UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO VALBER PARENTE JÚNIOR

DOMÍNIOS ISOSPECTRAIS E A LEI DE WEYL

FORTALEZA
2015

FRANCISCO VALBER PARENTE JÚNIOR

DOMÍNIOS ISOSPECTRAIS E A LEI DE WEYL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

P252d Parente Júnior, Francisco Valber
Domínios isospectrais e a lei de Weyl / Francisco Válber Parente Júnior. – 2015.
33 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Análise.
Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

1. Tambor. 2. Domínios Nice. 3. Autovalores. I. Título.

CDD 515

FRANCISCO VALBER PARENTE JÚNIOR

DOMÍNIOS ISOSPECTRAIS E A LEI DE WEYL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovoda em: 13 / 07 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

José Fábio Bezerra Montenegro

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Cleon S. Barroso

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará (UFC)

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha família e a todos os meus amigos que contribuíram diretamente ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso e Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores entrevistados, pelo tempo concedido nas entrevistas.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

"Ser feliz não é conseguir o que deseja, é desejar o que já possui. (Garth Brooks)"

RESUMO

O som produzido por um tambor é determinado através de um conjunto de frequências vibracionais. Essas frenquências chamadas de autovalores dependem da forma do tambor. Conhecendo os autovalores será possível determinar o formato de um tambor? Em outras palavras, será que pode-se ouvir a forma de um tambor? Essa pergunta foi colocada por Mark Kac(KAC) em 1966 e foi um problema que levou uma boa quantidade de anos para ser resolvido. Um resultado relevante provado mais cedo foi de que pode-se ouvir a área de um tambor. Em 1910 o grande físico H. A. Lorentz deu cinco palestras sob o título geral: "Velhos e novos problemas da Física" – e no final da quarta palestra, ele mostrou um problema em aberto, que em nossos termos dita uma relação entre os autovalores e a área de um tambor. Há um relatório que Hilbert previu que esse problema não seria resolvido em seu tempo de vida. Mas ele estava muito enganado, em menos de dois anos, Hermann Weyl(WEYL), que estava presente na palestra de Lorentz, prova o problema, o qual ficou conhecido por Lei de Weyl. O objetivo deste trabalho é provar a Lei de Weyl e dar um contraexemplo para o problema posto por Mark Kac.

Palavras-chave: Domínios Isospectrais. Lei de Wely. Tambor.

ABSTRACT

The sound produced by a drum is determined through a set of frequencies vibrational. These frequencies eigenvalues calls depend on the shape of the drum. Knowing the eigenvalues you can determine the shape of a drum? In other words, you can hear the shape of a drum? This question was posed by Mark Kac(KAC) in 1966 and was a problem that took a good amount of years to resolved. An important result was proved earlier that you can hear the area of a drum. In 1910 the great physicist H.A. Lorentz gave five lectures under the title general: “Old and new problems of physics” – and at the end of the fourth lecture, he showed an open problem, which in our terms dictates a relationship between the eigenvalues and the area of a drum. There is a report that Hilbert predicted that this problem would not settled in their lifetime. But was very mistaken, in less than two years, Hermann Weyl(WEYL), that was present at the lecture of Lorentz, proves the problem, which was known for Weyl’s law. The objective of this work is to prove the Wely’s law and give a counterexample to the problem posed by Mark Kac.

Keywords: Isospectral domains. Weyl’s law. Drum.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em "*Almanaque das curiosidades matemáticas*"(STEWART), livro escrito por Ian Stewart, tem-se o seguinte trecho do texto "*Você consegue ouvir a forma de um tambor?*":

> O pano de fundo do palco ilustra uma cena marcante: o vale do Reno à luz da Lua. No fosso, a orquestra ensaia *O crepúsculo dos deuses*. A história chega à trágica morte de Siegfried, e o maestro, Otton von Ograf, ergue a batuta ao início da "Marcha fúnebre". Primeiro os tímpanos, um ritmo intrincado e repetido em um dó sustenido grave...
>
> — Não, não, não! – grita Von Ograf, jogando a batuta no chão. — Assim não, seus animais incompetentes!
>
> O timpanista principal protesta, não muito sabiamente.
>
> — Mas herr Von Ograf, o ritmo estava absolutamente per...
>
> — Ritmo uma ova! – diz o regente.
>
> — O andamento estava exatamente igual ao indicado na partitu...
>
> — Não estou reclamando do *andamento*! – grita o maestro.
>
> — O tom estava perfeito, um dó susteni...
>
> — Tom? *Tom?* É *claro* que o tom estava perfeito! Eu mesmo ouvi quando a orquestra estava afinando! Tenho ouvido absoluto!
>
> — Então o que...
>
> — A *forma*, seu idiota! A forma!
>
> O timpanista parece perplexo. É difícil descrever. Von Ograf tenta expressar o que ouviu:
>
> — Um dos tambores soava muito... Bem, muito quadrado. Os outros tímpanos tinham som... *arredondado* de sempre, mas um deles... bom, um deles tinha cantos.
>
> — Vamos lá, herr Von Ograf... você não está dizendo que consegue *ouvir* a forma de um tambor, está?
>
> — Eu ouço – diz o maestro, resoluto. — Um dos tambores está quadrado demais.

Quando batemos em um tambor, ele gera uma lista de frenquências, chamada de espectro, esta lista é que determina o som deste tambor. Cada tambor tem a sua própria lista(espectro). Euler calculou o espectro de um tambor circular, com ajuda de funções especiais, as *funções de Bessel*. Já num tambor retangular temos funções senos e cossenos.

Assim, dado um tambor com uma certa forma, podemos encontrar o seu espectro. Será que podemos dizer o contrário? Dado o espectro de um tambor, podemos saber qual o seu formato? Mark Kac(KAC) fez essa pergunta em 1966 no paper "*Can one hear the shape of a drum?*"

Um caso interessante disso é quando acontece um terremoto, a Terra ressoa, e através desse som que ela emite, os sismólogos deduzem várias coisas sobre a estrutura interna da Terra, sobre as camadas de rochas.

A pergunta proposta por Mark tem o *não* como resposta. John Milnor(MILNOR) encontrou dois toros distintos, com dimensão 16, os quais tinham o mesmo espectro. Em 1989 Carolyn Gordon, David Webb e Scott Wolpert(GORDON, WEBB, and WOLPERT) construiram dois tambores distintos, em dimensão 2, com o mesmo espectro. Mas Von Ograf estava certo em parte. O alemão Hermann Weyl provou que dado o espectro de um tambor, podemos determinar sua área e o próprio Mark provou que podemos determinar seu perímetro. Juntando isso com a desigualdade isoperimétrica

$$4\pi A \leq L^2,$$

onde A é a área e L é o perímetro do tambor. E a igualdade somente acontece no disco. Assim, se sabemos a área e o perímetro, então saberemos se o tambor é circular($4\pi A = L^2$) ou não($4\pi A < L^2$).

