UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NÍCOLAS ALCÂNTARA DE ANDRADE

ANALITICIDADE DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM QUASE TODO PONTO

FORTALEZA
2015

NÍCOLAS ALCÂNTARA DE ANDRADE

ANALITICIDADE DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM QUASE TODO PONTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge

FORTALEZA

2015

NÍCOLAS ALCÂTARA DE ANDRADE

ANALITICIDADE DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM QUASE TODO PONTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria

Aprovada em: 02 / 08/ 2013 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Prof. Dr. Luciano Mari
Università degli Studi di Milano

Eu gosto de Matemática porque ela não é humana e não possui nenhuma relação especial com todo o universo acidental. Porque, como o Deus de Spinoza, ela não vai nos amar em troca.

Bertrand Russell

AGRADECIMENTOS

À minha famlia, em especial ao meu pai, à minha mãe, à minha irmã e minha querida companheira Natalhie pelo apoio e incentivo constante.

Aos professores do Departamento de Matemática, principalmente ao Professor Luquésio pela orientação e valiosos ensinamentos.

A todos os amigos e colegas do Departamento de Matemática, em particular aos companheiros Anderson, Francisco Yure, João Luiz e João Victor.

Aos amigos Aline Rodrigues, David Bezerra, Daysane Pinho, Diego Marcelo, Elaine Oliveira, Elisa Ratts, Emmanuel Bastos, Fernando Sant'anna, Henrique Demétrio, José Kleber, Manoel Bruno, Milena Fortuna, Paulo Santiago, Rafael Leite e Sarah Damasceno.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), agradeço o apoio financeiro.

RESUMO

Esse trabalho é baseado no artigo *Analyticity Of Almost Everywhere Differentiable Functions*, nele desenvolveremos um lema de partição para funções superaditivas que permitirá uma demonstração alternativa e simples dos teoremas de Besicovitch.

Palavras-chave: Teorema de Besicovitch. Teorema de Morera. Funções Holomorfas.

ABSTRACT

This work is based on the article *Analyticity Of Almost Everywhere Differentiable Functions*, it will develop a partitioning lemma for superadditive set functions which will lead to a simple alternative proof of Besicovitch's theorems .

Keywords: Besicovitch's Theorem. Morera's Theorem. Holomorphic Function.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 1929, A.S. Besicovitch publicou o artigo *On Sufficient Conditions for a Function to be Analytic, and on Behaviuor of Analytic Functions in the Neighbourhood of Non-isolated Singular Points*. Nesse trabalho ele procura determinar as condições mínimas que uma função de variável complexa deve satisfazer para que a função seja analítica, mais especificamente, se uma função f definida em um domínio D é analítica em um subconjunto G de D, quais condições devemos impor ao conjunto G para que f possa ser extendida a uma função analítica em todo D.

Nesse sentido ele enunciou e demonstrou o seguintes teoremas:

Teorema. 1.1. *Se uma função $f(z)$ de uma variável complexa definida em um domínio D aberto simplesmente conexo é limitada em D e diferenciável em todos os pontos do dominio exceto possivelmente em um conjunto E de medida de Hausdorff 1-dimensional zero, então para todo ponto $a \in E$ o limite de $f(z)$, quando z tende para a por valores de $D - E$, existe, e a função $f(z)$, definida nos pontos de E pelos valores desses limites, é diferenciável nos pontos de E, e portanto é holomorfa em todo o domínio D.*

Teorema. 1.2. *Se uma função $f(z)$ de variável complexa definida em um domínio D aberto simplesmente conexo é contínua em D e diferenciável em todos os pontos exceto possivelmente nos pontos de um conjunto E de medida de Hausdorff 1-dimensional σ-finita, isto é uma união enumerável de conjuntos de medida de Hausdorff 1-dimensional finita, então $f(z)$ é diferenciável em E e portanto holomorfa em D.*

Esses resultados generalizam os seguintes teoremas:

Teorema. 1.3 (Riemann)**.** *Se uma função $f(z)$ de variável complexa definida em um domínio D aberto simplesmente conexo é limitada no domínio e regular em todos os pontos do domínio, exceto possivelmente no ponto $z = a$, então $\lim_{z \to a} f(z)$ existe, e a função $f(z)$ definida no ponto $z = a$ pelo valor do limite é ainda regular no ponto $z = a$.*

Teorema. 1.4 (Osgood)**.** *Se uma função $f(z)$ de variável complexa definida em um domínio D aberto simplesmente conexo é contínua no domínio e regular em todos os pontos exceto nos pontos de um numero finito de curvas regulares, então é regular em todos os pontos do domínio.*

Noso objetivo será obter uma prova direta dos teoremas de Besicovitch. Para isso, desenvolveremos um lema de partição para funções superaditivas (lema 2.3) obtido explorando as propriedades de coberturas por cubos diáticos e as suas relações com a medida de Hausdorff (lema 2.2).

2 PRELIMINARES

Neste capítulo encontraremos os fundamentos básicos para a compreenção das hipóteses dos nossos resultados e o bom entendimento dos nossos cálculos, bem como os enunciados de alguns resultados clássicos que usamos no trabalho.

2.1 Linguagem básica

Iniciaremos este trabalho apresentando uma coleção de definições e resultados que serão úteis no decorrer do texto.

Se $m \geq 1$ é um inteiro fixo e $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ então denotaremos $|x| = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2}\right)$ e $\|x\| = max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_m|\}$. Se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^m$, denotamos por $d(A)$ e $dist(x, A)$ o diâmetro de A e a distância entre x e A, ambas com respeito à norma $\|x\|$. Se δ é um número positivo então $U(A, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^m : dist(y, A) < \delta\}$, mas escrevemos $U(x, \delta)$ no lugar de $U(\{x\}, \delta)$. O fecho, o interior e a fronteira de um conjunto A serão denotados por $\overline{A}$, $\mathring{A}$ e ∂A respectivamente.

Definição. 2.1. *Seja X um subconjunto de um espaço Euclidiano n-dimensional* $\mathbb{R}^n$ *qualquer. Uma coleção* $\mathscr{S}$ *de subconjuntos de X será chamada de* ***sigma-álgebra*** *ou* σ***-álgebra*** *se* $\mathscr{S}$ *é fechado para complementação e união enumerável ou seja:*

1. *se* $E \in \mathscr{S}$, *então* $X \setminus E \in \mathscr{S}$
2. *se* $E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{S}$, *então* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E \in \mathscr{S}$

É imediato que uma σ-álgebra também é fechada para interseção enumerável e para diferença de conjuntos, mais ainda, que X e $\emptyset$ estão em $\mathscr{S}$.

Definição. 2.2. *Seja* $\{E_j\}$ *uma sequência de conjuntos. Definimos o* ***limite superior*** *e* ***limite inferior*** *dessa sequência como sendo respectivamente:*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j \quad e \quad \underline{\lim_{j\to\infty}} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$$

Da definição acima, segue que $\underline{\lim_{j\to\infty}} E_j$ consiste daqueles pontos que estão em todos os E_j a menos de um número finito, e $\overline{\lim_{j\to\infty}} E_j$ consiste daqueles pontos que estão em infinitos E_j. Portanto, segue que se $E_j \in \mathscr{S}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, então $\overline{\lim_{j\to\infty}} E_j$, $\underline{\lim_{j\to\infty}} E_j \in \mathscr{S}$. Se $\overline{\lim_{j\to\infty}} E_j = \underline{\lim_{j\to\infty}} E_j$, então escrevemos $\lim_{j\to\infty} E_j$ para esse valor comum.

Seja $\mathscr{C}$ uma coleção de subconjuntos de X. Então a **σ-álgebra gerada por** $\mathscr{C}$, escrita $\mathscr{S}(\mathscr{C})$, é a interseção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{C}$. É fácil ver que $\mathscr{S}(\mathscr{C})$ é uma σ-álgebra e pode ser pensada como a menor σ-álgebra que contém $\mathscr{C}$.

Definição. 2.3. *Uma medida* μ *é uma função* $\mu : \mathscr{S} \longrightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ *definida em* *alguma σ-álgebra $\mathscr{S}$ de subconjuntos de X tal que*

$$\mu(\emptyset) = 0 \tag{1}$$

e

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_j) \tag{2}$$

para toda sequência enumerável de conjuntos disjuntos $\{E_j\}$ em $\mathscr{S}$.

Segue de (1.2) que μ é uma função crescente, isto é, se $E, E' \in \mathscr{S}$ e $E \subset E'$, então $\mu(E) \leq \mu(E')$.

