando a condição *iii*) de (29) por $\varphi(x, t)$, temos

$$t\varphi(x, t) \geq A(x)^{-1/\delta}\varphi(x, t)^{1+1/\delta}. \quad (38)$$

Logo,

$$\alpha(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi}$$
$$\leq A(x)^{\frac{1}{1+\delta}}\frac{\alpha(u)}{\beta(u)^{\frac{\delta}{1+\delta}}}\frac{h_+(r)}{h_-(r)^{\frac{\delta}{1+\delta}}}e^{-\phi\frac{1}{1+\delta}}\left[|\nabla u|\varphi(x,|\nabla u|)\right]^{\frac{\delta}{1+\delta}}e^{-\phi\frac{\delta}{1+\delta}}\beta(u)^{\frac{\delta}{1+\delta}}h_-(r)^{\frac{\delta}{1+\delta}}.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Hölder com $p=1+\delta$ e $q=1+1/\delta$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_t}\langle W,\nabla r\rangle &\leq \int_{\partial B_t}\alpha(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi}\\ &\leq \left(\int_{\partial B_t}A(x)\frac{\alpha(u)^{1+\delta}}{\beta(u)^{\delta}}\frac{h_+(r)^{1+\delta}}{h_-(r)^{\delta}}e^{-\phi}\right)^{\frac{1}{1+\delta}}\left(\int_{\partial B_t}\beta(u)|\nabla u|\varphi(x,|\nabla u|)h_-(r)e^{-\phi}\right)^{\frac{\delta}{1+\delta}}.\end{aligned}$$

Seja
$$\Lambda(R)=\int_{B_R}\beta(u)|\nabla u|\varphi(x,|\nabla u|)h_-(r)e^{-\phi}. \tag{39}$$
Uma vez que u é não-constante, existe $R_0>0$ suficientemente grande tal que, para qualquer $R\geq R_0$, temos $\Lambda(R)>0$. Pela fórmula da co-área, obtemos

$$\Lambda(R)^{\frac{1+\delta}{\delta}}\leq\Lambda'(R)\left(\int_{\partial B_R}A(x)\frac{\alpha(u)^{1+\delta}}{\beta(u)^{\delta}}\frac{h_+(r)^{\delta}}{h_-(r)^{\delta}}h_+(r)e^{-\phi}\right)^{\frac{1}{\delta}}, \tag{40}$$

para $R\geq R_0$. Podemos ainda reescrever (40) como

$$\left(\int_{\partial B_R}A(x)\frac{h_+(r)^{\delta}}{h_-(r)^{\delta}}h_+(r)\frac{\alpha(u)^{1+\delta}}{\beta(u)^{\delta}}e^{-\phi}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\leq\frac{\Lambda'(R)}{\Lambda(R)^{1+\frac{1}{\delta}}}, \tag{41}$$

em $[R_0,+\infty)$. Portanto, usando (33), obtemos

$$C_0^{-1/\delta}\left(\int_{\partial B_R}\frac{\alpha(u)^{1+\delta}}{\beta(u)^{\delta}}h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-1/\delta}\leq\frac{\Lambda'(R)}{\Lambda(R)^{1+\frac{1}{\delta}}}.$$

Prosseguindo como no Lema 1.1 em (Rigoli, Setti, 2001), concluimos a prova com $C=(\delta^{\delta}C_0)^{-1}$.

O principal resultado desta subseção é o seguinte teorema tipo L^p-Liouville.

Teorema 3.2 *Seja $(M,\langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana completa e sejam φ e δ como em* (29). *Seja $u\in C^1$ uma função $\mathcal{L}$-subharmônica não-negativa. Se valem* (32), (33) *e*

$$\left(\int_{\partial B_r}h_+(r)u^pe^{-\phi}\right)^{-1/\delta}\notin L^1(+\infty) \tag{42}$$

para algum $p>\delta$, então u é constante.

A prova do Teorema 3.2 seguirá do seguinte lema, que nos dá uma desigualdade integral idêntica à (37) no Teorema 3.1.

Lema 3.1 *Seja $\mathcal{L}$ o operador definido em* (30) *com h e φ satisfazendo às condições* (29), (32) *e* (33). *Seja $\xi \in C^0(\mathbb{R})$ e seja u uma solução não-constante C^1 em M da desigualdade diferencial*

$$u\mathcal{L}u \geq |\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u)\xi(u). \tag{43}$$

Assuma que existam funções $\alpha \in C^1(I)$ e $\beta \in C^0(I)$ definidas em um intervalo $I \supset u(M)$ tal que

$$\alpha(u) \geq 0, \tag{44}$$

$$u\alpha'(u) + [1 + \xi(u)]\alpha(u) \geq \beta(u) > 0. \tag{45}$$

Então existem R_0 dependendo apenas de u e uma constante $C > 0$ independente de α e β, tais que, para todo $r > R \geq R_0$,

$$\left(\int_{B_R} \beta(u)\varphi(x, |\nabla u|)|\nabla u|h_-(r)e^{-\phi}\right)^{-1} \geq C\left(\int_R^r \left(\int_{\partial B_r} h_+(r)e^{-\phi}\frac{|u\alpha(u)|^{1+\delta}}{\beta(u)^\delta}\right)^{-1/\delta}\right)^\delta. \tag{46}$$

Demonstração: Considere o seguinte campo de vetores

$$W = u\alpha(u)e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^\sharp.$$

Calculando a divergência distribucional de W, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(W) &= u\alpha(u)\operatorname{div}\left(e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^\sharp\right) \\
&\quad + e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)\langle\nabla(u\alpha(u)), h(\nabla u, \cdot)^\sharp\rangle \\
&= e^{-\phi}e^{\phi}u\alpha(u)\operatorname{div}\left(e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^\sharp\right) \\
&\quad + e^{-\phi}\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)\langle\nabla u, h(\nabla u, \cdot)^\sharp\rangle \\
&\quad + e^{-\phi}u\alpha'(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)\langle\nabla u, h(\nabla u, \cdot)^\sharp\rangle \\
&= e^{-\phi}\alpha(u)u\mathcal{L}u + e^{-\phi}\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u) \\
&\quad + e^{-\phi}u\alpha'(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned}$$

Usando (43) e (32), obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(W) &\geq e^{-\phi}\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u)\xi(u) \\
&\quad + e^{-\phi}\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u) \\
&\quad + e^{-\phi}u\alpha'(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u) \\
&= e^{-\phi}\varphi(x, |\nabla u|)h_-(r)[u\alpha'(u) + (1 + \xi(u))\alpha(u)].
\end{aligned}$$

Agora usando (45), teremos

$$\operatorname{div}(W) \geq e^{-\phi}\beta(u)\varphi(x, |\nabla u|)h_-(r).$$

Integrando sobre B_t e usando o Teorema da Divergência, temos

$$\int_{\partial B_t} \langle W, \nabla r\rangle \geq \int_{B_t} e^{-\phi}\beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_-(r).$$

Por outro lado, usando (32) e desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_t} \langle W, \nabla r\rangle &= \int_{\partial B_t} u\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)\langle h(\nabla u,\cdot)^\sharp, \nabla r\rangle e^{-\phi} \\
&= \int_{\partial B_t} u\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\nabla r)e^{-\phi} \\
&\leq \int_{\partial B_t} u\alpha(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)\langle \nabla u,\nabla r\rangle e^{-\phi} \\
&\leq \int_{\partial B_t} u\alpha(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo como no Teorema 3.1, concluimos a prova.

O próximo teorema é uma consequência do Lema anterior, do qual seguirá a prova do Teorema 3.2.

Teorema 3.3 *Seja $u \in C^1(M)$ uma solução da desigualdade diferencial*

$$u\mathcal{L}u \geq |\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\nabla u)\xi(u),$$

onde $\xi \in C^0(\mathbb{R})$ é tal que

$$\inf_M \xi(u) > -1. \tag{47}$$

Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que

$$p > \delta - \inf_M \xi(u). \tag{48}$$

Se

$$\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)|u|^p e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} \notin L^1(+\infty), \tag{49}$$

então u é constante.

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que a função u é não-constante. Considere a função

$$\varrho_n(t) = \left(t^2 + \frac{1}{n}\right)^{(p-\delta-1)/2},$$

para qualquer inteiro $n \geq 1$. Veja que

$$\begin{aligned}
t\varrho_n'(t) + [1+\xi(t)]\varrho_n(t) &= t^2(p-\delta-1)\left(t^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-\delta-1}{2}-1} \\
&\quad + \left(t^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-\delta-1}{2}}[1+\xi(t)] \\
&= \left(t^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-\delta-1}{2}-1}[t^2(p-\delta-1) \\
&\quad + \left(t^2+\frac{1}{n}\right)(1+\xi(t))] \\
&= \left(t^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-\delta-1}{2}-1}[t^2(p-\delta+\xi(t)) \\
&\quad + \frac{1}{n}(1+\xi(t))] \\
&\geq \left(t^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-\delta-1}{2}-1}[t^2(p-\delta+\inf_M \xi(t)) \\
&\quad + \frac{1}{n}(1+\inf_M \xi(t))].
\end{aligned}$$

Pelas as hipóteses (47) e (48) temos que vale a seguinte estimativa por baixo

$$u^2(p-\delta+\inf_M \xi(u)) + \frac{1}{n}(1+\inf_M \xi(u)) \geq C\left(u^2+\frac{1}{n}\right),$$

onde $C = \min\{p-\delta+\inf_M \xi(u), 1+\inf_M \xi(u)\}$. Portanto,

$$u\varrho_n'(u) + [1+\xi(u)]\varrho_n(u) \geq \beta_n(u) > 0,$$

com

$$\beta_n(u) = C\left(u^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-\delta-1}{2}}.$$

Assim, todas as condições do Lema 3.1 estão satisfeitas, e daí, existem $R_0, C_1 > 0$ independentes de n e r tais que, para qualquer $r > R_0$ temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{B_{R_0}} \beta_n(u)\varphi(x,|\nabla u|)|\nabla u| h_-(r)e^{-\phi}\right)^{-1} \\
\geq\ & C_1\left(\int_{R_0}^{r}\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi}|u|^{1+\delta}\frac{|\varrho_n(u)|^{1+\delta}}{\beta_n(u)^{\delta}}\right)^{-1/\delta}\right)^{\delta} \\
=\ & C_1\left(\int_{R_0}^{r}\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)|u|^{1+\delta}(u^2+1/n)^{\frac{p-\delta-1}{2}}e^{-\phi}\right)^{-1/\delta}\right)^{\delta}
\end{aligned}
$$

Uma aplicação dos teoremas da convergência dominada e monótona implica

$$
\left(\int_{B_{R_0}} Cu^{p-\delta-1}\varphi(x,|\nabla u|)|\nabla u| h_-(r)e^{-\phi}\right)^{-1} \geq C_1\left(\int_{R_0}^{r}\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)|u|^{p}e^{-\phi}\right)^{-1/\delta}\right)^{\delta},
$$

o que contradiz a hipótese (49). Isto conclui a prova.

A demonstração do Teorema 3.2 segue diretamente do Teorema 3.3 com $\xi \equiv 0$.

Além do critério L^p-Liouville dado no Teorema 3.2, o Teorema 3.3 ainda fornece aplicações interessantes no crescimento polinomial da expressão

$$
\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi}\right). \tag{50}
$$

Corolário 3.1 *Assuma que* (50) *tenha o seguinte crescimento polinomial*

$$
\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi} \leq Cr^{\epsilon-1}, \tag{51}
$$

para algum $\epsilon \geq 0, C > 0$ *e* r *suficientimente grande. Seja* $u \in C^1(M)$ *uma função não-negativa* $\mathcal{L}$*-subharmônica em* $(M, \langle,\rangle)$*. Se vale* (32) *e existem* $p > \delta$, $C_1 > 0$ *tais que*

$$
u^p \leq C_1 r^{\delta-\epsilon+1}(\log r)^{\delta}, \tag{52}
$$

para $r \gg 1$, *então* u *é constante.*

Demonstração: Usando as hipóteses (51) e (52) temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B_t} h_+(r)|u|^p e^{-\phi} &\leq C_1\int_{\partial B_t} h_+(r)r^{\delta-\epsilon+1}(\log r)^{\delta}e^{-\phi} \\
&= C_1 t^{\delta-\epsilon+1}(\log t)^{\delta}\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi} \\
&\leq C(t\log t)^{\delta}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\int_0^{+\infty}\left(\int_{\partial B_t} h_+(r)|u|^p e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} \geq C^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t\log t} = +\infty,
$$

logo,

$$\left(\int_{\partial B_r} h_+(r)u^p e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} \notin L^1(+\infty).$$

Portanto, pelo Teorema 3.3 a prova está concluida.

Apresentaremos agora alguns resultados tipo L^∞-Liouville. Vale ressaltar que o Teorema 3.1 e o Lema 3.1 garantem estimativas por cima para a integral

$$\int_{B_R} \beta(u)\varphi(x, |\nabla u|)|\nabla u| h_-(r)e^{-\phi}.$$

Nosso interesse daqui em diante é estimar a integral acima por baixo e, com isto, combinando ambas as estimativas obteremos novos resultados. Iniciamos com o seguinte lema.

