



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DIEGO DE SOUSA RODRIGUES

DESIGUALDADES DE HITCHIN-THORPE

E MIYAOKA-YAU

FORTALEZA  
2014

DIEGO DE SOUSA RODRIGUES

DESIGUALDADES DE HITCHIN-THORPE  
E MIYAOKA-YAU

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

R612d      Rodrigues, Diego de Sousa  
Desigualdades de Hitchin-Thorpe e Miyaoka-Yau / Diego de Sousa Rodrigues. – 2014.  
55 f. : il., enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2014.  
Área de Concentração: Geometria Diferencial  
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Geometria diferencial. 2. Teorema de Gauss-Bonnet. 3. Variedades riemanianas. I. Título.

---

CDD 516.36

DIEGO DE SOUSA RODRIGUES

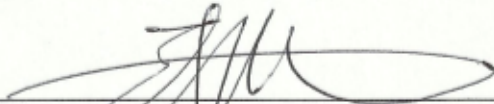
DESIGUALDADES DE HITCHIN-THORPE  
E MIYAOKA-YAU


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

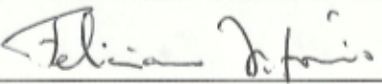
Área de concentração: Geometria.

Aprovado em: 23/05/2014.

BANCA EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório  
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que  
contribuíram direta ou indiretamente com a  
sua realização.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado sabedoria e força durante minha vida, por ter sido meu porto seguro diante das adversidades que encontrei pelo caminho que trilhei e por ter iluminado minha mente durante a realização desse trabalho.

À Jessica, essa princesa que Deus colocou em minha vida, pela paciência e incentivo nesses últimos 5 anos, por todas as vezes que me falou para não me preocupar, que tudo iria dar certo, obrigado por estar com a razão. Obrigado pela força e amor.

À minha família por estar ao meu lado durante toda a minha caminhada acadêmica. À minha mãe que me incentivou a seguir o caminho dos estudos e por comemorar minhas conquistas. Ao meu pai que sempre se esforçou para não faltar nada em nosso lar e pelo incentivo de ingressar e permanecer na área em que me encontro.

Aos meus colegas de graduação Dione, João Luiz e Kairo, pelo companheirismo e debates de questões durante o curso.

Também agradeço aos meus colegas de pós-graduação, que estiveram comigo durante essa caminhada, as discussões matemáticas com Airton, Davi, João Luiz e Rafael acompanhadas sempre de um café e soluções para algum problema na área.

Agradeço ao professor Ernani Ribeiro, pela orientação, conselhos e paciência em solucionar minhas dúvidas. Ao professor Abdênego Barros e Feliciano Vitório por aceitarem participar da banca.

Ao professor Daniel Cibotaru por ter esclarecido algumas dúvidas que tive durante a elaboração desse trabalho.

À Andrea e a Jessyca pela competência e agilidade.

À Rocilda pela revisão deste trabalho e sugestões.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

O objetivo desse trabalho é fornecer uma demonstração para as desigualdades de Hitchin-Thorpe e Miyaoka-Yau. Inicialmente forneceremos uma decomposição ortogonal para o tensor curvatura, em seguida mostraremos como o operador curvatura pode ser definido a partir do tensor curvatura. Com o intuito de cumprir o objetivo proposto, iremos provar o Teorema de Gauss-Bonnet em dimensão 4, para isso utilizaremos um resultado devido a Allendoerfer e forneceremos uma fórmula integral para o cálculo da característica de Euler de uma variedade Riemanniana de dimensão 4. Além disso, definiremos o conceito de assinatura em uma variedade Riemanniana e exibiremos uma fórmula integral para a obtenção deste objeto, para isso utilizaremos o Teorema de Assinatura de Hirzebruch em dimensão 4 e pouco da Teoria de Chern-Weil que nos fornece uma conexão entre a topologia algébrica e a geometria diferencial. Por fim, mostraremos como as fórmulas que foram obtidas podem ser utilizadas na demonstração das desigualdades citadas inicialmente.

**Palavras-chave:** Hitchin-Thorpe. Miyaoka-Yau. Teorema de Gauss-Bonnet. Assinatura.

## ABSTRACT

The aim of this work is to present a proof of the Hitchin-Thorpe and Miyaoka-Yau inequalities. First we provide an orthogonal decomposition for the curvature tensor, and then we show how the curvature operator can be defined from the curvature tensor. In order to fulfill the proposed objective, we prove the Gauss-Bonnet Theorem in dimension 4, to do this we use a result due Allendoerfer and we present an integral formula for the Euler characteristic computation on a Riemannian 4-manifold. Furthermore, we define the concept of signature in a Riemannian manifold and we exhibit an integral formula for the achievement of this object, for this we use the Hirzebruch Signature Theorem in dimension 4 and the Chern-Weil Theory which provides us a connection between algebraic topology and differential geometry. Finally, we show how the earlier formulas can be used in the demonstration of the initial inequalities.

**Keywords:** Hitchin-Thorpe. Miyaoka-Yau. Gauss-Bonnet Theorem. Signature.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A dimensão 4 . . . . .	10
Figura 2 – Estruturas em uma variedade de dimensão 4 . . . . .	23

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	PRELIMINARES . . . . .	12
2.1	Formas Diferencial . . . . .	12
2.2	Tensor Curvatura . . . . .	18
2.3	Fibrados Vetoriais e Cociclos . . . . .	20
2.4	Equações de Seiberg-Witten . . . . .	21
3	DECOMPOSIÇÃO ORTOGONAL DO TENSOR CURVATURA .	30
3.1	O Operador Curvatura . . . . .	36
4	VARIEDADES COMPACTAS DE DIMENSÃO 4 . . . . .	42
4.1	Característica de Euler . . . . .	42
4.2	Assinatura de uma Variedade . . . . .	46
4.3	Desigualdade de Hitchin-Thorpe . . . . .	50
4.4	Desigualdade de Miyaoka-Yau . . . . .	51
5	CONCLUSÃO . . . . .	53
	REFERÊNCIAS . . . . .	54

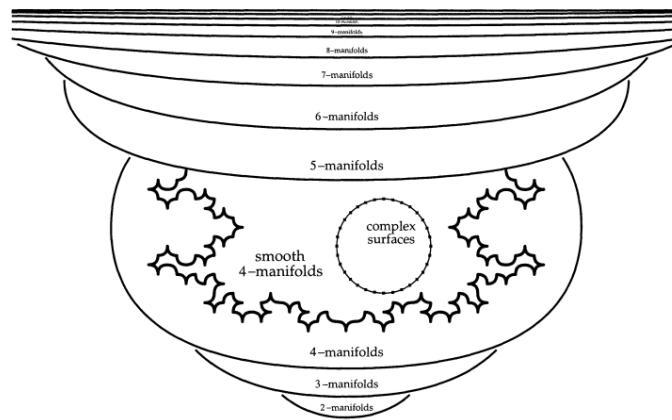
## 1 INTRODUÇÃO

Quando estudamos variedades topológicas compactas (sem bordo) de dimensão 4 percebemos algumas propriedades exclusivas dessa dimensão, de fato, se  $M^n$  é uma variedade topológica compacta de dimensão  $n$ , então

- Se  $n \leq 3$ , existe exatamente uma única estrutura suave que torna  $M$  uma variedade diferenciável;
- Se  $n \geq 5$ , existe uma quantidade finita de estruturas suaves em  $M$ ;
- Se  $n = 4$ , existem várias variedades topológicas fechadas simplesmente conexas que admite uma quantidade infinita de estruturas distintas e não sabemos da existência de alguma variedade topológica fechada que tenha somente uma quantidade finita de estruturas suaves.

No caso da variedade topológica  $\mathbb{R}^n$ , se  $n \neq 4$ , então  $\mathbb{R}^n$  admite uma única estrutura suave, entretanto, quando  $n = 4$ ,  $\mathbb{R}^n$  admite uma quantidade não enumerável de estruturas suaves distintas. Assim, as variedades de dimensão 4 possuem um comportamento bem peculiar em relação às demais variedades de outras dimensões.

Figura 1 – A dimensão 4



FONTE: SCORPAN,2005,p.3

Nesse trabalho iremos abordar duas desigualdades envolvendo a característica de Euler  $\chi$  e a assinatura  $\tau$  de uma variedade de dimensão 4.

Primeiramente mostraremos que em uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $n$  podemos decompor o tensor curvatura da seguinte forma:

$$Rm = W^+ + W^- + \frac{1}{n-2} E \otimes g + \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g,$$

onde  $E = Ric - \frac{R}{n}g$  e  $W^+$  e  $W^-$  são, respectivamente, a parte autodual e antiautodual do tensor de Weyl.

Na sequência, considerando essa decomposição, provaremos as seguintes fórmulas para uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 4:

$$\chi(M^4) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left( |W|^2 - \frac{1}{2}|E|^2 + \frac{R^2}{24} \right) d\mu$$

e

$$\tau(M^4) = \frac{1}{12\pi^2} \int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2) d\mu.$$

Utilizando essas fórmulas forneceremos uma prova para a famosa desigualdade de Hitchin-Thorpe, mais especificamente provaremos o seguinte teorema.

**Teorema 1.1 (Hitchin-Thorpe,1974)** *Se uma variedade diferenciável  $M$  compacta de dimensão 4 admite uma métrica Einstein  $g$ , então*

$$\chi \geq \frac{3|\tau|}{2}.$$

A seguir, como uma outra aplicação para as fórmulas de  $\chi$  e  $\tau$ , demonstraremos a desigualdade de Miyaoka-Yau. Essa desigualdade foi apresentada por Y. Miyaoka em 1974, mas não havia nenhuma informação sobre o que ocorria no caso da igualdade, o que foi feito em 1977 por S.T. Yau. Nesse trabalho forneceremos uma prova para essa desigualdade na forma de um teorema apresentado em 1995 por C. Lebrun.

**Teorema 1.2 (Lebrun,1995)** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Einstein compacta não-flat que admite uma estrutura quase-complexa. Dada em  $M$  a orientação e a estrutura  $spin^c$  induzida, suponha que  $\mathcal{SW}_M(\mathfrak{s}) \neq 0$ . Então a característica de Euler  $\chi$  e a assinatura  $\tau$  de  $M$  satisfazem*

$$\chi \geq 3\tau,$$

*com igualdade se, e somente se, o recobrimento universal de  $(M, g)$  é o espaço hiperbólico complexo, de dimensão (complexa) 2,  $\mathbb{C}\mathcal{H}_2 := SU(2, 1)/U(2)$ , com uma constante múltipla da sua métrica padrão.*

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto. Para uma leitura complementar indicamos [5],[10],[18],[20] e [22].

### 2.1 Formas Diferencial

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , considere  $\Lambda^k M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M)$ . Uma seção desse espaço é denominada uma *k-forma diferencial*, ou simplesmente, *k-forma*.

**Definição 2.1** Se  $\alpha \in \Lambda^p M$  e  $\beta \in \Lambda^q M$ , então definimos o **produto exterior** como

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (\text{sgn } \sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \cdot \beta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}),$$

onde  $S_{p+q}$  denota o grupo de permutações do conjunto  $\{1, \dots, p+q\}$  e

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} +1 & , \text{ se } \sigma \text{ é par} \\ -1 & , \text{ se } \sigma \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Para mais detalhes veja [18].

Para cada ponto  $p \in M^n$  de uma variedade Riemanniana orientada podemos encontrar  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base para  $T_p M$ , dualizando essa base encontramos  $\{e^1, \dots, e^n\}$  uma base para  $T_p^* M$ . É possível expressar uma *k-forma*  $\omega \in \Lambda^k(T_p M)$  em termos dessa base da seguinte forma:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}.$$

**Proposição 2.1** Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana orientada e considere  $\omega, \eta \in \Lambda^k(T_p M)$ . Fazendo  $\eta^{i_1 \dots i_k} = \sum_{j_1, \dots, j_k} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \eta_{j_1 \dots j_k}$ , definimos

$$\langle \omega, \eta \rangle_g = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \eta^{i_1 \dots i_k}, \quad (1)$$

desse modo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$  define um produto interno em  $\Lambda^k(T_p M)$ .

**Prova:** Suponha que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial ortonormal local, considerando  $\{e^I; I \text{ crescente}\}$  uma base ortonormal para  $\Lambda^k(T_p M)$ . Verifiquemos que (1) define um produto interno. Note que nesse caso  $\eta^{i_1 \dots i_k} = \eta_{i_1 \dots i_k}$ .

(i) Tomando  $\omega \in \Lambda^k(T_pM)$ , temos

$$\begin{aligned}\langle \omega, \omega \rangle_g &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k})^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Note que  $\langle \omega, \omega \rangle_g = 0$  se, e somente se, cada  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  é nulo, assim  $\langle \omega, \omega \rangle_g = 0$  se, e somente se,  $\omega = 0$ .

(ii) Tomando  $\omega, \eta \in \Lambda^k(T_pM)$ , temos que

$$\begin{aligned}\langle \omega, \eta \rangle_g &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1 \dots i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \\ &= \langle \eta, \omega \rangle_g.\end{aligned}$$

(iii) Seja  $\omega, \eta, \theta \in \Lambda^k(T_pM)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned}\langle \omega + \lambda\eta, \theta \rangle_g &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} + \lambda\eta_{i_1 \dots i_k})\theta_{i_1 \dots i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \theta_{i_1 \dots i_k} + \lambda \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1 \dots i_k} \theta_{i_1 \dots i_k} \\ &= \langle \omega, \theta \rangle_g + \lambda \langle \eta, \theta \rangle_g.\end{aligned}$$

Em outra base, basta escrever os elementos como combinação linear dos elementos da base ortonormal.  $\square$

Apresentaremos a seguir o operador estrela de Hodge que é muito útil em geometria Riemanniana, especialmente em dimensão 4.