Teorema. 2.1 (continuidade de uma medida)**.** *Seja μ uma medida em uma σ-álgebra $\mathscr{S}$ de subconjuntos de X.*

(a) Se $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ é uma sequência crescente de subconjuntos em $\mathscr{S}$, então

$$\mu\left(\lim_{j\to\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

(b) Se $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ é uma sequência decrescente de subconjuntos em $\mathscr{S}$ com $\mu(F_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\lim_{j\to\infty} F_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(F_j).$$

(c) Para qualquer sequência de conjuntos $\{F_j\}$ em $\mathscr{S}$,

$$\mu\left(\underline{\lim}_{j\to\infty} F_j\right) \leq \underline{\lim}_{j\to\infty} \mu(F_j).$$

Prova.

(a) Podemos expressar $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ como a união disjunta $E_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty} (E_j \setminus E_{j-1})$. Então, por (1.2),

$$
\begin{aligned}
\mu(\lim_{j\to\infty} E_j) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\
&= \mu(E_1) \ + \ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\mu(E_1 \ + \ \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j \setminus E_{j-1})\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu \left(E_1 \cup \bigcup_{j=2}^{k} (E_j \setminus E_{j-1})\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)
\end{aligned}
$$

(b) Se $E_j = F_1 \backslash F_j$, então $\{E_j\}$ está nas hipóteses do item (a). Como $\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j = F_1 \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\lim_{j\to\infty} F_j\right) &= \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) \\
&= \mu(F_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\
&= \mu(F_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) \\
&= \lim_{j\to\infty} (\mu(F_1) - \mu(E_j)) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mu(F_j)
\end{aligned}
$$

(c) Agora seja $E_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} F_j$. Então $\{F_j\}$ é uma sequência crescente de conjuntos em $\mathscr{S}$, então, por (a),

$$
\begin{aligned}
\mu(\underline{\lim}_{j\to\infty} F_j) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) \\
&\leq \underline{\lim}_{j\to\infty} \mu(F_j).
\end{aligned}
$$

Definição. 2.4. *Uma **medida exterior** ν num conjunto X é uma função $\nu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,\infty) \cup \{\infty\}$ definida no conunto $\mathscr{P}$ de* todos *os subconjuntos de X tal que*

$$\nu(\emptyset) = 0 \tag{3}$$

$$\nu(A) \leq \nu(A') \textit{ sempre que } A \subset A' \tag{4}$$

e

$$\nu\left(\overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) \textit{ para quaisquer subconjuntos } \{A_j\} \textit{ de } X. \tag{5}$$

Um subconjunto E de X é chamado ν***-mensurável*** *ou* ***mensurável com respeito à medida exterior*** ν *se*

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E), \tag{6}$$

para todos os conjuntos $A \subset X$*.*

Teorema. 2.2. *Seja* ν *uma medida exterior. A coleção* $\mathscr{M}$ *de conjuntos* ν*-mensuráveis forma uma* σ*-álgebra, e a restrição de* ν *a* $\mathscr{M}$ *é uma medida.*

Prova. Claramente, $\emptyset \in \mathscr{M}$, então $\mathscr{M}$ é não-vazio. Então, pela simetria de (1.6), $A \in \mathscr{M}$ se, e somente se, $X \setminus A \in \mathscr{M}$. Portanto, $\mathscr{M}$ é fechado para a operção de tomar o complementar. Para mostrar que $\mathscr{M}$ é fechado para união enumerável, suponha que $E_1, E_2, \dots \in \mathscr{M}$ e seja A um conjunto qualquer. Então aplicando (1.6) a $E_1, E_2, \dots$ temos que,

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu\left(A \cap E_1\right) + \nu\left(A \setminus E_1\right) \\
&= \nu\left(A \cap E_1\right) + \nu\left(\left(A \setminus E_1\right) \cap E_2\right) + \nu((A \setminus E_1) \setminus E_2) \\
&= \vdots \\
&= \sum_{j=1}^{k} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} E_j\right)
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{k} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Daí,

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{k} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i\right) \cap E_j\right) \ + \ \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right). \tag{7}$$

Por outro lado,

$$A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{j-1} E_i \right) \cap E_j \right),$$

então, usando (1.5),

$$\begin{aligned}
\nu(A) &\leq \nu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\
&\leq \nu(A)
\end{aligned}$$

por (1.7). Segue que $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{M}$, portanto $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra.

Agora sejam $E_1, E_2, \ldots$ conjuntos dois a dois disjuntos de $\mathscr{M}$. Tomando $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ em (1.7), obtemos

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

e combinando isso com (1.5) nós vemos que ν é uma medida em $\mathscr{M}$.

Definição. 2.5. *Dizemos que uma medida exterior ν é **regular** se para todo conjunto A existe um conjunto ν-mensurável E contendo A com $\nu(A) = \nu(E)$.*

Lema. 2.1. *Se ν é uma medida exterior regular e $\{A_j\}$ é uma sequência crescente qualquer de conjuntos, então $\lim\limits_{j\to\infty} \nu(A_j) = \nu(\lim\limits_{j\to\infty} A_j)$.*

Prova. Escolha um E_j ν-mensurável com $E_j \supset A_j$ e $\nu(E_j) = \nu(A_j)$ para todo j. Então, usando (1.4) e teorema 1.1 (c),

$$\nu(lim A_j) = \nu(\underline{lim} A_j) \leq \nu(\underline{lim} E_j) \leq \underline{lim} \nu(E_j) = \underline{lim} \nu(A_j) = lim \nu(A_j).$$

A desigualdade oposta segue de (1.4).

Considere agora (X, d) o espaço métrico Euclidiano n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, com a função distância usual. Os conjuntos pertencendo à σ-álgebra gerada pelos subconjuntos fechados de X são chamados de Borelianos do espaço. Os Borelianos incluem os conjuntos abertos (como complementar dos conjuntos fechados), os F_σ-conjuntos (que são uniões enumeráveis de conjuntos fechados), os G_δ-conjuntos (interseções enumeráveis de conjuntos abertos), etc.

Uma medida ν em X é chamada uma **medida exterior métrica** se

$$\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F) \tag{8}$$

sempre que E e F são **positivamente separados**, isto é, sempre que

$$d(E, F) = inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$$

Mostraremos agora que se ν é uma medida exterior métrica, então a coleção dos conjuntos ν-mensuráveis inclue os Borelianos. A prova é baseada no seguinte versão do 'lema de Carathéodory'.

Lema. 2.2. *Seja ν uma medida exterior métrica em (X, d). Seja $\{A_j\}$ uma sequência de subconjuntos de X com $A = \lim_{j\to\infty} A_j$, e suponha que $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ para cada j. Então $\nu(A) = \lim_{j\to\infty} \nu(A_j)$,*

Prova. É suficiente provar que

$$\nu(A) \leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \tag{9}$$

pois a desigualdade contrária segue imediatamente de (1.4).

Seja $B_1 = A_1$ e $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ para $j \geq 2$. Se $j + 2 \leq i$, então $B_j \subset A_j$ e $B_i \subset A \setminus A_{i-1} \subset A \setminus A_{j+1}$, então B_i e B_j são positivamente separados. Então aplicando (1.8) $(m - 1)$ vezes,

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}\right) &= \sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k-1}), \\ \nu\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}\right) &= \sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k}). \end{aligned}$$

Podemos assumir que ambas as séries convergem. De fato, supondo que uma das séries diverge teríamos $\lim_{j\to} \nu(A_j) = \infty$, pois $\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}$ e $\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}$ estão ambos contidos em A_{2m}. Dessa forma temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)$ converge, e assim

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\
&= \nu\left(A_j \cup \bigcup_{k=j+1}^{\infty} B_k\right) \\
&\leq \nu(A_j) \quad + \sum_{k=j+1}^{\infty} \nu(B_k) \\
&\leq \lim_{i\to\infty} \nu(A_i) \quad + \sum_{k=j+1}^{\infty} \nu(B_k)
\end{aligned}$$

Fazendo $j \to \infty$, a soma tende a zero e obtemos (1,9).