Lema 3.2 *Seja $\xi \in C^0(\mathbb{R})$, e seja $u \in C^1(M)$ uma solução não-constante da desigualdade deferencial*

$$u\mathcal{L}u \geq |\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \nabla u)\xi(u), \quad em \quad M. \tag{53}$$

Suponha que existam funções $\rho \in C^1(I)$ e $\beta \in C^0(I)$ definidas em um intervalo $I \supset u(M)$ tais que

$$\beta(u) > 0, \quad \rho(u) \geq 0, \quad \frac{|u\rho(u)|}{\beta(u)} \leq \Lambda < +\infty, \tag{54}$$

$$u\rho'(u) + [1 + \xi(u)]\rho(u) > 0, \tag{55}$$

em M. Então existem $R_0 > 0$ e uma constante $C > 0$ tais que, para todo $r > R \geq R_0$,

$$\int_{B_r \setminus B_R} \beta(u)\varphi(x, |\nabla u|)|\nabla u| h_-(r)e^{-\phi} \geq C \int_R^r \left(\int_{\partial B_t} \beta(u)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} dt. \tag{56}$$

Demonstração: Consideremos o seguinte campo vetorial

$$W = u\rho(u)e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x, |\nabla u|)h(\nabla u, \cdot)^\sharp,$$

e seja

$$\zeta(t) = \int_{\partial B_t} \langle W, \nabla r\rangle.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as hipóteses (32) e (54), obtemos

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \int_{\partial B_t} \langle u\rho(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\cdot)^{\sharp}, \nabla r\rangle e^{-\phi} \\
&= \int_{\partial B_t} u\rho(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\nabla r)e^{-\phi} \\
&\leq \int_{\partial B_t} |u\rho(u)||\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)|\nabla u||\nabla r|e^{-\phi} \\
&\leq \Lambda\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi}. \qquad (57)
\end{aligned}$$

Agora, calculando a divergência distribucional de W,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(W) &= u\rho(u)\mathrm{div}(e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\cdot)^{\sharp}) \\
&\quad +e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)\langle\nabla(u\rho(u)), h(\nabla u,\cdot)^{\sharp}\rangle \\
&= e^{-\phi}\rho(u)u\mathcal{L}u + e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)\langle\rho(u)\nabla u + u\rho'(u)\nabla u, h(\nabla u,\cdot)^{\sharp}\rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\rho \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(W) &\geq e^{-\phi}u\rho(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\nabla u)\xi(u) \\
&\quad +e^{-\phi}\rho(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\nabla u) \\
&\quad +e^{-\phi}u\rho'(u)|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\nabla u) \\
&= e^{-\phi}|\nabla u|^{-1}\varphi(x,|\nabla u|)h(\nabla u,\nabla u)[u\rho'(u) + (1+\xi(u))\rho(u)] \\
&\geq [u\rho'(u) + (1+\xi(u))\rho(u)]\varphi(x,|\nabla u|)|\nabla u|h_-(r)e^{-\phi}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Divergência, temos

$$\zeta(t) \geq \int_{\partial B_t} [u\rho'(u) + (1+\xi(u))\rho(u)]\varphi(x,|\nabla u|)|\nabla u|h_-(r)e^{-\phi}. \qquad (58)$$

Uma vez que u é não-constante e vale (55), um argumento análogo como em (Rigoli, Setti, 2001, Lema 3.1) implica que existem $R_0 > 0$ e $C_1 > 0$ tais que

$$\zeta(t) \geq C_1, \quad \text{para todo} \quad t \geq R_0.$$

Por outro lado, observe que a condição estrutural $\varphi(x,t) \leq A(x)t^{\delta}$ implica

$$t\varphi(x,t) \geq A(x)^{-1/\delta}\varphi(x,t)^{1+1/\delta}.$$

Daí, sendo $\beta > 0$, e usando (33) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)|\nabla u| h_-(r)e^{-\phi} &\geq \int_{\partial B_t} \beta(u)A(x)^{-1/\delta}\varphi(x,|\nabla u|)^{1+1/\delta}h_-(r)e^{-\phi} \\
&= \int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)^{1+1/\delta}\frac{h_-(r)}{h_+(r)}\frac{1}{A(x)^{1/\delta}}h_+(r)e^{-\phi} \\
&\geq \frac{1}{C_0^{1/\delta}}\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)^{1+1/\delta}h_+(r)e^{-\phi}. \qquad (59)
\end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Hölder com expoentes conjugados $1+\delta$ e $1+1/\delta$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi} \\
= \; &\int_{\partial B_t} \beta(u)^{\frac{1}{1+\delta}}h_+(r)^{\frac{1}{1+\delta}}e^{-\phi\frac{1}{1+\delta}}\beta(u)^{\frac{\delta}{1+\delta}}\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)^{\frac{\delta}{1+\delta}}e^{-\phi\frac{\delta}{1+\delta}} \\
\leq \; &\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{\frac{1}{1+\delta}}\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)^{1+1/\delta}h_+(r)e^{-\phi}\right)^{\frac{\delta}{1+\delta}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)^{1+1/\delta}h_+(r)e^{-\phi} \\
\geq \; &\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{1+1/\delta}. \qquad (60)
\end{aligned}$$

Substituindo (60) em (59) e usando (57), temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)|\nabla u|h_-(r)e^{-\phi} \\
\geq \; & C_0^{-1/\delta}\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)\varphi(x,|\nabla u|)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{1+1/\delta} \\
\geq \; & C_0^{-1/\delta}\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left[\Lambda^{-1}\zeta(t)\right]^{1+1/\delta} \\
\geq \; & C\left(\int_{\partial B_t} \beta(u)h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-\frac{1}{\delta}},
\end{aligned}$$

onde $C = C_0^{-1/\delta}\left(\frac{C_1}{\Lambda}\right)^{1+1/\delta}$. Integrando sobre $[R,r]$, $R_0 \leq R < r$, usando a fórmula da co-área obtemos (56). Isto conclui a prova.

Lema 3.3 *Seja $\xi \in C^0(\mathbb{R})$, e seja $u \in C^1(M)$ uma solução não-constante da desigualdade diferencial (53). Assuma que existam funções $\beta \in C^0(I)$ e α, $\rho \in C^1(I)$ definidas em um intervalo $I \supset u(M)$ tais que*

$$\beta(u) > 0, \qquad \alpha(u), \rho(u) \geq 0, \qquad (61)$$

$$u\alpha'(u) + (1 + \xi(u))\alpha(u) \geq \beta(u), \tag{62}$$

$$u\rho'(u) + (1 + \xi(u))\rho(u) > 0, \tag{63}$$

$$\frac{|u\rho(u)|}{\beta(u)} \leq \Lambda < +\infty, \tag{64}$$

em M. Então existem $R_0 > 0$ e uma constante $C > 0$ tais que, para todo $r > R \geq R_0$,

$$\int_R^r \left(\int_{\partial B_t} \beta(u) h_+(r) e^{-\phi} \right)^{-1/\delta} dt \leq C \sup_{B_r} \left| \frac{u\alpha(u)}{\beta(u)} \right|. \tag{65}$$

Demonstração: As hipóteses dos Lema 3.1 e Lema 3.2 são satisfeitas, logo, basta proceder como em (Rigoli, Setti, 2001, Lema 3.2).

Uma primeira consequência do Lema 3.3 é o seguinte teorema.

Teorema 3.4 *Seja $u \in C^1(M)$ uma solução da desigualdade diferencial*

$$u\mathcal{L}u \geq 0, \tag{66}$$

em M. Se

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\sup_{B_r} |u|}{\displaystyle\int_R^r \left(\int_{\partial B_t} e^{-\phi} \right)^{-1/\delta} dt} = 0, \tag{67}$$

para algum $R > 0$ suficientemente grande, então u é constante.

Demonstração: Assumindo por contradição que u é não-constante, apliquemos o Lema 3.3 com $\alpha = \beta = h_+ = 1$, $\xi \equiv 0$ e $\rho(t) = (1 + t^2)^{-1/2}$, e daí podemos concluir que existem $R_0 > 0$ e uma constante $C > 0$ tais que, para todo $r > R \geq R_0$,

$$\frac{1}{\sup_{B_r} |u|} \int_R^r \left(\int_{\partial B_t} e^{-\phi} \right)^{-1/\delta} dt \leq C,$$

ou seja,

$$0 = \liminf_{r \to +\infty} \frac{\sup_{B_r} |u|}{\displaystyle\int_R^r \left(\int_{\partial B_t} e^{-\phi} \right)^{-1/\delta} dt} \geq \frac{1}{C},$$

contradição. Isto conclui a prova.

O próximo corolário mostra que o Teorema 3.4 é "sharp", i.e., ótimo.

Corolário 3.2 *Assuma que vale o seguinte crescimento polinomial,*

$$\int_{\partial B_r} h_+(r) e^{-\phi} \leq C r^{\epsilon - 1} \tag{68}$$

para algum $\epsilon \geq 0$, $C > 0$ e r suficientemente grande. Seja $u \in C^1(M)$ uma função *não-negativa $\mathcal{L}$-subharmônica em M. Se*

$$u^{\delta} = o(r^{\delta-\epsilon+1}), \quad se \quad \delta > \epsilon - 1, \tag{69}$$

$$u = o(\log r), \quad se \quad \delta = \epsilon - 1, \tag{70}$$

quando $r \to +\infty$, então u é constante.

Observe no corolário acima que, se $h \equiv 1$ e $\phi \equiv 0$, temos um crescimento polinomial de volume da esfera geodésica ∂B_r implicando a função u ser constante.

Outra consequência do Lema 3.3 é dada pelo seguinte.

Teorema 3.5 *Seja $\xi \in C^0(\mathbb{R})$ e $u \in C^1(M)$ uma solução da desigualdade diferencial (53) em M satisfazendo*

$$u > 0, \quad \inf_M \xi(u) > -\sigma$$

para algum $\sigma > 0$. Se

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{(\sup_{B_r} u)^{1+\sigma/\delta}}{\displaystyle\int_R^r \left(\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} dt} = 0, \tag{71}$$

para algum $R > 0$ suficientemente grande, então u é constante.

Demonstração: Suponha, por contradição, que a função u não é constante. Seja

$$\lambda = \sigma + \inf_M \xi(u) > 0.$$

Escolhamos as funções α, β, ρ definidas por

$$\alpha(t) = t^{\sigma}, \;\; \beta(t) = \lambda t^{\sigma}, \;\; \text{e} \;\; \rho(t) = t^{\sigma-1}.$$

Um pequeno cálculo mostra que as funções definidas acima satisfazem às condições do Lema 3.3. Logo, existem $R_0 > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $r > R \geq R_0$, temos

$$\frac{\lambda^{1-1/\delta}}{\sup_{B_r} u} \int_R^r \left(\int_{\partial B_t} u^{\sigma} h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} dt \leq C.$$

Isto contradiz (71). Portanto, a função u á constante.

Se assumirmos que u é não-positiva, o resultado acima tem ainda a seguinte versão.

Teorema 3.6 *Seja $\xi \in C^0(\mathbb{R})$ e $u \in C^1(M)$ uma solução da desigualdade diferencial (53) em M satisfazendo*

$$\inf_M \xi(u) > -1.$$

Se

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{(\sup_{B_r}|u|)^{1+1/\delta}}{\displaystyle\int_R^r \left(\int_{\partial B_t} h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} dt} = 0, \tag{72}$$

para algum $R > 0$ suficientemente grande, então u é constante.

Demonstração: Assuma, por contradição, que u é não-constante. Defina as funções

$$\alpha_n(t) = \left(t^2 + \frac{1}{n}\right)^{1/2}, \ \ \beta_n(t) = \Gamma\alpha_n, \ \ \text{e} \ \ \rho_n(t) = \rho(t) \equiv 1,$$

onde $\Gamma = 1 + \inf_M \xi(u) > 0$. Seguindo cálculos análogos a (Rigoli, Setti, 2001, Teorema 3.6) e usando o Lema 3.3 obtemos que, para todo $r > R \geq R_0$, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\sup_{B_r}|u|}\int_R^r \left(\int_{\partial B_t} |u| h_+(r)e^{-\phi}\right)^{-1/\delta} dt \leq C.$$

Isto contradiz (72). Portanto, u é constante.

3.3 Uma aplicação do teorema tipo-Liouville

Nesta subseção consideremos o operador ϕ-Laplaciano intrínseco definido em um gráfico de Killing. Aplicaremos o Teorema 3.2 diretamente para tal gráfico com a métrica Riemanniana induzida do espaço ambiente.

Lembre que o operador ϕ-Laplaciano dado por

$$\Delta_\phi u = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla\phi\rangle,$$

obtido do operador (30) com $h = \langle , \rangle$ e $\varphi(x,t) = t$. Aqui, escolhemos $\phi = \log\gamma$, onde $\gamma = 1/|Y|^2$ e Y é um campo de Killing sob uma variedade Riemanniana completa $\bar{M}$. Assim, temos o seguinte operador

$$\Delta_{\log\gamma} u = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla \log\gamma\rangle = e^{\phi}\mathrm{div}(e^{-\phi}\nabla u). \tag{73}$$

Nosso foco aqui é o estudo de hipersuperfícies descritas como gráficos em produtos warped. Essencialmente, dada uma variedade Riemanniana completa (M, σ) e uma função positiva $f \in C^\infty(M)$, consideremos o produto warped $\bar{M} = M \times_f \mathbb{R}$, i.e., a variedade produto $M \times \mathbb{R} = \{(x,t); x \in M, t \in \mathbb{R}\}$ munida com a métrica Riemanniana

$$\bar{g} = \sigma + f^2(x)dt^2.$$

Assim, o campo coordenado $\frac{\partial}{\partial t}$ é um campo de Killing não-singular em $\bar{M}$. Dada uma função suave u definida num domínio aberto $\Omega \subset M$, o gráfico de u é uma hipersuperfície dada por

$$\Sigma(u) = \{(x, u(x)); x \in \Omega\} \subset M \times \mathbb{R}.$$

Mais geralmente, assuma que $\bar{M}$ é uma variedade Riemanniana munida com um campo de Killing não-singular Y com linhas de fluxo completas tal que a distribuição ortogonal

$$p \in \bar{M} \mapsto \mathcal{D}_p = \{v \in T_p\bar{M}; \langle Y(p), v\rangle = 0\} \subset T_p\bar{M}$$

é integrável. Assim , temos que as folhas integrais de $\mathcal{D}$ são hipersuperfícies totalmente geodésicas em $\bar{M}$. Seja M uma folha integral fixada. O fluxo $\Psi : M \times \mathbb{R} \to \bar{M}$ gerado por Y leva isometricamente $M = M_0$ na folha $M_t = \Psi_t(M)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, onde $\Psi_t = \Psi(\cdot, t)$. Denotaremos por ∇ a conexão Riemanniana em M com a métrica induzida pela sua inclusão em $\bar{M}$.

Consideremos um domínio aberto, relativamente compacto Ω em M com bordo suave e suponha que a imersão $\psi : \Omega \to \bar{M}$ é da forma

$$\psi(x) = \psi_u(x) = \Psi(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{74}$$

para alguma função suave $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Neste caso, a hipersuperfície

$$\Sigma(u) = \psi(\Omega)$$

é o *gráfico de Killing* da função u.

