

Ivan Carneiro Jardim

**Modelo de múltiplas branas esféricas como  
uma descrição cosmológica**

Fortaleza

27/02/2012

Ivan Carneiro Jardim

# Modelo de múltiplas branas esféricas como uma descrição cosmológica

Tese submetida à Coordenação do Curso de  
Pós-Graduação em Física, da Universidade  
Federal do Ceará, como requisito parcial para  
a obtenção do grau de Doutor em Física

Orientador:

Ricardo Renan Landim de Carvalho

Co-orientador:

Geová Maciel de Alencar Filho

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

27/02/2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- J42m Jardim, Ivan Carneiro.  
Modelo de múltiplas branas esféricas como uma descrição cosmológica / Ivan Carneiro Jardim. – 2012.  
70 f. : il.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2012.  
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.  
Coorientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Constantes cosmológicas. 2. Brana. 3. Modelo de Big Bang. I. Título.

CDD 530

---

Ivan Carneiro Jardim

# Modelo de múltiplas branas esféricas como uma descrição cosmológica

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física

Aprovada em 27/02/2012

## BANCA EXAMINADORA

---

Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará

---

Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Coorientador)  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão  
Central

---

Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho  
Universidade Federal do Ceará

---

Dr. Makarius Oliveira Tahim  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão  
Central

---

Dr. Júlio Marny Hoff da Silva  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

*À você*

# Agradecimentos

Ao professor Ricardo Renan Landim de Carvalho, tanto por ter me orientado durante o mestrado e doutorado como pelas aulas ministradas, que foram de fundamental importância para a minha formação.

Ao Geová Maciel de Alencar Filho, por ter me ajudado nesse trabalho bem como pelo apoio e motivação.

Ao professor Carlos Alberto dos Santos Almeida pelo apoio.

Ao professor Raimundo Nogueira da Costa Filho pelo apoio e ajuda na elaboração desse trabalho.

Aos colegas do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes (LASSCO).

Aos meus alunos, que provavelmente me ensinaram mais do que eu a eles.

Aos funcionários do departamento de física de UFC que estão sempre dispostos a nos atender.

À minha família.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho solucionamos a equação de campo de Einstein em  $D$  dimensões para uma distribuição de matéria esféricamente simétrica em um espaço com constante cosmológica dependente da posição. Particularizamos a solução encontrada para o caso de  $n$   $(D - 2)$ -branas anisotrópicas concêntricas com massas, raios e pressões arbitrárias com diferentes constantes cosmológicas entre elas. Mostramos como a diferença entre as constantes cosmológicas contribui para a massa efetiva de cada brana, e também como a equação de estado de cada brana influencia na sua dinâmica, que pode ser dividida em eras de acordo com a matéria dominante. Esse cenário pode ser utilizado para modelar o universo no caso  $D = 5$ , que apresenta uma fenomenologia mais rica que os modelos de branas planas. A evolução de cada brana foi estudada, e as equações de estado para a pressão anisotrópica, que removem as divergências, foram encontradas. Uma análise da equação de movimento nos permitiu a construção de um modelo de universo oscilante. Através de um "cutoff" na densidade propomos um modelo de Big Bang não singular de baixa entropia, compatível com os dados observacionais. Neste modelo obtemos o valor da entropia, da massa e da aceleração iniciais em termos da densidade máxima.

# Abstract

The general solution of Einstein's gravity equation in  $D$  dimensions for an anisotropic and spherically symmetric matter distribution is calculated in a bulk with position dependent cosmological constant. Results for  $n$  anisotropic concentric  $(D - 2)$ -branes with arbitrary mass, radius and pressure with different cosmological constant between branes are found. It is shown how the difference between the cosmological constant contributes to the effective mass of each brane, and it is also shown that the equation of state for each brane influences the dynamics of branes, which can be divided into eras according to the dominant matter. This scenario can be used to model the universe in the  $D=5$  case, which may presents a phenomenology richer than the current models. The evolution law of the branes is studied, and the anisotropic pressure that remove divergences is found. An analyze of the equation of motion allowed us to build an oscillating universe model. By an introduction of a cutoff in the density we propose a low-entropy nonsingular Big Bang model, which is consistent with the observational data. In this model we obtain the initial value of entropy, mass and acceleration of universe in terms of the maximum density.



# Sumário

Notação	p. 9
<b>INTRODUÇÃO</b>	p. 10
<b>1 PROBLEMAS ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS EM 4-D</b>	p. 14
1.1 Elemento de Linha Esfericamente Simétrico . . . . .	p. 14
1.2 Cálculo do Tensor de Einstein . . . . .	p. 16
1.3 O Problema de Schwarzschild . . . . .	p. 18
Diagramas de Espaço-tempo . . . . .	p. 20
1.4 O Problema de Kottler . . . . .	p. 24
1.5 O Problema de Reissner-Nordstrøm . . . . .	p. 25
Diagramas de Espaço-tempo . . . . .	p. 27
<b>2 INTRODUÇÃO À FÍSICA DE DIMENSÕES EXTRAS</b>	p. 31
2.1 Modelo de Kaluza-Klein . . . . .	p. 32
2.2 Modelo de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) . . . . .	p. 32
2.3 Modelo de Randall-Sundrum . . . . .	p. 33
<b>3 A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO COSMOLÓGICO DE MÚLTIPLAS BRANAS ESFÉRICAS</b>	p. 39
3.1 Espaço-tempo Esfericamente Simétrico em $D$ Dimensões . . . . .	p. 39
3.2 Solução Geral para Branais Esféricas . . . . .	p. 41
3.3 Lei de Conservação do Tensor Momento-energia . . . . .	p. 44
3.4 Limite de Branais Planas . . . . .	p. 46

3.5	Métrica Efetiva em $(D - 1)$ -Dimensões . . . . .	p. 47
<b>4</b>	<b>MODELO DE UNIVERSO-BRANA ESFÉRICO OSCILANTE</b>	p. 50
4.1	Modelo de Universo Oscilante . . . . .	p. 50
4.2	Aspectos Quânticos no Horizonte de Kottler . . . . .	p. 52
4.3	Modelo de Big Bang Não Singular . . . . .	p. 53
4.4	Um Pouco de Especulação: Evolução com Densidade Máxima . . . . .	p. 56
	<b>CONCLUSÃO</b>	p. 59
	<b>Apêndice A – Diagrama de Espaço-tempo na Relatividade Restrita</b>	p. 61
	<b>Apêndice B – Evaporação de Buracos Negros</b>	p. 63
B.1	Radiação Hawking . . . . .	p. 63
B.2	Radiação Hawking Generalizada . . . . .	p. 65
	<b>Apêndice C – Campo Elétrico em um Espaço-tempo Estático e Esfericamente Simétrico</b>	p. 66
	<b>Referências</b>	p. 68

# Notação

Índices latinos em minúsculos, como  $i, j, k$  por exemplo, variam sobre as 3 coordenadas espaciais, usualmente, 1, 2, 3 ou  $x, y, z$ .

Índices gregos como  $\mu, \nu, \lambda, \kappa$  por exemplo correm sobre os 4 índices de um sistema de coordenadas gerais.

Índices latinos em maiúsculo, com  $M, N, L$  por exemplo, variam sobre todas as coordenadas de um espaço-tempo  $D$ -dimensional.

A métrica em um sistema de coordenadas inercial é a de Minkowski representada por  $\eta_{\alpha\beta}$  cuja diagonal é  $-1, +1, +1, +1$ .

Estamos adotando a convenção de virgula para a derivada ordinária,  $V^{\alpha}_{,\beta} \equiv \partial_{\beta}V^{\alpha}$ , e ponto e virgula para a derivada co-variante,  $V^{\mu}_{;\nu} \equiv D_{\nu}V^{\mu}$ .

Tri-vetores cartesianos são representados com uma seta em cima.

Será adotada a convenção de Einstein da soma, ou seja, índices repetidos indicam uma soma implícita.

A velocidade da luz bem como a constante de Planck e a de Boltzmann são tomadas como a unidade.

# INTRODUÇÃO

Observando a incompatibilidade entre a mecânica relativística e a gravitação newtoniana, Einstein percebeu a necessidade de uma nova teoria da gravitação que respeitasse a causalidade. Em 1915 esta teoria foi apresentada a comunidade e ficou conhecida como relatividade geral, pois além da gravidade essa teoria contemplava os observadores não-inerciais ( em contraposição à relatividade restrita). Apesar da não-linearidade da teoria, em 1916 Schwarzschild [1] encontrou a primeira solução exata, que só pode ser obtida dessa forma devido ao alto grau de simetria do problema abordado. Esse problema consiste em encontrar o efeito gravitacional de uma distribuição de matéria pontual estática. Por possuir simetria esférica as equações de campo se tornam mais simples, pois nos permite reduzir o número de variáveis. Essa solução é a utilizada para os testes clássicos da teoria, como a precessão do periélio de mercúrio e o desvio da luz próximo ao sol. Apesar do sucesso da solução de Schwarzschild, um aspecto dela não agradou a Einstein, a possibilidade de haver buracos negros. Corpos tão densos que a velocidade de escape seria maior que a da luz. Apesar do desagrado do criador da teoria, esse cenário fascinou os físicos e gerou uma série de estudos sobre as consequências desse fato. A sequência de trabalhos sobre essa solução culminaram no trabalho de Hawking de 1975, que indica que fenômenos quânticos nas proximidades do horizonte fazem o buraco negro evaporar e se extinguir completamente [2]. O que mostrou que os buracos negros não são tão negros quanto se pensava, mas emanam radiação da mesma forma que um corpo aquecido.

Pouco tempo depois de elaborar a teoria da gravidade, Einstein percebeu que poderia aplicá-la para estudar o universo como um todo. Porém os resultados obtidos por ele não eram compatíveis com a ideia de universo que ele tinha em mente. Einstein acreditava que o universo deveria ser estático, enquanto sua teoria dizia que ele deveria ser dinâmico, devido a ausência de gravidade repulsiva que o estabilizasse. Foi então que em 1917 ele alterou a equação de campo original para satisfazer o seu cenário mental de como deveria ser o universo. O termo acrescentado na equação de campo ficou conhecido como constante cosmológica pois só tinha relevância em escalas cosmológicas ( apesar de Einstein ter tentado aplicá-la para a estrutura mecânica das partículas elementares [3]). Apesar da solução de Friedmann-Robertson-Walker para um universo dinâmico e a

comprovação observacional de Hubble [4], e posteriormente de Penzias e Wilson [5], tornar o universo estático de Einstein desacreditado, a constante cosmológica sobreviveu devido a expansão acelerada do universo, observada em 1998. Utilizando a equação de Einstein modificada, em 1918, Kottler obteve a solução do problema de Schwarzschild com o termos de constante cosmológica [6]. Essa solução mostrou que ainda havia um horizonte mas com correções devido a constante cosmológica. Mostrou também que, dependendo do valor dessa constante, um novo horizonte aparecia, que é uma correção do horizonte de de Sitter.

Um estudo mais detalhado da solução cosmológica de Friedmann-Robertson-Walker com as observações de Hubble, indica que o universo está em expansão. Dessa observação concluiu-se que ele deveria ser mais denso e quente no passado, culminando no Big Bang, um estado inicial com densidade e temperatura divergentes. Apesar do sucesso desse modelo em descrever a nucleossíntese primordial e a radiação cósmica de fundo, observada por Pensias e Wilson, algumas questões se mantiveram sem resposta. Entre os problemas do modelo padrão cosmológico os principais são o problema da energia escura e da matéria escura, que tem norteado inúmeras linhas de pesquisa. O problema da matéria escura é um problema de dinâmica em escala galáctica, pois a velocidade de rotação dos corpos na periferia de uma galáxia (halo) é incompatível com a atração gravitacional da matéria visível nessa galáxia, o que pode ser interpretado como interação gravitacional com uma matéria não visível (escura). E o problema da energia escura está relacionado com a taxa de expansão do universo, que se acreditava estar desacelerando devido a atração gravitacional entre a matéria visível. Mas as observações de supernovas indicam que essa taxa está aumentando, o que gera a necessidade de uma energia que gravite repulsivamente, como a constante cosmológica [7]. Apesar do modelo de universo com o início em um Big Bang ter se tornado o modelo padrão cosmológico ele deve ser visto apenas como uma extrapolação de teoria da relatividade geral fora do seu domínio de validade, já que densidade e temperatura infinitas não pode ser uma resposta física aceitável (nenhum instrumento pode dar essa leitura). Aceitando esse estado inicial se destrói completamente uma descrição racional do universo, já que a finalidade de qualquer equação é propagar as condições iniciais (problema de Cauchy) para determinar os valores dos observáveis físicos em qualquer ponto do espaço-tempo. De modo que é necessário que as condições do início do universo sejam finitas para que a evolução possa nos responder porque as características físicas tem os valores que observamos. Vemos, então, a necessidade de um modelo de Big Bang não singular, e essa é uma das questões abordadas por este trabalho.

Os primeiros modelos de universo com dimensões extras remetem ao modelo de

Kaluza-Klein, na tentativa de unificar a gravidade e o eletromagnetismo [8, 9]. Posteriormente, com o objetivo de unificar toda a física, a teoria das cordas fortaleceu os modelos com dimensões extras. Isso se deve ao fato que a teoria das supercordas exige 10 dimensões para ser coerente, e possui soluções de branas com qualquer dimensão menor que 10. Posteriormente surgiu o modelo de Randall-Sundrum com o intuito de solucionar o problema da hierarquia ( que é explicar porquê a gravidade é tão fraca) [10, 11]. Esse modelos descrevem o universo como uma superfície mergulhada em um espaço-tempo hiper-dimensional. Apesar do modelo padrão cosmológico não determinar topologia do universo, a maioria dos modelos de branas se restringem a um universo plano. Devido a simplicidade dessa geometria ela não é capaz de alterar a dinâmica global do universo, e por isso não pode ser aplicada ao problema da energia escura e a singularidade inicial. Apesar dos primeiros estudos que descrevem o universo como uma esfera remeterem a década de 80 [12, 13, 14], os modelos de branas esféricas se mostraram fenomenologicamente muito ricos na década passada [15, 16, 17, 18]. Além de serem compatíveis com os dados observacionais [19, 20, 21], esses modelos fornecem uma explicação para o afastamento isotrópico das galáxias (expansão isotrópica), para a existência de um referencial preferencial e para a existência de um tempo cósmico global (tempo gaussiano). Eles mostraram como a introdução de diferentes constantes cosmológicas entre as branas pode alterar a dinâmica cosmológica, de modo a torná-la compatível com a dinâmica observada [22, 23] sem a introdução da energia escura [24]. Neste trabalho estamos interessados em generalizar esses modelos para múltiplas branas esféricas concêntricas [15], mas permitindo uma pressão anisotrópica na direção normal à brana. A interação com as outras branas pode alterar a dinâmica global do universo e, através de flutuações na simetria esférica, acreditamos ser possível abordar o problema da matéria escura. Como a gravidade é geométrica, a matéria de uma brana pode interagir com a da outra ( não visível para um observador na brana). Apesar do modelo com mais de uma brana possuir um ponto preferencial do ponto de vista do espaço hiper-dimensional, a geometria esférica é fenomenologicamente mais interessante que a plana e pode facilmente incorporar as simetrias observadas.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 iremos fazer uma revisão sobre as soluções esfericamente simétricas em quatro dimensões. Primeiramente iremos utilizar a simetria para simplificarmos o elemento de linha sem perda de generalidade, reduzindo assim o número de variáveis. Em seguida iremos calcular as componentes não-nulas do tensor de Einstein com tal simetria, para podermos abordar problemas mais específicos através da fixação do tensor momento-

energia. Com as equações obtidas iremos abordar o problema de Schwarzschild e suas consequências, como o surgimento do horizonte, que será estudado através de diagramas de espaço-tempo. Posteriormente iremos abordar o problema de Kottler através da inclusão do termo cosmológico na equação de campo e os seus horizontes. Finalmente iremos abordar o problema de Reissner-Nordström, que consiste em um corpo esfericamente simétrico carregado. estudaremos os horizontes dessa solução através de diagramas de espaço-tempo.

No capítulo 2 faremos uma breve introdução à física de dimensões extras. Iremos mostrar os mais proeminentes cenários e que problemas eles abordaram. Apesar dos diversos cenários, nos concentraremos principalmente no modelo de Randall-Sundrum por ter se tornado um paradigma na física de dimensões extras e ter mostrado a viabilidade dos cenários de mundo-brana ( ideia que está no cerne desta tese).

No capítulo 3 vamos aplicar a equação de Einstein para problemas esfericamente simétricos em  $D$  dimensões a fim de construir um modelo de universo-brana esférico [25]. Para isso iremos calcular as componentes independentes do tensor de Einstein para solucionarmos a equação de campo para  $n$  ( $D - 2$ )-branas esféricas concêntricas anisotrópicas. Neste cenário iremos colocar diferentes constantes cosmológicas entre essas branas de modo a alterar a dinâmica global de cada brana, que será estudada através da conservação do tensor momento-energia. Estudaremos como essa lei de evolução fornece duas possíveis equações de estado para a pressão anisotrópica. Finalmente iremos fazer uma redução dimensional para obtermos a métrica medida por observadores sobre as branas, bem como a cosmologia observada por eles.

No capítulo 4 estudaremos a equação de evolução das branas obtidas no capítulo anterior no caso em que a equação de estado para a pressão radial da brana é do tipo constante cosmológica. Estudaremos em que condições esse tipo de brana pode descrever diferentes universos, como oscilante, em expansão eterna ou em colapso, com o intuito de obtermos os parâmetros que nos permitam distingui-los. Na condição de colapso estudaremos a evaporação do buraco negro formado, através de radiação Hawking, em função da dimensionalidade e da constante cosmológica. Nesse contexto, cogitamos a existência de um modelo de Big Bang não singular de baixa entropia como consequência natural do processo de evaporação. Para realizarmos esse modelo introduzimos um “cutoff” semi-clássico na densidade. Neste caso estudaremos a existência de um estado emergente (inicial para os observadores sobre a brana) compatível com as observações.

# 1 PROBLEMAS ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS EM 4-D

Nesse capítulo iremos fazer uma introdução sobre os problemas esfericamente simétricos em quatro dimensões como suporte para o modelo que desejamos construir no capítulo 3. Esse capítulo tem como público alvo estudantes com um conhecimento básico sobre a teoria da relatividade geral, principalmente sobre os elementos da equação de Einstein. Para o leitor não familiarizado com essa teoria indico, além dos livros introdutórios [26, 27], a dissertação de mestrado [28].