Teorema. 2.3. *Se ν é uma medida exterior métrica em (X, d), então todos os Borelianos de X são ν-mensuráveis.*

Prova. Como os conjuntos ν-mensuráveis formam uma σ-álgebra, e os Borelianos formam a menor σ-álgebra contendo os subconjuntos fechados de X, é suficiente mostrar que $\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$ se verifica quando E é fechado e A é arbitrário. Seja A_j o conjunto dos pontos pertencentes a $A \setminus E$ tais que $d\,(x, E) \geq \frac{1}{j}$, então

$$\nu(A \cap E) + \nu(A_j) = \nu((A \cap E) \cup A_j) \leq \nu(A) \tag{10}$$

para cada j, pois ν é uma medida métrica exterior. A sequência de conjuntos $\{A_j\}$ é crescente e, como E é fechado, $A \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Portanto, como $d(A_j, A \setminus E \setminus A_{j+1}) > 0$ para todo j, o Lema 1.2 nos diz que $\nu(A \setminus E) \leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j)$ e (1.6) segue de (1.10). Mas se $x \in A \setminus E \setminus A_{j+1}$ existe $z \in E$ com $d(x, z) < \frac{1}{(j+1)}$, então se $y \in A_j$ então

$$d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z) > \frac{1}{j} - \frac{1}{(j+1)} > 0.$$

Então $d(A_j, A \setminus E \setminus A_{j+1}) > 0$, como exigido.

2.2 Medida de Hausdorff

Neste trabalho desenvolvemos a teoria no espaço Euclidiano n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, apesar disso, devemos enfatizar que vários dos resultados são válidos em espaços métricos mais gerais.

Definição. 2.6. *Seja U um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}^n$. Definimos o **diâmetro** de U como $\|U\| = sup\{|x - y| : x, y \in U\}$. Se $E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ e $0 < \|U_i\| \leq \delta$ para cada $i \in \mathbb{N}$, dizemos que $\{U_i\}$ é uma **δ-cobertura** de E.*

Definição. 2.7. *Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seja s um número não-negativo. Para*

$\delta > 0$, defina

$$\mathscr{H}_\delta^s(E) = inf\sum_{i=1}^{\infty}\|U_i\|^s, \tag{11}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as δ-coberturas enumeráveis $\{U_i\}$ de E.

É trivial que $\mathscr{H}_\delta^s$ é uma medida exterior em $\mathbb{R}^n$. Fazendo $\delta \to 0$ obtemos a **medida de Hausdorff exterior s-dimensional**

$$\mathscr{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta>0}\mathscr{H}_\delta^s(E) \tag{12}$$

O limite existe, porém ele pode ser infinito, uma vez que $\mathscr{H}_\delta^s$ cresce quando δ decresce. É fácil ver que $\mathscr{H}^s$ é uma medida métrica exterior. Se δ for menor que a distância entre os conjuntos positivamente separados E e F, nenhum conjunto em uma δ-cobertura de $E \cup F$ pode intersectar E e F ao mesmo tempo, daí:

$$\mathscr{H}_\delta^s(E \cup F) = \mathscr{H}_\delta^s(E) \ + \ \mathscr{H}_\delta^s(F),$$

levado a uma igualdade similar para $\mathscr{H}^s$. A restrição de $\mathscr{H}^s$ à σ-álgebra dos conjuntos $\mathscr{H}^s$-mensuráveis, que pelo Teorema 1.3 inclue os Borelianos, é chamada **medida de Hausdorff s-dimensional**.

Para cada E é claro que $\mathscr{H}^s(E)$ é não-crescente se s tende de 0 ao infinito. De fato, se s ¡ t, então,

$$\mathscr{H}_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t}\mathscr{H}_\delta^t(E),$$

o que implica que se $\mathscr{H}^t(E)$ é positivo, então $\mathscr{H}^s(E)$ é infinito. Então existe um único valor, $dimE$, chamado de **dimensão de Hausdorff de E**, tal que

$$\mathscr{H}^s(E) = \infty \ se \ 0 \ \leq s < dim\ E, \ \ \mathscr{H}^s(E) = 0 \ se \ dim\ E < s < \infty \tag{13}$$

Se C é um cubo de lado 1 em $\mathbb{R}^n$, então, dividindo C de maneira óbvia em k^n subcubos de lados $\frac{1}{k}$, vemos que se $\delta \geq k^{-1}n^{\frac{1}{2}}$ então

$$\mathscr{H}_\delta^s(C) \leq k^n(k^{-1}n^{\frac{1}{2}})^n \leq n^{\frac{1}{2}n}.$$

Assim obtemos que $\mathscr{H}^n(C) < \infty$. Logo, se s ¿ n, então $\mathscr{H}^s(C) = 0$ *e* $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, pois $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma união enumerável de tais cubos. Segue que $0 \leq dimE \leq n$ para qualquer $E \subset \mathbb{R}^n$. É imediato que $E \subset E'$ então $dimE \leq dimE'$. Um conjunto $\mathscr{H}^s$-mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$ para o qual $0 < \mathscr{H}^s(E) < \infty$ é chamado **s-conjunto**; um 1-conjunto é algumas vezes chamado um **conjunto linearmente mensurável**. Claramente, a dimensão de Hausdorff de um s-conjunto é igual a s, mas é importante observar que um s-conjunto é algo bem mais específico que um conjunto mensurável de dimensão de Hausdorff s. De fato , Besicovitch (1942) mostrou que qualquer conjunto pode ser expresso como uma união disjunta de "$continuum - manysets$" de mesma dimensão. A definição de medida de Hausdorff pode ser generalizada substituindo $\|U_i\|$ em (1.11) por $h(\|U_i\|)$, onde h é alguma função positiva, crescente e contínua à direita. Neste trabalho, usaremos a seguinte generalização

$$h(\|U_i\|) = \alpha(s)2^{-s}\|U_i\|^s \ sempre\ que\ U_i \neq \emptyset\ \forall i \in \mathbb{N}$$

onde

$$\alpha(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

Definição. 2.8. *Seja $E \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que E é um* ***conjunto leve*** *se $\mathscr{H}^{m-1}(E) = 0$ e dizemos que E é um conjunto* ***magro*** *se E possui $\mathscr{H}^{m-1}$-medida σ-finita , ou seja , existe uma sequência $\{A_i\}$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\mathscr{H}^{m-1}(A_i) < \infty\ \forall i \in \mathbb{N}$*

Definição. 2.9. *Seja $E \subset \mathbb{R}^m$. Dado $\delta > 0$, definimos a* ***medida net exterior*** *de E como*

$$\mathscr{M}_\delta^m(E) \ = \ inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\|S_i\|^m \ /\ E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \ e\ |S_i\| \leq \delta\ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

onde S_i são cubos diáticos. Definimos a ***medida net*** *de E como sendo*

$$\mathscr{M}^m(E) \ = \ \lim_{\delta\to 0}\mathscr{M}_\delta^m(E) \ = \ \sup_{\delta\geq 0}\mathscr{M}_\delta^m(E)$$

2.3 Medida de Lebesgue

Nós obtemos a medida de Lebesgue n-dimensional como uma extensão da definição de volume em $\mathbb{R}^n$ (onde 'volume' significa comprimento em $\mathbb{R}^1$ e área em $\mathbb{R}^2$).

Sejam $a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\ i = 1, \ldots, n$. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $C = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. Defina o volume de C como

$$V(C) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$$

de maneira óbvia. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ defina

$$\mathscr{L}^n(E) = inf\{\sum_i V(C_i)\}, \tag{14}$$

one o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas de E por uma sequência $\{C_i\}$ de blocos. É fácil checar que $\mathscr{L}^n$ é uma medida exterior em $\mathbb{R}^n$, conhecida como **medida de Lebesgue exterior n-dimensional**. Mais ainda, $\mathscr{L}^n(E)$ coincide com o volume de E se E é um bloco, isso segue aproximando a soma em (1.14) por uma soma finita e então subdividindo E por planos contendo as faces de C_i. Como os blocos C_i podem ser decompostos em sub-blocos menores deixando a soma em (1.14) inalterada, é suficiente tomar o ínfimo sobre δ-coberturas de E para todo $\delta > 0$. Assim, $\mathscr{L}^n$ é uma medida exterior métrica em $\mathbb{R}^n$. A restrição de $\mathscr{L}^n$ aos conjuntos $\mathscr{L}^n$-mensuráveis, os quais incluem os Borelianos pelo Teorema 1.3, é chamada **medida de Lebesgue n-dimensional**.

3 INTERVALOS E FIGURAS

Neste capítulo apresentaremos o conceito de figura e apresentaremos alguns resultados relevantes sobre figuras e funções em figuras, cuminando em um importante lema de partição que será essencial na demonstração do teorema de Besicovitch.

3.1 Conceitos Básicos

Nesta seção introduziremos o conceito de figura e algumas propriedades das mesmas.

