



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

Antonio Alisson Pessoa Guimarães

Estudo de Redes Ad-Hoc Sem Fio pela Abordagem de Geometria Estocástica

Fortaleza – Ceará
Julho/2014

Antonio Alisson Pessoa Guimarães

Estudo de Redes Ad-Hoc Sem Fio pela Abordagem de Geometria Estocástica

Tese submetida à coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Teleinformática.

Área de concentração: Sinais e Sistemas

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Centro de Tecnologia (CT)

Departamento de Engenharia de Teleinformática (DETI)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática (PPGETI)

Grupo de Pesquisa em Telecomunicação Sem Fio (GTEL)

Orientador: Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante

Coorientador: Prof. Dr. Marios Kountouris (Supélec, França)

Fortaleza – Ceará

Julho/2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

-
- G976e Guimarães, Antonio Alisson Pessoa.
 Estudo de redes Ad-Hoc sem fio pela abordagem de geometria estocástica / Antonio Alisson
 Pessoa Guimarães. – 2014.
 194 f. : il. color. , enc. ; 30 cm.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-
 Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2014.
 Área de concentração: Sinais e Sistemas.
 Orientação: Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante.
 Coorientação: Prof. Dr. Marios Kountouris.
1. Teleinformática. 2. Interferência. 3. Redes Ad hoc. 4. Teoria dos sinais - Qualidade. 5. Redes
 de comunicação. I. Título.

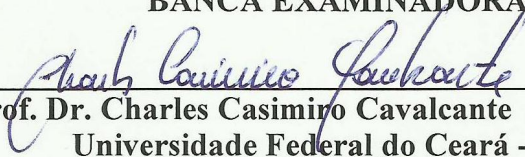
ANTÔNIO ALISSON PESSOA GUIMARÃES

ESTUDO DE REDES AD-HOC SEM FIO PELA ABORDAGEM DE GEOMETRIA
ESTOCÁSTICA

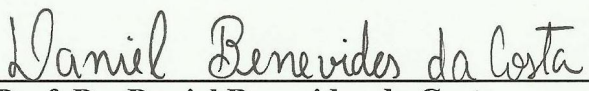
Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Teleinformática, área de concentração Sinais e Sistemas.

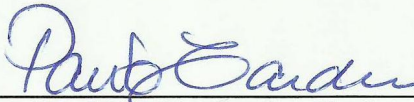
Aprovada em 28/07/2014.

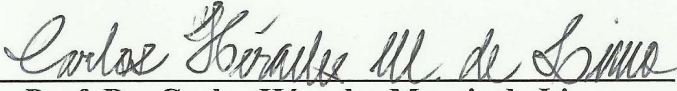
BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC


Prof. Dr. Francisco Rodrigo Porto Cavalcanti (PPGETI/UFC)
Universidade Federal do Ceará - UFC


Prof. Dr. Daniel Benevides da Costa
Universidade Federal do Ceará - UFC


Prof. Dr. Paulo Cardieri
Universidade de Campinas - Unicamp


Prof. Dr. Carlos Hércules Morais de Lima
Universidade Estadual Paulista - UNESP

*Dedico este trabalho com muito carinho aos meus pais,
Eduardo e Fátima, meus maiores incentivadores e nunca
mediram esforços para me oferecer uma formação de
qualidade.*

Agradecimentos

A Deus por sempre iluminar meu caminho e por ter permitido grandes oportunidades na minha vida, como: estudar na França, ser aprovado no concurso para Professor da UNILAB, concluir o curso de Doutorado, ...

Aos meus pais, **Eduardo** e **Fátima**, que sempre estiveram ao meu lado em todas as minhas caminhadas, pela liberdade concedida para trilhar o meu caminho e pelo apoio em meus projetos.

Às minhas irmãs **Artemis** e **Artemízia** que são presença constante em minha vida e sei que sempre posso contar com o apoio e companheirismo. Não posso deixar de esquecer das inúmeras palavras de incentivo nos momentos mais delicados do desenvolvimento deste trabalho.

À minha esposa **Dayane**, por todo o apoio, carinho, amor, compreensão e paciência nos momentos de maior dificuldade, principalmente durante a nossa estadia na França.

Ao Professor-orientador e amigo **Charles Casimiro Cavalcante**, pela oportunidade de trabalho, pela paciência durante os vários anos de convivência e pela disponibilidade e prontidão em atender e esclarecer minhas dúvidas, sem abandonar o bom humor, característica marcante de sua personalidade. Além disso, sua dedicação e cordialidade foram fundamentais para meu crescimento acadêmico.

Ao meu co-orientador **Marios Kountouris** pela disponibilidade, pelas ideias e sugestões que muito contribuíram para o desenvolvimento desta tese. Também não posso deixar de agradecer pela oportunidade a mim conferida para o estágio na Supélec.

Faço um especial agradecimento à **banca examinadora** pelas valiosas contribuições para os encaminhamentos finais deste trabalho.

À **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior** (CAPES), pelo auxílio financeiro fundamental para que eu realizasse a presente pesquisa e pela concessão da bolsa de doutorado sanduíche (PDSE), cujo estágio foi realizado na

École Supérieure d'Électricité (Supélec), França.

Também gostaria de agradecer ao **Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio** (GTEL), o qual me cedeu toda estrutura e apoio para o desenvolvimento do curso de doutorado, bem como, todos que fazem parte deste grupo, como funcionários, pesquisadores e professores.

Não posso deixar de fora os meus amigos do GTEL que, além das muitas e frutíferas discussões acadêmicas, também me proporcionaram diversos momentos de relaxamento e descontração, principalmente, no horário do café da tarde. Em especial, segue o meu muito obrigado a **Daniel Araújo, Darlan Cavalcante, David Carneiro, Elvis Stancanelli, Estevão Fernandes, Evilásio Lucena, Igor Bandeira, Igor Guerreiro, Juan Carlos, Lígia Sousa, Márcio Caldas, Paulo Normando e Tarcísio Maciel.**

Enfim, a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que este sonho se concretizasse.

*“Acredite na força dos seus sonhos!
Deus é justo e não colocaria em seu
coração um desejo impossível de ser
realizado.”*

(Anônimo)

Resumo

Atualmente, a tecnologia celular está presente em todos os aspectos da vida cotidiana: lares, escritórios, indústrias, etc. Tal tecnologia teve um rápido crescimento durante as duas últimas décadas tentando acompanhar o aumento do volume de tráfego nas redes de comunicação sem-fio. Naturalmente, ao propor modelos mais realistas possíveis, com o propósito de caracterizar fenômenos que afetam a qualidade do sinal ou o desempenho do sistema, novas ideias, concepções e outras ferramentas surgem para descrever tais situações. Este é o caso da Geometria Estocástica ou, particularmente, o processo pontual de Poisson, o qual vem sendo frequentemente utilizado como um modelo de rede celular, a partir da localização aleatória dos nós na rede. Diante desta ferramenta matemática, é possível implantar estações rádio base na rede externa celular, bem como pontos de acesso baseados em picocélulas, femtocélulas, etc. Além disso, permite-se quantificar a interferência, área de cobertura, probabilidade de *outage*, dentre outros. Estes resultados também levam em consideração o impacto de mobilidade no desempenho de tais redes. Nesse contexto, este trabalho analisará redes *ad-hoc* sem-fio propondo expressões analíticas para as seguintes métricas de caracterização de desempenho: interferência e conectividade de transmissão. Essas métricas levam em consideração tanto a razão sinal-ruído mais interferência (*signal-to-interference-plus-noise ratio* (SINR)) como a razão sinal-interferência (*signal-to-interference ratio* (SIR)), em que neste caso, a potência de ruído é considerada nula. Especificamente, o fenômeno interferência será caracterizado via modelo *shot-noise* segundo um processo pontual chamado de processo pontual marcado (*marked point process* (MPP)), sendo este mais realista do que o tradicional modelo de Poisson. Além disso, este tipo de modelo incorpora os efeitos de propagação de rádio de pequena e larga escala e sobretudo as diferentes tecnologias de detecção e tratamento de sinal. Paralelamente, adotaremos um canal de rádio com desvanecimento Nakagami- m . Por fim, o tratamento matemático para o modelo proposto torna-se um fator desafiador deste trabalho, visto que, tais resultados generalizam alguns já publicados na literatura, os quais adotam alguns parâmetros menos realistas.