**Proposição 2.2** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana orientada. Para cada  $k = 0, \dots, n$ , existe uma única aplicação  $*$  :  $\Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{n-k} M$  satisfazendo*

$$\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta \rangle_g dV_g$$

(para  $k = 0$ , interpretamos o produto interno como a multiplicação usual). Esta aplicação é denominada o **Operador estrela de Hodge**.

**Prova:** Seja  $k = 0, \dots, n$ , definindo localmente  $*$  como na Proposição 2.1, de modo que

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \pm(e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}),$$

com a permutação  $\sigma$  de  $(1, \dots, n)$  dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) \wedge *(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) &= e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{n-k}} \\ &= e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_n} = dV_g. \end{aligned} \quad (2)$$

Pela Proposição 2.1 temos

$$\langle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \rangle_g = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (\delta_{j_1 \cdots j_k}^{i_1 \cdots i_k})^2 = 1.$$

De (2) temos

$$\begin{aligned} (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) \wedge *(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) &= dV_g \\ &= 1 \cdot dV_g \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (\delta_{j_1 \cdots j_k}^{i_1 \cdots i_k})^2 dV_g \\ &= \langle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \rangle dV_g. \end{aligned}$$

Suponha que existisse um outro operador  $\star$  satisfazendo a mesma propriedade, teríamos

$$\begin{aligned} (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) \wedge *(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) &= \langle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \rangle_g \\ &= dV_g \\ &= (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) \wedge \star(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}). \end{aligned}$$

Logo

$$*(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) = \star(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}).$$

Portanto,  $*$  =  $\star$ , pois em cada elemento da base as operações coincidem, então  $*$  é único. Note também que  $*$  :  $\Lambda^k(T_p M) \rightarrow \Lambda^{n-k}(T_p M)$  é linear, pois tomando  $\omega, \eta, \theta \in \Lambda^k(T_p M)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \omega \wedge *( \eta + \lambda \theta ) &= \langle \omega, \eta + \lambda \theta \rangle_g dV_g \\ &= \langle \omega, \eta \rangle_g dV_g + \lambda \langle \omega, \theta \rangle_g dV_g \\ &= \omega \wedge * \eta + \lambda (\omega \wedge * \theta). \end{aligned}$$

□

**Lema 2.1** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana orientada e considere o operador estrela de Hodge  $*$  :  $\Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{n-k} M$ . Se  $\omega \in \Lambda^k(M)$ , então  $**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$ .*

**Prova:** Seja  $\{e^{i_1}, \dots, e^{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_{n-k}}\}$  uma base ortonormal para  $T_p^*M$ , onde  $(\varepsilon_i)$  é o correferencial dual para um referencial ortonormal local.

Supondo que

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}).$$

Então

$$**(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \pm e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k},$$

dependendo se  $\{e^{i_1}, \dots, e^{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_{n-k}}\}$  é uma base positiva ou negativa de  $M$ . Assim,

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge \dots \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}} = (-1)^{k(n-k)} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}} \wedge \dots \wedge e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}.$$

O expoente deve-se ao fato de termos realizado  $k(n-k)$  permutações. Logo  $(-1)^{k(n-k)}$  é o determinante da matriz mudança de base de  $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}$  para  $e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ . O caso geral é feito escrevendo uma  $k$ -forma em função da base ortonormal considerada na demonstração.  $\square$

**Proposição 2.3** *Seja  $(M^4, g)$  uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4. Então podemos decompor o espaço  $\Lambda^2 M$  utilizando o operador  $*$  :  $\Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ , de modo que*

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M.$$

*Denotamos  $\Lambda^+ M$  a parte autodual de  $\Lambda^2 M$  e  $\Lambda^- M$  a parte antiautodual de  $\Lambda^2 M$ .*

**Prova:** De fato, do Lema (2.1) temos que  $** = Id$ . Assim, se  $\omega \in \Lambda^2 M$  e supondo que  $\lambda \in \mathbb{R}$  é seu autovalor associado, temos então  $*\omega = \lambda\omega$ , daí  $**\omega = \lambda*\omega$ , portanto  $\omega = \lambda^2\omega$ , o que implica  $\lambda = \pm 1$ .

Portanto, definimos  $\Lambda^\pm = \{\omega \in \Lambda^2 M; *\omega = \pm\omega\}$ . Note que  $(\omega - *\omega) \in \Lambda^- M, \forall \omega \in \Lambda^2 M$ . De fato,

$$\begin{aligned} *(\omega - *\omega) &= *\omega - **\omega \\ &= *\omega - \omega \\ &= -(\omega - *\omega). \end{aligned}$$

De forma análoga podemos mostrar que  $(\omega + *\omega) \in \Lambda^+ M, \forall \omega \in \Lambda^2 M$ .

$$\begin{aligned} *(\omega + *\omega) &= *\omega + **\omega \\ &= *\omega + \omega \\ &= \omega + *\omega. \end{aligned}$$



Assim, tomando  $\omega \in \Lambda^2 M$ , temos

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega + *\omega) + \frac{1}{2}(\omega - *\omega).$$

Portanto,

$$\omega = \omega^+ + \omega^- \in \Lambda^+ M + \Lambda^- M.$$

É imediato verificar que  $\eta \in \Lambda^+ M \cap \Lambda^- M$  se, e somente se,  $\eta = 0$ . Portanto,

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M.$$

O que prova a proposição. □

Assim como no caso de  $T_p^* M$ , os espaços  $\Lambda^\pm M$  apresentados anteriormente possuem uma base induzida pela escolha de uma base ortonormal orientada  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  de  $T_p M$ .

**Proposição 2.4** *Seja  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base ortonormal orientada em  $T_p M$  e  $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$  o correferencial dual dessa base. Então*

$$e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^\pm M,$$

$$e^1 \wedge e^3 \pm e^4 \wedge e^2 \in \Lambda^\pm M \text{ e}$$

$$e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3 \in \Lambda^\pm M.$$

**Prova:** De fato, temos

$$\begin{aligned} *(e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4) &= *(e^1 \wedge e^2) \pm *(e^3 \wedge e^4) \\ &= e^3 \wedge e^4 \pm e^1 \wedge e^2 \\ &= \pm(e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4). \end{aligned}$$

Seguindo a mesma idéia obtemos

$$\begin{aligned} *(e^1 \wedge e^3 \pm e^4 \wedge e^2) &= *(e^1 \wedge e^3) \pm *(e^4 \wedge e^2) \\ &= e^4 \wedge e^2 \pm e^1 \wedge e^3 \\ &= \pm(e^1 \wedge e^3 \pm e^4 \wedge e^2). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} *(e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3) &= *(e^1 \wedge e^4) \pm *(e^2 \wedge e^3) \\ &= e^2 \wedge e^3 \pm e^1 \wedge e^4 \\ &= \pm(e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3). \end{aligned}$$

O que prova a proposição. □

Note agora que qualquer  $\omega \in \Lambda^2 M$  pode ser escrito como

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega + *\omega) + \frac{1}{2}(\omega - *\omega) = \omega^+ + \omega^- \in \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M.$$

Considere  $L : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$  uma aplicação linear, então

$$L(\omega) = L(\omega^+ + \omega^-) = L(\omega^+) + L(\omega^-).$$

Agora podemos decompor  $L(\omega^+)$  e  $L(\omega^-)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} L(\omega^+) &= \frac{1}{2}(L(\omega^+) + *L(\omega^+)) + \frac{1}{2}(L(\omega^+) - *L(\omega^+)) \\ &= L(\omega^+)^+ + L(\omega^+)^- \in \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$L(\omega^-) = L(\omega^-)^+ + L(\omega^-)^- \in \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M.$$

Logo, a decomposição em blocos é dada por

$$L = \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} A(\omega^+) &= L(\omega^+)^+, & C(\omega^-) &= L(\omega^-)^-, \\ B(\omega^-) &= L(\omega^-)^+ & \text{e} & D(\omega^+) = L(\omega^+)^-. \end{aligned}$$

Isso demonstra a seguinte proposição:

**Proposição 2.5** *Seja  $L : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$  uma aplicação linear. Então  $L$  possui uma decomposição em blocos*

$$L = \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix}, \tag{3}$$

onde

$$A : \Lambda^+ M \rightarrow \Lambda^+ M,$$

$$D : \Lambda^+ M \rightarrow \Lambda^- M,$$

$$B : \Lambda^- M \rightarrow \Lambda^+ M,$$

$$C : \Lambda^- M \rightarrow \Lambda^- M.$$

## 2.2 Tensor Curvatura

**Definição 2.2** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o  $(1,3)$ -tensor  $Rm : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por*

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor  $Rm$  como um  $(0,4)$ -tensor, definido por  $Rm : \mathfrak{X}^4(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  da seguinte forma:

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(Rm(X, Y)Z, W).$$

**Proposição 2.6** *O tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades:*

1.  $Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(Y, X, Z, W) = Rm(Y, X, W, Z)$ ;
2.  $Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y)$ ;
3. *Primeira Identidade de Bianchi*

$$Rm(X, Y)Z + Rm(Y, Z)W + Rm(W, X)Y = 0;$$

4. *Segunda Identidade de Bianchi*

$$(\nabla_Z Rm)(X, Y)W + (\nabla_X Rm)(Y, Z)W + (\nabla_Y Rm)(Z, X)W = 0.$$

Uma prova pode ser vista em [20].

**Definição 2.3** *Dado  $p \in M$ , seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional. A **curvatura seccional** de  $\sigma$  em  $p$  é dada por*

$$K(X, Y) = \frac{g(Rm(X, Y)Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2},$$

onde  $X, Y \in \sigma$  são dois vetores linearmente independentes de  $T_p M$ . Esta definição não depende da escolha dos vetores (veja Capítulo 4 de [11]).

**Definição 2.4** O *tensor curvatura de Ricci*,  $Ric : \mathfrak{X}(M)^2 \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$  é o  $(0,2)$ -tensor obtido pelo traço do tensor curvatura de Riemman. Se  $\{e_1, \dots, e_n\} \in T_p M$  é uma base ortonormal, então

$$\begin{aligned} Ric(v, w) &= tr\{x \mapsto Rm(x, v)w\} \\ &= \sum_{i=1}^n g(Rm(e_i, v)w, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(Rm(v, e_i), e_i, w) \\ &= \sum_{i=1}^n g(Rm(e_i, w)v, e_i). \end{aligned}$$

Assim,  $Ric$  é uma forma bilinear simétrica, donde também pode ser definido como o  $(1,1)$ -tensor simétrico

$$Ric(v) = \sum_{i=1}^n Rm(v, e_i)e_i.$$

Se  $(M, g)$  satisfaz  $Ric(v) = kv$ , ou equivalentemente,  $Ric(v, v) = kg(v, v)$ , onde  $k : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função em  $M$ , então  $(M, g)$  é dita uma **variedade de Einstein** [5].

**Definição 2.5** A *curvatura escalar* de uma variedade Riemanniana é a função  $R : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$R = tr Ric.$$

Em particular, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ , então

$$\begin{aligned} R &= tr Ric \\ &= \sum_{j=1}^n g(Ric(e_j), e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g(Rm(e_i, e_j)e_j, e_i) \\ &= 2 \sum_{i < j} g(Rm(e_i, e_j)e_j, e_i) \\ &= 2 \sum_{i < j} K(e_i, e_j). \end{aligned}$$

## 2.3 Fibrados Vetoriais e Cociclos

Nessa seção daremos uma definição alternativa para o fibrado vetorial de uma variedade diferenciável utilizando cociclos, para isso relembremos algumas definições básicas.

Um **fibrado vetorial**  $E$  de posto  $k$  sobre  $M^m$  (também denotado como um **k-plano fibrado** sobre  $M$ ) é uma variedade aberta  $E$  de dimensão  $m+k$  munida de uma aplicação  $p : E \rightarrow M$  tal que suas fibras  $p^{-1}(x)$  são espaços vetoriais isomorfos a  $\mathbb{R}^k$ , e  $p$  localmente é semelhante a projeções  $U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ .

Em outras palavras, existe uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  e um atlas de aplicações  $\{\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^k\}$ , com  $\pi_1 \circ \varphi_\alpha = p$  ( $\pi_1 : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ), de modo que as transições  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  são descritas por

$$(x, w) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot w),$$

para algumas funções mudança de coordenadas adequadas

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k),$$

assim assegurando que os  $\mathbb{R}^k$ -fatores estão identificados linearmente.

Para uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  munida com uma coleção arbitrária de aplicações  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k)$ , definimos um fibrado vetorial de posto  $k$ , algumas relações de compatibilidade devem ser satisfeitas. São elas:

$$g_{\alpha\alpha}(x) = id, \quad g_{\beta\alpha}(x) = g_{\alpha\beta}(x)^{-1} \quad g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x).$$

Essas três condições podem ser contraídas em somente uma condição:

$$g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x) \cdot g_{\gamma\alpha}(x) = id.$$

A última condição é chamada **condição de cociclo**. Qualquer coleção  $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$  satisfazendo essa condição será chamada de **cociclo**.