Definição. 3.1. *Um **intervalo** é um produto cartesiano de intervalos compactos em* $\mathbb{R}$ *. Uma **figura** é uma união finita de intervalos. Para todo conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$*,* $\mathcal{F}(A)$ *denotará a coleção de todas as figuras que são subconjuntos de* A *junto com o conjunto vazio.*

Observe que intervalos e figuras são sempre conjuntos compactos. Além disso, $\mathcal{F}(A)$ não é fechado com respeito à diferença e interseção de conjunto, o que nos motiva a seguinte definição:

Definição. 3.2. *Definimos em* $\mathcal{F}(A)$ *as seguintes operações:*

1. $B_1 \ominus B_2 = \overline{(B_1 \setminus B_2)}$
2. $B_1 \odot B_2 = \overline{\left[(B_1 \overset{\circ}{\cap} B_2)\right]}$

Claramente, $\mathcal{F}(A)$ é fechado com respeito às operações definidas acima.

Definição. 3.3. *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Duas figuras* $B_1, B_2 \subset \mathcal{F}(A)$ *são chamadas de **não-sobrepostas** se* $B_1 \odot B_2 = \emptyset$*.*

Definição. 3.4. *Um intervalo será chamado de **cubo** se for o produto cartesiano de n intervalos da reta com o mesmo comprimento. Um **cubo diático** é um cubo da forma*

$$\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{k_i}{2^n}, \frac{(k_i+1)}{2^n}\right]$$

onde $n, k_1, k_2, \ldots, k_m$ *são inteiros e* $n \geq 0$*.*

Em particular, usaremos os termos **retângulo** e **quadrado** para nos referirmos a intervalos e cubos, respectivamente, no $\mathbb{R}^2$. Dessa forma, temos que quadrados e retângulos são sempre compactos e possuem sempre os lados paralelos aos eixos coordenados.

Definição. 3.5. *Seja* A *uma figura e seja* $E \subset A$ *. **Uma partição em A mod E** é uma coleção* $\mathcal{P} = \{(A_1, x_1), \ldots, (A_p, x_p)\}$ *onde* $\{A_1, \ldots, A_p\}$ *é uma família de subintervalos não-sobrepostos de* A *e* $x_i \in A_i \setminus E$*,* $i = 1, \ldots, p$*. Escrevemos* $\cup\mathcal{P} = \cup\{B/(B,x) \in \mathcal{P}\}$*.* $\mathcal{P}$ *será chamada* $\delta - fine$ *se dado* $\delta\colon A \setminus E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *, tivermos* $d(A_i) < \delta(x_i)$ $i = 1, \ldots, p$*.*

Note que nos referimos a uma partição *em* A e não uma partição *de* A pois

$\cup\mathcal{P}$ não precisa ser igual a A.

Lema. 3.1. *Se A é um cubo diático e $\delta\colon A \longrightarrow \mathbb{R}_+$, então existe uma partição diática $\delta - fine$ $\mathcal{P}$ em A mod $\emptyset$ com $A = \cup\mathcal{P}$.*

Prova. Suponha que não existe tal partição. Divida então A em 2^m cubos diáticos $A^1, \ldots, A^{2^m}$ com $d(A^i) = \frac{d(A)}{2}$. Como A não possui uma partição diática $\delta - fine$, pelo menos 1 dos 2^n subcubos não possui uma partição diática $\delta - fine$, chame tal subcubo de A_1. Aplicando o mesmo argumento , obtemos uma seqüência $\{A_i\}$ de cubos diáticos encaixados cada um dos quais não possui uma partição diática $\delta - fine$, com $d(A_n) \to 0$. Assim, se $\{x\} = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ obtemos $d(A_n) < \delta(x)$ a partir de um certo n. Portanto, $\{(A_n, x)\}$ é uma partição diática $\delta - fine$ em A_n para n suficientemente grande (contradição!).

Teorema. 3.1. *Existem constantes b_m dependendo apenas da dimensão m, tal que $\forall E \subset \mathbb{R}^m$:*

$$\mathscr{H}_\delta^m \ \leq \ \mathscr{M}_\delta^m \ \leq \ b_m \mathscr{H}_\delta^m$$

$$\mathscr{H}^m \ \leq \ \mathscr{M}^m \ \leq \ b_m \mathscr{H}^m$$

Prova. É imediato que $\mathscr{H}_\delta^m \ \leq \ \mathscr{M}_\delta^m$, pois o conjunto sobre o qual o ínfino em $\mathscr{H}_\delta^m$ é tomado está contido no conjunto sobre o qual o ínfimo em $\mathscr{M}_\delta^m$ é tomado. Se U é tal que $0 < d(U) \leq \delta$, seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-k-1} \leq d(U) < 2^{-k}$ e seja S um cubo diático de lado 2^{-k} com $S \cap U \neq \emptyset$. Então U está contido em uma coleção de 3^n cubos diáticos de lado 2^{-k} e diâmetro $2^{-k} n^{\frac{1}{2}}$ formado por S e suas vizinhanças imediatas. Subdividindo cada um desses cubos em 2^{n^2} cubos menores, U está contido em uma cobertura formada por $b_n = 3^n 2^{n^2}$ cubos diáticos de diâmetro

$$2^{-k} n^{\frac{1}{2}} 2^{-n} \leq 2^{1-n} n^{\frac{1}{2}} d(U) \leq d(U) \leq \delta.$$

Agora seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de E por conjuntos arbitrários. Para cada i, temos $U_i \subset \bigcup_{j=1}^{b_n} S_{i,j}$, onde $\{S_{i,j}\}_{j=i}^{b_n}$ é uma coleção de b_n cubos de diâmetros no máximo $d(U_i) \leq \delta$. Então,

$$E \subset \underset{i,j}{\cup} S_{i,j} \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{b_n} d(S_{i,j})^s) \leq b_n \sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s.$$

Portanto, pelas definições de $\mathscr{M}_\delta^m$ e $b_m \mathscr{H}_\delta^m$ segue que $\mathscr{M}_\delta^m \ \leq \ b_m \mathscr{H}_\delta^m$. Por fim, fazendo $\delta \longrightarrow 0$ obtemos $\mathscr{H}^m \ \leq \ \mathscr{M}^m \ \leq \ b_m \mathscr{H}^m$.

Lema. 3.2. *Existe uma constante $k > 0$ que depende somente de m e possui a seguinte prorpriedade: se $E \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathscr{H}^{m-1}(E) < a$, então para todo $\eta > 0$ podemos obter uma seqüência não-sobreposta $\{B_n\}$ de cubos diáticos com diâmetro menor que η tal que$E \subset (\cup \mathring{B}_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} [d(B_n)]^{m-1} < ka$.*

Prova. Dado $\eta > 0$, considere $\mathscr{M}_\eta^m(E)$. Sabemos que $\mathscr{M}_\eta^m(E) \ \leq \ \mathscr{M}^m(E)$. Seja então $\varepsilon > 0$ tal que $\mathscr{M}^m(E) - \mathscr{M}^m_\eta(E) = \varepsilon$. Por outro lado, como $\mathscr{M}^m_\eta(E) = inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} d(S_i)^m$ / *onde* S_i são cubos diáticos tais que $E \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} S_i$ *e* $d(S_i) \leq \eta\ \forall i \in \mathbb{N}\}$, dessa forma podemos encontrar uma coleção $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de cubos diáticos não-sobrepostos tais que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d(B_i)^m - \mathscr{M}^m_\eta(E) < \frac{\varepsilon}{2}$, o que nos dá:

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}^m(E) - \sum_{i=1}^{\infty} d(B_i)^m &= \mathscr{M}^m(E) - \mathscr{M}^m_\eta(E) - (\sum_{i=1}^{\infty} d(B_i)^m - \mathscr{M}^m_\eta(E)) \\
&\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Daí, pelo teorema (2.1). Existem uma constante b_m dependendo apenas da dimensão m, tal que $\forall E \subset \mathbb{R}^m$

$$\mathscr{M}^m(E) \leq b_m \mathscr{H}^m(E)$$

Daí, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(B_i)^m \leq \mathscr{M}^m(E) \leq b_m \mathscr{H}^m(E) \leq b_n a$$

Portanto, basta fazer $b_n = k$.

3.2 Funções em Figuras

Nesta seção estudaremos funções que associa um número real a cada elemento de $\mathcal{F}(A)$.

