UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RAVIK MESQUITA MOREIRA DA ROCHA

SEMIGRUPOS DE WEIERSTRASS E O IDEAl CANÔNICO DE CURVAS NÃO-TRIGONAIS

FORTALEZA

2015

RAVIK MESQUITA MOREIRA DA ROCHA

SEMIGRUPOS DE WEIERSTRASS E O IDEAL CANÔNICO DE CURVAS NÃO-TRIGONAIS:

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

R576s Rocha, Ravik Mesquita Moreira da
Semigrupos de Weierstrass e o ideal canônico de curvas não-trigonais / Ravik Mesquita Moreira da Rocha. – 2015.
68 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Geometria Algébrica
Orientação: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

1. Semigrupos de Weierstrass. 2. Curvas não-trigonais. 3. Ideal canônico. I. Título.

CDD 516.35

RAVIK MESQUITA MOREIRA DA ROCHA

SEMIGRUPOS DE WEIERSTRASS E O IDEAL CANÔNICO DE CURVAS NÃO-TRIGONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Aprovada em: 21/08/2015.

BANCA EXAMINADORA

José Alberto Duarte Maia

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof Dr. Francisco Luiz Rocha Pimentel
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Angelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pela boa educação, amor e carinho que sempre me proporcionaram. Obrigado por tudo!

Agradeço aos meus colegas da graduação/mestrado, em especial ao Válber e Helano pelas noites de sono perdidas estudando até de manhã e ao Elisafã pelas discussões não-matemáticas nos intervalos das aulas. Obrigado também aos colegas da Álgebra: João Luiz, Renan e Roger.

Agradeço a todos os professores que contribuíram na minha formação, em especial ao professor Alberto Maia pela dedicação e paciência durante todo período de orientação. Aos professores Antonio Caminha e Diego Moreira pelas excelentes aulas. Agradeço a FUNCAP pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a minha companheira Eveline pelo amor, confiança e paciência por sempre (ou melhor, quase sempre) ter entendido o meu tempo escasso desde que entrei na graduação em Matemática.

"Et toute science, quand nous l'entendons non comme un instrument de pouvoir et de domination, mais comme aventure de connaissance de notre espèce à travers les âges, n'est autre chose que cette harmonie, plus ou moins vaste et plus ou moins riche d'une époque à l'autre, qui se déploie au cours des générations et des siècles, par le délicat contrepoint de tous les thèmes apparus tour à tour, comme appelés du néant."
Alexander Grothendieck.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar que se uma curva é não-trigonal, podemos obter através do teorema de Petri um conjunto mínimo de geradores para o seu ideal canônico e também conseguir um critério de não-trigonalidade. Para demonstrar esses fatos, o trabalho possui dois momentos. Primeiro desenvolve alguns resultados de semigrupos numéricos e a sua relação com a teoria clássica de curvas algébricas, para em seguida obter uma base monomial para o espaço de diferenciais regulares de ordem arbitrária. O trabalho será norteado pelo artigo de título: "Weierstrass Semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves" do autor Gilvan Oliveira.

Palavras-chave: Semigrupos de Weierstrass. Curvas Não-Trigonais. Ideal Canônico.

RESUMÉ

Le but de ce travaill est de montrer que si une courbe est non trigonale, nous pouvouns obtenir à travers du théorème de Petri un ensemble minimal de générateurs pour son idéal canonique et aussi obtenir un critère de non trigonalité. Pour démontrer ces faits, le travail contient deux parties. Premièrement, il développe certains résultats de semigroupes numériques et leur relation avec la théorie classique des courbes algébriques. Ensuite il obtient une base monomial pour l'espace des différentielles réguliers de ordre arbitraire. Le travail sera guidé par l'article: "Weierstrass Semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves" de l'auteur Gilvan Oliveira.

Mots-clés: Demi-groupe. Weierstrass. courbes non trigonales. idéal canonique.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma característica da Geometria Algébrica consiste em utilizar de ferramentas algébricas para resolver problemas geométricos. No segundo capítulo desenvolveremos primeiramente a parte algébrica do trabalho que será um importante instrumento nos resultados que seguirão. Estudaremos nesse capítulo os chamados semigrupos numéricos provando alguns teoremas que serão úteis nos capítulos subsequentes.

No terceiro capítulo desenvolveremos a teoria clássica de curvas algébricas e mostraremos que semigrupos de Weierstrass são de fato numéricos para assim poder usar toda a teoria de semigrupos numéricos desenvolvidas no capítulo dois. Foi feito um grande esforço para que esse capítulo esteja auto-contido e procuramos resistir sempre que possível a tentação de usar ferramentas mais potentes para demonstrar alguns teoremas que exigiam um pouco mais de trabalho.

A partir do quarto capítulo, identificaremos a curva C com sua imagem pelo mergulho canônico $(\omega_1 : \ldots : \omega_g) : C \to \mathbb{P}^{g-1}$. Assim, consideraremos C como uma curva projetiva não-singular de gênero $g \geq 4$ e grau $2g-2$. Estudaremos a partir daí o divisor de interseção da curva C com o espaço osculador de dimensão $g-3$. Nós assumiremos que este divisor intersecta a curva em apenas um ponto para obtermos a partir disso o teorema clássico de Max Noether. Não somente isso, conseguiremos ainda explicitar uma base monomial para o espaço das diferenciais regulares de ordem n.

No último capítulo usaremos o teorema de Petri simultaneamente com alguns resultados de semigrupos numéricos para obter um critério de não-trigonalidade. Além disso se a curva C não é trigonal, iremos construir uma conjunto minimal de geradores para o seu ideal canônico.

2 SEMIGRUPOS NUMÉRICOS

Nesta seção introduziremos o conceito de semigrupo numérico e estudaremos algumas de suas propriedades. Para maiores detalhes consulte ROSALES 2009. Como de costume, o conjunto dos números naturais será denotado por $\mathbb{N}$. Além disso, consideramos $0 \in \mathbb{N}$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \leq n$, vamos usar a notação de intervalo $[m, n]$ para representar o conjunto $\{x \in \mathbb{N}; m \leq x \leq n\}$. A cardinalidade de um conjunto finito X será denotada por $|X|$. Se A e B são dois subconjuntos de $\mathbb{N}$, definimos $A + B := \{a + b / a \in A; b \in B\}$.

Lembramos que um conjunto munido de uma operação binária associativa recebe o nome de semigrupo. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ munido da operação de adição usual é um semigrupo comutativo com elemento neutro, $0 \in \mathbb{N}$. Um subconjunto $H \subset \mathbb{N}$ fechado para a adição certamente também é um semigrupo. Nesse caso, se $0 \in H$, diremos que H é um monoide e com a notação H^* fazemos referência ao conjunto $H \setminus \{0\}$. O menor elemento de H^* é chamado de multiplicidade do monoide H.
Se $S \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto qualquer, então é fácil ver que

$$\langle S \rangle := \{c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_n s_n / c_1, c_2, \ldots, c_n, n \in \mathbb{N} \text{ e } s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\}$$

é um monoide.

Um subconjunto S, de um monoide H, será dito um conjunto de geradores para H se todo elemento de H se escrever como combinação $\mathbb{N}$-linear (coeficientes em $\mathbb{N}$) de elementos de S, isto é, $H = \langle S \rangle$. Um conjunto de geradores $S \subset H$ será dito minimal, se nenhum de seus subconjuntos próprios ainda gerar H.

Vamos mostrar que todo monoide possui conjunto minimal de geradores único e finito. Começamos com o seguinte resultado, que garante a existência e a unicidade do conjunto gerador minimal.

Proposição 2.1. *Se $H \subset \mathbb{N}$ é um monoide, então $S = H^* \setminus (H^* + H^*)$ é um conjunto de geradores para H. Além disso, qualquer conjunto de geradores de H necessariamente contém S.*

Prova. Seja h um elemento de H^* com $h \notin S$. Desse modo, existe $x, y \in H^*$ tal que $h = x + y$. Repetindo esse procedimento em um número finito de vezes para x e y, encontramos $s_1, \ldots, s_n \in S$ tal que $h = s_1 + \ldots + s_n$. Isto prova que S é um conjunto de geradores de H.

Para a provar a segunda afirmação. Seja A um sistema de geradores de H. Vamos mostrar que $S \subset A$. Se $s \in S$, então existem $a_1, \ldots, a_m \in A$ tal que $s = d_1 a_1 + \ldots + d_m a_m$, onde $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}$. Como $s \notin H^* + H^*$, então $s = a_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, m\}$ e portanto $s \in A$, donde $S \subset A$. □

2.1 O conjunto de Apéry

Se $H \subset \mathbb{N}$ é um monoide e $n \in H$ é um elemento não-nulo, definimos o conjunto de Apéry de n em H como sendo:

$$Ap(n, H) := \{h \in H / h - n \notin H\}.$$

Note que $0 \in Ap(n, H)$, e mais que isso, qualquer elemento $m \in H$ com $m < n$ é tal que $m \in Ap(n, H)$, pois nesse caso $m - n < 0$. Por outro lado, se $m \geq n$ escrevemos $m = nq + r$, com $0 \leq r < n$. Daí, se $m \notin Ap(n, H)$ segue que $(q-1)n + r \in H$. Assim, concluímos que $m \in Ap(n, H)$ se e somente se $q = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ é o menor inteiro tal que $nq+r \in H$. Em outras palavras, o conjunto de Apéry contém no máximo um representante de cada classe de congruência $\overline{r} \in \mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Isso nos permite concluir que

$$|Ap(n, H)| \leq n.$$

Proposição 2.2. *O conjunto $\{n\} \cup Ap(n, H)^*$ é um conjunto de geradores para H.*

Prova. Dado $m \in H$, escrevemos $m = nq + r$, com $0 \leq r < n$. Daí, se $w_r \in H$ é o menor elemento de H tal que $w_r \equiv r (mod\, n)$, temos que $w_r \in Ap(n, H)$ e $w_r = tn + r$, com $t \leq q$. Portanto, $m = qn + r = (q-t)n + tn + r = (q-t)n + w_r \in \langle \{n\} \cup Ap(n, H)^* \rangle$. □

Observaçao 2.3. *Se tomarmos n_1 como sendo a multiplicidade de H, isto é, o menor elemento não nulo de H, a proposição 2.1 nos permite concluir que*

$$|H^* \setminus (H^* + H^*)| \leq |\{n_1\} \cup Ap(n_1, H)^*| \leq n_1.$$

Portanto, como havíamos antecipado, todo monoide possui conjunto de geradores minimal finito e único.

2.2 Semigrupos numéricos

Como vimos na seção anterior, dado um monoide $H \subset \mathbb{N}$ e um elemento não nulo $n \in H$, o conjunto de Apéry de n em H é tal que $|Ap(n, H)| \leq n$. Analisemos então o que deve ocorrer para que tenhamos $|Ap(n, H)| = n$. Voltando à seção anterior, vemos que tal igualdade equivale ao fato que H contenha um representante de cada classe de congruência $\overline{r} \in \mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Nesse caso, sendo w_r o menor elemento de H tal que $w_r \equiv r (mod\, n)$, com $0 \leq r < n$, e escrevendo $w_r = q_r n + r$ segue que $nq + r \in H \Leftrightarrow q \geq q_r$. Portanto, sendo

$L := \mathbb{N} \setminus H$, temos

$$L = \{t_1 n + 1/0 \leq t_1 < q_1\} \cup \{t_2 n + 2/0 \leq t_2 < q_2\} \cup \ldots \cup \{t_{n-1} n + (n-1)/0 \leq t_{n-1} < q_{n-1}\}.$$

Assim, $\mathbb{N} \setminus H$ é um conjunto finito. Reciprocamente, se $\mathbb{N} \setminus H$ é finito, então tomando $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $qn + r \in H$ para todo $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Dessa forma, H contém representantes de todas as classes de congruência módulo n e portanto, $|Ap(n, H)| = n$. Em particular, vemos que se a igualdade $|Ap(n, H)| = n$ ocorre para um determinado elemento $n \in H^*$, então também ocorrerá para qualquer outro elemento. Essa discussão motiva a seguinte definição.

Definição 2.4. *Um monoide $H \subset \mathbb{N}$ é dito um semigrupo numérico quando $L := \mathbb{N} - H$ é finito.*

O conjunto L é chamado de conjunto de lacunas de H e sua cardinalidade $|L|$ é chamada de genero do semigrupo H. Usamos a notação $g(H)$ para denotar o genero. Note que com a notações introduzidas acima, temos

$$g(H) = \sum_{i=1}^{n-1} q_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{w_i - i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} w_i - \frac{n-1}{2}.$$

Notação: Quando trabalhamos com um semigrupo numérico de gênero g, escrevemos o seu conjunto de lacunas na forma $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_g\}$, com $l_1 < l_2 < \ldots < l_g$. Do mesmo modo, escrevemos $H = \{n_0 = 0, n_1, n_2, \ldots\}$, com os elementos escritos em ordem crescente. Observe que n_1 é a multiplicidade de H. Claramente, $n_1 = 1$ implica $H = \mathbb{N}$ e portanto, $L = \emptyset$. Por conta disso, doravante vamos considerar apenas semigrupos numéricos de multiplicidade maior que 1.

Temos uma outra caracterização dos semigrupos numéricos que diz respeito ao máximo divisor comum de seus elementos.

Proposição 2.5. *Seja $H = \langle A \rangle \subset \mathbb{N}$ um monoide gerado por um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$. Temos que H é um semigrupo numérico se e somente se $mdc(A) = 1$.*

Prova. Suponha que $\langle A \rangle$ seja um semigrupo numérico e $d = mdc(A)$. Provaremos que $d = 1$. Primeiramente note que se $a \in \langle A \rangle$, então existem $a_1, \ldots a_n \in A$ tal que $a = c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n$ com $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$. Desse modo, como $d | a_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $d | a$. Como estamos supondo $\langle A \rangle$ é semigrupo numérico, temos que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito e portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que n e $n+1$ estão em $\langle A \rangle$. Logo, $d | n$ e $d | (n+1)$ o que implica que $d = 1$.

Vamos mostrar agora que se $mdc(A) = 1$, então $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico. Como $0 \in \langle A \rangle$, basta provar que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito. Já que $mdc(A) = 1$, existem $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que $c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n = 1$. Pondo os termos com os c_i negativos no segundo membro, existem $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $c_{i_1} a_{i_1} + \ldots + c_{i_k} a_{i_k} = 1 - c_{j_1} a_{j_1} - \ldots - c_{j_l} a_{j_l}$. Desse modo, pondo $s = -c_{j_1} a_{j_1} - \ldots - c_{j_l} a_{j_l}$, temos $s, s+1 \in \langle A \rangle$.

Vamos mostrar que se $n \geq (s-1)s+(s-1)$, então $n \in \langle A \rangle$. Pelo algoritmo da divisão, existem inteiros q e r tais que $n = qs + r$ com $0 \leq r < s$. Como estamos supondo $n \geq (s-1)s + (s-1)$, temos que $q \geq s-1 \geq r$. Portanto, $n = (rs+r) + (q-r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle$. Daí segue que os elementos de $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ são estritamente menores que $(s-1)s+(s-1)$, donde $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito.

$\square$

Observaçao 2.6. *Note que H é um semigrupo numérico, então l_g é o maior inteiro que não pertence a H. Portanto, tomando um conjunto finito de geradores $A = \{a_1, a_2, \dots a_l\}$ com $mdc(A) = 1$. Temos que $b = l_g$ é o maior inteiro tal que a equação diofantina $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_lx_l = b$, com $x_i \in \mathbb{N}$ não possui solução. O problema de determinar um tal inteiro nas condições acima é conhecido como problema de Frobenius e por conta disso, dizemos que l_g é o número de Frobenius de H. Nestes termos, revendo a demonstração acima segue que se $s \in \mathbb{N}$ é o menor inteiro tal que $s, s+1 \in H$, então $l_g \leq s^2 - s - 1$, que é o número de Frobenius do par $s, s+1$.*

2.3 Cotas para l_g

A fórmula para o gênero de um semigrupo numérico juntamente com a observação que $l_g + n_1$ é o maior elemento de $Ap(n_1, H)$ nos permite deduzir uma cota inferior para l_g. Com efeito, fazendo $g = g(H)$ e $n = n_1 > 1$, temos:

$$g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} w_i - \frac{n-1}{2} \leq \frac{1}{n}.(n-1)(l_g+n) - \frac{n-1}{2} \Rightarrow l_g \geq \frac{n}{n-1}g - \frac{n}{2}.$$

Note primeiramente que como já temos $l_g \geq g$, a desigualdade acima só é interessante se $\frac{n}{n-1}g - \frac{n}{2} > g$, ou seja, se $g \geq \binom{n}{2}$. Observe agora que $\frac{n}{n-1}g - \frac{n}{2}$ é decrescente como função de n. Em particular, seu valor máximo é obtido quando $n_1 = 2$ (lembre que estamos trabalhando apenas com semigrupos para os quais $n_1 > 1$). Esse valor máximo é ninguém menos que $2g-1$, que como veremos a seguir é exatamente a melhor cota superior para l_g. Para estabelecer esse fato, destacamos a seguinte observação.

Observaçao 2.7. Se l é uma lacuna de H, isto é, $l \in L$, então para todo $m \in H \cap [0, l]$ temos que $l - m$ é lacuna, isto segue diretamente do fato que a operação em H é fechada. Por outro lado, Se $l \in L$ e $m \in L \cap [0, l]$, em geral, nada podemos dizer sobre $l - m$. A proposição a seguir caracteriza os casos para os quais podemos garantir que $l - m \in H, \forall m \in L \cap [0, l]$.

Proposição 2.8. *Para todo semigrupo numérico H, temos que $l_j \leq 2j - 1$, para todo $j = 1, \dots g$. Além disso, os seguintes fatos são equivalentes*

a) $l_j = 2j - 1$.

b) $|H \cap [0, l_j]| = |L \cap [0, l_j]|$.

c) $m \in L \cap [0, l_j] \Leftrightarrow l_j - m \in H \cap [0, l_j]$.

Prova. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, g\}$ considere a função $\varphi_j : [0, l_j] \to [0, l_j]$ definida por $\varphi_j(m) = l_j - m$. Observe que φ_j é uma bijeção tal que $\varphi_j^{-1} = \varphi_j$. Além disso, como já observamos, se $m \in H$, então $l_j - m \in L$. Dessa forma, $\varphi_j(H \cap [0, l_j]) \subset L \cap [0, l_j]$. Portanto, segue que

$$l_j + 1 - j = |H \cap [0, l_j]| = |\varphi_j(H \cap [0, l_j])| \leq |L \cap [0, l_j]| = j.$$

Assim temos $l_j \leq 2j - 1$. Ademais, vale a igualdade se e somente se $\varphi_j(H \cap [0, l_j]) = L \cap [0, l_j]$, ou equivalentemente, $|H \cap [0, l_j]| = |L \cap [0, l_j]|$. Por fim, como $\varphi_j^{-1} = \varphi_j$, a igualdade $\varphi_j(H \cap [0, l_j]) = L \cap [0, l_j]$ equivale a $\varphi_j(L \cap [0, l_j]) = H \cap [0, l_j]$. Essas igualdades garantem que $m \in L \cap [0, l_j] \Leftrightarrow l_j - m \in H$. Reciprocamente,a propriedade descrita no item "*c*" garante que $\varphi_j(L \cap [0, l_j]) \subset H \cap [0, l_j]$, o que implica em $|L \cap [0, l_j]| = |H \cap [0, l_j]|$, pois φ_j é injetiva e já sabemos que $|H \cap [0, l_j]| \leq |L \cap [0, l_j]|$. □

Portanto, para todo semigrupo numérico vale que $l_g \leq 2g - 1$, e esta é a cota que procurávamos. Dessa forma, temos que o número de Frobenius l_g de um semigrupo de gênero g e multiplicidade n satisfaz a seguinte condição

$$\frac{n}{n-1} g - \frac{n}{2} \leq l_g \leq 2g - 1.$$

Note que para $n = 2$ a cota inferior coincide com a cota superior. Assim, temos necessariamente $l_g = 2g - 1$. Mais geralmente, os semigrupo para os quais l_g atinge esse valor são denominados conforme a seguinte definição.

Definição 2.9. *Dizemos que um semigrupo numérico é simétrico se l_g atinge a cota máxima, isto é, $l_g = 2g - 1$.*

Observaçao 2.10. A proposição 2.8 nos diz que se $l_j = 2j - 1$, então os elementos de $H \cap [0, l_j] = \{n_0, n_1, \dots, n_{j-1}\}$ são dados por $n_k = l_j - l_{j-k}$, com $k = 0, 1, 2, \dots, j - 1$. Em particular, se o semigrupo for simétrico, $l_g = 2g - 1$, temos $n_k = l_g - l_{g-k}, \forall k = 0, 1, 2, \dots, g - 1$. Equivalentemente, temos $l_j = l_g - n_{g-j}$ para todo $j = 1, 2, \dots, g$.
Para o caso em que temos $l_j < 2j - 1$, revendo a demonstração da referida proposição, concluímos que para cada $j \in [1, g]$, existem lacunas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$, onde $q = (2j - 1) - l_j$, enumeradas em ordem crescente, tais que

$$L \cap [0, l_j] = \varphi_j(H \cap [0, l_j]) \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\} = \{l_j - n_0, l_j - n_1, \dots, l_j - n_{l_j - j}\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}.$$

Logo, para todo inteiro $l \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$ vale que

$$l \in L \cap [0, l_j] \Leftrightarrow l_j - l \in H \cap [0, l_j].$$

Além disso, como $\lambda_i \in L$ e $\lambda_i \notin \varphi_j(H \cap [0, l_j])$, lembrando que $\varphi_j^2 = Id$, segue que

$\varphi_j(\lambda_i) \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$. Como φ_j é decrescente obtemos que $\varphi_j(\lambda_i) = \lambda_{q+1-i}$. Assim,

$$\lambda_i + \lambda_{q+1-i} = l_j, \forall i \in [1, q].$$

Em particular concluímos que o inteiro $\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2j-l_j}{2} \rfloor$ indica o total de formas de escrever a lacuna l_j como soma de duas outras lacunas, distintas ou não. Note que se l_j for par então, q é impar e $\lambda_{\frac{q+1}{2}} = \frac{l_j}{2}$ é ponto fixo de φ_j. Em todo caso, o número de decomposições em parcelas distintas é dado por $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2j-1-l_j}{2} \rfloor$.
Em particular, no caso em que $l_j = 2j - 2$ temos $|H \cap [0, l_j]| = l_j + 1 - j = j - 1$. Daí, $H \cap [0, l_j] = \{n_0, n_1, \ldots, n_{j-2}\}$ e assim,

$$L \cap [0, l_j] = \{l_j - n_0, l_j - n_1, \ldots, l_j - n_{j-2}\} \cup \{\lambda_1 = j - 1\}.$$

Observe que se j_0 é a posição de λ_1 na sequência de lacunas, temos que $\lambda_1 = l_{j_0}$ e assim, $|H \cap [0, l_{j_0}]| = l_{j_0} + 1 - j_0 = j - j_0$. Dessa forma, $H \cap [0, l_{j_0}] = \{n_0, n_1, \ldots, n_{j-j_o-1}\}$ e $H \cap [l_{j_0} + 1, l_j] = \{n_{j-j_0}, n_{j-j_0+1}, \ldots, n_{j-2}\}$. Portanto,

$$l_i = l_j - n_{j-i-1}, \text{ se } i < j_0 \text{ e } l_i = l_j - n_{j-i}, \text{ se } i > j_0.$$

Resumidamente, destacamos
Proposição 2.11. *Se $l_j = 2j - 2$. Então, $j - 1 \notin H$ e para cada inteiro $l \neq j - 1$, temos: $l \in L$ se e somente se $l_j - l \in H$.*

Como vimos, os semigrupos de multiplicidade $n_1 = 2$ são simétricos. Esse semigrupos também recebem um nome especial, conforme a definição abaixo.
Definição 2.12. *Um semigrupo numérico H é chamado de hiperelíptico quando $n_1 = 2 \in H$.*

O teorema a seguir fornece a descrição explícita dos semigrupos hiperelípticos de gênero arbitrário.