Como um exemplo podemos definir o fibrado tangente  $TM$  de  $M$  através de cociclos, se  $\{\Phi_\alpha : U_\alpha \approx \widetilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^m\}$  é uma atlas de cartas para a variedade diferenciável  $M^m$ , então os cociclos

$$g_{\alpha\beta}(x) = d(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})|_x,$$

construídos a partir das derivadas das transições define o fibrado tangente.

## 2.4 Equações de Seiberg-Witten

Nessa seção trataremos das equações de Seiberg-Witten

$$\begin{cases} \mathcal{D}^A \varphi = 0 \\ F_A^+ = \sigma(\varphi) \end{cases} \quad (4)$$

e apresentaremos os invariantes de Seiberg-Witten  $\mathcal{SW}$ , que serão utilizados no próximo capítulo para nos fornecer a desigualdade de Miyaoka-Yau. Apresentaremos a seguir a teoria necessária para compreender os elementos presentes na Equação (4).

**Definição 2.6** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma **estrutura quase-complexa** é um campo suave de automorfismos  $J$  do fibrado tangente  $TM$  satisfazendo*

$$J_x^2 = -I_x, \quad x \in M,$$

onde  $I$  é a identidade.

Uma variedade munida com uma estrutura quase-complexa é chamada **variedade quase-complexa**. Note que se  $M$  admite uma estrutura quase-complexa, então sua dimensão deve ser par.

De fato, suponha  $M$   $n$ -dimensional e  $J : TM \rightarrow TM$  uma estrutura quase-complexa, assim  $\det(J - \lambda I)$  é um polinômio em  $\lambda$  de grau  $n$ , se  $n$  for ímpar existe uma raiz real  $x$  tal que  $\det(J - xI) = 0$ , nesse caso existe um vetor  $v \in TM$  tal que  $Jv = xv$ , portanto  $J^2v = xJv$ , logo  $-v = x^2v$ , daí  $x^2 = -1$  e portanto  $x \notin \mathbb{R}$ , gerando uma contradição, assim  $n$  deve ser par.

Um estrutura quase-complexa é dita ser **integrável** se é induzida por uma única estrutura complexa<sup>1</sup>, equivalentemente se o *tensor de Nijenhuis*  $N$  definido por

$$4N(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY], \quad \forall X, Y \in T_pM, \forall p \in M,$$

é igual a zero. Do lado direito da equação,  $X$  e  $Y$  denotam uma extensão local qualquer de dois vetores  $X$  e  $Y$ .

Para que uma variedade diferenciável admita uma estrutura quase-complexa é necessário que ela satisfaça algumas condições topológicas, essas condições estão enunciadas no seguinte teorema:

---

<sup>1</sup>Uma variedade  $X$  de dimensão  $2m$  admite uma **estrutura complexa** se existem homeomorfismos  $\phi_\alpha : U_\alpha \simeq \tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{C}^m$ , de modo que  $\{U_\alpha\}$  é uma cobertura para  $X$  e as transições  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  são holomorfas.

**Teorema 2.1 (Existência de estruturas quase-complexas)** *Suponha que  $M$  admite uma estrutura quase-complexa  $J$ . Então a primeira classe de Chern de  $J$  deve satisfazer*

$$c_1(J) \cdot c_1(J) = 3\tau(M) + 2\chi(M).$$

Para uma prova desse teorema veja [22], p.420.

Uma métrica Riemanniana em  $M$  é dita ser **compatível** com a estrutura quase-complexa  $J$  (ou é chamada uma **métrica Hermitiana** para  $J$ ) se

$$\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Em particular,  $J$  se torna anti-simétrica,  $\langle Jx, y \rangle = -\langle x, Jy \rangle$ . A 2-forma  $\omega(x, y) = \langle Jx, y \rangle$  será chamada a **2-forma fundamental** de  $J$  ou **forma Kähler**. Uma **métrica Kähler** em  $M$  é uma métrica Hermitiana cuja forma Kähler é fechada ( $d\omega = 0$ ), uma variedade com uma métrica desse tipo é chamada **variedade Kähler**. A seguinte proposição nos fornece um método para descobrimos quando uma variedade Hermitiana é Kähler:

**Proposição 2.7** *Se  $M$  é uma variedade Hermitiana com estrutura quase-complexa  $J$  e conexão de Levi-Civita  $\nabla$ , então  $M$  é Kähler se, e somente se,  $\nabla_X J = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ .*

Uma prova pode ser encontrada em [6].

Uma 2-forma  $\omega$  em  $M$  em uma variedade  $M$  de dimensão 4 é chamada uma **estrutura simplética** se ela é fechada e não-degenerada, ou seja, se

$$d\omega = 0 \quad \text{e} \quad \omega \wedge \omega > 0,$$

onde a última relação significa que a 4-forma  $\omega \wedge \omega$  é não-nula e compatível<sup>2</sup> com a orientação de  $M$ .

Agora generalizaremos as estruturas quase-complexas de modo que elas possam ser encontradas em toda variedade de dimensão 4, tais estruturas são conhecidas como **estruturas  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$** .

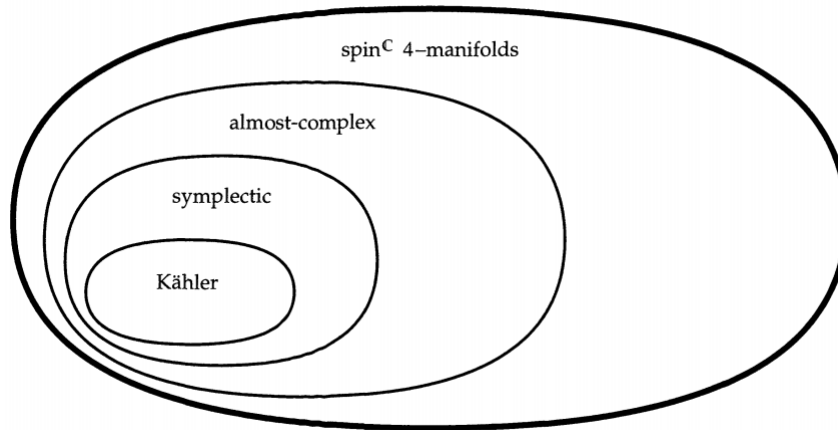
A escolha de uma estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$  é essencial para definirmos as equações de Seiberg-Witten e, como citamos anteriormente, essa estrutura sempre existe em qualquer variedade de dimensão 4, uma prova para essa afirmação pode ser encontrada em [22].

A figura a seguir ilustra como as estruturas estão distribuídas em uma variedade e a relação existente entre elas.

---

<sup>2</sup>uma 4-forma  $\alpha$  é dita ser compatível com a orientação de  $M$  se  $\alpha$  é para todo ponto um múltiplo positivo das formas locais  $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4$  para referenciais locais orientados  $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$

Figura 2 – Estruturas em uma variedade de dimensão 4



Fonte: SCORPAN,2005,p.382

**Definição 2.7** O grupo *spin complexo* é dado por

$$\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) = U(1) \times_{\mathbb{Z}_2} \text{Spin}(4) = U(1) \times \text{Spin}(4) / \pm 1,$$

onde  $U(1)$  é o grupo unitário de grau 1 e  $\text{Spin}(4)$  é o grupo simplesmente conexo que recobre  $SO(4)$ .

O grupo  $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$  admite uma projeção natural em cada componente de  $U(1) \times SO(4)$ , que sobre  $SO(4)$  é da forma  $\text{Spin}(4) \rightarrow SO(4)$ , enquanto sobre  $U(1) = \mathbb{S}^1$  é da forma  $U(1) \rightarrow U(1) : z \rightarrow z^2$ . Essas duas partes podem ser separadas em duas projeções

$$U(1) \xleftarrow{\det} \text{Spin}^{\mathbb{C}} \longrightarrow SO(4).$$

Agora, dado qualquer  $SO(4)$ -cociclo  $\{g_{\alpha\beta}\}^3$  para  $TM$ , podemos levantá-lo para alguma coleção de aplicações com valores em  $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$  que satisfazem o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha} \cap U_{\beta} & \xrightarrow{\tilde{g}_{\alpha\beta}^{\mathbb{C}}} & \text{Spin}^{\mathbb{C}} \\ \parallel & & \downarrow \\ U_{\alpha} \cap U_{\beta} & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & SO(4). \end{array}$$

Se, além disso, esses levantamentos satisfazem a condição de cociclo

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}^{\mathbb{C}}(x) \cdot \tilde{g}_{\beta\gamma}^{\mathbb{C}}(x) \cdot \tilde{g}_{\gamma\alpha}^{\mathbb{C}}(x) = id,$$

então o  $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -cociclo  $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}^{\mathbb{C}}\}$  será chamado **estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$**  em  $M$ .

Agora, dada uma estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$   $\mathfrak{s} = \{\tilde{g}_{\alpha\beta}^{\mathbb{C}}\}$ , podemos projetá-la para um cociclo  $\{\det \tilde{g}_{\alpha\beta}^{\mathbb{C}}\}$

<sup>3</sup>Um  $SO(4)$ -cociclo é definido como  $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow SO(4) \subset GL(4)$ .



com valores em  $U(1)$ , que pode então ser visto agindo em  $\mathbb{C}$  e assim dá origem à um fibrado de linha complexo

$$\mathcal{L} \rightarrow M.$$

Esse fibrado é chamado **fibrado linha determinante** da estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}} \mathfrak{s}$ . Sua classe de Chern  $c_1(\mathcal{L})$  é chamada a **classe de Chern** da estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$ , denotada por

$$c_1(\mathfrak{s}) = c_1(\mathcal{L}).$$

É um fato conhecido que  $\text{Spin}(4) = SU(2) \times SU(2)$ , assim o grupo spin complexo é

$$\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) = \mathbb{S}^1 \times SU(2) \times SU(2) / \pm 1,$$

por outro lado,

$$U(2) = \mathbb{S}^1 \times SU(2) / \pm 1.$$

Portanto, existem duas projeções naturais

$$U(2) \xleftarrow{\rho_-} \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \xrightarrow{\rho_+} U(2)$$

$$[z, \xi_-] \longleftarrow [z, \xi_+, \xi_-] \longrightarrow [z, \xi_+].$$

Usando essas projeções, o cociclo  $\mathfrak{s} = \{\tilde{g}_{\alpha\beta}^c\}$  pode ser projetado sobre dois  $U(2)$ -cociclos  $\{\rho_{\pm}(\tilde{g}_{\alpha\beta}^c)\}$ , que podem ser usados para construir dois fibrados complexos, denotados por

$$\mathcal{W}^- \rightarrow M \quad \text{e} \quad \mathcal{W}^+ \rightarrow M.$$

Esses dois fibrados são chamados **fibrados de spinors complexos**. Mais especificamente, chamaremos  $\mathcal{W}^+$  o fibrado de spinors autoduais e  $\mathcal{W}^-$  o fibrado de spinors anti-autoduais.

Toda estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$  é munida com uma **multiplicação de Clifford**

$$TM \times \mathcal{W}^+ \xrightarrow{\bullet} \mathcal{W}^-.$$

Uma descrição mais detalhada dessa operação pode ser encontrada em [22].

A multiplicação de Clifford e sua adjunta  $TM \times \mathcal{W}^- \xrightarrow{\bullet} \mathcal{W}^+$  combinadas nos fornece a seguinte propriedade:

$$v \bullet (v \bullet \varphi) = -|v|^2 \varphi, \forall v \in TM|_x \text{ e } \forall \varphi \in \mathcal{W}^+|_x.$$

Escolhemos uma conexão  $A$  com valores em  $U(1)$  sobre  $\mathcal{L}$ . Então, caminhando sobre o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U(1) & \\ & \uparrow \text{det} & \\ U(2) & \xleftarrow{\rho^-} \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \xrightarrow{\rho^+} & U(2) \\ & \downarrow & \\ & SO(4) & \end{array}$$

podemos combinar  $A$  com  $\nabla$  (conexão de Levi-Civita) dentro de  $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ , e então projetamos o resultado para duas  $U(2)$ -conexões  $\nabla^A$  em  $\mathcal{W}^+$  e  $\mathcal{W}^-$ .

A conexão spinor  $\nabla^A : \Gamma(\mathcal{W}^+) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}^- \otimes T^*M)$  combinada com a multiplicação de Clifford  $TM \times \mathcal{W}^+ \rightarrow \mathcal{W}^-$  nos fornece o **operador de Dirac**

$$\mathcal{D}^A : \Gamma(\mathcal{W}^+) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}^-).$$

Localmente, esse operador é descrito pela fórmula

$$\mathcal{D}^A \varphi = \sum e_k \bullet \nabla_{e_k}^A \varphi$$

para qualquer referencial ortonormal local  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  em  $TM$ .

Para toda estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$  em  $M$  e qualquer conexão  $A$  em seu fibrado de linha determinante  $\mathcal{L}$ , temos

$$(\mathcal{D}^A)^* \mathcal{D}^A \varphi = (\nabla^A)^* \nabla^A \varphi + \frac{1}{4} s \cdot \varphi + \frac{1}{2} F_A^+ \bullet \varphi,$$

onde  $(\mathcal{D}^A)^*$  é a adjunta formal<sup>4</sup> do operador de Dirac  $\mathcal{D}^A$ ;  $(\nabla^A)^*$  é a adjunta formal da conexão  $\nabla^A$  em  $\mathcal{W}^+$  induzido por  $A$ ;  $s$  denota a curvatura escalar em  $M$  e  $F_A^+ \bullet \varphi$  denota a ação de Clifford da 2-forma curvatura  $F_A$  de  $A$  em  $\varphi$ . A expressão anterior é conhecida como **Fórmula de Lichnerowicz**.