2 NOCÕES BÁSICAS

Nesse capítulo iremos dar as informações básicas para os capítulos posteriores, com alguns exemplos.

Sabemos que se colocarmos uma membrana $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ fixa ao longo do seu bordo Γ e pormos em marcha o seu deslocamento $f(x, y, t)$ na direção perpendicular ao seu plano inicial(plano xy), esse deslocamento obedecerá a equação da onda, ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c\Delta f,$$

onde c é uma constante determinada pelas propriedades físicas e sobre a tensão sob a qual a membrana é mantida. Usando separação de variáveis ($f(x, y, t) = u(x, y)v(t)$), obtemos que a função v é da forma e^{iwt}, logo substituindo $f(x, y; t) = u(x, y)e^{iwt}$ na equação da onda com a condição que u zera no bordo(Condição de Bordo de Dirichlet), temos

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

conhecida como a equação de Helmholtz, onde λ depende de w.

Os números λ que correspondem à uma função não nula u que satisfaz a equação de Helmholtz $\Delta u + \lambda u = 0$ são chamados de autovalores de Ω e as funções u de autofunções de Ω. O espectro de Ω é o conjunto de todos os autovalores de Ω. Usaremos a notação $\Lambda(\Omega)$ para indicar o espectro(Laplaciano) de Ω. E já conhecido, este espectro é discreto, formado por uma sequência do tipo

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

tal que $\lambda_n \to \infty$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1 *Considere o caso mais simples de uma corda de comprimento l formada pelo conjunto $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq l\}$. Nesse caso ficamos com a equação*

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

onde

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Nessas condições, temos três casos, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. No primeiro caso, temos que a solução da forma

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

assim, pela condição de bordo, temos

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l},$$

que nos dá $c_1 = c_2 = 0$*, portanto* u *será nula e isso não nos interessa.*

No segundo caso, $\lambda = 0$*, temos* $u''(x) = 0$ *o que nos dá*

$$u(x) = c_1 x + c_2,$$

e pela condição de bordo ficamos com

$$c_2 = 0 \ \ e \ \ c_1 l + c_2 = 0,$$

daí $c_1 = c_2 = 0$ *o que não nos interessa, já que nesse caso* u *será nula.*

Por último $\lambda > 0$*. Nesse caso, a solução é da forma*

$$u(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda} x),$$

e pela condição de bordo, temos

$$c_1 = 0 \ \ e \ \ c_2 sen(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

e como não queremos u *nula, ou seja,* $c_2 = 0$ *obtemos* $sen(\sqrt{\lambda} l) = 0$*. Isso nos dá* $\sqrt{\lambda} l = n\pi$ *onde* $n \in \mathbb{Z}$*, daí*

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

para n *inteiro diferente de zero, pois vimos o caso* $\lambda = 0$*. Portanto, o espectro da corda é*

$$\left\{ \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}; n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}.$$

Exemplo 2 *Agora considere no* $\mathbb{R}^2$ *o disco unitário* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$*. Para calcular o seu espectro iremos ultilizar coordenadas polares, e primeiro calculemos o laplaciano nessas coordenadas. Temos* $u = u(x, y)$ *uma função de duas variáveis. Consideremos a composta* $(x, y) \mapsto (r, \theta) \mapsto u$*. Usemos*

$$\begin{cases} x = r cos\theta \\ y = r sen\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta = arctan\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Aplicando a regra da cadeia, temos

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x.$$

Derivando novamente, temos pela regra da derivada do produto que

$$u_{xx} = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}.$$

E novamente pela regra da cadeia, obtemos

$$u_{xx} = (u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x + u_\theta \theta_{xx}.$$

Tomando em conta que $u_{r\theta} = u_{\theta r}$, temos

$$u_{xx} = u_{rr}(r_x)^2 + 2u_{r\theta} r_x \theta_x + u_{\theta\theta}(\theta_x)^2 + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx}.$$

Analogamente derivando em relação a y, obtemos

$$u_{yy} = u_{rr}(r_y)^2 + 2u_{r\theta} r_y \theta_y + u_{\theta\theta}(\theta_y)^2 + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}.$$

Assim, o laplaciano $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ vale

$$\begin{aligned} \Delta u &= ((r_x)^2 + (r_y)^2) u_{rr} + 2(r_x\theta_x + r_y\theta_y) u_{r\theta} + ((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2) u_{\theta\theta} \\ &+ (r_{xx} + r_{yy}) u_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy}) u_\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Agora pelas expressões de x y r e θ, vemos facilmente que

$$(r_x)^2 + (r_y)^2 = 1;$$

$$r_x\theta_x + r_y\theta_y = 0;$$

$$(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 = \frac{1}{r^2};$$

$$r_{xx} + r_{yy} = \frac{1}{r};$$

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0.$$

Portanto, substituindo em (1), temos

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}.$$

Agora vamos calcular os autovalores do disco D com as condições de bordo

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \lambda u, \ \ em \ D \\ u(1,\theta) = 0, \ \ em \ \partial D. \end{cases} \tag{2}$$

Usaremos o método de separação de variáveis, então supondo

$$u(r,\theta) = f(r)g(\theta),$$

e substituindo na primeira equação de (2), temos

$$f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = \lambda f(r)g(\theta),$$

como não queremos u nula, então podemos dividir a equação por $f(r)g(\theta)$ *e, multiplicando-a por* r^2*, ficamos com*

$$\frac{r^2 f''(r) + rf'(r) - \lambda r^2 f(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \mu,$$

temos então os dois problemas

$$\begin{cases} g''(\theta) + \mu g(\theta) = 0 \\ g(\theta) = g(\theta + 2\pi) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} r^2 f''(r) + rf'(r) - (\lambda r^2 + \mu)f(r) = 0 \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