Palavras-chaves: Redes *ad-hoc*, geometria estocástica, processo pontual de Poisson, desvanecimento.

Abstract

Currently, cellular technology is present in all aspects of everyday life: homes, offices, industries, etc. Such technology had grown rapidly over the last two decades trying to follow up with the increased traffic volume on the networks of wireless communication. Naturally, to propose possible more realistic models, with the purpose of characterizing phenomena that affect the signal quality or performance system, new ideas, concepts and other tools to describe such situations arise. This is the case of Stochastic Geometry or, particularly, the point process Poisson, which has been often used as a model for cellular network from the random node locations in the network. Faced with this mathematical tool, it is possible deploy base stations in cellular external network and access points based picocells, femtocells, etc. Moreover, it allows to quantify the interference, coverage area, outage probability, among others. These results also consider the impact of mobility on the performance of such networks. In this context, this thesis will analyze ad-hoc wireless networks offering analytical expressions for the following metrics of performance characterization: interference and transmission connections. These metrics take into account both signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR) and signal-to-interference ratio (SIR), in which case, the noise power is considered null. Specifically, the interference phenomena will be characterized via shot-noise model according to a point process called marked point process (MPP), this being more realistic than the traditional Poisson model. Furthermore, this type of model incorporates effects of radio propagation small and large scale, mainly the different technologies for the detection and signal processing. In parallel, we will adopt a radio channel with Nakagami- m fading. Finally, the mathematical treatment for the proposed model becomes a challenging factor in this work, since such results generalize some already published in the literature, which adopt some less realistic parameters.

Key-words: Ad-hoc networks, stochastic geometry, Poisson point process, fading.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 –Mecanismos de propagação básicos em um canal sem-fio.	33
Figura 1.2 –Distribuição de densidade de probabilidade Riceana.	37
Figura 1.3 –Distribuição de densidade de probabilidade Nakagami- m	38
Figura 1.4 –Variações da potência do sinal recebido devido ao multipercurso, som- breamento e perda de percurso.	39
Figura 1.5 –Função de atenuação do sinal transmitido.	40
Figura 1.6 –Função de atenuação do sinal transmitido modificada.	41
Figura 2.1 –Modelo de rede com infraestrutura.	44
Figura 2.2 –Modelo de rede sem infraestrutura.	44
Figura 2.3 –Estrutura básica de uma rede <i>ad-hoc</i> sem fio.	46
Figura 2.4 –Criação, adaptação e reconfiguração de uma rede <i>ad-hoc</i>	46
Figura 2.5 –Esquema de colisão entre pacotes de dados.	49
Figura 2.6 –Descrição do protocolo CSMA/CA.	52
Figura 2.7 –O problema da estação oculta.	53
Figura 2.8 –O problema da estação exposta.	53
Figura 2.9 –Criação, adaptação e reconfiguração de uma rede <i>ad-hoc</i>	54
Figura 2.10 –Composição de um processo <i>shot-noise</i>	56
Figura 2.11 –Interferência como processo <i>shot-noise</i> bidimensional.	58
Figura 2.12 –Composição de um processo <i>shot-noise</i>	59
Figura 3.1 –Vizinhança de uma ponto x em \mathbf{M}	63
Figura 3.2 –Uma sequência convergente em um espaço métrico (\mathbf{M}, d)	64
Figura 3.3 –Uma cobertura finita do espaço métrico (\mathbf{M}, d)	65
Figura 3.4 –Conjunto de localizações amostrais.	71
Figura 4.1 –Realização de uma processo pontual simples. Neste caso, $N_{\mathbf{B}} = 7$	77
Figura 4.2 –Probabilidade vazia $V(\mathbf{B})$ para um processo pontual simples.	81

Figura 4.3	–Realização de um processo pontual (não-estacionário) mediante uma janela de observação em \mathbb{R}^2	86
Figura 4.4	–A distância de contato e a distância do vizinho mais próximo.	88
Figura 4.5	–Realização de um processo pontual para o caso da distância do vizinho mais próximo	89
Figura 4.6	–Realização de um processo pontual para o caso da distância de contato.	90
Figura 5.1	–O ponto aleatório X_i é uniformemente distribuído na janela de observação $\mathbf{W} = [0, 1]^2$	93
Figura 5.2	–Realização de um processo pontual binomial de 25 pontos em um quadrado de área unitária.	94
Figura 5.3	–Superposição de dois processos pontuais de Poisson.	100
Figura 5.4	–Algoritmo de retenção.	101
Figura 5.5	–Processo pontual <i>thinned</i> . Pontos de um processo original (à esquerda) foram removidos produzindo um processo <i>thinned</i> (à direita)	102
Figura 5.6	–Realização de dois PPP homogêneos sobre um quadrado de área unitária com intensidades $\lambda = 10$ e $\lambda = 25$, respectivamente.	104
Figura 5.7	–Realização de dois PPP não-homogêneos sobre um quadrado de área unitária.	105
Figura 5.8	–Realização de um processo pontual marcado cujas marcas são uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 0.1]$	108
Figura 6.1	–Caso de uma transmissão bem sucedida.	123
Figura 6.2	–Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta.	124
Figura 6.3	–Comparação entre as Equações (6.31) (do Modelo 1) e (6.68) (do Modelo 2) para o caso da potência de ruído constante.	131
Figura 6.4	–Comparação entre as Equações (6.47) (do Modelo 1) e (6.78) (do Modelo 2) para o caso da potência de ruído distribuída exponencialmente.	131
Figura 6.5	–Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta. Comparação entre as Equações (6.68) e (6.78)	133
Figura 6.6	–Média de transmissões bem sucedidas considerando o Modelo 2 com potência de ruído aleatório.	133
Figura 6.7	–Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta ($T = 10$ dB).	134
Figura 6.8	–Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta ($m = 2$).	135
Figura 6.9	–Probabilidade de se obter pelo menos uma transmissão bem sucedida.	135
Figura 7.1	–Análise de interferência média em redes <i>ad-hoc</i> para $\Omega = 1$	139
Figura 7.2	–Análise da variância de interferência em redes <i>ad-hoc</i> para $m = 2$	141
Figura 7.3	–Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com intensidade de rede $\lambda = 0,1$ usuários/ m^2	150

Figura 7.4 –Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com limiar de conexão de $T = 10$ dB.	151
Figura 7.5 –Análise de interferência média em redes <i>ad-hoc</i>	152
Figura 7.6 –SIR média do MPP em termos da distância entre dispositivos móveis de referência.	154
Figura 7.7 –SIR média do MPP em termos da intensidade de rede.	155
Figura 7.8 –Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com intensidade de rede $\lambda = 0.1$ usuários/ m^2 (caso potência constante).	159
Figura 7.9 –Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com limiar de conexão de $T = 10$ dB (caso potência constante).	159
Figura 7.10 –Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste ao comparar potência de ruído constante e exponencialmente distribuída, para $W = \mu = -104$ dBm.	161
Figura 8.1 –Ponto médio do intervalo (a, b)	167
Figura 8.2 –Limitantes inferiores à probabilidade $p(r, T)$ segundo o modelo de conectividade baseado na SIR.	167
Figura 8.3 –Limitantes inferiores à probabilidade $p(r, T)$ segundo o modelo de conectividade baseado na SINR.	171
Figura 8.4 –Maximização do produto $\lambda p_r(\lambda)$ em escala linear.	178
Figura 8.5 –Maximização do produto $\lambda p_r(\lambda)$ em escala logarítmica.	178

Lista de tabelas

Tabela 1.1 –Expoentes de perda de percurso em diversos ambientes.	35
Tabela 6.1 –Cenário para o modelo de sistema.	116