---

<sup>4</sup>Dados dois fibrados  $E$  e  $F$  em  $M$ , munidos com métricas de fibrados e dado um operador  $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ , dizemos que um operador  $P^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$  é a **adjunta formal** de  $P$  se, e somente se,

$$\int_M \langle P\alpha, \beta \rangle d\mu = \int_M \langle \alpha, P^*\beta \rangle d\mu,$$

para todas as seções  $\alpha \in \Gamma(E)$  e  $\beta \in \Gamma(F)$ . A palavra formal é usada somente porque os espaços das seções suaves  $\Gamma(E), \Gamma(F)$  não são completos (não são Hilbert).

O próximo operador que definiremos possui um papel fundamental na definição das equações de Seiberg-Witten, a **aplicação quadratura** é a única aplicação que preserva fibras

$$\sigma : \mathcal{W}^+ \rightarrow i\Lambda_+^2(T^*M)$$

tal que para todo  $\varphi \in \mathcal{W}^+$ , satisfaz as igualdades

$$\sigma(\varphi) \bullet \varphi = \frac{1}{2}|\varphi|^2\varphi \quad \text{e} \quad |\sigma(\varphi)| = \frac{1}{2\sqrt{2}}|\varphi|^2.$$

Outro objeto relevante para as equações de Seiberg-Witten é a **forma curvatura**  $F_A$  da  $U(1)$ -conexão  $A$  em  $\mathcal{L}$ . Visto que a álgebra de Lie de  $U(1) = \mathbb{S}^1$  é simplesmente  $i\mathbb{R}$  ( $\text{Lie}(U(n))$  consiste de matrizes  $n \times n$  anti-hermitianas), a curvatura  $F_A$  deve ser uma 2-forma com valores imaginários. Além disso, a identidade de Bianchi nos diz que  $F_A$  é fechada. Na cohomologia de De Rham, a forma  $F_A$  representa a classe de Chern  $c_1(\mathfrak{s})$ . Resumindo temos:

$$F_A \in \Gamma(i\Lambda^2(T^*M)), \quad dF_A = 0 \quad \text{e} \quad [F_A] = -2\pi i c_1(\mathcal{L}).$$

O **grupo de gauge**  $\mathcal{G}(\mathcal{L})$  de  $\mathcal{L}$  é simplesmente o espaço de todas as funções de  $M$  com valores em  $U(1)$ :

$$\mathcal{G}(\mathcal{L}) = \{g : M \rightarrow \mathbb{S}^1\}.$$

A ação de algum  $g : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  sobre um campo spinor  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{W}^\pm)$  pode ser expresso diretamente pela multiplicação:

$$(g \cdot \varphi)(x) = g(x)^{-1}\varphi(x).$$

Agora que apresentamos todos os elementos necessários, iremos apresentar as **equações de Seiberg-Witten**.

Após a escolha de uma estrutura  $\text{spin}^c$   $\mathfrak{s}$  em  $M$ , com fibrados spinors associados  $\mathcal{W}^\pm$  e fibrado de linha determinante  $\mathcal{L}$ , os objetos de interesse no que segue serão pares

$$(\varphi, A),$$

onde  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{W}^+)$  é um campo spinor autodual e  $A \in \text{Conn}(\mathcal{L})$  é uma  $U(1)$ -conexão em  $\mathcal{L}$ .

**Definição 2.8** *As equações de Seiberg-Witten são:*

$$\begin{cases} \mathcal{D}^A\varphi & = 0 \\ F_A^+ & = \sigma(\varphi). \end{cases}$$

Como explicado anteriormente,  $\mathcal{D}^A$  denota o operador de Dirac induzido por  $A$ , enquanto  $F_A$  é a 2-forma curvatura de  $A$  com valores imaginários e  $F_A^+ = \frac{1}{2}(F_A + *F_A)$  é a sua parte autodual. Finalmente,  $\sigma : \mathcal{W}^+ \rightarrow i\Lambda_+^2$  é a aplicação quadratura.

As soluções  $(\varphi, A)$  para as equações de Seiberg-Witten são chamadas **monopolos**. Os monopolos formam um subespaço  $\mathfrak{G}$  do espaço de dimensão infinita  $\Gamma(\mathcal{W}^+) \times \text{Conn}(\mathcal{L})$ , um outro fato sobre as equações de Seiberg-Witten é a invariância por ações do grupo de gauge  $\mathcal{G}(\mathcal{L}) = \{g : M \rightarrow \mathbb{S}^1\}$ , para mais detalhes veja [17]. Definimos o **espaço moduli** por

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{G}/\mathcal{G}.$$

Este espaço depende da escolha de uma estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$  e uma métrica Riemanniana,[22]. Uma solução  $(\varphi, A)$  de (4) será chamada **reduzível** se  $\varphi = 0$ , caso contrário a solução será chamada **irreduzível**.

**Proposição 2.8** *Se  $(\varphi, A)$  é uma solução para as equações de Seiberg-Witten, então*

$$\int_M |F_A^+|^2 d\mu \leq \int_M \frac{s^2}{8} d\mu.$$

*com igualdade se, e somente se,  $\nabla^A \varphi \equiv 0$  e  $s$  é constante.*

**Prova:** Seja  $(\varphi, A)$  uma solução de (4), então  $\mathcal{D}^A \varphi = 0$  e  $F_A^+ = \sigma(\varphi)$ . Substituindo esses valores na fórmula de Lichnerowicz

$$(\mathcal{D}^A)^* \mathcal{D}^A \varphi = (\nabla^A)^* \nabla^A \varphi + \frac{1}{4} s \cdot \varphi + \frac{1}{2} F_A^+ \bullet \varphi$$

segue que

$$0 = (\nabla^A)^* \nabla^A \varphi + \frac{1}{4} s \cdot \varphi + \frac{1}{4} |\varphi|^2 \varphi,$$

aqui usamos o fato de que  $\sigma(\varphi) \bullet \varphi = \frac{1}{2} |\varphi|^2 \varphi$ . Tomando o produto interno com  $\varphi$  obtemos

$$0 = \langle (\nabla^A)^* \nabla^A \varphi, \varphi \rangle + \frac{1}{4} \langle s \cdot \varphi, \varphi \rangle + \frac{1}{4} \langle |\varphi|^2 \varphi, \varphi \rangle.$$

Integrando sobre  $M$  e lembrando que  $(\nabla^A)^*$  é a adjunta de  $\nabla^A$ , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \langle \nabla^A \varphi, \nabla^A \varphi \rangle d\mu + \frac{1}{4} \int_M s |\varphi|^2 d\mu + \frac{1}{4} \int_M |\varphi|^4 d\mu \\ &= \int_M |\nabla^A \varphi|^2 d\mu + \frac{1}{4} \int_M s |\varphi|^2 d\mu + \frac{1}{4} \int_M |\varphi|^4 d\mu. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_M |\varphi|^4 d\mu &\leq \int_M 4|\nabla^A \varphi|^2 d\mu + \int_M |\varphi|^4 d\mu \\ &= \int_M (-s)|\varphi|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito da desigualdade obtemos

$$\int_M |\varphi|^4 d\mu \leq \left( \int_M s^2 d\mu \right)^{1/2} \cdot \left( \int_M |\varphi|^4 d\mu \right)^{1/2}.$$

Assim,

$$\left( \int_M |\varphi|^4 d\mu \right)^{1/2} \leq (s^2 d\mu)^{1/2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_M |F_A^+|^2 d\mu &= \int_M |\sigma(\varphi)|^2 d\mu \\ &= \frac{1}{8} \int_M |\varphi|^4 d\mu \\ &\leq \frac{1}{8} \int_M s^2 d\mu, \end{aligned}$$

onde a igualdade ocorre quando  $\nabla^A \varphi = 0$  e  $s$  é constante.  $\square$

Outro elemento importante na Teoria de Seiberg-Witten é o Invariante de Seiberg-Witten, ele pode ser definido da seguinte forma:

**Definição 2.9** *Seja  $(M, \mathfrak{s})$  uma variedade diferenciável compacta de dimensão 4 munida com uma estrutura  $\text{spin}^{\mathbb{C}}$  e orientação determinada por alguma estrutura quase-complexa  $J$ . Suponha que  $2\chi + 3\tau = c_1^2 > 0$ . Então o **Invariante de Seiberg-Witten (mod 2)**, denotado por  $\mathcal{SW}_M(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}_2$ , é definido como*

$$\mathcal{SW}_M(\mathfrak{s}) = (\#\mathfrak{M}) \text{mod } 2,$$

calculado com respeito à qualquer métrica Riemanniana  $g$  em  $M$ .

**Observação 2.1** *Pela teoria de Chern-Weil,*

$$c_1^2(M) = \frac{1}{4\pi^2} \int_M (|F_A^+|^2 - |F_A^-|^2) d\mu.$$

O seguinte teorema será bastante útil mais adiante em nosso trabalho:

**Teorema 2.2 (Lebrun,1995)** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável compacta orientável*

de dimensão 4 com  $2\chi(M) + 3\tau(M) > 0$ . Suponha que existe uma classe  $\mathfrak{s} = [J]$ , compatível com a orientação, de estruturas quase-complexas para as quais o invariante de Seiberg-Witten  $\mathcal{SW}_M(\mathfrak{s})$  é não-nulo. Seja  $g$  uma métrica de curvatura escalar constante  $s$  e volume  $V$  em  $M$ . Então

$$s\sqrt{V} \leq -2^{5/2}\pi\sqrt{2\chi + 3\tau},$$

com igualdade se, e somente se,  $g$  é Kähler-Einstein com respeito à alguma estrutura complexa integrável  $J$  na classe de homotopia de  $\mathfrak{s}$ .

Uma prova para este teorema encontra-se em [16].

### 3 DECOMPOSIÇÃO ORTOGONAL DO TENSOR CURVATURA

O objetivo desse capítulo é determinar quando um tensor qualquer satisfaz algumas propriedades que o tornam um tensor tipo-curvatura, a seguir forneceremos uma decomposição em termo de suas componentes ortogonais. Dizemos que um tensor  $A \in \otimes^4 T^*M$  está em  $S^2(\Lambda^2 M)$  se

$$\begin{cases} A(x, y, z, t) = -A(y, x, z, t) = A(y, x, t, z), \\ A(x, y, z, t) = A(z, t, x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Lembrando que o tensor curvatura  $Rm$  como um (0,4)-tensor satisfaz

$$Rm \in S^2(\Lambda^2 M) \subset \otimes^4 T^*M.$$

Defina uma aplicação  $b : S^2\Lambda^2 \rightarrow \otimes^4 T^*M$  por

$$bA(x, y, z, t) = \frac{1}{3} (A(x, y, z, t) + A(y, z, x, t) + A(z, x, y, t)).$$

A operação acima é chamada *aplicação de simetrização de Bianchi*.

**Lema 3.1** *A imagem de  $b$  está contida em  $S^2\Lambda^2$ .*

**Prova:** Note que

$$\begin{aligned} bA(y, x, z, t) &= \frac{1}{3} (A(y, x, z, t) + A(x, z, y, t) + A(z, y, x, t)) \\ &= \frac{1}{3} (-A(x, y, z, t) - A(z, x, y, t) - A(y, z, x, t)) \\ &= -bA(x, y, z, t). \end{aligned}$$

A anti-simetria nos dois últimos índices é provado analogamente. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} bA(z, t, x, y) &= \frac{1}{3} (A(z, t, x, y) + A(t, x, z, y) + A(x, z, t, y)) \\ &= \frac{1}{3} (A(x, y, z, t) + A(z, y, t, x) - A(z, x, t, y)) \\ &= \frac{1}{3} (A(x, y, z, t) + A(y, z, x, t) - A(z, x, y, t)) \\ &= bA(x, y, z, t), \end{aligned}$$

o que finaliza a prova do lema. □

**Lema 3.2** *O espaço  $S^2(\Lambda^2)$  pode ser escrito como a seguintes decomposição ortogonal*

$$S^2(\Lambda^2) = Ker(b) \oplus Im(b).$$

**Prova:** Inicialmente note que  $b^2 = b$ . Agora, dado  $A \in S^2(\Lambda^2)$ , considere  $B = A - b(A)$ , então  $b(B) = b(A) - b(b(A)) = 0$ . Se denotarmos  $C = b(A)$ , então  $A = B + C$ , onde  $B \in Ker(b)$  e  $C \in Im(b)$ .

Suponha que  $A \in Ker(b) \cap Im(b)$ , assim  $b(A) = 0$  e  $\exists \tilde{A} \in S^2\Lambda^2$  tal que  $b(\tilde{A}) = A$ , por outro lado, aplicando  $b$  em ambos os lados da última igualdade temos

$$b^2(\tilde{A}) = b(A), \text{ então } b(\tilde{A}) = 0, \text{ portanto } A = 0.$$

Assim,  $A \in Ker(b) \cap Im(b)$  se, e somente se,  $A = 0$ .

Além disso, afirmamos que  $b$  é auto-adjunta. De fato, em uma base ortonormal temos

$$\begin{aligned} g(A, bB) &= \frac{1}{3}A_{ijkl}(B_{ijkl} + B_{jkil} + B_{kijl}) \\ &= \frac{1}{3}(A_{ijkl}B_{ijkl} + A_{ijkl}B_{jkil} + A_{ijkl}B_{kijl}) \\ &= \frac{1}{3}(A_{ijkl}B_{ijkl} + A_{kijl}B_{ijkl} + A_{jkil}B_{ijkl}) \\ &= g(bA, B). \end{aligned}$$

Agora, se  $A \in Ker(b)$  e  $B = b(C) \in Im(b)$ , temos

$$g(A, B) = g(A, bC) = g(bA, C) = 0,$$

ou seja,  $b$  é uma projeção ortogonal. □

Agora, identificaremos a imagem de  $b$ , para isto, provaremos o seguinte lema.