Definição. 3.6. *Seja A uma figura e seja F uma função em $\mathcal{F}(A)$. Dizemos que F é :*

(i) ***Limitada inferiormente*** *se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $F(B) > -\epsilon$ para todo $B \in \mathcal{F}(A)$ com $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \delta$.*

(ii) ***Contínua inferiormente*** *em um conjunto $E \subset A$ se dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $F(B) > -\epsilon$ para todo $B \in \mathcal{F}(A)$ com $B \subset A \cap \mathrm{U}(E, \delta)$, $\mathscr{L}^m(B) < \delta$ e $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \frac{1}{\epsilon}$.*

(iii) ***Amigável inferiormente*** *e é limitada inferiormente e se existe um conjunto leve $S \subset A$ tal que F é contínua inferiormente em cada conjunto compacto $E \subset A \setminus S$.*

Se uma função $F\colon \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que F e $-F$ são limitadas inferiormente, dizemos que F é limitada. Analogamente, F será contínua se F e $-F$ forem contínuas inferiormente e F será amigável se F e $-F$ forem amigáveis inferiormente.

Dessa forma, temos que se F é limitada então segue que para todo $\epsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $F(B) > -\epsilon$ quando $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \delta_1$ e $-F(B) > -\epsilon$ sempre que $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \delta_2$. Assim, se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue que F é limitada se $|F(B)| < \epsilon$ quando $|\mathscr{H}^{m-1}(\partial B)| < \delta$.

Analogamente, F é contínua em um conjunto E se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|F(B)| < \epsilon$ para todo $B \in \mathcal{F}(A)$ com $B \subset A \cap \mathrm{U}(E, \delta)$, $\mathscr{L}^m(B) < \delta$ e $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \frac{1}{\epsilon}$.

Exemplo: Identifique o plano complexo com $\mathbb{R}^2$ e seja $f(z)$ uma função de varável complexa definida em uma figura $A \subset \mathbb{R}^2$. Defina

$$F(\emptyset) = 0 \quad e \quad F(B) = |\int_{\partial B} f(z)dz|$$

para toda figura $B \subset A$, onde adotamos a convenção usual de orientação da fronteira de B no sentido anti-horário. Provaremos que :

1. Se f é limitada, então F é limitada em A.
2. Se F é contínua em um compacto $E \subset A$, então F é contínua em E.

Prova.

1. Note que se $|f(z)| \leq K$ para todo $z \in A$ e B é uma figura qualquer em A, então :

$$|\int_{\partial B} f(z)dz| \leq \int_{\partial B} |f(z)||dz| \leq K\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) \tag{15}$$

portanto, se $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) \to 0$, então $F(B) \to 0$.

2. Escolha $\epsilon > 0$ e seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Como u e v são contínuas no compacto $E \subset A$, então, pelo teorema de Stone-Weierstrass, existem polinômios $p(x,y)$ e $q(x,y)$ tais que se $g(z) = p(x,y) + iq(x,y)$, então $|f(z) - g(z)| \leq \frac{\epsilon^2}{6}$ para todo $z \in E$. Assim, dado $z \in E$, escolha $\delta_z > 0$ de tal sorte que $|f(z) - f(w)| \leq \frac{\epsilon^2}{6}$ e $|g(z) - g(w)| \leq \frac{\epsilon^2}{6}$ para todo $w \in A \cap B_{\delta_z}(z)$. Como E é compacto, $\exists \delta > 0$ tal que $\mathtt{U}(E, \delta) \subset \bigcup\limits_{z \in E} B_{\delta_z}(z)$. Portanto, se $w \in \mathtt{U}(E, \delta)$ então $w \in \mathtt{U}(z, \delta_z)$ *para algum* $z \in E$. Dessa forma:

$$|f(w) - g(w)| \leq |f(w) - f(z)| + |f(z) - g(z)| + |g(z) - g(w)| < \frac{\epsilon^2}{2}$$

Seja $M = 2max_{z\in A}|\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}|$, onde $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y})$ e, diminuindo δ se necessário, $M\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Se $B \subset A \cup \mathtt{U}(E, \delta)$ é uma figura com $\mathscr{L}^m(B) < \delta$ e $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \frac{1}{\epsilon}$, então, pela forma complexa do teorema de Green, temos :

$$|\int_{\partial B} g(z)dz| = |2i \int\int_B \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dxdy| \leq 2\frac{M}{2}\mathscr{L}^m(B) < M\delta < \frac{\epsilon}{2}$$

Além disso,

$$|\int_{\partial B} f(z)dz| \leq \int_{\partial B} |f(z)-g(z)||dz| + |\int_{\partial B} g(z)dz| \leq \frac{\epsilon^2}{2}\mathscr{H}^{m-1}(\partial B)\| + \frac{\epsilon}{2}$$

portanto, como $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \frac{1}{\epsilon}$, temos $\frac{\epsilon^2}{2}\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ e daí, $|F(B)| = |\int_{\partial B} f(z)dz| < \epsilon$, o que nos diz que F é contínua em E .

Observe que se $f(z)$ é limitada em A e contínua em $A \setminus S$ para algum conjunto leve S , então o exemplo acima nos diz que F é amigável em A.

3.3 Lema da Partição para Funções Superaditivas

Nesta seção abordaremos o estudo de funções que associam números reais a figuras.

Primeiramente vamos introduzir o conceito de funções superaditivas.

Definição. 3.7. *Para uma figura A , uma função em $\mathcal{F}(A)$ é* ***superaditiva*** *se :*

$$F(\cup_{D\in\mathcal{D}} D) \quad \geq \quad \sum_{D\in\mathcal{D}} F(D)$$

para toda família finita $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}(A)$ de conjuntos não sobrepostos.

Observe que para qualquer função superaditiva F , a desigualdade $F(B) \geq F(B) + F(\emptyset)$ mostra que $F(\emptyset) \leq 0$. Se F é limitada inferiormente, devemos ter $F(\emptyset) = 0$.

Lema. 3.3. *Seja A um cubo diático e seja F uma função amigável inferiormente superaditiva em $\mathcal{F}(A)$. Se T é m conjunto magro qualquer , então para qualquer $\epsilon > 0$ e $\delta\colon A\setminus T \longrightarrow \mathbb{R}_+$ existe uma partição diática $\delta-fine$ $\mathcal{P}$ em A mod T tal que $F(A \ominus \cup\mathcal{P}) > -\epsilon$.*

Prova. Como F é amigável inferiormente, em particular F é limitada inferiormente. Então $\exists \eta > 0$ tal que $F(B) > \frac{-\varepsilon}{2}$ $\forall B \subset A$ figura com $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \eta$. Seja S um conjunto leve tal que F é contínua inferiormente em cada compacto de $A \setminus S$. Pelo Lema 2.2 , temos que existe uma seqüência $\{S_n\}$ de cubos diáticos não-sobrepostos tal que:

$$S \subset G = (\overset{\circ}{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}} S_n) \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty}[d(S_n)]^{m-1} < \frac{\eta}{2m} \qquad (*)$$

com $d(S_n) < \eta \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como T é magro, $T' = T \setminus G$ existe uma sequência $\{T_i\}$ de conjuntos disjuntos com $T' = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} T_i$ e $\mathscr{H}^{m-1}(T_i) < 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Para cada i , escolha $\varepsilon_i > 0$ com $\varepsilon_i < min\{1, \frac{1}{2mk}, \frac{\varepsilon}{2}\}$, onde k é a constante do Lema 2.2. Pela continuidade inferior de F em $A \setminus G$, existem $\eta_i > 0$ tais que $F(B) > \frac{-\varepsilon_i}{2}$ para toda figura $B \subset A \cap \mathtt{U}(A \setminus G, \eta_i)$ com $\mathscr{H}^{m-1}(\partial B) < \frac{2}{\varepsilon_i}$ e $\mathscr{L}^m(B) < \eta_i$. Aplicando o Lema 2.2 a cada T_i, obtemos sequências

$\{T_i^n\}$ de cubos diáticos não-sobrepostos com diâmetros menores que $\eta_i\varepsilon_i$ tais que

$$T_i \subset (\overset{\circ}{\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup}} T_i^n) \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{m}[d(T_i^n)]^{m-1} < k \qquad (**).$$

Podemos assumir que $T_i \cap T_i^n \neq \emptyset \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, então $T_i^n \subset \mathtt{U}(A \setminus G \; , \; \eta_i)$.