O primeiro já conhecido, as soluções são do tipo $g_0(\theta) = c_0$ *caso* $\mu = 0$ *digamos* $\mu_0 = 0$ *e*

$$g_n(\theta) = A_n cos(n\theta) + B_n sen(n\theta),$$

com $\mu_n = n^2$*. Pondo esses valores de* μ *na equação* $r^2 f''(r) + rf'(r) - (\lambda r^2 + \mu)f(r) = 0$ *e fazendo* $\lambda = -\alpha^2$*, com* $\alpha > 0$*, já que sabemos que os autovalores do laplaciano são todos negativos em qualquer região de* D*, obtemos*

$$r^2 f''(r) + rf'(r) + (\alpha^2 r^2 - n^2)f(r) = 0.$$

Esta equação se reduz a uma equação de Bessel através da mudança de variável $s = \alpha r$*. De fato, usando a regra da cadeia*

$$\frac{df}{dr} = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dr} = \alpha\frac{df}{ds},$$

e multiplicando por r*, temos*

$$r\frac{df}{dr} = s\frac{df}{ds}.$$

Do mesmo modo, se derivarmos novamente, obtemos

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2} = s^2\frac{d^2f}{ds^2},$$

daí ficamos com

$$s^2\frac{d^2f}{ds^2} + s\frac{df}{ds} + (n^2 - s^2)f = 0,$$

que é a equação de Bessel de índice n*. Assim, vendo* f *como uma função de* s *temos*

$$f(s) = c_1J_n(s) + c_2Y_n(s),$$

onde J *é a função de Bessel de primeira espécie, e* Y *é a função de Bessel de segunda espécie. Agora voltando para a variável* r*, ficamos com*

$$f(r) = c_1J_n(\alpha r) + c_2Y_n(\alpha r),$$

como as funções envolvidas devem ser finitas e estarem bem definidas para $0 \leq r \leq 1$*, em particular, para* $r = 0$*, então é preciso termos* $c_2 = 0$*, pois* Y *não será finita, assim*

$$f(r) = cJ_n(\alpha r).$$

Dessa forma, nós temos que as funções

$$u(r,\theta) = c_0J_0(\alpha r)$$

e

$$u(r,\theta) = J_n(\alpha r)\big(A_n cos(n\theta) + B_n sen(n\theta)\big)$$

satisfazem $\Delta u = -\alpha^2 u$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$*, então precisamos saber para quais valores de* α *a função* u *cumpre a condição de bordo,* $u \equiv 0$ *em* $\partial D\big(u(1,\theta) = 0\big)$*. Para isso devemos ter* $J_n(\alpha) = 0$*. Assim* α *deve ser um zero(positivo) da função de Bessel* J_n *e como existe uma sequência de zeros positivos de* J_n*, digamos*

$$\alpha_{n1} < \alpha_{n2} < \ldots < \alpha_{nm} < \ldots,$$

então concluimos que os autovalores do laplaciano do disco D *são*

$$\lambda_{nm} = (\alpha_{nm}^2),$$

com $n = 0, 1, 2, \ldots$ *e* $m = 1, 2, \ldots$.

Observe que pelo passe final do cálculo dos autovalores acima, temos que, para *um disco com um raio R qualquer, o seu espectro(Laplaciano) é*

$$\left\{ \lambda_{nm} = \left(\frac{\alpha_{nm}}{R}\right)^2 ; n \in \mathbb{N} \ e \ m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Acabamos de ver dois exemplos, que apesar de estarem em dimensões diferentes, ponho aqui uma questão que foi colocada pela primeira vez em 1966 por Mark Kac que dizia: Dadas Ω_1 e Ω_2 duas regiões planas limitadas pelas curvas Λ_1 e Λ_2, respectivamente, e considere os dois problemas de autovalor

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ em } \Omega_1 \\ u \equiv 0 \text{ em } \Lambda_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta v + \mu v = 0 \text{ em } \Omega_2 \\ v \equiv 0 \text{ em } \Lambda_2. \end{cases}$$

Assumimos que para cada n o autovalor λ_n de Ω_1 seja igual ao autovalor μ_n de Ω_2, então perguntamos: As regiões Ω_1 e Ω_2 são congruentes no sentido de geometria plana?

A resposta estará nos próximos capítulos e faremos toda a construção dela.

3 LEI ASSINTÓTICA DE WEYL

Nesse capítulo iremos enunciar e provar a Lei Assintótica de Weyl apresentada pela primeira vez em 1910 pelo físico holandês H. A. Lorentz, numa palestra em Gottingen. Essa Lei relaciona a área do domínio com os autovalores do Laplaciano, digamos que "podemos ouvir a área de um tambor." Em termos matemáticos o que Lorentz conjecturou se expressa como

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{2\pi D(\lambda)}{\lambda} = A,$$

onde $D(\lambda)$ é o número de autovalores menores que λ e A é a área do tambor. O matemático alemão Hermann Weyl(WEYL) que estava presente na palestra de Lorentz provou que a fórmula é verdadeira se for incluído o fator 2, isto é,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{4\pi D(\lambda)}{\lambda} = A.$$

Para demonstrarmos a Lei de Weyl, analisaremos primeiro o problema num domínio mais particular, o retângulo, depois extenderemos para domínios quadrados e por fim para domínios "nice".

3.1 Problema de autovalor no retângulo

Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Calculemos os autovalores de R para as condições de bordo de Dirichlet e de Neumann(as derivadas zeram no bordo). Utilizando separação de variáveis, suponhamos que $u(x, y) = f(x)g(y)$. Substituindo em $\Delta u = \lambda u$, temos $-f''(x)g(y) - f(x)g''(y) = \lambda f(x)g(y)$, como não queremos soluções nulas, é natural supormos que $f(x)g(y) \neq 0$, assim ficamos com

$$-\frac{\lambda f(x) + f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)},$$

agora temos uma equação que o lado esquerdo depende de x e o lado direito de y, o que nos resta perceber que ambos os lados são igual a uma constante, isto é,

$$-\frac{\lambda f(x) + f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} = \alpha.$$

Resolvendo primeiro a equação $g''(y) - \alpha g(y) = 0$, vemos que a solução depende se $\alpha > 0, \alpha = 0$, ou $\alpha < 0$. Nos casos, $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$, podemos ver facilmente que $g(y) = 0$ para as condições de bordo de Dirichlet e de Neumann. Nos resta o caso $\alpha < 0$. Para este temos que

$$g(y) = c_1 cos(\sqrt{-\alpha} y) + c_2 sen(\sqrt{-\alpha} y),$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Para o laplaciano de Dirichlet, temos $0 = g(0) = c_1$, logo, $g(y) = c_2 sen(\sqrt{-\alpha}y)$. Daí $0 = g(b) = c_2 sen(\sqrt{-\alpha}b)$ no que implica que $\sqrt{-\alpha}b/\pi \in \mathbb{Z}$ e assim $\alpha = -\pi^2 n^2/b^2, n \in \mathbb{Z}$. Observamos que se $n = 0$, temos $g \equiv 0$ e que n e $-n$ dão o mesmo valor para α. Assim, tomamos

$$\alpha = -\frac{\pi^2 n^2}{b^2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Agora a outra equação $f''(x) + (\lambda + \alpha) f(x) = 0$. Pelos mesmos motivos, temos que f não é necessariamente nula, somente no caso $\lambda + \alpha > 0$ e podemos ver que $\sqrt{(\lambda + \alpha)}a = m\pi, m \in \mathbb{N}^*$, já que $m = 0$ implica que $f \equiv 0$ e que m e $-m$ dão o mesmo valor para $\lambda + \alpha$. Agora juntando