## 1.1 Elemento de Linha Esfericamente Simétrico

Para solucionarmos a equação de Einstein em quatro dimensões precisamos encontrar as dez componentes independentes do tensor métrico. Porém, vamos utilizar a simetria do problema para minimizar esse número de variáveis. Para isso vamos estudar como escrever um invariante de linha mais geral com tais simetrias. Dessa forma vamos escolher um sistema de coordenadas  $x^1, x^2, x^3, x^0 = t$ , no qual o elemento de linha  $ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  dependa de  $\vec{x}$  e  $d\vec{x}$  somente na forma dos invariantes rotacionais  $dx^2, \vec{x} \cdot d\vec{x}$  e  $r \equiv (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2}$ . O elemento invariante de linha mais geral possível com essa simetria é

$$ds^2 = -F(r, t)dt^2 + 2E(r, t)dt\vec{x} \cdot d\vec{x} + D(r, t)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + C(r, t)dx^2. \quad (1.1)$$

Devido a simetria do problema é conveniente escrevermos  $\vec{x}$  em coordenadas polares esféricas  $r, \theta, \phi$  definidos por

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi \quad x^3 = r \cos \theta,$$



de onde obtemos os invariantes rotacionais

$$dx^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.2)$$

$$\vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr. \quad (1.3)$$

Nessas coordenadas podemos escrever o invariante de linha (1.1) na forma

$$ds^2 = -F(r, t) dt^2 + 2rE(r, t) dt dr + r^2 [D(r, t) + C(r, t)] dr^2 + r^2 C(r, t) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2].$$

Para simplificar essa métrica vamos introduzir uma nova coordenada radial definida por

$$r' \equiv \sqrt{C(r, t)} r. \quad (1.4)$$

Essa nova coordenada nos permite escrever o invariante de linha na forma

$$ds^2 = -A(r', t) dt^2 + 2H(r', t) dt dr' + B(r', t) dr'^2 + r'^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (1.5)$$

onde definimos novas funções  $A(r', t)$ ,  $B(r', t)$  e  $H(r', t)$  em função das anteriores. Para eliminarmos o termo cruzado vamos definir uma nova variável de tempo

$$t' = f(r', t), \quad (1.6)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária. Em termos desse novo parâmetro de tempo o elemento de linha toma a forma

$$\begin{aligned} ds^2 = & -A(r', t) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-2} dt'^2 + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-2} \left[ A(r', t) \frac{\partial f}{\partial r'} + H(r', t) \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt' dr' + r'^2 d\Omega^2 + \\ & + \left[ B(r', t) - A(r', t) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-2} \left( \frac{\partial f}{\partial r'} \right)^2 - 2H(r', t) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial r'} \right] dr'^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Para eliminarmos o termo cruzado basta fixarmos a função  $f$  de modo que

$$A(r', t) \frac{\partial f}{\partial r'} = -H(r', t) \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Essa fixação não causa nenhuma perda de generalidade, já que a função  $f$  é arbitrária. Suprimindo a linha e redefinindo as funções  $A(r, t)$  e  $B(r, t)$  obtemos o elemento de linha mais simples com simetria esférica <sup>1</sup>

$$ds^2 = -A(r, t) dt^2 + B(r, t) dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (1.9)$$

---

<sup>1</sup>Esse intervalo de tempo próprio também pode ser obtido utilizando os vetores de Killing num espaço maximalmente simétrico para um espaço-tempo quadridimensional esfericamente simétrico independente do tempo [26].

ou seja, a métrica é dada por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( -A(r), B(r), r^2, r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (1.10)$$

Como a métrica é diagonal é fácil obter a inversa

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left( -A(r)^{-1}, B(r)^{-1}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (1.11)$$

Munidos da forma mais simples para uma métrica com tais simetrias, podemos calcular os tensores necessários para a equação de Einstein.

## 1.2 Cálculo do Tensor de Einstein

Na seção anterior conseguimos utilizar a simetria esférica para reduzir de dez para somente duas as componentes desconhecidas do tensor métrico. Para obtermos essas duas incógnitas temos que relacioná-las com a distribuição de matéria através da equação de Einstein. Para facilitar os cálculos vamos escrever a métrica obtida na seção anterior na forma

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} f^{(\nu)} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} f_{(\nu)},$$

onde

$$f^{(\nu)} = \left( -A(r, t), B(r, t), r^2, r^2 \sin^2 \theta \right),$$

$$f_{(\nu)} = \left( -A(r, t)^{-1}, B(r, t)^{-1}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right).$$

O índice de  $f^{(\nu)}$  e de  $f_{(\nu)}$  é só uma referência e indica que não há soma - por isso eles estão entre parênteses. Temos que lembrar também que a delta com dois índices covariante ou contravariante não é um tensor, o tensor é a métrica. Estamos escrevendo dessa forma para ficar mais fácil de identificar os termos não nulos. É tendo isso em mente que vamos fazer

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}_{,\mu} &= -A'(r, t) \delta_0^{(\nu)} \delta_\mu^1 - \dot{A}(r, t) \delta_0^{(\nu)} \delta_\mu^0 + B'(r) \delta_1^{(\nu)} \delta_\mu^1 + \dot{B}(r, t) \delta_1^{(\nu)} \delta_\mu^0 + 2r \delta_2^{(\nu)} \delta_\mu^1 + \\ &\quad + \delta_3^{(\nu)} \left( 2r \sin^2 \theta \delta_\mu^1 + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \delta_\mu^2 \right) \\ &= \delta_\mu^1 f'^{(\nu)} + \delta_\mu^0 \dot{f}^{(\nu)} + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \delta_\mu^2 \delta_3^{(\nu)}, \end{aligned}$$

onde a linha indica derivação com respeito a  $r$  e o ponto com respeito a  $t$ , e

$$f'^{(\nu)} = \left( -A'(r, t), B'(r, t), 2r, 2r \sin^2 \theta \right),$$

$$\dot{f}^{(\nu)} = \left( -\dot{A}(r, t), \dot{B}(r, t), 0, 0 \right).$$

Para calcularmos o tensor de Einstein devemos inicialmente obter a conexão afim

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \\
&= \frac{1}{2}\delta^{\lambda\rho}f_{(\lambda)}(\delta_{\mu\rho}f_{,\nu}^{(\mu)} + \delta_{\nu\rho}f_{,\mu}^{(\nu)} - \delta_{\mu\nu}f_{,\rho}^{(\nu)}) \\
&= \frac{1}{2}f_{(\lambda)}(\delta_{\mu}^{\lambda}f_{,\nu}^{(\mu)} + \delta_{\nu}^{\lambda}f_{,\mu}^{(\nu)} - \delta_{\mu\nu}\delta^{\lambda\rho}f_{,\rho}^{(\nu)}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta_{(\mu}^{\lambda}\delta_{\nu)}^1f_{(\lambda)}f'^{(\lambda)} + \delta_{(\mu}^{\lambda}\delta_{\nu)}^0f_{(\lambda)}\dot{f}^{(\lambda)} + 2\cot\theta\delta_{(\mu}^{\lambda}\delta_{\nu)}^2\delta_3^{\lambda)} - \right. \\
&\quad \left. - 2\text{sen}\theta\cos\theta\delta_{\mu\nu}\delta^{2\lambda}\delta_3^{(\nu)} - \delta_{\mu\nu}\left(\delta^{\lambda 1}\frac{f^{(\nu)}}{B} - \delta^{\lambda 0}\frac{\dot{f}^{(\nu)}}{A}\right)\right].
\end{aligned}$$

É fácil perceber que os únicos termos não nulos são

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}f_{(0)}f'^{(0)} = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}\left[f_{(0)}\dot{f}^{(0)} + \frac{\dot{f}^{(0)}}{A}\right] = \frac{\dot{A}}{A}, \quad (1.12)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}\frac{\dot{f}^{(1)}}{A} = \frac{\dot{B}}{2A}, \quad \Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2}f_{(1)}f'^{(0)} = \frac{A'}{2B}, \quad (1.13)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}f_{(1)}\dot{f}^{(1)} = \frac{\dot{B}}{2B}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}f_{(1)}f'^{(1)} = \frac{B'}{2B}, \quad (1.14)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}f_{(1)}f'^{(2)} = -\frac{r}{B}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2}f_{(1)}f'^{(3)} = -\frac{r\sin^2\theta}{B}, \quad (1.15)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}f_{(2)}f'^{(2)} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -r^2\cos\theta\text{sen}\theta f_{(2)} = -\text{sen}\theta\cos\theta, \quad (1.16)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}f_{(3)}f'^{(3)} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = r^2\sin\theta\cos\theta f_{(3)} = \cot\theta. \quad (1.17)$$

O próximo passo para podermos usar a equação de Einstein é calcular o tensor de Ricci dado por <sup>2</sup>

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}. \quad (1.18)$$

Substituindo os valores obtidos no cálculo da conexão afim e com um pouco de algebrismo encontramos que os termos não nulos são

$$R_0^0 = -\frac{A''}{2AB} + \frac{A'}{4AB}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{ABr} + \frac{\ddot{B}}{2AB} - \frac{\dot{B}}{4AB}\left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A}\right), \quad (1.19)$$

$$R_1^1 = -\frac{A''}{2AB} + \frac{A'}{4AB}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{B^2r} + \frac{\ddot{B}}{2AB} - \frac{\dot{B}}{4AB}\left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A}\right), \quad (1.20)$$

$$R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2Br}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{Br^2}, \quad (1.21)$$

<sup>2</sup>O leitor que utilizar a dissertação de mestrado [28] observará que o tensor de Ricci está definido com o sinal contrário. Isso ocorre porquê, na época, seguimos a convenção adotada no livro do Weinberg [26], enquanto que neste trabalho adotamos a convenção utilizada por outros livros bem como artigos [27, 29, 25]. A única modificação nessa nova convenção é o sinal da constante de acoplamento da gravidade com a matéria na equação de Einstein.

$$R_0^1 = \frac{\dot{B}}{B^2 r}, \quad (1.22)$$

$$R_1^0 = -\frac{\dot{B}}{ABr}. \quad (1.23)$$

Assim podemos calcular o escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R &= R_\mu^\mu = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 \\ &= -\frac{A''}{AB} + \frac{A'}{2AB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{\ddot{B}}{AB} - \frac{\dot{B}}{2AB} \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A} \right) + \\ &\quad + \frac{2}{r^2} (1 - B^{-1}) - \frac{2}{Br} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

e, finalmente, as componentes não nulas e independentes do tensor de Einstein, definido por

$$G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2} R \delta_\nu^\mu, \quad (1.25)$$

que são

$$G_0^0 = -\frac{1}{r^2} (1 - B^{-1}) - \frac{B'}{B^2 r}, \quad (1.26)$$

$$G_1^1 = -\frac{1}{r^2} (1 - B^{-1}) + \frac{A'}{ABr}, \quad (1.27)$$

$$G_2^2 = \frac{1}{4A} \left[ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{2\ddot{B}}{B} \right] + \frac{1}{2Br} \left[ \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right] + \frac{1}{4B} \left[ \frac{2A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} - \frac{A'B'}{AB} \right], \quad (1.28)$$

$$G_0^1 = \frac{\dot{B}}{B^2 r}. \quad (1.29)$$

Para resolvermos efetivamente os problemas com simetria esférica temos que determinar as funções  $A(r, t)$  e  $B(r, t)$  através da equação de Einstein. Para isso temos que fixar a fonte da gravidade, o tensor momento-energia. É isso que faremos nas seções seguintes.

### 1.3 O Problema de Schwarzschild

O problema de Schwarzschild consiste em obter a métrica de corpo estático, esfericamente simétrico e eletricamente neutro. Para tal usaremos a equação de Einstein

$$G_\nu^\mu = 8\pi G T_\nu^\mu, \quad (1.30)$$

com o tensor momento-energia que descreve um corpo pontual de massa  $M$  situado na origem <sup>3</sup>, que é

$$T_{\nu}^{\mu} = -\frac{M}{4\pi r^2} \delta_0^{\mu} \delta_{\nu}^0 \delta(r), \quad (1.31)$$

onde o fator  $1/4\pi r^2$  é proveniente da integração nas variáveis angulares. Usando as componentes encontradas na seção anterior temos o conjunto de equações componentes

$$-\frac{1}{r^2} (1 - B^{-1}) - \frac{B'}{B^2 r} = -\frac{2GM}{r^2} \delta(r), \quad (1.32)$$

$$-\frac{1}{r^2} (1 - B^{-1}) + \frac{A'}{ABr} = 0, \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{4A} \left[ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{2\ddot{B}}{B} \right] + \frac{1}{2Br} \left[ \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right] + \frac{1}{4B} \left[ \frac{2A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} - \frac{A'B'}{AB} \right] = 0, \quad (1.34)$$

$$\frac{\dot{B}}{B^2 r} = 0. \quad (1.35)$$

A ultima equação acima garante que a solução é estática. Esse resultado está contido no teorema de Birkhoff [30] que garante que a solução exterior de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria é estática, pois nessa região não há fluxo de energia. Como a primeira equação só depende de  $B$  podemos solucioná-la reescrevendo-a na forma

$$\left[ r (1 - B^{-1}) \right]' = -2GM\delta(r).$$

Integrando a equação acima, para  $r \neq 0$ , obtemos que

$$B^{-1} = 1 - \frac{C}{r},$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Substituindo a solução acima na equação obtemos

$$-2GM\delta(r) = \left[ r \frac{C}{r} \right]' = C \left[ r^2 \frac{1}{r^2} \right]' = -C \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -C \cdot \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right), \quad (1.36)$$

lembrando que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{r}), \quad (1.37)$$

obtemos

$$-2GM\delta(r) = 4\pi C \delta^3(\vec{r}). \quad (1.38)$$

Integrado a expressão acima sobre todo o ângulo sólido obtemos o valor de constante de integração  $C = 2GM$ . Finalmente, a solução radial é

$$B^{-1} = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (1.39)$$

---

<sup>3</sup>Iremos utilizar essa distribuição mas o resultado é válido para a região externa de uma distribuição esfericamente simétrica

Com essa solução podemos encontrar  $A(r, t)$  utilizando a diferença entre (1.33) e (1.32) que é

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = \frac{2GM}{r} B \delta(r).$$

Novamente para  $r \neq 0$  obtemos que

$$A = f(t)B^{-1} = f(t) \left(1 - \frac{2GM}{r}\right).$$

A função  $f(t)$  pode ser absorvida redefinindo a coordenada temporal, de modo que a métrica toma a forma

$$ds^2 = -d\tau^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.40)$$

Podemos observar que essa solução possui uma singularidade inesperada em  $r = 2GM$ . Esse raio define um horizonte e é chamado da raio de Schwarzschild, dessa forma vamos definir

$$r_s \equiv 2GM. \quad (1.41)$$

Para entendermos melhor essa solução vamos analisá-la através de diagramas de espaço-tempo, que faremos a seguir.

## Diagramas de Espaço-tempo

Como podemos observar da equação (1.40) a distância entre dois pontos não é positiva definida. Para encontrarmos as regiões tipo tempo vamos analisar o movimento puramente radial. Fazendo  $d\theta = d\phi = 0$  obtemos

$$d\tau^2 = \frac{r - r_s}{r} dt^2 - \frac{r}{r - r_s} dr^2. \quad (1.42)$$

Os cones de luz são definidos por  $d\tau = 0$ . No espaço-tempo de Schwarzschild a propagação radial dos raios luminosos é dada pela equação

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r}{r - r_s},$$

cuja solução é

$$t = \pm \int \frac{r dr}{r - r_s} = \pm [r + r_s \ln |r - r_s|] + \text{const.} \quad (1.43)$$

Como a região tipo-tempo é definida por  $d\tau^2 > 0$ , obtemos a condição

$$(r - r_s) \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 > \frac{r^2}{r - r_s}, \quad (1.44)$$

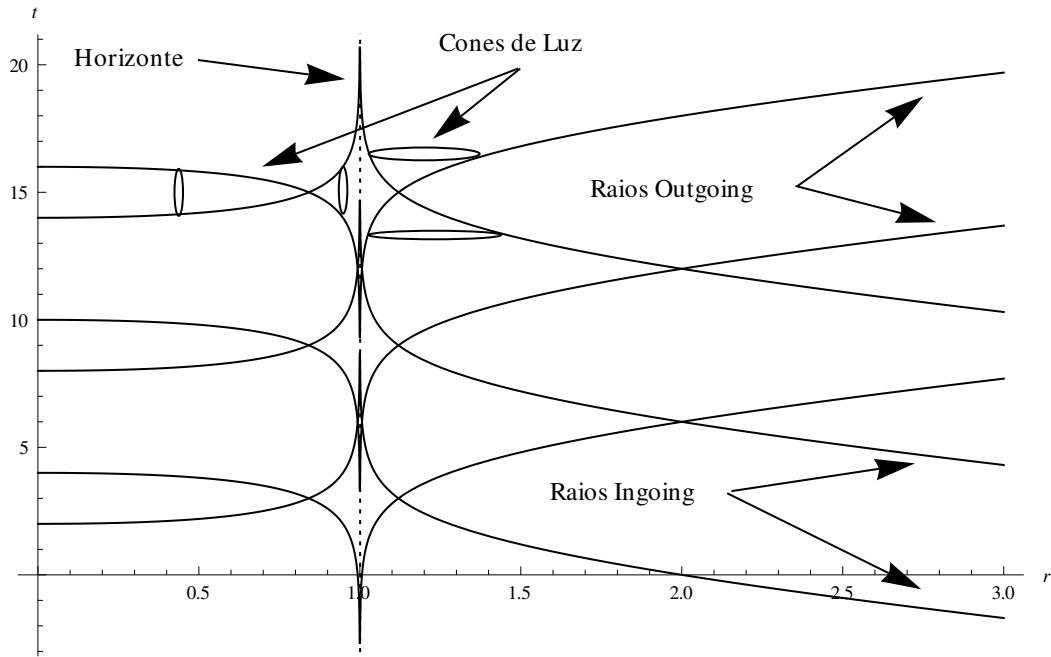


Figura 1: Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Schwarzschild. Neste diagrama fixamos  $r_s = 1$ .

cujas soluções são, para  $r > r_s$

$$t > r + r_s \ln |r - r_s| + \text{const.} \quad \text{ou} \quad t < -[r + r_s \ln |r - r_s|] + \text{const.}, \quad (1.45)$$

e para  $r < r_s$ , são

$$-[r + r_s \ln |r - r_s|] + \text{const.} < t < r + r_s \ln |r - r_s| + \text{const.} \quad (1.46)$$

Esse diagrama de espaço-tempo está representado na figura 1, com os cones de luz para indicar as regiões tipo tempo. Porém esse diagrama nos mostra algo aparentemente estranho, os raios de luz que caem no buraco negro (raios “ingoing”) ficam presos no horizonte de eventos, bem como toda matéria massiva, quando analisados em relação ao tempo de Schwarzschild. Mas essa resposta não está de acordo com a análise física, que indica que esses corpos devem continuar caindo até atingir o ponto  $r = 0$  (nessa aproximação). Por isso vamos estudar esse mesmo movimento do ponto de vista do tempo próprio da partícula em queda livre. Para obtermos uma relação entre  $d\tau$  e  $dt$  podemos utilizar a equação da trajetória (geodésica)

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.47)$$

que possui componente  $\lambda = 0$  igual a

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\
&= \frac{d^2 t}{d\tau^2} + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{d}{dr} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) + \frac{r_s}{(r - r_s)r} \frac{dt}{d\tau},
\end{aligned} \tag{1.48}$$

cuja solução é

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Cr}{r - r_s}, \tag{1.49}$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Consideraremos que no infinito espacial  $t$  seja igual a  $\tau$ , de modo que  $C = 1$ . Com essa relação podemos utilizar o intervalo de tempo próprio (1.42) para encontrarmos a equação

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{r_s/r}, \tag{1.50}$$

cuja solução “ingoing” é

$$\tau - \tau_0 = -\frac{2}{3\sqrt{r_s}} \left( r^{3/2} - r_0^{3/2} \right). \tag{1.51}$$

Esse resultado indica que um objeto em queda livre pode passar pelo horizonte e chegar ao centro do buraco negro em um tempo próprio finito <sup>4</sup>. Mas o mesmo não ocorre com o tempo definido na solução de Schwarzschild, claramente essas coordenadas são inapropriadas para descrever esse movimento, já que ele não cobre todo o espaço. Apesar do intervalo de tempo próprio (1.40) ser divergente para  $r = 0$  e  $r = r_s$  os escalares de curvatura não são. Um exemplo é o escalar de Ricci, que pode ser obtido através da equação de Einstein, que é

$$R = 8\pi GM\delta(r), \tag{1.54}$$

que só é singular em  $r = 0$ . A singularidade da origem é uma singularidade essencial, enquanto que a de  $r = r_s$  é uma singularidade removível, ou seja, pode ser removida através de uma escolha conveniente do sistema de coordenadas. Para removermos essa singularidade vamos introduzir as coordenadas de Eddington-Finkelstein para  $r > r_s$ ,

<sup>4</sup>Surpreendentemente é o mesmo resultado clássico, já que por conservação da energia mecânica clássica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}, \tag{1.52}$$

com a condição de contorno  $E_\infty = 0$ , obtemos a equação

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \tag{1.53}$$

que está de acordo com (1.50) no limite clássico.