Para fixar notações, atribuimos coordenadas locais $y_0 = t, y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$ para um ponto $y = \Psi(x, t)$, se $x_1, \ldots, x_n$, são coordenadas do ponto $x \in \Omega$. Associemos coordenadas locais $y_0, \ldots, y_n, \zeta_0, \ldots, \zeta_n$ para pontos $(y, \zeta) \in T\bar{M}$ pondo

$$\zeta = \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}|_y.$$

Em termos destas coordenadas, a métrica em $\bar{M}$ é escrita como

$$\bar{g}_{\alpha\beta} dy_\alpha dy_\beta, \quad 0 \le \alpha, \beta \le n,$$

onde

$$\bar{g}_{ij} = \sigma_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

são as componentes da métrica σ induzida em Ω pela inclusão $\Omega \subset \bar{M}$. Além disso,

$$\bar{g}_{00} = |Y|^2, \quad \bar{g}_{0i} = 0, \quad 1 \le i \le n.$$

Como Ω é um domínio relativamente compacto em M com bordo suave, um pequeno cálculo (veja Apêndice de (2015)) garante que vale a seguinte expressão

$$\sqrt{\det g_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma + |\nabla u|^2}\sqrt{\det \sigma_{ij}}. \tag{75}$$

A seguinte proposição nos dá uma condição de integrabilidade e será útil na demonstração do resultado principal desta seção.

Proposição 3.1 *Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana completa, e seja $\xi \in C^0(M)$ não-negativa. Seja*

$$\vartheta(t) = \int_{B_t} \xi$$

i.e.,

$$\vartheta'(t) = \int_{\partial B_t} \xi.$$

Fixe $R > 0$, e seja $r > R$. Então, para qualquer $\delta > 0$,

$$\int_R^r \left(\frac{t-R}{\vartheta(t)}\right)^{1/\delta} dt \leq C \int_R^r \frac{dt}{\vartheta'(t)^{1/\delta}},$$

para alguma constante $C > 0$ independente de r. Em particular, se

$$\left(\frac{t}{\vartheta(t)}\right)^{1/\delta} \notin L^1(+\infty) \tag{76}$$

então

$$\frac{1}{\vartheta'(t)^{1/\delta}} \notin L^1(+\infty). \tag{77}$$

Para uma prova veja Proposição 1.3 de (Rigoli, Setti, 2001).

Agora estamos prontos de enunciar e provar o teorema principal de subseção.

Teorema 3.7 *Seja $\bar{M}$ uma variedade Riemanniana completa munida com um campo de Killing completo Y e seja M uma folha integral da folheação de Killing. Seja u uma função C^∞ não-negativa tal que*

$$u^p|Y|^2 \in L^1(M, dM), \quad \text{para} \quad p > 1. \tag{78}$$

Seja $\psi_u(x) = \Psi(x, u(x))$, $x \in M$, um gráfico de Killing em M tal que

$$|\nabla u| = O\left(\frac{1}{|Y|}\right) \quad \text{quando} \quad x \to \infty. \tag{79}$$

Se o vetor curvatura média aponta na mesma direção de Y, então u é constante e o gráfico é uma folha da folheação.

Demonstração: A prova segue na linha de (Lira, Rigoli, Alías, 2015, Teorema 11). Seja $\Sigma = \psi(M) \subset \bar{M}$ e denotemos por ∇^Σ e Δ_Σ o gradiente e o Laplaciano em Σ com respeito à métrica induzida. Então

$$\nabla^{\Sigma} u = (\bar{\nabla} t)^{\top} = \gamma Y^{\top}, \tag{80}$$

onde $^{\top}$ denota a projeção tangencial sobre Σ. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local com respeito à métrica em Σ. Calculando o Laplaciano de u e usando (80), temos

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma} u &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^{\Sigma}_{e_i} \gamma Y^{\top}, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \gamma Y^{\top}, e_i \rangle \\ &= \gamma \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{e_i} Y^{\top}, e_i \rangle + \langle Y^{\top}, \sum_{i=1}^{n} e_i(\gamma) e_i \rangle \\ &= \gamma \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{e_i} Y^{\top}, e_i \rangle + \langle \bar{\nabla} \gamma, Y^{\top} \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que $Y = Y^{\top} + \langle Y, N \rangle N$, obtemos da expressão acima que

$$\Delta_{\Sigma} u = \gamma \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{e_i} Y, e_i \rangle - \gamma \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \langle Y, N \rangle N, e_i \rangle + \langle \frac{\bar{\nabla} \gamma}{\gamma}, \gamma Y^{\top} \rangle.$$

Como a curvatura média é $H = \frac{1}{n} TrA$, então

$$\Delta_{\Sigma} u = nH\gamma \langle Y, N \rangle + \langle \nabla^{\Sigma} u, \frac{\nabla^{\Sigma} \gamma}{\gamma} \rangle,$$

pois Y sendo campo de Killing implica $\langle \bar{\nabla}_{e_i} Y, e_i \rangle = 0$. Portanto, de (73), obtemos

$$\Delta_{\Sigma, \log \gamma} u = nH\gamma \langle Y, N \rangle, \tag{81}$$

onde a divergência é tomada em Σ com respeito à métrica induzida.

Queremos aplicar o Teorema 3.2 ao operador $\mathcal{L} = \Delta_{\Sigma, \log \gamma}$ em $(\Sigma, \langle, \rangle_{\Sigma})$, onde tomamos $\varphi(x, t) = t$, $\delta = 1$ e $h = \langle, \rangle_{\Sigma}$, com $h_+ = 1$. Primeiramente, veja que para termos a condição (42), precisamos provar que

$$\left(\int_{\partial B_s} u^p |Y|^2 d\Sigma \right)^{-1} \notin L^1(+\infty), \tag{82}$$

onde B_s é a bola geodésica de raio s com respeito a alguma origem fixada na variedade completa $(\Sigma, \langle, \rangle_{\Sigma})$. Para isto, observe que

$$\langle, \rangle_{\Sigma} = \langle, \rangle_M + |Y|^2 du \otimes du.$$

Logo, por (75), temos que

$$d\Sigma = \sqrt{1 + |\nabla u|^2 |Y|^2} dM.$$

Por outro lado, por (79) temos que

$$|\nabla u|^2|Y|^2 \leq C \quad \text{em} \quad M,$$

para alguma constante $C > 0$. Portanto,

$$d\Sigma \leq \sqrt{1+C}dM,$$

e assim, por (78) obtemos

$$u^p|Y|^2 \in L^1(\Sigma, d\Sigma). \tag{83}$$

Como u é não-negativa, a condição (83) juntamente com a Proposição 3.1 implicam a validade de (82). Por fim, a hipótese do vetor curvatura média garante que o Laplaciano (81) é não-negativo, i.e., u é $\mathcal{L}$-subharmônica. Portanto, pelo Teorema 3.2, u é constante e isto conclui a demonstração.

4 ESTIMATIVA DE PRIMEIRO AUTOVALOR DE HIPERSUPERFÍCIES f-MÍNIMAS

Neste capítulo, estudamos o primeiro autovalor do f-Laplaciano numa variedade com densidade (Cunha, Batista, 2014). Nosso foco é melhorar uma estimativa de primeiro autovalor tipo Choi e Wang devida a (Li, Wei, 2015) para hipersuperfícies f-mínimas fechadas de uma variedade com densidade.

4.1 Variedades com densidade

Seja $(M, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana conexa $(n+1)$-dimensional, com medida de volume $d\overline{\nu}$. Seja $\overline{\mu}$ a medida definida por $\overline{\mu} = e^{-f} d\overline{\nu}$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave.

Definição 4.1 *Uma variedade com densidade é uma tripla* $M_f = (M, \overline{g}, \overline{\mu})$.

A divergência associada a M_f é definida por

$$\overline{\mathrm{div}}_f X = e^f \overline{\mathrm{div}}(e^{-f} X),$$

e o operador Laplaciano associado é dado por

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle \mathrm{grad}\, u, \mathrm{grad}\, f \rangle,$$

o qual é um operador elíptico simétrico e auto-adjunto com respeito ao espaço $L^2(M, e^{-f} d\overline{\nu})$. O tensor de **Ricci-Bakry-Émery** em M_f é definido por

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f,$$

onde Ric e Hess$f$ denotam o tensor de Ricci e a Hessiana em M com respeito a $\overline{g}$, respectivamente. Mais geralmente, definimos o m-Bakry-Émery tensor de Ricci para $\infty \geq m > n+1$ por

$$\mathrm{Ric}_f^m = \mathrm{Ric}_f - \frac{1}{m-n-1} df \otimes df,$$

onde entendemos que, quando $m = \infty$, então $\mathrm{Ric}_f^m = \mathrm{Ric}_f$.

Seja $\varphi : \Sigma \to M_f$ uma imersão isométrica de uma n-variedade Riemanniana completa e orientada na $(n+1)$-variedade com densidade M_f. Seja $d\nu$ a medida de volume de Σ na métrica induzida pela imersão φ e seja $\mu = (e^{-f} \circ \varphi) d\nu$, tal que $\Sigma_f = (\Sigma, g = \varphi^* \overline{g}, \mu)$ é também uma variedade com densidade.

Analogamente, temos $\mathrm{div}_f X = (e^f \circ \varphi) \mathrm{div}[(e^{-f} \circ \varphi) X]$ e $\Delta_f = \mathrm{div}_f(\mathrm{grad})$.

Para nossos propósitos, seja $\varphi : \Sigma \hookrightarrow M$ uma hipersuperfície fechada, orientada e mergulhada de M, e η o vetor unitário normal a $\varphi(\Sigma)$. A segunda forma fundamental de $\varphi(\Sigma) \subset M$ é dada por $A(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X \eta, Y \rangle$, para quaisquer dois campos de vetores X

e Y tangentes a Σ e $H = tr(A)$ é a curvatura média.

Definição 4.2 *A curvatura média com densidade em relação a η é dada por*

$$H_f = H - \langle \overline{\text{grad}} f, \eta \rangle.$$

A hipersuperfície $\varphi(\Sigma)$ é dita f-**mínima** se $H_f \equiv 0$. Alguns exemplos clássicos de f-mínimas são:

Exemplo 4.1 1. Se f for constante, então as hipersuperfícies f-mínimas são mínimas;

2. Se $f(x) = \frac{|x|^2}{4}$, então o self-shrinker imerso em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, f)$ é uma hipersuperfície f-mínima.
3. Se $M = \mathbb{H}^{n+1}(-1)$, $r = \text{dist}(\cdot, p)$ com $p \in M$ fixo e $f(x) = n\alpha r^2(x)$, onde $\alpha > 0$ é uma constante, então a esfera geodésica de raio r centrada em p no espaço $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é f-mínima se satisfaz $2\alpha r = \coth r$.

O primeiro autovalor $\lambda_1^f(\Sigma)$ do f-Laplaciano no problema de autovalores fechado é o menor número real não-nulo satifazendo a equação

$$\Delta_f u + \lambda_1^f(\Sigma) u = 0. \tag{84}$$

O **primeiro autovalor** não-nulo tem a caracterização variacional dada por

$$\lambda_1^f(\Sigma) = \inf \left\{ \frac{\int_\Sigma |\,\text{grad}\, u|^2 (e^{-f} \circ \varphi) d\nu}{\int_\Sigma u^2 (e^{-f} \circ \varphi) d\nu}, \ \int_\Sigma u(e^{-f} \circ \varphi) d\nu = 0, \ u \neq 0 \right\}. \tag{85}$$

Um trabalho devido a (Ma, Du, 2010) e (Zhou, 2014) nos dá uma versão da fórmula de Reilly para espaços com densidade. Isto é traduzido na seguinte proposição.

Proposição 4.1 *Seja $(\Omega, \overline{g}, e^{-f} d\overline{\nu})$ uma variedade Riemanniana compacta, com bordo $\partial\Omega$ e com densidade. Se $u \in C^2(\Omega)$, então*

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\overline{\Delta}_f u)^2 e^{-f} d\overline{\nu} &= \int_\Omega |\overline{\text{Hess}_\Omega} u|^2 e^{-f} d\overline{\nu} + \int_\Omega \overline{Ric}_f (\overline{\text{grad}}\, u, \overline{\text{grad}}\, u) e^{-f} d\overline{\nu} \\ &+ 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta_f(u) e^{-f} d\overline{\nu} + \int_{\partial\Omega} A(\text{grad}\ u, \text{grad}\ u) e^{-f} d\overline{\nu} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 H_f e^{-f} d\overline{\nu}, \end{aligned} \tag{86}$$

onde ν é o vetor unitário exterior normal ao $\partial\Omega$, A é a segunda forma fundamental do $\partial\Omega$ com respeito ao normal ν, $\overline{Ric}_f$ denota a curvatura de Ricci-Bakry-Émery em $(\Omega, \overline{g})$, Δ_f e H_f denota o f-Laplaciano em $\partial\Omega$ e a curvatura média com densidade do $\partial\Omega$, respectivamente.

Podemos reformular a fórmula de Reilly acima em termo do m-Bakry-Émery tensor de Ricci. De fato, se $m > n+1$, seja $\alpha = \frac{m}{n+1}$. Usando que para qualquer $\alpha > 1$

vale a seguinte desigualdade $(x+y)^2 \geq \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\alpha-1}$, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |\overline{\mathrm{Hess}}u|^2 &\geq \frac{1}{n+1}(\overline{\Delta}u)^2 = \frac{1}{n+1}(\overline{\Delta}_f u + \langle\overline{\mathrm{grad}}f, \overline{\mathrm{grad}}u\rangle)^2 \\ &\geq \frac{1}{n+1}\Big[\frac{n+1}{m}(\overline{\Delta}_f u)^2 - \frac{1}{\frac{m}{n+1}-1}\langle\overline{\mathrm{grad}}f, \overline{\mathrm{grad}}u\rangle^2\Big] \\ &= \frac{1}{m}(\overline{\Delta}_f u)^2 - \frac{1}{m-n-1}\langle\overline{\mathrm{grad}}f, \overline{\mathrm{grad}}u\rangle^2. \end{aligned} \tag{87}$$

Substituindo (87) na fórmula de Reilly (Proposição 4.1) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{m-1}{m}\int_\Omega (\overline{\Delta}_f u)^2 e^{-f} &\geq \int_\Omega \Big(\overline{Ric}_f(\overline{\mathrm{grad}}u, \overline{\mathrm{grad}}u) - \frac{1}{m-n-1}\langle\overline{\mathrm{grad}}f, \overline{\mathrm{grad}}u\rangle^2\Big)e^{-f} \\ &\quad +2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\Delta_f(u)e^{-f} + \int_{\partial\Omega} A(\mathrm{grad}\,u, \mathrm{grad}\,u)e^{-f} \\ &\quad +\int_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2 H_f e^{-f}. \end{aligned}$$

Portanto, vale a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned} \frac{m-1}{m}\int_\Omega (\overline{\Delta}_f u)^2 e^{-f} &\geq \int_\Omega \overline{Ric}_f^m(\overline{\mathrm{grad}}u, \overline{\mathrm{grad}}u)e^{-f} + 2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\Delta_f(u)e^{-f} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} A(\mathrm{grad}\,u, \mathrm{grad}\,u)e^{-f} + \int_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2 H_f e^{-f}. \end{aligned} \tag{88}$$

O leitor interessado em aprofundar-se na teoria de variedades Riemannianas com densidade pode pesquisar o livro de Grigor'yan (2012) e o paper de Morgan (2005).