### Lema 3.3

$$Im(b) = \Lambda^4 T^* M$$

**Prova:** Para provar esse fato, afirmamos que

$$b(\alpha \odot \beta) = \frac{1}{3}\alpha \wedge \beta, \tag{6}$$

onde  $\alpha, \beta \in \Lambda^2 M$  e  $\odot$  denota o produto simétrico. Podemos pensar  $\Lambda^2 M$  como um espaço de (0,2)-tensores anti-simétricos. Temos que

$$(\alpha \odot \beta)_{ijkl} = \alpha_{ij}\beta_{kl} + \alpha_{kl}\beta_{ij}.$$

O lado esquerdo de (6) é dado por

$$(b(\alpha \odot \beta))_{ijkl} = \frac{1}{3}(\alpha_{ij}\beta_{kl} + \beta_{ij}\alpha_{kl} + \alpha_{jk}\beta_{il} + \beta_{jk}\alpha_{il} + \alpha_{ki}\beta_{jl} + \beta_{ki}\alpha_{jl}). \tag{7}$$



Considerando nossa identificação de 2-formas com (0,2)-tensores, o produto wedge é escrito como

$$\alpha \wedge \beta(e_i, e_j, e_k, e_l) = \frac{1}{2!2!} \sum_{\sigma \in S_4} (\text{sgn } \sigma) \alpha(e_{\sigma(i)}, e_{\sigma(j)}) \cdot \beta(e_{\sigma(k)}, e_{\sigma(l)}).$$

Considerando  $\{i < j < k < l\}$ , podemos reescrever a igualdade acima como

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(e_i, e_j, e_k, e_l) &= \sum_{\substack{\sigma(i) < \sigma(j) \\ \sigma(k) < \sigma(l)}} \alpha(e_{\sigma(i)}, e_{\sigma(j)}) \cdot \beta(e_{\sigma(k)}, e_{\sigma(l)}) \\ &= \alpha(e_i, e_j) \cdot \beta(e_k, e_l) - \alpha(e_i, e_k) \cdot \beta(e_j, e_l) + \alpha(e_i, e_l) \cdot \beta(e_j, e_k) \\ &\quad + \alpha(e_j, e_k) \cdot \beta(e_i, e_l) - \alpha(e_j, e_l) \cdot \beta(e_i, e_k) + \alpha(e_k, e_l) \cdot \beta(e_i, e_j) \\ &= \alpha_{ij}\beta_{kl} - \alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{jl}\beta_{ik} + \alpha_{kl}\beta_{ij}. \end{aligned}$$

Comparando a última expressão com (7), vemos que os termos coincidem, à menos do fator 1/3. Isso claramente implica a afirmação do lema.  $\square$

**Definição 3.1** *O espaço dos **tensores tipo-curvatura** é*

$$\mathcal{C} = \text{Ker}(b) \subset S^2(\Lambda^2).$$

Considere a decomposição

$$S^2(\Lambda^2) = \mathcal{C} \oplus \Lambda^4.$$

(Observe que a decomposição segue dos Lemas 3.2 e 3.3.) Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão  $p$ , então

$$\dim(S^2(V)) = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Visto que

$$\dim(\Lambda^2) = \frac{n(n-1)}{2},$$

podemos deduzir que

$$\dim S^2(\Lambda^2) = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n + 2),$$

e ainda

$$\dim(\Lambda^4) = \binom{n}{4}.$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{C}) &= \frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n + 2) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \end{aligned}$$

Agora, a **contração de Ricci**,  $c : \mathcal{C} \rightarrow S^2(T^*M)$ , é definida por

$$(c(Rm))(X, Y) = \sum_{i=1}^n Rm(e_i, X, Y, e_i).$$

Em coordenadas locais temos

$$c(Rm) = g^{kl} R_{kijl} dx^i \otimes dx^j.$$

O **produto de Kulkarni-Nomizu**  $\otimes : S^2(T^*M) \times S^2(T^*M) \rightarrow \mathcal{C}$  é definido por

$$(\alpha \otimes \beta)_{ijkl} = \alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{ik}\beta_{jl} - \alpha_{jl}\beta_{ik},$$

observe que  $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$ .

Usando as notações definidas acima temos a seguinte proposição.

**Proposição 3.1** *A aplicação  $\psi : S^2(T^*M) \rightarrow \mathcal{C}$  definida por*

$$\psi(h) = h \otimes g,$$

*é injetiva para  $n > 2$ .*

**Prova:** Primeiramente note que para  $f \in S^2(\Lambda^2)$ ,  $h \in S^2(T^*M)$  e  $g$  a métrica Riemanniana, temos

$$\langle f, h \otimes g \rangle = 4\langle cf, h \rangle.$$

Para verificar isso basta realizar os cálculos em uma base ortonormal, de fato

$$\begin{aligned} \langle f, h \otimes g \rangle &= f_{ijkl}(h^{il}g^{jk} + h^{jk}g^{il} - h^{ik}g^{jl} - h^{jl}g^{ik}) \\ &= g^{jk}f_{ijkl}h^{il} + g^{il}f_{ijkl}h^{jk} - g^{jl}f_{ijkl}h^{ik} - g^{ik}f_{ijkl}h^{jl} \\ &= 4g^{il}f_{ijkl}h^{jk} \\ &= 4\langle cf, h \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, afirmamos que

$$c(h \otimes g) = (n - 2)h + tr(h)g.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
c(h \otimes g) &= g^{il}(h \otimes g)_{ijkl} \\
&= g^{il}(h_{il}g_{jk} + h_{jk}g_{il} - h_{ik}g_{jl} - h_{jl}g_{ik}) \\
&= \text{tr}(h)g_{jk} + nh_{jk} - h_{ik}\delta_j^i - h_{jl}\delta_k^l \\
&= \text{tr}(h)g_{jk} + nh_{jk} - h_{jk} - h_{jk} \\
&= \text{tr}(h)g_{jk} + (n-2)h_{jk} \\
&= \text{tr}(h)g + (n-2)h.
\end{aligned}$$

Para provar a proposição, suponha que  $h \otimes g = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle h \otimes g, h \otimes g \rangle \\
&= 4\langle h, c(h \otimes g) \rangle \\
&= 4\langle h, (n-2)h + \text{tr}(h)g \rangle \\
&= 4(\text{tr}(h)^2 + (n-2)|h|^2).
\end{aligned}$$

Isso implica que  $h = 0$  se  $n > 2$ . Isto finaliza a prova da proposição.  $\square$

Como consequência da Proposição 3.1 temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.1** *Para  $n = 2$ , a curvatura escalar determina o tensor curvatura. Para  $n = 3$ , a curvatura de Ricci determina o tensor curvatura.*

**Prova:** O caso  $n = 2$  é trivial, visto que a única componente não-nula de  $R$  deve ser  $R_{1221}$ . Para  $n$  arbitrário, relembre a definição do **tensor de Schouten** que é dada por

$$A = \frac{1}{n-2} \left( \text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g \right).$$

Afirmamos que

$$c(Rm - A \otimes g) = 0.$$

De fato, calculando

$$\text{tr}(A) = \frac{1}{n-2} \left( R - \frac{nR}{2(n-1)} \right) = \frac{R}{2(n-1)},$$

então

$$\begin{aligned}
c(Rm - A \otimes g) = c(Rm) - c(A \otimes g) &= \text{Ric} - ((n-2)A + \text{tr}(A)g) \\
&= \text{Ric} - \left( \text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g + \frac{R}{2(n-1)}g \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para  $n = 3$ , temos que  $\dim(\mathcal{C}) = 6$ . Da Proposição 3.1, obtemos

$$\psi : S^2(T^*M) \hookrightarrow \mathcal{C}.$$

Mas  $\dim(S^2(T^*M)) = 6$ , então  $\psi$  é um isomorfismo. Isso implica que

$$Rm = A \otimes g,$$

o que prova o corolário.  $\square$

Observe que o argumento anterior implica que, em qualquer dimensão, o tensor curvatura pode sempre ser escrito como

$$Rm = W + A \otimes g, \quad (8)$$

onde  $W \in \text{Ker}(c)$ . O tensor  $W$  é chamado de **tensor de Weyl**. Podemos reescrever a igualdade acima como

$$Rm = W + \frac{1}{n-2}E \otimes g + \frac{R}{2n(n-1)}g \otimes g, \quad (9)$$

onde

$$E = \text{Ric} - \frac{R}{n}g,$$

é o **tensor de Ricci sem traço**.

**Proposição 3.2** *A decomposição (9) é ortogonal.*

**Prova:** Dos cálculos realizados anteriormente sabemos que

$$\langle W, h \otimes g \rangle = 4\langle cW, h \rangle = 0,$$

então o tensor de Weyl é claramente ortogonal aos outros dois termos. Agora,

$$\langle E \otimes g, g \otimes g \rangle = 4\langle E, c(g \otimes g) \rangle = 4\langle E, (n-1)g \rangle = 0.$$

$\square$

Definiremos agora a norma de um tensor tipo-curvatura, que difere da definição usual por uma constante. Isso se deve ao fato de que estamos considerando o tensor como um operador, a escolha dessa constante ficará clara na próxima seção.

**Definição 3.2** *Seja  $A \in \mathcal{C}$ , definimos a norma de  $A$  como*

$$|A|^2 = \frac{1}{4}A_{ijkl}A^{ijkl}.$$

Utilizando a notação utilizada anteriormente podemos escrever

$$|A|^2 = \frac{1}{4} \langle A, A \rangle.$$

Agora observe que para qualquer tensor  $B$  temos  $B \otimes g \in \mathcal{C}$ , assim a norma de  $B \otimes g \in \mathcal{C}$  é dada por

$$\begin{aligned} |B \otimes g|^2 &= \frac{1}{4} \langle B \otimes g, B \otimes g \rangle \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \langle B, c(B \otimes g) \rangle \\ &= \langle B, (n-2)B + tr(B)g \rangle \\ &= (n-2)|B|^2 + tr(B)^2. \end{aligned}$$

A decomposição (8) nos fornece

$$|Rm|^2 = |W|^2 + (n-2)|A|^2 + tr(A)^2,$$

por outro lado a decomposição (9) implica

$$|Rm|^2 = |W|^2 + \frac{1}{n-2}|E|^2 + \frac{1}{2n(n-1)}R^2. \quad (10)$$

Observe que

$$\begin{aligned} |E|^2 &= E_{ij}E^{ij} = \left( R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij} \right) \left( R^{ij} - \frac{R}{n}g^{ij} \right) \\ &= |Ric|^2 - \frac{2}{n}R^2 + \frac{1}{n}R^2 \\ &= |Ric|^2 - \frac{R^2}{n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Comparando (10) e (11) temos

$$|Rm|^2 = |W|^2 + \frac{1}{n-2}|Ric|^2 - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}R^2.$$

### 3.1 O Operador Curvatura

Anteriormente, mencionamos que  $P \in S^2(\Lambda^2)$  se  $P$  é um  $(0,4)$ -tensor satisfazendo (5). Mas podemos enxergar tal elemento como uma aplicação simétrica  $\mathcal{P} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ . No restante dessa seção, faremos os cálculos necessários em uma base ortonormal orientada. Para uma 2-forma  $\omega$ , as componentes de  $\omega$  são definidas por

$$\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j),$$

de modo que a 2-forma pode ser escrita como

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} e^i \wedge e^j.$$

Definimos o operador  $\mathcal{P}$  como

$$(\mathcal{P}\omega)_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} P_{ijkl} \omega_{kl}.$$

Outro modo de escrever essa expressão é a seguinte

$$\mathcal{P}\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathcal{P}\omega)_{ij} e^i \wedge e^j = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} P_{ijkl} \omega_{kl} e^i \wedge e^j,$$

ou seja,

$$\mathcal{P}\omega = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} P_{ijkl} \omega_{kl} e^i \wedge e^j.$$

**Proposição 3.3** *O operador  $\mathcal{P}$  é simétrico, isto é,*

$$\langle \mathcal{P}\alpha, \beta \rangle_{\Lambda^2} = \langle \alpha, \mathcal{P}\beta \rangle_{\Lambda^2}.$$

**Prova:** Usando a identidade

$$P(X, Y, Z, W) = P(Z, W, X, Y)$$

e observando que  $\langle e^i \wedge e^j, e^i \wedge e^j \rangle_{\Lambda^2} = \det(I_{n \times n}) = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}\alpha, \beta \rangle_{\Lambda^2} &= \left\langle \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathcal{P}\alpha)_{ij} e^i \wedge e^j, \frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_{ij} e^i \wedge e^j \right\rangle_{\Lambda^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} (\mathcal{P}\alpha)_{ij} \beta_{ij} \langle e^i \wedge e^j, e^i \wedge e^j \rangle_{\Lambda^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} (\mathcal{P}\alpha)_{ij} \beta_{ij} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l} P_{ijkl} \alpha_{kl} \beta_{ij} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l} P_{klji} \beta_{ij} \alpha_{kl} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k,l} (\mathcal{P}\beta)_{kl} \alpha_{kl} \\ &= \langle \alpha, \mathcal{P}\beta \rangle_{\Lambda^2}. \end{aligned}$$

□

Reciprocamente, qualquer operador simétrico  $\mathcal{P} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$  é equivalente à um (0,4)-tensor, definido por

$$P_{ijkl} = \langle \mathcal{P}(e^i \wedge e^j), e^l \wedge e^k \rangle_{\Lambda^2}.$$

Podemos aplicar as construções acima ao tensor curvatura  $Rm$ , desse modo

$$\mathcal{R} \in \Gamma(\text{End}(\Lambda^2 M))$$

é chamado o *operador curvatura*. Visto que qualquer matriz simétrica pode ser diagonalizada,  $\mathcal{R}$  possui  $n(n-1)/2$  autovalores reais, contados com suas multiplicidades.