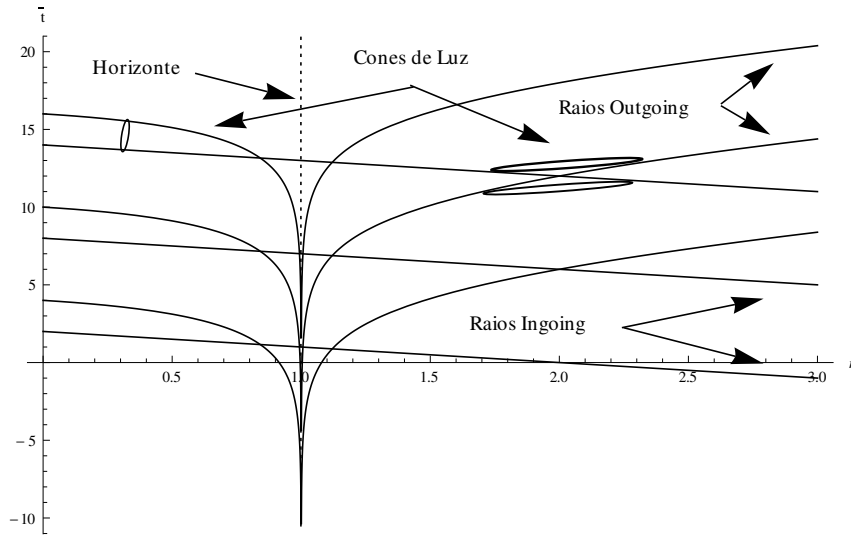


Figura 2: Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Neste diagrama fixamos  $r_s = 1$ .

definidas pela transformação

$$t = \bar{t} - r_s \ln(r - r_s). \quad (1.55)$$

Essa transformação é introduzida para tornar a equação dos raios “ingoing”, (1.43) com sinal negativo, numa reta

$$\bar{t} = -r + \text{const.} \quad (1.56)$$

Como consequência a equação dos raios “outgoing”, (1.43) com o sinal positivo, se transforma em

$$\bar{t} = r + 2r_s \ln(r - r_s) + \text{const.} \quad (1.57)$$

Nessas coordenadas o elemento de linha pode ser escrito da forma

$$ds^2 = -\frac{r - r_s}{r} d\bar{t}^2 + \frac{2r_s}{r} d\bar{t}dr + \frac{r + r_s}{r} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.58)$$

Podemos observar que a métrica acima não possui singularidades em  $r = r_s$ , de modo que podemos fazer uma extensão analítica da validade dessa solução para cobrir todo o espaço. O diagrama de espaço-tempo nessas coordenadas está representado na figura 2. Note que em  $r = r_s$  os fótons ”outgoing” ficam presos. Em um gráfico com as coordenadas suprimidas,  $\theta$  e  $\phi$ , veríamos que eles ficam girando confinados em  $r = r_s$ . Essa solução admite que o vácuo da teoria gravitacional é o espaço-tempo de Minkowski, mas o mesmo não acontece para as equações de Einstein modificadas. Veremos na próxima seção como a introdução da constante cosmológica altera esse problema.

## 1.4 O Problema de Kottler

O problema de Kottler é idêntico ao de Schwarzschild, mas em um espaço com constante cosmológica. Para esse problema devemos utilizar a equação de campo de Einstein modificada

$$G_{\nu}^{\mu} + \Lambda \delta_{\nu}^{\mu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu}, \quad (1.59)$$

com o mesmo tensor momento-energia do problema anterior, (1.31). Utilizando o tensor de Einstein encontrado acima para a simetria do problema, temos o conjunto de equações componentes

$$-\frac{1}{r^2} (1 - B^{-1}) - \frac{B'}{B^2 r} + \Lambda = -\frac{2GM}{r^2} \delta(r), \quad (1.60)$$

$$-\frac{1}{r^2} (1 - B^{-1}) + \frac{A'}{ABr} + \Lambda = 0, \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4A} \left[ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{2\dot{B}}{B} \right] + \frac{1}{2Br} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \\ & + \frac{1}{4B} \left[ \frac{2A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} - \frac{A'B'}{AB} \right] + \Lambda = 0, \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\frac{\dot{B}}{B^2 r} = 0. \quad (1.63)$$

Novamente a última equação garante que a solução  $B$  é estática, concordando com o teorema de Birkhoff. Novamente a primeira equação só depende de  $B$ , da mesma forma que fizemos para o caso anterior podemos resolvê-la reescrevendo-a da forma

$$\left[ r (1 - B^{-1}) \right]' = -2GM\delta(r) + r^2 \Lambda. \quad (1.64)$$

Integrando a expressão acima, obtemos, para  $r \neq 0$ , que

$$B^{-1} = 1 - \frac{C}{r} - \lambda r^2$$

onde  $\lambda \equiv \Lambda/3$  e  $C$  é uma constante de integração. Comparando com a solução de Schwarzschild concluímos que  $C = 2GM$ , de modo que a solução radial do problema de Kottler é

$$B^{-1} = 1 - \frac{2GM}{r} - \lambda r^2. \quad (1.65)$$

Com esse resultado podemos encontrar a solução temporal subtraindo (1.61) de (1.60)

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = \frac{2GM}{r} B \delta(r). \quad (1.66)$$

Novamente, para  $r \neq 0$ , obtemos

$$A = f(t)B^{-1} = f(t) \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \lambda r^2 \right). \quad (1.67)$$

A função  $f(t)$  pode ser absorvida redefinindo a coordenada temporal de modo que a métrica toma a forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \lambda r^2 \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.68)$$

Analogamente à solução de Schwarzschild a solução de Kottler também pode possuir horizontes. Neste caso os horizontes serão as raízes da equação algébrica

$$-\lambda r^3 + r - 2GM = 0. \quad (1.69)$$

Se  $\Lambda > 0$  teremos dois horizontes, um que é o de Schwarzschild corrigido pela constante cosmológica e o outro é o horizonte de de Sitter corrigido devido a massa. No caso  $\Lambda < 0$  teremos somente um horizonte correspondente ao horizonte de Schwarzschild. Calculando o escalar de Ricci através da equação de Einstein obtemos o invariante geométrico

$$R = 8\pi GM\delta(r) - 4\Lambda. \quad (1.70)$$

Da mesma forma que na solução sem constante cosmológica a única singularidade essencial é a  $r = 0$ , de modo que as outras podem ser evitadas através de uma escolha conveniente do sistema de coordenadas. Na verdade a métrica (1.68) apresenta uma singularidade devido ao sistema de coordenadas que utilizamos não cobrir todo o espaço, da mesma forma que a de Schwarzschild.

## 1.5 O Problema de Reissner-Nordstrøm

O problema de Reissner-Nordstrøm consiste em obter o tensor métrico para um corpo estático, esféricamente simétrico e eletricamente carregado. Apesar desse problema não ser de interesse para o presente trabalho, já que um modelo de branas carregadas não é consistente com o nosso universo, apresentamos ele por generalidade e para servir como fonte para outros estudantes. Com o campo elétrico deve ser radial (devido a simetria) as componentes do tensor intensidade de campo eletromagnético não nulos, neste caso, são

$$F^{\mu\nu} = E_r (\delta_0^\mu \delta_1^\nu - \delta_1^\mu \delta_0^\nu). \quad (1.71)$$

Devido a métrica (1.9) podemos escrever os termos mistos e co-variantes da forma

$$F_{\lambda}^{\nu} \equiv g_{\mu\lambda}F^{\mu\nu} = E_r \left( A\delta_{\lambda}^0\delta_1^{\nu} + B\delta_{\lambda}^1\delta_0^{\nu} \right) \quad (1.72)$$

$$F_{\lambda\sigma} \equiv g_{\sigma\nu}F_{\lambda}^{\nu} = ABE_r \left( \delta_{\lambda}^0\delta_{\sigma}^1 - \delta_{\lambda}^1\delta_{\sigma}^0 \right). \quad (1.73)$$

Para calcular a curvatura gerada por esse campo elétrico temos que calcular o tensor momento-energia, definido por

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{\mu} &\equiv F_{\lambda}^{\mu}F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4}\delta_{\nu}^{\mu}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma} \\ &= E_r^2 \left( A\delta_{\lambda}^0\delta_1^{\mu} + B\delta_{\lambda}^1\delta_0^{\mu} \right) \left( A\delta_{\nu}^0\delta_1^{\lambda} + B\delta_{\nu}^1\delta_0^{\lambda} \right) - \\ &\quad - \frac{ABE_r^2}{4}\delta_{\nu}^{\mu} \left( \delta_{\sigma}^1\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\sigma}^0\delta_{\lambda}^1 \right) \left( \delta_0^{\lambda}\delta_1^{\sigma} - \delta_1^{\lambda}\delta_0^{\sigma} \right) \\ &= \frac{ABE_r^2}{2} \left( 2\delta_{\nu}^1\delta_1^{\mu} + 2\delta_{\nu}^0\delta_0^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu} \right). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Munidos do tensor momento-energia podemos escrever as componentes não nulas da equação de Einstein, que são

$$-\frac{1}{r^2} \left( 1 - B^{-1} \right) - \frac{B'}{B^2 r} = 4\pi G A B E_r^2 - \frac{2GM}{r^2} \delta(r), \quad (1.75)$$

$$-\frac{1}{r^2} \left( 1 - B^{-1} \right) + \frac{A'}{A B r} = 4\pi G A B E_r^2, \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4A} \left[ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{2\ddot{B}}{B} \right] + \frac{1}{2Br} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \\ &+ \frac{1}{4B} \left[ \frac{2A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} - \frac{A'B'}{AB} \right] = -4\pi G A B E_r^2, \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\frac{\dot{B}}{B^2 r} = 0. \quad (1.78)$$

Da mesma forma que nos casos anteriores, o fato de não haver fluxo de energia força que a métrica seja estática. Porém, diferente dos caso anteriores, a primeira equação, (1.75), não depende somente de  $B$ . Para solucionar esse conjunto de equações vamos fazer (1.76)–(1.75) para obter, para  $r \neq 0$ , que

$$A(r)B(r) = \text{Const.} = 1, \quad (1.79)$$

onde tomamos o valor da constante igual a unidade devido as soluções anteriores. Com a relação acima podemos solucionar a equação (1.75), cuja solução, tomando o mesmo procedimento dos casos anteriores, é

$$B^{-1} = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{4\pi G}{r} \int^r E_r^2(u)u^2 du. \quad (1.80)$$

Para conhecermos completamente a solução temos que saber qual é o campo elétrico gerado por uma distribuição esfericamente simétrica de carga. A resposta pode parecer óbvia, mas não é. Em um espaço plano esse campo é o campo de Coulomb,

$$E_r(r) = \frac{Q}{r^2}, \quad (1.81)$$

mas não sabemos se nesse espaço curvo o campo é o mesmo. Para sabermos temos que solucionar as equações de Maxwell acopladas as equações de Einstein. Neste momento usarei esse campo para obter a métrica, deixando para o apêndice C a prova que o eletromagnetismo não sofre alteração em um espaço-tempo com essas simetrias. Assumindo que o campo (1.81) está correto podemos obter a solução radial

$$B^{-1} = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{4\pi GQ^2}{r^2}, \quad (1.82)$$

e, como sabemos a solução temporal a partir de (1.79), podemos escrever a métrica da forma

$$d\tau^2 = \frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{(r - r_-)(r - r_+)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.83)$$

onde

$$r_{\pm} \equiv (r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 16\pi GQ^2})/2. \quad (1.84)$$

O horizonte externo,  $r_+$ , é o horizonte de eventos, enquanto o horizonte interno,  $r_-$ , é conhecido como horizonte de Cauchy. Consideraremos, a partir de agora, o caso em que  $r_s^2 \geq 16\pi GQ^2$ , que é o caso de maior interesse. Se essa condição não for satisfeita a métrica será regular em todos os pontos, não possuindo horizontes.

## Diagramas de Espaço-tempo

Faremos o mesmo estudo que foi feito na solução de Schwarzschild, através dos diagramas de espaço-tempo. Para determinarmos os cones de luz iremos considerar o movimento radial de partículas sem massa ( $ds = 0$ ). Nessas condições encontramos a equação de movimento

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^2}{(r - r_-)(r - r_+)}, \quad (1.85)$$

cuja solução é

$$t = \pm \left[ r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| \right] + \text{const.} \quad (1.86)$$

Para sabermos onde estão as regiões tipo-tempo temos que fazer  $ds^2 < 0$ . Essa condição nos fornece as regiões

$$\begin{aligned} t &> r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| + \text{const.} \quad \text{ou} \\ t &< -r - \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| + \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| + \text{const.}, \end{aligned}$$

para  $r < r_-$  ou  $r > r_+$ , e

$$\begin{aligned} t &> -r - \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| + \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| + \text{const.} \quad \text{ou} \\ t &< \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| + \text{const.}, \end{aligned}$$

para  $r_- < r < r_+$ . O diagrama de espaço-tempo referente está representado na figura 3. Da mesma forma que nas soluções anteriores os invariantes geométricos não indicam nenhuma singularidade nesses horizontes, indicando que o problema está nas coordenadas utilizadas. A fim de remover essas divergências vamos definir coordenadas do tipo Eddington-Finkelstein pela transformação

$$t = \bar{t} - \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| + \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| \quad (1.87)$$

para  $r > r_+$ . Novamente essa transformação tem como objetivo transformar a equação dos raios "ingoing" (equação (1.86) com o sinal negativo) na reta

$$\bar{t} = -r + \text{const.} \quad (1.88)$$

Nessas coordenadas os raios "outgoing" (equação (1.86) com o sinal positivo) seguem a trajetória descrita por

$$\bar{t} = r + \frac{2r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| - \frac{2r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| + \text{const.} \quad (1.89)$$

O elemento invariante de linha pode ser escrito nessas coordenadas na forma

$$d\tau^2 = (1 - f)d\bar{t}^2 - 2fr^2d\bar{t}dr - (1 + f)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.90)$$

onde, por conveniência, foi definido

$$f \equiv \frac{r_s}{r} - 4\pi G \frac{Q^2}{r^2}. \quad (1.91)$$

Novamente podemos observar que o elemento de linha acima não possui singularidades em  $r_+$  ou  $r_-$ , de modo que podemos fazer um extensão analítica dessas coordenadas para

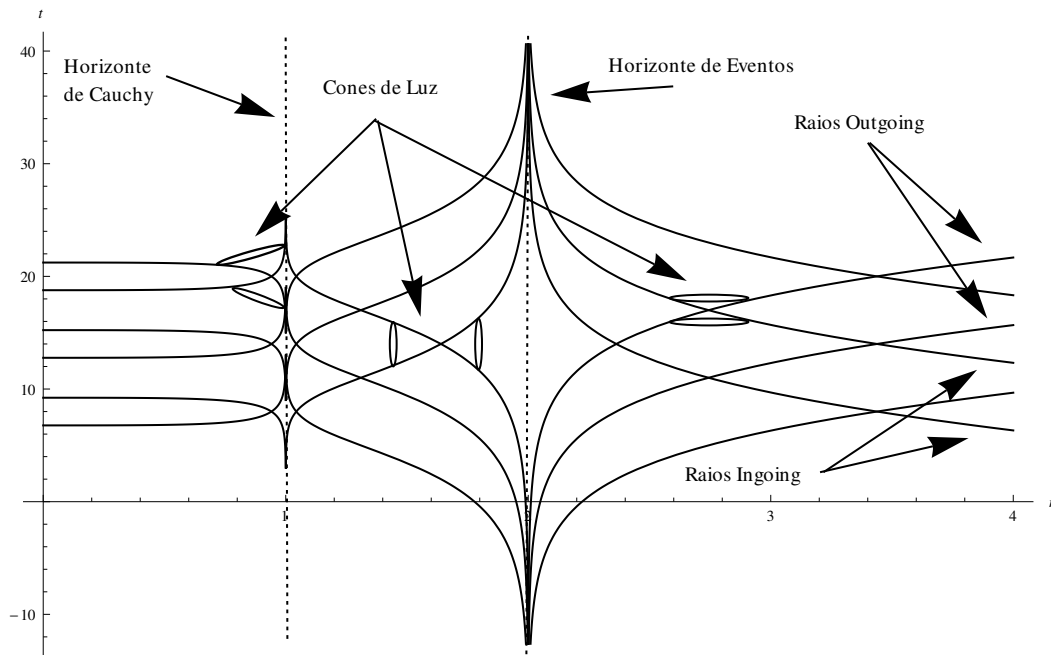


Figura 3: Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Reissner-Nordström. Neste diagrama fixamos  $r_- = 1$  e  $r_+ = 2$ .

descrever todo o espaço-tempo, da mesma forma que foi feito no caso de Schwarzschild. O diagrama de espaço-tempo nessas coordenadas está representado na figura 4. Pelo diagrama observamos que nenhum sinal pode escapar da região II (intermediária) para a região I (externa) pois os cones de luz na região II estão inclinados para a singularidade  $r = 0$ . Os raios emitidos exatamente em  $r = r_+$  ficam presos da mesma forma que no raio de Schwarzschild. Uma partícula na região II irá necessariamente cruzar a fronteira  $r = r_-$ , ou o fará assintoticamente. Na região III (interna) a partícula não necessariamente irá cair até  $r = 0$ , porém não conseguirá voltar para a região II.