Teorema 2.13. *Se H é um semigrupo numérico de genero g, os seguintes fatos são equivalentes*

1. *H é hiperelíptico*

2. *$l_j = 2j - 1$, para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, g\}$.*

3. *$l_j = 2j - 1$ para algum $j \in \{2, 3, \ldots, g - 1\}$.*

Prova. $(1 \Rightarrow 2)$
Como $2 \in H$ segue que todos os números pares pertencem a H. Daí, $|H \cap [0, l_j]| \geq \frac{l_j+1}{2}$.

Desse modo, temos:

$$j + \frac{l_j + 1}{2} = |L \cap [0, l_j]| + \frac{l_j + 1}{2} \leq |H \cap [0, l_j]| + |L \cap [0, l_j]| = l_j + 1,$$

onde segue que $l_j \geq 2j - 1$. Como já sabemos que vale $l_j \leq 2j - 1$, concluímos que $l_j = 2j - 1$.
$(2 \Rightarrow 3)$ É trivial

$(3 \Rightarrow 1)$
Seja $j \in \{2, 3, \ldots, g - 1\}$, tal que $l_j = 2j - 1$. Vamos mostrar que também ocorre $l_{j+1} = 2(j + 1) - 1$, isto é, l_{j+1} também atinge a cota máxima. Com efeito, dado que

$$2j - 1 = l_j < l_{j+1} \leq 2(j + 1) - 1,$$

segue que $l_{j+1} - l_j \in \{1, 2\}$ e basta mostrar que $l_{j+1} - l_j = 1$ não pode ocorrer. Ora, admita que essa igualdade ocorresse. Como l_j atinge a cota máxima, sabemos que para todo $l \in L \cap [0, l_j]$ temos que $\varphi_j(l) = l_j - l \in H$. Daí, $\varphi_{j+1}(l_j - l) \in L$. Mas, $\varphi_{j+1}(l_j - l) = l_{j+1} - (l_j - l) = l_{j+1} - l_j + l = l + 1$. Portanto, vemos que para todo $l \in [0, l_j]$ vale que

$$l \in L \Rightarrow l + 1 \in L.$$

Como $1 \in L$, segue que L contém o intervalo $[1, l_j]$.
Assim, $H \cap [0, l_j] = \{\, 0 \,\}$. Por outro lado, como l_j atinge a cota máxima, sabemos que $|H \cap [0, l_j]| = |L \cap [0, l_j]| = j$. Daí, concluímos que $j = 1$ o que contradiz o fato de $j \in \{2, 3, \ldots, g - 1\}$. Essa contradição, nos diz que a igualdade $l_{j+1} - l_j = 1$ não pode ocorrer e assim, $l_{j+1} - l_j = 2$. Dessa forma, provamos que l_{j+1} também atinge a cota máxima e consequentemente, $2 = l_{j+1} - l_j \in H$. Logo, H é hiperelíptico. □

O teorema acima caracteriza também os semigrupos não hiperelípticos como sendo aqueles para os quais vale $l_j \leq 2j - 2$, para todo $j \in \{2, 3, \ldots, g - 1\}$. O resultado a seguir nos mostra que podemos dizer um pouco mais.

Teorema 2.14. *Seja H um semigrupo não-hiperelíptico de gênero g, então:*

(i) $l_j \leq 2j - 3$ *para cada* $j \in \{4, \ldots, g - 2\}$, *exceto se* $L = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$.

(ii) Se $3 \in L$, *a cota* $l_j \leq 2j - 3$ *também vale para* $j = g - 1$, *exceto no caso em que* $L = \{1, \ldots, g - 2, 2g - 4, 2g - 3\}$.

Prova. Como o semigrupo não é hiperelíptico, temos $l_j \leq 2j - 2, \forall j \neq g$. Suponha que existe $j \in \{4, \ldots, g - 2\}$ tal que $l_j = 2j - 2$. Nesse caso, $l_{j+1} \leq 2(j + 1) - 2 = 2j = l_j + 2$. Portanto, $l_{j+1} \in \{l_j + 1, l_j + 2\}$. Em qualquer caso, l_{j+1} se decompõe como soma de duas lacunas distintas. Daí, $\lfloor \frac{2(j+1)-1-l_{j+1}}{2} \rfloor \geq 1$. Logo, $l_{j+1} \leq l_j + 1$ e consequentemente, temos $l_{j+1} = l_j + 1$.

Além disso, a igualdade acima é a única forma de escrever l_{j+1} como soma de duas lacunas. Assim, para cada $l \notin \{1, l_j\}$, com $l \leq l_{j+1}$, temos que $l_{j+1} - l \in H$. Portanto, $l - 1 = l_j - (l_{j+1} - l) \in L$. Como $j - 1 \in L$, pois $l_j = 2(j-1)$, concluímos que $\{1, 2, 3, \ldots, j-1\} \subset L$.

Agora note que para cada $h \in H^*$, com $h \neq l_j - 1$, temos que $l_j - h \in L \backslash \{1, l_j\}$. Portanto, $h + 1 = l_{j+1} - (l_j - h) \in H$. Como $j = l_{j+1} - (j-1) \in H^*$ e $j \neq l_j - 1$ (a não ser que $j = 3$, que não é o caso) segue que $\{j, j+1, \ldots, 2j-3\} \subset H$.

Como $j \leq g - 2$, temos $j + 2 \leq g$. Assim, $l_{j+2} \leq 2(j+2) - 1 = 2j + 3$ e daí, $l_{j+2} \in \{2j, 2j+1, 2j+2, 2j+3\}$. No entanto, os três primeiros elementos dessa lista estão em H, pois $j, j+1 \in H$. Portanto, $l_{j+2} = 2j + 3 = 2(j+2) - 1 = l_{j+1} + 4$. Por fim, temos que l_{j+2} atinge sua cota máxima. Logo, como o semigrupo não é hiperelíptico, segue que $j = g-2$ e o semigrupo é simétrico. Nesse caso, $l_{j+2} = l_g$ não pode se decompor como soma de lacunas. Portanto, $4 \notin L$ e então deve ocorrer $j - 1 < 4$, pois $\{1, 2, 3, \ldots, j-1\} \subset L$. Dessa forma, $j < 5$, de onde segue que $j = 4, g = 6$ e $L = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, o que conclui a demonstração desse item.

Para demonstrar o próximo item, sabemos que $l_{g-1} \leq 2(g-1) - 2 = 2g - 4$. Suponhamos que ocorra a igualdade $l_{g-1} = 2g - 4$. Como $l_{g-1} < l_g \leq 2g - 1$, segue que $l_g \in \{l_{g-1} + 1, l_{g-1} + 2, l_{g-1} + 3\}$. Em qualquer caso, l_g é soma de duas lacunas distintas, o que implica $l_g \leq 2g - 3 = l_{g-1} + 1$. Logo, $l_g = l_{g-1} + 1 = 2g - 3$ e por argumentos análogos aos que usamos no item anterior vemos que $\{1, 2, 3, \ldots, g-2\} \subset L$. Portanto, $L = \{1, 2, 3, \ldots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$, o que conclui a demonstração desse item. $\square$

Observaçao 2.15. Se $l_3 = 3$ e $L \neq \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ usando o teorema 2.14 temos que o peso $w(H)$ de H, definido por $w(H) := \sum_{j=1}^{g}(l_j - j)$, satisfaz

$$w(H) \leq (g^2 - 5g + 10)/2 \tag{1}$$

Para ver isso, note que os três primeiros elementos da soma $\sum_{j=1}^{g}(l_j - j)$ são nulos e que $l_4 - 4 \leq 1, l_3 \leq 2, \ldots, l_{g-1} - (g-1) \leq g - 4$ e $l_g - g \leq g - 1$ pelo lema 2.8. Desse modo, $\sum_{j=1}^{g}(l_j - j)$ consiste na soma entre a soma dos termos da uma progressão aritmética com primeiro elemento igual a 1 de razão 1 com $g - 4$ elementos com $g - 1$, o que nós dá $(g^2 - 5g + 10)/2$.

Se $l_3 > 3$ e $l_2 = 2$, então $w(H) \leq g(g-1)/3$ (ver [KATO 1979], Lemma 6), e a estimativa (1) vale para cada semigrupo não-hiperelíptico de gênero $g \geq 10$.

2.4 Somas de lacunas

Nessa seção vamos estudar os conjuntos de inteiros obtidos como somas de lacunas. Mais especificamente, sendo L o conjunto de lacunas de um semigrupo numérico H, vamos estudar o conjunto $2L = L + L := \{x + y/x \in L \text{ e } y \in L\}$ e mais geralmente, os conjuntos $nL := (n-1)L + L$. Começamos com o seguinte resultado:

Teorema 2.16. *Se H é um semigrupo numérico não-hiperelíptico de gênero g, então cada inteiro r, $2 \leq r \leq 2g$, é a soma de duas lacunas de H, com a exceção apenas de l_g, se H é simétrico.*

Prova. Dado $r \in [2, 2g]$, considere a função $\varphi_r : [0, r] \to [0, r]$, definida por $\varphi_r(m) = r - m$. Para provar que r se escreve como soma de duas lacunas, basta mostrarmos que não pode ocorrer $\varphi_r(L \cap [0, r]) \subset H \cap [0, r]$. Para isso, vamos comparar as cardinalidades. Seja l_j o maior elemento de $L \cap [0, r]$. Assim, $|\varphi_r(L \cap [0, r])| = |L \cap [0, r]| = j$ e $|H \cap [0, r])| = r + 1 - j$. Por outro lado observe que $\varphi_r(L \cap [0, r]) \subset [1, r-1]$, se $r \notin L$. Daí, como nesse caso vale $|H \cap [1, r-1])| = r - j - 1$, só poderá ocorrer $\varphi_r(L \cap [0, r]) \subset H \cap [0, r]$ se $2j + 1 \leq r$. Afirmamos que $j = g$. De fato, se tivéssemos $j < g$, então seguiria que $2j + 2 \leq r + 1 \leq l_{j+1} \leq 2j + 1$, o que é um absurdo. Assim, para que um elemento $r \notin L$ não se escreva como soma de lacunas é necessário que $r \geq 2g+1$. Agora analisemos o caso $r \in L$. Nesse caso, temos $r = l_j$, $\varphi_r(L \cap [0, r]) \subset [0, r-1]$ e $|H \cap [0, r-1]| = r - (j-1)$. Para que r não se escreva como soma de lacunas é necessário que $r \geq 2j - 1$. Como $r = l_j$ concluímos que $l_j = 2j - 1$. Como H não é hiperelíptico, segue que $j = g$ e $l_g = 2g - 1$, não pode ser escrito como soma de duas lacunas. $\square$

Proposição 2.17. *Se H é um semigrupo não hiperelíptico, com $3 \in L$, então para cada inteiro $k \in \{3, \ldots, g-1\}$, existem $i_k, j_k \in \{2, \ldots, k-1\}$ tais que $l_k + 1 = l_{i_k} + l_{j_k}$.*

Prova. Mantendo a notação da demonstração acima e fazendo $r = l_k + 1$, observe que $\varphi_r(L \cap [1, r-1]) \subset [1, r-1]$ e $|\varphi_r(L \cap [1, r-1])| = k$, enquanto que $|H \cap [1, r-1]| = r - 1 - k = l_k - k - 1$. Por outro lado, o teorema 2.14 nos diz que $l_k \leq 2k - 3$, ou seja, $l_k - k - 1 \leq k - 4$. Portanto, existem pelo menos quatro elementos de $L \cap [1, r-1]$ cuja imagem por meio de φ_r está em $L \cap [1, r-1]$. Dois desses elementos são 1 e $r - 1 - l_k$, os outros dois determinam uma decomposição de r nas condições desejadas. $\square$

Teorema 2.18. *Seja H um semigrupo de gênero g. Se L difere dos conjuntos $\{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$ e $\{1, \ldots g-1, 2g-2\}$, então existem inteiros $i_g, j_g \in \{2, \ldots, g-1\}$ tais que $l_g + 1 = l_{i_g} + l_{j_g}$.*

Prova. Se $l_g \leq 2g - 3$, então o resultado vale pelo mesmo argumento usado na demonstração da proposição acima. Por outro lado, se $l_g \geq 2g - 2$, como L é diferente de $\{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$ e $\{1, \ldots, g-1, 2g-2\}$ existe pelo menos uma não-lacuna de $H \setminus \{0\}$ menor ou igual que $g - 1$. Denote por n o maior deles. Afirmamos que $n + 1 \notin H$. De fato, se $n+1 \in H$, então pela maximalidade de n, teríamos $n+1 = g$. Daí, $n = g-1$ e portanto g e $g-1$ seriam não-lacunas. Com isso, teríamos $2g-2, 2g-1 \in H$, o que é um absurdo pois estamos tratando do caso $l_g \in \{2g-2, 2g-1\}$. Portanto, $n+1 \notin H$. Por outro lado, temos que $l_g - n \notin H$. Portanto, temos $l_g + 1 = (n+1) + (l_g - n)$ é uma soma de lacunas. Daí segue que $l_{i_g} = n+1$ e $l_{i_j} = l_g - n$. □

Proposição 2.19. *Seja H um semigrupo simétrico de gênero g. Se $l_3 = 3$ e L diferente dos conjuntos $\{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$ e $\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, então para cada inteiro $k \in \{2, \ldots, g-1\}$, existem $i_k, j_k \in \{1, \ldots, g\} \setminus \{k\}$ tais que $2l_k = l_{i_k} + l_{j_k}$.*

Prova. Se $l_k > g-1$, então $l_g - 2n_{g-k} \geq 1$, onde $l_k = l_g - n_{g-k}$ (ver observação 3.15). Como $2n_{g-k}$ é não-lacuna, pela simetria de H, temos que $l_g - 2n_{g-k}$ é uma lacuna de H e portanto $2l_k = 2(l_g - n_{g-k}) = l_g + (l_g - 2n_{g-k})$.

Vamos provar agora o caso $l_k = g-1$. Para isso defina a função $\varphi_{2l_k} : [1, l_k - 1] \to [l_k + 1, 2l_k - 1]$ por $\varphi_{2l_k}(m) = 2l_k - m$. Como $l_k = g-1$, então $k \leq g-2$, já que L é diferente de $\{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$. Nesse caso, existe pelo menos uma não-lacuna de H^* menor que l_k. Denotamos n a maior delas. Assim, pela maximalidade de n, $n+1$ é uma lacuna. Como H é simétrico, temos que $l_g - (n+1) = 2g-2-n \in H$. Como estamos supondo $l_k = g-1$, temos que $2l_k = n + (2g-2-n)$. Desse modo, n e $\varphi_{2l_k}(n) \in H$. Note que o conjunto $[1, 2l_k - 1]$ compreende todos inteiros entre 1 e $2g-3$ exceto as lacunas l_k, $2g-1$ e a não-lacuna $2g-2$ ($2g-2$ não é lacuna porque H é simétrico e $2g-2 = l_g - 1$). Consequentemente, $|L \cap [1, 2l_k - 1]| = g-2 = l_k - 1$. Fazendo a restrição de φ_{2l_k} ao conjunto $[1, 2l_k - 1] \setminus \{n\}$, ainda temos $|L \cap ([1, 2l_k - 1] \setminus \{n\})| = l_k - 1$. Portanto, pelo princípio da casa dos pombos, existe $r \in L \cap [1, l_k - 1]$ tal que $\varphi_{2l_k}(r) \in L \cap [l_k + 1, 2l_k - 1]$. Ponha $l_{i_k} = r$ e $l_{j_k} = \varphi_{2l_k}(r)$ e o resultado segue.

Vamos provar agora o caso $l_k < g-1$. Note que por hipótese, temos $l_g = 2g-1$ e $l_3 = 3$. Consequentemente, podemos considerar um inteiro $3 \leq s \leq g-1$ tal que $l_s < 2l_k \leq l_{s+1}$. Pelo teorema 2.14, temos que $l_{s+1} < 2(s+1) - 2 = 2s$, como $2l_k \leq l_{s+1}$, temos $l_k < s$. Desse modo, temos $L \cap [1, 2l_k - 1] \leq s - 1$. Já que $l_k - 1 < s - 1$, existe $t \in L \cap [1, l_k - 1]$ tal que $\varphi_{2l_k}(t) \in L \cap [l_k + 1, 2l_k - 1]$. Ponha $l_{i_k} = t$ e $l_{j_k} = \varphi_{2l_k}(t)$ e o resultado segue. □

O teorema 2.16 nos permite concluir que se H não é hiperelíptico vale a inclusão

$$\{2, 3, 4, \ldots, l_g - 1, l_g + l_1, l_g + l_2, \ldots, l_g + l_g\} \subset 2L.$$

Por outro lado, é claro que $2L \subset [2, 2l_g]$. Então vamos analisar sob que condições um inteiro $m \in [l_g, 2l_g]$ pode ser escrito como soma de duas lacunas, isto é, $m \in 2L$. Ora, um tal inteiro m pode ser escrito na forma $m = l_g + s$, com $s \in \mathbb{N}$. Se $s \in L$, certamente teremos $m \in 2L$ e m coincide com um dos elementos listado acima. Portanto, basta restringirmos nossa análise aos casos em que $s \in H$. Assim, para cada

$s \in H \cap [0, l_g]$ consideremos o inteiro $m_s := l_g + s$. Nesses casos, teremos $m_s \in 2L$ se e somente se existirem l_i, l_j com $i \leq j < g$, tais que $m_s = l_i + l_j$. Em particular, deve ocorrer

$$l_g = (l_i - s) + l_j = l_i + (l_j - s).$$

A linha anterior apresenta duas decomposições de l_g como soma de lacunas, que podem não ser decomposições distintas (pode ocorrer $l_i = l_j$), também as parcelas podem não ser distintas (pode ocorrer $l_i = l_j$ e $s = 0$). Em todo caso, a luz da observação 2.10, segue que $\lfloor \frac{2g - l_g}{2} \rfloor \geq 1$. Consequentemente, temos $l_g \leq 2g - 2$. Em particular, nessa situação temos $l_g \in 2L$. Logo, l_g deve ser acrescentado aos elementos já listados.

Podemos complementar nossa análise lembrado que existe $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\} \subset L$, onde $q = 2g - 1 - l_g$, tal que $l_g = \lambda_k + \lambda_{q+1-k}$, com $k = 1, 2, \ldots, q$, descreve todas as formas de decompor l_g como soma de duas lacunas. Dessa forma, devemos ter $\{l_i, l_j, l_i - s, l_j - s\} \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$. Portanto, deve ocorrer $l_i = \lambda_i, l_j = \lambda_j$ e $l_i - s = \lambda_{q+1-j}, l_j - s = \lambda_{q+1-i}$. Logo, $s = \lambda_i - \lambda_{q+1-j} = \lambda_j - \lambda_{q+1-i}$. Além disso, como $s \in \mathbb{N}$ e $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$ está em ordem crescente, é necessário que $i + j \geq q + 1$. Observe que os pares (i, j), com $i + j = q + 1$, correspondem a $s = 0$. Logo, $m_s = l_g$, que já sabemos que pertence a $2L$. Desse modo, vamos considerar apenas os pares (i, j), com $i \leq j \leq q$ e $i + j > q + 1$.