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\pi^2 n^2}{b^2}, n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{(\lambda + \alpha)}a = m\pi, m \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

obtemos

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

onde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Agora para a condição de bordo de Neumann, notemos que como $g'(0) = 0$ e $g'(y) = -c_1\sqrt{-\alpha} sen(\sqrt{-\alpha}y) + c_2\sqrt{-\alpha} cos(\sqrt{-\alpha}y)$, então $c_2\sqrt{-\alpha} = 0$, implicando $c_2 = 0$ e assim $g(y) = c_1 cos(\sqrt{-\alpha}y)$. Mas $0 = g'(b) = -c_1\sqrt{-\alpha} sen(\sqrt{-\alpha}b)$, que implica $\sqrt{-\alpha}b/\pi \in \mathbb{Z}$. Assim, $\alpha = -\pi^2 n^2/b^2, n \in \mathbb{Z}$. Agora quando $n = 0$ implica $\alpha = 0$, logo, $g(y) = c_1$ sendo g não necessariamente nula. E como da mesma forma n e $-n$ dão o mesmo valor para α, então

$$\alpha = -\frac{\pi^2 n^2}{b^2}, n \in \mathbb{N}.$$

De modo similar, podemos ver que para $f''(x) + (\mu + \alpha) f(x) = 0$ com $f'(0) = f'(a) = 0$, teremos $\sqrt{\mu + \alpha} = m\pi$, com $m \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\mu_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$.

3.2 A Lei de Weyl para retângulos

Provaremos agora a Lei de Weyl para retângulos.

Definição 3.1 *$N(\lambda)$ é o número de autovalores menores que λ do problema de contorno de Neumann.*

Teorema 3.1 *Considerando o problema de autovalor em $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, temos que*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{D(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{ab}{4\pi}.$$

Prova: Observemos que procurar os valores $D(\lambda)$ e $N(\lambda)$ é o mesmo que achar os pares ordenados (x, y) com $x, y \in \mathbb{N}$ que estão dentro de uma parte da elipse

$$E = \left\{\lambda = \pi^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right); x \geq 0, y \geq 0\right\} = \left\{\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi}\right)^2} = 1; x \geq 0, y \geq 0\right\},$$

ou seja, os pares pertencentes a região

$$S = \left\{\lambda \geq \pi^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right); x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Dessa forma $D(\lambda)$ é o número de quadrados unitários contidos em S, cujos vértices são os pares (x, y) onde $x, y \in \mathbb{N}$, enquanto $N(\lambda)$ é o número de quadrados unitários que intersectam S cujos vértices são os pares (x, y) onde $x, y \in \mathbb{N}$. Logo

$$D(\lambda) \leq |S| \leq N(\lambda)$$

onde $|S|$ é a área de S, já que o número de quadrados unitários é igual a soma das suas áreas. Sabemos do Cálculo, que a área de uma elipse $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$ é $\pi\alpha\beta$. Logo,

$$|S| = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi}\frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi} = \frac{\lambda ab}{4\pi},$$

assim

$$D(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi} \leq N(\lambda).$$

Agora definamos $R(\lambda) = N(\lambda) - D(\lambda)$ e afirmemos que $R(\lambda) \leq c\sqrt{\lambda}$ para algum $c > 0$. Ora, como $R(\lambda)$ é o número de quadrados unitários que intersectam E, então ele pode ser estimado por uma constante vezes o comprimento de arco de E, e sabemos que para uma elipse $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$ esse comprimento é a integral

$$\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - p^2 sen^2(t)}dt, \text{ onde } p^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}.$$

Assim, para $\alpha = \sqrt{\lambda}a/\pi$ e $\beta = \sqrt{\lambda}b/\pi$, temos

$$p^2 = \frac{\frac{a^2\lambda}{\pi^2} - \frac{b^2\lambda}{\pi^2}}{\frac{a^2\lambda}{\pi^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

que independe de λ e leva o comprimento de arco a ser igual a

$$\frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-p^2sen^2(t)}dt = c\sqrt{\lambda}.$$

Assim, $R(\lambda) \leq c\sqrt{\lambda}$ para algum $c > 0$. Agora como

$$D(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi} \leq N(\lambda),$$

temos que

$$N(\lambda) - R(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi} \leq N(\lambda).$$

Logo, $D(\lambda)/\lambda$ é uma função limitada e crescente, enquanto $N(\lambda)/\lambda$ é decrescente e limitada por baixo. Também temos que

$$\frac{ab}{4\pi} - \frac{c\sqrt{\lambda}}{\lambda} \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda} - \frac{c\sqrt{\lambda}}{\lambda} \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\lambda)}{\lambda} = \frac{D(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi}, \forall\lambda > 0$$

e como $c\sqrt{\lambda}/\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, temos pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{D(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{ab}{4\pi}.$$

□

3.3 A Lei de Weyl para domínios quadrados

Nesta seção faremos a demonstração da Lei de Weyl para uma classe de domínios maior, os domínios quadrados. Mas primeiro, compararemos os autovalores de um domínio com os autovalores de um subdomínio.

Teorema 3.2 *Seja $\big(V,(\cdot,\cdot)\big)$ um espaço vetorial com um produto interno e que $T : D(T) \subset V \to V$ um operador linear simétrico, não negativo com espectro discreto. Se $u_1, \ldots, u_n$ são autovetores ortogonais de T associados aos autovalores $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, então $\lambda_n = min\big(Tv, v\big)$ sobre todos os $v \in V$, tais que $||v||^2 = 1$ e $(v, u_k) = 0$, $\forall k = 1, \ldots, n-1$.*