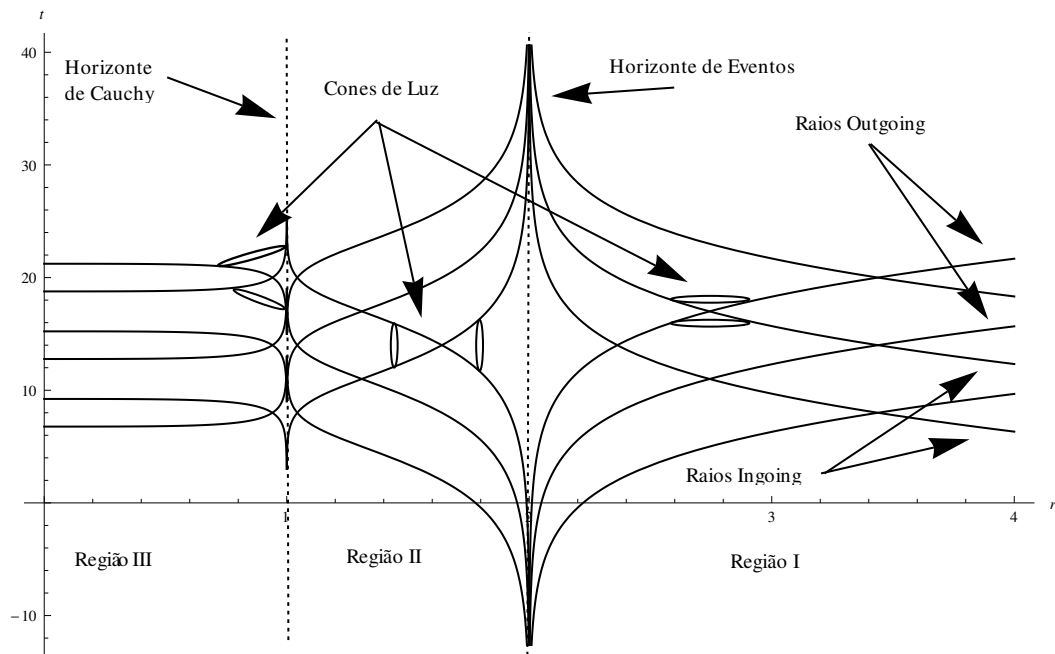


Figura 4: Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Reissner-Nordstrøm nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Neste diagrama fixamos  $r_- = 1$  e  $r_+ = 2$ .



## 2 INTRODUÇÃO À FÍSICA DE DIMENSÕES EXTRAS

Quando se fala em dimensões extras as primeiras perguntas que veem a mente são: porque mais dimensões? E onde estão?

### Porquê?

Na teoria da relatividade geral a gravidade é geométrica e por isso é sensível ao número e a forma das dimensões. Devido a essa propriedade a inclusão de dimensões extras se tornou um método para a solução dos problemas relacionados a gravitação. Diversos modelos foram propostos para a solução de diferentes problemas e comentaremos sobre os mais proeminentes a seguir. Outra motivação se deve a teoria das cordas/teoria-M que só é consistente em 11 dimensões. Para essa teoria as dimensões extras devem existir, mas não podem ser detectadas pelos experimentos até então realizados. Isso nos leva a segunda pergunta.

### Onde?

Os diversos modelos de dimensões extras indicam diferentes caminhos para essa resposta. As teorias com dimensões extras compactas alegam que essas dimensões são muito pequenas para terem influência experimental, dentre elas a teoria das cordas/teoria-M. Esses modelos indicam que somente experimentos de altas energias (da ordem da energia de Planck  $\sim 10^{19} GeV$ ) seriam capazes de detectar essas dimensões, enquanto que os experimentos cotidianos não teriam resolução suficiente (uma figura muito utilizada é a de uma corda, que vista de longe parece unidimensional, mas quando analisada de uma distância menor revela toda a sua estrutura). Já os modelos com dimensões extras não-compactas alegam que essas dimensões são curvas (não confunda curva com compacta) e que essa curvatura acaba aprisionando os campos usuais nas dimensões conhecidas (já que os campos não podem ficar confinados à brana devido o princípio de incerteza de Heisenberg). Esses modelos exigem o estudo da localização dos campos sobre as dimensões usuais (brana) e tem sido o alvo de inúmeras linhas de pesquisa, já que o princípio da incerteza proíbe que esses campos esteja "presos" à brana. Nesse contexto não veríamos as outras dimensões

porque a luz não se propaga para elas (usamos o exemplo da luz mas o mesmo deve acontecer com todas as interações).

Farei uma breve introdução aos mais proeminentes modelos com dimensões extras e que problemas eles buscavam resolver.

## 2.1 Modelo de Kaluza-Klein

O modelo proposto por Theodor Kaluza e Oskar Klein [8, 9] utiliza as dimensões extras para tentar realizar o sonho de muitos físicos teóricos (inclusive o de Einstein, que passou os últimos 30 anos de sua vida dedicado ao problema) que é o de unificar o eletromagnetismo e a gravitação. A teoria da gravitação de Einstein descreve a gravidade por um tensor simétrico de ordem 2 (a métrica), o que lhe confere  $D(D + 1)/2$  graus de liberdade em um espaço-tempo  $D$ -dimensional. Já o eletromagnetismo é completamente determinado, devido a simetria de "gauge", por um campo vetorial, o que lhe confere  $D$  graus de liberdade. Dessa forma os autores perceberam que se partissem de uma teoria  $D$ -dimensional somente com gravidade poderiam obter uma teoria  $(D - 1)$ -dimensional que possuísse gravidade e eletromagnetismo. A conta dos graus de liberdade é

$$\text{Grav. em } D \text{ dimensões} \\ \overbrace{D(D + 1)/2} = \quad (2.1)$$

$$\text{Grav. em } D - 1 \text{ dimensões} \quad \text{Eletro. em } D - 1 \text{ dimensões} \\ \overbrace{D(D - 1)/2} + \overbrace{(D - 1)} + 1. \quad (2.2)$$

A conta acima nos mostra que sobrou um grau de liberdade que está associado a um campo escalar. Porém quando foi feita a redução dimensional, através da compactificação das dimensões extras, esse campo escalar acabou se acoplando ao eletromagnetismo de forma a não realizar completamente a unificação desejada. Esse campo escalar dinâmico que se acopla com o campo eletromagnético recebe o nome de dilatón, e a tentativa de eliminá-lo não se mostrou consistente com as equações de Maxwell.

## 2.2 Modelo de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD)

Apesar da formulação de Einstein ser totalmente diferente da newtoniana elas indicam a mesma intensidade para a interação gravitacional, já que a constante de acoplamento é a mesma (a constante gravitacional de Newton,  $G$ ). Dessa forma a gravidade continuava

a ser dezenas de ordens de grandeza mais fraca que o eletromagnetismo. Essa grande diferença fornece dois níveis distintos de energia, enquanto o eletromagnetismo está no nível eletrofraco,  $\sim 10^3 GeV$ , a gravidade se encontra no nível de Planck,  $\sim 10^{18} GeV$ . A falta de uma explicação para essa diferença intrigou os físicos e motivou pesquisas na direção de entendê-la. Esse problema ficou conhecido como problema da hierarquia e foi o problema abordado por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali em seu modelo [31, 32]. Como a gravidade é geométrica esse autores fizeram uso de dimensões extras compactas para argumentar que a gravidade parece fraca pois está diluída nas demais dimensões. Utilizando o teorema de Gauss eles concluíram que, se acrescentarmos  $n$  dimensões extras com raio de compactificação  $R$ , o potencial gravitacional teria o comportamento

$$V(r) = \frac{G_D m_1 m_2}{r^{n+1}}, \quad \text{para } r \ll R, \quad (2.3)$$

pois nessa escala o comportamento é de  $D = 4 + n$  dimensões planas e

$$V(r) = \frac{G_D}{R^n} \frac{m_1 m_2}{r}, \quad \text{para } r \gg R, \quad (2.4)$$

pois nessa escala as dimensões extras já estão saturadas e a gravidade cai somente com relação as dimensões distendidas. Como podemos observar, o efeito dessas dimensões extras em larga escala é o enfraquecimento da constante da acoplamento gravitacional, gerando uma constante efetiva  $G_4 = G_D/R^n$ . Esse modelo soluciona o problema da hierarquia assumindo que a gravidade em  $D$  dimensões está na escala eletrofraca, enquanto que a gravidade efetiva em 4 dimensões se encontra na escala de Planck. No caso  $n = 1$ , para igualar essas escalas é necessário que  $R \sim 10^{13} cm$ , o que está em desacordo com os experimentos, pois a gravidade deveria ter o comportamento (2.3) em situações cotidianas, porém para  $n \geq 2$  os experimentos não são capazes de descartar essa possibilidade ( por exemplo, para  $n = 2$  o raio de compactificação deveria ser de  $R \sim 10^{-1} mm$ ).

## 2.3 Modelo de Randall-Sundrum

Baseados nos modelos descritos acima, Lisa Randall e Raman Sundrum propuseram, inicialmente, um modelo de universo-brana plano com uma dimensão extra compacta, para solucionar o problema da hierarquia [11]. Como esse cenário se tornou o modelo padrão de dimensões extras e de branas planas seremos um pouco mais extenso nesse modelo. Para descrever esse cenário eles utilizaram um "ansatz" para a métrica na forma

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad (2.5)$$

onde  $\sigma(\phi)$  é uma função da coordenada da dimensão extra, que varia de  $-\pi$  a  $\pi$ , e  $r_c$  indica o tamanho da dimensão extra. Como o espaço-tempo usual não possui 5 dimensões os autores do referido trabalho precisavam estabelecer as condições de contorno da dimensão extra, para isso eles fizeram a identificação  $(x^\mu, \phi) \rightarrow (x^\mu, -\phi)$ , de modo que, mesmo a variável  $\phi$  indo de  $-\pi$  a  $\pi$ , a métrica é completamente determinada pela região  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Nos pontos fixos  $0, \pi$  eles assumiram a existência de duas 3-branas planas, de modo que a densidade de energia é dada por

$$T_0^0 = -\frac{1}{r_c} [\rho_0 \delta(\phi) + \rho_\pi \delta(\phi - \pi)], \quad (2.6)$$

onde  $\rho$  representa a densidade de energia sobre as branas. Nesse modelo a brana visível (a que habitamos) está situada em  $\phi = \pi$ . Neste modelo os autores assumiram que as branas não possuem tensões na dimensão extra, de modo que  $T_4^4 = 0$ . Para encontrarmos a função  $\sigma(\phi)$  temos que utilizar a equação de Einstein para a distribuição de energia acima. Como há apenas uma função a ser determinada na métrica necessitamos apenas da distribuição de energia, enquanto que as demais componentes do tensor momento-energia serão completamente determinadas pela métrica e pelas simetrias impostas. Para isso temos que realizar o mesmo procedimento que utilizamos no capítulo anterior, ou seja, calcular a conexão afim

$$\Gamma_{MN}^L = \frac{1}{2} g^{LR} [g_{RM,N} + g_{RN,M} - g_{MN,R}], \quad (2.7)$$

que possui as componentes não nulas

$$\Gamma_{\mu\nu}^4 = \sigma' g_{\mu\nu} r_c^{-2}, \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{4\nu}^\mu = -\delta_\nu^\mu \sigma', \quad (2.9)$$

onde a linha indica derivação com relação ao argumento  $\phi$ . Em seguida temos que calcular o tensor de Ricci

$$R_{MN} = \Gamma_{MN,L}^L - \Gamma_{ML,N}^L + \Gamma_{MN}^R \Gamma_{LR}^L - \Gamma_{ML}^R \Gamma_{NR}^L, \quad (2.10)$$

cujas componentes não nulas são

$$R_4^4 = 4(\sigma'' - \sigma'^2) r_c^{-2} \quad (2.11)$$

$$R_\mu^\nu = (\sigma'' - 4\sigma'^2) r_c^{-2} \delta_\mu^\nu, \quad (2.12)$$

o que nos fornece um valor para o escalar de Ricci de

$$R = g^{MN} R_{MN} = g^{44} R_{44} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2 \left( 4\sigma'' - 10\sigma'^2 \right) r_c^{-2}. \quad (2.13)$$

Finalmente podemos calcular o tensor de Einstein

$$G_N^M = R_N^M - \frac{1}{2} R \delta_N^M, \quad (2.14)$$

que possui as componentes não nulas

$$G_4^4 = 6\sigma'^2 r_c^{-2} \quad (2.15)$$

$$G_\mu^\nu = - \left( 3\sigma'' - 6\sigma'^2 \right) r_c^{-2} \delta_\mu^\nu. \quad (2.16)$$

Munidos desse tensor podemos utilizar a equação de Einstein em 5 dimensões com constante cosmológica,

$$G_N^M + \Lambda \delta_N^M = 6\pi^2 G_5 T_N^M, \quad (2.17)$$

para obtermos as equações componentes

$$6\sigma'^2 r_c^{-2} + \Lambda = 0 \quad (2.18)$$

$$\left[ -3\sigma'' r_c^{-2} + 6\sigma'^2 r_c^{-2} + \Lambda \right] \delta_\nu^\mu = 6\pi^2 G_5 T_\nu^\mu. \quad (2.19)$$

A primeira equação acima nos fornece a solução

$$\sigma(\phi) = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{6}}, \quad (2.20)$$

onde o módulo aparece devido a simetria imposta  $\phi \rightarrow -\phi$ .<sup>1</sup> Lembrando que a métrica deve ser periódica em relação a variável  $\phi$  obtemos que

$$\sigma'' = 2r_c \sqrt{\frac{-\Lambda}{6}} [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)], \quad (2.22)$$

de modo que a equação (2.19) nos fornece o tensor momento energia das branas

$$T_\nu^\mu = -\frac{k}{\pi^2 G_5 r_c} [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)] \delta_\nu^\mu, \quad (2.23)$$

---

<sup>1</sup>O leitor poderá perceber que a função

$$\sigma(\phi) = -r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{6}}, \quad (2.21)$$

também é solução da equação de Einstein, porém ela não constitui uma solução para o problema da hierarquia, por isso não foi considerado pelos autores do referido trabalho.

onde  $k = \sqrt{-\Lambda/6}$ . Para que a densidade de energia das branas sejam reais devemos impor que  $\Lambda < 0$ , ou seja, que o “bulk” seja anti-de Sitter. Dessa forma obtemos o elemento de linha

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (2.24)$$

Comparando a solução (2.23) com a densidade de energia das branas (2.6) obtemos

$$\rho_0 = -\rho_\pi = \frac{k}{\pi^2 G_5}, \quad (2.25)$$

e conseqüentemente as pressões tangenciais as branas

$$p_0 = -p_\pi = -\frac{k}{\pi^2 G_5}. \quad (2.26)$$

É interessante observarmos que as branas possuem equações de estado do tipo constante cosmológica ( $p = -\rho$ ).<sup>2</sup> Para limitarmos os parâmetros livres da teoria e entendermos como esse modelo é capaz de solucionar o problema da hierarquia vamos analisar o comportamento da interação gravitacional sobre a brana visível,  $\phi = \pi$ . Para isso vamos permitir uma flutuação da métrica sobre a brana na forma

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)] dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (2.27)$$

Se considerarmos essa flutuação pequena,  $|h| \ll 1$ , podemos utilizar a aproximação linear da relatividade geral, de modo que o tensor de Einstein 5-dimensional, (2.14), pode ser decomposto na forma

$$\bar{G}_N^M = G_N^M + e^{-2kr_c|\phi|} \tilde{G}_\nu^\mu \delta_\mu^M \delta_N^\nu, \quad (2.28)$$

onde  $\bar{G}_N^M$  é o tensor de Einstein formado pela métrica perturbada (2.27),  $G_N^M$  pela métrica não perturbada (2.24) e  $\tilde{G}_\nu^\mu$  pela métrica  $h_{\mu\nu}$ . Essa perturbação na métrica é gerada por uma modificação no tensor momento-energia, que escreveremos da forma

$$\bar{T}_N^M = T_N^M + \tilde{T}_\nu^\mu \delta_\mu^M \delta_N^\nu \frac{\delta(\phi - \pi)}{r_c}, \quad (2.29)$$

onde a notação é semelhante a usada acima e a delta de Dirac indica que a perturbação é feita sobre a brana visível. Dessa forma a equação de Einstein 5-dimensional toma a forma

$$G_N^M + e^{-2kr_c|\phi|} \tilde{G}_\nu^\mu \delta_\mu^M \delta_N^\nu + \Lambda \delta_N^M = 6\pi^2 G_5 \left[ T_N^M + \tilde{T}_\nu^\mu \delta_\mu^M \delta_N^\nu \frac{\delta(\phi - \pi)}{r_c} \right]. \quad (2.30)$$

---

<sup>2</sup>O fato da brana visível ter densidade de energia negativa é um ponto desfavorável ao modelo, o que não ocorreria se tivéssemos tomado a solução (2.21). Mas como o objetivo é solucionar o problema de hierarquia esse aspecto foi deixado de lado nesse primeiro modelo, sendo corrigido somente em um segundo trabalho [10].

Usando a equação de Einstein não perturbada (2.17), obtemos

$$e^{-2kr_c|\phi|} \tilde{G}_\nu^\mu \delta_\mu^M \delta_N^\nu = 6\pi^2 G_5 \tilde{T}_\nu^\mu \delta_\mu^M \delta_N^\nu \frac{\delta(\phi - \pi)}{r_c}. \quad (2.31)$$

Integrando a equação acima sobre toda a variável  $\phi$  obtemos a equação de Einstein efetiva sobre a brana

$$\tilde{G}_\nu^\mu = \frac{6\pi^2 k G_5}{(1 - e^{-2kr_c\pi})} \tilde{T}_\nu^\mu. \quad (2.32)$$

Comparando com a equação de Einstein em quatro dimensões encontramos a relação entre as constantes de acoplamento gravitacional

$$G_4 = \frac{3\pi k}{4(1 - e^{-2kr_c\pi})} G_5. \quad (2.33)$$

Percebemos que, no regime de  $kr_c$  muito grande, o acoplamento gravitacional efetivo depende fracamente do tamanho da dimensão extra, de modo que esse modelo não altera significativamente o valor de energia da gravitação (escala de Planck). Então para resolvermos o problema da hierarquia devemos verificar como esse cenário altera a escala eletrofraca, para isso vamos ver como ele modifica o mecanismo de Higgs. A ação para o campo de Higgs na brana é

$$S_H \sim \int d^4x \sqrt{-g_{brana}} \left[ g_{brana}^{\mu\nu} (H^\dagger)_{;\mu} H_{;\nu} - \lambda (|H|^2 - \nu_0^2)^2 \right] \quad (2.34)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-4kr_c\pi} \left[ e^{2kr_c\pi} \tilde{g}^{\mu\nu} (H^\dagger)_{;\mu} H_{;\nu} - \lambda (|H|^2 - \nu_0^2)^2 \right], \quad (2.35)$$

onde  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ . Renormalizando o campo de Higgs  $H \rightarrow e^{kr_c\pi} H$  obtemos a ação

$$S_H \sim \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \tilde{g}^{\mu\nu} (H^\dagger)_{;\mu} H_{;\nu} - \lambda (|H|^2 - e^{-2kr_c\pi} \nu_0^2)^2 \right]. \quad (2.36)$$

A ação acima nos mostra a influência da dimensão extra na escala da quebra da simetria eletrofraca, já que a energia efetiva do campo de Higgs é

$$\nu = e^{-kr_c\pi} \nu_0, \quad (2.37)$$

onde  $\nu_0$  é a escala de energia da teoria fundamental. Como o campo de Higgs gera massa para todas as partículas, qualquer parâmetro de massa  $m_0$  corresponderá a um valor de massa física de

$$m = e^{-kr_c\pi} m_0. \quad (2.38)$$

Como vimos esse modelo não altera significativamente a escala de Planck mas o mesmo não ocorre com a escala eletrofraca na brana. Dessa forma podemos solucionar o problema da hierarquia através da fixação do valor de  $kr_c$ , de modo a tornar essas escalas idênticas.