Lista de abreviaturas e siglas

ACK	<i>Acknowledge packet</i> (Pacote de confirmação de recebimento)
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i> (Ruído gaussiano aditivo branco)
BPP	<i>Binomial point process</i> (Processo pontual binomial)
CDF	<i>Cumulative distribution function</i> Ffunção de distribuição cumulativa)
CSMA/CA	<i>Carrier sense multiple access with collision avoidance</i> (Acesso múltiplo com verificação de portadora com anulação/prevenção de colisão)
CTS	<i>Clear-to-send</i> (Livre para enviar)
DCF	<i>Distributed coordination function</i> (Função de coordenação distribuída)
DIFS	<i>Distributed inter-frame space</i> (Espaço distribuído entre <i>frames</i>)
fidi	<i>Finite-dimensional distribution</i> (Distribuição dimensional finita)
i.i.d.	<i>independent and identically distributed</i> (Independente e identicamente distribuído)
LAN	<i>Local area network</i> (Rede de área local)
LoS	<i>Line-of-Sight</i> (Linha de visada)
MAC	<i>Medium access control</i> (Controle de acesso ao meio)
MPP	<i>Marked point process</i> (Processo pontual marcado)
NAV	<i>Network allocation vector</i> (Vetor de alocação de rede)
NLoS	<i>Non-Line-of-Sight</i> (Sem linha de visada)
PCF	<i>Point coordination function</i> (Função de coordenação pontual)

PDF	<i>Probability density function</i> (Função densidade de probabilidade)
PPP	<i>Poisson point process</i> (Processo pontual de Poisson)
QoS	<i>Quality-of-service</i> (Qualidade de serviço)
RTS	<i>Request-to-send</i> (Solicitar para enviar)
SINR	<i>Signal-to-interference-plus-noise ratio</i> (Relação sinal-ruído mais interferência)
SIR	<i>signal-to-interference ratio</i> (Relação sinal-interferência)
SNR	<i>signal-to-noise ratio</i> (Relação sinal-ruído)
WLAN	<i>Wireless local area network</i> (Rede de área local sem-fio)

Lista de símbolos

Conjuntos

\mathbb{N}	Conjunto dos inteiros positivos
\mathbb{N}_0	Conjunto dos inteiros não-negativos
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais não-negativos
\mathbb{R}^d	Espaço euclidiano d -dimensional
\mathbf{o}	Origem de \mathbb{R}^d
\mathbf{x}	Elemento arbitrário de \mathbb{R}^d
$\mathcal{B}(\mathbf{a}; r)$	Bola aberta em \mathbb{R}^d , centrada em \mathbf{a} de raio r
$\#(\cdot)$	Cardinalidade de um conjunto

Espaços de medida e afins

(M, d)	Espaço métrico
$(\Omega, \mathcal{S}_\Omega)$	Espaço mensurável
$(\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mu)$	Espaço de medida
$\sigma(A)$	σ -álgebra gerada por um conjunto A
b_d	Volume da bola aberta em \mathbb{R}^d de raio unitário
$\mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{y}; r))$	Volume de uma bola aberta centrada em \mathbf{y} e raio r

\mathcal{B}^d	σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^d
\mathcal{B}_0^d	Coleção de todos os conjuntos de Borel limitados em \mathbb{R}^d
ν_d	Medida de Borel d -dimensional
$\delta_x(\cdot)$	Medida de Dirac no ponto x
\mathbb{P}	Medida de probabilidade
P_X	Medida de probabilidade gerada pela variável X

Escalares especiais

P	Potência de transmissão
η	Expoente de perda de percurso
m	Fator de desvanecimento do canal do tipo Nakagami- m
h_x	Variável aleatória relativa ao ganho de potência do canal
λ	Intensidade da rede
\mathcal{I}_Ψ	Interferência agregada à rede modelada via processo pontual Ψ
W	Potência de ruído

Estatística e Distribuições

X	Variável aleatória
$\mathbb{E}\{X\}$	Esperança da variável X
$\text{var}\{X\}$	Variância da variável aleatória X
$p_X(\cdot)$	PDF da variável X
$F_X(\cdot)$	CDF de variável aleatória X
$M_X(\cdot)$	Função geradora de momentos
$\mathcal{L}_X(\cdot)$	Transformada de Laplace da variável aleatória X
$\stackrel{d}{=}$	Igualdade em distribuição
$X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$	Variável Gama de parâmetros α e β

$X \sim \exp\left(\frac{1}{\mu}\right)$ Variável exponencial de média μ

Funções e outros operadores

$\mathbf{1}(x \in A)$ Função indicadora segundo a condição $x \in A$

$\mathbf{1}_A(x)$ Outra representação para a função indicadora

$\exp(\cdot)$ Função exponencial

$\ln(\cdot)$ Função logarítmica natural

$\max\{\cdot\}$ Função máximo

$\min\{\cdot\}$ Função mínimo

$\ell(\cdot)$ Função perda de percurso

$\Gamma(\cdot)$ Função Gama

$\gamma(\cdot, \cdot)$ Função Gama incompleta

$\Gamma(\cdot, \cdot)$ Função Gama incompleta complementar

$B(\cdot, \cdot)$ Função Beta

$\mathcal{L}[f(x); p]$ Transformada de Laplace da função $f(x)$

$\mathcal{M}[f(x); p]$ Transformada de Mellin da função $f(x)$

$G_{p,q}^{m,n} \left[\cdot \middle| \cdot \right]$ Função Meijer- G

$\arg(z)$ Argumento de um número complexo z

$\operatorname{Re}(z)$ Parte real de um número complexo z

Processos pontuais

$N_{\mathbf{B}}$ Medida de contagem aleatória

$V(\mathbf{B})$ Probabilidade vazia

$\Lambda(\cdot)$ Intensidade de medida

$\Lambda_*(\cdot)$ Intensidade de medida de um processo pontual marcado

$\lambda(\cdot)$ Função de intensidade para processos não-homogêneos

λ	Intensidade para processos homogêneos
Φ_{th}	Processo pontual <i>thinned</i>
$\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	Processo pontual simples
$N_{\mathbf{B}} \sim \text{Poisson}(\nu_d(\mathbf{B}))$	Processo pontual de Poisson
$\Phi \sim \text{binomial}(\mathbf{B}, k, f)$	Processo pontual binomial
$\Psi = \{(X_n, m(X_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$	Processo pontual marcado

Outros símbolos

$n!$	Fatorial de n
$\binom{n}{k}$	Número binomial
\gg	Muito maior que ...
\simeq	Aproximadamente igual a ...
◀	Final de exemplo

Sumário

Introdução	24
Organização da tese	27
Lista de publicações	29
I Contexto e Estado da Arte	31
1 Fundamentos de Propagação de Rádio	32
1.1 Modelo de propagação de rádio	32
1.1.1 O desvanecimento em larga escala	33
1.1.2 O desvanecimento em pequena escala	35
1.2 Intensidade do sinal recebido	39
1.3 Síntese	41
2 Interferência em Redes <i>Ad-Hoc</i> Sem-Fio	43
2.1 Conceitos básicos de redes <i>ad-hoc</i> sem-fio	43
2.1.1 Mecanismo de funcionamento da rede	45
2.1.2 Aplicações das redes <i>ad-hoc</i>	47
2.1.3 Características das redes <i>ad-hoc</i>	48
2.2 Protocolos de acesso ao meio	49
2.2.1 Descrição do protocolo CSMA/CA	51
2.2.2 Problema da estação oculta	52
2.2.3 Problema da estação exposta	53
2.3 Interferência em sistemas celular sem-fio	54
2.4 Modelagem da interferência em redes <i>ad-hoc</i> via teoria <i>shot-noise</i>	56
2.4.1 Processo <i>shot-noise</i> : uma generalização por Geometria Estocástica	57
2.4.2 Distribuição espacial dos nós na rede	58
2.5 Síntese	59
II Teoria da Medida e Geometria Estocástica	61
3 Espaços Mensuráveis	62