Por fim, o conjunto $\mathcal{X} = \{(i, j) \in [1, q]^2 / i \leq j \text{ e } i + j > q + 1\}$ tem cardinalidade igual a $\lfloor \frac{q^2}{4} \rfloor$. Além disso, a discussão acima garante que a função $\alpha : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$, definida por $\alpha(i, j) = \lambda_i - \lambda_{q+1-j}$ é tal que sua imagem contém o conjunto $\{s \in H^* / m_s \in 2L\}$. Portanto, a quantidade de elemento de $2L$ (além de l_g) que não constam na nossa listagem inicial é limitada por $\lfloor \frac{q^2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{(2g-1-l_g)^2}{4} \rfloor$. Explicitamente, os elementos a serem acrescentados à nossa lista inicial são os elementos de forma $\lambda_i + \lambda_j$, com $(i, j) \in \mathcal{X}$, tais que $\lambda_i - \lambda_{q+1-j} \in H$. Note que

$$\lambda_i + \lambda_j = \lambda_i + \lambda_j + \lambda_{q+1-j} - \lambda_{q+1-j} = l_g + (\lambda_i - \lambda_{q+1-j}).$$

Exemplo 2.20. *Determinaremos o conjunto* $2L$ *usando o procedimento acima para o conjunto das lacunas* $L = \{1, \ldots, 12, 19, 21, 24, 25\}$. *Assim, para o conjunto de lacunas em questão, temos* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = 19, \lambda_5 = 21, \lambda_6 = 24$ *com* $\mathcal{X} = \{(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$. *Portanto, acrescentaremos a nossa lista* $\lambda_4 + \lambda_4 = 38, \lambda_4 + \lambda_5 = 40, \lambda_4 + \lambda_6 = 43, \lambda_5 + \lambda_5 = 42, \lambda_5 + \lambda_6 = 45, \lambda_6 + \lambda_6 = 48$. *Desse modo,*

$$2L = \{2, \ldots, 37, 44, 46, 49, 50\} \cup \{38, 40, 42, 43, 45, 48\}$$

Resumimos a discussão acima na forma do seguinte resultado:

Proposição 2.21. *Se* H *é um semigrupo numérico não-hiperelíptico de gênero* g*, então*

1. $l_g = 2g - 1 \Rightarrow 2L = \{2, 3, 4, \ldots, l_g - 1, l_g + l_1, l_g + l_2, \ldots, l_g + l_g\}$. *Logo, temos* $|2L| = 3g - 3$

2. $l_g = 2g-2 \Rightarrow 2L = \{2,3,4,\ldots,l_g-1, l_g, l_g+l_1, l_g+l_2,\ldots,l_g+l_g\}$. *e temos* $|2L| = 3g-3$

2. $l_g \leq 2g-3 \Rightarrow 2L \supset \{2,3,4,\ldots,l_g-1, l_g, l_g+l_1, l_g+l_2,\ldots,l_g+l_g\}$. *e temos*

$$l_g+g-1 \leq |2L| \leq 3g-3+\lfloor\frac{(2g-3-l_g)^2}{4}\rfloor$$

Prova. Resta apenas justificar a cota superior so item "3″. O que nossa análise possibilita é $|2L| \leq l_g+g-1+\lfloor\frac{(2g-1-l_g)^2}{4}\rfloor$. Porém, fazendo $q = 2g-1-l_g$, temos $l_g+g-1 = 3g-3-(q-1)$. Por outro lado, é fácil ver que $\lfloor\frac{q^2}{4}\rfloor-(q-1) = \lfloor\frac{(q-2)^2}{4}\rfloor$. □

Proposição 2.22. *Se H é um semigrupo numérico de gênero $g > 4$ tal que $l_{g-1} \geq 2g-5$, então $|2L| = 3g-3$, exceto se tivermos $L = \{1,2,3,5,\ldots,2g-5,2g-3\}$ ou $L = \{1,,2,3,\ldots,g-3,g-2,2g-5,2g-4\}$ para os quais vale $|2L| = 3g-4$.*

Prova. Como já sabemos que a referida igualdade é válida para $l_g \geq 2g-2$. Precisamos apenas verificar os casos:

1. $l_{g-1} = 2g-5$ e $l_g = 2g-4$
2. $l_{g-1} = 2g-4$ e $l_g = 2g-3$
3. $l_{g-1} = 2g-5$ e $l_g = 2g-3$

No primeiro caso, $l_g+g-1 = 3g-5$. Ademais, $l_g = (g-2)+(g-2) = (2g-5)+1$ são as únicas formas ($2 = \lfloor\frac{2g-l_g}{2}\rfloor$) de decompor l_g como soma de lacunas. Daí, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = g-2, \lambda_3 = l_{g-1} = 2g-5$. Portanto, para que tenhamos a igualdade desejada é necessário e suficiente que $\lambda_3-\lambda_1 \in H$ e $\lambda_2-\lambda_1 \in H$. Ora, $\lambda_3-\lambda_1 = 2g-6 = 2(\lambda_2-\lambda_1)$. Portanto, basta que $g-3 \in H$. Se isso não ocorrer, então $g-3 \in L$. Porém, sabemos que para todo $l \in L \setminus \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ temos que $l_g-l \in H$ e consequentemente, $l-1 = l_g-1-(l_g-l) \in L$. Logo,

$$g-3 \in L \Rightarrow L = \{1,2,3,\ldots,g-3,g-2,2g-5,2g-4\}.$$

Note que para $g > 4$ teremos $2g-6 \in H$ e portanto, $|2L| = 3g-4$. Para $g = 4$, temos $L = \{1,2,3,4\}$ e $|2L| = 7 = 3g-5$.

Vamos ao segundo caso, aqui $l_g+g-1 = 3g-4$ e $l_g = (2g-4)+1$ é a única forma de decompor l_g como soma de lacunas. Daí, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2g-4$. Logo, para que tenhamos $|2L| = 3g-3$ precisamos que $\lambda_2-\lambda_1 = 2g-5 \in H$. Ora, estamos trabalhando com um semigrupo não-hiperelíptico, já que não é simétrico. Assim, $2 \in L$ e $2 \notin \{1,2g-4\}$, pois $g > 3$. Daí, $2g-5 = l_g-2 \in H$, como queríamos.

Por fim, no terceiro caso, novamente temos $l_g+g-1 = 3g-4$ e $l_g = (2g-5)+2$ é a única decomposição de l_g como soma de lacunas. Portanto, precisamos que ocorra $2g-7 \in H$. Bem, sabemos que para todo $l \in L \setminus \{2,2g-5\}$, ocorre $l_g-l \in H$. Daí,

$l-2 = l_{g-1} - (l_g - l) \in L$. Portanto,

$$2g-7 \in L \Rightarrow L = \{1,,2,3,5,\ldots,2g-7,2g-5,2g-3\}.$$

□

Teorema 2.23. *Se H é um semigrupo simétrico não-hiperelíptico de gênero g, então para cada inteiro $n \geq 2$, temos*

$$nL = \{n, n+1, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \cup \{(n-1)(2g-1)+l_j \mid j = 1,\ldots,g\}$$

Em particular, $|nL| = (2n-1)(g-1)$, para cada $n \geq 2$.

Prova. Vamos provar por inclusão de conjuntos, Seja $m \in nL$, isto é, $m = l_{i_1} + \ldots + l_{i_n}$. Se $n \leq m \leq (n-1)(2g-1)-1$, m está obviamente no conjunto. Suponha que $m > (n-1)(2g-1)-1$, i.e., $m > (n-1)l_g - 1$. Portanto podemos escrever $m = (n-1)l_g + s$, onde s é um inteiro não-negativo. Desse modo, temos $l_{i_n} = (l_g - l_{i_1}) + \ldots + (l_g - l_{i_{(n-1)}}) + s$. Como H é simétrico, $l_g - l_{i_k}$ para $1 \leq k \leq n-1$ são não-lacunas. Logo, pela observação 2.10, s é uma lacuna. Portanto, $m = (n-1)l_g + l_j$, para algum j. Daí segue que m está no conjunto.

Vamos provar a contrária por indução. Note que a segunda parte da união está obviamente contida em nL. então precisamos mostrar apenas que $\{n, n+1, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \subset nL$. Para $n = 2$, a inclusão é válida pelo teorema 2.16. Suponha agora que a desigualdade vale para n, i.e, $\{n, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \subset nL$. Queremos provar que $\{n+1, \ldots, n(2g-1)-1\} \subset (n+1)L$. Seja $n+1 \leq r \leq n(2g-1)-1$. Para provar que r está em $(n+1)L$, basta encontrar uma lacuna l, tal que $n \leq r-l \leq (n-1)(2g-1)-1$. Note que usando a hipótese de indução, temos $r-l \in nL$ e portanto $r \in (n+1)L$ e o teorema está provado. Para tal, se $r \geq n+2g-1$, ponha $l = 2g-1$. Se $r \leq n+2g-3$, ponha $l = 1$ e se $r = n+2g-2$, ponha $l = 2$.

□

Observaçao 2.24. Como cada soma de n lacunas é um inteiro entre n e nl_g, temos $|nL| \leq nl_g - n + 1$. Se H não é simétrico e $n > g/(2g-1-l_g)$, temos $n > \frac{g}{2g-1-l_g} \Longrightarrow n(2g-1-l_g) > g \Longrightarrow n(l_g - 2g + 1) < -g \Longrightarrow nl_g - 2ng + n < -g \Longrightarrow nl_g - n + 1 < 2ng - 2n - g + 1 \Longrightarrow nl_g - n + 1 < (2n-1)(g-1)$. Daí segue que $|nL| < (2n-1)(g-1)$.

Vamos analisar o caso em que pode não acontecer a igualdade. Sabemos que $\{n, n+1, \ldots, (n-1)l_g - 1\} \cup \{(n-1)l_g + l_1, \ldots, (n-1)l_g + l_g\} \subset nL$. Queremos saber quais os elementos que pertencem a nL, mas não pertencem a $\{n, n+1, \ldots, (n-1)l_g - 1\} \cup \{(n-1)l_g + l_1, \ldots, (n-1)l_g + l_g\}$. Se existir tal elemento ele será da forma $m = (n-1)l_g + s$, com $0 \leq s \leq l_g$ e $s \in H$. Por isso, temos as equivalencias: $m \in nL \Leftrightarrow m = l_{i_1} + \ldots + l_{i_n} \Leftrightarrow (n-1)l_g + s = l_{i_1} + \ldots + l_{i_n}$. Vamos provar que para o conjunto

$S = \{k \in \mathbb{N}; l_{i_k} \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}\}$, temos $|S| \geq 2$. Se $S = \emptyset$, temos $l_g - l_{i_k} + \ldots + (l_g - l_{i_{n-1}}) = l_{i_n} - s$, absurdo, pois $l_{i_n} - s \notin H$ e $l_g - l_{i_k} \in H$, para $k = \{1, \ldots, n-1\}$ (Note que se algum $l_g - l_{i_k} \in L$, teríamos $(l_g - l_{i_k}) + l_{i_k} = l_g$, contrariando a hipótese $S = \emptyset$). Se, por outro lado, $|S| = 1$, teríamos a menos de ordenação que $l_{i_1} = \lambda_k$, para algum $k \in \{1, \ldots, q\}$. Portanto, $(l_g - l_{i_n}) + (l_g - l_{i_2}) + \ldots + (l_g - l_{n-1}) = l_{i_1} - s \notin H$ e $l_g - l_{i_k} \in H$, para todos $k \in \{2, \ldots, n\}$, absurdo. Segue que $|S| \geq 2$. Suponha a menos de ordenação que $l_{i_1} = \lambda_k$ e $l_{i_2} = \lambda_j$, para algum $k, j \in \{1, \ldots, q\}$ com $k \leq j$. Desse modo, temos $\lambda_k + \lambda_j \geq l_g = \lambda_{q+1-k} + \lambda_k \implies \lambda_j \geq \lambda_{q+1-k} \implies j + k \geq q + 1$ e $s = \lambda_k + \lambda_j + (l_{i_3} + \ldots + l_{i_n}) - (n-1)l_g$, daí segue que $s = -\lambda_{q+1-j} - \lambda_{q+1-j} - (n-3)l_g + l$, onde $l \in (n-2)L$. Em outras palavras, $s = l - (\lambda_s + \lambda_t) - (n-3)l_g$, onde $l \in (n-2)L$, $t \leq s$ e $s + t \leq q + 1$. Portanto os elementos que pertencem a nL, mas não pertencem a $\{n, n+1, \ldots, (n-1)l_g - 1\} \cup \{(n-1)l_g + l_1, \ldots, (n-1)l_g + l_g\}$ são elementos da forma $m = (n-1)l_g + s$, onde $s = l - (\lambda_s + \lambda_t) - (n-3)l_g \in H$, $l \in (n-2)L$, $t \leq s$ e $s + t \leq q + 1$. Vamos analisar agora um exemplo não-hiperelíptico onde essa igualdade não vale.

Exemplo 2.25. *Seja H um semigrupo numérico com $L = \{1, \ldots, 12, 19, 21, 24, 25\}$. Pelo exemplo 2.20, sabemos que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = 19, \lambda_5 = 21, \lambda_6 = 24$. Pela observação acima, devemos encontrar os elementos de H da forma $l - (\lambda_s + \lambda_t)$, onde $t \leq s$ e $s + t \leq 7$. Daí segue que os elementos que pertencem a $3L$ e não pertencem a $\{3, 4, \ldots, 2l_g - 1\} \cup \{2l_g + l_1, \ldots, 2l_g + l_g\}$ são $14, 16, 17, 18, 20, 22, 23$ e portanto a igualdade não acontece nesse caso.*

3 TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

O objetivo das próximas seções é desenvolver ferramentas para enunciar o teorema de Riemann-Roch, um dos teoremas mais importantes na teoria de curvas algébricas, assim como as suas aplicações. Além disso, desenvolveremos alguns conceitos que serão úteis nos capítulos subsequentes. A menos de menção contrária, daqui por diante, k é um corpo algebricamente fechado com característica arbitrária.

3.1 Curvas algébricas

Definimos o n-ésimo espaço afim sobre k (escrevemos $\mathbb{A}^n(k)$, ou somente $\mathbb{A}^n$) como o conjunto de todas as n-uplas com coordenadas em k. Chamamos um conjunto X da forma $X = V(S) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid F(P) = 0, \forall F \in S\}$, para algum S, de conjunto algébrico. Se $S = F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ chamamos X de uma hipersuperfície. Uma hipersuperfície em $\mathbb{A}^2$ é chamada de curva plana afim. Chamamos de variedade, todo conjunto algébrico irredutível. Definimos também o ideal de V por $I(V) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid F(P) = 0, \forall P \in V\}$.

Se F é irredutível, $V(F)$ é uma variedade, senão $F = \Pi F_i^{e_i}$, onde os F_i são fatores irredutíveis de F e $i > 1$. Chamamos esses fatores de componentes de F e cada expoente e_i de multiplicidade do componente F_i.

Se $P = (0, 0)$ e escrevermos $F = F_m + F_{m+1} + \ldots + F_n$, onde cada F_i é uma forma em $k[X, Y]$ de grau i e $F_m \neq 0$, podemos definir a multiplicidade em F em P por $m_P(F) = m$. Note que P é um ponto de F se e somente se $m_P(F) > 0$.

Definição 3.1. *Seja F uma curva plana afim e P um ponto de F. O ponto P é chamado de não-singular se $F_X(P) \neq 0$ ou $F_Y(P) \neq 0$, onde F_X e F_Y são as derivadas de F em relação à variável X e Y respectivamente. Uma curva com apenas pontos não-singulares é chamada de curva não-singular.*

Observe que se $P = (0, 0)$ é um ponto de F, então P é um ponto não-singular se e somente se $m_P(F) = 1$.

Note que podemos definir a multiplicidade de F em qualquer ponto. Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer do espaço afim. Defina a multiplicidade de F em P como $m_P = m_{(0,0)}(F(T))$, onde T é uma translação levando $(0, 0)$ em P, isto é, a translação T é da forma $T(x, y) = (x + a, y + b)$.

Esses conceitos podem ser definidos, *mutatis mutandis*, em um certo espaço de classes de equivalência em $\mathbb{A}^{n+1}$. Assim, definimos o n-ésimo espaço projetivo (escrevemos $\mathbb{P}^n(k)$, ou simplesmente $\mathbb{P}^n$) como o conjunto das classes de equivalências sobre $\mathbb{A}^{n+1} \setminus (0, \ldots, 0)$ definidas da seguinte forma: sejam $x, y \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus (0, \ldots, 0)$, dizemos que $x \sim y$ se e somente se existe $\lambda \in k$ não-nulo tal que $x = \lambda y$.

Diferentemente do caso afim, só faz sentido dizer que uma curva projetiva se anula em um ponto P se o polinômio que define a curva for uma forma. Com efeito, se F é uma forma de grau d e $F(P) = 0$, temos que $F(\lambda P) = \lambda^d F(P) = 0$ e assim F se anula para toda representação de P. Desse modo, dizemos que $P \in \mathbb{P}^n$ é um zero de um polinômio $F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ se $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ para cada escolha de coordenadas homogêneas $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ para P. Chamamos um conjunto Y da forma $Y = V(S) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid P \text{ é um zero para cada } F \in S\}$ para algum S de conjunto algébrico projetivo. Se $S = F$, com F sendo uma forma, então dizemos que Y é uma hipersuperfície projetiva. Chamamos de variedade projetiva, todo conjunto algébrico projetivo irredutível. Definimos também o ideal de V no caso projetivo por $I(V) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \text{todo ponto } P \in V \text{ é um zero de } F\}$.

3.2 Corpo de funções racionais

Seja V uma variedade afim não-vazia. Definimos $\Gamma(V)$ o seu anel de coordenadas por $\Gamma(V) = k[X_1 \ldots, X_n]/I(V)$, onde $I(V) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(P) = 0, \forall P \in V\}$. Note que como dois polinômios F e G determinam a mesma função se e somente se $(F - G)(a_1 \ldots, a_n) = 0$ para todos $(a_1, \ldots, a_n) \in V$, isto é, $F - G \in I(V)$. Dessa forma podemos identificar o anel $\Gamma(V)$ como o anel funções polinomiais com domínio em V. Como $\Gamma(V)$ é um domínio de integridade, podemos formar o seu corpo de frações denominado por corpo de funções racionais sobre V (escrevemos $k(V)$). Um elemento de $k(V)$ é chamado de função racional.

Note que podem existir várias maneiras de escrever a função racional $f \in k(V)$ como razão de duas funções polinomiais, já que f é razão de duas classes de equivalência. Porém visto que $\Gamma(V)$ é um domínio de fatoração única, podemos escrever unicamente $f = a/b$ a menos de multiplicação por unidade, onde a e b não possuem fatores em comum.

Dizemos que $f \in k(V)$ é definido em $P \in V$ se existe alguma representação $f = c/d$ com $d(P) \neq 0$. O subanel de $k(V)$ das funções definidas em $P \in V$ é chamado de anel local de V em P (denotado por $\mathcal{O}_P(V)$). O conjunto dos pontos $P \in V$, onde uma função racional não está definida é chamado de conjunto de polos de f. Vamos mostrar que $\mathcal{O}_P(V)$ é de fato um anel local, isto é, possui apenas um ideal maximal.

Teorema 3.2. *Seja V uma variedade afim. O subanel $\mathcal{O}_P(V)$ de $k(V)$ é um anel local.*

Prova. Primeiramente vamos provar que o conjunto $\mathfrak{m}_P(V) = \{f \in k(V) \mid f = a/b, b(P) \neq 0, a(P) = 0\}$ é um ideal em $\mathcal{O}_P(V)$. Sejam $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}_P(V)$, vamos demonstrar que $f_1 + f_2 \in \mathfrak{m}_P(V)$. Sejam $f_1 = a_1/b_1$ e $f_2 = a_2/b_2$ representações de f_1 e f_2 respectivamente. Desse modo, temos $f_1 + f_2 = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1b_2}$. Por outro lado, usando a condição que $b_1(P) \neq 0$ e $b_2(P) \neq 0$, temos que $b_1(P)b_2(P) \neq 0$. Usando o fato que $a_1(P) = a_2(P) = 0$, temos que $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$. Daí segue que $f_1 + f_2 \in \mathfrak{m}_P(V)$. Falta mostrar agora que se $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ e $f_1 \in \mathfrak{m}_P(V)$, então $\alpha f_1 \in \mathfrak{m}_P(V)$. Sejam $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$ e $f_1 = a_1/b_1$ duas representações de α e f_1 respectivamente. Desse modo, temos que

$\alpha f_1 = \frac{\alpha_1 a_1}{\alpha_2 b_1}$. Do fato que $a_1(P) = 0$, temos que $\alpha_1(P)a_1(P) = 0$. Da condição que $\alpha_2(P) \neq 0$ e $b_1(P) \neq 0$, temos que $\alpha_2(P)b_1(P) \neq 0$. Logo, $\alpha f \in \mathfrak{m}_P(V)$ e portanto $\mathfrak{m}_P(V)$ é um ideal de $\mathcal{O}_P(V)$. O resultado segue diretamente do fato que $\mathfrak{m}_P(V)$ é o ideal dos elementos que não são invertíveis em $\mathcal{O}_P(V)$. $\square$

Para o que vem a seguir, vale lembrar o conceito de anéis de valorização discreta. Um anel de valorização discreta é um anel onde existe um elemento irredutível $t \in R$ tal que todo $z \in R$ não-nulo é escrito unicamente na forma $z = ut^n$, onde u é uma unidade em R e n é um inteiro não-negativo. Chamamos t de parâmetro uniformizador para R e o expoente n de ordem de z. Para maiores detalhes consultar [FULTON 1969], página 22.

Teorema 3.3. *Se $C = V(F)$, onde F é um polinômio irredutível e $P \in C$ um ponto não-singular, então o anel $\mathcal{O}_P(C)$ é um anel de valorização discreta.*

Prova. Veja que já demonstramos que $\mathcal{O}_P(C)$ possui um único ideal maximal. Para provar o resultado é suficiente provar que esse ideal maximal é um ideal principal, i.e., ele é gerado por apenas um elemento. Primeiramente note que basta provar isso para o caso $P = (0, 0)$. Pelo corolário 3.4 em [ATIYAH (1969)], página 39, temos que $(k[X, Y]/(F))_{(X,Y)} \cong k[X, Y]_{(X,Y)}/(F)_{(X,Y)}$. Vamos mostrar que $k[X, Y]_{(X,Y)}/(F)_{(X,Y)}$ é um anel de ideais principais. Suponha sem perda de generalidade que $F_Y(0, 0) \neq 0$. Vamos provar que o ideal maximal de $k[X, Y]_{(X,Y)}/(F)_{(X,Y)}$ é gerado por $x = X + (F)_{(X,Y)}$. Para isso mostraremos que $y = Y + (F)_{(X,Y)} \in (x)$, o que é equivalente a mostrar que $Y \in (X, F)$. Com efeito, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} Y + (F)_{(X,Y)} \in (x) &\Leftrightarrow Y + (F)_{(X,Y)} = G_1 X + (F)_{(X,Y)} \\ &\Leftrightarrow Y - G_1 X \in (F)_{(X,Y)} \\ &\Leftrightarrow Y = G_1 X + G_2 F \\ &\Leftrightarrow Y \in (X, F) \end{aligned}$$

para $G_1, G_2 \in k[X, Y]_{(X,Y)}$.

Note que sempre podemos escrever $F(X, Y) = YG(Y) + XH(X, Y)$. Como $F_Y(0, 0) \neq 0$, segue que $G(0) \neq 0$, já que $F_Y(X, Y) = G(Y) + G_Y(Y)Y + XH_Y(X, Y)$. Desse modo, $G(Y)$ é invertível em $k[X, Y]_{(X,Y)}$ e portanto podemos escrever

$$Y = F(X, Y)G(Y)^{-1} - XH_Y(X, Y)G(Y)^{-1}.$$

Logo, temos que $Y \in (X, F)$. $\square$

Seja V uma variedade projetiva não-vazia em $\mathbb{P}^n$. De maneira análoga ao caso afim, definimos o seu anel de coordenadas como $\Gamma_h(V) := k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ (chamamos de anel de coordenadas homogêneo de V). Visto que $\Gamma_h(V)$ é um domínio de integridade, podemos formar o seu corpo de frações denominado corpo de funções homogêneas de V

(escrevemos $k_h(V)$).

Note que diferentemente do caso afim, os elementos do corpo de funções homogêneas nem sempre podem ser vistos como funções. No entanto, se $f, g \in \Gamma_h(V)$ são formas de mesmo grau d com $g(x) \neq 0$, então $f(\lambda x)/g(\lambda x) = \lambda^d f(x)/\lambda^d g(x) = f(x)/g(x)$. Esse fato motiva a seguinte definição:

Definição 3.4. *Seja V uma variedade projetiva. O corpo de funções de V, denotado por $k(V)$ é definido da seguinte forma*

$$k(V) = \{z \in k_h(V) \mid z = f/g, f, g \text{ formas de mesmo grau}\}.$$

Os elementos de $k(V)$ são chamados de funções racionais sobre V.

Vamos definir agora os anéis locais de V em P, dessa vez no caso projetivo. Seja $P \in V, z \in k(V)$. Dizemos que z é definida em P se z pode ser escrita como $z = f/g$, f, g formas de mesmo grau e $g(P) \neq 0$. Definimos assim, o anel local de V em P da seguinte forma:

$$\mathcal{O}_P(V) = \{z \in k(V) \mid z \text{ é definido em } P\}.$$

Como no caso afim, $\mathcal{O}_P(V)$ é um anel local, onde o seu ideal maximal é da forma

$$\mathfrak{m}_P(V) = \{z \in k(V) \mid z = f/g, g(P) \neq 0, f(P) = 0\}.$$

Ainda análogo ao caso afim, se F é uma curva projetiva plana em $\mathbb{P}^2$ e $P \in F$ é um ponto não-singular, então $\mathcal{O}_P(F)$ é um anel de valorização discreta.