Para que esse modelo produza uma massa física da ordem da escala eletrofraca a partir da escala de Planck é necessário que  $e^{-kr_c\pi} = 10^{-15}$ , ou seja,  $kr_c \approx 10$ .

Observando os resultados obtidos no primeiro trabalho, Lisa Randall e Raman Sundrum perceberam, principalmente devido o resultado (2.33), que poderiam construir um modelo com dimensão extra não compacta [10]. Esse modelo ficou conhecido com modelo de Randall-Sundrum tipo II (RS2) ( em contraposição ao anterior, que ficou conhecido como tipo I, RS1) e é descrito pela métrica

$$ds^2 = e^{-2k|z|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2, \quad (2.39)$$

que é simplesmente a identificação  $r_c\phi \equiv z$ . Como esse espaço não é limitado não há a necessidade de uma segunda brana, de modo que neste modelo existe somente uma brana em  $z = 0$ , com a mesma densidade de energia que a do modelo anterior, (2.25) e (2.26). Dessa forma foi possível solucionar o problema da densidade de energia negativa na brana que habitamos (agora a brana situada na origem). Os autores mostraram que, devido a curvatura da dimensão extra, as flutuações da gravidade (grávitons) ficam presos a brana e o potencial gravitacional sofre uma correção da forma [33]

$$V(r) = \frac{G_4 m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right). \quad (2.40)$$

De modo que, fixando  $k$  grande, essa correção seria desprezível nas escalas já testadas <sup>3</sup>. Como esse modelo faz uso de uma dimensão extra não compacta diversos trabalhos foram realizado para localizar os campos sobre as branas nesse cenário, bem como nos cenários derivados desse.

Apesar dos modelos acima descritos terem introduzido a idéia de dimensões extras e demonstrado a força dessa proposta na solução dos problemas abordados, a simplicidade da geometria das branas planas não é capaz de iluminar os problemas cosmológicos. Esses problemas estão relacionados com a dinâmica global do universo, como o big bang singular e a expansão acelerada. Como as branas planas interagem com o "bulk" sempre da mesma forma, não apresentando uma evolução temporal, os modelos mais simples não podem abordar problemas dinâmicos <sup>4</sup>. Por isso vamos, no próximo capítulo, desenvolver um modelo de branas esféricas que seja capaz de abordar tais problemas.

---

<sup>3</sup>Lembre-se que a gravidade é muito fraca, o que dificulta o teste em pequenas escalas. Como consequência a lei de potência da gravidade só foi testada até a ordem de centímetros. Há esperança que a nova geração de aceleradores, como o LHC, possam detectar alguma influência das dimensões extras, mas até o presente momento nenhuma evidência experimental foi obtida.

<sup>4</sup>Somente em cenários com branas planas dinâmicas esses problemas podem ser abordados.



### 3 A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO COSMOLÓGICO DE MÚLTIPLAS BRANAS ESFÉRICAS

Como mencionado no capítulo anterior os modelos de branas planas não são capazes de abordar os problemas relacionados a dinâmica global do universo, por isso vamos estudar o modelo de branas esféricas. Outra possibilidade compatível com o modelo padrão cosmológico seria um modelo de branas hiperbólicas (com curvatura constante negativa), mas nesta tese vamos nos concentrar na geometria esférica. Neste capítulo iremos construir um modelo de múltiplas  $(D - 2)$ -branas esféricas e concêntricas em um “bulk”  $D$ -dimensional com constante cosmológica. Para que esse modelo seja mais rico vamos introduzir diferentes constantes cosmológicas entre as branas, do modo a obtermos diferentes cenários que possam ser utilizados para descrever diferentes modelos cosmológicos, bem como fitar o dados observacionais. Os resultados desse capítulo foram publicados conforme a referência [34].

#### 3.1 Espaço-tempo Esfericamente Simétrico em $D$ Dimensões

Para conhecermos os efeitos gravitacionais de uma distribuição de matéria precisamos determinar a geometria do espaço-tempo. Para isso temos que conhecer as  $D(D + 1)/2$  componentes do tensor métrico solucionando a equação de Einstein. Porém podemos utilizar a simetria esférica para reduzir a somente duas componentes, dadas pelo elemento invariante de linha[15, 25],

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + B(r, t)dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (3.1)$$

$\Omega_{D-2}$  é o elemento de linha de uma esfera unitária de  $D - 2$  dimensões, definido por

$$d\Omega_{D-2}^2 = \left[ d\theta_0^2 + \sum_{n=1}^{D-3} d\theta_n \prod_{m=1}^n \text{sen}^2\theta_{m-1} \right], \quad (3.2)$$

sendo que  $0 \leq \theta_{D-3} < 2\pi$  e os demais ângulos variam de 0 até  $\pi$ .

As duas componentes desconhecidas da métrica,  $A(r, t)$  e  $B(r, t)$  deverão ser determinadas pela equação de Einstein em  $D$  dimensões

$$R_M^N - \frac{1}{2}R\delta_M^N + \Lambda\delta_M^N = \kappa_D T_M^N, \quad (3.3)$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica, que pode depender de  $r$ , e possivelmente de  $t$ . Aqui  $\kappa_D$  é a constante de acoplamento gravitacional em  $D$  dimensões. Devido a simetria do problema teremos somente quatro componentes independentes da equação de Einstein (3.3), que são

$$\kappa_D T_0^0 = -\frac{D-2}{2r^2} \left[ (D-3)(1-B^{-1}) + \frac{rB'}{B^2} \right] + \Lambda, \quad (3.4)$$

$$\kappa_D T_1^1 = -\frac{D-2}{2r^2} \left[ (D-3)(1-B^{-1}) - \frac{rA'}{AB} \right] + \Lambda, \quad (3.5)$$

$$\kappa_D T_0^1 = \frac{D-2}{2r} \frac{\dot{B}}{B^2}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \kappa_D T_2^2 = & \frac{1}{4A} \left[ \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{2\ddot{B}}{B} \right] + \frac{(D-3)(D-4)}{2Br^2} - \\ & - \frac{2(D-3)(D-4)}{r^2} + \frac{(D-3)}{2Br} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \\ & + \frac{1}{4B} \left[ \frac{2A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} - \frac{A'B'}{AB} \right] + \Lambda, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde a linha indica derivação com respeito a variável  $r$  e o ponto com respeito a  $t$ .

Podemos observar que se soubermos  $T_0^0$ ,  $T_1^1$  e  $\Lambda$  podemos, a partir de (3.4) e (3.5), determinar completamente a métrica com duas condições de contorno. Isso é decorrente do fato de termos duas equações diferenciais de primeira ordem. Nesse caso as equações restantes determinam o fluxo e energia  $T_0^1$  e as pressões tangenciais  $T_2^2$ . Para encontrarmos a solução exata precisamos especificar a forma do tensor momento-energia da matéria  $T_\nu^\mu$ , que usaremos.

## 3.2 Solução Geral para Branas Esféricas

O cenário cosmológico que vamos considerar é formado por  $n$   $(D-2)$ -branas esféricas concêntricas em um “bulk”  $D$  dimensional com diferentes constantes cosmológicas entre elas. Como dito anteriormente este trabalho é uma generalização do trabalho de Gogberashvili para  $n$  branas em  $D$  dimensões [15]. Para isso vamos fixar o tensor momento-energia e a constante cosmológica da forma

$$T_0^0(r, t) = - \sum_{i=1}^n \rho_i \delta(r - R_i), \quad T_1^1 = \sum_{i=1}^n P_i \delta(r - R_i), \quad (3.8)$$

e

$$\Lambda(r, t) = \frac{(D-1)(D-2)}{2} \sum_{i=0}^n \lambda_i [\theta(r - R_i) - \theta(r - R_{i+1})], \quad (3.9)$$

onde a dependência em  $t$  se deve exclusivamente aos raios das branas ( $R_i = R_i(t)$ ). A função degrau,  $\theta$ , foi definida de forma que  $\theta(0) = 1$ , para que a expressão acima cubra todo o espaço, incluindo o ponto  $r = 0$ . Como a constante cosmológica pode ser entendida como um fluido com equação de estado

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{\kappa_D}, \quad (3.10)$$

então podemos pensar que a diferença entre as constantes cosmológicas ocorre porque as branas encerram regiões com fluidos de diferentes densidades. Devido a fixação de  $T_0^0$  e  $\Lambda$  podemos calcular  $B(r, t)$  usando a equação (3.4) na forma

$$-\frac{2\kappa_D}{D-2} r^{D-2} T_0^0 = \left[ r^{D-3} (1 - B^{-1}) \right]' - \frac{2r^{D-2}}{D-2} \Lambda. \quad (3.11)$$

De acordo com a equação acima,  $B$  tem descontinuidade de primeira ordem (finita) nos pontos  $R = R_i$ , devido a descontinuidade de segunda ordem (infinita) de  $T_0^0$  ( $\Lambda$  só tem descontinuidade de primeira ordem, de modo que quando integrada essa descontinuidade desaparece). De modo que, na região  $R_i \leq r < R_{i+1}$ , podemos escrever  $B(r, t) = B_i(r)$ , já que nessa região  $B$  não depende de  $t$ . Como já dito, a dependência temporal ocorre na região onde a solução  $B_j$  é válida. Essa informação pode ser obtida a partir da equação (3.6), que garante que a solução é estática na região sem matéria. Esse é o conteúdo do teorema de Birkhoff [30]. Para obtermos as descontinuidades de  $B$  vamos integrar a equação (3.11) de  $R_j - \epsilon$  a  $R_j + \epsilon$  para obtermos

$$\frac{2R_j^{D-2}}{D-2} \kappa_D \rho_j = (R_j + \epsilon)^{D-3} \left[ 1 - B_j^{-1}(R_j + \epsilon) \right] - (R_j - \epsilon)^{D-3} \left[ 1 - B_{j-1}^{-1}(R_j - \epsilon) \right] -$$

$$-(D-1) \sum_{i=0}^n \int_{R_j-\epsilon}^{R_j+\epsilon} x^{D-2} \lambda_i [\theta(x-R_i) - \theta(x-R_{i+1})] dx. \quad (3.12)$$

Tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  a integral acima se anula pois o integrando tem descontinuidade de primeira ordem e o intervalo de integração se anula. Esse limite nos fornece a descontinuidade de  $B$  no ponto  $r = R_j$

$$B_j^{-1}(R_j) - B_{j-1}^{-1}(R_j) = -\frac{2\kappa_D}{D-2} \rho_j R_j. \quad (3.13)$$

Para conhecermos a solução em cada região vamos integrar (3.11) de  $R_j + \epsilon$  a  $r < R_{j+1}$ , onde  $B$  é contínuo. Dessa forma obtemos

$$0 = r^{D-3} [1 - B_j^{-1}(r)] - (R_j + \epsilon)^{D-3} [1 - B_j^{-1}(R_j + \epsilon)] - \lambda_j [r^{D-1} - (R_j + \epsilon)^{D-1}].$$

Tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e utilizando a descontinuidade (3.13) encontramos que

$$\begin{aligned} B_j^{-1}(r) &= 1 - \left(\frac{R_j}{r}\right)^{D-3} [1 - \lambda_j R_j^2 - B_j^{-1}(R_j)] - \lambda_j r^2 \\ &= 1 - \left(\frac{R_j}{r}\right)^{D-3} \left[1 - \lambda_j R_j^2 + \frac{2\kappa_D}{D-2} \rho_j R_j\right] - \\ &\quad - \left(\frac{R_j}{r}\right)^{D-3} B_{j-1}^{-1}(R_j) - \lambda_j r^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

utilizando a descontinuidade (3.13)  $j-1$  vezes, podemos escrever a solução  $B_j$  em termos de  $B_0$  da forma

$$\begin{aligned} B_j^{-1}(r) &= 1 - \frac{1}{r^{D-3}} \sum_{i=1}^j \left[ \frac{2\kappa_D}{D-2} \rho_i R_i^{D-2} - \Delta \lambda_i R_i^{D-1} \right] + \\ &\quad + \left(\frac{R_1}{r}\right)^{D-3} (1 - \lambda_0 R_1^2 - B_0^{-1}(R_1)) - \lambda_j r^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $\Delta \lambda_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$ . Considerando que a solução interna a todas as branas é o vácuo de de Sitter/anti-de Sitter (dependendo do valor da constante cosmológica), i.e.,  $B_0(r) = (1 - \lambda_0 r^2)^{-1}$ , obtemos a solução  $B_j$

$$B_j^{-1}(r) = 1 - \frac{1}{r^{D-3}} \sum_{i=1}^j \left[ \frac{2\kappa_D}{D-2} \rho_i R_i^{D-2} - \Delta \lambda_i R_i^{D-1} \right] - \lambda_j r^2. \quad (3.16)$$

A solução acima é válida somente na região  $R_j \leq r < R_{j+1}$ . Podemos escreve-la de modo a ser válida em todo o espaço na forma

$$B^{-1}(r, t) = 1 - \frac{2G_D M(r, t)}{r^{D-3}} - r^2 \lambda(r, t), \quad (3.17)$$

onde  $M(r, t)$  e  $\lambda(r, t)$  são definidos por

$$M(r, t) \equiv \sum_{i=0}^n \left[ \frac{\kappa_D}{(D-2)G_D} \rho_i R_i^{D-2} - \frac{\Delta\lambda_i}{2G_D} R_i^{D-1} \right] \theta(r - R_i), \quad (3.18)$$

$$\lambda(r, t) \equiv \sum_{i=0}^n \lambda_i [\theta(r - R_i) - \theta(r - R_{i+1})], \quad (3.19)$$

e a dependência temporal está implícita nos  $R_i$ 's. Um resultado interessante é que o termo de massa é efetivo pois possui duas contribuições. O primeiro termo é proveniente da energia da branas, por isso é um termo proporcional a área ( $R_i^{D-2}$ ), e o segundo é proporcional a energia necessária para manter a diferença entre as constantes cosmológicas, e por isso é um termo volumétrico ( $R_i^{D-1}$ ). Com a solução radial acima podemos desacoplar a equação (3.5) e obter a seguinte equação para  $A$

$$\frac{A'}{A} = \frac{2\kappa_D}{D-2} B r T_1^1 + 2B \left[ (D-3)G_D \frac{M(r, t)}{r^{D-2}} - r\lambda(r, t) \right]. \quad (3.20)$$

Devido a pressão radial  $T_1^1$  fixada em (3.8), observamos que  $A$  possui uma descontinuidade de segunda ordem. Devido a essa descontinuidade teremos que utilizar o mesmo procedimento utilizado para a obtenção de  $B$  para encontrarmos que

$$A_j(r) = B_j^{-1}(r) A_0(R_1) B_0(R_1) \prod_{i=1}^j \frac{B_i(R_i)}{B_{i-1}(R_i)} e^{\pi_i}, \quad (3.21)$$

onde

$$\pi_i \equiv \frac{2\kappa_D}{D-2} R_i B_i(R_i) P_i. \quad (3.22)$$

Para obtermos a solução completa temos que fixar a condição de contorno. Como o limite assintótico de  $B(r, t)$  é  $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = [1 - \lambda(r)r^2]^{-1}$ , que é a generalização do vácuo de de Sitter/anti-de Sitter para uma constante cosmológica dependente da posição, esperamos que a solução temporal possua assintoticamente o mesmo vácuo, i.e.,  $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 - \lambda(r)r^2$ . Fixando essa condição de contorno obtemos a solução

$$A_j(r) = B_j^{-1}(r) \prod_{i=j+1}^n \frac{B_{i-1}(R_i)}{B_i(R_i)} e^{-\pi_i}. \quad (3.23)$$

Da mesma forma que foi feito em  $B$ , podemos estender essa solução para todo o espaço fazendo uma junção de todas as soluções em seus respectivos domínios de validade da forma

$$A(r, t) = B^{-1}(r, t) \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{B_{i-1}(R_i)}{B_i(R_i)} - 1 \right) \theta(R_i - r) \right] e^{-\pi_i \theta(R_i - r)}, \quad (3.24)$$

onde  $B_j$  é definido por (3.16). As soluções obtidas, (3.24) e (3.17), são a generalização da solução de Kottler [6] em  $D$  dimensões com uma constante cosmológica dependente da posição. Estas soluções concordam com as obtidas por Das [25] para  $\lambda$  constante nos casos estudados pelo citado trabalho. Porém, essas soluções só fazem sentido se as branas estiverem em uma região tipo-tempo. Para evitarmos a singularidade na métrica vamos impor que as massas das branas se relacionem com os seus raios de modo a estarem além dos seus respectivos raios de Kottler generalizados, i.e.

$$-\lambda(R_i)R_i^{D-1} + R_i^{D-3} - 2G_D M(R_i) > 0. \quad (3.25)$$

As soluções concordam com o teorema de Birkhoff pois a dependência temporal ocorre no raio das branas de modo que em cada região a solução é estática. Observamos também que a menos de constantes achamos a solução de Schwarzschild com constante cosmológica (solução de Kottler). As constantes multiplicativas na parte temporal indicam o “redshift” gravitacional, mesmo dentro das branas. Matematicamente os fatores de  $B_j$  aparecem para que a descontinuidade seja, exclusivamente, proporcional a pressão radial. Como já mencionado as soluções dependem somente da constante cosmológica, da densidade de energia e da pressão radial. De modo que as demais componentes da equação de Einstein nos fornecem o fluxo de energia e as pressões tangenciais. Lembrando que a dependência temporal ocorre devido aos raios das branas, podemos facilmente obter o fluxo de energia a partir da equação (3.6), que é

$$T_0^1 = - \sum_{i=1}^n \rho_i V_i \delta(r - R_i), \quad (3.26)$$

onde  $V_i \equiv \dot{R}_i$ . As pressões tangenciais podem ser obtidas a partir de (3.7), mas é mais fácil calculá-la utilizando a lei de conservação do tensor momento-energia, que é o que abordaremos na seção seguinte.