No capítulo anterior provamos que o operador estrela de Hodge decompõe o espaço das 2-formas em

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-. \quad (12)$$

lembre que  $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda^2) = 6$  e  $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda^{\pm}) = 3$ . Elementos de  $\Lambda^+$  são chamados 2-formas *autoduais* e os elementos de  $\Lambda^-$  são chamados de 2-formas *antiautoduais*.

Fixemos uma base ortonormal orientada  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  com sua base dual  $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$  e seja

$$\begin{cases} \omega_1^{\pm} = e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4, \\ \omega_2^{\pm} = e^1 \wedge e^3 \pm e^4 \wedge e^2, \\ \omega_3^{\pm} = e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3. \end{cases}$$

Como mostrado anteriormente  $*\omega_i^{\pm} = \pm\omega_i^{\pm}$  e  $\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_i^{\pm}$  é uma base ortonormal de  $\Lambda^{\pm}$ .

Em dimensão 4, o operador curvatura atua em 2-formas e o espaço das 2-formas decompõe-se como acima. De (9), o tensor curvatura em dimensão 4 se decompõe como

$$Rm = W + \frac{1}{2}E \otimes g + \frac{R}{24}g \otimes g,$$

Correspondendo à essa decomposição, definimos o *operador curvatura de Weyl*,  $\mathcal{W} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$  como

$$(\mathcal{W}\omega)_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} W_{ijkl} \omega_{kl}$$

De acordo com a Proposição 2.5 podemos definir  $\mathcal{W}^{\pm} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$  como

$$\mathcal{W}^{\pm}\omega = \pi_{\pm}\mathcal{W}\pi_{\pm}\omega,$$

onde  $\pi_{\pm} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^{\pm}$  é a projeção  $\frac{1}{2}(I \pm *)$ .

**Lema 3.4** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana orientada. Considere o operador*

estrela de Hodge  $*$  :  $\Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{n-k}$  definido como anteriormente. Se  $\alpha \in \Lambda^k$  e  $\beta \in \Lambda^{n-k}$ , então

$$\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle *\alpha, \beta \rangle.$$

**Prova:** Seja  $\tilde{\beta} \in \Lambda^k$  dado por  $\tilde{\beta} = *\beta$ , assim  $\alpha \wedge *\tilde{\beta} = \langle \alpha, \tilde{\beta} \rangle dV_g$ , portanto  $\alpha \wedge **\beta = \langle \alpha, *\beta \rangle dV_g$ .  $(-1)^{k(n-k)} \alpha \wedge \beta = \langle \alpha, *\beta \rangle dV_g$ , logo  $\beta \wedge \alpha = \langle \alpha, *\beta \rangle dV_g$ , daí  $(-1)^{k(n-k)} \langle \beta, *\alpha \rangle dV_g = \langle \alpha, *\beta \rangle dV_g$ , por fim  $(-1)^{k(n-k)} \langle \beta, *\alpha \rangle = \langle \alpha, *\beta \rangle$ .

□

Em particular, quando  $n = 4$  e  $k = 2$  no Lema 3.4 temos

$$\langle \alpha, *\beta \rangle = \langle *\alpha, \beta \rangle. \quad (13)$$

Provando assim o resultado desejado.

**Proposição 3.4** Considere a aplicação  $\pi_{\pm} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^{\pm}$ , definida por  $\pi_{\pm}\omega = \frac{1}{2}(\omega \pm *\omega)$ , então

$$\langle \pi_{\pm}\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \pi_{\pm}\omega_2 \rangle.$$

**Prova:** Sejam  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2$ , de (13) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\pm}\omega_1, \omega_2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\omega_1 \pm *\omega_1), \omega_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \omega_1 \pm *\omega_1, \omega_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \pm \langle *\omega_1, \omega_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \pm \langle \omega_1, *\omega_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \langle 2\omega_1, \omega_2 \pm *\omega_2 \rangle \\ &= \left\langle \omega_1, \frac{1}{2}(\omega_2 \pm *\omega_2) \right\rangle \\ &= \langle \omega_1, \pi_{\pm}\omega_2 \rangle. \end{aligned}$$

□

Observe ainda que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}^+\omega_1, \omega_2 \rangle &= \langle \pi_+\mathcal{W}\pi_+\omega_1, \omega_2 \rangle \\ &= \langle \mathcal{W}\pi_+\omega_1, \pi_+\omega_2 \rangle \\ &= \langle \pi_+\omega_1, \mathcal{W}\pi_+\omega_2 \rangle \quad (\text{visto que } \mathcal{W} \text{ é simétrica}) \\ &= \langle \omega_1, \mathcal{W}^+\omega_2 \rangle. \end{aligned}$$



Isso nos diz que  $\mathcal{W}^+$  é um operador simétrico, então pelas considerações anteriores, ele corresponde à um tensor tipo-curvatura  $W^+$ , as componentes desse tensor são definidas por

$$\begin{aligned} W_{pqrs}^+ &= \langle \mathcal{W}^+(e^p \wedge e^q), e^s \wedge e^r \rangle \\ &= \langle \pi_+ \mathcal{W} \pi_+(e^p \wedge e^q), e^s \wedge e^r \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \mathcal{W}(e^p \wedge e^q + *(e^p \wedge e^q)), e^s \wedge e^r + *(e^s \wedge e^r) \rangle. \end{aligned}$$

Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} W_{1234}^+ &= \frac{1}{4} \langle \mathcal{W}(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4), e^2 \wedge e^1 + e^4 \wedge e^3 \rangle \\ &= \frac{1}{4} (W_{1212} + 2W_{1234} + W_{3434}). \end{aligned} \quad (14)$$

Provaremos que

$$\pi_+ \mathcal{W} = \mathcal{W} \pi_+,$$

que é equivalente a dizer que  $\mathcal{W}$  comuta com o operador estrela de Hodge. Isso, por sua vez, é equivalente a provar certas identidades de curvatura para  $W$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} W_{1234}^+ &= \langle \pi_+ \mathcal{W}(e^1 \wedge e^2), e^4 \wedge e^3 \rangle \\ &= \langle \mathcal{W} \pi_+(e^1 \wedge e^2), e^4 \wedge e^3 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{W}(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4), e^4 \wedge e^3 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (W_{1234} + W_{3434}). \end{aligned}$$

Comparando o resultado acima com o que foi encontrado em (14), podemos concluir que

$$W_{1212} = W_{3434}.$$

Podemos decompor o tensor curvatura de Weyl como

$$W = W^+ + W^-,$$

onde  $W^+$  e  $W^-$  são denominados componentes *autodual* e *antiautodual*, respectivamente. Portanto, em dimensão 4 temos uma decomposição ortogonal adicional do tensor curvatura

$$Rm = W^+ + W^- + \frac{1}{2} E \otimes g + \frac{R}{24} g \otimes g. \quad (15)$$

O operador curvatura de Ricci sem traço  $\mathcal{E}$  é o operador associado ao tensor tipo-curvatura  $E \otimes g$  e o operador curvatura escalar  $\mathcal{S}$  é o operador associado a  $Rg \otimes g$ .

**Proposição 3.5** *O operador curvatura de Weyl comuta com o operador estrela de Hodge,  $*\mathcal{W} = \mathcal{W}*$  e portanto preserva a dualidade das formas,  $\mathcal{W}(\Lambda^\pm) \subset \Lambda^\pm$ . Além disso,*

$$\begin{cases} *\mathcal{W}^+ = \mathcal{W}^+* = \mathcal{W}^+ \\ *\mathcal{W}^- = \mathcal{W}^-* = -\mathcal{W}^- \end{cases}$$

*O operador curvatura escalar atua como um múltiplo da identidade*

$$\mathcal{S}\omega = 2R\omega.$$

*O operador de Ricci sem traço é anti-comutativo com o operador estrela de Hodge,*

$$*\mathcal{E} = -\mathcal{E}.*$$

*Portanto inverte os tipos das formas,  $\mathcal{E}(\Lambda^\pm) \subset \Lambda^\mp$ . Correspondente a decomposição (12), o operador curvatura é dado em forma de blocos por*

$$\mathcal{R} = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{W}^+ + \frac{R}{12}I & \frac{1}{2}\mathcal{E}\pi_- \\ \hline \frac{1}{2}\mathcal{E}\pi_+ & \mathcal{W}^- + \frac{R}{12}I \end{array} \right). \quad (16)$$

Para uma prova veja o Capítulo 10 de [24].

## 4 VARIEDADES COMPACTAS DE DIMENSÃO 4

### 4.1 Característica de Euler

Em uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  podemos definir um invariante topológico muito importante, trata-se da Característica de Euler, denotamos tal elemento por  $\chi(M)$ , ele pode ser definido da seguinte forma.

**Definição 4.1** *Sejam  $b_i = \dim H^i(M, \mathbb{R})$  os números de Betti de  $M$ , onde  $H^i(M, \mathbb{R})$  denota o  $i$ -ésimo grupo de cohomologia singular com coeficientes em  $\mathbb{R}$ . Temos então que*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i.$$

Por exemplo,  $\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n$ ,  $\chi(\mathbb{T}^n) = 0$ ,  $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^m) = m + 1$ .

Enunciaremos agora um dos principais resultados desse trabalho, trata-se do **Teorema de Gauss-Bonnet em dimensão 4**. Quando  $M$  é uma variedade Riemanniana orientada compacta de dimensão  $2m$ , esse teorema nos fornece uma fórmula para  $\chi(M)$  como uma fórmula integral.

**Teorema 4.1** *Seja  $(M^4, g)$  uma variedade Riemanniana, sua característica de Euler pode ser escrita como*

$$\chi(M) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left( |W|^2 - \frac{1}{2}|E|^2 + \frac{R^2}{24} \right) d\mu. \quad (17)$$

Para provar esse teorema utilizaremos o seguinte resultado devido a Allendoerfer:

**Teorema 4.2 (Allendoerfer, 1940)** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana fechada de dimensão  $n$ ; seja  $d\mu(x)$  o elemento de volume Riemanniano no ponto  $x$  com coordenadas locais  $x^i$ ; seja  $g_{\alpha\beta}$  o tensor métrico,  $g = \det(g_{\alpha\beta})$ ,  $R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}$  o tensor de curvatura Riemanniano induzido pela conexão de Levi-Civita no mesmo ponto; seja  $\varepsilon^\alpha$  um símbolo que é igual a 1 ou -1, respectivamente, se  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é uma permutação par ou ímpar de  $(1, \dots, n)$ ; e defina o invariante escalar  $\Psi(x)$  por:*

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \frac{1}{2^n(n/2)!} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta}{g} R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} R_{\alpha_3\alpha_4\beta_3\beta_4} \cdots R_{\alpha_{n-1}\alpha_n\beta_{n-1}\beta_n},$$

para  $n$  par;  $\Psi(x) = 0$ , para  $n$  ímpar. Então

$$\chi(M) = \int_{M^n} \Psi(x) d\mu(x).$$

Esse teorema foi provado por C.B. Allendoerfer em 1940 [1], entretanto era necessário que  $M^n$  estivesse mergulhada em algum espaço Euclidiano de dimensão maior que  $n$ . Mais tarde em 1956, Nash provou que toda variedade Riemanniana pode ser isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano [19]. Assim, o teorema é válido para todas as variedades Riemannianas. Mas isso não estava perfeito, pois uma fórmula intrínseca devia ter uma prova intrínseca, em 1944 Chern fez isto em [7].

Provaremos agora o Teorema 4.1.

**Prova:**

Antes de tudo note que

$$|Rm|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} R_{ijkl},$$

$$|Ric|^2 = \sum_{i,k} R_{ik} R_{ik} = \sum_{i,j,k,l} R_{ijjk} R_{illk} \quad e$$

$$R^2 = \sum_{i,j,k,l} R_{ijji} R_{kllk}.$$

Dado  $x \in M^4$ , considere um referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  em  $T_x M$ , onde  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  e  $g = 1$ , logo

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= (2\pi)^{-2} \cdot \frac{1}{242!} \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} R_{\alpha_3\alpha_4\beta_3\beta_4} \\ &= \frac{1}{128\pi^2} \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} R_{\alpha_3\alpha_4\beta_3\beta_4}. \end{aligned}$$

Agora, analizaremos cada parcela da soma acima, para isso checaremos as relações entre as permutações de  $\alpha$  e  $\beta$ . Por exemplo, considerando  $\alpha = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$  e  $\beta = (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)$  permutações de  $(1234)$ , onde  $\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_4, \alpha_3 = \beta_1, \alpha_4 = \beta_2$ , teremos  $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = 1$ , pois é necessário uma permutação par para mudarmos a permutação  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$  para a permutação  $(\alpha_3\alpha_4\alpha_1\alpha_2) = (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)$ , portanto, se  $\varepsilon^\alpha = 1$ , então  $\varepsilon^\beta = 1$ , logo  $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = 1$ , analogamente, se  $\varepsilon^\alpha = -1$ , então  $\varepsilon^\beta = -1$ , assim  $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = 1$ .