3.1	Noções de espaços topológicos	62
3.1.1	Espaços métricos	62
3.1.2	Espaços topológicos	66
3.2	Uma breve introdução de Teoria da Medida	66
3.2.1	Espaços mensuráveis	67
3.2.2	Funções mensuráveis	69
3.2.3	Teoria da integração	71
3.3	Síntese	73
4	Introdução aos Processos Pontuais	74
4.1	Processo pontual como uma medida de contagem aleatória	74
4.2	Propriedades dos processos pontuais	78
4.2.1	Estacionariedade e isotropia	79
4.2.2	Ergodicidade e <i>mixing</i>	80
4.3	Caracterização das distribuições dos processos pontuais	80
4.3.1	Probabilidades vazias	81
4.3.2	Distribuições dimensionais finitas	81
4.3.3	Funcional de Laplace e Funcional gerador de probabilidade	82
4.4	Intensidade de medida e Teorema de Campbell	84
4.4.1	A média de uma soma aleatória de um processo pontual	85
4.5	Distâncias em processos pontuais	87
4.5.1	A função de distribuição da distância do vizinho mais próximo	88
4.5.2	Função de distribuição da distância de contato	89
4.5.3	A função J	90
4.6	Síntese	90
5	Processo Pontual de Poisson	92
5.1	Processo pontual binomial	92
5.2	Processo pontual de Poisson	94
5.3	Processos que preservam a condição de Poisson	98
5.3.1	Superposição	99
5.3.2	<i>Thinning</i>	99
5.4	Simulação de um processo pontual de Poisson	102
5.4.1	Caso do processo homogêneo	102
5.4.2	Caso do processo não-homogêneo	103
5.5	Densidade de um processo pontual de Poisson	106
5.6	Processo pontual marcado	107
5.6.1	O Teorema de Campbell para processos marcados	109
5.7	Síntese	110

III Propostas e Contribuições	111
6 Modelos de Conectividade em Redes Ad-Hoc Sem-Fio	112
6.1 Descrição do Modelo de Sistema	112
6.1.1 Modelo estocástico da rede <i>ad-hoc</i>	113
6.2 Modelo de conectividade sem interferência	116
6.2.1 Potência de ruído constante	119
6.2.2 Potência de ruído com distribuição exponencial	121
6.3 Modelo alternativo de conectividade	123
6.3.1 Potência de ruído constante	127
6.3.2 Potência de ruído com distribuição exponencial	128
6.4 Avaliação numérica dos resultados	130
6.5 Síntese	134
7 Modelos de Conectividade na Presença de Interferência	137
7.1 Caracterização da interferência média em redes <i>ad-hoc</i>	137
7.2 Variância de interferência	140
7.3 A transformada de Laplace da interferência	141
7.4 Modelo de conectividade baseado na SIR	145
7.4.1 A probabilidade $p(r, T)$ para o caso do fator- m inteiro positivo	147
7.4.2 SIR média do processo pontual marcado	151
7.5 Modelo de conectividade baseado na SINR	155
7.5.1 A probabilidade $p(r, T)$ para o caso de potência de ruído constante	156
7.5.2 A probabilidade $p(r, T)$ para o caso de potência de ruído ter distribuição exponencial	158
7.6 Síntese	161
8 Limitantes às Métricas dos Modelos de Conectividade	163
8.1 Desigualdades de Chernoff	163
8.2 Limitantes ao modelo de conectividade baseado na SIR	165
8.3 Limitantes ao modelo de conectividade baseado na SINR	168
8.4 <i>Throughput</i> de Shannon	170
8.5 Otimização de rede	172
8.5.1 Distribuições estáveis	174
8.5.2 Maximização da quantidade média de transmissões bem sucedidas	175
8.6 Síntese	177
Conclusões e Perspectivas	179
Conclusões	179
Trabalhos futuros	181

Referências	183
-----------------------	-----

Apêndices **189**

APÊNDICE A Funções Especiais e Transformadas Integrais	190
---	------------

A.1 Funções Gamma e Beta	190
------------------------------------	-----

A.2 Função Meijer- G	192
----------------------------------	-----

A.3 Transformadas integrais	194
---------------------------------------	-----

Introdução

Os sistemas de comunicação sem-fio evoluíram consideravelmente nos últimos anos. Estes passaram de um simples sistema de voz para algo mais complexo. Atualmente, eles operam em tempo real e, além da função da transferência de voz, eles também estão aptos a transmitir dados, imagem e vídeo. Por outro lado, para atender a demanda por estes serviços e proporcionar uma qualidade de serviço em níveis aceitáveis, faz-se necessário implementar sistemas de alta capacidades. No entanto, a capacidade de comunicação sem-fio é, basicamente, dificultada por dois fatores. O primeiro deles está relacionado ao alto custo e escassez do espectro de frequência, e o outro decorre da própria natureza da comunicação *wireless*, ou seja, os canais sem-fio sofrem perturbações devidos a fenômenos de interferência, propagação e mobilidade (GOLDSMITH, 2005).

A estes desafios, ainda acrescenta-se a necessidade de implementar redes flexíveis de fácil gerenciamento e de baixo custo, características estas encontradas em redes *ad-hoc*, objeto de estudo desta tese. Neste tipo de rede, dinamicamente os terminais se comunicam uns com os outros sem qualquer infra-estrutura de rede fixa existente e, sem a figura de um administrador central (HEKMAT, 2006). Devido a estas virtudes, recentemente as redes *ad-hoc* vem ganhando bastante popularidade, por isso, tal tecnologia é encontrada por exemplo, em aeroportos, residências, escritórios, *shoppings*, etc (FRODIGH; JOHANSSON; LARSSON, 2000).

Por outro lado, a rede celular é um tipo de rede via rádio consistindo de uma quantidade fixa de pontos de acesso, conhecidas como estações rádio base, e grande quantidade de usuários (ou unidades móveis). Cada estação rádio base cobre uma determinada região geográfica conhecida como célula e tem por finalidade servir todos os usuários da célula. Em ambientes celulares, há um fenômeno importante que influencia no desempenho do sistema de comunicação: a *interferência*. Este fenômeno, por exemplo, provém de sinais indesejados de transmissões simultâneas a partir de outros nós vizinhos da rede no mesmo canal físico (RAPPAPORT, 1996).

Como comentado no parágrafo anterior, o fenômeno interferência produz limita-

ções significantes ao desempenho de sistemas de comunicações sem-fio, e esta situação é intensificada, particularmente, no contexto das redes *ad-hoc* (WEBER *et al.*, 2007). Uma parte importante das pesquisas destinadas a redes *ad-hoc* é dedicada ao desenvolvimento e projeto de protocolos de comunicação para controle de acesso ao meio, bem como para o roteamento (BASAGNI *et al.*, 2004). Um dos principais critérios de concepção destes protocolos é a gestão da interferência, assegurando um bom compromisso entre reutilização espacial, a qualidade e o fluxo das comunicações. Novas linhas de pesquisas são orientadas na análise teórica do limite de capacidade da rede mediante a protocolos de comunicação idealistas (WEBER; ANDREWS; JINDAL, 2010).

Uma outra vertente investiga as redes *ad-hoc* mediante a interferência gerada pelo sistema. Dentre os modelos existentes para modelar a interferência, este trabalho dedica-se à investigação do modelo em que leva-se em consideração a posição espacial dos nós interferentes, bem como as condições de propagação do meio. Portanto, é essencial ter um modelo que capture todas estas informações, isto é, seja ao mesmo tempo geral e representativo. Tais características são encontradas em modelos estocásticos, os quais permitem representar, por exemplo, as características dinâmicas e aleatórias da interferência (KINGMAN, 1993; BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009a; BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009b).

Recentemente, a distribuição espacial de estações rádio base, pontos de acesso e dispositivos móveis na rede é modelada aleatoriamente de acordo com alguma distribuição conhecida. A modelagem estocástica dos nós, por distribuições espaciais, supera portanto as dificuldades mencionadas no capítulo anterior em considerar modelos determinísticos (ANDREWS; BACCELLI; GANTI, 2011). De acordo com (STOYAN; KENDALL; MECKE, 1996), as distribuições espaciais fazem parte dos padrões de pontos aleatórios, também chamados de *processos pontuais*, da *Geometria Estocástica*. A Geometria Estocástica é uma área da matemática fundamentada na Teoria da Medida aplicada no espaço de probabilidade cuja finalidade é fornecer médias espaciais de posição tomadas para uma grande quantidade de pontos, de diferentes localizações, em uma determinada área. A utilização da Geometria Estocástica para modelagem de problemas físicos já era conhecida bem antes da aplicação em problemas de comunicação sem-fio (STOYAN; KENDALL; MECKE, 1996). Num contexto geral, os processos pontuais podem ser usados diretamente para modelar e analisar dados que descrevem um determinado padrão. A seguir é listada algumas aplicações que utilizam processos pontuais como uma ferramenta de modelagem (BADDELEY *et al.*, 2007):

- mapas de localização de árvores ou ninhos de pássaros;
- posições de estrelas e galáxias;
- localização de neurônios no tecido cerebral;

- localização de endereços residenciais de indivíduos diagnosticados com doenças raras, etc.