Prova: Se $v, w \in V$ temos que pela linearidade e simetria de T que $\big(T(v+sw), v+sw\big) = \big(Tv, v\big) + 2s\big(Tv, w\big) + s^2\big(Tw, w\big)$. Isso implica que a derivada direcional de $\big(Tv, v\big)$ na direção w é $2\big(Tv, w\big)$. Agora afirmamos que $\lambda_1 = min\big(Tv, v\big)$ sobre todos os $v \in V$, tais que $||v||^2 = 1$. Como $||v + sw||^2 - 1 = (v + sw, v + sw) - 1 = (v, v) + s(v, w) + s(w, v) + s^2(w, w) - 1$ então a derivada direcional da função $||v||^2 - 1$ na direção de w é $2(v, w)$. Pelo multiplicador de Lagrange os pontos críticos da restrição de $\big(Tv, v\big)$ para $||v||^2 = 1$

são os valores que $2\big(Tv, w\big) = \lambda 2(v, w)$ que implica $2\big(Tv - \lambda v, w\big) = 0$, $\forall w \in V$, logo, $Tv - \lambda v = 0$. Como $||v||^2 = 1$, então $v \neq 0$ e assim v é um autovetor com autovalor λ. Portanto, como o espectro de T é limitado por baixo, então existe o valor crítico mínimo e ele deve ser o primeiro autovalor, no caso λ_1, o que prova a afirmação. Agora por último afirmamos que se $u_1, \ldots, u_n$ são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, então $\lambda_n = min\big(Tv, v\big)$ sobre todos os $v \in V$, tais que $||v||^2 = 1$ e $(v, u_k) = 0$, $\forall k = 1, \ldots, n-1$. Seja $V_{n-1} = span\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ e $V_{n-1}^{\perp}$ o seu complemento ortogonal em V, então $V = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^{\perp}$. Assim, escrevendo $v = c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1} + v'$ onde $v' \in V_{n-1}^{\perp}$, então

$$\big(Tv, v\big) = \left(T\big(\sum_{i=1}^{n-1} c_i u_i + v'\big), \sum_{i=1}^{n-1} c_i u_i + v'\right) = \sum_{l=1}^{n-1} \lambda_l c_l^2 ||u_l||^2 + \big(Tv', v'\big),$$

pois os vetores do span são ortogonais e também os do complemento ortogonal. Se fizermos a restrição de $v \in V_{n-1}^{\perp}$, obteremos $\big(Tv, v\big) = \big(Tv', v'\big)$ e assim pela afirmação anterior o $min\big(Tv, v\big)$ sobre $||v||^2 = 1$ e $v \in V_{n-1}^{\perp}$ é o menor autovalor de T restrito a $V_{n-1}^{\perp}$, no caso será λ_n

□

Corolário 3.1 *Se $u_1, \ldots, u_n$ são autofunções ortogonais de Δ_D associadas aos primeiros n autovalores $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, então $\lambda_n = min\big(\Delta_D \psi, \psi\big)$ sobre todas as $\psi' s$ no domínio de Δ_D, tais que $||\psi||^2 = 1$ e $(\psi, u_k) = 0$, $\forall k = 1, \ldots, n-1$.*

Definição 3.2 *Denotemos por $\lambda_n\big(U\big)$ o n-ésimo autovalor listado com multiplicidade do laplaciano de Dirichlet em U e analogamente $\mu_n\big(U\big)$ o n-ésimo autovalor listado com multiplicidade do laplaciano de Neumann em U.*

Teorema 3.3 *Se U e V são domínios com $U \subset V$, então $D_U(\lambda) \leq D_V(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

Prova: Sabemos que $\lambda_n\big(V\big) = min\big(\Delta_D \psi, \psi\big)$ sobre todas as funções $\psi' s$ em V com $||\psi||^2 = 1$ que são ortogonais para as primeiras $n-1$ autofunções ortogonais do problema de Dirichlet em V, onde ψ zera no bordo de V. Se $U \subset V$, então $\lambda_n\big(U\big) = min\big(\Delta_D \psi, \psi\big)$ sobre todas as funções $\psi' s$ em U com $||\psi||^2 = 1$ que são ortogonais para as primeiras $n-1$ autofunções ortogonais em V e zeram em $U \subset V$ que é um menor conjunto de funções. Assim, $\lambda_n\big(U\big) \leq \lambda_n\big(V\big)$, logo, $D_U(\lambda) \leq D_V(\lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

□

Definição 3.3 *Dizemos que o domínio U é um domínio quadrado se ele for uma união disjunta de quadrados.*

Lema 3.1 *Sejam U e U' dois domínios quadrados. Se $\lambda_1\big(U\big) < \lambda_2\big(U\big) \leq \lambda_3\big(U\big) \leq \ldots \to \infty$ são os autovalores do problema de Dirichlet em U e $\lambda_1\big(U'\big) < \lambda_2\big(U'\big) \leq \lambda_3\big(U'\big) \leq \ldots \to \infty$ são os autovalores do problema de Dirichlet em U', então a lista dos autovalores do problema de Dirichlet em $U \sqcup U'$ é obtida pela união das duas listas em ordem crescente.*

Prova: Seja λ um elemento pertencente a qualquer uma das listas, construiremos uma autofunção para o problema de Dirichlet em $U \sqcup U'$ com autovalor λ. Sem perda de generalidade, suponhamos λ pertencer a primeira lista e seja u_λ a autofunção do problema de Dirichlet em U. Definemos a função $u : U \sqcup U' \to \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{cases} u(x,y) = u_\lambda(x,y), \text{ se } (x,y) \in U \\ u(x,y) = 0, \text{ se } (x,y) \in U'. \end{cases}$$

Assim, u zera no bordo de $U \sqcup U'$, com

$$(\Delta u)(x,y) = (\Delta u_\lambda)(x,y) = \lambda u_\lambda(x,y) = \lambda u(x,y) \text{ se } (x,y) \in U \text{ e}$$

$$(\Delta u)(x,y) = (\Delta 0)(x,y) = 0 = \lambda 0 = \lambda u(x,y) \text{ se } (x,y) \in U',$$

logo $\Delta u = \lambda u$ em $U \sqcup U'$. Agora suponhamos $\Delta u = \lambda u$ em $U \sqcup U'$ com u não nula, então temos três casos: $u(x,y) = 0$ em U, mas $u(x,y) \neq 0$ em U'; $u(x,y) \neq 0$ em U, mas $u(x,y) = 0$ em U'; $u(x,y) \neq 0$ em U e $u(x,y) \neq 0$ em U'. No primeiro caso, u restrita a U' é uma autofunção para o problema de Dirichlet com autovalor λ, e assim λ é um elemento de U', logo u surge pela construção da prova da afirmação anterior. Segundo caso é similar ao primeiro. Por último, o terceiro caso, $u|_U$ e $u|_{U'}$ são autofunções do problema de Dirichlet em U (respectivamente U') com autovalor λ, assim λ pertence ambas as listas. Precisamos mostrar que λ tem multiplicidade 2. Definemos $u_1(x,y) = u|_U$ se $(x,y) \in U$, $u_1(x,y) = -u|_{U'}$ se $(x,y) \in U'$. Então $(\Delta u_1)(x,y) = (\Delta u)(x,y) = \lambda u_1(x,y)$, isto significa que u_1 também é autofunção com autovalor λ em $U \sqcup U'$, mas u e u_1 são linearmente independente, daí λ tem multiplicidade 2.