4.2 Estimativa tipo Choi e Wang em espaços com densidade

Esta seção contém essecialmente os resultados principais deste capítulo e um breve histórico do problema abordado. Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada. Se $\partial M = \emptyset$, o problema de autovalores fechado para M é a determinação de existência ou não de soluções não-triviais $u \in C^\infty(M)$ para a EDP

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

em M. De forma análoga, se $\partial M \neq \emptyset$, o problema de autovalores de Dirichlet para M é a determinação da existência ou não de soluções não-triviais $u \in C^\infty(M) \cap C^0(M)$ para a EDP acima, com $u_{|\partial M} = 0$. O estudo do primeiro autovalor do Laplaciano despertou grande interesse com a famosa conjectura de Yau.

"Se $\varphi : \Sigma \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima, compacta e mergulhada, então $\lambda_1(\Sigma) = n$."

Em 1983, Choi e Wang (1983) deram uma resposta parcial, obtendo o seguinte resultado que deu indícios à validade da conjectura acima.

Teorema 4.1 (Choi-Wang, (1983)) *Se $\varphi : \Sigma \hookrightarrow M^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima, compacta e mergulhada onde M é uma variedade Riemanniana compacta com $\mathrm{Ric}_M \geq k > 0$, então*

$$\lambda_1(\Sigma) \geq \frac{k}{2}.$$

Observando a belíssima ideia de Choi e Wang, em 1999 Barros e Bessa (1999) conseguiram melhorar a estimativa em termos da solução do seguinte problema de bordo de Dirichlet

$$\begin{cases} \overline{\Delta} w &= 0 \quad \text{em } \Omega_1 \\ w &= \xi \quad \text{no } \partial\Omega_1 = \varphi(\Sigma), \end{cases}$$

onde Ω_1 é uma componente conexa de M e ξ é a primeira autofunção para o problema de autovalores fechado em $\varphi(\Sigma)$

$$\Delta\xi + \lambda_1(\Sigma)\xi = 0.$$

Eles provaram o seguinte.

Teorema 4.2 (Barros-Bessa, 1999) *Se $\varphi : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima, compacta e mergulhada, então*

$$\lambda_1(\Sigma) \geq \frac{n}{2}(1 + \rho(\varphi)),$$

para uma constante positiva $\rho(\varphi) \in (0, 1]$ dependendo da imersão.

Assim, temos um forte indício da validade da conjectura de Yau.

Seguindo em linhas mais gerais, estas vertentes foram elevadas para operadores mais gerais que o Laplaciano, no caso, o f-Laplaciano já definido na seção anterior. Neste sentido, vamos em busca de uma resposta para a conjectura de Yau em espaços com densidade.

Seja $(M^n, g, e^{-f}dv)$ uma variedade Riemanniana fechada com densidade e com tensor de Ricci-Bakry-Émery positivo. Em um importante trabalho publicado no J. Differential Geometry em 2009, Wei e Wylie (2009, Teorema 7.4) provaram um lema tipo Frankel, qual seja: quaisquer duas hipersuperfícies f-mínimas fechadas Σ_1 e Σ_2 em M satisfazem $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Seguindo na mesma linha, Li e Wei (2015) deram uma prova alternativa usando a fórmula de Reilly (86). Eles provaram o seguinte:

Lema 4.1 *Seja $(M^n, g, e^{-f}dv)$ uma variedade Riemanniana fechada com densidade e com Ric_f positivo. Então, quaisquer duas hipersuperfícies f-mínimas fechadas e mergulhadas Σ_1 e Σ_2 em M satisfazem $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Assim, qualquer hipersuperfície f-mínima fechada e mergulhada em M é conexa.*

Recordemos o Teorema de Separação de Jordan-Brower (1997, Teorema 7.10): se $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície conexa e fechada, então $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma$ tem exatamente duas componentes conexas, uma das quais é limitada e ambas abertas e tendo Σ como bordo. Em 1970 (Lawson; 1970) provou que dada uma hipersuperfície mínima, fechada e mergulhada Σ numa variedade fechada M com curvatura de Ricci positiva, se ambas Σ e M são orientáveis, então $M \setminus \Sigma$ consiste de duas componentes Ω_1 e Ω_2. O próximo lema, provado em (Li, Wei 2015, Lema 6) é uma generalização do resultado de Lawson para o caso f-minimal, que é basicamente uma versão do Teorema de Jordan-Brower em espaços com densidade e será de grande importância na demonstração do nosso teorema principal. Por completude faremos a prova do mesmo.

Lema 4.2 *Seja $(M^n, g, e^{-f}d\overline{v})$ uma variedade fechada, com densidade e com* Ric_f *positivo, e seja Σ uma hipersuperfície f-mínima, fechada e mergulhada em M. Se ambas Σ e M são orientáveis, então $M \setminus \Sigma$ consiste de duas componentes Ω_1 e Ω_2.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que se $(\Omega, g, e^{-f}dv)$ é uma varidedade com densidade, compacta, conexa, com bordo $\partial\Omega \neq \emptyset$, $\mathrm{Ric}_f > 0$ e f-curvatura média do bordo não-negativa, então $\partial\Omega$ é conexo. De fato, argumentando como na prova do Lema 4.1, suponha por contradição que $\partial\Omega$ não é conexo. Seja Σ uma de suas componentes. Escolha uma função f-harmônica w (i.e., $\overline{\Delta}_f w = 0$ em Ω) tal que $w = 0$ em Σ e tal que $w = 1$ em $\partial\Omega \setminus \Sigma$ (observemos que a existência de w é devida a resultados clássicos de EDPs elípticas como na prova do Lema 4.1). Assim, pela fórmula de Reilly (86) temos que

$$0 \geq \int_\Omega \mathrm{Ric}_f(\overline{\mathrm{grad}}w, \overline{\mathrm{grad}}w)e^{-f},$$

e sendo $\mathrm{Ric}_f > 0$, obtemos $w = const$, contradição.

A prova do Lema 4.2 segue um argumento análogo em (Lawson, 1970). Considere $Q = M \setminus \Sigma$. Para qualquer ponto $p \in \Sigma$ temos uma vizinhança $\mathcal{U}$ e coordenadas locais $\{x_1, \ldots, x_n\}$ em $\mathcal{U}$ tal que $\Sigma \cap \mathcal{U}$ corresponde ao hiperplano $x_1 = 0$. Assim, obtemos um sistema de coordenadas locais para os pontos de bordo de $Q^* = Q \cup \partial Q$ considerando primeiro $x_1 \geq 0$ e depois $x_1 \leq 0$. Observemos que Q^* tem $\mathrm{Ric}_f > 0$ e que sendo Σ f-mínima temos que ${H_f}^{\partial Q^*} \geq 0$. Desta forma, se Q^* fosse conexo então pelo que vimos no início da prova o bordo ∂Q^* seria conexo. Entretanto, desde que Σ é orientável e conexa pelo Lema 4.1, temos que ∂Q tem duas componentes. Logo, Q tem duas componentes Q_+ e Q_- e que o Q^* é união disjunta de $\widetilde{Q}_+$ e $\widetilde{Q}_-$. Isto conclui a demonstração.

Usando a fórmula de Reilly , Ma e Du (2010), Teorema 3) provaram que dada uma hipersuperfície f-mínima, fechada e mergulhada Σ numa variedade Riemanniana com densidade, fechada e orientável $(M^n, g, e^{-f}dv)$ com $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$, se Σ divide M em duas componentes, então o primeiro autovalor não-nulo do f-Laplaciano em Σ satisfaz $\lambda_1 \geq k/2$, o qual generalizou o Teorema 4.1 (veja 1983). Recentemente, em (Li, Wei, 2015) usou-se argumentos de recobrimento universal e o Lema 4.2 para mostrar que o teorema de Ma e Du (2010) vale sob uma hipótese mais fraca. Eles provaram o seguinte resultdo.

Teorema 4.3 (Li-Wei, 2015) *Seja $(M, \bar{g}, e^{-f}d\overline{v})$ uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional fechada e com densidade, tal que* $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$. *Se $\varphi : \Sigma \hookrightarrow M^{n+1}$ é uma* *hipersuperfície f-mínima, fechada e mergulhada em $(M, \bar{g}, e^{-f}d\overline{\nu})$, então*

$$\lambda_1^f(\Sigma) \geq \frac{k}{2}.$$

Usando o teorema acima, Li e Wei (2015) ainda conseguiram uma estimativa de volume, provando que: se Σ^2 é uma superfície f-mínima, fechada, de gênero γ e mergulhada numa variedade com densidade fechada $(M^3, \overline{g}, e^{-f}d\overline{\nu})$, tal que $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$ então

$$\int_\Sigma d\widetilde{\mu} \leq \frac{16\pi}{k}(1+\gamma), \tag{89}$$

onde $d\widetilde{\mu} = e^{-f}d\mu$ é a forma volume em Σ com respeito à métrica induzida de $(M, \widetilde{g})$.

Antes de enunciar nosso principal resultado precisamos fazer as seguinte considerações: seja $\varphi\colon \Sigma \hookrightarrow M_f$ uma hipersuperfície f-mínima, compacta e mergulhada em uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional compacta M_f e com densidade, tal que $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$. Usando os argumentos na prova de (Li, Wei, 2015, Teorema. 7) podemos assumir, sem perda de generalidade, que Σ e M_f são orientadas. Assim, pelo Lema 4.2, $\varphi(\Sigma)$ divide M em duas componentes conexas, Ω_1 e Ω_2 de tal forma que $M\backslash\varphi(\Sigma) = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\varphi(\Sigma) = \partial\Omega_i$, $i = 1, 2$. Considere o seguinte problema de bordo de Dirichlet em Ω_1.

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_f w &= 0, \quad \text{em } \Omega_1 \\ w &= \xi, \quad \text{no } \partial\Omega_1 = \varphi(\Sigma), \end{cases} \tag{90}$$

onde ξ é a primeira autofunção para o problema de autovalores fechado em $\varphi(\Sigma)$

$$\Delta_f \xi + \lambda_1^f(\Sigma)\xi = 0.$$

O teorema a seguir estende o resultado de Li e Wei (2015, Teorema 4.3) e além disso garante uma desigualdade de Poincaré em espaços com densidade, dando uma resposta parcialmente afirmativa à conjectura de Yau para hipersuperfícies f-mínimas.

Teorema 4.4 *Seja $\varphi : \Sigma^n \to M^{n+1}$ uma hipersuperfície f-mínima, fechada e mergulhada em uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional $(M, \overline{g}, e^{-f}d\overline{\nu})$ fechada e com densidade, tal que* $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$. *Seja $w : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ a solução do problema (90). Então*

i.)

$$\frac{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} \geq k.$$

ii.) O primeiro autovalor não-nulo é limitado inferiormente por

$$\lambda_1^f \geq \frac{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} \left[1 - \sqrt{1 - k\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}}\,\right] > \frac{k}{2}.$$

Demostração: Desde que $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq k > 0$, dado $\epsilon \in (0,k)$ podemos escolher $m = m(\epsilon) > n+1$ suficientemente grande tal que $\overline{\mathrm{Ric}}_f^m \geq (k-\epsilon) > 0$. Para cada $t \neq 0$, considere os seguintes problemas de Dirichlet:

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_f(w) &= 0 \quad \text{em } \Omega_1, \\ \quad w &= \xi \quad \text{no } \partial\Omega_1. \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{\Delta}_f(u) &= w \quad \text{em } \Omega_1, \\ \quad u &= t\xi \quad \text{no } \partial\Omega_1, \end{cases} \tag{91}$$

onde $\xi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma autofunção associada ao primeiro autovalor não-nulo de Σ, i.e. $\Delta_f^\Sigma \xi + \lambda_1^f(\Sigma)\xi = 0$. Aplicando a fórmula de Green em $w\overline{\Delta}_f w$, $u\overline{\Delta}_f w$ e usando as condições dadas nos problemas (91) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} w|^2 e^{-f} &= -\int_{\Omega_1} w\overline{\Delta}_f w e^{-f} + \int_\Sigma w\frac{\partial w}{\partial \nu}e^{-f} \\ &= \int_\Sigma \xi\frac{\partial w}{\partial \nu}e^{-f}, \end{aligned} \tag{92}$$

e

$$\begin{aligned} t\int_\Sigma \xi\frac{\partial w}{\partial \nu}e^{-f} &= \int_\Sigma t\xi\frac{\partial w}{\partial \nu}e^{-f} = \int_\Sigma u\frac{\partial w}{\partial \nu}e^{-f} \\ &= \int_{\Omega_1} \langle \overline{\mathrm{grad}} u, \overline{\mathrm{grad}} w\rangle e^{-f} + \int_{\Omega_1} u\overline{\Delta}_f w e^{-f} \\ &= \int_{\Omega_1} \langle \overline{\mathrm{grad}} u, \overline{\mathrm{grad}} w\rangle e^{-f}. \end{aligned} \tag{93}$$

Assim,

$$\int_{\Omega_1} \langle \overline{\mathrm{grad}} u, \overline{\mathrm{grad}} w\rangle e^{-f} = t\int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} w|^2 e^{-f}. \tag{94}$$

Novamente usando a fórmula de Green em $w\overline{\Delta}_f u$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \xi\frac{\partial u}{\partial \nu}e^{-f} &= \int_\Sigma w\frac{\partial u}{\partial \nu}e^{-f} = \int_{\Omega_1} w\overline{\Delta}_f u e^{-f} + \int_{\Omega_1} \langle \overline{\mathrm{grad}} u, \overline{\mathrm{grad}} w\rangle e^{-f} \\ &= \int_{\Omega_1} w^2 e^{-f} + \int_{\Omega_1} \langle \overline{\mathrm{grad}} u, \overline{\mathrm{grad}} w\rangle e^{-f}. \end{aligned} \tag{95}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (94) temos que

$$\begin{aligned} |t|\int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} w|^2 e^{-f} &\leq \int_{\Omega_1} |\langle \overline{\mathrm{grad}} w, \overline{\mathrm{grad}} u\rangle| e^{-f} \leq \int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} w||\overline{\mathrm{grad}} u| e^{-f} \\ &\leq \left(\int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} u|^2 e^{-f}\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} w|^2 e^{-f}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} u|^2 e^{-f} \geq t^2 \int_{\Omega_1} |\overline{\mathrm{grad}} w|^2 e^{-f}. \tag{96}$$