Encontramos aqui 24 termos da soma, que contribuem positivamente no resultado (caso  $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = -1$ , dizemos que a contribuição seria negativa). Além disso, todos esses termos são parcelas da soma que gera a norma de  $Rm$ , uma vez que podemos rearranjar a ordem de suas entradas sem alterar seu sinal, temos:

$$R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} R_{\alpha_3\alpha_4\beta_3\beta_4} = R_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} R_{\alpha_3\alpha_4\alpha_1\alpha_2} = R_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} R_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}.$$

Por simplicidade, organizamos na tabela abaixo o resultado entre as relações de todas as permutações:

RELAÇÃO	$\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta$	Formato das Parcelas	Termos de
$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_4 = \beta_4$	+1	$R_{ijji}R_{kllk}$	$R^2$
$\alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_4 = \beta_4$	-1	$-R_{ijji}R_{kllk}$	$-R^2$
$\alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_3, \alpha_3 = \beta_1, \alpha_4 = \beta_4$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_3, \alpha_3 = \beta_4, \alpha_4 = \beta_1$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_4, \alpha_4 = \beta_1$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_4, \alpha_4 = \beta_3$	-1	$-R_{ijji}R_{kllk}$	$-R^2$
$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_3, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_4$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_3, \alpha_3 = \beta_4, \alpha_4 = \beta_2$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_4, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_3$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_4, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_4 = \beta_2$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_4, \alpha_4 = \beta_3$	+1	$R_{ijji}R_{kllk}$	$R^2$
$\alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_4, \alpha_3 = \beta_1, \alpha_4 = \beta_3$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_4, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_4 = \beta_1$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_4$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_4, \alpha_4 = \beta_2$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_1, \alpha_4 = \beta_4$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_4, \alpha_3 = \beta_1, \alpha_4 = \beta_2$	+1	$R_{ijkl}R_{ijkl}$	$ Rm ^2$
$\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_4, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_1$	-1	$-R_{ijkl}R_{ijkl}$	$- Rm ^2$
$\alpha_1 = \beta_4, \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_3$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_4, \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_4 = \beta_2$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_4, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_1, \alpha_4 = \beta_3$	+1	$-R_{ijjk}R_{illk}$	$- Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_4, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_4 = \beta_1$	-1	$R_{ijjk}R_{illk}$	$ Ric ^2$
$\alpha_1 = \beta_4, \alpha_2 = \beta_3, \alpha_3 = \beta_1, \alpha_4 = \beta_2$	-1	$-R_{ijkl}R_{ijkl}$	$- Rm ^2$
$\alpha_1 = \beta_4, \alpha_2 = \beta_3, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_1$	+1	$R_{ijkl}R_{ijkl}$	$ Rm ^2$

Note que aparecem 4 vezes termos de  $|Rm|^2$ , 16 vezes termos de  $|Ric|^2$  e 4 vezes termos de  $R^2$ . Assim,

$$\Psi(x) = \frac{1}{128\pi^2} \left( 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijkl}R_{ijkl} - 16 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijjk}R_{illk} + 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijji}R_{kllk} \right). \quad (18)$$

Observe ainda que

$$16|Rm|^2 - 16|Ric|^2 + 4R^2 = 4 \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}R_{ijkl} - 16 \sum_{i,j,k,l} R_{ijjk}R_{illk} + 4 \sum_{i,j,k,l} R_{ijji}R_{kllk}.$$

Se tivermos  $i = j = k = l$ , então todas as parcelas são nulas, o mesmo ocorre quando três das quatro entradas são iguais. Assim, reescrevendo as somas acima obtemos,

$$\begin{aligned}
16|Rm|^2 - 16|Ric|^2 + 4R^2 &= 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijkl}R_{ijkl} + 4 \left( \sum_{i=k} R_{ijkl}R_{ijkl} + \sum_{i=l} R_{ijkl}R_{ijkl} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=k} R_{ijkl}R_{ijkl} + \sum_{j=l} R_{ijkl}R_{ijkl} \right) - 16 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijjk}R_{illk} \\
&\quad - 16 \left( \sum_{j=l} R_{ijjk}R_{illk} + \sum_{i=k} R_{ijjk}R_{illk} \right) + 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijji}R_{kllk} \\
&\quad + \left( \sum_{i=k} R_{ijji}R_{kllk} + \sum_{i=l} R_{ijji}R_{kllk} + \sum_{j=k} R_{ijji}R_{kllk} + \sum_{j=l} R_{ijji}R_{kllk} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo mudanças convenientes de termos em alguns somatórios obtemos

$$\begin{aligned}
16|Rm|^2 - 16|Ric|^2 + 4R^2 &= 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijkl}R_{ijkl} \\
&\quad + 4 \left( \sum_{i,j,k} (R_{ijjk}R_{jijk} + R_{jikj}R_{jikj} + R_{ijjk}R_{ijjk} + R_{ijkj}R_{ijkj}) \right) \\
&\quad - 16 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijjk}R_{illk} - 16 \sum_{i,j,l} R_{ijji}R_{illi} - 16 \sum_{i,j,k} R_{ijjk}R_{ijjk} \\
&\quad + 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijji}R_{kllk} \\
&\quad + 4 \left( \sum_{i,j,l} (R_{ijji}R_{illi} + R_{ijji}R_{liil} + R_{ijji}R_{jllj} + R_{ijji}R_{illi}) \right) \\
&= 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijkl}R_{ijkl} + 16 \sum_{i,j,k} R_{ijjk}R_{ijjk} \\
&\quad - 16 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijjk}R_{illk} - 16 \sum_{i,j,l} R_{ijji}R_{illi} - 16 \sum_{i,j,k} R_{ijjk}R_{ijjk} \\
&\quad + 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijji}R_{kllk} + 16 \sum_{i,j,l} R_{ijji}R_{illi} \\
&= 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijkl}R_{ijkl} - 16 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijjk}R_{illk} + 4 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} R_{ijji}R_{kllk}.
\end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima em (18), deduzimos

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{128\pi^2} (16|Rm|^2 - 16|Ric|^2 + 4R^2) \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \left( |Rm|^2 - |Ric|^2 + \frac{R^2}{4} \right) \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \left( |Rm|^2 - \left( |Ric|^2 - \frac{R^2}{4} \right) \right) \\
&= \frac{1}{8\pi^2} (|Rm|^2 - |E|^2).
\end{aligned}$$

De (10), para  $n = 4$ , temos

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \left( |W|^2 + \frac{1}{2}|E|^2 + \frac{R^2}{24} - |E|^2 \right) \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \left( |W|^2 - \frac{1}{2}|E|^2 + \frac{R^2}{24} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, lembrando que  $\chi(M) = \int_M \Psi(x) d\mu(x)$  temos

$$\chi(M) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left( |W|^2 - \frac{1}{2}|E|^2 + \frac{R^2}{24} \right) d\mu.$$

O que prova o teorema. □

## 4.2 Assinatura de uma Variedade

Nessa seção apresentaremos e provaremos a seguinte fórmula integral para a assinatura de uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 4:

$$\tau(M) = \int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2) d\mu. \tag{19}$$

Antes de tudo, vamos definir o conceito de assinatura em uma variedade Riemanniana. Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $4k$ . A forma interseção de  $M$  é definida como a forma bilinear

$$Q : H^{2k}(M) \otimes H^{2k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q([\omega], [\eta]) := \int_M \omega \wedge \eta.$$

Note que  $Q$  é simétrica, pois  $\omega \wedge \eta = (-1)^{2k \cdot 2k} \eta \wedge \omega = \eta \wedge \omega$ , e portanto está bem definida, isto é, a integral do lado direito da igualdade não depende dos representantes da classe

de cohomologia, para verificar isso tome outro representante de  $[\omega]$ , digamos  $\tilde{\omega}$ . Assim,  $d\omega = d\tilde{\omega} = d\eta = 0$  e existe  $\theta \in \Lambda^{2k-1}(T_pM)$  tal que  $\tilde{\omega} - \omega = d\theta$ . logo,  $\tilde{\omega} = \omega + d\theta$  e  $d^2\theta = 0$ , assim

$$\begin{aligned} \int_M \tilde{\omega} \wedge \eta &= \int_M (\omega + d\theta) \wedge \eta \\ &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d\theta \wedge \eta. \end{aligned}$$

Lembrando que  $d(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge d\eta$  e usando o teorema de Stokes obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \tilde{\omega} \wedge \eta &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\theta \wedge \eta) - \int_M \theta \wedge d\eta \\ &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_{\partial M} \theta \wedge \eta \\ &= \int_M \omega \wedge \eta. \end{aligned}$$

Desde que  $H^{2k}(M)$  possui dimensão finita igual a  $b_{2k}$ , podemos tomar uma base  $B = \{[\omega_i]\}$  de modo que a forma quadrática  $Q$  possui uma matriz associada  $Q_{[B]}$  cujas entradas são  $(Q_{[B]})_{ij} = Q([\omega_i], [\omega_j])$ . Essa matriz pode ser diagonalizada para uma matriz de autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , onde  $s = \dim H^{2k} = b_{2k}$ .

A assinatura de  $Q_{[B]}$  é a diferença entre a quantidade de autovalores positivos e autovalores negativos.

**Definição 4.2** A **assinatura**  $\tau(M)$  de uma variedade Riemanniana de dimensão  $4k$  compacta orientada é a assinatura da forma quadrática  $Q$ .

A assinatura é um invariante topológico, para mais detalhes veja [21].

Vimos que se  $\dim(M) = 4k$ , então  $*$  :  $\Lambda^{2k} \rightarrow \Lambda^{2k}$  decompõe o espaço das 2-formas como  $\Lambda^{2k} = \Lambda_+^{2k} \oplus \Lambda_-^{2k}$ . Além disso, associada a essa decomposição, existe uma decomposição das formas harmônicas. De fato, sendo  $M$  compacta, podemos escrever  $\mathcal{H}^{2k} = \mathcal{H}_+^{2k} \oplus \mathcal{H}_-^{2k}$ , onde  $\mathcal{H}_+^{2k}, \mathcal{H}_-^{2k}$  são os autoespaços de  $*$  com autovalores  $+1$  ou  $-1$  respectivamente. Portanto, a assinatura  $\tau$  de  $M$  pode ser escrita como

$$\tau(M) = b_{2k}^+ - b_{2k}^-,$$

onde  $b_{2k}^\pm = \dim \mathcal{H}_\pm^{2k}$ . Nosso intuito é fornecer uma fórmula integral para a assinatura de uma variedade em termos das componentes do tensor curvatura, para isso iremos recorrer à algumas ferramentas topológicas. A primeira delas é o teorema de assinatura de Hirzebruch em dimensão 4, cuja prova pode ser encontrada em [13].



**Teorema 4.3** *Para qualquer variedade Riemanniana compacta  $M^4$  temos*

$$\tau(M) = \frac{1}{3} \int_M p_1(TM),$$

onde  $p_1(TM)$  é a primeira classe de Pontryagin.

Por volta de 1948, Shiing-Shen Chern e André Weil mostraram que as classes de Pontryagin podem ser representadas como formas diferenciais que dependem de polinômios envolvendo a forma curvatura de um fibrado vetorial. Dessa maneira, a chamada Teoria de Chern-Weil nos fornece uma conexão entre a topologia algébrica e a geometria diferencial.

No nosso caso podemos expressar a primeira classe de Pontryagin como

$$p_1(TM) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(\Omega \wedge \Omega),$$

onde  $\Omega$  pode ser visto como uma matriz anti-simétrica de 2-formas, de modo que

$$\Omega_{ij} = \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} e^k \wedge e^l.$$

Para mais detalhes veja [15]. Note agora que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Omega \wedge \Omega) &= \sum_{i,j} \Omega_{ij} \wedge \Omega_{ji} \\ &= -\sum_{i,j} \Omega_{ij} \wedge \Omega_{ij} \\ &= -\sum_{i,j} \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) \wedge \mathcal{R}(e^i \wedge e^j). \end{aligned}$$

Assim,  $p_1(TM)$  pode ser escrito como  $\frac{1}{8\pi^2} \sum_{i,j} \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) \wedge \mathcal{R}(e^i \wedge e^j)$ .

Considere agora  $\omega \in \Lambda^2(T_p M)$ . Dessa forma temos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\omega) &= \mathcal{R}(\omega^+ + \omega^-) \\ &= \mathcal{R}(\omega^+) + \mathcal{R}(\omega^-) \\ &= \mathcal{R}^+(\omega^+) + \mathcal{R}^-(\omega^+) + \mathcal{R}^+(\omega^-) + \mathcal{R}^-(\omega^-) \\ &= A(\omega) + D(\omega) + B(\omega) + C(\omega), \end{aligned}$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são componentes do operador curvatura dados em (3) e (16). Lembrando que a decomposição anterior é ortogonal, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\omega) \wedge \mathcal{R}(\omega) &= A(\omega) \wedge A(\omega) + D(\omega) \wedge D(\omega) + B(\omega) \wedge B(\omega) + C(\omega) \wedge C(\omega) \\ &= |A(\omega)|^2 d\mu - |D(\omega)|^2 d\mu + |B(\omega)|^2 d\mu - |C(\omega)|^2 d\mu,\end{aligned}$$

onde  $\alpha \wedge \alpha = \pm|\alpha|^2 d\mu$ , se  $\alpha \in \Lambda^\pm$ .