Mostraremos a seguir um exemplo para clarificar o entendimento dos conceitos dessa seção.

Exemplo 3.5. *Vamos calcular as ordens de $z(x) = \frac{x}{1-x}$ sobre $k(\mathbb{P}^1)$ no zero $x = 0$ e no polo $x = 1$. No ponto $x = 0$, x não é invertível e portanto x é o parâmetro uniformizador para $\mathcal{O}_{\{0\}}$, daí segue que a ordem $ord_{\{0\}}z = 1$. Por outro lado, no ponto $x = 1$, $1 - x$ não é invertível e portanto $1 - x$ é o parâmetro uniformizador para $\mathcal{O}_{\{1\}}$, daí segue que a ordem $ord_{\{1\}}z = -1$.*

3.3 Diferenciais sobre uma curva

Nesta seção iremos introduzir o conceito de diferenciais sobre uma curva C. Essas diferenciais são definidas sobre um anel R de maneira que seus elementos são da forma $\sum x_i dy_y$, onde $x_i, y_i \in R$, se comportando de maneira análoga às diferenciais do cálculo.

Definição 3.6. *Seja R um anel contendo k e seja M um R-módulo. Uma derivação de R em M sobre k é um mapa k-linear $D : R \to M$ tal que $D(xy) = xD(y) + yD(x)$ para todos $x, y \in R$.*

Definição 3.7. *Para cada $x \in R$, seja $[x]$ um símbolo. Seja F o R-módulo livre sobre* *o conjunto $\{[x]; x \in R\}$. Seja N o submódulo de F gerado pelos seguintes conjuntos de elementos:*

(i) $\{[x+y]-[x]-[y]; x, y \in R\}$

(ii) $\{[\lambda x]-\lambda[x]; x \in R, \lambda \in k\}$

(iii) $\{[xy]-x[y]-y[x]; x, y \in R\}$

Sejam $\Omega_k(R) := F/N$, *dx a imagem de $[x]$ em F/N e o mapa* $d : R \to \Omega_k(R), x \mapsto dx$. *Chamamos o R-módulo $\Omega_k(R)$ de módulo das diferenciais de R sobre k e $d : R \to \Omega_k(R)$ é uma derivação.*

Tomando R como sendo o corpo de funções racionais sobre uma curva C a construção acima produz o modulo das diferenciais sobre C, que será denotado por $\Omega_k(C)$.

Observaçao 3.8. *Se $x_1, \ldots x_n \in R$, então para todo $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, temos*

$$D(F(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_1, \ldots, x_n) D(x_i).$$

Portanto, se $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, então $\Omega_k(R)$ é de fato gerado (como R-módulo) pelas diferenciais $dx_1, \ldots, dx_n$.

Lema 3.9. *Se R é um domínio de integridade com corpo de frações K e M é um espaço vetorial sobre K, então qualquer derivação $D : R \to M$ se estende unicamente para uma derivação $\tilde{D} : K \to M$.*

Prova. Defina $\tilde{D} : K \to M$ da seguinte forma: $\tilde{D}(z) = y^{-1}(D(x) - zD(y))$ para todo $x/y = z \in K$. É fácil ver que $\tilde{D}$ é bem definido e linear. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(z_1 + z_2) &= \tilde{D}(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_1y_2}) \\
&= (y_1y_2)^{-1}(D(x_1y_2 + x_2y_1) - (z_1 + z_2)D(y_1y_2)) \\
&= y_1^{-1}D(x_1) + y_2^{-1}D(x_2) - x_1y_1^{-2}D(y_1) - x_2y_2^{-2}D(y_2) \\
&= y_1^{-1}D(x_1) - y_1^{-1}z_1D(y_1) + y_2^{-1}D(x_2) - y_2^{-1}z_2D(y_2) \\
&= \tilde{D}(z_1) + \tilde{D}(z_2).
\end{aligned}$$

Observe que $\tilde{D}$ é uma extensão de D, pois para $x \in R$, temos $\tilde{D}(\frac{x}{1}) = 1^{-1}(D(x) - \frac{x}{1}D(1)) = D(x)$ (note que $D(1) = 0$). Para a unicidade veja que se D' é outra extensão de D, então vale as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
z = x/y \Rightarrow D'(zy) &= D'(x) \\
\Leftrightarrow yD'(z) + zD'(y) &= D'(x) \\
\Leftrightarrow yD'(z) + zD(y) &= D(x) \\
D'(z) &= y^{-1}(D(x) - zD(y)) \\
\Leftrightarrow D'(z) &= \tilde{D}(z).
\end{aligned}$$

Falta mostrar que $\tilde{D}$ é uma derivação. Para isso veja que:

$$\begin{aligned}\tilde{D}(z_1z_2) &= (y_1y_2)^{-1}\big(D(x_1x_2) - \frac{x_1x_2}{y_1y_2}D(y_1y_2)\big)\\ &= \frac{1}{y_1y_2}\big(x_1D(x_2) + x_2D(x_1) - \frac{x_1x_2}{y_1y_2}\big(y_1D(y_2) - y_2D(y_1)\big)\big)\\ &= \frac{x_2}{y_1y_2}D(x_1) - \frac{x_1x_2}{y_1^2y_2}D(y_1) + \frac{x_1}{y_1y_2}D(x_2) - \frac{x_1x_2}{y_1^2y_2}D(y_1)\\ &= \frac{x_2}{y_2}\big(y_1^{-1}\big(D(x_1) - \frac{x_1}{y_1}D(y_1)\big)\big) + \frac{x_1}{y_1}\big(y_2^{-1}\big(D(x_2) - \frac{x_1}{y_2}D(y_2)\big)\big)\\ &= z_2\tilde{D}(z_1) + z_1\tilde{D}(z_2).\end{aligned}$$

□

Lema 3.10. *Para qualquer R-módulo M e qualquer derivação $D : R \to M$, existe um único homomorfismo de R-módulo $\varphi : \Omega_k(R) \to M$ tal que $D(x) = \varphi(dx)$ para todos $x \in R$.*

Prova. Defina $\varphi' : F \to M$ por $\varphi'\big(\sum x_i[y_i]\big) = \sum x_iD(y_i)$, então $\varphi'(N) = 0$, já que os geradores de N são anulados por φ'. Daí segue que φ' induz $\varphi : \Omega_k(R) \to M$ definida da seguinte forma: $\varphi\big(\sum x_idy_i\big) = \varphi'\big(\sum x_i[y_i]\big) = \sum x_iD(y_i)$. Em particular, temos $\varphi(dx) = D(x)$.

□

Proposição 3.11. *Seja K um corpo de funções algébricas em uma variável sobre k. Desse modo, $\Omega_k(K)$ é um espaço vetorial unidimensional sobre K. Ademais, se char$(k) = 0$ e $x \in K$ com $x \notin k$, então dx é uma base para $\Omega_k(K)$ sobre K.*

Prova. Pelo corolário da proposição 12 em [FULTON 1969], página 78, podemos considerar uma curva plana afim $F \in k[X,Y]$. Seja $R = k[X,Y]/(F) = k[x,y]; K = k(x,y)$. Como F é irredutível, podemos supor sem perda de generalidade que $F_Y \neq 0$. Já que F_Y possui grau menor que F, temos que $F \nmid F_Y$, ou seja $F_Y(x,y) \neq 0$ como classe de R. Por outro lado, como $F(x,y) = 0$, temos que $0 = d(F(x,y)) = F_X(x,y)dx + F_Y(x,y)dy$. Em contrapartida, visto que $F_Y(x,y) \neq 0$, faz sentido escrever $dy = -\big(\frac{F_X(x,y)}{F_Y(x,y)}\big)dx$. Portanto, dx gera $\Omega_k(K)$, donde $\dim_k(\Omega_k(K)) \leq 1$.

Basta mostrar agora que $\Omega_k(K) \neq 0$. Para isso, defina a seguinte derivação $D : R \to K$, $D(\overline{G}) = G_X(x,y) - uG_Y(x,y)$, onde $\overline{G}$ é a imagem de G em R e $u = -\big(\frac{F_X(x,y)}{F_Y(x,y)}\big)$. É fácil ver que D é uma derivação e que $D(x) = 1$, donde $D \neq 0$. Pelo lema 3.9, existe uma derivação não-nula $\tilde{D} : K \to K$ que é uma extensão da anterior. Usando agora o lema 3.10, sabemos que existe um homomorfismo de R-módulos $\varphi : \Omega_k(K) \to K$, tal que $\tilde{D}(x) = \varphi(dx)$, donde $\Omega_k(K) \neq 0$. □

Note que na proposição 3.11 assumimos que $F_Y \neq 0$ usando o fato de que F é irredutível. Com efeito, se $F_X = F_Y = 0$, então F é constante (contradição, pois F é irredutível) ou F é uma combinação linear de X^p e Y^p se char$(k) = p \neq 0$. Portanto, $F = \sum a_{ij} X^{pi} Y^{pj} = (\sum a_{ij} X^i Y^j)^p$, contrariando a irredutibilidade de F.

Observe que o resultado acima se aplica ao caso em que tomamos K como o corpo de funções racionais sobre uma curva não-singular C. Portanto, $\Omega_k(C)$ é um espaço unidimensional sobre $k(C)$. Em particular, se char$(k) = 0$ e t é um parâmetro uniformizante na vizinhança de um ponto $P \in C$, então $t \in k(C)$, $t \notin k$. Daí para toda função racional $f \in k(C)$, existe um único $v \in K$ tal que $df = vdt$. Podemos assim escrever $v = \frac{df}{dt}$ e chamamos de derivada de f em relação a t.

3.4 Divisores sobre uma curva

Um divisor sobre uma curva C é uma combinação linear formal: $D = \sum_{P \in C} n_P P$, onde $n_P \in \mathbb{Z}$ para todo $P \in C$ e $n_P = 0$ para quase todo ponto P da curva, isto é, os coeficientes são nulos exceto por um número finito de pontos. Desse modo, um divisor D sobre uma curva C se escreve da seguinte forma:

$$D = n_1 P_1 + \ldots + n_r P_r$$

Nesse caso, definimos o grau de D por $\deg(D) = n_1 + \ldots n_r$.

O conjunto dos divisores sobre uma curva pode ser munido com uma estrutura de grupo. Sejam $D = \sum_{P \in C} n_P P$ e $D' = \sum_{P \in C} n'_P P$ dois divisores sobre uma curva C, definimos a seguinte operação:

$$D + D' = \sum_{P \in C} (n_P + n'_P) P$$

Note que esse grupo é um grupo abeliano livre, onde os geradores são os pontos da curva C. Pela definição da operação nesse grupo é fácil ver que $\deg(D + D') = \deg(D) + \deg(D')$.

Se todos os coeficientes n_p do divisor D são não-negativos, dizemos que D é efetivo e escrevemos $D \geq 0$. Para $D = \sum n_P P$ um divisor, definimos $n_P(D) := n_P$ e assim o conjunto

$$supp(D) = \{P \in C \mid n_P(D) \neq 0\}$$

é chamado de suporte do divisor D. Denotaremos por $D = 0$ quando todos os coeficientes n_p forem nulos.

Podemos ainda munir o grupo dos divisores com a seguinte ordem parcial: $D \leq D' \Leftrightarrow n_P \leq n'_P$. Note que essa ordem não é total pois se fosse todos os elementos do grupo dos divisores deveriam ser comparáveis, o que nem sempre é verdade, por exemplo, $D = P_1$ e $D' = P_2$ não são comparáveis. Denotaremos para os divisores D e D', $D < D'$ quando $D \leq D'$ e $D \neq D'$.

3.4.1 Divisores principais de funções racionais

A próxima proposição será crucial para definição de divisores principais.

Proposição 3.12. *Seja z uma função racional sobre uma variedade projetiva V. Então o conjunto dos polos de z é um subconjunto algébrico de V.*

Prova. Defina o conjunto $I_z = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \overline{F}z \in \Gamma_h(V)\}$ e seja S_z o conjunto dos polos de z. Vamos provar primeiramente que os pontos que não estão definidos em z são exatamente os pontos de $V(I_z)$.

Escreveremos $z = a/b$, com $a, b \in \Gamma_h(V)$ formas de mesmo grau. Primeiramente observe que $bz = a \in \Gamma_h(V)$, donde $b \in I_z$. Seja agora $P \in V(J_z)$. Então $F(P) = 0$, para todo polinômio $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ com $\overline{F}z \in \Gamma_h(V)$. Como $b \in J_z$, nós temos que $b(P) = 0$. Logo, z não está definido em P. Concluímos então que $V(I_z) \subset S_z$.

Demonstraremos agora que a inclusão contrária vale. Seja $P \in S_z$. Desse modo, temos que $a(P) \neq 0$ e $b(P) = 0$. Para mostrar que $P \in V(I_z)$, vamos mostrar que para qualquer $F \in I_z$, temos $F(P) = 0$. Pela definição de I_z, existe algum $\overline{G} \in \Gamma_h(V)$, tal que $\overline{F}z = \overline{G}$. Daí segue que $Fa - Gb \in I(V)$. Avaliando no ponto P, temos que $F(P)a(P) - G(P)b(P) = 0$. Como $b(P) = 0$, temos que $a(P)F(P) = 0$. Já que $a(P) \neq 0$, segue que $F(P) = 0$. Provamos assim a inclusão contrária e portanto $V(I_z) = S_z$.

Vamos provar agora que I_z é homogêneo. Seja $F = \sum_{i=0}^{m} F_i$, onde F_i é uma forma em $k[X_1, \ldots, X_n]$ de grau i, com $F \in I_z$. Vamos mostrar que $F_i \in I_z$ para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$. Escreva $z = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$, onde $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são as imagens em $\Gamma_h(V)$ das formas a e b de mesmo grau, respectivamente. Desse modo, como $F \in I_z$, existe $G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\overline{a}\overline{F} = \overline{bG}$. Escrevamos também $G = \sum_{j=0}^{m} G_j$, onde G_j é uma forma em $k[X_1, \ldots, X_n]$ de grau j. Note agora que $aF - bG = \sum_{i=0}^{m}(aF_i - bG_i) \in I(V)$. Como $I(V)$ é homogêneo, $aF_i - bG_i \in I(V)$ para cada $i \in \{0 \ldots, m\}$. Logo, $\overline{F}_i z = \overline{G}_i \in \Gamma_h(V)$, isto é, $F_i \in I_z$ para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$. Portanto, I_z é um ideal homogêneo.

Note que $I(V)$ está contido em I_z. Com efeito, se $F \in I(V)$, temos $\overline{F} = 0$ em $\Gamma_h(V)$ e portanto $\overline{F}z = 0$, donde $F \in I_z$. Desse modo, $V(I_z) \subset V(I(V))$. Por outro lado, como V é uma variedade, $V = V(J)$ para algum ideal J. Logo, pelo Teorema dos zeros de Hilbert: $V(I(V)) = V(I(V(J))) = V(\sqrt{J}) = V(J) = V$. Daí segue que $V(I_z) \subset V$, como queríamos. □

Definiremos agora um divisor associado a uma função racional.

Definição 3.13. *Se $f \in k(C)$, então $\sum_{P \in C} ord_P(f)P$ é um divisor. Esse divisor é chamado de divisor principal. Denominaremos esse divisor por $div(f)$.*

Se tomarmos $V = C$ na proposição 3.12, onde C é um conjunto algébrico definido sobre uma curva, temos que o conjunto de polos de $z \in k(C)$ é finito. Analogamente o conjunto dos polos de $1/z$ também e finito, donde o conjunto dos zeros de z também é finito e portanto $div(z)$ está bem definido. Vamos agora a um exemplo simples de divisor principal.

Exemplo 3.14. *Seja* $z \in k(\mathbb{P}^1)$*, definida por* $z(x) = \frac{x}{1-x}$*. Pelo exemplo 3.5, temos* $div(f) = 1 \cdot [0] - 1 \cdot [1]$.

Definimos a seguinte relação de equivalência no grupo de todos os divisores: dizemos que os divisores D_1 e D_2 são linearmente equivalentes (escrevemos $D_1 \sim D_2$) se existe algum $f \in k(C)$ tal que $D_1 = D_2 + div(f)$.

Observaçao 3.15. *Note que se* $D_1 \sim D_1'$ *e* $D_2 \sim D_2'$*, então* $D_1 + D_2 \sim D_1' + D_2'$*. Para ver isso, note que se existem* $f_1, f_2 \in k(C)$ *tal que* $D_1 = D_1' + div(f_1)$ *e* $D_2 = D_2' + div(f_2)$*, então tomando* $z = f_1 f_2$*, temos* $D_1 + D_2 = (D_1' + D_2') + div(z)$*. Essa observação será importante para um exemplo que será dado na subseção 3.7.*

Definição 3.16. *Para cada divisor* $D = \sum_{P \in C} n_P P$ *sobre* C*, definimos o conjunto:*

$$L(D) := \{f \in k(C); ord_P(f) \geq -n_P, \forall P \in C\}.$$

Proposição 3.17. *Se* D *é um divisor sobre a curva* C*, então temos:*

(i) $L(D)$ *é um espaço vetorial sobre* k*.*

(ii) Se D *e* D' *são linearmente equivalentes, então* $L(D)$ *e* $L(D')$ *são isomorfos como espaços vetoriais sobre* k *e* $\deg(D) = \deg(D')$*.*

(iii) $L(0) = k$*.*

(iv) Se $\deg(D) < 0$*, então* $L(D) = 0$*.*

(v) Se $D < 0$*, então* $L(D) = \{0\}$*.*

Prova. (i) Sejam $f, g \in L(D)$ e $c \in k$. Então, para qualquer ponto $P \in C$, temos $\mathrm{ord}_P(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g)\} \geq -n_P(D)$ e $\mathrm{ord}_P(cf) = \mathrm{ord}_P(c) + \mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_P(f) \geq -n_P(D)$. Logo, $f+g$ e cf estão em $L(D)$ e portanto $L(D)$ é um espaço vetorial sobre k.

(ii) Como D e D' são linearmente equivalentes, existe $z \in k(C)$ tal que $D = D' + div(z)$. Defina agora a seguinte aplicação linear $\psi : L(D) \to L(D'), f \mapsto fz$. É fácil ver que ψ está bem definida e é de fato uma aplicação linear. Note que a imagem de ψ está contida em $L(D')$, pois para $f \in L(D)$, temos $\mathrm{ord}_P(fz) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(z) \geq -n_P(D) + \mathrm{ord}_P(z) = -n_P(D')$. Defina agora a aplicação linear $\psi' : L(D') \to L(D), f \mapsto fz^{-1}$. De maneira análoga, temos que a imagem de φ' está contida em L(D). Como ψ e ψ' são inversas uma da outra, temos que $L(D)$ e $L(D')$ são isomorfos como espaços vetoriais sobre k. Para a segunda parte, basta notar que para qualquer $f \in k(C)$, $div(f)$ é um divisor de grau zero (ver [FULTON 1969], proposição 1, página 97).

(iii) Seja $c \in k$. Como $div(c) = 0$, temos que $c \in L(0)$ e portanto $k \subset L(0)$. Se $c \in L(0)$, então $div(c) \geq 0$. Daí segue que c não possui pólos, logo $c \in k$, donde $L(0) = k$.

(iv) Vamos provar a contrapositiva. Se $l(D) > 0$, então existe alguma função racional f em $L(D)$, donde $div(f) + D \geq 0$. Denotando $D' = D + div(f)$, temos $D' \sim D$ com

$\deg(D') > 0$. Pelo item (II), temos que $\deg(D) \geq 0$.

(v) Suponha que exista uma função racional não-nula $f \in L(D)$. Então $div(f) \geq -D > 0$, assim temos que f possui pelo menos um zero e nenhum polo, absurdo.

□

3.4.2 Divisores Canônicos

Podemos definir divisores associados a formas diferenciais. Para isso, definimos a ordem de $\text{ord}_P(\omega)$ de uma diferencial não-nula ω em P da seguinte forma: escolha um parâmetro uniformizante t em $\mathcal{O}_P(C)$, com isso existe um único $f \in k(C)$ tal que $\omega = fdt$. Desse modo, definimos $\text{ord}_P(\omega) := \text{ord}_P(f)$. A próxima proposição garante que essa definição está bem posta.

Proposição 3.18. *Suponha que t seja um parâmetro uniformizante em $\mathcal{O}_P(F)$ com F um polinômio irredutível. Desse modo, se $f \in \mathcal{O}_P(F)$, então temos que $\frac{df}{dt} \in \mathcal{O}_P(F)$.*

Prova. Suponha que $P = (0,0)$ seja um ponto não-singular. Escolha N suficiente grande tal que $\text{ord}_P(\frac{dx}{dt}) \geq -N$ e $\text{ord}_P(\frac{dy}{dt}) \geq -N$. Então se $f \in k[x,y]$, temos que $\frac{df}{dt} = f_X(x,y)\frac{dx}{dt} + f_Y(x,y)\frac{dy}{dt}$. Como $f_X(x,y), f_Y(x,y) \in k$, ambos tem ordem com valor positivo, logo temos que $\text{ord}_P(f') \geq -N$.

Usando o fato provado no parágrafo anterior, vamos mostrar que se $f \in \mathcal{O}_P(F)$, então $\text{ord}_P(f') \geq -N$. Escrevemos $f = g/h$ com $g, h \in k[x,y]$ e $h(P) \neq 0$. Então calculando a sua derivada, temos que $f' = h^{-2}(hg' - gh')$. Visto que $\text{ord}_P(h') \geq -N$ e $\text{ord}_P(g') \geq -N$ pelo parágrafo anterior e $\text{ord}_P(h) = 0$, já que $h(P) \neq 0$, temos que $\text{ord}_P(f') \geq -N$.

Seja agora $f \in \mathcal{O}_P(F)$. Pelo problema 2.30 em [FULTON 1969], página 23, podemos escrever $f = \sum_{i<N} \lambda_i t^i + t^N g$, onde $\lambda_i \in k$ e $g \in \mathcal{O}_P(F)$. Derivando, temos que $f' = \sum i\lambda_i t^{i-1} + gNt^{N-1} + t^N g'$. Como $\text{ord}_P(t) = 1$, $\text{ord}_P(\lambda_i) = 0$ e $\text{ord}_P(g') \geq -N$, temos que cada termo pertence a $\mathcal{O}_P(F)$, logo $f' \in \mathcal{O}_P(F)$ como queríamos. □

Para verificar a boa definição de $\text{ord}_P(\omega)$, suponha que u seja outro parâmetro uniformizante e $fdt = gdu$. Logo, $f/g = \frac{du}{dt} \in \mathcal{O}_P(C)$ pela proposição 3.18. Analogamente, temos $g/f \in \mathcal{O}_P(C)$, donde $\text{ord}_P(f) = \text{ord}_P(g)$. Agora definimos o divisor $div(\omega) = \sum_{P \in C} \text{ord}_P(\omega)$. Pela proposição 8 em [FULTON 1969], página 107, essa noção de divisores associados a diferenciais está bem definida.