Seja $\mathcal{U}$ uma subcoleção não-sobreposta de $\{S_n\} \cup \{T_i^n\}_{i,n=1,2,\ldots}$ com $\bigcup \mathscr{U} = (\bigcup S_n) \cup (\bigcup_{i,n\in\mathbb{N}} T_i^n)$ então $S \cup T \subset (\overset{\circ}{\cup\mathscr{U}})$ pois

$$S \cup T \subset G \cup T = G \cup (T \setminus G) \subset (\overset{\circ}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} S_n) \cup (\overset{\circ}{\bigcup_{i,n\in\mathbb{N}}} T_i^n) \subset (\overset{\circ}{\bigcup} \mathscr{U})$$

Escolha uma função $\hat{\delta}\colon A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ com $\hat{\delta}(x) \leq \delta(x) \;\; \forall x \in A \setminus T$, tal que se $x \in S \cup T$ e B é um cubo diático contendo x com $d(B) < \hat{\delta}(x)$, então $B \subset U$ para algum $U \subset \mathscr{U}$. Pelo Lema 2.1, existe uma partição $\hat{\delta} - fine$ $\mathscr{Q}$ em A tal que $A = \bigcup \mathscr{Q}$. Seja $\mathscr{V}$ a coleção de todos os cubos de $\mathscr{U}$ que contém um cubo de $\mathscr{Q}$, e seja $\mathscr{P} = \{(A_1, x_1), \ldots, (A_p, x_p)\}$ a coleção de todos $(B, x) \in \mathscr{Q}$ tais que B não está contido em um cubo de $\mathscr{U}$. Como para cada 2 cubos diáticos C_1, C_2 tais que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ devemos ter $C_1 \subset C_2$ *ou* $C_2 \subset C_1$, os A_j não sobrepõem $\bigcup \mathscr{V}$ *para todo* $j = 1, \ldots, p$. Portanto cada cubo de $\mathscr{Q}$ ou é disjunto de $\bigcup \mathscr{V}$ ou está contido em $\bigcup \mathscr{V}$, então $A \ominus \bigcup \mathscr{P} = \bigcup \mathscr{V}$. Pela maneira que $\hat{\delta}(x)$ foi escolhido em T, temos que $x_j \in A \setminus T \;\; \forall j = 1, \ldots, p$, então $\mathscr{P}$ é uma partição δ - fine em A mod T. Separe $\mathscr{V}$ nas seguintes subcoleções disjuntas finitas:

$$\mathscr{S} = \mathscr{V} \cap \{S_n\} \quad , \quad \mathscr{T}_1 = (\mathscr{V} \cap \{T_1^n\}_{n=1,2,\ldots}) \setminus \mathscr{S}$$

e

$$\mathscr{T}_i = (\mathscr{V} \cap \{T_i^n \;/\; n \in \mathbb{N}\}) \setminus \left(\mathscr{S} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \mathscr{T}_j\right)\right)$$

para i = 2, 3, ...

Como $\mathscr{V}$ é finito , existe um inteiro r tal que $\mathscr{V} = \mathscr{S} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathscr{T}_i\right)$.

Por $(*)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{m-1}\left(\partial\left(\underset{B\in\mathscr{S}}{\cup}B\right)\right) &\leq \sum_{B\in\mathscr{S}}\mathcal{H}^{m-1}(\partial B)\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^{m-1}(\partial S_n)\\ &\leq 2m\sum_{n\in\mathbb{N}}[d(S_n)]^{m-1}\\ &\leq 2m(\frac{\eta}{2m})\\ &= \eta,\end{aligned}$$

então , $F(\underset{B\in\mathscr{S}}{\cup}B) > \frac{-\varepsilon}{2}$ pela continuidade inferior de F. Por outro lado, $(**)$ nos diz que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{m-1}\left(\partial\left(\underset{B\in\mathscr{S}}{\cup}B\right)\right) &\leq \sum_{B\in\mathscr{S}}\mathcal{H}^{m-1}(\partial B)\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^{m-1}(\partial S_n)\\ &\leq 2m\sum_{n\in\mathbb{N}}[d(S_n)]^{m-1}\\ &\leq 2m(\frac{\eta}{2m})\\ &= \eta,\end{aligned}$$

de onde vem que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^m(\underset{B\in\mathscr{T}_i}{\cup}B) &= \sum_{B\in\mathscr{T}_i}\mathscr{L}^m(B)\\ &\leq \eta_i\varepsilon_i\sum_{B\in\mathscr{T}_i}\mathcal{H}^{m-1}(\partial B)\\ &< \eta_i\end{aligned}$$

Portanto,$F(\underset{B\in\mathscr{T}}{\cup}B) > \frac{-\varepsilon}{2}$ pela continuidade de F. Daí,

$$
\begin{aligned}
F(A \ominus \bigcup \mathscr{P}) &= F(\bigcup \mathscr{V}) \\
&= F(\underset{B\in\mathscr{V}}{\cup} B) \\
&\geq\ F(\underset{B\in\mathscr{S}}{\cup} B)\ +\ \sum_{i=1}^{r} F(\underset{B\in\mathscr{T}_i}{\cup} B) \\
&>\ \frac{-\varepsilon}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon_i}{2} \\
&> -\varepsilon.
\end{aligned}
$$

O próximo lema generaliza o Lema 2.3 substituindo o cubo diático A por uma figura arbitrária.

Lema. 3.4. *Seja A uma figura e seja F uma função amigável inferiormente e superaditiva em $\mathcal{F}(A)$. Se T é um conjunto magro qualquer, então, dados $\varepsilon > 0$ e $\delta : A \setminus T \longrightarrow \mathbb{R}_+$, existe uma partição diática δ -fine $\mathscr{P}$ em A mod T tal que $F(A \ominus \bigcup \mathscr{P}) > -\varepsilon$.*

Prova. Seja $\{C_1, \ldots, C_s\}$ uma coleção não-sobreposta de cubos diáticos tal que $A \subset C = \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} C_i$. Extenda F a uma função amigável inferiormente e superaditiva $\hat{F}$ em $\mathcal{F}(C)$ pondo $\hat{F}(B) = F(B \odot A)$ $\forall B \in \mathcal{F}(C)$. Escolha $\hat{\delta} : C \setminus (T \odot \cup \partial A) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\hat{\delta}(x) \leq \delta(x)$ $\forall x \in \mathring{A} \setminus T$ e $\hat{\delta}(x) < dist(x, \partial A)$ $\forall x \in C \setminus (T \cup \partial A)$. Pelo lema 2.3, para cada $i = 1, \ldots, s$, existe uma partição diática $\hat{\delta}$ - fine $\mathscr{P}_i$ em C_i mod $(T \cup \partial A)$ tal que $\hat{F}(C_i \ominus P_i) > \frac{-\varepsilon}{s}$, onde $P_i = \{B/(B, x) \in \mathscr{P}_i\}$. Como $\hat{\delta}(x) \leq dist(x, \partial A)$, $x \in C \setminus (T \cup \partial A)$, se $(B, x) \in \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} \mathscr{P}_i$ então teremos $B \subset \mathring{A}$ *ou* $B \cap A = \emptyset$. Seja $\mathscr{P} = \{(A_1, x_1), \ldots, (A_q, x_q\} \subset \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} \mathscr{P}_i$ tal que $A_i \subset \mathring{A}$ $\forall i = 1, \ldots, q$. Como $\hat{\delta}(x) \leq \delta(x)$, $x \in \mathring{A} \setminus T$, a partição $\mathscr{P}$ é δ - fine em A mod T e :

$$
\begin{aligned}
F(A \ominus \cup \mathscr{P}) &= F(A \bigcap \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} [C_i \ominus P_i]) \\
&= \hat{F}(\overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} [C_i \ominus P_i]) \\
&\geq \sum_{i=1}^{s} \hat{F}(C_i \ominus P_i) \\
&> -\sum_{i=1}^{s} \frac{\varepsilon}{s} \\
&= -\varepsilon.
\end{aligned}
$$

É importante observar que o mesmo argumento pode ser usado para substituir A por um conjunto limitado qualquer cuja fronteira é um conjunto magro, porém não iremos demonstrar tal resultado pois não o utilizaremos neste trabalho.

4 DERIVADAS INFERIORES E OS TEOREMAS de BESICOVITCH

Neste capítulo apresentaremos o resultado principal da dissertação. Para isso iremos extender o conceito de derivação à funções em figuras e desenvolver um lema que generaliza o teorema de Cauchy-Goursat para função holomorfas em quase todo ponto.