### 3.3 Lei de Conservação do Tensor Momento-energia

A equação de Einstein relaciona o tensor momento-energia ao tensor métrico. Devido a simetria do problema abordado somente duas componentes do tensor momento-energia são necessárias para determinar completamente a métrica ( com duas condições de contorno). De modo que os outros termos do tensor momento-energia são determinados pelas demais componentes da equação de Einstein ou pela lei de conservação. Tomando a derivada

covariante na equação (3.3) obtemos a seguinte lei de conservação em  $D$  dimensões

$$T_{M;N}^N = \frac{\Lambda_{,M}}{\kappa_D}. \quad (3.27)$$

A equação acima nos mostra que nem a energia nem o momento são conservados sobre as branas devido a pressão externa causada pela diferença entre as constantes cosmológicas. Essa diferença pode ser utilizada para modelar a energia escura, que faz o universo se expandir aceleradamente. Mas no nosso caso não é necessária a introdução de nenhuma matéria estranha sobre a brana, como os modelos usuais de energia escura. Em termos de componentes não nulas a lei de conservação acima pode ser escrita como

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\kappa_D} = \dot{T}_0^0 + T_0^{1'} + \frac{\dot{B}}{2B} [T_0^0 - T_1^1] + \frac{T_0^1}{2} \left[ \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{2(D-2)}{r} \right], \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda'}{\kappa_D} &= \dot{T}_1^0 + T_1^{1'} + \left[ \frac{A'}{2A} + \frac{(D-2)}{r} \right] T_1^1 + \\ &\quad \frac{T_1^0}{2} \left[ \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right] - \left[ \frac{A'}{2A} T_0^0 + \frac{(D-2)}{r} T_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A primeira equação é trivialmente satisfeita se utilizarmos as soluções (3.24) e (3.17) com as componentes conhecidas do tensor momento-energia. Já a segunda equação nos fornece uma relação entre a velocidade das branas em função das tensões tangenciais e radiais, das massas e das constantes cosmológicas da mesma forma que a (3.7). Fazendo

$$T_2^2 = \sum_{i=1}^n T_i \delta(r - R_i) \quad (3.30)$$

podemos integrar a componente não trivial da lei de conservação de  $R_i - \epsilon$  a  $R_i + \epsilon$  para obter

$$\frac{\Delta \Lambda_i}{\kappa_D} = \frac{B_i(R_i)}{A_i(R_i)} [\dot{\rho}_i V_i + \rho_i \dot{V}_i] + \frac{D-2}{R_i} [P_i - T_i] + \text{div.}, \quad (3.31)$$

onde o termo divergente aparece da aplicação das derivadas de  $A$  e  $B$  nos pontos  $r = R_i$ . Esse termo divergente é dado por

$$\begin{aligned} \text{div} &= \overbrace{\frac{\kappa_D}{D-2} B_i(R_i) R_i (P_i + \rho_i) \left[ P_i - \frac{B_i(R_i)}{A_i(R_i)} \rho_i V_i^2 \right] \delta(r - R_i)|_{r=R_i} +}^{\text{divergência real}} \\ &\quad + B_i(R_i) \left[ P_i + \rho_i - 4\rho_i V_i^2 \frac{B_i(R_i)}{A_i(R_i)} \right] \left[ (D-3) \frac{G_D M(R_i)}{R_i^{D-2}} - R_i \lambda_i \right] - \\ &\quad - \rho_i V_i \frac{B_i(R_i)}{2A_i(R_i)} \left[ K_0(R_i) - \sum_{j=i}^n \dot{\pi}_j \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

e

$$K_0(r) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\dot{B}_{j-1}(R_j)}{B_{j-1}(R_j)} - \frac{\dot{B}_j(R_j)}{B_j(R_j)} \right] \theta(R_j - r). \quad (3.33)$$

Para evitarmos a divergência acima teremos que fixar uma das duas equações de estado para a pressão radial

$$P_i = -\rho_i \quad \text{ou} \quad P_i = \frac{B_i(R_i)}{A_i(R_i)} \rho_i V_i^2. \quad (3.34)$$

O primeiro caso indica uma equação de estado do tipo constante cosmológica. Essa é a única equação de estado que é independente do estado de movimento, i.e., as propriedades de um fluido com essa equação de estado é independente do seu movimento. De modo que já era esperado que ela removesse a divergência do caso dinâmico. A segunda equação de estado relaciona a tensão normal com a velocidade da brana, indicando que essa tensão deve aumentar com a velocidade para manter a forma esférica da brana. Essa relação garante que podemos fazer  $P = 0$  no caso estático, como no cenário de Randall-Sundrum. Assumindo uma equação de estado linear entre a tensão tangencial e a densidade de energia  $T_i = \gamma_i \rho_i$ , e definindo o tempo conforme a  $i$ -ésima brana

$$dt_i = \sqrt{A_i(R_i)/B_i(R_i)} dt, \quad (3.35)$$

a lei de evolução da brana pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{dU_i}{dt_i} &= \frac{\Delta \Lambda_i}{\kappa_D} (1 - U_i^2) - \frac{D-2}{R_i} [P_i - \rho_i (\gamma_i + U_i^2)] - \\ &\quad - B_i(R_i) (P_i + \rho_i - 2\rho_i U_i^2) \left[ (D-3) \frac{G_D M(R_i)}{R_i^{D-2}} - R_i \lambda_i \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde  $U_i \equiv \frac{dR_i}{dt_i}$ . Como essa evolução é sensível a pressão tangencial ela indica a existência de eras cosmológicas dominadas por diferentes tipos de matéria (energia).

### 3.4 Limite de Branas Planas

Na seção anterior encontramos a solução geral para  $n$  branas esféricas em um “bulk”  $D$  dimensional com constantes cosmológicas diferentes entre elas. Nessa seção iremos tomar o limite para uma brana plana de modo a reproduzir o cenário de Randall-Sundrum a partir de primeiros princípios. Para isso devemos particularizar as soluções com  $D = 5$ ,  $n = 1$  e  $\lambda_0 = \lambda_1$ . Neste caso a solução exterior é dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_3^2, \quad (3.37)$$



onde

$$f(r) = \left(1 - \frac{2G_5 M}{r^2} - \lambda r^2\right).$$

Para obtermos uma métrica do tipo Randall-Sundrum vamos definir a coordenada

$$dz \equiv \left(1 - \frac{2G_5 M}{r^2} - \lambda r^2\right)^{-1/2} dr \quad (3.38)$$

Fixando a constante de integração de modo que  $z = 0$  para  $r = R$ , podemos escrever a nova variável  $z$  em termos de  $r$  como

$$z = \frac{1}{2k} \ln \left[ \frac{2k (k^2 r^4 + r^2 - 2G_5 M)^{1/2} + 2k^2 r^2 + 1}{2k (k^2 R^4 + R^2 - 2G_5 M)^{1/2} + 2k^2 R^2 + 1} \right], \quad (3.39)$$

onde fizemos  $\lambda = -k^2$  para evitar o horizonte de de Sitter. Para obtermos o limite de branas planas temos que considerar o limite em que  $R$ , e conseqüentemente  $r$ , tendem ao infinito. Nesse limite o termo dominante é, lembrando que o termo de massa cresce com  $R^3$ ,

$$z = \frac{1}{2k} \ln \left[ \frac{r^2}{R^2} \right], \quad (3.40)$$

escrevendo  $r$  em função de  $z$  e absorvendo as constantes nas coordenadas obtemos a métrica do tipo Randall-Sundrum,

$$ds^2 = e^{2kz} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2. \quad (3.41)$$

Encontramos o fator de “warp” na exponencial positivo, diferentemente do cenário de Randall-Sundrum original.

### 3.5 Métrica Efetiva em $(D - 1)$ -Dimensões

Nesta seção iremos encontrar a métrica efetiva medida por observadores sobre as branas, bem como eles descrevem a evolução dos seus respectivos universos-brana. Essa redução tem como finalidade descrever a cosmologia dos universos-branas, de modo a ser utilizado para comparação com os dados observados. Para isso iniciaremos com a métrica em  $D$ -dimensões (3.1),

$$ds_D^2 = -A(r, t) dt^2 + B(r, t) dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (3.42)$$

e, utilizando o vínculo  $r = R_i(t)$ , podemos fazer uma redução dimensional sobre a brana, de modo a obtermos a métrica efetiva

$$\begin{aligned} ds_i^2 &= -A(R_i)dt^2 + B(R_i)V_i^2dt^2 + R_i(t)^2d\Omega_{D-2}^2 \\ &= -B(R_i)\left(1 - U_i^2\right)dt_i^2 + R_i(t_i)^2d\Omega_{D-2}^2, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde passamos para o tempo conforme (3.35). Para simplifica-la vamos definir o tempo co-móvel e a coordenada radial sobre a brana

$$d\tau_i = \sqrt{B(R_i)(1 - U_i^2)}dt_i, \quad (3.44)$$

$$\bar{r} = \text{sen } \theta_0. \quad (3.45)$$

Nessas coordenadas obtemos a métrica reduzida

$$ds_i^2 = -d\tau_i^2 + R_i(\tau_i)^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}} + \bar{r}^2 d\Omega_{D-3}^2 \right]. \quad (3.46)$$

Essa é a métrica de Friedmann-Roberson-Walker para um universo com  $(D-2)$ -dimensões espaciais com geometria esférica, onde o raio da brana faz o papel do fator de escala cosmológico. Para sabermos a evolução desse fator de escala,  $R_i(\tau_i)$ , temos que escrever a lei de evolução (3.36) em termos da variável  $\tau_i$ . Utilizando as regras de derivação composta obtemos

$$U_i = \sqrt{\frac{B(R_i)}{1 + B(R_i)W_i^2}}W_i, \quad (3.47)$$

$$\frac{dU_i}{dt_i} = \frac{B(R_i)}{(1 + B(R_i)W_i^2)^2} \left[ \frac{dW_i}{d\tau} + \frac{B(R_i)'}{2B(R_i)}W_i^2 \right], \quad (3.48)$$

onde  $W_i = dR_i/d\tau$ . De modo que a lei de evolução (3.36) toma a forma

$$\rho_i \frac{dW_i}{d\tau} = b_0(R_i) + b_2(R_i)B(R_i)W_i^2 + b_4(R_i)B(R_i)^2W_i^4, \quad (3.49)$$

onde, para  $P_i = -\rho_i$ , os coeficientes acima são

$$b_0(R_i) = \frac{\Delta\Lambda_i}{\kappa_D B(R_i)} + (D-2)\rho_i \frac{1 + \gamma_i}{B(R_i)R_i}, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} b_2(R_i) &= \frac{\Delta\Lambda_i}{B(R_i)\kappa_D} + \frac{(D-2)}{R_i}\rho_i \left[ 3 + \frac{2\gamma_i}{B(R_i)} \right] - \\ &\quad - 3(D-1)\rho_i \left[ \frac{G_D M(R_i)}{R_i^{D-2}} + \lambda_i R_i \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$b_4(R_i) = \frac{(D-2)}{R_i}\rho_i \left[ 2 + \frac{\gamma_i}{B(R_i)} \right] - 2(D-1)\rho_i \left[ \frac{G_D M(R_i)}{R_i^{D-2}} + \lambda_i R_i \right], \quad (3.52)$$

e, para  $P_i = B(R_i)W_i^2\rho_i/(1 + B(R_i)W_i^2)$ , os coeficientes são

$$b_0(R_i) = \frac{\Delta\Lambda_i}{\kappa_D B(R_i)} + (D-2)\frac{\rho_i\gamma_i}{B(R_i)R_i} - \rho_i \left[ (D-3)\frac{G_D M(R_i)}{R_i^{D-2}} - R_i\lambda_i \right], \quad (3.53)$$

$$b_2(R_i) = \frac{\Delta\Lambda_i}{B(R_i)\kappa_D} + \frac{2(D-2)\gamma_i\rho_i}{B(R_i)R_i}, \quad (3.54)$$

$$b_4(R_i) = \frac{(D-2)\rho_i\gamma_i}{B(R_i)R_i}. \quad (3.55)$$

A equação (3.49), com os coeficientes acima, fornece a cosmologia observada pelos observadores de cada universo-brana. Podemos observar, pelos coeficientes independentes da velocidade, que as cosmologias são fortemente influenciadas pela escolha da pressão radial. No primeiro caso, (3.50), ela tende a ser expansiva devido a pressão negativa (como uma constante cosmológica), enquanto que no segundo, (3.53), ela tende ao colapso.

# 4 MODELO DE UNIVERSO-BRANA ESFÉRICO OSCILANTE

Como concluimos no capítulo anterior a cosmologia gerada pelo modelo de brana esférica está relacionada com a solução da equação de movimento (3.36) ou (3.49), que é sensível a fixação da equação de estado. Apesar dessas equações serem complicadas de se resolver completamente podemos obter muita informação observando a existência de pontos de retorno. As duas equações de estado são capazes de descrever o nosso universo (em certas condições), mas iremos nos concentrar na equação de estado do tipo constante cosmológica, já que esse tipo de relação tem propriedades especiais, o que as tornam populares entre os cosmólogos.

## 4.1 Modelo de Universo Oscilante

Nesta seção vamos estudar a aceleração da  $i$ -ésima brana nos pontos em que a velocidade desta se anula, de modo a obtermos uma ideia de que tipo de cosmologia pode ser obtida. Esses pontos são definidos por  $U_i = 0$ , de modo que a equação (3.36) toma a forma

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{dU_i}{dt_i} = & \frac{\Delta\Lambda_i}{\kappa_D} - \frac{D-2}{R_i} [P_i - \rho_i\gamma_i] - \\ & - B_i(R_i) [P_i + \rho_i] \left[ (D-3) \frac{G_D M(R_i)}{R_i^{D-2}} - R_i \lambda_i \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como discutido acima iremos utilizar a equação de estado  $P_i = -\rho_i$ . Essa escolha anula o terceiro termo, simplificando a equação acima para

$$\rho_i \frac{dU_i}{dt_i} = \frac{\Delta\Lambda_i}{\kappa_D} + \frac{D-2}{R_i} \rho_i (1 + \gamma_i). \quad (4.2)$$

Como a densidade de energia sobre a branas  $\rho_i$  é positiva, a aceleração será positiva se

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{\Delta\Lambda_i}{\kappa_D} + \frac{D-2}{R_i} (1+\gamma_i) \rho_i \\
&\propto \Delta\Lambda_i R_i + (D-2)^2 (1+\gamma_i) \left[ G_D M_i R_i^{-(D-2)} + \frac{\Delta\lambda_i}{2} R_i \right] \\
&\propto \Delta\lambda_i R_i^{D-1} [(D-1) + (D-2)(1+\gamma_i)] + 2(D-2)(1+\gamma_i) G_D M_i. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Assumindo que  $\gamma_i \geq -1$ , o que é fisicamente consistente já que não se conhece nada que viole essa condição, obtemos que a aceleração nos pontos de velocidade nula será positiva se

$$-\frac{2(D-2)(1+\gamma_i)G_D M_i}{(D-1)+(D-2)(1+\gamma_i)} < \Delta\lambda_i R_i^{D-1}. \quad (4.4)$$

Na situação  $\Delta\lambda_i \geq 0$ , a solução se torna trivial ( $R_i > 0$ ), esse universo irá se expandir indefinidamente, mas no caso  $\Delta\lambda_i < 0$  obtemos a solução não trivial

$$R_i < \left[ \frac{2G_D M_i}{|\Delta\lambda_i|} \left( 1 + \frac{D-1}{(D-2)(1+\gamma_i)} \right)^{-1} \right]^{1/D-1}. \quad (4.5)$$

Esse resultado mostra que, nos pontos de velocidade nula, a aceleração será positiva caso o raio da brana seja menor que essa quantidade, e vice-versa. Essa mesma informação pode ser obtida da equação (3.49), com o coeficiente (3.50). Dessa forma obtemos um raio crítico

$$R_i^c = \left( \frac{2G_D M_i}{|\Delta\lambda_i| \sigma_i} \right)^{1/(D-1)}, \quad (4.6)$$

onde

$$\sigma_i \equiv 1 + \frac{D-1}{(D-2)(1+\gamma_i)}. \quad (4.7)$$

Apesar de não obtermos os pontos de retorno mostramos que existe um ponto de velocidade nula com aceleração negativa além desse ponto e outro com aceleração positiva antes desse ponto, de forma que é possível um universo oscilante. Porém para isso é necessário que este raio crítico esteja além do horizonte de Kottler, já que a lei de evolução só é válida em uma região tipo-tempo. Para isso é necessário que

$$R_i^k < \left( \frac{2G_D M_i}{|\Delta\lambda_i| \sigma_i} \right)^{1/(D-1)}. \quad (4.8)$$

Como o horizonte é definido pelo polo da métrica (3.17), dado pela equação

$$-\lambda_i (R_i^k)^{D-1} + (R_i^k)^{D-3} - 2G_D \sum_{j=0}^i M_j = 0, \quad (4.9)$$

podemos encontrar uma relação para a massa que torna o raio crítico externo ao horizonte, que é

$$\left(\frac{2G_D M_i}{|\Delta\lambda_i|\sigma_i}\right)^{-2/(D-1)} - (|\Delta\lambda_i|\sigma_i + \lambda_i) > |\Delta\lambda_i|\sigma_i \frac{M_{i-1}^{int}}{M_i}, \quad (4.10)$$

onde

$$M_{i-1}^{int} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} M_j. \quad (4.11)$$

A expressão acima só possui solução analítica para a brana mais interna, a qual  $M_{i-1}^{int} = 0$ . Para essa brana obtemos que o raio crítico será externo ao horizonte se

$$M_1 < \frac{|\Delta\lambda_1|}{2G_D} \sigma_1 (|\Delta\lambda_1|\sigma_1 + \lambda_1)^{-(D-1)/2}. \quad (4.12)$$

Essa é a massa máxima que a brana interna pode ter para que ela não colapse. Se a massa for maior que essa a evolução desse universo força que ele esteja em contração e passe pelo seu horizonte formando um buraco negro. Se a massa for menor que essa ele pode oscilar de acordo com a análise feita nessa seção. Porém o colapso de um buraco negro pode não ser o fim do universo-brana, mas sim um novo começo. Para isso vamos estudar como um buraco negro se comporta.

## 4.2 Aspectos Quânticos no Horizonte de Kottler

Como vimos na seção anterior se uma brana tiver uma massa maior que a massa crítica (4.12) a evolução a leva a formar um buraco negro. Como mostrado por Hawking um buraco negro irradia energia e perde massa, dessa forma esse universo pode acabar com uma massa menor que a crítica, gerando uma possibilidade de revertermos essa situação. Hawking mostrou que ao horizonte de um buraco negro pode ser associado uma temperatura devido a processos quânticos nessa região. A temperatura associada ao buraco negro formado pela  $i$ -ésima brana é

$$T_i = \frac{4G_D}{\kappa_D} \left[ (D-3)G_D M_i^{int} (R_i^k)^{-(D-2)} - R_i^k \lambda_i \right], \quad (4.13)$$

que está associada uma radiação do tipo corpo negro (a demonstração desse resultado se encontra no apêndice B). A luminosidade é dada pela lei de Stephan-Boltzmann, que generalizada para  $D$  dimensões toma a forma

$$\begin{aligned} L_i &\propto T_i^D \times (\text{Área})_i \propto (R_i^k)^{D-2} \left[ (D-3)G_D M_i (R_i^k)^{-(D-2)} - R_i^k \lambda_i \right]^D \\ &\propto \frac{(GM_i^{int})^D}{(R_i^k)^{(D-1)(D-2)}} \left[ 1 - \frac{\lambda_i (R_i^k)^{(D-1)}}{(D-3)G_D M_i^{int}} \right]^D. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como a variação da massa do buraco negro é proporcional a sua luminosidade, então

$$\frac{dM_i^{int}}{dt} \propto -\frac{(GM_i^{int})^D}{(R_i^k)^{(D-1)(D-2)}} \left[ 1 - \frac{\lambda_i (R_i^k)^{(D-1)}}{(D-3)G_D M_i^{int}} \right]^D. \quad (4.15)$$

Utilizando a equação (4.9) podemos encontrar a evaporação em termos do raio de Kottler, dado por

$$\frac{dR_i^k}{dt} = -A_D (R_i^k)^D \left[ (R_i^k)^{-2} - \frac{(D-1)\lambda_i}{(D-3)} \right]^{D-1}, \quad (4.16)$$

onde  $A_D$  absorve todas as constantes de proporcionalidade. A solução geral da equação acima depende da dimensão do “bulk”, de modo que, se  $D = 2n + 1$ , a solução é

$$-2A_D(t - t_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(R_i^k)^{2n}}{j+n} \binom{n-1}{j} (\chi_i)^j (1 - \chi_i)^{-(j+n)}, \quad (4.17)$$

e, se  $D = 2n$ , obtemos a solução

$$\begin{aligned} A_D(t - t_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{j+n-1} a_{jk}^n (\chi_i)^{j-k} (1 - \chi_i)^{-(n+j)+k} (R_i^k)^{2n-1} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_j^n (\chi_i)^{(n-1/2)} (R_i^k)^{2n-1} \tan^{-1} [(\chi_i)^{1/2}], \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde

$$\chi_i = \frac{(D-1)\lambda_i (R_i^k)^2}{D-3}, \quad (4.19)$$

$$a_{jk}^n = \binom{n-1}{j} \frac{(-1)^k (n+j-k-1)! [2(n+j)-3]!!}{2^k (j+n-1)! [2(j+n-k)-1]!!}, \quad (4.20)$$

$$b_j^n = \binom{n-1}{j} \frac{(-1)^{j+n} (2j+2n-3)!!}{2^{j+n-1} (j+n-1)!}. \quad (4.21)$$

A evaporação está representada nas figuras 5 e 6 em função da dimensão e do valor da constante cosmológica respectivamente.