□

Lema 3.2 $D_{U \sqcup U'}(\lambda) = D_U(\lambda) + D_{U'}(\lambda)$
Prova: Decorre da construção da prova do lema anterior.

□

Lema 3.3 *Se U e U' são domínios quadrados e $U \sqcup U' \subset V$, então $D_V(\lambda) \geq D_U(\lambda) + D_{U'}(\lambda)$.*
Prova: Basta usar o Teorema 3.3 e o lema anterior.

□

Teorema 3.4 *Se U é um domínio quadrado, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{D_U(\lambda)}{\lambda} = \frac{|U|}{4\pi}.$$

Prova: Sendo $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, onde U_i são quadrados, os quais seus interiores são disjuntos, então pelo lema 3.2 temos $D_U(\lambda) = \sum_{i=1}^n D_{U_i}(\lambda)$ e como já sabemos que para retângulos vale

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{D_{U_i}(\lambda)}{\lambda}=\frac{|U_i|}{4\pi},$$

então

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{U_i}(\lambda)}{\lambda}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{D_{U_i}(\lambda)}{\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|U_i|}{4\pi}=\frac{|U|}{4\pi}.$$

□

3.4 A Lei de Weyl para domínios nice

Agora finalmente provaremos a Lei Assintótica de Weyl para domínios nice, uma classe bem maior em $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.4 *Um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ é dito ser um domínio nice, se para todo $\epsilon > 0$, existem A e B domínios quadrados, tais que $A \subset U \subset B$ e $|B - A| < \epsilon$.*

Teorema 3.5 *Se U é um domínio nice, então*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}=\frac{|U|}{4\pi}.$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, existem A e B tais que $A \subset U \subset B$ e $|B - A| < \epsilon$, pois U é um domínio nice. Pelo Teorema 3.3, temos que $D_A(\lambda) \le D_U(\lambda) \le D_B(\lambda)$ que implica

$$\frac{D_A(\lambda)}{\lambda}\le\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}\le\frac{D_B(\lambda)}{\lambda},\ \forall\lambda>0.$$

Passando o *liminf* na inequação esquerda e o *limsup* na direita, ficamos com

$$\liminf\frac{D_A(\lambda)}{\lambda}\le\liminf\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}\le\limsup\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}\le\limsup\frac{D_B(\lambda)}{\lambda}.$$

Mas como A e B são domínios quadrados, temos que

$$\liminf\frac{D_A(\lambda)}{\lambda}=\lim\frac{D_A(\lambda)}{\lambda}=\frac{|A|}{4\pi}\ \text{ e }\ \limsup\frac{D_B(\lambda)}{\lambda}=\lim\frac{D_B(\lambda)}{\lambda}=\frac{|B|}{4\pi}.$$

E assim

$$\frac{|A|}{4\pi}\le\liminf\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}\le\limsup\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}\le\frac{|B|}{4\pi}.$$

Agora como $\epsilon > |B - A| = |B| - |A|$ e $\epsilon > 0$ foi dado arbitrário, então

$$\liminf\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}=\limsup\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}$$

e mais

$$\frac{|A|}{4\pi}-\frac{|U|}{4\pi}\le\lim_{\lambda\to\infty}\frac{D_U(\lambda)}{\lambda}-\frac{|U|}{4\pi}\le\frac{|B|}{4\pi}-\frac{|U|}{4\pi}$$

nos diz que

$$\lim \frac{D_U(\lambda)}{\lambda} = \frac{|U|}{4\pi}.$$

□

3.5 O Teorema de Faber-Krahn

Vimos, na seção anterior, que podemos relacionar a área do domínio com os seus autovalores. Nessa seção encontraremos o domínio que minimiza o primeiro autovalor do Laplaciano com condição de bordo de Dirichlet entre todos os outros domínios de mesma área, o disco. A interpretação musical deste resultado é que de todos os tambores com uma mesma área determinada, o tambor circular é aquele que produz o som mais afinado.

Os resultados são mostrados para domínios em $\mathbb{R}^2$, mas valem para domínios em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.5 *Dado um conjunto mensurável $U \subset \mathbb{R}^2$, nós denotemos por U^* o disco que tem a mesma área de U. Se u é uma função mensurável não-negativa definida em Ω e zera em $\partial\Omega$, definimos por $\Omega(c) = \{x \in \Omega / u(x) \geq c\}$ o seu conjunto de nível. O rearranjo de Schwarz de u é a função u^* definida em Ω^* por*

$$u^*(x) = sup \{c / x \in \Omega(c)^*\}.$$

Desta definição vemos facilmente que:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^*} u^*,$$

e também que: u e u^* são equimensuráveis, isto é, os seus conjuntos de níveis têm a mesma medida. E por essa observação, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.6 *Sejam Ω um conjunto mensurável e u uma função mensurável não-negativa definida em Ω que zera em $\partial\Omega$. E seja também ϕ uma função mensurável qualquer definida em $\mathbb{R}^+$ com valores em $\mathbb{R}$, então vale*

$$\int_{\Omega} \phi(u(x))dx = \int_{\Omega^*} \phi(u^*(x))dx.$$

Agora vamos observar um teorema que dá uma ligação entre as integrais do gradiente de u e u^*.

Teorema 3.7 *(Desigualdade de Pòlya) Seja Ω um conjunto aberto e u uma função não-*

negativa pertencente ao espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. *Então* $u_0^1(\Omega^*)$ *e mais*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2 dx.$$

Para uma demonstração deste teorema, pode-se consultar (CIANCHI and FUSCO)

Por fim, o Teorema de Faber-Krahn, que foi conjecturado por Lord Rayleigh no seu famoso livro "The theory of sound"(primeira edição em 1877).

Teorema 3.8 *(Faber-Krahn) Seja* c *um número positivo e* B *o disco de área* c*, então vale*

$$\lambda_1(B) = min\{\lambda_1(\Omega)/\Omega \text{ é aberto de } \mathbb{R}^2 \text{ e } |\Omega| = c\}.$$

Prova: Sejam Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ com área c e $\Omega^* = B$ o disco com a mesma área. Sejam u_1 uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(\Omega)$ e u_1^* o seu rearranjo de Schwarz. Assim, pelos teoremas 3.6 e 3.7, obtemos

$$\int_{\Omega^*} u_1^*(x)^2 dx = \int_\Omega u_1(x)^2 dx$$

e

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2 dx,$$

e de acordo com (1.36) de HENROT, temos

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^*} u_1^*(x)^2 dx}$$

e

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2 dx}{\int_\Omega u_1(x)^2 dx}$$

o que nos dá

$$\lambda_1(B) \leq \lambda_1(\Omega)$$

e isso prova o que queríamos.