Por outro lado, de (94) e (95) temos que

$$t\int_{\Sigma}\xi\frac{\partial u}{\partial\nu}e^{-f}=t^2\int_{\Omega_1}|\overline{\mathrm{grad}}w|^2e^{-f}+t\int_{\Omega_1}w^2e^{-f}. \tag{97}$$

Substituindo (96) e (97) na fórmula de Reilly (88) aplicada na função u e assumindo, sem perda de generalidade, que $\int_{\partial\Omega_1}A(\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,u)e^{-f}\geq 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{m-1}{m}\int_{\Omega_1}w^2e^{-f} &\geq (k-\epsilon)\int_{\Omega_1}|\overline{\mathrm{grad}}u|^2e^{-f}+2\int_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial\nu}\Delta_f(t\xi)e^{-f}\\ &\geq\ (k-\epsilon)t^2\int_{\Omega_1}|\overline{\mathrm{grad}}w|^2e^{-f}-2\lambda_1\int_{\Sigma}t\xi\frac{\partial u}{\partial\nu}e^{-f}\\ &=(k-\epsilon)t^2\int_{\Omega_1}|\overline{\mathrm{grad}}w|^2e^{-f}-2\lambda_1\left[\int_{\Omega_1}(t^2|\overline{\mathrm{grad}}w|^2+tw^2)e^{-f}\right],\end{aligned} \tag{98}$$

onde denotamos $\lambda_1=\lambda_1^f(\Sigma)$. A desigualdade (98) vale para todo $t\neq 0$. Observe que a mesma ainda vale para $t=0$. Assim, obtemos um polinômio não-negativo $p_m(t)\geq 0$, onde

$$p_m(t)=[2\lambda_1-(k-\epsilon)]\cdot\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\cdot t^2+2\lambda_1\cdot\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\cdot t+\frac{m-1}{m}\cdot\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\geq 0.$$

Fazendo $\epsilon\to 0$ juntamente com $m\to\infty$ obtemos que para todo $t\in\mathbb{R}$

$$p(t)=[2\lambda_1-k]\cdot\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\cdot t^2+2\lambda_1\cdot\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\cdot t+\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\geq 0.$$

Desde que $2\lambda_1-k\geq 0$ (veja Teorema 4.3), a primeira consequência é que o discriminante do polinômio acima é não-positivo, i.e,

$$\lambda_1^2\cdot\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\leq[2\lambda_1-k]\cdot\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}. \tag{99}$$

Observe que existe pelo menos um λ_1 satisfazendo a desigualdade (99). Portanto, da desigualdade acima obtemos a seguinte desigualdade de Poincaré

$$\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\geq k\cdot\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}.$$

Isto prova o ítem (i).

Agora seja t_o o único número real tal que $p'(t_o)=0$, i.e.,

$$t_o=-\frac{\lambda_1\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{(2\lambda_1-k)\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}.$$

Uma vez que

$$
\begin{aligned}
0 \leq p(t_o) &= (2\lambda_1 - k)\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2 \frac{\lambda_1^2\|w\|^4_{L^2_f(\Omega_1)}}{(2\lambda_1 - k)^2\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^4_{L^2_f(\Omega_1)}} \\
&\quad -2\lambda_1\|w\|^2 \frac{\lambda_1\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{(2\lambda_1 - k)\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} + \|w\|^2 \\
&= \frac{\lambda_1^2\|w\|^4_{L^2_f(\Omega_1)}}{(2\lambda_1 - k)\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} - \frac{2\lambda_1^2\|w\|^4_{L^2_f(\Omega_1)}}{(2\lambda_1 - k)\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} + \|w\|^2 \\
&= -\frac{\lambda_1^2\|w\|^4_{L^2_f(\Omega_1)}}{(2\lambda_1 - k)\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} + \|w\|^2
\end{aligned}
$$

implica

$$
\frac{\lambda_1^2\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{(2\lambda_1 - k)\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} \leq 1,
$$

temos que

$$
\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\lambda_1^2 - 2\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}\lambda_1 + k\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)} \leq 0. \tag{100}
$$

Da expressão (100) obtemos

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &\geq \frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} - \frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}\sqrt{1 - k\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}} \\
&= \frac{k}{2} - \frac{k}{2} + \frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} - \frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}\sqrt{1 - k\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{2}\left[\frac{2}{k}\frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} - \frac{k}{k}\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} - \frac{2}{k}\frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}\sqrt{1 - k\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}}\right] \\
&> \frac{k}{2}.
\end{aligned}
$$

Isto conclui o item *ii.*), e a prova do teorema.

A proposição a seguir é um resultado clássico de Yang e Yau (1994, 1980) que enunciaremos sem demonstração por questão de contexto e objetivo.

Proposição 4.2 *Seja Σ^2 uma superfície Riemanniana fechada e orientável com gênero γ. Então o primeiro autovalor $\lambda_1(\Delta)$ do Laplaciano Δ em Σ satisfaz*

$$
\lambda_1 Area(\Sigma) \leq 8\pi(1+\gamma).
$$

De posse da Proposição 4.2 obtemos a seguinte estimativa de volume como uma aplicação do Teorema 4.4 e que melhora a estimativa de volume (89).

Corolário 4.1 *Seja* Σ *uma superfície* f*-mínima fechada de gênero* γ *e mergulhada em uma variedade Riemanniana* 3*-dimensional* M_f *compacta e com densidade, tal que* $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$*. Então,*

$$\int_\Sigma d\mu \leq \frac{16\pi}{k(1+\delta(\varphi))}(1+\gamma)e^{\sup_M f}. \tag{101}$$

Demonstração: Seja $\varphi\colon \Sigma \to M$ uma superfície f-mínima compacta de gênero γ mergulhada numa 3-variedade compacta com densidade $M_f = (M, \overline{g}, e^{-f}d\overline{\nu})$ e com $\mathrm{Ric}_f \geq k > 0$. Adcionando uma constante se necessário, podemos assumir que f é não-negativa. Seja g a métrica induzida em Σ por φ e $g_o = (e^{-f} \circ \varphi)g$ uma nova métrica em Σ. Denote por ∇_o, Δ_o o gradiente e o Laplaciano em Σ com respeito à métrica g_o. Seja ${\lambda^o}_1(\Sigma)$ o primeiro autovalor do Laplaciano Δ_o em (Σ, g_o), que, por definição, satisfaz

$${\lambda^o}_1(\Sigma) = \inf_{\int_\Sigma u d\mu_o = 0, u\neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Sigma |\nabla_o u|^2_{g_o} d\mu_o}{\displaystyle\int_\Sigma u^2 d\mu_o}.$$

Uma vez que $\nabla_o u = (e^f \circ \varphi)\nabla u$ e $g_o = (e^{-f} \circ \varphi)g$ temos que

$$|\nabla_o u|^2 = g_o(\nabla_o u, \nabla_o u) = (e^{-f} \circ \varphi)g(\nabla_o u, \nabla_o u) = (e^{-f} \circ \varphi)(e^{2f} \circ \varphi)|\nabla u|^2 = (e^f \circ \varphi)|\nabla u|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
{\lambda^o}_1(\Sigma) &= \inf_{\int_\Sigma u(e^{-f}\circ\varphi)d\mu = 0, u\neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Sigma (e^f \circ \varphi)|\nabla u|^2 (e^{-f}\circ\varphi) d\mu}{\displaystyle\int_\Sigma u^2 (e^{-f}\circ\varphi) d\mu} \\
&\geq \inf_{\int_\Sigma u(e^{-f}\circ\varphi)d\mu = 0, u\neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Sigma e^{\min_M f}|\nabla u|^2 (e^{-f}\circ\varphi) d\mu}{\displaystyle\int_\Sigma u^2 (e^{-f}\circ\varphi) d\mu} \\
&= \lambda_1(\Sigma) e^{\min_M f} \geq \lambda_1(\Sigma),
\end{aligned}$$

desde que f é não-negativa. Pelo Teorema 4.4, temos a estimativa

$${\lambda^o}_1(\Sigma) \geq \frac{k}{2} + \frac{k}{2}\delta(\varphi), \tag{102}$$

onde

$$\delta(\varphi) = \left[\frac{2}{k}\frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} - \frac{k}{k}\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}} - \frac{2}{k}\frac{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}\sqrt{1 - k\frac{\|w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}{\|\overline{\mathrm{grad}}w\|^2_{L^2_f(\Omega_1)}}}\,\right].$$

Pela Proposição 4.2 temos

$$\lambda^o{}_1(\Sigma) \leq 8\pi(\gamma+1)\left(\int_\Sigma d\mu_o\right)^{-1}.$$

Logo, por (102) obtemos

$$8\pi(\gamma+1)\left(\int_\Sigma d\mu_o\right)^{-1} \geq \frac{k}{2}(1+\delta(\varphi)),$$

i.e.,

$$\int_\Sigma d\mu_o \leq \frac{16\pi}{k(1+\delta(\varphi))}(1+\gamma).$$

Por outro lado,

$$e^{-\sup_M f}\int_\Sigma d\mu \leq \int_\Sigma e^{-f}d\mu = \int_\Sigma d\mu_o \leq \frac{16\pi}{k(1+\delta(\varphi))}(1+\gamma).$$

Isto termina a demonstração.

4.3 Desigualdade de Heintze-Karcher em espaços com densidade

O celebrado Teorema de Alexandrov (1958) afirma que se $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície fechada mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante H, então $\varphi(M)$ é uma esfera de raio $1/|H|$. A prova original dar-se usando o princípio da tangência (ou princípio de Alexandrov). No entanto, Alías (2006) deu uma prova alternativa usando as clássicas fórmulas de Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}$ e o seguinte teorema devido a Heintze e Karcher (1987).

Teorema 4.5 *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada, e Ω um domínio compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M$. Consideramos sobre M a orientação dada pelo campo normal unitário η interior a Ω, e denotamos por H a curvatura média correspondente. Se $H \neq 0$ sobre M, então*

$$\mathrm{Vol}(\Omega) \leq \frac{1}{n+1}\int_M \frac{1}{H}dM, \tag{103}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\varphi(M)$ for uma esfera.

Para uma prova detalhada sugiro ao leitor pesquisar em (Caminha, 2010).

Seguindo as idéias de (Reilly, 1977), em 1987 Ros (1987) estendeu o Teorema de Alexandrov para curvatura média de ordem superior H_r, i.e., ele provou que se $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço Euclidiano com H_r constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então $\varphi(M)$ é a esfera. A ferramenta principal usada na prova por A. Ros foi o seguinte teorema tipo Hientze e Karcher:

Teorema 4.6 *Seja Ω^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta com bordo suave $\partial\Omega =$*

M e curvatura de Ricci não-negativa. Seja H a curvatura média do bordo M. Se H é positiva em toda parte, então

$$\int_M \frac{1}{H} dM \geq (n+1)\mathrm{Vol}(\Omega), \tag{104}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, Ω é isometrica à bola Euclidiana.

O próximo lema bem conhecido na literatura relaciona o gradiente de uma função suave numa variedade M compacta com a função distância a um ponto de M. Por completude, faremos a prova.

Lema 4.3 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que* $\mathrm{Hess}\, f = \alpha\langle , \rangle$*, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Se x_0 é um ponto de mínimo de f, então*

$$\mathrm{grad}\, f = \alpha\rho\frac{\partial}{\partial\rho},$$

onde ρ é a função distância ao ponto x_0.

Demonstração: Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = \frac{\partial}{\partial\rho}$, i.e, $\gamma(t) = x_0 + t\frac{\partial}{\partial\rho}$. Desde que x_0 é ponto de mínimo temos que x_0 é crítico. Pela Proposição 1.27 em (Caminha, 2010) segue que

$$(\mathrm{Hess}\, f)_{x_0}(\partial_\rho, \partial_\rho) = (f \circ \gamma)''(t)_{|t=0}.$$

Pela hipótese na Hessiana de f e o Lema de Gauss obtemos

$$(f \circ \gamma)''(t)_{|t=0} = \alpha\langle\partial_\rho, \partial_\rho\rangle = \alpha.$$

Integrando de x_0 a t, temos que

$$(f \circ \gamma)'(t)_{|t=0} - (f \circ \gamma)'(x_0)_{|t=0} = \alpha|x_0 - t| = \alpha\rho.$$

Uma vez que x_0 é ponto crítico, temos $(f \circ \gamma)'(x_0)_{|t=0} = 0$, logo, obtemos

$$(f \circ \gamma)'(t)_{|t=0} = \alpha\rho.$$

Assim, pela Proposição 1.5 em (Caminha, 2010) temos que

$$\langle \mathrm{grad}\, f, \partial_\rho\rangle = (f \circ \gamma)'(t)_{|t=0} = \alpha\rho.$$

Pela definição de gradiente, temos

$$\partial_\rho(f) = \langle \mathrm{grad}\, f, \partial_\rho\rangle = \alpha\rho.$$

Assim, obtemos

$$\partial_\rho(f)\partial_\rho = \alpha r \partial_\rho.$$

Portanto, a definição de gradiente em coordenadas permite concluirmos que

$$\operatorname{grad} f = \alpha\rho\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Isto conclui a demonstração.

De posse do lema acima, podemos enunciar e provar o resultado principal desta seção. Vale ressaltar que o teorema abaixo garante uma versão da desigualdade (104) em variedades Riemannianas com densidade. Provamos o seguinte.

Teorema 4.7 *Seja $\overline{\Omega}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana compacta com densidade e com bordo suave $\partial\overline{\Omega} = M$ tal que $\mathrm{Ric}_f \geq K^2$, onde $K = \max_{\overline{\Omega}} |\overline{\mathrm{grad}} f|$. Seja H_f a f-curvatura média do bordo M. Se H_f é positiva em toda parte, então*

$$\int_M \frac{1}{H_f} e^{-f} dM \geq \frac{n+2}{n+1}\mathrm{Vol}_f(\overline{\Omega}). \tag{105}$$

Se a igualdade ocorre, então $\overline{\Omega}$ é isométrica à bola Euclidiana.