### 4.3 Modelo de Big Bang Não Singular

Com os elementos descritos acima podemos conceber um modelo de universo eterno com um big bang efetivo não singular. Esse cenário cosmológico ocorreria se, inicialmente, o universo tivesse um massa maior que a massa crítica (4.12), de modo que o raio do horizonte seria maior que o raio crítico. Nesta situação a brana colapsaria em um buraco negro, já que ele começaria a se contrair por estar além do raio crítico, onde a atração

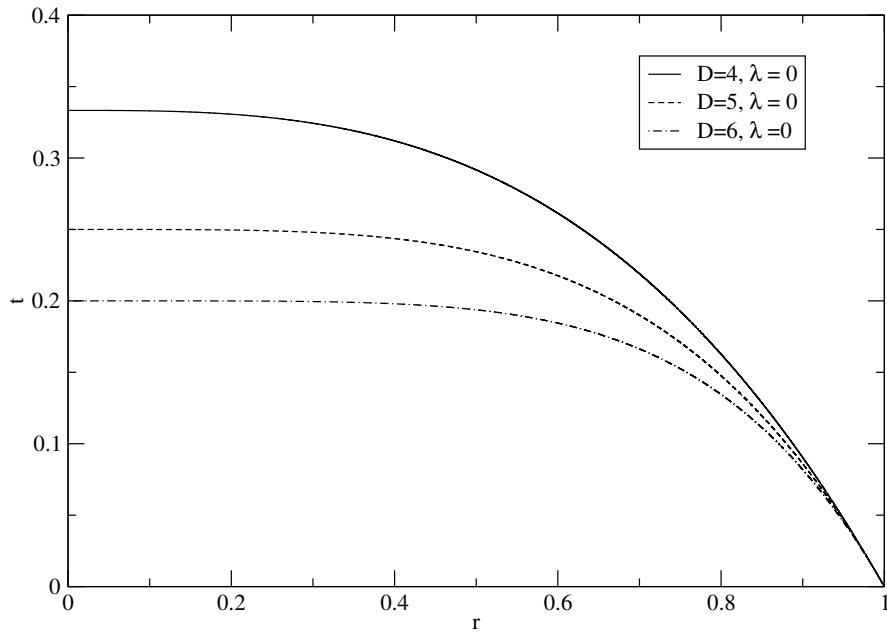


Figura 5: Evaporação do horizonte em função da dimensão

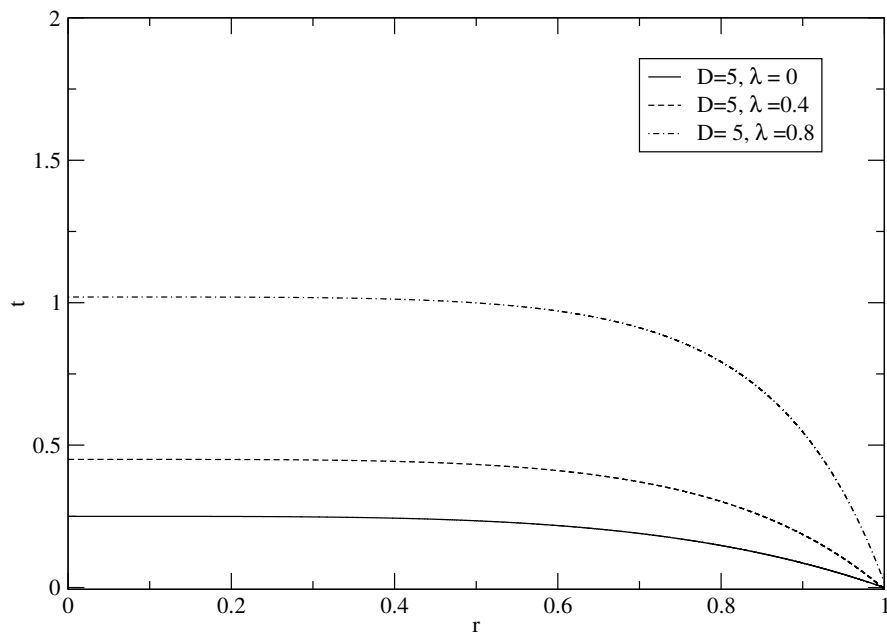


Figura 6: Evaporação do horizonte em função da constante cosmológica



gerada pela diferença entre as constantes cosmológicas supera a repulsão da pressão radial. Quando esse universo colapsasse, o efeito da radiação Hawking faria com que ele irradiasse energia de modo a diminuir a sua massa, podendo ficar com massa menor que a crítica, como ilustrado na figura 7. Apesar da gravitação clássica indicar que nessa situação a brana colapsaria até um ponto de densidade divergente essa não pode ser uma resposta física e indica o limite da teoria clássica. É possível que mesmo sem uma teoria quântica da gravitação essa situação possa ser contornada com a introdução de efeitos quânticos na equação de movimento (geodésica). Esses efeitos poderiam inseridos através de teorias não-comutativas [35] bem como via teoria quântica Bohmiana, que se demonstrou efetiva na remoção da singularidade cosmológica em modelos com “bounce” [36, 37, 38]. Em ambas as situações esperamos uma interseção do gráfico da evolução da brana com a do seu respectivo horizonte. Nesse momento o universo-brana deixaria de ser um buraco negro, pois estaria além do seu horizonte, produzindo um big bang efetivo na brana. Neste momento a brana se aceleraria pois está aquém do seu raio crítico, fazendo com que o universo se expanda. A taxa dessa expansão será maior quanto maior for a diferença entre o raio mínimo da brana e o raio crítico. Se considerarmos que a brana emerge em repouso com um raio  $R_{i0}$ , então, de acordo com a lei de evolução (4.2) a aceleração neste momento seria de

$$\frac{dU_i}{dt_i} = \frac{dW_i}{d\tau_i} = \frac{(D-2)(1+\gamma_{i0})}{R_{i0}} - \frac{(D-1)|\Delta\lambda_i|R_{i0}^{D-2}}{2G_D M_{i0} - |\Delta\lambda_i|R_{i0}^{D-1}}, \quad (4.22)$$

que será maior quanto menor for o raio inicial. Como a radiação emitida durante a evaporação tem entropia alta, então o universo remanescente sofre uma redução da sua entropia durante a evaporação. Dessa forma quando a brana emergir depois do processo de evaporação produzirá um big bang efetivo com baixa entropia, o que explicaria a baixa entropia do universo primordial. O processo de evaporação produz naturalmente um big bang de baixa entropia, já que ele é a evolução natural do processo de evaporação, e evita problemas como a improbabilidade de um estado inicial de baixa entropia gerado por flutuações estatísticas. Como a entropia está relacionada com o horizonte de um buraco negro através da fórmula de Bekenstein-Hawking

$$S_i = \int \frac{dM_i}{T_i} = \frac{\kappa_D}{4(D-2)G_D^2} (R_i^k)^{D-2} = \frac{(\text{Área})_i}{4G_D}, \quad (4.23)$$

observamos, pelas figuras 5 e 6, que o processo de evaporação faz com que a entropia do universo-brana diminua. De modo que, a entropia do universo primordial seria de

$$S_{i0} = \frac{1}{4G_D} \frac{\kappa_D}{(D-2)G_D} (R_{i0})^{D-2}, \quad (4.24)$$

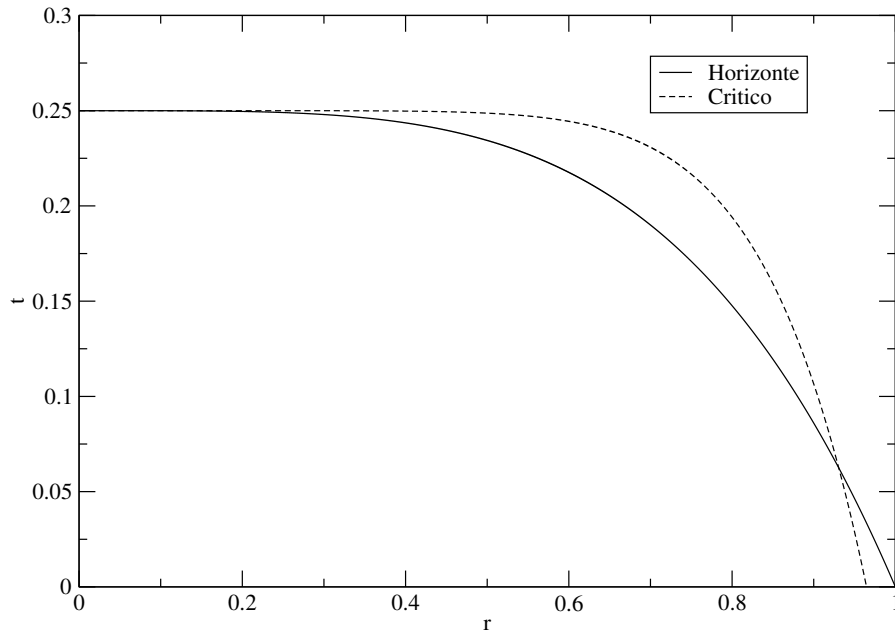


Figura 7: Evolução do horizonte de eventos e do raio crítico

que é menor quanto menor for o raio inicial. Apesar dos argumentos aqui citados é necessário a introdução dos fenômenos quânticos na trajetória da brana para fornecer e corrigir os aspectos quantitativos. Apesar de não termos esses dados podemos estimá-los com a introdução de um “cutoff” na densidade. É o que faremos na seção seguinte.

#### 4.4 Um Pouco de Especulação: Evolução com Densidade Máxima

A teoria clássica não pode ser utilizada para descrevermos o colapso de um objeto esféricamente simétrico por fornecer uma resposta não física (divergência) para o valor da densidade. Para evitarmos esse problema podemos impor um valor máximo para a densidade e permitirmos que a evolução seguinte ocorra nessa condição, o que nos livra das divergências. Necessitamos que o controle da divergência seja feito semi-classicamente para usarmos as equações da relatividade geral. De modo que vamos assumir essa suposição para majorarmos uma evolução semi-clássica através de um “cutoff” na densidade. Nessas condições podemos utilizar a equação (4.9) com (3.18) para relacionarmos o valor do raio da brana com o do seu horizonte. Desse procedimento obtemos, para a brana mais

interna, que

$$-\lambda_1 (R_1^k)^{D-1} + (R_1^k)^{D-3} = \frac{2\kappa_D \rho_{max}}{(D-2)} R_1^{D-2} + |\Delta\lambda_1| R_1^{D-1}. \quad (4.25)$$

A brana irá emergir do seu horizonte quando  $R_1 = R_1^k$ . Dessa forma ficamos com a equação

$$0 = \left[ \lambda_0 R_1^2 + \frac{2\kappa_D \rho_{max}}{(D-2)} R_1 - 1 \right] R_1^{D-3}, \quad (4.26)$$

cuja solução não trivial é

$$R_1 = \begin{cases} \frac{\kappa_D \rho_{max}}{(D-2)\lambda_0} \left[ \sqrt{1 + \frac{(D-2)^2 \lambda_0}{\kappa_D^2 \rho_{max}^2}} - 1 \right] & , \text{ para } \lambda_0 > 0, \\ \frac{(D-2)}{2\kappa_D \rho_{max}} & , \text{ para } \lambda_0 = 0, \\ \frac{\kappa_D \rho_{max}}{(D-2)|\lambda_0|} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(D-2)^2 |\lambda_0|}{\kappa_D^2 \rho_{max}^2}} \right] & , \text{ para } \lambda_0 < 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

A solução para  $\lambda_0 < 0$  só é real se

$$|\lambda_0| < \frac{\kappa_D^2}{(D-2)^2} \rho_{max}^2, \quad (4.28)$$

que é consistente com a interpretação física que a densidade máxima deve ser grande. Se utilizarmos a aproximação

$$\rho_{max} \gg \frac{(D-2)}{\kappa_D} \sqrt{|\lambda_0|}, \quad (4.29)$$

obtemos o raio inicial

$$R_1 \approx \frac{(D-2)}{2\kappa_D \rho_{max}}, \quad (4.30)$$

para qualquer valor de  $\lambda_0$ . O que nos fornece um valor da massa, entropia e aceleração iniciais, respectivamente, de

$$M_{01} \approx \frac{1}{2G_D} \left[ \frac{(D-2)}{2\kappa_D \rho_{max}} \right]^{D-3}, \quad (4.31)$$

$$S_{01} \approx \frac{(D-2)^{D-3}}{2^D G_D^2 \kappa_D^{D-3}} \frac{1}{\rho_{max}^{D-2}}, \quad (4.32)$$

$$\frac{dU_1}{dt_1} \approx 2\kappa_D \rho_{max} (1 + \gamma_{01}). \quad (4.33)$$

É interessante observar que este modelo produz um estado "inicial" altamente ordenado, já que a entropia por unidade de massa nesse universo primordial é

$$s_{01} \equiv \frac{S_{01}}{M_{01}} = (4G_D \rho_{max})^{-1} \quad (4.34)$$

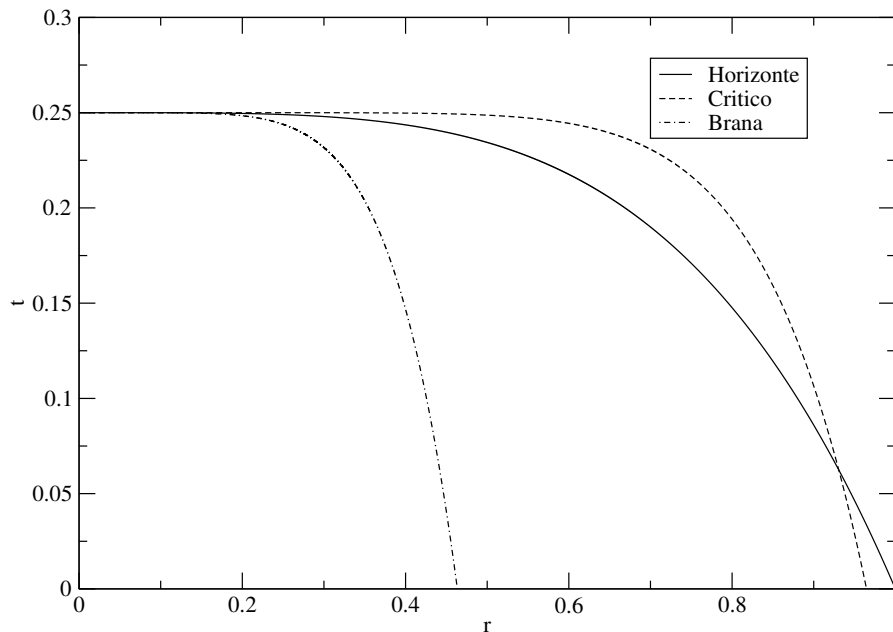


Figura 8: Evolução da brana no regime de densidade constante

Se no início do universo a radiação domina, então  $\gamma_{01} = 1/(D - 2)$ , de modo que a aceleração inicial do universo nesse modelo seria de

$$\frac{dU_1}{dt_1} = \frac{dW_1}{d\tau_1} \approx \frac{2(D - 1)\kappa_D}{D - 2} \rho_{max}. \quad (4.35)$$

Os resultados obtidos nessa seção concordam com a análise feita na seção anterior e a evolução com densidade constante está ilustrado na figura 8. Apesar dos aspectos quânticos terem melhorado ainda necessitamos de um entendimento dos processos fundamentais que nos forneça um controle da densidade a nível semi-clássico, para que possamos usar o “cutoff” como majoração. Esse cenário de expansão acelerada no início do universo pode ser compatível com o modelo cosmológico inflacionário. Porém o que desencadeia o surto inflacionário no modelo padrão é a condensação do campo do inflaton, enquanto que no modelo acima descrito essa inflação é inerente ao modelo e ocorre devido a pressão anisotrópica da brana, que é negativa. Outro aspecto importante é que os processos quânticos ( evaporação e evolução a densidade constante) reduzem a influência das condições iniciais.

# CONCLUSÃO

Na primeira parte desse trabalho construímos um cenário de múltiplas branas esféricas concêntricas através da solução da equação de Einstein em  $D$  dimensões com diferentes constantes cosmológicas entre elas. Os resultados que obtemos podem servir como base para cenários mais específicos, através da fixação das pressões e das massas de cada brana, bem como das constantes cosmológicas do “bulk”. No caso dinâmico a solução encontrada pode ser usada para modelar o universo para  $D = 5$ . O modelo que construímos é mais detalhado que os anteriores e nos permitiu encontrar as constantes multiplicativas que aparecem na solução temporal, indicando o desvio para o vermelho medido por observadores nas regiões internas as branas. Através da lei de conservação de tensor momento-energia obtemos duas possíveis equações de estado para a pressão anisotrópica que removem as divergências na lei de evolução das branas. Essas duas pressões nos permitem duas possíveis fixações, o que aumenta a liberdade do modelo e pode ser usada para uma descrição cosmológica que reproduza os dados observacionais. A pressão tangencial e a diferença entre as constantes cosmológicas influenciam a evolução de cada brana de acordo com (3.36). Essa pressão tangencial está relacionada com a matéria sobre a brana por uma equação de estado, que é determinada pela matéria dominante em cada era cosmológica. Mostramos também como a diferença entre as constantes cosmológicas modifica a massa efetiva de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria, e pode ser fixada para reproduzir a expansão observada sem a introdução da energia escura. Obtemos uma métrica tipo Randall-Sundrum para um “bulk” anti-de Sitter a partir da solução externa no limite de branas planas. Essa métrica foi introduzida inicialmente através de um “ansatz”, mas no presente trabalho conseguimos derivá-la a partir da solução de Kottler anti-de Sitter. Finalmente, fizemos uma redução dimensional sobre a brana e obtivemos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker como métrica efetiva dos universos-brana, onde o raio das branas correspondem aos fatores de escala cosmológico, bem como a evolução dos fatores de escala em termos dos tempos co-moveis às branas.