□

4 CONTRAEXEMPLO: DOMÍNIOS ISOSPECTRAIS E NÃO ISOMÉTRICOS

Como já dito, Mark Kac(KAC) questionou a existência de domínios em $\mathbb{R}^2$ tais que fossem isospectrais e não isométricos. Nesse capítulo iremos construir um exemplo através do retângulo. Para isso, calcularemos o espectro de um triângulo isósceles reto e usaremos o Lema 3.1 para obtermos a conclusão.

4.1 Problema de autovalor num triângulo isósceles reto

Dado $c > 0$, consideremos os triângulos isósceles retos $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, y \text{ e } x+y \leq c\}$, $T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \geq x, y \text{ e } x + y \geq c\}$ e Q o quadrado $[0, c] \times [0, c]$. Nosso objetivo é encontrar uma função $u \in L_2(T_1)$ que resolva

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u \text{ em } T_1 \\ u \equiv 0 \text{ sobre } \partial T_1. \end{cases}$$

Nós usaremos duas transformações, a prolongamento e a dobramento. A transformação prolongamento P de uma função de pontos de ponto em T_1 para pontos em Q é reflexão de T_1 para T_2 sobre o segmento que é a hipotenusa de T_1. O que nos dá a correspondência:

$$x_1 = \xi, \ y_1 = \eta$$

$$x_2 = c - \eta, \ y_2 = c - \xi.$$

Usaremos a seguinte notação: $B_i = (x_i, y_i) \in T_i$ e $B = (\xi, \eta) \in T_1$. Dessa forma a transformação prolongamento é definida por:

$$Pu(B_i) = c_i u(B_i) \text{ em } T_i,$$

onde $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$. Também podemos transformar uma função $v \in L_2(Q)$ numa em T_1 usando a transformação dobramento D. Esta transformação é essencialmente o oposto de P, ela "dobra"o quadrado sobre a hipotenusa do triângulo T_1. Logo, teremos:

$$Dv(B) = \sum_{i=1}^{2} c_i v(B_i).$$

Agora seja $v \in L_2(Q)$ uma função que satisfaça a equação de Helmholtz no quadrado e também a condição de bordo de Dirichlet homogênea. Aplicando a transformação dobramento e usando a equação $\Delta v = \lambda v$, teremos:

$$\Delta(Dv) = \Delta(\sum_{i=1}^{2} c_i v(B_i)) = \sum_{i=1}^{2} \Delta(c_i v(B_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{2} c_i \Delta v(B_i) = \sum_{i=1}^{2} c_i \lambda v(B_i)$$
$$= \lambda(v(B_1) - v(B_2)) = 2\lambda v(B).$$

Pois $v(B_2) = -v(B)$. Dessa forma, Dv é uma autofunção do operador Laplace. Agora se $v \equiv 0$ no bordo de Q, então $Dv \equiv 0$ nos catetos de T_1 e analisando na hipotenusa, temos

$$Dv(B) = \sum_{i=1}^{2} c_i v(B_i) = v(B_1) - v(B_2) = v(B) - v(B) = 0,$$

pois sobre a hipotenusa temos $v(B_1) = v(B_2) = v(B)$. Isso nos mostra que Dv se anula em todo bordo de T_1.

Assim, para encontrarmos as funções base para série de Fourier(autofunções) sobre o triângulo isósceles reto, basta olharmos para as do quadrado e simplesmente aplicarmos a transformação dobramento à elas. Desta forma, mostraremos explicitamente as autofunções do problema no triângulo isósceles reto.

A condição de bordo para o quadrado pode ser vista pela expressão

$$v(x = 0, y) = v(x = c, y) = v(x, y = 0) = v(x, y = c) = 0.$$

E também conhecemos as suas autofunções, as quais são dadas por

$$v_{m,n} = sen\left(\frac{m\pi x}{c}\right) sen\left(\frac{n\pi y}{c}\right),$$

com $m, n \in \mathbb{N}^*$. Usando a transformação dobramento D e a identidade trigonométrica

$$sen(a - b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a),$$

obteremos

$$\begin{aligned} Dv_{m,n} &= sen\left(\frac{m\pi x}{c}\right) sen\left(\frac{n\pi y}{c}\right) - sen\left(\frac{m\pi(c-y)}{c}\right) sen\left(\frac{n\pi(c-x)}{c}\right) \\ &= sen\left(\frac{m\pi x}{c}\right) sen\left(\frac{n\pi y}{c}\right) - \left[sen(m\pi)cos\left(\frac{m\pi y}{c}\right) - sen\left(\frac{m\pi y}{c}\right)cos(m\pi)\right] \\ &\cdot \left[sen(n\pi)cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right) - sen\left(\frac{n\pi y}{c}\right)cos(n\pi)\right]. \end{aligned}$$

E como sabemos que

$$\begin{cases} sen(m\pi) = sen(n\pi) = 0 \\ cos(m\pi) = (-1)^m \text{ e } cos(n\pi) = (-1)^n, \end{cases}$$

então

$$Dv_{m,n} = sen\left(\frac{m\pi x}{c}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{c}\right) + (-1)^{m+n+1}sen\left(\frac{m\pi y}{c}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{c}\right).$$

Agora iremos analisar o domínio do autovalores. A primeira observação é que as funções $Dv_{m,n}$ e $Dv_{n,m}$ significativamente não têm diferença por causa da simetria do triângulo sobre a reta $y = x$.

A segunda observação é que para $m = n$ teremos $Dv_{m,n} = Dv_{m,m} = 0$. Assim, podemos definir o domínio dos autovalores como sendo $\{m, n \in \mathbb{N}^*; m < n\}$.

Por fim, acharemos a expressão para os autovalores do triângulo isósceles reto. Ora,

$$\begin{aligned}
\Delta Dv_{m,n}(x,y) &= -\frac{\partial^2 Dv_{m,n}}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 Dv_{m,n}}{\partial y^2}(x,y) \\
&= \frac{m^2\pi^2}{c^2}sen\left(\frac{m\pi x}{c}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{c}\right) + (-1)^{m+n+1}\frac{n^2\pi^2}{c^2}sen\left(\frac{m\pi y}{c}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \\
&+ \frac{n^2\pi^2}{c^2}sen\left(\frac{m\pi x}{c}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{c}\right) + (-1)^{m+n+1}\frac{m^2\pi^2}{c^2}sen\left(\frac{m\pi y}{c}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \\
&= \pi^2\left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)Dv_{m,n}(x,y).
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores são:

$$\pi^2\left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{n^2}{c^2}\right) \text{ com } 0 < m < n.$$

4.2 Um contraexemplo

Nesta seção finalizaremos a construção de dois domínios de $\mathbb{R}^2$ que são isospectrais, mas não são congruentes no sentido de geometria Euclidiana. Continuaremos usando a notação $\Lambda(U)$ para indicar o espectro(Laplaciano) de U.