Demonstração: Seja $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_f u = 1 & \text{em } \overline{\Omega}, \\ u_{|M} = 0 & \text{no } M. \end{cases}$$

Pelo Teorema da divergência temos que

$$V_f(\overline{\Omega}) = \int_{\overline{\Omega}} e^{-f} dV = \int_{\overline{\Omega}} (\overline{\Delta}_f u) e^{-f} dV = \int_M \frac{\partial u}{\partial \nu} e^{-f} dA. \tag{106}$$

Observemos que

$$(x+y)^2 \geq \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\alpha - 1}, \quad \forall \alpha > 1.$$

Assim, escolhendo $\alpha = \frac{n+2}{n+1}$ e usando as desigualdades de Newton e de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\overline{\mathrm{Hess}} u|^2 &\geq \frac{1}{n+1}(\overline{\Delta} u)^2 = \frac{1}{n+1}(\overline{\Delta}_f u + \langle \overline{\mathrm{grad}} f, \overline{\mathrm{grad}} u\rangle)^2 \\ &\geq \frac{1}{n+1}\left[\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1} - 1}\langle \overline{\mathrm{grad}} f, \overline{\mathrm{grad}} u\rangle^2\right] \\ &= \frac{1}{n+2} - \langle \overline{\mathrm{grad}} f, \overline{\mathrm{grad}} u\rangle^2 \\ &\geq \frac{1}{n+2} - K^2 |\overline{\mathrm{grad}} u|^2, \end{aligned} \tag{107}$$

onde a última desigualdade segue da hipótese $|\overline{\text{grad}} f| \leq K$. Substituindo (107) na fórmula de Reilly (86) e usando a hipótese de curvatura temos que

$$\begin{aligned} V_f(\overline{\Omega}) &\geq \frac{1}{n+2} V_f(\overline{\Omega}) - K^2 \int_{\overline{\Omega}} |\overline{\nabla} u|^2 e^{-f} + K^2 \int_{\overline{\Omega}} |\overline{\nabla} u|^2 e^{-f} \\ &+ \int_M \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big)^2 H_f e^{-f}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{n+1}{n+2} V_f(\overline{\Omega}) \geq \int_M \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big)^2 H_f e^{-f}. \tag{108}$$

Finalmente, de (106), (108) e desigualdade de Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} V_f(\overline{\Omega})^2 &= \Big(\int_M \frac{\partial u}{\partial \nu} e^{-f} dA \Big)^2 = \Big(\int_M (\frac{\partial u}{\partial \nu} H_f^{1/2}) H_f^{-1/2} e^{-f} dA \Big)^2 \\ &\leq \int_M \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big)^2 H_f e^{-f} dA \int_M H_f^{-1} e^{-f} dA \\ &\leq \frac{n+1}{n+2} V_f(\overline{\Omega}) \int_M \frac{1}{H_f} e^{-f} dA. \end{aligned}$$

Isto prova (105).

Se vale a igualdade, pela desigualdade de Newton temos que $\overline{\text{Hess}} u$ é proporcional à métrica em toda parte. Além disso, temos que $K = |\overline{\text{grad}} f|$, e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz existe $\beta > 0$ tal que

$$\overline{\text{grad}} f = \beta \overline{\text{grad}} u,$$

i.e.,

$$|\overline{\text{grad}} u| = \frac{K}{\beta}.$$

Assim, de (107) temos que

$$|\overline{\text{Hess}} u|^2 = \frac{1}{n+1} (\overline{\Delta} u)^2 \tag{109}$$

e

$$|\overline{\text{Hess}} u|^2 = \frac{1}{n+2} - \frac{K^4}{\beta^2}.$$

Daí, temos

$$\frac{\overline{\Delta} u}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{n+2} - \frac{K^4}{\beta^2}}. \tag{110}$$

Da igualdade (109) temos

$$\overline{\text{Hess}} u = \frac{\overline{\Delta} u}{n+1} \langle , \rangle. \tag{111}$$

Substituindo (110) em (111) obtemos

$$\overline{\text{Hess}}u = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{1}{n+2} - \frac{K^4}{\beta^2}}\langle , \rangle. \tag{112}$$

Lembremos da identidade de Ricci

$$\mathrm{R}(X,Y)\overline{\text{grad}}u = D_X(\overline{\text{Hess}}u)(Y) - D_Y(\overline{\text{Hess}}u)(X),$$

para quaisquer campos de vetores X, Y tangentes a $\overline{\Omega}$. Assim, derivando covariantemente (112) concluimos que

$$\mathrm{R}(X,Y)\overline{\text{grad}}u = 0, \tag{113}$$

onde R é a curvatura de $\overline{\Omega}$.

Do princípio do máximo temos que u atinge seu mínimo em algum ponto x_0 no interior de $\overline{\Omega}$. Pelo Lema 4.3 e igualdade (112) temos

$$\overline{\text{grad}}u = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{1}{n+2} - \frac{K^4}{\beta^2}}\rho\frac{\partial}{\partial\rho},$$

onde ρ é a função distância ao ponto x_0. Substituindo a igualdade acima em (113), obtemos $\mathrm{R}(X,Y)\partial_\rho = 0$, logo, $\overline{\Omega}$ tem curvatura seccional $K = 0$. Assim, pelo Teorema de Cartan temos que $\overline{\Omega}$ é uma bola Euclidiana cujo centro é x_0. Além disso,

$$u(x) = \left[2\sqrt{n+1}\left(\sqrt{\frac{1}{n+2} - \frac{K^4}{\beta^2}}\right)^{-1}\right]^{-1}\left(|x-x_0|^2 - a^2\right),$$

em M, onde a é o raio da bola. Isto termina a demonstração.

No relevante trabalho (Reilly, 1980), Reilly provou que se M é uma variedade Riemanniana compacta, com bordo convexo, curvatura de Ricci não-nagativa e curvatura média do bordo satisfazendo $H \geq \frac{A}{(n+1)V}$, então M é isométrica à uma bola Euclidiana. Em seguida, em 1987, Ros (1987) retirou a condição de bordo convexo e obteve o mesmo resultado de rigidez de Reilly (1980). Definindo a área do bordo de M_f por $A_f(M) = \int_{\partial M} e^{-f}dA$, obtemos uma aplicação para o Teorema 4.7, o qual estende parcialmente o teorema de Ros (1987) em espaços com densidade. Provamos o seguinte.

Corolário 4.2 *Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta com densidade, com bordo $\partial M \neq \emptyset$ e tal que $\mathrm{Ric}_f \geq K^2$, onde K é como no Teorema 4.7. Se a f-curvatura média do bordo satisfaz*

$$H_f \geq \frac{(n+1)A_f}{(n+2)V_f}$$

, então M é isométrica à uma bola Euclidiana.

Demonstração: A hipótese na curvatura implica

$$\int_{\partial M} \frac{1}{H_f} e^{-f} \leq \frac{n+2}{n+1} \int_{\partial M} \frac{V_f(M)}{A_f(M)} e^{-f} = \frac{n+2}{n+1} V_f(M).$$

Pela desigualdade (105) temos que

$$\int_{\partial M} \frac{1}{H_f} e^{-f} \leq \frac{n+2}{n+1} V_f(M) \leq \int_{\partial M} \frac{1}{H_f} e^{-f},$$

i.e., vale a igualdade em (105). Portanto, pelo Teorema 4.7, temos que M isométrica é a uma bola Euclidiana.

5 HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COM BORDO LIVRE PROPRIAMENTE MERGULHADAS

Neste capítulo faremos um estudo do primeiro autovalor não-nulo do problema de Steklov, onde estendemos em (Cunha, Batista, 2015) uma estimativa dada em (Fraser, Li, 2014) para hipersuperfícies mínimas, compactas e propriamente mergulhadas com bordo livre sobre uma variedade Riemanniana compacta, com curvatura de Ricci não-negativa e bordo convexo. A intenção deste estudo foi buscar uma resposta parcial para uma conjectura tipo Yau deixada por Fraser e Li (2014) para o primeiro autovalor de Steklov .

5.1 Hipersuperfícies mínimas com bordo livre e o problema de Steklov

Nesta seção contemplamos os ingredientes necessários para a Seção 5.2. Faremos as definições e exemplos pertinentes na literatura para uma melhor compreensão do leitor.

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, com bordo $\partial M \neq \emptyset$ e Laplaciano Δ. Dada uma função $u \in C^\infty(\partial M)$, seja $\widetilde{u}$ a extensão harmônica de u:

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{u} &= 0, \quad \text{em } M \\ \widetilde{u} &= u, \quad \text{no}\, \partial M. \end{cases}$$

Definição 5.1 *A aplicação de Dirichlet-Neumann é definida por*

$$\mathcal{L}\colon C^\infty(\partial M) \to C^\infty(\partial M)$$

tal que

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\nu},$$

onde ν é o co-normal exterior unitário ao longo do ∂M.

Os autovalores para este problema foram primeiramente estudados em 1902 por Steklov e por isto são chamados *autovalores de Steklov.*

Definição 5.2 *Se M é uma variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M, o problema de autovalores de Steklov é dado por:*

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \quad \text{em } M \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} &= \sigma u, \quad \text{no}\, \partial M, \end{cases} \tag{114}$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior ao ∂M, $\sigma \in \mathbb{R}$, e $u \in C^\infty(M)$.

Definição 5.3 *Os autovalores de Steklov são os autovalores da aplicação de Dirichlet-Neumann, o qual leva uma dada função suave no bordo à derivada normal de sua extensão harmônica ao interior.*

A aplicação de Dirichlet-Neumann $\mathcal{L} : C^\infty(\partial M) \to C^\infty(\partial M)$ é um operador não-negativo, auto-adjunto com spectro discreto satisfazendo

$$\sigma_0 = 0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_k \leq \cdots \to \infty.$$

Usando a fómula de Green no problema (114) temos

$$0 = \int_M u\Delta u = -\int_M |\operatorname{grad} u|^2 + \int_{\partial M} u\frac{\partial u}{\partial \nu},$$

i.e.,

$$\int_M |\operatorname{grad} u|^2 = \int_{\partial M} u\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma \int_{\partial M} u^2.$$

Assim, podemos caracterizar o primeiro autovalor não-nulo de Steklov de maneira variacional por

$$\sigma_1 = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_M |\operatorname{grad} u|^2 dvol}{\displaystyle\int_{\partial M} u^2 dvol}, \ \int_{\partial M} udvol = 0, \ u \neq 0 \right\}. \tag{115}$$

Para o que segue, seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Seja $\langle , \rangle$ a métrica em M e ∇ a conexão Riemanniana em M. A segunda forma fundamental do bordo ∂M com respeito ao normal unitário interior μ é definida por

$$A^{\partial M}(u, v) = \langle \nabla_u v, \mu \rangle,$$

onde u, v são tangente ao bordo ∂M. A **curvatura média** $H^{\partial M}$ do bordo ∂M é assim definida como o traço de $A^{\partial M}$, i.e.,

$$H^{\partial M} = \sum_{j=1}^{n-1} A^{\partial M}(e_j, e_j),$$

onde $e_1, \ldots, e_{n-1}$ é qualquer base ortonormal para $T\partial M$.

Definição 5.4 *Seja $\varphi\colon \Sigma \hookrightarrow M$ uma hipersuperfície compacta (possivelmente com bordo). Dizemos que Σ está* **propriamente imersa** *em M se $\varphi(\partial\Sigma) = \varphi(\Sigma) \cap \partial M$.*

Se φ é um mergulho, então podemos pensar $\Sigma \subset M$ como uma subvariedade de M e tomamos φ como sendo a aplicação inclusão $\partial M \to M$.

Definição 5.5 *Σ é dita uma hipersuperfície mínima com* **bordo livre** *se Σ é mínima (i.e. a curvatura média é identicamente nula) e Σ toca o bordo ∂M ortogonalmente ao longo do bordo $\partial\Sigma$.*

Observação 5.1 *No caso em que $n = 3$, Li (2011, Teorema 1.1.8) provou que qualquer 3-variedade Riemanniana compacta M com bordo $\partial M \neq \emptyset$ admite uma superfície mínima compacta mergulhada não-trivial Σ com bordo livre $\partial\Sigma$ contido no ∂M. Em outras palavras, Σ toca ∂M ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$.*

Existem alguns exemplos de subvariedades com bordo livre na bola unitária $\mathbb{B}^n$. Abordemos alguns, mas desde já, sugiro ao leitor pesquisar o trabalho de Fraser e Schoen (2012).

Exemplo 5.1 *k-planos equatorial $D^k \subset \mathbb{B}^n$* são os exemplos mais simples de subvariedade mínima com bordo livre.

Exemplo 5.2 *Catenóide crítico.* Considere o catenóide parametrizado em $\mathbb{R} \times S^1$ dado por

$$\psi(t,\theta) = (\cosh t \cos\theta, \cosh t \sin\theta, t).$$

Para uma única escolha de T_0, a restrição de ψ a $[-T_0, T_0] \times S^1$ define um mergulho mínimo sobre uma bola tocando o bordo da bola ortogonalmente. Podemos então redimensionar o raio da bola para 1 e assim obter o *catenóide crítico.*

5.2 Estimativa de primeiro autovalor para o problema de Steklov

Um trabalho devido a Fraser e Schoen (2011) mostra que em uma subvariedade mínima Σ propriamente imersa na bola unitária B_1 no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com bordo livre na esfera unitária ∂B_1, as funções coordenadas de Σ são autofunções de Steklov com autovalor igual a 1. Assim, uma questão pertinente para hipersuperfícies é o caso quando é mergulhada com codimensão 1: este é o primeiro autovalor de Steklov?(veja 2014, Seção 3). Assim, eles conjcturaram o seguinte.

"*Seja Σ uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada na bola unitária Euclidiana B^n, com bordo livre em ∂B^n. Então $\sigma_1(\Sigma) = 1$?*"

No sentido de responder à questão acima, Fraser e Li (2014) deram uma resposta parcial da mesma forma como Choi e Wang (1983) responderam parcialmente à conjectura de Yau (1980). Eles provaram o seguinte:

Teorema 5.1 *(Fraser-Li, 2014)Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, orientável e com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e que o bordo ∂M é estritamente convexo com respeito ao normal unitário interior. Seja $k > 0$ uma constante tal que $A^{\partial M}(v,v) \geq k > 0$ para qualquer vetor unitário v no ∂M.*

Suponha que Σ é uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada em M, com bordo livre no ∂M. Se um dos seguintes ítens valer,

(i) Σ é orientável; ou

(ii) $\pi_1(M)$ é finito;

então temos a seguinte estimativa

$$\sigma_1(\Sigma) \geq \frac{k}{2},$$

onde σ_1 é o primeiro autovalor de Steklov da aplicação de Dirichlet-Neumann em Σ.