O seguinte resultado será útil para demonstrarmos a fórmula que estamos procurando.

**Lema 4.1**

$$|B| = |D|.$$

**Prova:** Lembrando que as matrizes associadas a estes operadores satisfazem  $B = D^*$ , então

$$|B|^2 = \text{Tr}(BB^*) = \text{Tr}(B^*B) = \text{Tr}(DD^*) = |D|^2.$$

Como queríamos demonstrar. □

Note agora que, dado  $\mathcal{P} \in S^2(\Lambda^2)$ , temos:

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}|^2 &= \text{Tr}(\mathcal{P}^*\mathcal{P}) \\ &= \sum_{i<j} \langle \mathcal{P}^*\mathcal{P}(e^i \wedge e^j), e^i \wedge e^j \rangle \\ &= \sum_{i<j} \langle \mathcal{P}(e^i \wedge e^j), \mathcal{P}(e^i \wedge e^j) \rangle \\ &= \sum_{i<j} |\mathcal{P}(e^i \wedge e^j)|^2.\end{aligned}$$

Portanto, observando que  $\mathcal{R}(e^i \wedge e^j) = -\mathcal{R}(e^j \wedge e^i)$ , temos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) \wedge \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) &= 2 \sum_{i<j} \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) \wedge \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) \\ &= 2 \left( \sum_{i<j} |A(e^i \wedge e^j)|^2 - \sum_{i<j} |D(e^i \wedge e^j)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i<j} |B(e^i \wedge e^j)|^2 - \sum_{i<j} |C(e^i \wedge e^j)|^2 \right) d\mu \\ &= 2(|A|^2 - |D|^2 + |B|^2 - |C|^2) d\mu \\ &= 2(|A|^2 - |C|^2) d\mu.\end{aligned}$$

Usando (16), temos

$$|A|^2 = |W^+|^2 + \frac{R^2}{48} \quad \text{e} \quad |C|^2 = |W^-|^2 + \frac{R^2}{48},$$

portanto

$$\begin{aligned} p_1(TM) &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i,j} \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) \wedge \mathcal{R}(e^i \wedge e^j) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left( |W^+|^2 + \frac{R^2}{48} - |W^-|^2 - \frac{R^2}{48} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$p_1(TM) = \frac{1}{4\pi^2} (|W^+|^2 - |W^-|^2) d\mu.$$

Finalmente, usando o teorema de Hirzebruch obtemos

$$\tau(M) = \frac{1}{12\pi^2} \int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2) d\mu,$$

provando a fórmula (19).

Agora apresentaremos duas aplicações para as fórmulas (17) e (19) demonstradas anteriormente.

### 4.3 Desigualdade de Hitchin-Thorpe

A característica de Euler e a assinatura de uma variedade Einstein compacta de dimensão 4 possuem a seguinte relação:

$$\chi \geq \frac{3}{2} |\tau|.$$

Esse resultado é devido à J.Thorpe e N.Hitchin, forneceremos aqui uma demonstração utilizando as fórmulas encontradas para  $\chi(M)$  e  $\tau(M)$ .

**Teorema 4.4 (Hitchin-Thorpe, 1974)** *Se uma variedade diferenciável  $M$  compacta de dimensão 4 admite uma métrica Einstein  $g$ , então*

$$\chi \geq \frac{3|\tau|}{2}.$$

**Prova:** Primeiramente observe que

$$2\chi \pm 3\tau = \frac{1}{4\pi^2} \int_M \left( |W^\pm|^2 + \frac{R^2}{24} - \frac{1}{2} |E|^2 \right) d\mu.$$

Como  $M^4$  é Einstein então  $Ric = \lambda g$ , onde  $\lambda$  é uma constante. Tomando o traço dessa última igualdade temos que  $R = 4\lambda$ , ou seja,  $Ric = \frac{R}{4}g$ . Logo  $E \equiv 0$  em  $M^4$  Einstein.

Portanto, levando em consideração que  $|W^\pm|^2 \geq 0$ , temos:

$$4\pi^2(2\chi \pm 3\tau) \geq \int_M \frac{R^2}{24} d\mu \geq 0,$$

daí,

$$\chi \geq \frac{\mp 3\tau}{2},$$

portanto,

$$\chi \geq \frac{3|\tau|}{2},$$

como queríamos provar. □

**Observação 4.1** *A igualdade ocorre se, e somente se, a variedade é half conformally flat e Ricci-flat, ou seja,  $W^- \equiv 0$  e  $Ric \equiv 0$ .*

*De fato, supondo que  $2\chi = 3\tau$ , temos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_M \left( |W^+|^2 + |W^-|^2 + \frac{R^2}{24} \right) d\mu &= \frac{1}{4\pi^2} \int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2) d\mu \\ \int_M \left( 2|W^-|^2 + \frac{R^2}{24} \right) d\mu &= 0, \end{aligned}$$

*como o integrando é não-negativo, temos que  $W^- = 0$  e  $R = 0$ , o fato da variedade ser Einstein nos garante que  $Ric = \frac{R}{4}g = 0$ , portanto a igualdade ocorre se, e somente se, a variedade é half conformally flat e Ricci-flat.*

#### 4.4 Desigualdade de Miyaoka-Yau

Como uma outra aplicação das fórmulas (17) e (19) provaremos a desigualdade de Miyaoka-Yau, que afirma que sobre uma superfície complexa compacta de tipo geral vale a seguinte relação:

$$\chi(M) \geq 3\tau(M).$$

Esse resultado foi provado independentemente por Yoichi Miyaoka e S.T. Yau em 1977, entretanto Miyaoka não fornecia nenhuma informação sobre o que acontecia quando a igualdade ocorria, o que foi provado por Yau em [26].

Apresentaremos aqui uma generalização dessa desigualdade obtida por Lebrun em [16].

**Teorema 4.5 (Lebrun,1995)** *Seja  $(M^4, g)$  uma variedade Einstein compacta não-flat que admite uma estrutura quase-complexa. Dada em  $M$  a orientação e a estrutura  $spin^{\mathbb{C}}$  induzida, suponha que  $\mathcal{SW}_M(\mathfrak{s}) \neq 0$ . Então a característica de Euler  $\chi$  e a assinatura  $\tau$  de  $M$  satisfazem*

$$\chi \geq 3\tau,$$

com igualdade se, e somente se, o recobrimento universal de  $(M, g)$  é o espaço hiperbólico complexo, de dimensão (complexa) 2,  $\mathbb{C}\mathcal{H}_2 := SU(2, 1)/U(2)$ , com uma constante múltipla da sua métrica padrão.

**Prova:** Do Teorema 2.2 e da Proposição 2.8 temos

$$\begin{aligned} 2\chi + 3\tau = c_1^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_M (|F_A^+|^2 - |F_A^-|^2) d\mu \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_M |F_A^+|^2 d\mu \\ &\leq \frac{1}{32\pi^2} \int_M s^2 d\mu. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando as fórmulas (17) e (19) obtemos

$$\begin{aligned} 3(2\chi - 3\tau) &= \frac{3}{4\pi^2} \int_M \left( 2|W^-|^2 + \frac{s^2}{24} \right) d\mu \\ &\geq \frac{1}{32\pi^2} \int_M s^2 d\mu \\ &\geq 2\chi + 3\tau, \end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, a métrica é Kähler-Einstein e  $W^- \equiv 0$ . Quando  $W^-$  e  $E$  se anulam, o operador curvatura (em uma variedade Kähler) é da forma

$$\mathcal{R} = \frac{s}{8}\omega \otimes \omega + \frac{s}{12}Id,$$

onde  $\omega$  é a forma Kähler. (Para mais detalhes veja [5]).

Visto que  $s$  é constante e  $\omega$  é paralela, temos

$$\nabla \mathcal{R} = 0,$$

o que implica que  $(M, g)$  é localmente simétrica. Visto que  $2\chi + 3\tau > 0$ , pela desigualdade de Hitchin-Thorpe, e  $\mathcal{S}\mathcal{W}_M((s)) \neq 0$ , então  $s$  é necessariamente negativa e a forma pontual de  $\mathcal{R}$  implica que o recobrimento universal de  $(M, g)$  é isométrica a uma versão reescalada do espaço simétrico  $\mathbb{C}\mathcal{H}_2$ .  $\square$

## 5 CONCLUSÃO

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foi possível compreender o conceito da característica de Euler e a assinatura de uma variedade diferenciável e obtivemos uma fórmula para calcular tais elementos em uma variedade Riemanniana com métrica qualquer, para isso utilizamos ferramentas importantes tais como o Teorema de Chern-Gauss-Bonnet, o Teorema de Assinatura de Hizerbruch em dimensão 4 e um pouco da Teoria de Chern-Weil, assim pudemos comprovar a validade de tais fórmulas que constantemente surgem em trabalhos, artigos e livros.

Neste trabalho abordamos duas aplicações para as fórmulas obtidas, porém existem outras aplicações interessantes que podem ser exploradas com o uso das fórmulas citadas. Uma prova para a desigualdade de Hitchin-Thorpe foi obtida de maneira imediata a partir das fórmulas integrais obtidas e uma prova para a desigualdade de Miyaoka-Yau foi obtida usando as fórmulas integrais e um pouco da Teoria de Seiberg-Witten.

O próximo passo seria exibir e provar uma fórmula integral para variedades Riemannianas com bordo e variedades Pseudo-Riemannianas, assim, poderemos estender nossos resultados para tais variedades e possivelmente abordar outros resultados com o uso dessas fórmulas.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALLENDOERFER C.B. The Euler Number of a Riemann Manifold. *Amer.J.Math*, v. 62, p. 243-248, 1940.
- [2] ALLENDOERFER C.B.; WEIL.A. The Gauss-Bonnet Theorem for Riemannian Polyhedra. *Trans.Am.Math.Soc.*, v. 53, p. 101-129, 1943.
- [3] ATIYAH, M.F.; HITCHIN,N.J.; SINGER, I.M. Self-Duality in Four-Dimensional Riemannian Geometry. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 362, n. 1711, p. 425-461, 1978.
- [4] BATISTA,M. *Rigidez de solitons gradiente*. 2010. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Fortaleza, 2010.
- [5] BESSE, A. *Einstein Manifolds*. Berlin: Springer, 1980.
- [6] CAMINHA, A. *Introdução à Geometria das Aplicações Harmônicas*. 1.ed. São Paulo: RiMa, 2010.(XVI Escola de Geometria Diferencial, v. 1).
- [7] CHERN. S.S. A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. *Ann. Math.* v. 45, n. 4, p. 747-752, 1944.
- [8] CHERN, S.S. On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, v. 20, p. 117-126, 1955.
- [9] CHOW, B.; LU, P.; Ni, L. *Hamilton's Ricci Flow*. Providence: American Mathematical Society, 2006.(Graduate Studies in Mathematics, v. 77).
- [10] DILLEN, F.J.E; VERSTRAELEN, L.C.A. *Handbook of Differential Geometry*. Amsterdã: Elsevier, v. 1, 2000.
- [11] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 4<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides).
- [12] HITCHIN,N.J. Compact four-dimensional einstein manifolds. *J. Diff. Geom.* v. 9, p. 435-441, 1974.
- [13] HIRZERBRUCH,F. *New topological methods in algebraic topology*. New York : Springer-Verlag, 1966.
- [14] JOHNSON, F.E.A.; KOTSCHICK,D. On the signature and Euler characteristic of certain four-manifolds. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 114, p. 431-437, 1993
- [15] KOBAYASHI,S.; NOMIZU,K. *Foundations of Differentiable Geometry*. v. 2. New York: Interscience, 1969.

- [16] LEBRUN,C. Einstein Metrics and Mostow Rigidity. *Mathematical Research Letters*, v. 2, p. 1-8, 1995.
- [17] LEBRUN,C. *Four-Dimensional Einstein Manifolds, and Beyond*. In: Surveys in Differential Geometry, v. 6, Essays on Einstein Manifolds, Massachusetts: International Press of Boston, 1999.
- [18] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer-Verlag, 2002. (New York Graduate Texts in Mathematics, v. 218).
- [19] NASH,J. The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds. *Annals of Mathematics*, Second Series, v. 63, p. 20-63, 1956.
- [20] PETERSEN,P. *Riemannian Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate texts in mathematics, v. 171).
- [21] RODRÍGUEZ,J. *The Signature of a Manifold*. pre-print, arXiv, 2005. Disponível em : <<http://arxiv.org/pdf/math/0508181v1.pdf>>. Acesso em: 15 fev. 2014.
- [22] SCORPAN, A. *The Wild World of 4-Manifolds*. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [23] SINGER, I.M.; THORPE,J.A. *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces*. In: Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira. Princeton University Press: Princeton, p. 355-365, 1969.
- [24] VIACLOVSKY,J. A. *Topics in Riemannian Geometry*. Madison University of Wisconsin, 2011. Disponível em: <[http://www.math.wisc.edu/~jeffv/courses/865\\_Fall\\_2011.pdf](http://www.math.wisc.edu/~jeffv/courses/865_Fall_2011.pdf)>. Acesso em: 25 jan. 2014.
- [25] WARNER,F.*Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [26] YAU,S.T. Calabi's Conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, v. 74, n. 5, p. 1798-1799, 1977.
- [27] ZHU, C. *The Gauss-Bonnet Theorem and Its Applications*. Berkeley, University of California, 2000. Disponível em: <<http://math.berkeley.edu/~alanw/240papers00/zhu.pdf>>. Acesso em: 13 mar. 2014.