4.1 Derivadas Inferiores

Definição. 4.1. *Seja A uma figura e seja F uma função em $\mathcal{F}(A)$. Definimos a* ***derivação inferior*** *de F em um ponto $x \in \mathring{A}$ da seguinte forma:*

$$D_*F(x) = inf \left\{ \underset{n\to\infty}{lim\,inf} \left(\frac{F(C_n)}{\mathscr{L}^m(C_n)} \right) \right\}$$

onde o ínfimo dentro do limite é tomado sobre todas as sequências $\{C_n\}$ de cubos fechados contidos em A com $x \in C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} d(C_n) = 0$.

Teorema. 4.1. *Seja A uma figura e seja F uma função amigável inferirmente e superaditiva em $\mathcal{F}(A)$. Se existe um conjunto magro T tal que $D_*F(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathring{A} \setminus T$, então F é não-negativa.*

Prova. Como a restrição de F a $\mathcal{F}(B)$ é amigável inferiormente e superaditiva $\forall B \in \mathcal{F}(A)$, é suficiente provar que $\mathcal{F}(A) \geq 0$, pois daí, se $B \in \mathcal{F}(A)$, considere $\bar{F} = F|_{\mathcal{F}(B)}$, portanto $\bar{F}$ está nas condições do teorema e $\forall x \in \mathring{B} \setminus T \quad \Rightarrow \quad D_*F(x) \geq 0$ portanto $F(B) \geq 0$.

Para mostrar que $F(A) \geq 0$, escolha $\varepsilon > 0$. Como cada $x \in \mathbb{R}^n$ pertence a um número enumerável de cubos diáticos fechados, para cada $x \in \mathring{A} \setminus T \;\; \exists \delta(x) > 0$ tal que $\frac{F(C)}{\mathscr{L}^m(C)} > \frac{-\varepsilon}{2\mathscr{L}^m(A)}$ para cada cubo diático C com $x \in C$ e $d(C) < \delta(x)$.

Então, temos uma função $\delta : A \setminus (T \bigcup \partial A) \longrightarrow \mathbb{R}$ e pelo Lema 2.4 existe uma partição diática δ-fine $\mathscr{P}$ em A mod $(T \bigcup \partial A)$ tal que $F(A \ominus \bigcup \mathscr{P}) > \frac{-\varepsilon}{2}$. Portanto, se $\mathscr{P} = \{(A_1, x_1), \ldots, (A_p, x_p)\}$, temos :

$$\begin{aligned} F(A) &= F((A \ominus \bigcup A_i) \cup (\bigcup A_i)) \\ &\geq F(A \ominus \bigcup A_i) + \sum_{i=1}^{p} F(A_i) \\ &> -\frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon \mathscr{L}^m(A_i)}{2\mathscr{L}^m(A)} \\ &\geq -\varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é qualquer, segue que $F(A) \geq 0$.

É interessante notar que a condição $D_*F(x) \geq 0$ é mais do que suficiente. De fato, basta considerar o caso $D_dF(x) \geq 0$ em $\mathring{A} \setminus T$, onde $D_dF(x)$ é a **derivada diática inferior** definida como sendo

$$D_dF(x) = inf \left\{ \lim_{n\to\infty} inf \left(\frac{F(C_n)}{\mathscr{L}^m(C_n)} \right) \right\}$$

onde o ínfimo dentro do limite é tomado sobre todas as seqüências de cubos diáticos fechados contendo x em ordem decrescente e

$$\lim_{n\to\infty} d(C_n) = 0$$

Lema. 4.1. *Seja D um aberto simplesmente conexo do plano e sejam S um conjunto leve e T um conjunto M magro. Se $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é tal que f é limitada em cada subconjunto compacto de D, contínua em cada ponto de $D \setminus S$ e possui derivada complexa em cada ponto de $D \setminus T$. Então:*

$$\int_{\partial B} f(z)dz = 0$$

para todo retângulo $R \subset D$.

Prova. Seja $R \subset D$ um retângulo. Defina:

$$F(B) = - \mid \int_{\partial B} f(z)dz \mid \ e \ F(\emptyset) = 0$$

para toda figura $B \subset R$. Claramente F é superaditiva. De fato, sejam $A, B \subset R$ figuras tais que $\emptyset = A \odot B = \overline{[(A \overset{\circ}{\bigcap} B)]}$. Então:

$$\begin{aligned}
F(A \bigcup B) &= - \mid \int_{\partial(A \bigcup B)} f(z)dz \mid \\
&= - \mid \int_{(\partial A \bigcup \partial B)} f(z)dz \mid \\
&= - \mid \int_{\partial A} f(z)dz \ + \int_{\partial B} f(z)dz \mid \\
&\geq - \mid \int_{\partial A} f(z)dz \mid \ - \ \mid \int_{\partial B} f(z)dz \mid \\
&= \ F(A) \ + \ F(B)
\end{aligned}$$

Pelo exemplo do capítulo 02, F é amigável. Escolha $z \in R \setminus T$. Como $f'(z)$ existe, podemos escrever:

$$f(\xi) = f(z) + f'(\xi - z) + \phi_z(\xi)(\xi - z)$$

onde $\phi_z(\xi) \to 0 \ \ quando \ \ \xi \to z$.

Escolha $\varepsilon > 0$ e seja $\delta > 0$ tal que $|\phi_z(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$ quando $|\xi - z| < \delta$. Então para qualquer quadrado $C \subset R$ com $z \in C$ e $d(C) < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned}
|\int_{\partial C} f(\xi)d\xi| &= |\int_{\partial C} \phi_z(\xi)(\xi - z)d\xi| \\
&\leq \int_{\partial C} |\phi_z(\xi)|\ |(\xi - z)|\ |dz| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} d(C)\mathscr{H}^{m-1}(\partial C) \\
&= \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}.\sqrt{2}.a.4a \\
&= \varepsilon a^2 \\
&= \varepsilon \mathscr{L}^m(C)
\end{aligned}$$

Portanto, $-F(C) \leq \varepsilon \mathscr{L}^m(C) \implies \frac{F(C)}{\mathscr{L}^m(C)} \geq -\varepsilon$. Como ε é arbitrário, devemos ter $\frac{F(C)}{\mathscr{L}^m(C)} \geq 0$ e portanto $D_*F(z) \geq 0\ \forall z$. Pelo Teorema 3.1, devemos ter $F(R) \geq 0$, porém, F é não-positiva, o que nos dá $F(R) = 0$ portanto $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$.

Lembre que , como C é um quadrado de lado a, temos que $d(C) = a$, $\mathscr{H}^{m-1}(\partial C)$ é o perímetro $4a$ e $\mathscr{L}^m(C)$ é a área a^2 . Portanto $|\xi - z| \leq a\sqrt{2} = \sqrt{2}d(C)$

4.2 Teorema de Besicovitch

Nesta seção iremos apresentar uma demonstração alternativa do teorema de Besicovitch utilizando os resultados aqui desenvolvidos.

Definição. 4.2. *Seja V um quadrado aberto do plano. Um caminho γ em V será chamado de **caminho admissível** se ele for constituído de um número finito de segmentos de retas paralelos aos eixos coordenados.*

Teorema. 4.2 (Besicovitch)**.** *Seja D um aberto simplesmente conexo do plano e seja $S \subset D$ um conjunto leve e $T \subset D$ um conjunto magro. Se $f(x)$ é uma função de variável complexa em D que é limitada em cada compacto contido em D, contínua em $D \setminus S$ e possui derivada complexa em $D \setminus T$, então f é igual, em $D \setminus T$ a uma função analítica em D.*

Prova. Escolha um quadrado aberto V tal que $\overline{V} \subset D$. Fixe $z_0 \in V$ e para cada $z \in V$ defina

$$g(z) = \int_\gamma f(\xi)d\xi \qquad (*)$$

onde γ é um caminho admissível qualquer e V ligando Z_0 *a* z. Observe que, como S é um conjunto leve e f é contínua em $D \setminus T$, a integral em $(*)$ sempre existe. Além disso, a integral em $(*)$ não depende do caminho adimissível escolhido. De fato, seja $z \in V$ e γ *e* α caminhos adimissíveis ligando z_0 a z. Dessa forma, devemos ter:

$$\gamma \ = \ \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n \quad e \quad \alpha \ = \ \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_m$$

Daí, temos que:

$$\int_{\gamma * \alpha^-} f(\xi) d\xi \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(\xi) d\xi \ + \ \sum_{j=1}^{m} \int_{\alpha_j^-} f(\xi) d\xi$$

Logo podemos recortar a região limitada por $\gamma * \alpha^-$ em um número finito de retângulos por meio de um número finito de segmentos de retas $\{s_i\}_{i=1}^{p}$ paralelos aos eixos. Assim,

$$\int_{\gamma * \alpha^-} f(\xi) d\xi \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(\xi) d\xi \ + \ \sum_{j=1}^{m} \int_{\alpha_j^-} f(\xi) d\xi \ + \ \sum_{k=1}^{p} \int_{s_k} f(\xi) d\xi \ + \ \sum_{k=1}^{p} \int_{s_k^-} f(\xi) d\xi$$

Rearranjando a soma acima, obtemos:

$$\int_{\gamma * \alpha^-} f(\xi) d\xi \ = \ \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial R_i} f(\xi) d\xi$$

onde $\{R_i\}_{i=1}^{q}$ são os retângulos obtidos pela adição dos $\{s_j\}_{j=1}^{p}$. Daí, pelo lema anterior,

$$\int_{\partial R_i} f(\xi) d\xi \ = \ 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, q \quad \Longrightarrow \quad \int_{\gamma * \alpha^*} f(\xi) d\xi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\gamma} f(\xi) d\xi \ = \ \int_{\alpha} f(\xi) d\xi$$

Portanto, $g(z)$ está bem definida.