Em 1997 Escobar (1997) provou que se M^n é uma variedade Riemanniana compacta com bordo e dimensão $n \geq 3$ tal que $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ e a segunda forma fundamental

A satisfaz $A \geq k_0 I$ em M, $k_0 > 0$, então $\sigma_1 > k_0/2$. Nossa contribuição neste capítulo (veja 2015) foi melhorar a estimativa de Fraser e Li (Teorema 5.1) para $\sigma_1 > k/2$ e dar uma resposta parcial à conjectura acima.

Para nossos propósitos necessitamos de algumas considerações a seguir. Seja $\varphi\colon \Sigma \to M$ uma hipersuperfície mínima propriamente mergulhada satisfazendo à condição de bordo livre numa variedade compacta e orientável M, com bordo $\partial M \neq \emptyset$ estritamente convexo e curvatura de Ricci não-negativa. O próximo lema devido a (Fraser, Li, 2014) garante, sob as hipóteses de curvatura em M e ∂M, um resultado de conexidade.

Lema 5.1 *Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta e com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e que o bordo ∂M é estritamente convexo com respeito ao normal unitário interior. Então, quaisquer duas hipersuperfícies mínimas propriamente mergulhadas Σ_1 e Σ_2 em M com bordo livre em ∂M devem si intersectar, i.e., $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Além disto, qualquer hipersuperfície mínima propriamente mergulhada em M com bordo livre deve ser conexa.*

Para uma prova veja (2014, Lema 2.4).

A ferramenta principal usada na prova do Lema 5.1 foi a seguinte fórmula de Reilly dada em (Fraser, Li, 2014).

Proposição 5.1 *Seja Ω uma variedade n-dimensional compacta e com bordo suave por partes $\partial\Omega = \cup \sum_{i=1}^{k} \Sigma_i$. Suponha que f é uma função contínua em Ω onde $f \in C^{\infty}(\Omega \backslash S)$, $S = \cup \sum_{i=1}^{k} \partial\Sigma_i$, e que exista alguma constante $C > 0$ tal que $\|f\|_{C^3(\Omega')} \leq C$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$. Então, vale a fórmula de Reilly:*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathrm{Ric}^{\Omega}(Df, Df) - (\Delta^{\Omega} f)^2 + ||Hess_{\Omega} f||^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \int_{\Sigma_i} \Big[\Big(-\Delta^{\Sigma_i} f + H^{\Sigma_i} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \Big) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} + \langle \nabla^{\Sigma_i} f, \nabla^{\Sigma_i} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \rangle + h^{\Sigma_i}(\nabla^{\Sigma_i} f, \nabla^{\Sigma_i} f) \Big] \end{aligned} \tag{116}$$

Aqui, Ric^{Ω} *é o tensor de Ricci de Ω; Δ^{Ω}, $Hess_{\Omega}$ e D são o operadore Laplaciano, Hessiano e gradiente em Ω respectivamente; Δ^{Σ_i} e ∇^{Σ_i} são os operadores Laplaciano e gradiente em cada Σ_i; η_i é a normal unitária interior de Σ_i; H^{Σ_i} e h^{Σ_i} são a curvatura média e segunda forma fundamental de Σ_i em Ω com respeito à normal unitária interior respectivamente.*

Para uma prova veja (2014, Lema 2.6).

No mesmo trabalho, eles provaram um resultado tipo Jordan-Brower: nas hipóteses do Lema 5.1, se ambas Σ e M forem orientáveis, então $M \setminus \varphi(\Sigma)$ consiste de duas componentes Ω_1 e Ω_2 (veja 2014, Corolário 2.10). Tomemos $\Omega = \Omega_1$. Seja $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$ onde $\Gamma \subset \partial M$. Assim, $\partial\Sigma = \partial\Gamma$. Notemos que Γ não é necessariamente conexo, porém cada componente de Γ deve intersectar Σ ao longo de alguma componente de $\partial\Sigma$. Do contrário, ∂M teria mais de uma componente, o qual contradiz a Proposição 2.8 em (Fraser, Li, 2014).

Consideremos o seguinte problema de autovalores de Steklov:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\widetilde{\xi} & = & 0, & \text{em } \Sigma \\ \widetilde{\xi} & = & \xi, & \text{no } \partial\Sigma \\ \frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial\eta_\Sigma} & = & \sigma_1\xi, & \text{no } \partial\Sigma \end{array}\right. \tag{117}$$

onde $\sigma_1 = \sigma(\Sigma)$ é o primeiro autovalor não-nulo de Steklov e ξ é uma primeira autofunção da aplicação de Dirichlet-Neumann em Σ. Seja $w \in C^\infty(\Gamma)$ a extensão harmônica de $\xi \in C^\infty(\partial\Sigma)$ ao Γ:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta w & = & 0, & \text{em } \Gamma \\ w & = & \xi, & \text{no } \partial\Gamma, \end{array}\right. \tag{118}$$

desde que $\partial\Gamma = \partial\Sigma$.

Seguindo as ideias de Barros e Bessa (1999) e (Fraser, Li, 2014), provamos o seguinte teorema que melhora a estimativa de Fraser e Li (Teorema 5.1).

Teorema 5.2 *Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, orientável e com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e que o bordo ∂M é estritamente convexo com respeito ao normal unitário interior. Seja $k > 0$ uma constante tal que $A^{\partial M}(v, v) \geq k > 0$ para qualquer vetor unitário v em ∂M.*

Seja $\varphi\colon \Sigma \to M$ uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada em M, com bordo livre em ∂M. Seja $w\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ a solução de (118). *Se Σ é orientável ou $\pi_1(M)$ é finito, então temos a desigualdade estrita*

$$\sigma_1(\Sigma) > \frac{k}{2},$$

onde $\sigma_1(\Sigma)$ é primeiro autovalor não-nulo de Steklov da aplicação de Dirichlet-Neumann em Σ.

Demonstração: Primeiramente suponha que Σ é orientável. Uma vez que M é orientável, temos que Σ é conexa e $M \setminus \varphi(\Sigma)$ consiste de duas componentes Ω_1 e Ω_2 (2014, Corolário 2.5 e Corolário 2.10). Seja $\Omega = \Omega_1$ e $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$, onde $\Gamma \subset \partial M$, logo temos que $\partial\Sigma = \partial\Gamma$.

Para cada $t \neq 0$, consideremos os seguintes problemas de Dirichlet :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta^\Gamma w & = & 0, & \text{em } \Gamma, \\ w & = & \xi, & \text{no } \partial\Gamma, \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcll} \Delta^\Gamma u & = & w, & \text{em } \Gamma, \\ u & = & t\xi, & \text{no } \partial\Gamma, \end{array}\right. \tag{119}$$

onde $\xi \in C^\infty(\partial\Sigma)$ é uma primeira autofunção associada à aplicação de Dirichlet-Neumann em Σ, i.e., existe $\widehat{\xi} \in C^\infty(\Sigma)$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta_\Sigma\widetilde{\xi} & = & 0, & \text{em } \Sigma \\ \widetilde{\xi} & = & \xi, & \text{no } \partial\Sigma \\ \frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial\nu_\Sigma} & = & \sigma_1\xi, & \text{no } \partial\Sigma, \end{array}\right. \tag{120}$$

onde ν_Σ é o vetor co-normal exterior de $\partial\Sigma$ com respeito a Σ, e $\sigma_1 = \sigma_1(\Sigma)$.

Aplicando as fórmulas de Green em $w\Delta^\Gamma w$, $u\Delta^\Gamma w$, $w\Delta^\Gamma u$ e usando os dados dos problemas (119) temos

$$\int_\Gamma |\operatorname{grad} w|^2 = \int_{\partial\Gamma} \xi\frac{\partial w}{\partial\nu_\Gamma} \quad \text{e} \quad \int_\Gamma \langle\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w\rangle = t\int_{\partial\Gamma} \xi\frac{\partial w}{\partial\nu_\Gamma}.$$

Logo, temos

$$\int_\Gamma \langle\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w\rangle = t\int_\Gamma |\operatorname{grad} w|^2. \tag{121}$$

Além disso, obtemos

$$\int_\Gamma w^2 + \int_\Gamma \langle\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} u\rangle = \int_{\partial\Gamma} \xi\frac{\partial u}{\partial\nu_\Gamma}. \tag{122}$$

Da equação (121) e desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\left(\int_\Gamma |\operatorname{grad} u|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Gamma |\operatorname{grad} w|^2\right)^{1/2} \geq |t|\int_\Gamma |\operatorname{grad} w|^2. \tag{123}$$

Portanto

$$\int_\Gamma |\operatorname{grad} u|^2 \geq t^2\int_\Gamma |\operatorname{grad} w|^2. \tag{124}$$

Por outro lado, das equações (121) e (122) obtemos

$$t\int_{\partial\Gamma} \xi\frac{\partial u}{\partial\nu_\Gamma} = t^2\int_\Gamma |\operatorname{grad} w|^2 + t\int_\Gamma w^2. \tag{125}$$

No que segue, consideremos o problema de bordo de Dirichlet na variedade n-dimensional compacta Ω, com bordo suave por partes $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta_\Omega\psi & = & 0, & \text{em } \Omega \\ \psi & = & t\widetilde{\xi}, & \text{em } \Sigma \\ \psi & = & u, & \text{em } \Gamma. \end{array}\right. \tag{126}$$

Notemos que os dados de bordo de Dirichlet são contínuos. Assim, resultados padrões em problemas de bordo elípticos (1959, 1980 e 1981) implicam que existe ψ solução clássica para o problema (126) tal que $\psi \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega \setminus \partial\Sigma)$, para todo $\alpha \in (0,1)$. Observemos que em Σ temos $\Delta_\Sigma \psi = t\Delta_\Sigma \widetilde{\xi} = 0$. Assumindo, sem perda de generalidade, que $\int_\Sigma A^\Sigma(\operatorname{grad}^\Sigma \psi, \operatorname{grad}^\Sigma \psi) \geq 0$ (pois do contrário, escolhemos $\Omega = \Omega_2$), obtemos pela fórmula de Reilly (116) aplicada à função ψ

$$\begin{aligned} 0 \geq & \int_\Sigma \langle \operatorname{grad}_\Sigma \psi, \operatorname{grad}_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Sigma} \rangle - \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} \Delta_\Gamma \psi \\ & + \int_\Gamma \langle \operatorname{grad}_\Gamma \psi, \operatorname{grad}_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} \rangle + k \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma \psi|^2, \end{aligned}$$

onde η_Σ e η_Γ são os normais unitários interior de Σ e Γ, respectivamente, com respeito a Ω. Integrando por partes, sabemos que

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{grad}_\Sigma \psi, \operatorname{grad}_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Sigma} \rangle = - \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Sigma} \Delta_\Sigma \psi + \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Sigma} = \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Sigma},$$

e que

$$\int_\Gamma \langle \operatorname{grad}_\Gamma \psi, \operatorname{grad}_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} \rangle = - \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} \Delta_\Gamma \psi + \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma}.$$

Logo,

$$0 \geq \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Sigma} + \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} + k \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma \psi|^2 - 2 \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} \Delta_\Gamma \psi,$$

onde ν_Σ e ν_Γ são os vetores co-normais exterior de $\partial\Sigma = \partial\Gamma$ com respeito a Σ e Γ, respectivamente. A hipótese de Σ ter bordo livre, i.e., Σ toca Γ ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma = \partial\Gamma$, implica que $\nu_\Sigma = -\eta_\Gamma$ e $\eta_\Sigma = -\nu_\Gamma$ ao longo do bordo comum $\partial\Sigma$. Como $\psi \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, temos que o gradiente $\operatorname{grad}_\Omega \psi$ é contínuo em Ω, logo

$$\int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Sigma} = - \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Gamma} = \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma}.$$

Portanto,

$$0 \geq 2 \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} + k \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma \psi|^2 - 2 \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} \Delta_\Gamma \psi. \tag{127}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\Gamma} &= \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_\Gamma} = t \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_\Gamma} = t \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \eta_\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_\Gamma} \\ &= -t \int_{\partial \Gamma} \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \nu_\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu_\Gamma} = -\sigma \int_{\partial \Gamma} t \xi \frac{\partial u}{\partial \nu_\Gamma}, \end{aligned} \tag{128}$$

onde na penúltima igualdade usamos que $\eta_\Gamma = -\nu_\Sigma$, e denotamos $\sigma = \sigma_1(\Sigma)$. Substituindo (119), (120), (124), (125) e (128) na desigualdade (127), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq -2\sigma \int_{\partial\Gamma} t\xi \frac{\partial u}{\partial \nu_\Gamma} + kt^2 \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma w|^2 - 2\int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial \eta_\Gamma} \\ &\geq -2\sigma \int_\Gamma (t^2 |\operatorname{grad}_\Gamma w|^2 + tw^2) + kt^2 \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma w|^2 - 2\int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial \eta_\Gamma}. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy com $\epsilon = 1/2$, temos

$$\begin{aligned} 2\int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial \eta_\Gamma} &\leq 2\epsilon \int_\Gamma w^2 + \frac{2}{4\epsilon} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_\Gamma}\right)^2 \\ &= \int_\Gamma w^2 + \int_\Gamma \langle \operatorname{grad}_\Gamma u, \eta_\Gamma \rangle^2 \\ &\leq \int_\Gamma w^2 + \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma u|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$(2\sigma - k)t^2 \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma w|^2 + 2\sigma t \int_\Gamma w^2 + \int_\Gamma w^2 + \int_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma u|^2 \geq 0. \tag{129}$$

Observemos que para todo $t \in \mathbb{R}$, vale

$$p(t) = [2\sigma - k] \cdot \|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2(\Gamma)} \cdot t^2 + 2\sigma \cdot \|w\|^2_{L^2(\Gamma)} \cdot t + \Phi(u, w) \geq 0.$$

onde $\Phi(u, w) = \|w\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Gamma)}$. Mas, isto implica que o discriminante de $p(t)$ é não-positivo. Logo,

$$\|w\|^4_{L^2(\Gamma)}\sigma^2 - 2\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2(\Gamma)}\Phi(u, w)\sigma + k\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2(\Gamma)}\Phi(u, w) \leq 0.$$

Da equação acima segue que

$$\sigma \geq \frac{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2(\Gamma)}\Phi(u, w)}{\|w\|^4_{L^2(\Gamma)}} - \frac{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2(\Gamma)}\Phi(u, w)}{\|w\|^4_{L^2(\Gamma)}} \sqrt{1 - \frac{k\|w\|^4_{L^2(\Gamma)}}{\|\operatorname{grad} w\|^2_{L^2(\Gamma)}\Phi(u, w)}}. \tag{130}$$

Argumentando como na prova do Teorema 4.4 do Capítulo 4, concluimos que $\sigma > \frac{k}{2}$. Assim, provamos o caso em que Σ é orientável.