Na segunda parte desse trabalho estudamos as soluções da equação de evolução encontrada para as branas (3.36) no caso com equação de estado radial do tipo constante cosmológica. Mostramos que esse tipo de brana tende a se expandir, devido a pressão

negativa, de modo que ela é capaz de descrever o nosso universo sem a necessidade de constantes cosmológicas no "bulk", sendo um universo sempre expansivo. Um cenário interessante foi encontrado usando uma diferença negativa de constantes cosmológica, de modo a conter a expansão, possibilitando um universo oscilante. Obtemos também o limite de massa que uma brana pode ter nesse cenário para que não colapse em um buraco negro. Propomos também um modelo de Big Bang não singular baseado no modelo de universo oscilante descrito acima, que consiste na emergência da brana após o colapso em um buraco negro, devido a evaporação por radiação Hawking. Para obtermos essa emergência precisamos de um controle semi-clássico da densidade. Considerando que esse controle possa ser feito, majoramos a evolução por um "cutoff" na densidade da brana, impedindo que ela divergisse conforme a evolução clássica. Como resultado obtivemos o raio, a entropia e a aceleração inicial que esse modelo de Big Bang prevê em termos da densidade máxima. Dessa forma obtivemos um modelo de Big Bang sem singularidades, de baixa entropia e que se expande naturalmente, o que concorda com os modelos atuais, e explica a baixa entropia do universo inicial como a evolução natural do processo de evaporação. Esse processo evita o problema da improbabilidade de um estado inicial de baixa entropia produzido por flutuações estatísticas.

Como perspectivas futuras podemos citar:

1. A inclusão de fenômenos quânticos ou não comutativos que nos permita obter um raio inicial não nulo sem a necessidade de um "cutoff".
2. Obter soluções numéricas da equação de movimento (3.36).
3. Relacionar o raio inicial do universo com a sua temperatura inicial, de modo a obter um valor mínimo para a densidade máxima, que seja compatível com a nucleossíntese primordial.
4. O estudo dos modelos cosmológicos usando a equação de estado dependente da velocidade.
5. A inclusão do efeito Casimir, de modo a gerar uma pressão positiva, que pode modelar a energia escura sem a necessidade de diferentes constantes cosmológicas.
6. A modelagem das branas através de uma parede de domínio esférica.
7. A inclusão de modificações da relatividade geral (Gauss-Bonnet, extensões não-triviais da gravidade em mais dimensões,...).

## APÊNDICE A – Diagrama de Espaço-tempo na Relatividade Restrita

Na relatividade restrita o espaço-tempo não é euclidiano, mas minkowskiano, definido pelo elemento de linha

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.1})$$

Uma consequência importante é que a distância entre dois eventos não é positiva definida, já que o tempo possui um sinal contrário.<sup>1</sup> Dessa forma o espaço-tempo é dividido em três regiões definidas por

$$(i) \ d\tau^2 = 0, \quad (ii) \ d\tau^2 > 0, \quad (iii) \ d\tau^2 < 0. \quad (\text{A.2})$$

No caso do movimento puramente radial

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 = dt^2(1 - v_r^2), \quad (\text{A.3})$$

onde  $v_r$  é a velocidade radial,  $dr/dt$ . A equação acima nos mostra como as regiões (A.2) se relacionam com a velocidade

$$(i) \ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 1 \quad (\text{tipo-luz}) \quad (\text{A.4})$$

$$(ii) \ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 < 1 \quad (\text{tipo-tempo - há relação causal}) \quad (\text{A.5})$$

$$(iii) \ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 > 1 \quad (\text{tipo-espaço - não há relação causal}) \quad (\text{A.6})$$

Dessas relações podemos ver que a região tipo-tempo corresponde a região dos objetos que se movem com velocidade inferior a da luz, a região que respeita a causalidade imposta pela mecânica relativística. A região tipo-luz corresponde a trajetória da luz e

---

<sup>1</sup>Estamos usando a convenção  $(-1, 1, 1, 1)$  invés de  $(1, -1, -1, -1)$ . Escolhemos a primeira pois o sinal do determinante da métrica é sempre negativo, independente do numero de dimensões espaciais extras.

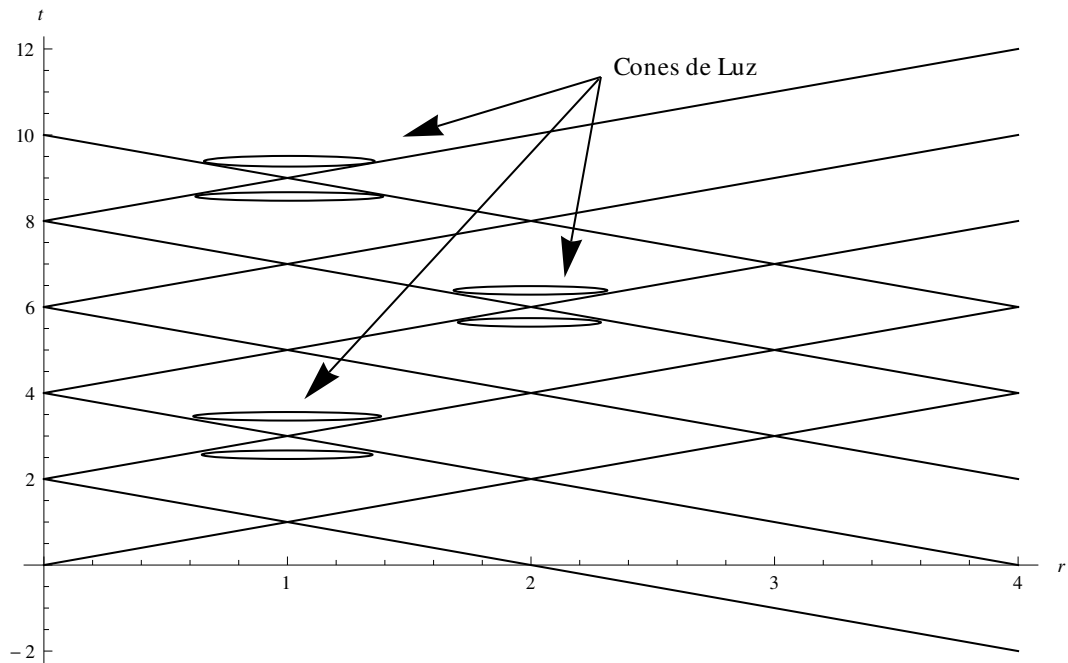


Figura 9: Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Minkowski

fornece uma região limite para informações, enquanto que a região tipo-espaço representa a região do espaço-tempo que está inacessível a um determinado observador. Como a região tipo-luz fornece uma fronteira entre as outras duas regiões podemos aprender muito sobre a estrutura do espaço-tempo estudando essa solução, que no caso plano (minkowskiano) é a solução de (A.4),

$$r = \pm t + c, \quad (\text{A.7})$$

onde  $c$  é uma constante dependente das condições iniciais. Em duas dimensões essas soluções são retas, mas se incluimos as demais dimensões veríamos que essas soluções formam cones, chamados de cones-de-luz, e a região tipo-tempo é a região interior ao cone enquanto que a tipo-espaço é a região externa. Essas superfícies estão representadas no diagrama de espaço-tempo da figura 9.



# APÊNDICE B – Evaporação de Buracos Negros

Apesar do tratamento clássico dado na solução dos problemas esfericamente simétricos terem gerado um resultado impressionante (os buracos negros), a análise dos efeitos quânticos nas proximidades do horizonte de eventos se demonstrou mais surpreendente. Em 1973, Stephen Fulling mostrou que a existência de fronteiras modificam o estado de vácuo dos campos quânticos [39]. No ano seguinte, 1974, Stephen Hawking encontrou um resultado semelhante estudando os buracos negros, mostrando que eles emitiam radiação, que ficou conhecida como radiação Hawking [2]. Posteriormente o trabalho de Fulling foi generalizado por Paul Davies e William Unruh, mostrando que observadores com aceleração própria constante (observadores de Rindler) interpretam as flutuações do vácuo quântico nas proximidades do horizonte como um banho térmico [40, 41]. Esse efeito ficou conhecido como efeito Fulling-Davies-Unruh. Vejamos agora como esses resultados se conectam, para maiores detalhes recomendo o livro do Susskind[42].

## B.1 Radiação Hawking

Os observadores de Rindler são observadores que se movem com aceleração própria constante em relação a um observador inercial. O princípio da equivalência nos indica que esses observadores devem sentir um "campo gravitacional" constante. Esse cenário é descrito pela métrica

$$ds^2 = -\rho^2 dt^2 + d\rho^2 + dx^2 + dy^2. \quad (\text{B.1})$$

O que o efeito Fulling-Davies-Unruh mostra é que esses observadores experimentam um banho térmico a uma temperatura de  $1/2\pi$ .<sup>1</sup> Para conectarmos o resultado de Hawking a esse efeito precisamos construir um espaço-tempo de Rindler a partir do de Schwarzschild

---

<sup>1</sup>Esse resultado mostra que o princípio da equivalência precisa ser corrigido para: "Um observador acelerado corresponde a um observador em um campo gravitacional imerso em um banho térmico".

nas proximidades do horizonte. Essa métrica é dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2], \quad (\text{B.2})$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (\text{B.3})$$

Como estamos interessado somente na região próxima ao horizonte, podemos expandir a função acima em série de Taylor em torno de  $r = 2GM$ , de modo a obter

$$f(r) \simeq \frac{r - 2GM}{2GM}. \quad (\text{B.4})$$

Para obtermos uma métrica do tipo (B.2) vamos definir a coordenada

$$\rho = \int_{2GM}^r f(u)^{-1/2} du = 2\sqrt{2GM(r - 2GM)}, \quad (\text{B.5})$$

ou seja

$$r - 2GM = \frac{\rho^2}{8GM}. \quad (\text{B.6})$$

Finalmente podemos escrever a métrica de Schwarzschild na forma

$$ds^2 = -\rho^2 \left( \frac{dt}{4GM} \right)^2 + d\rho^2 + r(\rho)^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2]. \quad (\text{B.7})$$

Devido o fator  $1/4GM$  a temperatura associada também sofre a mesma correção, ou seja, no caso de um buraco negro a temperatura medida por um observador distante do buraco negro é

$$T = \frac{1}{8\pi GM}. \quad (\text{B.8})$$

Esse foi o resultado obtido por Hawking e trouxe duas consequências inesperadas. A primeira é que esse buraco negro irá evaporar até desaparecer completamente, já que sua temperatura é inversamente proporcional a sua massa, de modo que, a medida que evapora a sua temperatura aumenta, tornando o processo mais intenso. Esse resultado criou o chamado problema da perda da informação, e está relacionado com o fato de que toda a informação contida nesse buraco negro simplesmente desaparece. Esse problema tem motivado inúmeros trabalhos nesse tema [43, 44, 45, 46, 49]. A segunda consequência ocorre quando aplicamos a segunda lei da termodinâmica, que fornece o seguinte valor para a entropia do buraco negro

$$S = 4\pi M^2 G = \frac{\text{Área}}{4G}. \quad (\text{B.9})$$

Esse resultado é surpreendente pois a entropia depende da área, e não do volume como se esperava. Esse resultado deu origem ao princípio holográfico e tem aparecido em outros aspectos da gravitação [50, 51, 52].

## B.2 Radiação Hawking Generalizada

Como na presente tese estudamos a solução de problemas esfericamente simétricos em  $D$  dimensões num espaço com constante cosmológica vamos generalizar os resultado obtidos na seção anterior para essas condições. A métrica de Kottler em  $D$  dimensões pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (\text{B.10})$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{2G_D M}{r^{D-3}} - \lambda r^2. \quad (\text{B.11})$$

Nas proximidades do horizonte de Kottler podemos expandir a função acima em série de Taylor para obter, em primeira ordem,

$$f(r) \simeq [2G_D M(D-3)r_k^{-D+2} - 2r_k \lambda] (r - r_k). \quad (\text{B.12})$$

Novamente, para obtermos uma métrica do tipo Rindler, vamos definir a coordenada

$$\rho = \int_{r_k}^r f(u)^{-1/2} du = 2 [2G_D M(D-3)r_k^{-D+2} - 2r_k \lambda]^{-1/2} (r - r_k)^{1/2}. \quad (\text{B.13})$$

Nessa coordenada podemos escrever a métrica de Kottler na forma

$$ds^2 = -\rho^2 \left[ (G_D M(D-3)r_k^{-D+2} - r_k \lambda) dt \right]^2 + d\rho^2 + r(\rho)^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (\text{B.14})$$

Para manter a entropia de Bekenstein-Hawking, (B.9), a temperatura associada ao horizonte de Kottler é

$$T = \frac{4G_D}{\kappa_D} [G_D M(D-3)r_k^{-D+2} - r_k \lambda] \quad (\text{B.15})$$

## APÊNDICE C – Campo Elétrico em um Espaço-tempo Estático e Esfericamente Simétrico

Neste apêndice mostraremos que uma distribuição estática e esfericamente simétrica de carga produz, em um espaço-tempo com as mesmas simetrias, o potencial de Coulomb. Este resultado tem como finalidade dar suporte a solução de Reissner-Nordstrøm. Em um espaço-tempo curvo o eletromagnetismo se acopla, via princípio da co-variância geral, da forma

$$\begin{aligned} -4\pi J^\nu &= F^{\mu\nu}{}_{;\mu} \\ &= F^{\mu\nu}{}_{,\mu} + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu F^{\sigma\nu} + \overbrace{\Gamma_{\mu\sigma}^\nu F^{\mu\sigma}}^{=0}, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde  $J^\nu$  é o quadri-vetor densidade de carga. O terceiro termo acima é nulo pois a conexão é simétrica, enquanto que o tensor intensidade de campo eletromagnético é antissimétrico, que neste é

$$F^{\mu\nu} = E_r (\delta_0^\mu \delta_1^\nu - \delta_1^\mu \delta_0^\nu). \quad (\text{C.2})$$

A única componente não-trivial da equação de Maxwell (C.1) é

$$\begin{aligned} -4\pi J^0 &= F^{\mu 0}{}_{,\mu} + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu F^{\sigma 0} \\ &= -E_{r,1} - \left( \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3 \right) E_r. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Utilizando as conexões encontradas no capítulo 2 e a propriedade,  $A(r) = B(r)^{-1}$ , obtemos a equação

$$4\pi J^0 = E_{r,1} + \frac{2}{r} E_r = \frac{1}{r^2} \partial_1 (r^2 E_r). \quad (\text{C.4})$$

Escrevendo a componente radial do campo elétrico em termos do potencial elétrico da forma

$$E_r = -\Phi(r)_{,1} \quad (\text{C.5})$$

e, lembrando que o laplaciano em coordenadas esféricas para uma função dependente somente da coordenada radial é

$$\nabla^2\Phi = \frac{[r^2\Phi(r)]_{,1,1}}{r^2}, \quad (\text{C.6})$$

obtemos a equação

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho, \quad (\text{C.7})$$

cuja solução é o potencial de Coulomb.

# Referências

- [1] K. Schwarzschild, Sitzugsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916** , 189 (1916).
- [2] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- [3] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. ) **1919**, 433 (1919).
- [4] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [5] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).
- [6] F. Kottler, Ann. der Phys. **361**, 14 (1918).
- [7] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York (2008).
- [8] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. ) **1921** (1921) 966.
- [9] O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926) [Surveys High Energ. Phys. **5**, 241 (1986)].
- [10] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].
- [11] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].
- [12] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125**, 136 (1983).
- [13] M. Visser, Phys. Lett. B **159**, 22 (1985) [arXiv:hep-th/9910093].
- [14] E. J. Squires, Phys. Lett. B **167**, 286 (1986).
- [15] M. Gogberashvili, Europhys. Lett. **49**, 396 (2000) [arXiv:hep-ph/9812365].
- [16] M. Gogberashvili, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 1635 (2002) [arXiv:hep-ph/9812296].
- [17] M. Gogberashvili, Europhys. Lett. **77**, 20004 (2007) [arXiv:hep-th/0603235].
- [18] A. Boyarsky, A. Neronov and I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. **95**, 091301 (2005) [arXiv:gr-qc/0411144].
- [19] J. L. Tonry *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], Astrophys. J. **594**, 1 (2003) [arXiv:astro-ph/0305008].
- [20] J. P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq and J. P. Uzan, Nature **425**, 593 (2003) [arXiv:astro-ph/0310253].
- [21] J. M. Overduin and P. S. Wesson, Phys. Rept. **283**, 303 (1997) [arXiv:gr-qc/9805018].

- [22] R. A. Knop *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **598**, 102 (2003) [arXiv:astro-ph/0309368].
- [23] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004) [arXiv:astro-ph/0402512].
- [24] M. Gogberashvili, *Phys. Lett. B* **636**, 147 (2006) [arXiv:gr-qc/0511039].
- [25] A. Das and A. DeBenedictis, *Prog. Theor. Phys.* **108**, 119 (2002) [arXiv:gr-qc/0110083].
- [26] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, Inc.,(1972).
- [27] B. Schutz, *A first Course in General Relativity*, Cambridge University Press, UK (2009).
- [28] I. C. Jardim, *Promediação dos Campos Gravito-eletromagnéticos na Aproximação Pós-newtoniana*, Dissertação (mestrado)- Universidade Federal do Ceará, (2007).
- [29] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Ltd., London, (1984).
- [30] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Harvard University Press: Boston (1923).
- [31] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315].
- [32] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *Phys. Lett. B* **436**, 257 (1998) [hep-ph/9804398].
- [33] A. Karch and L. Randall, *JHEP* **0105**, 008 (2001) [hep-th/0011156].
- [34] I. C. Jardim, R. R. Landim, G. Alencar and R. N. Costa Filho, *Phys. Rev. D* **84**, 064019 (2011) [arXiv:1105.4578 [gr-qc]].
- [35] G. D. Barbosa and N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* **70**, 103512 (2004) [arXiv:hep-th/0407111].
- [36] R. Maier, S. Pereira, N. Pinto-Neto and B. B. Siffert, arXiv:1111.0946 [astro-ph.CO].
- [37] N. Pinto-Neto, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 3801 (2011).
- [38] N. Pinto-Neto, *Found. Phys.* **35**, 577 (2005) [arXiv:gr-qc/0410117].
- [39] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- [40] P. C. W. Davies, *J. Phys. A* **8**, 609 (1975).
- [41] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [42] L. Susskind, J. Lidesay, *An introduction to black holes, information and the string theory revolution: The holographic universe*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.(2005).

- [43] C. A. S. Silva, Phys. Lett. B **677**, 318 (2009) [arXiv:0812.3171 [gr-qc]].
- [44] B. Zhang, Q. y. Cai, L. You and M. s. Zhan, Phys. Lett. B **675**, 98 (2009) [arXiv:0903.0893 [hep-th]].
- [45] J. Preskill, arXiv:hep-th/9209058.
- [46] S. W. Hawking, Phys. Rev. D **72**, 084013 (2005) [arXiv:hep-th/0507171].
- [47] A. Valentini, arXiv:hep-th/0407032.
- [48] S. Hod, Phys. Lett. A **299**, 144 (2002) [arXiv:gr-qc/0012076].
- [49] C. R. Stephens, G. 't Hooft and B. F. Whiting, Class. Quant. Grav. **11**, 621 (1994) [arXiv:gr-qc/9310006].
- [50] T. Padmanabhan, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1659 (2006) [arXiv:gr-qc/0606061].
- [51] T. Padmanabhan, Int. J. Mod. Phys. D **14**, 2263 (2005) [arXiv:gr-qc/0510015].
- [52] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys. Rept. **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].