Afirmamos que g é contínua. De fato, seja $K \subset D$ e seja $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|f(z)| \leq k_0 \ \forall z \in K$. Considere $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que $z_n \longrightarrow z \in K$. Dado $\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2k_0}}(z) \quad \forall n > n_0$. Daí, para $n > n_0$, considere γ_n como sendo um caminho admissível ligando z_0 a z_n e considere $\tilde{\gamma_n}$ como sendo um caminho admissível ligando z_n até z formado por no máximo 2 segmentos. Note que $\gamma_n * \tilde{\gamma_n}$ é um caminho admissível ligando z_0 a z. Daí,

$$
\begin{aligned}
|\ g(z)\ -\ g(z_n)\ | &= |\int_{\gamma_n * \tilde{\gamma}_n} f(\xi)d\xi\ -\ \int_{\gamma_n} f(\xi)d\xi\ | \\
&= |\int_{\tilde{\gamma_n}} f(\xi)d\xi\ | \\
&\leq \int_{\tilde{\gamma}_n} |f(\xi)|\ |d\xi| \\
&\leq k_0\ .\ 2\ .\ \frac{\varepsilon}{2k_0} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Como a seqüência $\{z_n\}$ é qualquer, segue que g é contínua.

Mais ainda, se $z, w \in V$, γ_1 é um caminho admissível ligando z_0 a z , γ_2 é um caminho admissível ligando z_0 a w e γ é um caminho admissível ligando z e w, então:

$$
\begin{aligned}
|(g(w) - g(z)) - f(z)(w - z)| &= |\int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma_2} f(\xi)d\xi - f(z)\int_{\gamma} d\xi\ | \\
&= |\int_{\gamma}(f(\xi) - f(z))d\xi\ | \\
&\leq \int_{\gamma} |f(\xi) - f(z)|\ |d\xi| \\
&\leq l(\gamma)\ \underset{\zeta\in\gamma}{max}|f(\zeta) - f(z)|
\end{aligned}
$$

Como γ é um caminho admissível qualquer, podemos tomar γ tal que $l(\gamma) \leq 2|w - z|$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se $|w - z|\ <\ \frac{\varepsilon}{2\underset{\zeta\in\gamma}{max}|f(\zeta)-f(z)|}$ temos:

$$
|(g(w) - g(z)) - f(z)(w - z)|\ <\ \varepsilon.
$$

E portanto g possui derivada complexa igual a $f(z)$ em todo ponto $z \in V$ onde f é contínua. Consequentemente, pelo Lema anterior, $\int_{\partial R} g(\xi)d\xi\ =\ 0$ para todo retângulo $R \subset V$. Por fim , o teorema de Morera nos diz que g é analítica. Além disso, de $(*)$, obtemos que $f = g'$ em V sempre que f for contínua em z. Como V é arbitrário, a prova do teorema está completa.

Observe que há uma generalização natural dos teoremas de Besicovitch para o caso de D não ser simplesmente conexo. Nesse caso basta tomar uma cobertura $\{A_\alpha\}$ de D, com α variando em um conjunto de índices, por bolas abertas. Aplicamos o teorema em cada uma das bolas $\{A_\alpha\}$ e observamos que se f_{α_1} é a extenção de $f|_{A_{\alpha_1}}$ e f_{α_2} é a extenção de $f|_{A_{\alpha_2}}$ então $f_{\alpha_1}\ =\ f_{\alpha_2}$ em $V\ =\ A_{\alpha_1}\bigcap A_{\alpha_2}$. De fato, no caso do primeiro teorema, temos que a extenção de f coincide com a extenção por continuidade, logo f_{α_1} e f_{α_2} são contínuas em V e ambas coincidem com f nos pontos onde f é contínua, logo

$f_{\alpha_1} = f_{\alpha_2}$. No caso do segundo teorema temos continuidade por hipótese, portanto o resultado segue pelo argumento acima.

Corolário 4.1. *Sejam R uma superfície de Riemann, $D \subset R$ um domínio e $S, T \subset R$ tais que S é um conjunto leve e T é um conjunto magro. Se $f : R \longrightarrow \mathbb{C}$ é limitada em cada compacto contido em R, contínua em cada ponto de $R \setminus S$ e é diferenciável em $D \setminus T$, então f pode ser extendida a uma função holomorfa definida em toda superfície R.*

Prova. Considere (φ, U) uma carta local de D. Dessa forma temos que $\varphi(U)$ é um domínio em $\mathbb{C}$, $\varphi(S) \subset \mathbb{C}$ é um conjunto leve e $\varphi(T) \subset \mathbb{C}$ é um conjunto magro e $f \circ \varphi^{-1}$ é limitada em cada compacto contido em $\varphi(U)$, contínua em $\varphi(U) \setminus \varphi(S)$ e possui derivada complexa em $\varphi(U) \setminus \varphi(T)$. Assim, aplicamos o teorema e obtemos uma função f_1 que é a extenção holomorfa de $f \circ \varphi^{-1}$ em todo $\varphi(U)$. Defina $\overline{f} = f_1 \circ \varphi$. Daí segue que $\overline{f}$ é uma extenção holomorfa de $f|_U$. Por fim, para cada ponto $p \in R$ considere a vizinhança V_p obtida da carta coordenada que contém o ponto p. Assim, $\bigcup\limits_{p \in R} V_p$ é uma cobertura para R e, daí, podemos tomar a partição da unidade $\{\rho_p\}_{p \in R} : R \longrightarrow [0, 1]$ subordinada à essa cobertura. Dessa forma, defina $F(x) = \sum\limits_{p \in R} \rho_p(x)\overline{f_p}(x)$, onde $\overline{f_p}$ é extenção de f em V_p. Assim obtemos uma função globalmente definita F que extende f.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho foi um abordagem alternativa na resolução de um problema clássico, a saber, extensão de funções, onde apresentamos uma tecnica menos trabalhosa e mais elegante que a apresentada originalmente por Besicovitch. Para isso, me foi exigido o aprendizado de vários resultados e técnicas ultilizadas frequentemente em análise complexa e teoria da medida. Os resultados do capítulo 1 e do capítulo 2 me serviram vastamente neste intuito. Como pontos forte posso citar o teorema de Morera. Por fim, ainda vale citar a notável vantagem do método aqui proposto que consiste em eliminar a hipótese do domínio ser simplesmente conexo, o que deixa o teorema substancialmente mais forte.

REFERÊNCIAS

AHLFORS, L. V. *Complex Analisis.* MacGraw-Hill Book Company, 1966.

BESICOVITCH, A. S. *On suficiente conditions for a function to be analytic, and behaviour of analaytic functions in the neighborhood of non-isolated singular points.* Proc. London Math. Soc. 32, p. 1-9, 1931.

CARTAN, H. *Elementary theory of analytic function of one or several complex variables.* Dover publications, Inc. New York, 1995.

CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, 1973.

EVANS, L. C. *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Inc: Flórida, 1992.

FALCONER, K. J. *The geometry of fractal sets*, Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1985.

FEDERER, H. *Geometric measure theory*, Springer-Verlag: New York, 1969.

GRAY J. D.; MORRIS S. A. *When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann Equations Analytic?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 4, p. 246-256, 1978.

LINS NETO, A. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

ROGERS, C.A. *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1998.

RUDIN, W. *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Inc: Ljubljana, 1970.

SAKS, S. *Theory of the integral*, Dover: New York, 1964.