Chamamos um divisor W de divisor canônico, se existe $\omega \in \Omega$, tal que $W = div(\omega)$. Note que todos os divisores canônicos são linearmente equivalentes entre si. Com efeito, se $W' = div(\omega')$, onde ω' é uma diferencial em Ω, então existe $f \in k(C)$ tal que $\omega' = f\omega$. Logo, $W' = div(\omega') = div(f) + div(\omega) = div(f) + W$ e portanto W' é linearmente equivalente a W. Em particular dois divisores canônicos possuem o mesmo grau.

3.4.3 Teorema de Riemann-Roch e aplicações

Denotaremos a dimensão do espaço vetorial $L(D)$ sobre o corpo k por $l(D)$. O próximo teorema relaciona o grau dos divisores com as suas dimensões. Ele também nos permite definir o conceito de gênero de uma curva.

Teorema 3.19. *[Teorema de Riemann]: Existe uma constante $g \in \mathbb{Z}$ dependendo de C tal que $l(D) \geq \deg(D) + 1 - g$, para todos os divisores D de C.*

Prova. Consultar FULTON 1969, página 101. □

Definição 3.20. *O gênero de uma curva não singular C é o menor valor possível da constante g no teorema de Riemann.*

Note que g é uma constante não-negativa. Para ver isso basta fazer $D = 0$ no teorema de Riemann.

Vamos enunciar agora um teorema fundamental na teoria de curvas algébricas:

Teorema 3.21. *[Teorema de Riemann-Roch]: Seja W um divisor canônico sobre uma curva não-singular C, então para qualquer divisor D,*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(W - D)$$

Prova. Consultar FULTON 1969, página 108. □

Corolário 3.22. *Se D é um divisor sobre uma curva não-singular, então vale:*

(i) Se W é um divisor canônico, então $l(W) = g$ e $\deg(W) = 2g - 2$.

(ii) Se $\deg(D) > 2g - 2$, então $l(D) = deg(D) + 1 - g$.

(iii) Se $\deg(D) \geq 2g$, então $l(D - P) = l(D) - 1$.

Prova. (i) Fazendo $D = 0$, temos pelo teorema de Riemann-Roch $l(0) = \deg(0)+1-g+l(W)$. Pela proposição 3.17, temos que $l(0) = 1$, donde $l(W) = g$. Faça agora $D = W$ no teorema de Riemann-Roch. Desse modo, temos $l(W) = \deg(W) + 1 - g + l(0)$, donde $\deg(W) = 2g - 2$.

(ii) Se $\deg(D) > 2g-2$, então usando o item anterior e a proposição 3.17, temos $l(W - D) = 0$. Logo, pelo pelo teorema de Riemann-Roch, temos $l(D) = \deg(D) + 1 - g$.

(iii) Pelo item anterior, temos que $l(D - P) = \deg(D) - g$ e $l(D) = \deg(D) + 1 - g$. Subtraindo a primeira expressão da segunda, temos que $l(D - P) = l(D) - 1$.

□

Em curvas algébricas, o teorema de Clifford é um resultado de W.K. Clifford (1878), mostrando que podemos encontrar uma cota superior para a dimensão do espaço vetorial associado a certos tipos de divisores. Esse teorema será necessário para provar a proposição 4.3.

Teorema 3.23. *[Teorema de Clifford] Se D é um divisor tal que $l(D) > 0$ e $l(W-D) > 0$, onde W é um divisor canônico, então vale a seguinte desigualdade:*

$$l(D) \leq \frac{1}{2}\deg(D) + 1$$

A igualdade vale se e somente se C é uma curva hiperelíptica.

Prova. Vamos provar primeiramente que a conclusão do teorema vale se existe algum ponto $P \in C$ tal que $l(D - P) = l(D)$. Note que segue das hipóteses que $\deg(D) \geq 0$. Vamos provar o teorema por indução. Para o caso $\deg(D) = 0$, temos $l(D) = l(D-P) = 0$ pela proposição 3.17 e portanto a desigualdade vale trivialmente. Suponha que o resultado do teorema de Clifford vale para qualquer divisor com grau menor que n e seja D um divisor de grau n satisfazendo as condições do teorema. Observe que $D - P$ também satisfaz essas condições. Com efeito, temos que $l(D - P) = l(D) > 0$ e pelo teorema de Riemann-Roch $l(W-(D-P)) = l(W-D)+1 > 0$. Assim, pela hipótese de indução temos que $l(D-P) \leq \frac{1}{2}\deg(D-P)+1$. Visto que $l(D) = l(D-P)$ e $\deg(D-P) = \deg(D)-1$, substituindo nessa desigualdade, temos que

$$\begin{aligned}
l(D) &= l(D-P) \\
&\leq \frac{1}{2}(\deg(D) - 1) + 1 \\
&= \frac{1}{2}\deg(D) + \frac{1}{2} \\
&< \frac{1}{2}\deg(D) + 1
\end{aligned}$$

e assim o resultado do teorema de Clifford vale no caso que $l(D - P) = l(D)$ para algum ponto $P \in C$.

Vamos provar agora o teorema de Clifford para o caso que $l(D - P) \neq l(D)$ para todo ponto $P \in C$. Note que pela proposição 3.17 se o teorema vale para algum divisor D, ele também valerá para qualquer divisor linearmente equivalente a D. Como estamos supondo $l(D) > 0$ e $l(W - D) > 0$, podemos considerar apenas o caso em que D e $W - D$ são divisores efetivos.

Escolha $g \in L(D)$ tal que $g \notin L(D - P)$ para todos pontos $P \leq W - D$. Desse modo, temos que a aplicação linear $\psi : L(W - D)/L(0) \to L(W)/L(D)$ definida por $\psi(f + L(0)) = fg + L(D)$ é injetiva. Daí segue que $l(W - D) - 1 \leq g - l(D)$. Usando essa desigualdade e aplicando o teorema de Riemann-Roch temos que

$$\begin{aligned}
l(D) &= \deg(D) + 1 - g + l(W - D) \\
&\leq \deg(D) + 1 - g + (1 + g - l(D)) \\
&= \deg(D) + 2 - l(D)
\end{aligned}$$

o que implica que $l(D) \leq \frac{1}{2}\deg(D) + 1$, como queríamos.

Para a demonstração da segunda parte do teorema consultar [HARTSHORNE 1977], página 344. $\square$

3.4.4 Espaços vetoriais $\Omega(D)$

Seja D um divisor. Definimos $\Omega(D) = \{\omega \in \Omega; div(\omega) \geq D\}$. Como $\Omega(D)$ é um subespaço de Ω, podemos denotar $\delta(D) := \dim_k \Omega(D)$.

A proposição que virá em seguida mostra que existe uma relação entre os espaços vetoriais $L(D)$ e $\Omega(D)$.

Proposição 3.24. *Se D é um divisor qualquer e W é um divisor canônico, então $\delta(D) = l(W - D)$.*

Prova. Seja W um divisor canônico com $W = div(\omega)$, para alguma diferencial ω. Defina a aplicação $\varphi : L(W - D) \to \Omega(D)$ por $\varphi(f) = f\omega$. Note que φ é um isomorfismo e portanto $L(W - D) \cong \Omega(D)$. Daí segue que $\delta(D) = l(W - D)$. $\square$

Observaçao 3.25. *Pela proposição 3.24 e o teorema de Riemann-Roch temos que para qualquer divisor D, vale*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + \delta(D).$$

Nas próximas seções quando introduziremos a definição de diferenciais de ordem superior iremos provar uma generalização da proposição 3.24. O próximo lema será importante para provar a proposição 3.27. Note que usaremos o fato de fácil verificação que $\Omega\big((2g-2)P\big) \subset \Omega\big((2g-3)P\big) \subset \ldots \subset \Omega(2P) \subset \Omega(P)$.

Lema 3.26. *Se n é um inteiro positivo e P um ponto de uma curva não-singular, temos a seguinte equivalência: $1 + \delta(nP) = \delta((n-1)P)$ se e somente se existe $\omega \in \Omega(0)$ tal que $ord_P(\omega) = n - 1$.*

Prova. Suponha que $\delta((n-1)P) = 1 + \delta(nP)$. Como $\Omega(nP) \subset \Omega((n-1)P)$, existe $\omega \in \Omega(n-1)P$ tal que $\omega \notin \Omega(nP)$. Portanto, $div(\omega) \geq (n-1)P$ e $div(\omega) \ngeq nP$. Segue diretamente da primeira e da segunda desigualdade que $\mathrm{ord}_P(\omega) \geq n - 1$ e $\mathrm{ord}_P(\omega) < n$ respectivamente. Logo, $\mathrm{ord}_P(\omega) = n - 1$.

Se existir $\omega \in \Omega(0)$ tal que $\mathrm{ord}_P(\omega) = n - 1$, então $\omega \in \Omega((n-1)P)$ e $\omega \notin \Omega(nP)$. Além disso, como $\Omega(nP) \subset \Omega((n-1)P)$, temos $\Omega(nP) \subsetneqq \Omega((n-1)P)$. Daí segue a desigualdade estrita $\delta(nP) < \delta((n-1)P)$, donde $\delta(nP) + 1 \leq \delta((n-1)P)$.

Vamos provar agora a desigualdade contrária. Pelo teorema de Riemann-Roch, temos $l(nP) = \delta(nP) + n + 1 - g$ e $l((n-1)P) = \delta((n-1)P) + (n-1) + 1 - g$. Usando o fato que $l((n-1)P) \leq l(nP)$, obtemos $\delta((n-1)P) \leq \delta(nP) + 1$. $\square$

Proposição 3.27. *Para n inteiro positivo e P um ponto de uma curva não-singular, vale: $l((n-1)P) = l(nP)$ se e somente se existe $\omega \in \Omega(0)$ tal que $ord_P(\omega) = n - 1$.*

Prova. Pelo lema 3.26 note que existe $\omega \in \Omega(0)$ tal que $\text{ord}_P(\omega) = n - 1$ se e somente se $\delta((n-1)P) = 1 + \delta(nP)$. Por outro lado, pelo teorema de Riemann-Roch, $\delta((n-1)P) = 1 + \delta(nP)$ é equivalente à dizer que $l((n-1)P) = l(nP)$. Logo, $l((n-1)P) = l(nP)$ se e somente se existe $\omega \in \Omega(0)$ tal que $\text{ord}_P(\omega) = n - 1$. □

O teorema 3.28 e a proposição 3.29 formam os resultados mais úteis da seção para os próximos capítulos. Iremos encontrar uma condição suficiente para que as diferenciais de uma curva não-singular sejam linearmente independentes além de encontrar uma base para $\Omega(0)$ que desempenhará um papel importante nos próximos capítulos.

Teorema 3.28. *Se as diferenciais $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$ possuem ordens diferentes em um ponto P de uma curva não-singular, então elas são linearmente independentes.*

Prova. Suponha $c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n = 0$, então $\text{ord}_P(c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n) = \infty$ o que implica que $\min\{\text{ord}_P(c_1\omega_1), \ldots, \text{ord}_P(c_n\omega_n)\} = \infty$. Portanto, $c_1 = \ldots = c_n = 0$ e $\omega_1, \ldots, \omega_g$ são linearmente independentes. □

Proposição 3.29. *Se $l((l_i - 1)P) = l(l_iP)$ para $1 \leq i \leq g$, então existe uma base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ para $\Omega(0)$ tal que $ord_P(\omega_i) = l_i - 1$.*

Prova. Pela proposição 3.27, existem diferenciais $\omega_1, \ldots, \omega_g \in \Omega(0)$ tal que $\text{ord}_P\omega_i = l_i - 1$. Pelo teorema 3.28 essas diferenciais são linearmente independentes. Pela proposição 3.24 e corolário 3.22, temos que $\delta(0) = l(W) = g$, donde $\dim \Omega(0) = g$. Por questões dimensionais, segue que $\omega_1, \ldots, \omega_g$ é base de $\Omega(0)$. □

3.5 Pontos de Weierstrass

Nesta seção definiremos pontos de Weierstrass para em seguida provar algumas propriedades decorrentes dessa definição. Fixamos um ponto P sobre uma curva não-singular C e definiremos o conjunto $L = \{l_1 < \ldots < l_g\}$ das lacunas de Weierstrass de P. Mostraremos que $H := \mathbb{N} - L$ é um semigrupo numérico, chamado de semigrupo de Weierstrass.

Proposição 3.30. *Seja P um ponto sobre uma curva não-singular C de gênero g. Se definimos $N_r = N_r(P) = l(rP)$, então temos $1 = N_0 \leq N_1 \ldots \leq N_{2g-1} = g$.*

Prova. Como $(r-1)P \subset rP$ para cada $r \in \mathbb{N}$, temos $l(r-1)P \leq l(rP)$ para cada $r \in \mathbb{N}$, donde $N_0 \leq N_1 \ldots \leq N_{2g-1}$. Pela proposição 3.17, temos que $l(0) = 1$. Falta apenas mostrar que $N_{2g-1} = g$. Isso é feito aplicando o corolário 3.22 em $l((2g-1)P)$:

$$\begin{aligned} l((2g-1)P) &= \deg((2g-1)P) + 1 - g \\ &= 2g - 1 + 1 - g \\ &= g. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.31. *$N_{r-1} \neq N_r$ se e somente se existe $f \in k(C)$ tal que $ord_P(f) = -r$ e P é o único pólo de f.*

Prova. Suponha que $N_{r-1} \neq N_r$. Desse modo, por definição, temos $l((r-1)P) \neq l(rP)$, donde $L((r-1)P) \neq L(rP)$. Logo, $L((r-1)P) \subsetneq L(rP)$. Assim, existe $f \in L(rP)$ tal que $f \notin L((r-1)P)$. Segue que $\mathrm{ord}_P(f) \geq -r$ e $\mathrm{ord}_P(f) < -(r-1) = -r+1$. Consequentemente, $\mathrm{ord}_P(f) = -r$ e P é o único pólo de f.

Por outro lado, se existe $f \in k(C)$ tal que $\mathrm{ord}_P(f) = -r$ e P é o único pólo de f, então $f \in L(rP)$ e $f \notin L((r-1)P)$. Segue daí que $L(rP) \neq L((r-1)P)$. Portanto, $l(rP) \neq l((r-1)P)$, donde $N_{r-1} \neq N_r$. □

Definição 3.32. *Se $N_{r-1} = N_r$, então r é chamado de lacuna de Weierstrass. Note que pela proposição 3.30, temos exatamente g lacunas de Weierstrass e assim $(l_1, \ldots, l_g)$ é chamada sequência de lacunas de Weierstrass. Um ponto $P \in C$ é dito ser um ponto de Weierstrass se a sequência de lacunas de Weierstrass de C em P é diferente de $(1, \ldots, g)$.*

Observaçao 3.33. Pela proposição 3.29 note que existe uma base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ para $\Omega(0)$ tal que $\mathrm{ord}_P(\omega_i) = l_i - 1$ e $(l_1, \ldots, l_g)$ é uma sequência de lacunas de Weierstrass.

Proposição 3.34. *$H = \mathbb{N} - \{l_1, \ldots, l_g\}$ é um semigrupo numérico. Esse semigrupo é chamado semigrupo de Weierstrass.*

Prova. Basta mostrar que a operação é bem definida em H. Sejam $r, s \in H$, então pela proposição 3.31, existem $f, g \in k(C)$ tal que $\mathrm{ord}_P(f) = -r$ e $\mathrm{ord}_P(g) = -s$, para algum $r, s \in \mathbb{N}$ e r, s são os únicos pólos de f e g respectivamente. Desse modo, como $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g) = -r - s = -(r+s)$ e P é o único pólo de fg. Portanto, temos que $r + s \in H$ e a proposição está provada. □

Observaçao 3.35. *Pela proposição 3.34, podemos usar as ferramentas de semigrupos númericos estudados no capítulo anterior no contexto de semigrupos de Weierstrass. Nos próximos capítulos utilizaremos resultados do capítulo anterior para estudar algumas propriedades da curva C.*

3.6 Diferenciais de ordem superior

Para para cada número natural n, denotamos por Ω^n o espaço das diferenciais de grau n sobre uma curva não-singular C. Formalmente Ω^n é o produto tensorial de n fatores iguais a Ω, pensado como espaço vetorial sobre $k(C)$. Assim, um elemento de Ω^n é da forma $f(dt)^{\otimes n}$, onde $f \in k(C)$ é univocamente determinado pela a escolha de uma parâmetro local t. Em particular podemos definir o divisor de uma diferencial de grau n da mesma forma que definimos o divisor de uma diferencial de primeira ordem. Com isso para cada divisor D sobre a curva, podemos definir

$$\Omega^n(D) = \{\lambda \in \Omega^n \mid div(\lambda) \geq D\}.$$

Mais geralmente consideraremos a k-álgebra $\oplus_{n\geq 0}\Omega^n(D)$. No caso que $D=0$ essa é dita a álgebra das diferenciais regulares sobre a curva C. O teorema a seguir caracteriza essa k-álgebra.

Teorema 3.36. *[Teorema de Max Noether] Seja C uma curva não-singular, não-hiperelíptica com gênero $g \geq 4$ e $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ uma base de $\Omega^1(0)$. O mapa $\varphi : k[X_1, \ldots, X_g] \to \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n(0), F \mapsto F(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ é sobrejetivo.*

Prova. A demonstração desse resultado será dada como consequência do capítulo 4. □

Observaçao 3.37. *O resultado do teorema 3.28 vale para Ω^n, $n \in \mathbb{N}$. Isto é, se tivermos elementos em Ω^n com ordens diferentes em um ponto P, então esses elementos são linearmente independentes em Ω^n.*

A próxima proposição será útil para o que será feito no próximo capítulo.

Proposição 3.38. *Se $D = \min\{div(\omega_{g-1}), div(\omega_g)\}$ e F é um divisor sobre a curva C, então a codimensão de $\Omega^{n-1}(F-D)\omega_{g-1}+\Omega^{n-1}(F-D)\omega_g$ em $\Omega^n(F)$ é igual a* $\dim \Omega^n(F) - 2\dim \Omega^{n-1}(F-D) + \dim \Omega^{n-2}(F-2D)$.

Prova. Defina o seguinte homomorfismo:

$$\varphi_1 : \Omega^{n-2}(F-2D) \to \Omega^{n-1}(F-D) \times \Omega^{n-1}(F-D)$$

$$\tau \mapsto (\tau\omega_g, -\tau\omega_{g-1}).$$

Vamos provar que φ_1 é bem definida. Para cada $\tau \in \Omega^{n-2}(F-2D)$, temos que $div(\tau) \geq F-2D$. Daí segue que

$$div(\tau\omega_g) = div(\tau) + div(\omega_g) \geq (F-2D) + D = F - D$$

e analogamente $div(-\tau\omega_{g-1}) \geq F-D$. Logo, $(\tau\omega_g, -\tau\omega_{g-1}) \in \Omega^{n-1}(F-D)\times\Omega^{n-1}(F-D)$ e portanto φ_1 está bem definida.

Vamos provar agora que o seguinte homomorfismo:

$$\varphi_2 : \Omega^{n-1}(F-D) \times \Omega^{n-1}(F-D) \to \Omega^n(F)$$

$$(\lambda, \eta) \mapsto \lambda\omega_{g-1} + \eta\omega_g$$

é de fato bem-definido. Note para $\lambda, \eta \in \Omega^{n-1}(F-D)$, temos

$$div(\lambda\omega_{g-1}) = div(\lambda) + div(\omega_{g-1}) \geq (F-D) + D \geq F.$$

Analogamente, também vale $div(\lambda\omega_g) \geq F$. Desse modo, $\lambda\omega_{g-1}+\eta\omega_g \in \Omega^n(F)$ e portanto φ_2 está bem definida.

Vamos mostrar agora que a seguinte sequência é exata:

$$0 \to \Omega^{n-2}(F-2D) \overset{\varphi_1}{\to} \Omega^{n-1}(F-D) \times \Omega^{n-1}(F-D) \overset{\varphi_2}{\to} \Omega^n(F) \overset{\varphi_3}{\to} \Omega^n(F)/D \to 0,$$

onde

$$D = \Omega^{n-1}(F-D)\omega_{g-1} + \Omega^{n-1}(F-D)\omega_g$$

e φ_3 é epimorfismo canônico.

Como φ_1 é claramente injetiva e φ_2 é um epimorfismo, para provar que essa sequência é exata, basta mostrar que $Im(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$. Se $(\tau\omega_g, -\tau\omega_{g-1}) \in Im(\varphi_1)$, então $\varphi_2(\tau\omega_g, -\tau\omega_{g-1}) = (\tau\omega_g)\omega_{g-1} + (-\tau\omega_{g-1})\omega_g = 0$, e assim $(\tau\omega_g, -\tau\omega_{g-1}) \in \ker(\varphi_2)$. Por outro lado, se $(\lambda, \eta) \in \ker(\varphi_2)$, então $\varphi_2(\lambda, \eta) = \lambda\omega_{g-1} + \eta\omega_g = 0$ e portanto $\frac{\lambda}{\omega_g} = \frac{-\eta}{\omega_{g-1}}$. Defina $\tau := \frac{\lambda}{\omega_g} = \frac{-\eta}{\omega_{g-1}}$. Logo,

$$\varphi_1(\tau) = (\tau\omega_g, -\tau\omega_{g-1}) = \Big((\frac{\lambda}{\omega_g})\omega_g, \big(- \big(- \frac{\eta}{\omega_{g-1}})\omega_{g-1} \Big) = (\lambda, \eta),$$

e portanto $(\lambda, \eta) \in Im(\varphi_1)$. Assim, $\ker(\varphi_1) \subset Im(\varphi_2)$, donde $Im(\varphi_2) = \ker(\varphi_1)$.

Como a sequência é exata, temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} -\dim\big(\Omega^{n-2}(F-2D)\big) &+ 2\dim\big(\Omega^{n-1}(F-D)\big) - \dim\big(\Omega^n(F)\big) + \dim\big(\Omega^n(F)\big) \\ &- \dim\Big(\Omega^{n-1}(F-D)\omega_{g-1} + \Omega^{n-1}(F-D)\omega_g\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \dim\big(\Omega^n(F)\big) - \dim\Big(\Omega^{n-1}(F-D)\omega_{g-1} + \Omega^{n-1}(F-D)\omega_g\Big) &= \dim\big(\Omega^n(F)\big) \\ - 2\dim\big(\Omega^{n-1}(F-D)\big) + \dim\big(\Omega^{n-2}(F-2D)\big). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.39. *Se D é um divisor qualquer e W é um divisor canônico, então* $\dim\Omega^n(D) = l(nW-D)$.