Suponhamos que $\pi_1(M)$ é finito, mas Σ é não orientável. Seja $\widetilde{M}$ o recobrimento universal de M. Temos que $\widetilde{M}$ herda as mesmas hipóteses de curvatura de M. Como $\pi_1(M)$ é finito, temos que $\widetilde{M}$ é compacta e $\pi : \widetilde{M} \to M$ é um recobrimento finito. Seja $\widetilde{\Sigma}$ o levantamento de Σ, ou seja, $\widetilde{\Sigma} = \pi^{-1}(\Sigma)$. Uma vez que $\widetilde{M}$ é simplesmente conexa e $\widetilde{\Sigma}$ é propriamente mergulhada, temos que ambas $\widetilde{M}$ e $\widetilde{\Sigma}$ são orientáveis. Logo, pelo provado acima, concluimos que $\sigma_1(\widetilde{\Sigma}) > k/2$. Como o pullback por π da primeira autofunção de Steklov de Σ em $\widetilde{\Sigma}$ é ainda uma autofunção de $\widetilde{\Sigma}$, concluimos que

$$\sigma_1(\Sigma) \geq \sigma_1(\widetilde{\Sigma}) > \frac{k}{2}.$$

Isto conclui o prova do teorema.

Observação 5.2 A desigualdade (130) ainda implica a seguinte desigualdade

$$\|\nabla^\Gamma w\|^2_{L^2(\Gamma)}\Phi(u,w) \leq k\|w\|^4_{L^2(\Gamma)}. \tag{131}$$

Portanto, a conjectura é válida desde que

$$\|\nabla^\Gamma w\|^2_{L^2(\Gamma)}\Phi(u,w) = k\|w\|^4_{L^2(\Gamma)}.$$

O primeiro resultado no sentido de dar uma limitação para σ_1 foi dado por Weinstock (1954), onde ele prova que se Σ é um domínio plano, simplesmente conexo e compacto, então

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2\pi,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é um disco.

A estimativa de Weinstock foi estendida por Fraser e Schoen (2011) para superfícies Riemanniana arbitrárias com bordo. Eles provaram que se Σ é uma superfície compacta de gênero g com γ componentes de bordo, então

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g+\gamma). \tag{132}$$

Observe que se $g=0$ e $\gamma=1$ então tem-se a estimativa de Weinstock.

A primeira aplicação do Teorema 5.2 é um resultado tipo Yang e Yau (1994,1980), onde obtemos a seguinte estimativa no comprimento do bordo de uma superfície mínima com bordo livre em termos de sua topologia.

Corolário 5.1 *Seja M^3 uma variedade Riemanniana 3-dimensional compacta, orientável e com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e o bordo ∂M é estritamente convexo com respeito ao normal interior unitário. Seja $k>0$ uma constante tal que $A^{\partial M}(v,v) \geq k > 0$ para qualquer vetor unitário v em ∂M. Seja $\varphi\colon \Sigma^2 \to M^3$ uma superfície mínima, compacta e propriamente mergulhada de gênero g com γ componentes de bordo com comprimento total $L(\partial\Sigma)$ e bordo livre em ∂M. Então,*

$$L(\partial\Sigma) < \frac{4\pi}{k}(g+\gamma). \tag{133}$$

Demonstração: Primeiramente, temos pelo Teorema 2.11 em (Fraser, Li, 2014) que M^3 é difeomorfa a bola unitária B^3. Como B^3 é simplesmente conexa, temos que qualquer superfície propriamente mergulhada em M é automaticamente orientável. Além disso, desde que Σ é compacta, temos a validade da desigualdade (132). Uma vez que Σ é orientável, temos pelo Teorema 5.2 que $\sigma_1(\Sigma) > k/2$. Combinando isto com a desigualdade (132) obtemos (133). Isto conclui o corolário.

Uma consequência direta do Corolário 5.1 na bola unitária é a seguinte:

Corolário 5.2 *Seja Σ^2 uma superfície mínima, compacta e propriamente mergulhada na bola unitária B^3, com bordo livre em ∂B^3. Então $L(\partial\Sigma) < 4\pi(g+\gamma)$.*

Novamente, lembrando que a bola unitária B^n é simplesmente conexa, i.e., $\pi_1(B^n) < \infty$, obtemos uma outra aplicação do Teorema 5.2 dando uma resposta parcial à conjectura de Fraser e Li (2014) para o primeiro autovalor de Steklov.

Corolário 5.3 *Seja Σ uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada na bola unitária B^n, com bordo livre em ∂B^n. Então $\sigma_1 > \frac{1}{2}$.*

6 CONCLUSÃO

Nesta trabalho de tese, abordamos o estudo de hipersuperfícies mínimas, estimativas de curvatura de ordem superior e de resultados tipo-Liouville. Primeiramente, obtemos uma estimativa de curvatura de ordem superior, supondo que a imersão está contida em uma horobola. Aqui, ainda fica a questão:“ Em que condições a mesma estimativa é obtida se considerarmos a imersão contida em um wedge(i.e., uma variedade produto $N \times L$, onde a imersão está de um cone de N)?”

Em seguida, provamos um teorema tipo-Liouville, obtendo uma bela aplicação para folheação de gráficos de Killing, mostrando que um gráfico é uma folha da folheação de Killing. Aqui, fica a questão:“Se o vetor curvatura média aponta na direção oposta ao campo de Killing Y, ainda vale o teorema?”

Prosseguindo, provamos uma estimativa de primeiro autovalor para hipersuperfícies f-mínimas no sentido dar uma resposta parcial a conjectura de Yau para o caso de hipersuperfícies f-mínimas. Além disso, provamos uma estimativa tipo Heintzer-Karcher para uma variedade compacta e com densidade. Aqui, fica a questão: “O teorema tipo Heintzer-Karcher ainda é válido se assumirmos $\mathrm{Ric}_f \geq 0$?”

Finalmente, mostramos uma estimativa de primeiro autovalor para o problema de Steklov e, com isto, obtivemos um avanço em responder à conjectura de Fraser e Li. Aqui, ainda fica a questão: “Seja Σ uma hipersuperfície mínima, compacta e propriamente mergulhada na bola unitária Euclidiana B^n, com bordo livre em ∂B^n. Então $\sigma_1(\Sigma) = 1$?”

REFERÊNCIAS

AGMON, S.; DOUGLIS, A.; NIRENBERG, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 12, n. 4, p. 623–727, 1959.

ALBANESE, G.; ALÍAS, L.; RIGOLI, M. A general form of the weak maximum principle and some applications. **Revista Matemática Iberoamericana**, v. 29, n. 4, p. 1437–1476, 2013.

ALEKSANDROV, A. Uniqueness theorems for surfaces in the large V. **Vestnik Leningrad Universite Mathematics.**, v. 13, p. 5–8, 1958.

ALÍAS, L. **Análisis geométrico y geometría global de superficies: una introducción elemental**. 2006.

ALÍAS, L.; DAJCZER, M.; RIGOLI, M. Higher order mean curvature estimates for bounded complete hypersurfaces. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 84, p. 73–83, 2013.

ALÍAS, L.; LIRA, J.; RIGOLI, M. **Geometric elliptic functionals and mean curvature**. Artigo aceito para publicação em **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.**, 2015.

AZZAM, A. On Dirichlet's problem for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 11, n. 2, p. 248–253, 1980.

AZZAM, A. On Dirichlet's Problem for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains. II. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 12, n. 2, p. 242–242, 1981.

BARBOSA, J. L.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 15, n. 3, p. 277–297, 1997.

BARROS, A.; BESSA, G. P. Estimates of the first eigenvalue of minimal hypersurfaces of S^{n+1}. **Matemática Contemporânea**, v. 17, p. 42–47, 1999.

BESSA, G.; LIRA, J.; PIGOLA, S.; SETTI, A. Curvature estimates for submanifolds immersed into horoballs and horocylinders. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 431, n. 2, p. 1000–1007, 2015.

CAMINHA, A. **Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, 2004.

CAMINHA, A. **Tópicos de Geometria Diferencial**. Preprint, 2010.

CHENG, S.-Y.; YAU, S.T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. **Mathematische Annalen**, v. 225, n. 3, p. 195–204, 1977.

CHENG, X.; MEIJIA, T.; ZHOU, D. Eigenvalue estimate and compactness for closed f-minimal surfaces. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 271, n. 2, p. 347–367, 2014.

CHOI, H. I.; WANG, A. N. A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. **Journal of Differential Geometry**, v. 18, n. 3, p. 559–562, 1983.

CUNHA, A. W.; BATISTA, R. M. Estimates for the first eigenvalue of closed f-minimal hypersurfaces. *Preprint*, 2014.

CUNHA, A. W.; BATISTA, R. M. **Estimates of the first Steklov eigenvalue of properly embedded minimal hypersurface with free boundary**. Artigo aceito para publicação em **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, 2015.

CUNHA, A. W.; MEDEIROS, A. Liouville type theorems for the $\mathcal{L}$-Laplacian on completes Riemannian manifolds. *Preprint*, 2014.

CUNHA, A. W.; MEDEIROS, A. **Higher Order Mean Curvature Estimates for complete Hypersurfaces into horoballs**. Artigo aceito para publicação em **Acta Mathematica Hungarica(doi-10.1007/s10474-015-0536-3)**, 2015.

do CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2008.

ESCOBAR, J. F. The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue. **Journal of Functional Analysis**, v. 150, n. 2, p. 544–556, 1997.

FRASER, A.; LI, M. Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary. **Journal of Differential Geometry**, v. 96, n. 2, p. 183–200, 2014.

FRASER, A.; SCHOEN, R. The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces. **Advances in Mathematics**, v. 226, n. 5, p. 4011–4030, 2011.

FRASER, A.; SCHOEN, R. Minimal surfaces and eigenvalue problems. **Geometric Analysis, Mathematical Relativity, and Nonlinear Partial Differential Equations**, v. 599, p. 105–121, 2012.

GARDING, L. An inequality for hyperbolic polynomials. **Journal of Mathematics and Mechanics**, v. 8, n. 6, p. 957–965, 1959.

GREENE, R.; WU, H. **Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole**, v.

699. Springer Verlag, Berlin, 1979.

GRIGOR'YAN, A. **Heat kernel and analysis on manifolds**, v. 47. American Mathematical Soc., 2012.

HEINTZE, E.; IM HOF, H.-C. Geometry of horospheres. **Journal of Differential Geometry**, v. 12, n. 4, p. 481–491, 1977.

JORGE, L.; XAVIER, F. An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersions. **Mathematische Zeitschrift**, v. 178, n. 1, p. 77–82, 1981.

LAWSON, H. B. The unknottedness of minimal embeddings. **Inventiones Mathematicae**, v. 11, n. 3, p. 183–187, 1970.

LI, H.; WEI, Y. f-minimal surface and manifold with positive m-Bakry–Émery Ricci curvature. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 25, n. 1, p. 421–435, 2015.

LI, M. **On a Free Boundary Problem for Embedded Minimal Surfaces and Instability Theorems for Manifolds with Positive Isotropic Curvature**. Stanford University, 2011.

MA, L.; DU, S.-H. Extension of Reilly formula with applications to eigenvalue estimates for drifting Laplacians. **Comptes Rendus Mathematique**, v. 348, n. 21, p. 1203–1206, 2010.

MADSEN, I. H.; TORNEHAVE, J. **From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes**. Cambridge University Press, 1997.

MORGAN, F. Manifolds with density. **Notices of the AMS**, p. 853–858, 2005.

MULERO, A. R. Compact Hypersurfaces with Constant Higher Order Mean Curvatures. **Revista Matemática Iberoamericana**, v. 3, n. 3, p. 447–453, 1987.

OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 19, n. 2, p. 205–214, 1967.

PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. A remark on the maximum principle and stochastic completeness. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, n. 4, p. 1283–1288, 2003.

PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A.G. **Maximum principles on Riemannian manifolds and applications**, v. 822. American Mathematical Soc., 2005.

PUCCI, P.; SERRIN, J. A note on the strong maximum principle for elliptic differential inequalities. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 79, n. 1, p. 57–71, 2000.

PUCCI, P.; SERRIN, J. The strong maximum principle revisited. **Journal of Differential Equations**, v. 196, n. 1, p. 1–66, 2004.

PUCCI, P.; SERRIN, J.; ZOU, H. A strong maximum principle and a compact support principle for singular elliptic inequalities. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 78, n. 8, p. 769–789, 1999.

RANJBAR-MOTLAGH, A. Rigidity of spheres in Riemannian manifolds and a non-embedding theorem. **Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society**, v. 32, n. 2, p. 159–171, 2001.

REILLY, R. Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. **Indiana University Mathematics Journal**, , n. 26, 1977.

REILLY, R. Geometric applications of the solvability of Neumann problems on a Riemannian manifold. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 75, n. 1, p. 23–29, 1980.

RIGOLI, M.; SETTI, A. Liouville type theorems for φ-subharmonic functions. **Revista Matemática Iberoamericana**, v. 17, p. 471–520, 2001.

RIGOLIi, M.; SALVATORI, M.; VIGNATI, M. A Liouville type theorem for a general class of diferential operators on complete manifolds. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 194, n. 2, 2000.

SAKAI, T. **Riemannian Geometry**, v. 149. A. M. S., 1992.

SCHOEN, R.; YAU, S.-T. **Lectures on Differential Geometry**, v. 2. 1994.

WEI, G.; WYLIE, W. Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor. **Journal of Differential Geometry**, v. 83, n. 2, p. 377–406, 2009.

WEINSTOCK, R. Inequalities for a classical eigenvalue problem. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, v. 3, n. 6, p. 745–753, 1954.

YANG, P.; YAU, S.-T. Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze**, v. 7, n. 1, p. 55–63, 1980.

YAU, S.T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.