Dentre os processos pontuais existentes na literatura, o processo pontual de Poisson (*Poisson point process* (PPP), do inglês) desempenha um papel fundamental na geometria estocástica, devido a não interação entre os eventos do processo, ou seja, os pontos de configuração são independentes e pertencem a regiões disjuntas. Além disso, o PPP deriva muitos outros processos mais complexos, como por exemplo, tem-se o processo pontual marcado (*marked point process* (MPP), do inglês). Neste caso, cada ponto do processo é associado a uma marca que também pode ser aleatória. Em várias situações o MPP torna-se mais realista que o processo pontual de Poisson, devido a inclusão de hipóteses aos pontos do processo que não poderia ser feito para o caso PPP (BADDELEY *et al.*, 2007).

Os processos pontuais da Geometria Estocástica fornecem uma maneira natural de definir e analisar as propriedades macroscópicas uma rede sem-fio a partir de padrão de disposição espacial dos nós da rede. Na literatura, o processo pontual de Poisson tem sido intensamente utilizado para caracterizar matematicamente a distribuição espacial dos nós com investigação em:

- *interferência em redes* (WIN; PINTO; SHEPP, 2009; HEATH; KOUNTOURIS, 2012);
- *conectividade sem-fio* (HAENGGI, 2007; HAENGGI *et al.*, 2009);
- *área de cobertura* (ANDREWS; BACCELLI; GANTI, 2011);
- *qualidade de serviço* (BLASZCZYSZYN; JOVANOVIC; KARRAY, 2013);
- *transmissão de capacidade* (GANTI; HAENGGI, 2006; WEBER; ANDREWS; JINDAL, 2010), etc.

Portanto, utilizando-se um canal com desvanecimento Nakagami- m (YACOUB; BAUTISTA; GUEDES, 1999), esta tese tem como objetivo central, a partir dos quantificadores

- Relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio*, SNR)
- Razão sinal-interferência (*signal-to-interference ratio*, (SIR))
- Razão sinal-ruído mais interferência (*signal-to-interference-plus-noise ratio*, (SINR)),

propor expressões analíticas fechadas e/ou expressões limitantes a modelos de conectividade que caracterizam a performance de uma rede *ad-hoc* sem-fio, sendo a interferência

agregada à rede modelada segundo um processo pontual marcado homogêneo cujas marcas do processo levarão em consideração o ganho de canal num determinado *link* de comunicação e, o protocolo de acesso para redes *ad-hoc* denominado de CSMA/CA, que significa protocolo de acesso múltiplo com verificação de portadora com anulação/prevenção de colisão (*carrier sense multiple access with collision avoidance*, (CSMA/CA)) (ILYAS, 2002).

É importante mencionar que os desenvolvimentos algébricos descritos nesta tese generalizam importantes resultados já publicados na literatura em se tratando de modelos de conectividade como apresentados anteriormente (HAENGGI *et al.*, 2009; BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009b; HAENGGI, 2013). Um dos motivos que proporcionam esta generalização deve-se ao fato da escolha da distribuição Nakagami- m como modelo de desvanecimento, pois habitualmente adota-se a distribuição Rayleigh na modelagem de canal, sendo esta apenas um caso particular da distribuição Nakagami- m para o fator de desvanecimento $m = 1$. Uma outra questão em que também contribui para as referidas generalizações está na hipótese da escolha do MPP para a modelagem da posição espacial dos nós interferentes à rede sem-fio. Tradicionalmente, adota-se o processo pontual de Poisson como modelo para redes *ad-hoc*, devido a propensão de obter-se expressões algébricas fechadas com mais simplicidade, no entanto, tal modelo não é realista o suficiente em comparação ao processo pontual marcado (WEBER; ANDREWS, 2006).

Em resumo, tal proposta visa desenvolver um quadro analítico com as referidas métricas que caracterizam o desempenho de redes sem-fio *ad-hoc* baseadas em processos pontuais marcados. Por fim, diante do modelo proposto, vislumbram contribuições significativas à literatura, como por exemplo em redes heterogêneas, uma vez que várias situações serão abordadas por este trabalho.

Organização da tese

Esta tese está organizada em 9 capítulos sendo estes distribuídos em três partes principais e um apêndice. Na parte I, denominada de *Contexto e Estado da Arte*, reúne, analisa e discute os aspectos fundamentais da propagação de rádio e a estrutura de redes *ad-hoc* sem-fio. Para a Parte II, a qual é chamada de *Teoria da Medida e Geometria Estocástica*, apresenta-se todo fundamento teórico matemático, com o propósito de aplicar tais resultados na modelagem da interferência segundo um processo pontual. Por sua vez, a Parte III (*Propostas e Contribuições*) apresenta a descrição de modelos utilizados na tese, bem como todo o desenvolvimento teórico na direção dos resultados e as simulações computacionais com discussões. Por fim, os Apêndices reúnem uma coleção de funções especiais e propriedades, as quais serão utilizadas no decorrer de texto.

A seguir, daremos um pouco mais de detalhes dos conteúdos de cada capítulo:

Parte 1: Contexto e Estado da Arte

O Capítulo 1 discute os modelos e características de propagação e multipercorso de ondas de rádio, bem como os efeitos do desvanecimento de pequena escala, onde são apresentados modelos de canais comumente empregados em um ambiente de comunicações sem fio. Além desses, também aborda-se a questão da intensidade do sinal recebido por um dispositivo móvel, mediante aos seguintes parâmetros: potência de transmissão, ganho de canal e função perda de percurso.

No Capítulo 2, são introduzidos conceitos básicos de redes sem-fio e protocolos de acesso ao meio dando destaque as redes *ad-hoc*. Na sequência, é apresentada uma revisão de literatura das diferentes propostas de modelagem da interferência em redes *ad-hoc* via processo *shot-noise*, sendo a última delas baseada na Geometria Estocástica.

Parte 2: Teoria da Medida e Geometria Estocástica

O Capítulo 3 fornece uma visão geral da Teoria da Medida, cujos conceitos e resultados preliminares serão aplicados nos capítulos referentes à Geometria Estocástica.

Como um dos principais objetivos desta tese é modelar as características da variável interferência segundo a Geometria Estocástica, o Capítulo 4 destina-se a apresentação e discussão de importantes resultados sobre processos pontuais, os quais nos possibilitarão entender a modelagem do referido fenômeno físico.

No capítulo 5, são apresentados os processos pontuais que fundamentam o desenvolvimento analítico desta tese. Neste, discutiremos os processos seguintes: Binomial, Poisson e pontual marcado. Sendo este último, o alvo da pesquisa.

Parte 3: Propostas e Contribuições

O Capítulo 6 inicia-se com uma breve descrição dos cenários e hipóteses que serão empregadas por toda a tese. Na sequência, serão apresentados modelos de conectividade baseados na condição da transmissão recebida com sucesso segundo uma transmissão típica entre um transmissor e um receptor. A partir de então, serão desenvolvidas métricas que representem o número de transmissões bem sucedidas, sem considerar os efeitos da interferência.

No capítulo 7, são apresentados outros modelos de conectividade, porém com a presença do fenômeno interferência. Além disso, tal fenômeno visto como variável aleatória, será caracterizado estatisticamente segundo a média, variância e transformada de Laplace.

O capítulo 8 será dedicado à obtenção de limitantes às métricas que descrevem os modelos de conectividade na presença de interferência e ao estudo da maximização da quantidade média de transmissões bem sucedidas.

Como o título sugere, o Capítulo *Conclusões e Perspectivas* apresenta as conclusões finais e as perspectivas de trabalhos futuros.