Prova. Suponha que $W = div(\omega)$, onde ω é uma diferencial sobre C. Defina a aplicação $\varphi : L(nW-D) \to \Omega^n(D)$, $\varphi(z) = z\omega^n$. Vamos provar primeiramente que ela está bem definida, i.e, para $z \in L(nW - D)$, temos $\varphi(z) \in \Omega^n(D)$:

$$\begin{aligned} z \in L(nW - D) &\implies div(z) + nW - D \geq 0 \\ &\implies div(z\omega^n) = div(z) + ndiv(\omega) \geq D \\ &\implies z\omega^n \in \Omega^n(D) \\ &\implies \varphi(z) \in \Omega^n(D). \end{aligned}$$

Note que φ é uma aplicação linear, pois se $z_1, z_2 \in L(nW - D)$, então

$$\varphi(z_1 + z_2) = (z_1 + z_2)\omega^n = z_1\omega^n + z_2\omega^n = \varphi(z_1) + \varphi(z_2).$$

Para a injetividade, veja que

$$\varphi(z) = 0 \implies z\omega^n = 0 \implies z = 0.$$

Para a sobrejetividade, suponha $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \Omega^n(D)$. Se $\alpha_i = f_i dt$ e $\omega = gdt$, onde os f_i's e g são funções racionais e t é um parâmetro local, então $\frac{f_1 \cdots f_n}{g^n} \in L(nW - D)$. Portanto,

$$\varphi\left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g^n}\right) = \frac{f_1 \cdots f_n}{g^n}\omega^n = \frac{f_1 \cdots f_n}{g^n} g^n (dt)^n = f_1 \cdots f_n (dt)^n = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \Omega^n(D).$$

□

Proposição 3.40. *Se $n \geq 2$, então* $\dim \Omega^n(0) = (2n - 1)(g - 1)$.

Prova. Pelo teorema 3.39 e o corolário 3.22, temos

$$\begin{aligned} \dim \Omega^n(0) &= l(nW) \\ &= \deg(nW) + 1 - g \\ &= n(2g - 2) + 1 - g \\ &= (2n - 1)(g - 1) \end{aligned}$$

□

3.7 Sistemas lineares

Seja D um divisor sobre uma curva e V um subespaço vetorial de $L(D)$. O conjunto de divisores $\{div(f) + D | f \in V\}$ é chamado de sistema linear associado a V. Se $V = L(D)$, então o sistema linear é dito ser completo e denotaremos por $|D|$.

Segue direto da definição que o sistema linear completo $|D|$ é exatamente o conjunto de todos os divisores efetivos D' sobre a curva tal que $D \sim D'$.

Definição 3.41. *Seja S um sistema linear sobre uma curva C. Um ponto $P \in C$ é um* *ponto de base de S se todo divisor $D \in S$ contém P. Um sistema linear S é livre de pontos de base se ele não possui pontos de base.*

Note que por vacuidade que se o sistema linear $|D|$ é vazio, então todo ponto é um ponto de base. Mostraremos agora que a maioria dos sistemas lineares completos sobre uma curva são livres de pontos de base.

Exemplo 3.42. *Todo divisor D de grau $d > 0$ sobre uma curva racional C tem um sistema linear completo livre de pontos de base. Pelo corolário da proposição 4 em [FULTON 1969], página 100, a curva C é isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Observe que se M e N são dois pontos quaisquer sobre $\mathbb{P}^1$, então $M \sim N$. Segue desse fato e da observação 3.15 que para um divisor qualquer de grau d, $D' = n_1P_1 + \ldots + n_kP_k \sim n_1P + \ldots + n_kP = dP$, onde P é um ponto qualquer da curva. Desse modo, temos que todos os divisores de grau d estão no mesmo sistema linear e não possuem pontos em comum. Portanto, todo divisor de grau positivo sobre uma curva racional possui um sistema linear livre de pontos de base.*

Note que o que foi dito no exemplo acima não é verdade se o sistema linear não for completo. Por exemplo, se tomarmos $D = P$, o sistema linear $\{P\}$ formado apenas pelo ponto P não é livre de pontos de base, pois P é ponto base de $\{P\}$, embora $\deg D = 1 > 0$.

Seja D um divisor e V um subespaço de $L(D)$. Se $f_1, \ldots, f_{r+1}$ é uma base para V, então a correspondência $div(\sum \lambda_i f_i) + D \mapsto (\lambda_1 : \ldots : \lambda_{r+1})$ estabelece uma bijeção entre o sistema linear $S = \{div(f) + D \mid f \in V\}$ e o espaço projetivo $\mathbb{P}^r$. Se $\deg(D) = n$, então o sistema linear é dito ser um g^r_n.

Podemos definir ainda divisores associados a aplicações regulares e sistemas lineares sobre curvas. Se $\varphi : C \to \mathbb{P}^n, P \mapsto (f_0(P) : f_1(P) : \ldots : f_n(P))$ é uma aplicação regular, defina o divisor $D = -\min div(f_i)$. Assim $-D \leq div(f_i)$ para todo i e portanto o conjunto V de todas as combinações lineares das funções f_i é um subespaço linear de $L(D)$. Logo, o conjunto dos divisores $|\varphi| = \{div(g) + D \mid g \in V\}$ forma um sistema linear sobre C. Iremos agora definir o conceito de curvas trigonais. Esse conceito será usado no último capítulo da presente dissertação.

Definição 3.43. *Dizemos que uma curva C é trigonal se existe um sistema linear g^1_3 sobre C, i.e., existe uma aplicação regular $\varphi : C \to \mathbb{P}^1$ com imagem não degenerada, onde o divisor associado a essa aplicação possui grau* 3.

4 BASE MONOMIAL PARA O ESPAÇO DAS DIFERENCIAIS N-ÉSIMAS REGULARES

Daqui por diante consideraremos o espaço das diferenciais sobre um divisor como sendo um espaço vetorial sobre o corpo k. Fixe um ponto P em uma curva C e considere $(l_1, \ldots, l_g)$ a sua sequência de lacunas de Weierstrass. Mostramos no capítulo anterior que existem diferenciais holomorfas $\omega_1, \ldots, \omega_g$ em C com $\mathrm{ord}_P(\omega_i) = l_i - 1$ que formam uma base do espaço $\Omega^1(0)$. Chamamos essa base de P-hermitiana. Daqui em diante a curva C é não-singular, possui gênero $g \geq 4$ e não é hiperelíptica. Dessa forma podemos considerar o mergulho canônico de C em $\mathbb{P}^{g-1}$

$$\varphi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}, \quad Q \mapsto (\omega_1(Q) : \ldots : \omega_g(Q))$$

A imagem desse mergulho é chamada de modelo canônico da curva C. Doravante, identificaremos C com seu modelo canônico. (Para maiores detalhes sobre os critérios para que uma aplicação regular seja um mergulho canônico, consultar [SANTOS 1999], página 25). Com isso segue que C é uma curva projetiva não-singular de grau $2g-2$ e os inteiros $l_1 - 1, \ldots, l_g - 1$ se realizam como as multiplicidades de interseção de C com os hiperplanos passando por $P = (1 : 0 \ldots : 0)$. Mais geralmente, dado um hiperplano qualquer $H = \sum a_i X_i$, temos que o divisor associado a diferencial $\omega = \sum a_i \omega_i$ se realiza como divisor de interseção da curva C com o hiperplano H. Em particular vale que

$$\mathrm{ord}_P(C \cdot H) = \mathrm{ord}_P(\omega) = l_j - 1,$$

onde $j = \min\{i \in \{1, 2, \ldots, g\} \mid a_i \neq 0\}$.

Vamos definir agora o divisor de interseção de um subespaço linear L em $\mathbb{P}^{g-1}$ com uma curva C. Para maiores detalhes, consultar [PIMENTEL 2000], página 5.

Definição 4.1. *Definimos o divisor de interseção de um subespaço linear L em $\mathbb{P}^{g-1}$ com uma curva C por*

$$C \cdot L = \sum_{Q \in C} \min\{\mathit{ord}_Q(C \cdot H) \mid H \text{ é hiperplano e } L \subset H\}\, Q$$

cujo suporte é igual a $C \cap L$. Além disso, definimos para cada $i = 0, 1, \ldots, g-2$ o espaço osculador de dimensão i da curva C no ponto P como a interseção dos hiperplanos que passam por P com ordem de contato maior ou igual a $l_{i+2} - 1$.

Pela discussão acima o espaço osculador de dimensão i da curva C no ponto P é exatamente a interseção dos hiperplanos coordenados $X_{i+2}, \ldots, X_g$. Em particular, o divisor de interseção de C com o espaço osculador $(g-3)$-dimensional é o divisor efetivo

$D := \min\{div(\omega_{g-1}), div(\omega_g)\}$. Logo, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$D = (l_{g-1} - 1)P + E \tag{2}$$

onde E é um divisor efetivo e P não pertence ao suporte de E (observe que se $E = 0$, então a curva C intersecta o espaço osculador apenas no ponto P). Em outras palavras, o sistema linear

$$\{div(a\omega_{g-1} + b\omega_g) - (l_{g-1} - 1)P - E/(a,b) \in k^2 - (0,0)\}$$

não possui pontos de base. Para ver isso, seja Q um ponto na curva C. Se $n_Q(D) = ord_Q(\omega_{g-1})$, tome um $a \in k$ não-nulo e $b = 0$. Se $n_Q(D) = ord_Q(\omega_g)$, tome $a = 0$ e um $b \in k$ não-nulo. Em qualquer um dos casos construímos um divisor da família acima não contendo o ponto Q no seu suporte. Portanto, o sistema linear acima não possui pontos de base.

O lema seguinte será necessário para provar a proposição 4.3.

Lema 4.2. *Com as notações do capítulo anterior, temos que* $\Omega(D) = k\omega_{g-1} \oplus k\omega_g$, *em particular* $\dim \Omega(D) = 2$.

Prova. Seja $\omega \in \Omega(D)$. Como D é um divisor efetivo, temos que $\omega \in \Omega(0)$. Pela observação 3.33, podemos escrever $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_g\omega_g$. Seja j o menor índice do conjunto $\{i; 1 \leq i \leq g \text{ e } a_i \neq 0\}$. Consequentemente, temos que $\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_P(\omega_j) = l_j - 1$. Por outro lado, pela definição de D, temos que $\text{ord}_P(\omega) \geq l_{g-1} - 1$. Logo, temos que $l_j \geq l_{g-1}$ e portanto $j \geq g-1$, donde $\omega \in k\omega_{g-1} \oplus k\omega_g$. A inclusão contrária é óbvia, pela definição de D. □

Proposição 4.3. *O grau do divisor efetivo E satisfaz* $\deg(E) \leq 2g - 4 - l_{g-1}$. *Em particular, se $l_{g-1} = 2g - 4$, então E é um divisor nulo.*

Prova. Como consequência direta do lema 4.2, temos que $\dim \Omega(D) = 2$. Por outro lado, pela observação 3.25, temos:

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + 2 = \deg(D) + 3 - g$$

Aplicando o teorema de Clifford a essa última igualdade, temos que $\deg(D) < 2g - 4$. Pela definição de D, temos que $\deg(D) = l_{g-1} - 1 + \deg(E)$. Substituindo, temos que $\deg(E) \leq 2g - 4 - l_{g-1}$. □

A menos de menção contrária, a partir de agora trataremos apenas o divisor D no caso $E = 0$. A hipótese de que E é zero possui a seguinte interpretação geométrica: o espaço osculador de dimensão $g-3$ de C em P não intersecta C fora de P. Para encontrar uma base para o espaço $\Omega^2(D)$ precisaremos provar antes a seguinte igualdade:

Proposição 4.4. $\Omega^2(D) = \Omega^1(0)\omega_{g-1} + \Omega^1(0)\omega_g$.

Prova. Pela proposição 3.38 coloque $n = 2$ e $F = D$, então a codimensão de $\Omega^1(0)\omega_{g-1} + \Omega^1(0)\omega_g$ em $\Omega^2(D)$ é igual a $\dim \Omega^2(D) - 2 \dim \Omega^1(0) + \dim \Omega^0(-D)$. Para provar a proposição, basta mostrar que $\dim \Omega^2(D) - 2 \dim \Omega^1(0) + \dim \Omega^0(-D) = 0$.

Note que pelo teorema 3.39, temos $\dim \Omega^2(D) = l(2W - D)$ e portanto pelo corolário 3.22, temos que

$$\begin{aligned}\dim \Omega^2(D) &= l(2W - D)\\ &= \deg(2W - D) + 1 - g + l(D - W)\\ &= 2(2g - 2) - \deg(D) + 1 - g\\ &= 3g - 3 - \deg(D).\end{aligned}$$

Pelo lema 4.2, temos $\dim \Omega^1(D) = 2$. Consequentemente pelo teorema de Riemann-Roch e o teorema 3.39, temos

$$\begin{aligned}\dim \Omega^0(-D) &= l(D)\\ &= \deg(D) + 1 - g + l(W - D)\\ &= \deg(D) + 1 - g + \dim \Omega^1(D)\\ &= \deg(D) + 1 - g + 2\\ &= \deg(D) + 3 - g.\end{aligned}$$

Pelo teorema 3.39, $\dim \Omega(0) = l(W)$, donde $\dim \Omega(0) = g$. Substituindo na expressão $\dim \Omega^2(D) - 2 \dim \Omega(0) + \dim \Omega^0(-D)$, temos que

$$\begin{aligned}&\dim \Omega^2(D) - 2 \dim \Omega(0) + \dim \Omega^0(-D)\\ &= 3g - 3 - \deg(D) - 2g + \deg(D) + 3 - g\\ &= 0\end{aligned}$$

□

Observaçao 4.5. *Segue da proposição 4.4 e proposição 3.29 que as diferenciais quadráticas regulares*

$$\begin{gathered}\omega_1\omega_{g-1}, \ldots, \omega_{g-1}\omega_{g-1}\\ \omega_1\omega_g, \ldots, \omega_g\omega_g\end{gathered}$$

geram o espaço $\Omega^2(D)$.

Teorema 4.6. *Existem inteiros* $t_1 = 1 < t_2 < \ldots < t_u \leq g-1$*, onde* $u = 2g-3-\deg(D)$*,* *tal que as diferenciais quadráticas regulares:*

$$\omega_{t_1}\omega_{g-1}, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}$$
$$\omega_1\omega_g, \ldots, \omega_g\omega_g$$

formam uma base para o espaço $\Omega^2(D)$.

Prova. Pela observação 3.37 as diferenciais quadráticas $\omega_1\omega_g, \ldots, \omega_g\omega_g$ são linearmente independentes. Como a dimensão do espaço $\Omega^2(D)$ é $3g-3-\deg(D)$, em virtude da observação 4.5, podemos assim completar a base com $2g-3-\deg(D)$ elementos do subconjunto $S = \{\omega_1\omega_{g-1}, \ldots, \omega_{g-1}\omega_{g-1}\}$. □

Proposição 4.7. $\dim \Omega^2(0) = \dim \Omega^2(D) + \deg(D)$

Prova. Pelo teorema 3.39 e corolário 3.22, temos

$$\begin{aligned}
\dim \Omega^2(0) &= l(2W) \\
&= \deg(2W) + 1 - g + l(-W) \\
&= 2(2g-2) + 1 - g \\
&= 3g - 3.
\end{aligned}$$

Como $\dim \Omega^2(D) = 3g-3-\deg(D)$, então $\dim \Omega^2(0) = \dim \Omega^2(D) + \deg(D)$. □

Teorema 4.8. *Existem inteiros* $1 = t_1 < \ldots < t_u \leq g-1$ *e inteiros* r_j *e* s_j, $2 \leq r_j \leq s_j \leq g-2$, *onde* $j = 1, \ldots v$, $v = l_{g-1} - (g-1)$ *e* $u = 2g-2-l_{g-1}$, *tal que a base de* $\Omega^2(D)$*:*

$$\omega_{t_1}\omega_{g-1}, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}, \omega_1\omega_g, \ldots, \omega_g\omega_g$$

adjuntada com os elementos

$$\omega_1\omega_1, \ldots, \omega_1\omega_{g-2}, \omega_{r_1}\omega_{s_1}, \ldots, \omega_{r_v}\omega_{s_v}$$

forma uma base para $\Omega^2(0)$.

Prova. Como $\deg(D) = l_{g-1} - 1$, pela proposição 4.7 e observação 3.37 para obtermos uma base de $\Omega^2(0)$, basta completar a base de $\Omega^2(D)$ com $l_{g-1} - 1$ elementos com ordens distintas dois a dois.

Pelo teorema 2.16 cada inteiro k, $0 \leq k \leq l_{g-1} - 2$ é a ordem em P de uma diferencial quadrática $\omega_r\omega_s$. Vamos provar que essas diferenciais não pertencem a base de $\Omega^2(D)$. Para mostrar isso, note que o menor valor que as ordens dos elementos da base de $\Omega^2(D)$ podem atingir é $\mathrm{ord}_P(\omega_1\omega_{g-1}) = \mathrm{ord}_P(\omega_1) + \mathrm{ord}_P(\omega_{g-1}) = (l_1 - 1) + (l_{g-1} - 1) = l_{g-1} - 1$. Já que as ordens dessas diferenciais $\omega_{r_k}\omega_{s_k}$ não podem ultrapassar o valor $l_{g-1} - 2$, então essas diferenciais não pertencem a base de $\Omega^2(D)$.

Desses inteiros, remova os $g-2$ inteiros $0, l_2-1, \ldots, l_{g-2}-1$ que são ordens em P das diferenciais $\omega_1\omega_1, \ldots, \omega_1\omega_{g-2}$. Sobra assim as diferenciais quadráticas $\omega_{r_1}\omega_{s_1}, \ldots, \omega_{r_v}\omega_{s_v}$, onde $v = l_{g-1} - 1 - (g-2) = l_{g-1} - (g-1)$, cujas ordens são diferentes entre si, são diferentes das ordens de $\omega_1\omega_1, \ldots, \omega_1\omega_{g-2}$ e são menores do que as ordens dos elementos da base de $\Omega^2(D)$. Portanto, o conjunto formado por essas $3g-3$ diferenciais quadráticas é um conjunto linearmente independente e por questões dimensionais constitui uma base de $\Omega^2(0)$. □

Para encontrar uma base para o espaço $\Omega^3(2D)$, introduziremos agora um certo subespaço W de $\Omega^3(2D)$.

Lema 4.9. *O subespaço $W \subset \Omega^3(2D)$ definido por*

$$W := \Omega^2(D)\omega_{g-1} + \Omega^2(D)\omega_g$$

possui codimensão igual a 1 em $\Omega^3(2D)$.

Prova. Fazendo $n = 3$ e $F = 2D$ na proposição 3.38, temos que a codimensão de W em $\Omega^3(2D)$ é dado por $\dim\Omega^3(2D) - 2\dim\Omega^2(D) + \dim\Omega^1(0)$. Pela prova da proposição 4.4, temos que $\dim\Omega^2(D) = 3g - 3 - \deg(D)$ e $\dim\Omega^1(0) = g$. Vamos descobrir agora a dimensão de $\Omega^3(2D)$. Usando o teorema 3.39 e o corolário 3.22, temos que

$$\begin{aligned}\dim\Omega^3(2D) &= l(3W - 2D)\\ &= 3(2g-2) - 2\deg(D) + 1 - g + l(2D - 2W)\\ &= 5g - 5 - 2\deg(D)\end{aligned}$$

Substituindo na codimensão de W em $\Omega^3(2D)$, temos que

$$\begin{aligned}&\dim\Omega^3(2D) - 2\dim\Omega^2(D) + \dim\Omega^1(0)\\ &= (5g - 5 - 2\deg(D)) - 2(3g - 3 - \deg(D)) + g\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Proposição 4.10. *Existem inteiros $t_1 = 1 < t_2 < \ldots < t_u \leq g-1$, onde $u = 2g-2-l_{g-1}$, tal que as diferenciais*

$$\begin{gathered}\omega_{t_1}\omega_{g-1}^2, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}^2\\ \omega_{t_1}\omega_{g-1}\omega_g, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}\omega_g\\ \omega_1\omega_g^2, \ldots, \omega_g\omega_g^2\end{gathered} \tag{3}$$

formam uma base de W.

Prova. Pelo teorema 4.6, cada elemento $\mu \in W$ se escreve da seguinte forma:

$$\mu = \Big(\sum_{j=1}^{u} a_{t_j}\omega_{t_j}\omega_{g-1} + \sum_{l=1}^{g} b_l\omega_l\omega_g\Big)\omega_{g-1} + \Big(\sum_{j=1}^{u} c_{t_j}\omega_{t_j}\omega_{g-1} + \sum_{l=1}^{g} d_l\omega_l\omega_g\Big)\omega_g,$$

onde a_{t_j}, b_l, c_{t_j} e d_l são constantes. Portanto,

$$\mu = \sum_{j=1}^{u} a_{t_j}\omega_{t_j}\omega_{g-1}^2 + \sum_{j=1}^{u}(b_{t_j} + c_{t_j})\omega_{t_j}\omega_{g-1}\omega_g + \sum_{m} b_m\omega_m\omega_{g-1}\omega_g + \sum_{l=1}^{g} d_l\omega_l\omega_g^2$$

onde $m \in \{1, \ldots, g\} \setminus \{t_1, \ldots, t_u\}$. Note agora que como $\omega_{g-1}\omega_m \in \Omega^2(D)$, pelo teorema 4.6, podemos escrever

$$\sum_{m} b_m\omega_m\omega_{g-1}\omega_g = \sum_{m} b_m\omega_g\big(\sum_{i=1}^{u} e_i\omega_{t_i}\omega_{g-1} + \sum_{l=1}^{g} f_l\omega_l\omega_g\big)$$

onde e_i e f_l são constantes. Portanto, as diferenciais em (4.10) geram W. Além disso, essas diferenciais são linearmente independentes, pois suas ordens são distintas dois a dois. Como existem $5g - 2l_{g-1} - 4$ diferenciais em (4.10), se provarmos que $\dim W = 5g - 2l_{g-1} - 4$, então o resultado desejado estará provado. Pelo lema 4.9, a codimensão de W em $\Omega^3(2D)$ é igual a 1, isto é, $\dim\Omega^3(2D) - \dim W = 1$. Pela prova do lema 4.9, temos que $\dim\Omega^3(2D) = 5g - 5 - 2\deg(D)$. Substituindo, temos

$$\begin{aligned}\dim W &= \dim\Omega^3(2D) - 1\\ &= (5g - 5 - 2\deg(D)) - 1\\ &= 5g - 6 - 2\deg(D)\\ &= 5g - 6 - 2(l_{g-1} - 1)\\ &= 5g - 2l_{g-1} - 4.\end{aligned}$$

Daí segue que as diferenciais em (4.10) são de fato base de W. $\square$

Demonstraremos agora alguns lemas necessários para provar a proposição 4.14.

Lema 4.11. $\Omega^3(2D - P) = \Omega^2(D - P)\omega_{g-1} + \Omega^2(D - P)\omega_g$.

Prova. Fazendo $n = 3$ e $F = 2D - P$ na proposição 3.38, temos que a codimensão de $\Omega^2(D-P)\omega_{g-1} + \Omega^2(D-P)\omega_g$ em $\Omega^3(2D-P)$ é igual a $\dim\Omega^3(2D-P) - 2\dim\Omega^2(D-P) + \dim\Omega^1(-P)$. Portanto, para provar o lema, basta provar que $\dim\Omega^3(2D-P) - 2\dim\Omega^2(D-P) + \dim\Omega^1(-P) = 0$.