Consideremos R_1 o quadrado unitário, R_2 o retângulo cujo comprimento é 2 e a altura é 1, T_1 o triângulo isósceles reto de catetos iguais a 2 e T_2 o triângulo isósceles reto com catetos iguais a $\sqrt{2}$. Definimos

$$U_1 = R_1 \sqcup T_1$$

$$U_2 = R_2 \sqcup T_2.$$

Logo, pelo Lema 3.1, temos que

$$\Lambda(U_1) = \left\{\pi^2(n^2+m^2);\ n,m \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\pi^2\left(\frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4}\right);\ n,m \in \mathbb{N}^* \text{ e } m < n\right\}$$

$$\Lambda(U_2) = \left\{\pi^2\left(\frac{N^2}{4} + M^2\right);\ N, M \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\pi^2\left(\frac{N^2}{2} + \frac{M^2}{2}\right);\ N, M \in \mathbb{N}^* \text{ e } M < N\right\}.$$

Assim nos resta mostrar que

$$\Lambda(U_1) = \Lambda(U_2).$$

Primeiro, mostraremos a inclusão: $\Lambda(U_2) \subset \Lambda(U_1)$.

Suponhamos $\lambda \in \Lambda(U_1)$. Se λ tem a forma

$$\pi^2\left(\frac{N^2}{4} + M^2\right);\ N, M \in \mathbb{N}^*,$$

então analisamos os casos quando N for par e quando ele for ímpar. Se N é par, tomamos $n = N/2$ e $m = M$ que implica

$$\frac{N^2}{4} + M^2 = n^2 + m^2,$$

logo, $\lambda \in \Lambda(R_1) \subset \Lambda(U_1)$. Caso N seja ímpar, então $N \neq 2M$, assim tomamos $m = min\{N, 2M\}$ e $n = max\{N, 2M\}$ que nos dá

$$\frac{N^2}{4} + M^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4},$$

logo, $\lambda \in \Lambda(T_1) \subset \Lambda(U_1)$, pois $m < n$. Agora se λ é da forma

$$\pi^2\left(\frac{N^2}{2} + \frac{M^2}{2}\right);\ N, M \in \mathbb{N}^* \text{ e } M < N,$$

então tomamos $n = N + M$ e $m = N - M$, logo

$$\frac{N^2}{2} + \frac{M^2}{2} = \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4},$$

pois

$$\frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{1}{4}(N^2 + M^2 + 2MN + N^2 + M^2 - 2MN) = \frac{1}{4}(2N^2 + 2M^2) = \frac{N^2}{2} + \frac{M^2}{2}$$

e assim $\lambda \in \Lambda(T_1) \subset \Lambda(U_1)$.

Agora a outra inclusão: $\Lambda(U_1) \subset \Lambda(U_2)$.

Suponhamos $\lambda \in \Lambda(U_1)$. Se λ tem a forma

$$\pi^2(n^2 + m^2);\ n, m \in \mathbb{N}^*,$$

então escolhemos $N = 2n$ e $M = m$, assim temos

$$n^2 + m^2 = \frac{N^2}{4} + M^2,$$

que implica $\lambda \in \Lambda(R_2) \subset \Lambda(U_2)$. Agora para λ com a forma

$$\pi^2\left(\frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4}\right);\ n, m \in \mathbb{N}^* \text{ e } m < n.$$

Se n é par, então escolhemos $N = m$ e $M = n/2$, que implica

$$\frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{N^2}{4} + M^2,$$

portanto $\lambda \in \Lambda(R_2) \subset \Lambda(U_2)$. Agora se m é par, então escolhemos $N = n$ e $M = m/2$, que implica

$$\frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{N^2}{4} + M^2,$$

logo, teremos o mesmo resultado. Por fim, se n e m forem ímpares, temos que $n + m$ e $n - m$ são pares, desta forma tomamos $N = (n + m)/2$ e $M = (n - m)/2$ que nos dá

$$\frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{N^2}{2} + \frac{M^2}{2},$$

pois

$$\frac{1}{2}(N^2 + M^2) = \frac{1}{8}(n^2 + m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn) = \frac{2(n^2 + m^2)}{8} = \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4}.$$

Portanto, $\lambda \in \Lambda(T_2) \subset \Lambda(U_2)$, já que $M < N$ com essa escolha.

Com isso, concluímos que

$$\Lambda(U_1) = \Lambda(U_2),$$

ou seja, U_1 e U_2 têm o mesmo espectro, mas que é claro que não são congruentes no sentido da geometria plana.

5 CONCLUSÃO

No desenvolvimento desse trabalho, vimos vários resultados importantes. Calculamos o espectro de um retângulo e fomos em busca da prova da Lei de Weyl. Provamos esta lei para domínios mais específicos, como o retângulo; em seguida para domínios quadrados, mas para isso provamos várias propriedades do espectro de subdomínios e do espectro da união disjunta de domínios, as quais foram fundamentais para concluirmos o nosso objetivo. Na sequência estendemos a Lei de Weyl para domínios nice, uma classe de domínios bem maior. Calculamos também o espectro de um triângulo, onde precisamos usar outros tipos de ferramentas. Por fim, juntamos todas as peças e encontramos um contraexemplo para o problema proposto por Mark Kac.

Seria bastante interessante tentarmos fortalecer, de maneira delicada, as hipóteses deste problema, colocando condições a mais sobre o domínio, onde pudéssemos obter uma resposta positiva.

REFERÊNCIAS

CIANCHI, A.; FUSCO, N. Functions of bounded variation and rearrangements. **Arch. Rational Mech. Anal.**, v. 165, n. 1, p. 1–40, 2002.

GORDON, Carolyn; WEBB, David; WOLPERT, Scott. One cannot hear the shape of a drum. **Bulletin of the American Mathematical Society,** New York, v. 27, n. 1, p. 134–138, 1992.

HENROT, Antoine. **Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators**. Birkhäuser Basel, 2006.

KAC, Mark. Can one hear the shape of a drum? **Mathematical Association of America,** New York, v. 73, n. 4, p. 1–23, 1966.

MILNOR, John. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. **Proceedings of the National Academy of Sciences,** USA, v. 51, p. 542, 1964.

STEWART, Ian. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

WEYL, Hermann. **Über die Asymptotische Verteilung der Eigenwerte**. Göttingen: Nachr. Konigl. Ges. Wiss., 1911.