Por fim, é importante comentar que os principais resultados deste trabalho se encontrarão destacados ao longo de texto, conforme ilustra o esquema abaixo. Neste caso, tal esquema resume todos os capítulos já devidamente apresentados.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parte 1:} \\ \text{Parte 2:} \\ \text{Parte 3:} \\ \text{Apêndices} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Capítulos: 1 e 2} \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Capítulos: 3, 4 e 5} \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Capítulos: 6, 7, 8 e Conclusões e Perspectivas} \end{array} \right.$

Lista de publicações

A seguir está uma lista de publicações em jornais e conferências produzidas durante o curso de doutorado. Estes trabalhos não estão diretamente ligados com o estudo de Geometria Estocástica, porém eles proporcionaram importantes fundamentos teóricos no estudo de funções especiais como por exemplo a função Meijer- G , a qual aparecerá com frequência no texto, além de técnicas na obtenção de limitantes à métricas de performance em sistemas sem-fio.

- Artigos em revistas científicas

1. GUIMARÃES, A. A. P. ; CAVALCANTE, C. C. “Upper Bound of Ergodic Capacity for MIMO Channels with Ricean-Fading using Majorization Theory,” *Journal of Communication and Information Systems (Online)*, v. 27, p. 10-14, 2012.

- Artigos a serem submetidos em revistas

1. GUIMARÃES, A. A. P. ; KOUNTOURIS, M. ; CAVALCANTE, C. C. “Bounds and Approximations on the Ergodic Mutual Information of Spatially Correlated Nakagami- m MIMO Channels”. (Esta submissão será feita na revista *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking (EURASIP JWCN)*).

- Artigos em congressos

1. GUIMARÃES, A. A. P. ; CAVALCANTE, C. C. “An Upper-Bound on the Ergodic Capacity of Rayleigh-Fading MIMO Channels using Majorization Theory,” *In: XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT2012)*, 2012, Brasília, 2012. v. 1. p. 6-10.

2. CAVALCANTE, C. C. ; GUIMARÃES, A. A. P. ; SA NETO, R. N. ; FREITAS JUNIOR, W. C. “Sistemas de Informação MIMO: Desempenho, Limitantes e Perspectivas,” *In: XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT2012)*, 2012, Brasília, 2012. v. 1. p. 11-16.
 3. GUIMARÃES, A. A. P. ; CAVALCANTE, C. C. “An Analytical Closed-Form Lower-Bound on Ergodic Capacity of Correlated Rayleigh-Fading MIMO Channels,” *In: The Ninth International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS2012)*, 2012, Paris, França. v. 1. p. 681-685.
 4. GUIMARÃES, A. A. P. ; GUERREIRO, I. M. ; Sousa, L. M. C. ; MOREIRA, D. C. ; MACIEL, T. F. ; CAVALCANTE, C. C. “A (Very) Brief Survey on Optimization Methods for Wireless Communication Systems,” *In: 7th International Telecommunications Symposium (ITS2010)*, 2010, Manaus, AM.
- Artigos aceitos em congressos
 1. GUIMARÃES, A. A. P. ; KOUNTOURIS, M. ; CAVALCANTE, C. C. “A Lower Bound on the Ergodic Capacity of Jointly Correlated Rician Fading Channels,” *In: IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, 2014, Washington, D.C., EUA.

Parte I

Contexto e Estado da Arte

Fundamentos de Propagação de Rádio

Uma rede de comunicação sem-fio (*wireless*) é composta por um conjunto de nós os quais se comunicam entre si através de ligações sem-fio. Ao efetivar um *link* entre um par transmissor-receptor, o canal de comunicações móveis impõe limitações fundamentais ao desempenho de tal sistema, devido principalmente às condições do ambiente ao qual eles estão inseridos e por outras transmissões. Contudo, a modelagem do canal é fundamental para uma comunicação segura de alta velocidade e consiste basicamente em caracterizar as propriedades macroscópicas do sistema como a potência do sinal recebido, a qualidade do sinal e interferência. Este capítulo tem como objetivo descrever as propriedades físicas dos *links* sem-fio, tais como a perda de percurso (*path-loss*), sombreamento (*shadowing*) e desvanecimento (*fading*).

1.1 Modelo de propagação de rádio

Em um canal de rádio sem-fio, a interação do sinal transmitido por uma fonte (Tx) com o ambiente físico à medida que se desloca em direção a um receptor (Rx), cria múltiplas frentes de onda de propagação, fenômeno este conhecido como propagação multipercurso (*multipath*). A propagação multipercurso ocorre devido a reflexões, difrações e espalhamento que originam múltiplas cópias do sinal transmitido. A Figura 1.1 ilustra os mecanismos que causam efeitos multipercurso em um ambiente *indoor*.

Segundo (HAYKIN; MOHER, 2008), a *reflexão* acontece quando a propagação de uma onda eletromagnética colide em superfícies de dimensões muito maiores que o comprimento de onda λ_c . Em ambientes *outdoor*, reflexões são criadas na superfície terrestre e edifícios enquanto que para ambientes *indoor*, as reflexões são causadas na maioria das vezes por pisos, paredes, tetos, móveis, etc. Por sua vez, a *difração* ocorre quando o caminho da onda de rádio é obstruído por qualquer superfície com irregularidades acentuadas (bordas). Este fenômeno é frequentemente denominado de sombreamento, pois o campo difratado pode chegar ao receptor mesmo quando sombreado por um obstáculo impene-

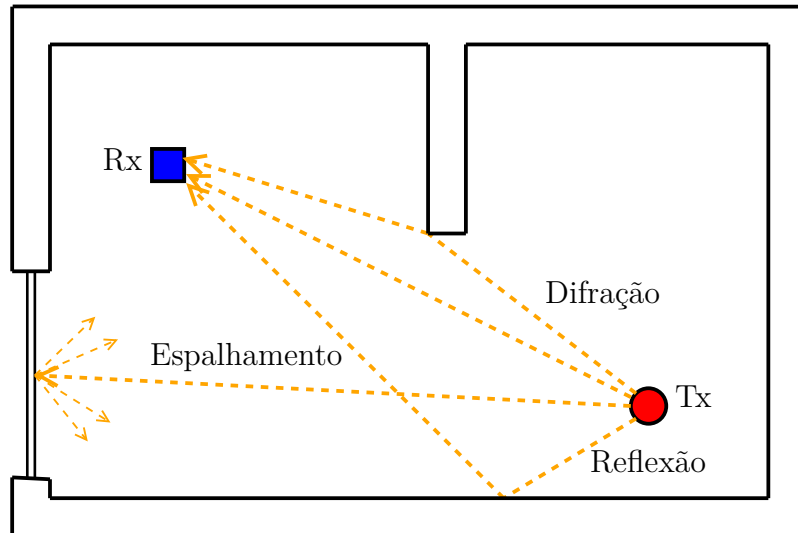


Figura 1.1 – Mecanismos de propagação básicos em um canal sem-fio.

trável. Em ambientes *outdoor*, a difração ocorre geralmente através da propagação em torno de colinas ou telhados, e para ambientes interiores tal fenômeno ocorre devido a abertura de portas e cantos de paredes. Por fim, o espalhamento acontece quando uma onda de rádio incide sobre qualquer superfície com dimensões da ordem de λ_c ou menor, fazendo-se com que a energia refletida seja espalhada em todas as direções. Em ambientes urbanos, obstruções típicas que geram espalhamento são obtidas por folhagens e postes de iluminação, por exemplo, enquanto para ambiente *indoor* por paredes e móveis.

A propagação por rádio em ambientes de comunicações móveis está sujeita a variações em frequência, tempo e espaço. Além disso, a superposição de todas as ondas que incidem no receptor dá origem a flutuações na amplitude e fase do sinal recebido, tal efeito geralmente conhecido como desvanecimento multipercurso (*multipath fading*), também depende da distância entre transmissor e receptor. Desta forma, em termos da propagação das ondas de rádio, uma outra classificação pode ser feita em duas categorias (RAPPAPORT, 1996): o desvanecimento de larga escala, também chamado de *slow fading* ou sombreamento e o desvanecimento de pequena escala ou *fast fading*.