Pelo corolário 3.22 e o teorema 3.39, temos as três igualdades:

$$\begin{aligned}\dim \Omega^3(2D-P) &= l(3W-2D+P)\\ &= 3(2g-2)-2\deg(D)+\deg(P)+1-g\\ &= 5g-4-2\deg(D),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \Omega^2(D-P) &= l(2W-D+P)\\ &= 2(2g-2)-\deg(D)+\deg(P)+1-g\\ &= 3g-2-\deg(D),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \Omega^1(-P) &= l(W+P)\\ &= 2g-2+\deg(P)+1-g\\ &= g.\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\dim \Omega^3(2D-P)-2\dim \Omega^2(D-P)+\dim \Omega^1(-P)=0.$$

□

Lema 4.12. *Se λ' é uma diferencial quadrática da forma $\lambda'=\omega_r\omega_s$ cuja ordem em P é $l_{g-1}-2$, então $\Omega^2(D-P)=\Omega^2(D)\oplus k\lambda'$.*

Prova. Se $\lambda\in\Omega^2(D)\oplus k\lambda'$, então λ é da forma $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, onde $\lambda_1\in\Omega^2(D)$ e $\lambda_2\in k\lambda'$. Analisando as ordens na base de $\Omega^2(D)$, temos que $\mathrm{ord}_P(\lambda_1)\geq \mathrm{ord}_P(\omega_1\omega_{g-1})=l_{g-1}-1$. Por outro lado, temos $\mathrm{ord}_P(\lambda_2)=l_{g-1}-2$ e portanto $\mathrm{ord}_P(\lambda)=\min\{\mathrm{ord}_P(\lambda_1),\mathrm{ord}_P(\lambda_2)\}=l_{g-1}-2$. Desse modo, temos que $\lambda\in\Omega^2(D-P)$, donde $\Omega^2(D)\oplus k\lambda'\subset\Omega^2(D-P)$. Como $\dim(\Omega^2(D-P)=\dim(\Omega^2(D)\oplus k\lambda')$, o resultado segue. □

Lema 4.13. $\dim \Omega^3(2D-P)=\dim W+2$.

Prova. Pelo teorema 3.39 e o corolário 3.22, temos

$$\begin{aligned}\dim \Omega^3(2D-P) &= l(3W-2D+P)\\ &= 3(2g-2)-2\deg(D)+\deg(P)+1-g\\ &= 5g-4-2\deg(D).\end{aligned}$$

Como $\dim W=5g-6-2\deg(D)$, temos $\dim\Omega^3(2D-P)=\dim W+2$. □

Proposição 4.14. *Existem inteiros* $t_1 = 1 < t_2 < \ldots < t_u \leq g-1$, *onde* $u = 2g-2-l_{g-1}$, *tal que as diferenciais*

$$\begin{gathered}
\omega_{t_1}\omega_{g-1}^2, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}^2 \\
\omega_{t_1}\omega_{g-1}\omega_g, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}\omega_g \\
\omega_1\omega_g^2, \ldots, \omega_g\omega_g^2 \\
\lambda,
\end{gathered}$$

onde $\lambda := \omega_r\omega_s\omega_g$ *e a ordem de* $\omega_r\omega_s$ *em* P *é* $l_{g-1}-2$, *formam uma base de* $\Omega^3(2D)$.

Prova. Pelo lema 4.9, temos $\dim \Omega^3(2D) - \dim(W) = 1$ e $\dim \Omega^3(2D) = 5g - 2l_{g-1} - 3$.

Pela proposição 4.10, existem inteiros $t_1 = 1 < t_2 < \ldots < t_u \leq g-1$, onde $u = 2g-2-l_{g-1}$, tal que as $5g - 2l_{g-1} - 4$ diferenciais cúbicas regulares:

$$\begin{gathered}
\omega_{t_1}\omega_{g-1}^2, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}^2 \\
\omega_{t_1}\omega_{g-1}\omega_g, \ldots, \omega_{t_u}\omega_{g-1}\omega_g \\
\omega_1\omega_g^2, \ldots, \omega_g\omega_g^2,
\end{gathered}$$

onde $u = 2g-2-l_{g-1}$, formam uma base de W.

Agora queremos construir um elemento de $\Omega^3(2D) \setminus W$. Pelo lema 4.11, temos $\Omega^3(2D-P) = \Omega^2(D-P)\omega_{g-1} + \Omega^2(D-P)\omega_g$.

Pelo teorema 2.16, o inteiro $l_{g-1}-2$ é a ordem em P de uma diferencial quadrática λ' da forma $\lambda' = \omega_r\omega_s$. Pelo lema 4.12, temos $\Omega^2(D-P) = \Omega^2(D) \oplus k\lambda'$. Daí segue que

$$\begin{aligned}
\Omega^3(2D-P) &= (\Omega^2(D) + k\lambda')\omega_{g-1} + (\Omega^2(D) + k\lambda')\omega_g \\
&= W + k\lambda'\omega_{g-1} + k\lambda'\omega_g
\end{aligned}$$

Pelo lema 4.13, temos $\dim \Omega^3(2D-P) = \dim W + 2$, portanto $\lambda = \lambda'\omega_g \notin W$. Computando a ordem de λ em P, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_P(\lambda) &= \mathrm{ord}_P(\lambda'\omega_g) \\
&= \mathrm{ord}_P(\lambda') + \mathrm{ord}_P(\omega_g) \\
&= (l_{g-1}-2) + (l_g - 1) \\
&\geq (l_{g-1}-2) + (l_{g-1}) \\
&= 2(l_{g-1}-1).
\end{aligned}$$

Daí segue que $\lambda \in \Omega^3(2D)$.

Portanto, já que $\dim \Omega^3(2D) = \dim W + 1$, temos que adjuntando λ a base de

W obtemos uma base para o espaço $\Omega^3(2D)$. □

Antes de encontrar uma base para $\Omega^3(D)$, precisaremos provar o seguinte lema.

Lema 4.15. $\dim \Omega^3(0) - \dim \Omega^3(D) = \dim \Omega^3(D) - \dim \Omega^3(2D) = l_{g-1} - 1$

Prova. Pelo corolário 3.22 e o teorema 3.39, temos

$$\begin{aligned}\dim \Omega^3(0) &= l(3W)\\ &= 3(2g-2) + 1 - g + l(-2W)\\ &= 5g - 5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \Omega^3(D) &= l(3W - D)\\ &= 3(2g-2) - \deg(D) + 1 - g + l(-2W + D)\\ &= 5g - 5 - \deg(D).\end{aligned}$$

Como $\deg(D) = l_{g-1} - 1$, o resultado segue para a primeira igualdade.

Ainda pelo corolário 3.22 e o teorema 3.39, temos

$$\begin{aligned}\dim \Omega^3(D) &= l(3W - D)\\ &= 3(2g-2) - \deg(D) + 1 - g + l(-2W + D)\\ &= 5g - 5 - \deg(D),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \Omega^3(2D) &= l(3W - 2D)\\ &= 3(2g-2) - 2\deg(D) + 1 - g + l(-2W + 2D)\\ &= 5g - 5 - 2\deg(D).\end{aligned}$$

Como $\deg(D) = l_{g-1} - 1$, o resultado segue para a segunda igualdade. □

Encontraremos nas próximas proposições bases para $\Omega^3(D)$ e por fim $\Omega^3(0)$.

Proposição 4.16. *Existem inteiros r_j e s_j, $2 \leq r_j \leq s_j \leq g-2$, onde $j = 1, \ldots, v$ com $v = l_{g-1} - (g-1)$, tal que a base de $\Omega^3(2D)$ encontrada na proposição 4.14 adjuntada com as diferenciais:*

$$\omega_1\omega_1\omega_{g-1}, \ldots, \omega_1\omega_{g-2}\omega_{g-1}, \omega_{r_1}\omega_{s_1}\omega_{g-1}, \ldots, \omega_{r_v}\omega_{s_v}\omega_{g-1}$$

fornece uma base para o espaço $\Omega^3(D)$.

Prova. Pelo teorema 4.8, existem inteiros r_j e s_j, $2 \leq r_j \leq s_j \leq g-2$, onde $j = 1, \ldots, v$

com $v = l_{g-1} - (g-1)$, tais que as $l_{g-1} - 1$ diferenciais:

$$(\omega_1\omega_1)\omega_{g-1}, \ldots, (\omega_1\omega_{g-2})\omega_{g-1}, (\omega_{r_1}\omega_{s_1})\omega_{g-1}, \ldots, (\omega_{r_v}\omega_{s_v})\omega_{g-1}$$

possuem ordens em P iguais a $l_{g-1} - 1, \ldots, 2l_{g-1} - 3$. Logo, esses elementos pertencem ao conjunto $\Omega^3(D) \setminus \Omega^3(2D)$. Como $\dim \Omega^3(D) - \dim \Omega^3(2D) = l_{g-1} - 1$, segue que adjuntando essas novas diferenciais a base de $\Omega^3(2D)$ obtemos uma base para $\Omega^3(D)$. □

Proposição 4.17. *Existem inteiros r_j e s_j, $2 \leq r_j \leq s_j \leq g-2$, onde $j = 1, \ldots, v$ com $v = l_{g-1} - (g-1)$, tal que a base de $\Omega^3(D)$ encontrada na proposição 4.16 adjuntada com as diferenciais:*

$$\omega_1^2\omega_1, \ldots, \omega_1^2\omega_{g-2}, \omega_1\omega_{r_1}\omega_{s_1}, \ldots, \omega_1\omega_{r_v}\omega_{s_v}$$

forma uma base para o espaço $\Omega^3(0)$.

Prova. Pelo teorema 4.8, existem inteiros r_j e s_j, $2 \leq r_j \leq s_j \leq g-2$, onde $j = 1, \ldots, v$ com $v = l_{g-1} - (g-1)$, tal que as $l_{g-1} - 1$ diferenciais:

$$\omega_1(\omega_1\omega_1), \ldots, \omega_1(\omega_1\omega_{g-2}), \omega_1(\omega_{r_1}\omega_{s_1}), \ldots, \omega_1(\omega_{r_v}\omega_{s_v})$$

possuem ordens em P iguais a $0, 1, \ldots, l_{g-1} - 2$. Logo, segue que essas diferenciais são linearmente independentes e pertencem ao conjunto $\Omega^3(0) \setminus \Omega^3(D)$. Pelo lema 4.15, temos $\dim \Omega^3(0) - \dim \Omega^3(D) = l_{g-1} - 1$. Portanto, adjuntando essas novas diferencias a base de $\Omega^3(D)$ obtemos uma base para $\Omega^3(0)$. □

Os próximos dois lemas serão necessários para encontrar uma base de $\Omega^n(0)$.

Lema 4.18. *Se $n \geq 3$, então vale a seguinte igualdade:*

$$\Omega^n((n-1)D) = \Omega^{n-1}((n-2)D)\omega_{g-1} + \Omega^{n-1}((n-2)D)\omega_g.$$

Prova. Primeiramente, ponha $F = (n-1)D$ na proposição 3.38. Desse modo, temos que a codimensão de $\Omega^{n-1}((n-2)D)\omega_{g-1} + \Omega^{n-1}((n-2)D)\omega_g$ em $\Omega^n((n-1)D)$ é igual a $\dim \Omega^n((n-1)D) - 2(\dim \Omega^{n-1}(n-2)D) + \dim \Omega^{n-2}((n-3)D)$. Para provar o lema precisamos mostrar que essa codimensão é zero.

Pelo corolário 3.22 e o teorema 3.39, valem as três igualdades:

$$\begin{aligned}\dim \Omega^n((n-1)D) &= l(nW - (n-1)D)\\ &= n(2g-2) - (n-1)\deg(D) + 1 - g,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \Omega^{n-1}((n-2)D) &= l((n-1)W - (n-2)D)\\ &= (n-1)(2g-2) - (n-2)\deg(D) + 1 - g,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \Omega^{n-2}((n-3)D) &= l((n-2)W-(n-3)D)\\ &= (n-2)(2g-2)-(n-3)\deg(D)+1-g.\end{aligned}$$

Substituindo, temos

$$\dim \Omega^{n}((n-1)D) - 2(\dim \Omega^{n-1}(n-2)D) + \dim \Omega^{n-2}((n-3)D) = 0.$$

□

Lema 4.19. *Se $n \geq 4$, então vale a seguinte igualdade:*

$$\Omega^n((n-1)D) = \sum_{j=0}^{n-3} \Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^j.$$

Prova. Vamos provar por indução. Se $n=4$, então a igualdade é válida pelo lema 4.18. Supondo que a igualdade é válida para n e usando o lema 4.18, temos

$$\begin{aligned}\Omega^{n+1}(nD) &= \Omega^n((n-1)D)\omega_{g-1} + \Omega^n((n-1)D)\omega_g\\ &= (\sum_{j=0}^{n-3}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^j)\omega_{g-1} + (\sum_{j=0}^{n-3}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^j)\omega_g\\ &= \sum_{j=0}^{n-3}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-2-j}\omega_g^j + \sum_{j=0}^{n-3}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^{j+1}\\ &= \sum_{j=0}^{n-3}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-2-j}\omega_g^j + \Omega^3(2D)\omega_g^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-4}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^{j+1}\\ &= \sum_{j=0}^{n-2}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-2-j}\omega_g^j.\end{aligned}$$

Note que a última igualdade acima é obtida em razão do fato que $\sum_{j=0}^{n-4}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^{j+1}$ é subespaço vetorial de $\sum_{j=0}^{n-3}\Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-2-j}\omega_g^j$. □

Todas as proposições anteriores culminam no seguinte teorema:

Teorema 4.20. *Com as hipóteses e notações anteriores temos que para todo inteiro $n \geq 3$ uma base monomial para o espaço $\Omega^n(0)$ é dada por:*

$$\begin{gathered}\omega_1^{n-1-l}\omega_i\omega_{g-1}^l, \omega_1^{n-2-l}\omega_{r_j}\omega_{s_j}\omega_{g-1}^l,\ i=1,\dots,g-2;\ j=1,2,\dots v,\\ \lambda\omega_{g-1}^{n-2-k}\omega_g^{k-1},\ k=1,\dots,n-2,\ l=0,\dots,n-2,\\ \omega_{t_m}\omega_{g-1}^{n-1-l}\omega_g^l,\ l=0,\dots,n-2;\ m=1,\dots,u,\\ \omega_t\omega_g^{n-1},\ t=1,\dots,g.\end{gathered}$$

Prova. Suponha $n \geq 4$, pelo lema 4.18, temos

$$\Omega^n((n-1)D) = \Omega^{n-1}((n-2)D)\omega_{g-1} + \Omega^{n-1}((n-2)D)\omega_g.$$

Além disso, pelo lema 4.19, temos

$$\Omega^n((n-1)D) = \sum_{j=0}^{n-3} \Omega^3(2D)\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^j.$$

Substituindo pela base de $\Omega^3(2D)$ obtida na proposição 4.14, concluímos que o espaço $\Omega^n((n-1)D)$ é gerado pela união das três famílias de diferenciais:

$$\begin{gathered}
\lambda\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^j,\ j = 0, \ldots, n-3, \\
\omega_{t_m}\omega_{g-1}^{n-1-l}\omega_g^l,\ l = 0, \ldots, n-2;\ m = 1, \ldots, u, \\
\omega_t\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^{j+2},\ t = 1, \ldots, g;\ j = 0, \ldots, n-3.
\end{gathered}$$

Agora note que pelo teorema 4.6, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\omega_t\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^{j+2} &= \omega_t\omega_{g-1}\omega_{g-1}^{n-4-j}\omega_g^{j+2} \\
&= (\sum_{k=1}^{u} a_k w_{t_k} w_{g-1} + \sum_{t=1}^{g} b_t w_t w_g)\omega_{g-1}^{n-4-j}\omega_g^{j+2} \\
&= \sum_{k=1}^{u} a_k w_{t_k}\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^{j+2} + \sum_{t=1}^{g} b_t w_t \omega_{g-1}^{n-4-j}\omega_g^{j+3}.
\end{aligned}$$

Daí, obsevando que o primeiro destes somatórios está no espaço gerado pela segunda família de diferenciais apresentadas acima, segue que podemos substituir a terceira família por $w_t\omega_{g-1}^{n-4-j}\omega_g^{j+3},\ t = 1, \ldots, g;\ j = 0, \ldots, n-4$, que ainda teremos um conjunto de geradores para $\Omega^3(2D)$. Repetindo esssa substituição "$n-3-j$" vezes vemos que de fato a terceira família pode ser substituida por $\omega_t\omega_g^{n-1},\ t = 1, \ldots, g$. Com isso, concluímos que as $(2g-1-l_{g-1})n + l_{g-1} - g$ diferenciais:

$$\begin{gathered}
\lambda\omega_{g-1}^{n-3-j}\omega_g^j,\ j = 0, \ldots, n-3, \\
\omega_{t_m}\omega_{g-1}^{n-1-l}\omega_g^l,\ l = 0, \ldots, n-2;\ m = 1, \ldots, u, \\
\omega_t\omega_g^{n-1},\ t = 1, \ldots, g
\end{gathered}$$

geram o espaço $\Omega^n((n-1)D)$. Pelo corolário 3.22 e o teorema 3.39, temos

$$\begin{aligned}\dim \Omega^n((n-1)D) &= l(nW-(n-1)D)\\ &= n(2g-2)-(n-1)\deg(D)+1-g=\\ &= n(2g-2)-(n-1)(l_{g-1}-1)+1-g\\ &= (2g-1-l_{g-1})n+l_{g-1}-g.\end{aligned}$$

Então as diferencias acima formam uma base para $\Omega^n((n-1)D)$. As ordens em P das seguintes diferenciais regulares:

$$\omega_1^{n-1-l}\omega_i\omega_{g-1}^l$$
$$\omega_1^{n-2-l}\omega_{r_j}\omega_{s_j}\omega_{g-1}^l$$

são iguais a $l_i-1+l(l_{g-1}-1)$ e $l_{r_j}+l_{s_j}-2+l(l_{g-1}-1)$ respectivamente, onde $i=1,\ldots,g-2$, $j=1,\ldots,v$ e $l=0,\ldots,n-2$. Desse modo, essas diferenciais estão no conjunto $\Omega^n(0)\setminus\Omega^n((n-1)D)$ e como pela proposição 3.40, temos $\dim\Omega^n(0)=(2n-1)(g-1)$, as diferenciais acima adjuntada com a base do espaço $\Omega^n((n-1)D)$ formam uma base para o espaço $\Omega^n(0)$. □

Como $\dim\Omega^1(D)=2$, [OLIVEIRA 1991] comenta que $l(D)=(l_{g-1}-(g-1))+\deg(E)+1$ pelo teorema de Riemann-Roch. Portanto, a hipótese assumida pelos autores em [STÖHR 1988] de existência de um ponto $P\in C$ tal que $l_{g-1}=g-1$ e $E=0$ é equivalente a existência de um ponto $P\in C$ tal que $k=L(D)$. Neste caso, temos $v=0$ e $u=g-1$, logo a base nos teoremas 4.8 e 4.20 são obtidos em [STÖHR 1988], (teoremas (1.2) e (1.4)). Por outro lado, [OLIVEIRA 1991] também salienta que existem curvas (chamadas curvas não-clássicas) que não admitem pontos com $l_{g-1}=g-1$ (c.f. e.g [GARCIA 1986], página 316), mas não sabemos se existe uma curva com $E\neq 0$ para todos os pontos de C.

Proposição 4.21. *Se o divisor E não é necessariamente nulo, então o seu grau satisfaz:*

$$\deg(E)\leq(2g-2-l_{g-1})-|\{l\in L/l+l_{g-1}-l_g\notin L\}|.$$

Se H não é simétrico, então

$$\deg(E)\geq|\{n\in H/3\leq n\leq l_g-l_{g-1}\}|.$$

Prova. Pelo teorema 4.6, as diferenciais quadráticas regulares:

$$\omega_{t_1}\omega_{g-1},\ldots,\omega_{t_u}\omega_{g-1};\omega_1\omega_g,\ldots,\omega_g\omega_g,$$

onde $u=2g-2-l_{g-1}-\deg(E)$, formam uma base para o espaço $\Omega^2(D)$.

Defina $T = \{l \in L \mid l + l_{g-1} - l_g \notin L\} = \{l_{i_1} < l_{i_2} < l_{i_3} < \ldots < l_{i_m}\}$. Vamos provar primeiramente que $\langle \omega_{i_1}\omega_{g-1}, \ldots, \omega_{i_m}\omega_{g-1}\rangle \cap \langle \omega_1\omega_g, \ldots, \omega_g\omega_g\rangle = \{0\}$. Suponha que exista um elemento não-nulo na interseção. Desse modo, existem constantes $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}, b_1, \ldots, b_g$ tal que $\sum_{k=1}^{m} a_{i_k}\omega_{i_k}\omega_{g-1} = \sum_{i=1}^{g} b_i\omega_i\omega_g$. Computando as ordens em P de ambos os lados, temos que $\mathrm{ord}_P(\sum_{k=1}^{m} a_{i_k}\omega_{i_k}\omega_{g-1}) = \mathrm{ord}_P(\sum_{i=1}^{g} b_i\omega_i\omega_g)$, o que implica que $\mathrm{ord}_P(a_{i_t}\omega_{i_t}\omega_{g-1}) = \mathrm{ord}_P(b_j\omega_j\omega_g)$, onde $t = \min\{k \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid a_{i_k} \neq 0\}$ e $j = \min\{i \in \{1, 2, \ldots, g\} \mid b_i \neq 0\}$. Portanto, $l_{i_t} + l_{g-1} - 2 = l_j + l_g - 2$ e daí $l_{i_t} + l_{g-1} - l_g = l_j \in L$, contradição. Segue desse fato que as diferenciais quadráticas $\omega_{i_1}\omega_{g-1}, \ldots, \omega_{i_m}\omega_{g-1}, \omega_1\omega_g, \ldots, \omega_g\omega_g$ são linearmente independentes. Como a base de $\Omega^2(D)$ possui $u + g$ elementos, temos que $u + g \geq m + g$ e portanto

$$u \geq m = |\{l \in L \mid l + l_{g-1} - l_g \notin L\}|.$$

Assim, visto que $u = 2g - 2 - l_{g-1} - \deg(E)$, temos que

$$\deg(E) \leq 2g - 2 - l_{g-1} - |\{l \in L \mid l + l_{g-1} - l_g \notin L\}|.$$

Pelo teorema 3.39 e o corolário 3.22, temos que

$$\begin{aligned} \dim \Omega^2((l_{g-1} - 1)P) &= l(2W - (l_{g-1} - 1)P) \\ &= 2(2g - 2) - l_{g-1} + 1 + 1 - g \\ &= 3g - 2 - l_{g-1}. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\dim \Omega^2((l_{g-1} - 1)P) - \dim \Omega^2(D) = \deg(E).$$

Assim como diferenciais linearmente independentes não necessariamente possuem ordens distintas, temos que

$$\deg(E) \geq \ |\{\mathrm{ord}_P(\omega_i\omega_j) \mid \omega_i\omega_j \in \Omega^2((l_{g-1} - 1)P) \setminus \Omega^2(D)\}|$$

Denomine o conjunto $\{\mathrm{ord}_P(\omega_i\omega_j) \mid \omega_i\omega_j \in \Omega^2((l_{g-1} - 1)P) \setminus \Omega^2(D)\}$ acima de M. Defina o conjunto $S = \{r \in \mathbb{N} \mid l_{g-1} + 1 \leq r \leq l_g, r \in L + L \setminus \{l_{g-1} + l_{t_1}, \ldots, l_{g-1} + l_{t_u}\}\}$ e a seguinte aplicação injetiva

$$\alpha : S \to M$$

$$r \mapsto r - 2$$

Vamos mostrar essa aplicação está bem definida, isto é, devemos ter $\alpha(S) \subset M$. Como H não é simétrico, pelo teorema 2.16, para cada $s \in S$, $\alpha(s)$ se realiza como a ordem em P de uma diferencial quadrática. Pelo fato que $\alpha(s) \geq l_{g-1} - 1$, temos que $\alpha(s)$ corresponde a ordens de diferenciais quadráticas em $\Omega^2(D)$. Como $s \leq l_g$ e $s \notin \{l_{g-1} + l_{t_1}, \dots, l_{g-1} + l_{t_u}\}$, temos que $\alpha(s)$ não se realiza como ordens de diferenciais quadráticas da base de $\Omega^2(D)$ e portanto $\alpha(s) \in M$.