1.1.1 O desvanecimento em larga escala

O desvanecimento de larga escala caracteriza a variabilidade do sinal numa distância de separação relativamente grande entre o transmissor e o receptor. O fenômeno é causado pela perda de percurso do sinal (sendo este dado em função da distância) e pelo sombreamento de grandes objetos no caminho de propagação. Portanto, esta variabilidade é causada pelos efeitos combinados de perda de percurso e sombreamento. Em ambientes ao ar livre, o *shadowing* é causado por grandes contornos terrestres tais como: colinas, edifícios, florestas, etc. No caso de propagação *indoor* é devido aos efeitos de bloqueio de

objetos como paredes e móveis.

No caso do fenômeno de perda de percurso, a potência do sinal transmitido decai ao longo do caminho de propagação. Define-se então o *path-loss* como razão entre a potência transmitida $P_{\text{tx}}(\mathbf{x})$ e a potência recebida $P_{\text{ry}}(\mathbf{y})$, isto é,

$$l(d) = \frac{P_{\text{tx}}(\mathbf{x})}{P_{\text{ry}}(\mathbf{y})}, \quad (1.1)$$

em que $d = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é a distância euclidiana entre o transmissor localizado em \mathbf{x} e o receptor em \mathbf{y} . Consequentemente, a potência de recepção é dada por

$$P_{\text{ry}}(\mathbf{y}) = \frac{P_{\text{tx}}(\mathbf{x})}{l(d)}. \quad (1.2)$$

Nota-se da última igualdade que a potência de recepção cresce indefinidamente quando o valor de d aproxima-se de zero. Desta forma, tal resultado é válido apenas para ambiente campo distante (*far-field*) da antena transmissora em que $d \gg d_F$, isto é, a distância entre transmissor e receptor é muito maior do que a distância d_F de Fraunhofer (RAPPAPORT, 1996).

No entanto, diante da complexidade de propagação do sinal pelo canal de rádio torna-se difícil a obtenção de um modelo analítico que caracteriza de forma precisa a perda de percurso através de uma variedade ambientes distintos. Em contrapartida, o *modelo simplificado de perda de percurso* bem como os modelos de Okumura, Hata e Lee apresentam aproximações satisfatórias para determinados ambientes em vista de casos reais (RAPPAPORT, 1996). Especificamente, o modelo simplificado indica que a potência média do sinal recebido decresce logarithmicamente com distância, seja canal de rádio *indoor* como em *outdoor*. Portanto, tal modelo de *path-loss* é expressado como uma função da distância entre o transmissor e o receptor fazendo-se uso do *expoente de perda de percurso* η que é especificado a seguir (GOLDSMITH, 2005):

$$P_{\text{ry}}(\mathbf{y}) = K P_{\text{tx}}(\mathbf{x}) \left(\frac{d_0}{d} \right)^\eta, \quad (1.3)$$

em que K é uma constante a qual depende das características da antena de recepção e da atenuação média do canal de rádio e, por sua vez, d_0 é uma distância de referência de potência recebida. Equivalentemente, em termos de decibel, tem-se:

$$P_{\text{ry}}(\mathbf{y}) [\text{dBm}] = K [\text{dB}] + P_{\text{tx}}(\mathbf{x}) [\text{dBm}] - 10\eta \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right). \quad (1.4)$$

A tabela a seguir lista alguns valores do expoente de perda de percurso para ambientes de rádio móvel *indoor* e *outdoor* (RAPPAPORT, 1996).

Por sua vez, o sombreamento é um fenômeno aleatório ao qual tem sido descrito por algumas distribuições estatísticas tais como: log-normal (RAPPAPORT, 1996; HAYKIN;

Ambiente		Expoente η
Outdoor	Espaço Livre	2
	Área Urbana	2,7 a 2,5
Indoor	Área com linha de visada	1,6 a 1,8
	Área sem linha de visada	4 a 6

Tabela 1.1 – Expoentes de perda de percurso em diversos ambientes.

MOHER, 2008), Gama (ABDI; KAVEH, 1999) e Weibull (CHENG; TELLAMBURA; BEAULIEU, 2004). No entanto, dentre estes, a distribuição log-normal tem sido o modelo habitualmente utilizado para o descrever efeito do comportamento de sombreamento (GOLDSMITH, 2005).

1.1.2 O desvanecimento em pequena escala

O movimento relativo do receptor (ou seja, da estação móvel) e a dinâmica das estruturas físicas no ambiente de propagação causam flutuações rápidas da potência do sinal em um curto período de tempo. O desvanecimento de pequena escala ou *fast fading* caracteriza-se por tal fenômeno.

A presença de objetos refletidores e espalhadores no meio de propagação criam múltiplas versões do sinal transmitido os quais chegam na antena receptora em tempos e amplitudes ligeiramente distintos. Por outro lado, o movimento relativo da estação móvel em relação ao transmissor e a presença de objetivos circundantes também resultam na variação de frequência nas componentes multipercurso devido ao efeito Doppler. Desta forma, o sinal recebido na antena da estação móvel é composto de uma grande quantidade de ondas com amplitudes, fases e frequência distribuídas aleatoriamente. Essas componentes multipercurso combinam-se na antena receptora e causam flutuações da potência do sinal resultante.

A modelagem estatística do efeito de desvanecimento foi proposto por (CLARKE, 1968) sob as seguintes hipóteses:

- as amplitudes e fases de componentes multipercurso são mutualmente independentes;
- as fases são uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 2\pi)$;
- o canal de propagação não tem linha de visada (*Non-Line-of-Sight* (NLoS), do inglês).

Como resultado, a envoltória do sinal recebido R é dada pela raiz quadrada da soma de duas variáveis gaussianas de média zero e variância σ^2 . Simbolicamente, a envoltória do

sinal é dada

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (1.5)$$

com $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, a qual tem uma distribuição Rayleigh de função densidade de probabilidade (PROAKIS, 1995)

$$p_R(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0, \quad (1.6)$$

em que $2\sigma^2$ é a potência média do sinal recebido. Esta modelagem estatística representa o desvanecimento de pior caso por não considerar linha de visada (*Line-of-Sight* (LoS), do inglês) entre o transmissor e o receptor. Além disso, a potência do sinal é uniformemente distribuída.

Para o caso de existência de LoS, as componentes aleatórias de multipercurso são sobrepostas em um caminho de propagação predominante. A envoltória complexa do sinal recebido R também é dada pela raiz quadrada da soma de duas variáveis gaussianas X_1 e X_2 de mesma variância σ^2 , porém nesse caso as médias não são necessariamente nulas e iguais, ou seja, $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Portanto, a envoltória R é distribuída segundo uma distribuição Rice (ou distribuição Riceana), a qual é dada por (PROAKIS, 1995)

$$p_R(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0, \quad (1.7)$$

em que a denota a amplitude do sinal dominante ou o sinal de LoS e $I_0(\cdot)$ é a função modificada de Bessel de primeira espécie (ANDREWS, 1985; ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964). A distribuição Rice é frequentemente descrita em termos de um parâmetro denominado fator K Riceano, ou apenas fator- K , o qual é definido como a razão entre a potência da componente LoS e a potência da componente Rayleigh, isto é,

$$K = \frac{a^2}{2\sigma^2}. \quad (1.8)$$

Quando o fator- K aproxima-se de zero, tem-se que a potência do sinal dominante também aproxima-se de zero. Como, $I_0(0) = 1$ segue que a distribuição degenerada Riceana reduz-se a uma distribuição Rayleigh (NLoS). A Figura 1.2 mostra a distribuição Rice para $\sigma = 1$ e para diferentes valores de K .