Como α é uma aplicação injetiva, temos a seguinte desigualdade:

$$|\{\mathrm{ord}_P(\omega_i\omega_j) \mid \omega_i\omega_j \in \Omega^2((l_{g-1}-1)P) \setminus \Omega^2(D)\}| \\ \geq |\{r \in \mathbb{N} \mid l_{g-1}+1 \leq r \leq l_g, r \in L + L \setminus \{l_{g-1}+l_{t_1}, \dots, l_{g-1}+l_{t_u}\}\}|$$

Por outro lado, podemos facilmente ver que

$$|\{r \in \mathbb{N} \mid l_{g-1}+1 \leq r \leq l_g, r \in L + L \setminus \{l_{g-1}+l_{t_1}, \dots, l_{g-1}+l_{t_u}\}| \\ \geq |\{r \in \mathbb{N} \mid l_{g-1}+1 \leq r \leq l_g, r - l_{g-1} \notin L\}|.$$

Daí segue que

$$\deg(E) \geq |\{r \in \mathbb{N} \mid l_{g-1}+1 \leq r \leq l_g, r - l_{g-1} \notin L\}|$$

Ponha $n = r - l_{g-1}$. Como $1, 2 \in L$, temos que

$$\deg(E) \geq |\{n \in H \mid 3 \leq n \leq l_g - l_{g-1}\}|.$$

□

Proposição 4.22. *Se $l_g = 2g-2$, então $E = 0$ se e somente se $l_{g-1} = g-1$.*

Prova. Como $div(\omega_g)$ é um divisor canônico, temos que seu grau é $2g-2$ e portanto existe $Q \in C \setminus \{P\}$ tal que $div(\omega_g) = (l_g-1)P + Q$. Portanto, temos pela definição de D que $\deg(E) \leq 1$. Se $l_{g-1} \neq g-1$, então pela proposição 2.11, $l_g - l_{g-1} \in H$, donde $|\{n \in H \mid 3 \leq n \leq l_g - l_{g-1}\}| \geq 1$. Segue pela proposição 4.21 que $\deg(E) = 1$. Por outro lado, se $l_{g-1} = g-1$, então $1, \dots, g-1 \in L$ e $|\{l \in L \mid l + l_{g-1} - l_g \notin L\}| = |\{l \in L \mid l - (g-1) \notin L\}| = g-1$. Pela primeira parte da proposição 4.21, $\deg(E) = 0$. □

5 O IDEAL CANÔNICO DE CURVAS NÃO-TRIGONAIS

Como no capítulo 4, identificaremos a curva C com sua imagem pelo mergulho canônico $(\omega_1 : \ldots : \omega_g) : C \to \mathbb{P}^{g-1}$, onde $\mathrm{ord}_P(\omega_i) = l_i - 1$, para cada $i = 1, \ldots, g$ e os inteiros l_i são as lacunas de Weierstrass em um ponto P da curva C. Assim, consideraremos C como uma curva projetiva não-singular de gênero $g \geq 4$ e grau $2g-2$. Em particular, o ideal I de C é formado pelos polinômios $f \in k[X_1, \ldots, X_g]$ tal que $f(\omega_1, \ldots, \omega_g) = 0$ e é chamado de ideal canônico de C. Portanto, I é o núcleo do homomorfismo (graduado) de Noether $\varphi : k[X_1, \ldots, X_g] \twoheadrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n(0), F \mapsto F(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ e daí a álgebra de diferenciais se realiza como anel de coordenadas de C.

Pela proposição 3.40, $\dim \Omega^n(0) = (2n-1)(g-1)$ e como $\dim k[X_1, \ldots, X_g]_n = \binom{n+g-1}{n}$, onde $k[X_1, \ldots, X_g]_n$ representa o espaço de polinômios homogêneos de grau n, temos pelo teorema do núcleo e da imagem: $\dim I_n = \binom{n+g-1}{n} - (2n-1)(g-1)$, onde I_n é o espaço das formas de grau n em $X_1, \ldots, X_g$ se anulando identicamente sobre a curva C. Pondo $n = 2$, temos que $\dim I_2 = \binom{g+1}{2} - 3(g-1) = (g-2)(g-3)/2$.

O teorema a seguir será crucial para o que vem a seguir. Para maiores informações consultar [ARBARELLO 1985],[SAINT-DONAT 1973] e [STÖHR 1988].

Teorema 5.1. *[Teorema de Petri] O ideal canônico I definido acima de uma curva C ou é gerado minimamente pelas formas quadráticas ou pelas formas quadráticas e cúbicas. Além disso, incluir as cúbicas só é necessário no caso que C ou é trigonal ou uma quíntica plana. No caso trigonal a interseção de todas as quádricas contendo C é um scroll bidimensional normal racional e no caso de uma quíntica plana a interseção de todas as quádricas contendo C é uma superfície de Veronese.*

Pelo teorema de Max Noether, o espaço $\Omega^2(0)$ das diferenciais regulares quadráticas é gerado pelos elementos $\omega_l\omega_m$, onde $l, m \in \{1, 2, \ldots, g\}$. Certamente, pela minimalidade de ordem em P, $\omega_1\omega_l$ está na base, já por questões de maximalidade de ordem em P, temos que $\omega_l\omega_g$ também está na base. Faltam, então $g-2$ elementos a serem selecionados do conjunto de geradores w_lw_m com $l > 1$ e $m < g$, denotemos os selecionados por $w_{r_j}\omega_{s_j}$ com $j \in \{1, \ldots, g-2\}$ e $2 \leq r_j \leq s_j \leq g-1$, tais que $l_{r_1} + l_{s_1} \leq \ldots \leq l_{r_{g-2}} + l_{s_{g-2}}$ e assim

$$\begin{gathered}\omega_1\omega_1, \ldots, \omega_1\omega_g \\ \omega_{r_1}\omega_{s_1}, \ldots, \omega_{r_{g-2}}\omega_{s_{g-2}} \\ \omega_2\omega_g, \ldots, \omega_g\omega_g\end{gathered} \tag{4}$$

formam uma base para o espaço $\Omega^2(0)$ das diferenciais regulares quadráticas.

Considere agora os elementos $\omega_r\omega_s$ não pertencentes à base de $\Omega^2(0)$, i.e., $2 \leq r \leq s \leq g-1$ e $(r, s) \neq (r_j, s_j)$ para todos $j \in \{1, \ldots, g-2\}$. Portanto escrevendo

$\omega_r\omega_s$ em função da base acima,

$$\omega_r\omega_s = \sum_{i=1}^{g} a_{rsi}\omega_1\omega_i + \sum_{j=1}^{g-2} b_{rsj}\omega_{r_j}\omega_{s_j} + \sum_{m=2}^{g} c_{rsm}\omega_m\omega_g$$

onde $a_{rsi}, b_{rsj}, c_{rsm}$ são constantes.

Note que $a_{rs1} = a_{rs2} = 0$, pois

$$\mathrm{ord}_P(\omega_r\omega_s) = \mathrm{ord}_P\left(\sum_{i=1}^{g} a_{rsi}\omega_1\omega_i + \sum_{j=1}^{g-2} b_{rsj}\omega_{r_j}\omega_{s_j} + \sum_{m=2}^{g} c_{rsm}\omega_m\omega_g\right) =$$

$$\min\{a_{rsi}\omega_1\omega_i, b_{rsj}\omega_{r_j}\omega_{s_j}, c_{rsm}\omega_m\omega_g\},$$

onde $1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g-2, 2 \leq m \leq g$ e $\mathrm{ord}_P(\omega_r\omega_s) \geq 2$.

Desse modo, as formas quadráticas:

$$F_{rs} := X_rX_s - \sum_{i=3}^{g} a_{rsi}X_1X_i - \sum_{j=1}^{g-2} b_{rsj}X_{r_j}X_{s_j} - \sum_{m=2}^{g} c_{rsm}X_mX_g, \tag{5}$$

onde $2 \leq r \leq s \leq g-1$ e $(r,s) \neq (r_j, s_j)$, para todos $j \in \{1, \ldots, g-2\}$ pertencem ao ideal canônico I. Vamos provar que as $(g-2)(g-3)/2$ formas quadráticas F_{rs} são linearmente independentes.

Se $\sum d_{rs}F_{rs} = 0$, onde $2 \leq r \leq s \leq g-1$, $(r,s) \neq (r_j, s_j)$ e d_{rs} são constantes, então todos os d_{rs} são nulos, pois os coeficientes d_{rs} aparecem como coeficientes isolados nos termos X_sX_r, onde $(r,s) \neq (r_j, s_j)$ e assim as $(g-2)(g-3)/2$ formas quadráticas F_{rs} são linearmente independentes. Como mostramos acima que $\dim I_2 = (g-2)(g-3)/2$, temos que esses F_{rs} formam uma base para I_2.

Se o divisor $E = 0$, pelo teorema 4.8, podemos fazer

$$r_{v+1} = t_2, \ldots, r_{g-2} = t_u \text{ e } s_{v+1} = \ldots, s_{g-2} = g-1.$$

Os possíveis conjuntos de lacunas de Weierstrass de uma quíntica não-singular projetiva plana são $\{1,2,3,6,7,11\}, \{1,2,3,5,6,9\}, \{1,2,3,4,5,l\}$, onde $6 \leq l \leq 11$. De fato, seja P um ponto de uma quíntica não-singular plana e denote por i seu número de interseção com a sua reta tangente em P. Como o divisor de interseção de uma cônica com uma quíntica não-singular plana é um divisor canônico, tomando cônicas convenientes os possíveis conjuntos de lacunas de Weierstrass em P são os seguintes: $\{1,2,3,6,7,11\}$ se $i = 5$, $\{1,2,3,5,6,9\}$ se $i = 4$ e $\{1,2,3,4,5,l\}$, onde $6 \leq l \leq 11$, se $i = 2$ ou $i = 3$.

Para determinar os possíveis conjuntos de lacunas de Weierstrass de uma curva trigonal, OLIVEIRA 1991 salienta que se P é um ponto ramificado no sistema trigonal com índice de ramificação e, então os autores [COPPENS 1985], [COPPENS 1986] e [KATO 1980] mostraram que os conjuntos possíveis de lacunas de Weierstrass em P são

$$\{1 + ie/i = 0, \ldots, n\}$$

$$\{1 + ie/i = 0, \ldots, m\} \cup \{2 + ie/j = 0, \ldots, n\},$$

onde m é um inteiro tal que $(g-4)/3 \leq m \leq (g-2)/2$ e $n := g-2-m$ (ver [STÖHR 1992]). Por outro lado, se o ponto P não é ramificado sobre o sistema trigonal, então [KIM 1990] mostrou que o possível conjunto de lacunas de Weierstrass em P é

$$\{1, 2, \ldots, a-1, a+1+(s-g), \ldots, s+1\},$$

para inteiros a e s tais que $g+1 \geq a \geq [(s+1)/2]+1$ (ver [STÖHR 1992]).

Seja P um ponto da curva C e seja L o conjunto das lacunas de Weierstrass em P. Se $l_3 > 3$, então C é uma curva trigonal, pois nesse caso o divisor $D = 3P$ determina um sistema linear na curva de grau 3 e dimensão 1. Agora suponha que $n_1 = 4$ e $n_2 = 5$. Nesse caso temos $\{1, 2, 3, 6, 7\} \subset L \subset \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, pois o semigrupo gerado por 4 e 5 contém todos os naturais $n \geq 12$ (veja a observação 2.6). Além disso, temos $\dim L(5P) = 3$, pois

$$l(5P) = l(4P) + 1 = l(3P) + 2 = 3$$

Portanto, o divisor $5P$ define um sistema linear livre de pontos de base g_5^2, que no caso $L = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ mergulha C como uma quíntica plana não-singular. Por outro lado, se $L = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, então $l_4 = 6$ e assim temos que $\mathrm{ord}_P(\omega_4) = 5$. Daí definindo $F = div(\omega_4) - 5P$, temos que $\deg(F) = 3$ e pelo teorema de Riemann-Roch $\dim L(F) = 2$. Portanto, F define um sistema linear livre de pontos de base g_3^1, i.e., C é uma curva trigonal.

Teorema 5.2. *Se $l_3 = 3$ e L difere dos conjuntos $\{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$, $\{1, \ldots, g-1, 2g-2\}$ e $\{1, \ldots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$. Se existe uma base para o espaço $\Omega^2(0)$ da forma em (5) com apenas um elemento com ordem $l_k - 1$ em P para cada $3 \leq k \leq g$, então:*

(i) C é não trigonal

(ii) Se L também difere do conjunto $\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, então o ideal canônico é minimamente gerado pelas formas quadráticas F_{rs}.

Prova. Se $L = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, sabemos que C é isomorfo a uma quíntica plana não-singular. Em particular C não é trigonal. Nós podemos assumir que $L \neq \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$. Segue dos teoremas 2.14 e 2.18 que para cada $3 \leq k \leq g$ existem inteiros $i_k, j_k \in \{2, \ldots, k-1\}$ tal que $l_k + 1 = l_{i_k} + l_{j_k}$. Portanto, $l_{i_k} + l_{j_k} - 2$ é a ordem em P da diferencial regular quadrática $\omega_{i_k}\omega_{j_k}$. Observe que a hipótese de que na base em (5) existe apenas um elemento de ordem $l_k - 1$ garante que $(i_k, j_k) \neq (r_j, s_j)$ para todo $j = 1, \ldots, g-2$. Assim, considerando a forma quadrática $F_{i_kj_k}$, como em (5), temos $a_{i_kj_kk} \neq 0$ e $a_{i_kj_kr} = 0$ para cada $r < k$.

Vamos considerar agora uma reta $l : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{g-1}$ passando por P. Suponha que $l(\mathbb{P}^1)$ está contida nas quádricas $F_{i_kj_k} = 0$ para todos $3 \leq k \leq g$. Como $P = (1 : 0 \ldots : 0)$, podemos escrever $l((s:t)) = (s + tq_1 : tq_2 : \ldots : tq_g)$, onde $(q_1 : \ldots : q_g) \in \mathbb{P}^{g-1}$. Portanto, substituindo na quádrica $F_{i_gj_g}$, temos

$$t^2 q_{i_g} q_{j_g} = a_{i_gj_gg}(s + tq_1)tq_g + \sum_{n=1}^{g-2} b_{i_gj_gn} t^2 q_{r_n} q_{s_n} + \sum_{m=2}^{g} c_{i_gj_gm} t^2 q_m q_g,$$

para todo $(s:t) \in \mathbb{P}^1$. Portanto, o coeficiente do monômio ts é igual a zero, e assim $q_g = 0$, já que $a_{i_gj_gg} \neq 0$.

Da mesma maneira, substituindo nas quádricas $F_{i_kj_k}$ com k assumindo sucessivamente os valores $g-1, g-2, \ldots, 3$, vemos que $q_g = q_{g-1} = g_{g-2} = \ldots = q_3 = 0$. Além disso, para $k = 3$, temos $i_3 = j_3 = 2$, pois $l_3 + 1 = 4 = l_2 + l_2$, e nesse caso a quádrica F_{22} aplicado a um ponto genérico da reta $l(\mathbb{P}^1)$ se reduz a $t^2 q_2^2 = 0$, logo $q_2 = 0$. Portanto, $l(\mathbb{P}^1) = \{P\}$ e não existe uma reta contida na interseção de todas as quádricas "$F_{rs} = 0$". Dessa forma, pelo teorema de Petri a curva é não-trigonal.

Mais geralmente, para cada $k \in \{3, \ldots, g\}$ o espaço tangente de $F_{i_kj_k} = 0$ em P é dado pela equação $\sum_{m=k}^{g} a_{i_kj_km} X_m = 0$, onde $a_{i_kj_km} \neq 0$. Como estes $g-2$ espaços tangentes são linearmente independentes, a dimensão da interseção é unidimensional. Portanto, a interseção de todas as quádricas "$F_{rs} = 0$" não é uma superfície, pois a dimensão do espaço tangente a essa interseção em P é menor ou igual que 1. Assim, novamente pelo teorema de Petri, o ideal canônico é gerado pelas formas quadráticas F_{rs}, já que formam uma base para o espaço I_2 de relações quadráticas. □

Corolário 5.3. *Se $l_3 = 3$ e L difere dos conjuntos $\{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$, $\{1, \ldots, g-1, 2g-2\}$ e $\{1, \ldots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$. Se $|2L| = 3g-3$, então*

(i) C é não-trigonal

(ii) Se L difere também do conjunto $\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, então o ideal canônico é minimamente gerado pelas formas quadráticas F_{rs}.

Prova. Como $|2L| = 3g-3$, podemos tomar a base em (5) com ordens distintas em P. □

Segue do corolário 5.3 e das proposições 2.21 e 2.22 que os semigrupos simétricos possíveis de curvas trigonais são apenas $\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$ e os simétricos com $l_3 > 3$.

Corolário 5.4. *Se $l_3 = 3$ e L difere dos conjuntos $\{1, \ldots, g-1, 2g-1\}$, $\{1, \ldots, g-1, 2g-2\}$ e $\{1, \ldots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$. Se $E = 0$ e $l_g - l_{g-1} + 1 \notin \{l_{t_2} \ldots, l_{t_u}\}$, onde $t_2, \ldots, t_u$ são definidos no teorema 4.6, então*

1. C não é trigonal.

2. Se L também difere do conjunto $\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, então o ideal canônico é minima-

mente gerado pelas formas quadráticas F_{rs}.

Prova. Como $E = 0$ e $l_g - l_{g-1} + 1 \notin \{l_{t_2}, \ldots, l_{t_n}\}$, pelo teorema 4.8 temos uma base do espaço $\Omega^2(0)$ satisfazendo as condições do teorema. $\square$

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho foi um estudo sobre ideais canônicos de curvas não trigonais e certos critérios de não-trigonalidade. Para isso, o segundo capítulo me foi exigido o aprendizado de técnicas muito utilizadas em semigrupos numéricos, essas técnicas geralmente eram de teor aritmético. No terceiro capítulo desenvolvi algumas definições e teoremas clássicos em curvas algébricas. Nos capítulos subsequentes, utilizei dessas ferramentas para obter os resultados principais.

Por fim, esse estudo me permitiu conhecer mais a fundo problemas relacionados com certas famílias de curvas e seus trigonais canônicos. O contato com outros artigos sobre o assunto, também me ofereceu uma visão mais ampla dos principais problemas ligados a esse tópico. Além disso, esse trabalho contribuiu muito com a minha maturidade enquanto estudante de Matemática e ajudou a aperfeiçoar o meu modo de escrever em Matemática.

REFERÊNCIAS

ARBARELLO, E.; CORNALBA, M.; GRIFFITHS, P. A.; HARRIS, J. **Geometry of Algebraic Curves, Vol. I**. Springer-Verlag, New-York, 1985.

ATIYAH, I. G., M. F.; MACDONALD. **Introduction to Commutative Algebra**. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

COPPENS, M. The Weierstrass Gap Sequence of the Total Ramification Points of Trigonal Coverings of P. **Indagationes Mathematicae**, v. 47, n. 3, p. 245–276, 1985.

COPPENS, M. The Weierstrass Gap Sequences of the Ordinary Ramification Points of Trigonal Covering of P; Existence of a Kind of Weierstrass Gap Sequence. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 43, n. 1, p. 11–25, 1986.

FULTON, W. **Algebraic Curves:** An Introduction to Algebraic Geometry. Benjamim, New York Amsterdam, 1969.

GARCIA, A.; VIANA P. Weierstrass Points on Certain Non-Classical Curves. **Archiv der Mathematik,**, v. 46, n. 4, p. 315–322, 1986.

HARTSHORNE, R. **Algebraic Geometry. Graduate texts in mathematics; 52**. Springer-Verlag, 1977.

KATO, T. Non-Hyperelliptic Weierstrass Points of Maximal Weight. **Mathematische Annalen,**, v. 239, n. 2, p. 141–147, 1979.

KATO, T. On Weierstrass Points Whose First Non-Gaps are Three. **Journal für die reine und angewandte Mathematik,**, v. 316, n. 1, p. 99–109, 1980.

KIM, S. J. On the Existence of Weierstrass Gap Sequences on Trigonal Curves. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 63, n. 2, p. 171–180, 1990.

OLIVEIRA, G. Weierstrass Semigroups and the Canonical Ideal of Non-Trigonal curves. **Manuscripts Mathematica,** Berlin-Heidelberg, v. 71, n. 1, p. 431–450, 1991.

PIMENTEL, F. L. R. **Sobre o Problema do Moduli de Curvas Pontuadas.** 2000. 53 f. Dissertação (Doutorado em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Fortaleza, 2000.

ROSALES, P.A., J.C.; GARCIA. **Numerical Semigroups**. Springer-Verlag, 2009.

SAINT-DONAT, B. On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve. **Mathematische Annalen,**, v. 206, n. 2, p. 157–175, 1973.

SANTOS, J. B. **Um Método para Representar Semigrupos Numéricos Simétricos.** 1999. 42 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1999.

STÖHR, P., K. O.; VIANA. A Variant of Petri's Analysis of the Canonical Ideal of an Algebraic Curve. **Manuscripts Mathematica,** Berlin-Heidelberg, v. 61, n. 2, p. 223–248, 1988.

STÖHR, P., K. O.; VIANA. Weierstrass Gap Sequences and Moduli Varieties of Trigonal Curves. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 81, n. 1, p. 633–82, 1992.