Tanto a distribuição Rayleigh como a Rice modelam o fenômeno de *fast fading* devido as formulações analíticas das propriedades físicas do canal. No entanto, algumas medidas experimentais não se encaixam bem para essas distribuições conforme comenta (GOLDSMITH, 2005). Deste modo, um modelo de distribuição mais geral foi desenvolvido com a finalidade de se adequar a uma variedade de medidas empíricas. Para tal basta modificar alguns parâmetros em sua configuração. Esta distribuição é conhecida como Nakagami- m , cuja PDF é dada por (PROAKIS, 1995):

$$p_R(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m x^{2m-1} \exp\left(-\frac{mx^2}{\Omega}\right), \quad (1.9)$$

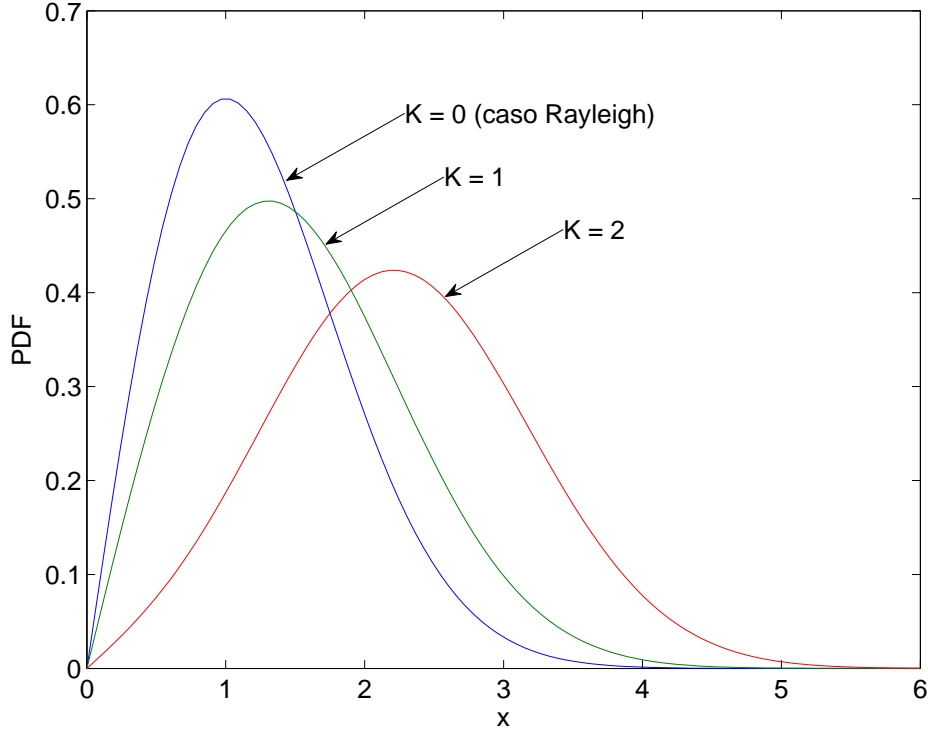


Figura 1.2 – Distribuição de densidade de probabilidade Riceana.

sendo Ω definido como a potência média do sinal, i.e., $\Omega = \mathbb{E}\{R^2\}$ e o número real $m \geq 0,5$ definido por

$$m = \frac{\Omega^2}{\mathbb{E}\{(R^2 - \Omega)^2\}}, \quad (1.10)$$

representa o parâmetro de severidade de desvanecimento, em que grandes valores de m representam desvanecimento suave, enquanto desvanecimento acentuado é obtido para pequenos valores. A Figura 1.3 ilustra a PDF da distribuição Nakagami- m para diferentes valores de m .

A distribuição Nakagami- m abrange uma ampla variedade de condições de desvanecimento. Especificamente, $m = 0.5$ produz uma distribuição gaussiana unilateral a qual corresponde o desvanecimento de pior caso, e $m = 1$ tem-se a distribuição Rayleigh. Além disso, para

$$m = \frac{(K + 1)^2}{2K + 1} \quad (1.11)$$

a distribuição Nakagami- m aproxima-se de uma distribuição Rice de fator K , enquanto que o fenômeno de desvanecimento será inexistente quando m crescer indefinidamente, isto é, $m \rightarrow \infty$ (GOLDSMITH, 2005).

A fim de gerar um canal com *fading* Nakagami- m , a envoltória complexa do sinal recebido R é definida por (YACOUB; BAUTISTA; GUEDES, 1999)

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} X_i^2}, \quad (1.12)$$

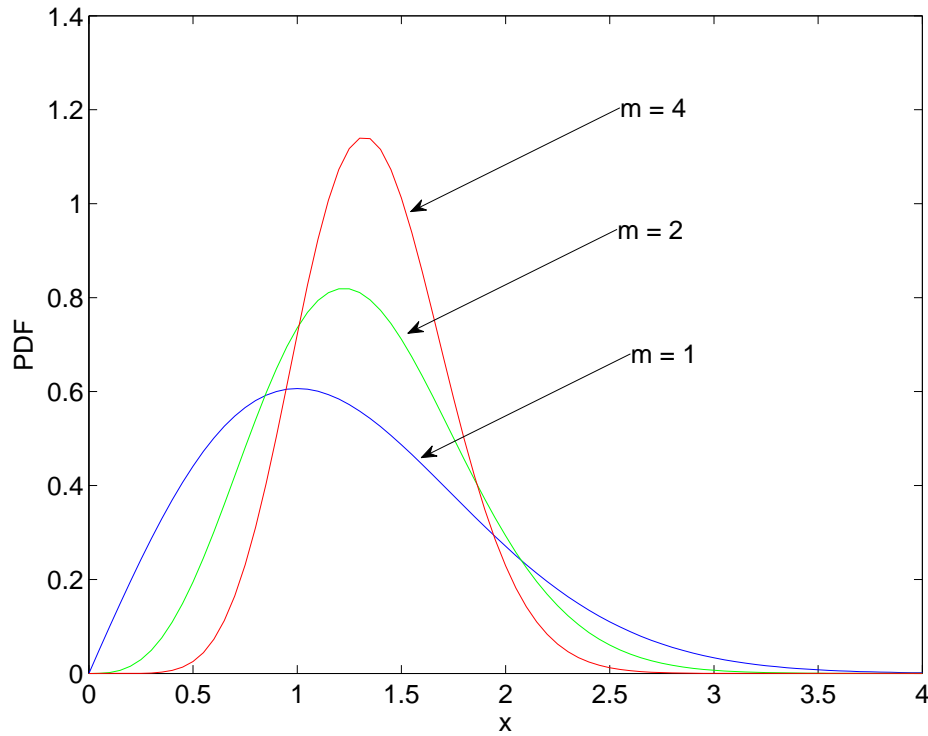


Figura 1.3 – Distribuição de densidade de probabilidade Nakagami- m .

para m múltiplo de $1/2$ e X_1, X_2, \dots, X_{2m} são variáveis gaussianas i.i.d. de média zero e variância $\frac{\Omega}{2m}$, ou seja, $X_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\Omega}{2m}\right)$.

Por fim, a distribuição de potência ou a potência do sinal recebido para um desvanecimento Nakagami- m segue uma distribuição Gama. De fato, seja a variável aleatória S dada por $S = R^2$, sendo R uma variável Nakagami- m . Para que S seja uma variável Gama de parâmetros α e β , isto é, $S \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ sua PDF deve ser do tipo

$$p_S(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{1}{\beta}x\right). \quad (1.13)$$

Aplicando o seguinte resultado o qual nos permite escrever a PDF de S em termos da PDF da variável aleatória R (PAPOULIS; PILLAI, 2002)

$$p_S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[p_R(\sqrt{x}) + p_R(-\sqrt{x}) \right], \quad x \geq 0, \quad (1.14)$$

segue então que

$$p_S(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m x^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}x\right), \quad (1.15)$$

isto é, a potência do sinal R^2 tem distribuição Gama de parâmetros $\alpha = m$ e $\beta = \frac{\Omega}{m}$. Noutros termos,

$$S \sim \text{Gama}\left(m, \frac{\Omega}{m}\right). \quad (1.16)$$

A seguir, estudaremos o comportamento da intensidade do sinal recebido mediante os fenômenos físicos que causam flutuações no sinal após ser transmitido por um dispositivo móvel.

1.2 Intensidade do sinal recebido

Na seção anterior foram descritos três fatores que caracterizam um canal de propagação de rádio. Eles estão representados na Figura 1.4 em que a variação de larga escala (*long-term*, do inglês) representa a perda de percurso devido a separação espacial receptor-transmissor, a variação em pequena escala (*short-term*, do inglês) descreve o sombreamento e a variação instantânea reflete o desvanecimento multipercurso. Combinando

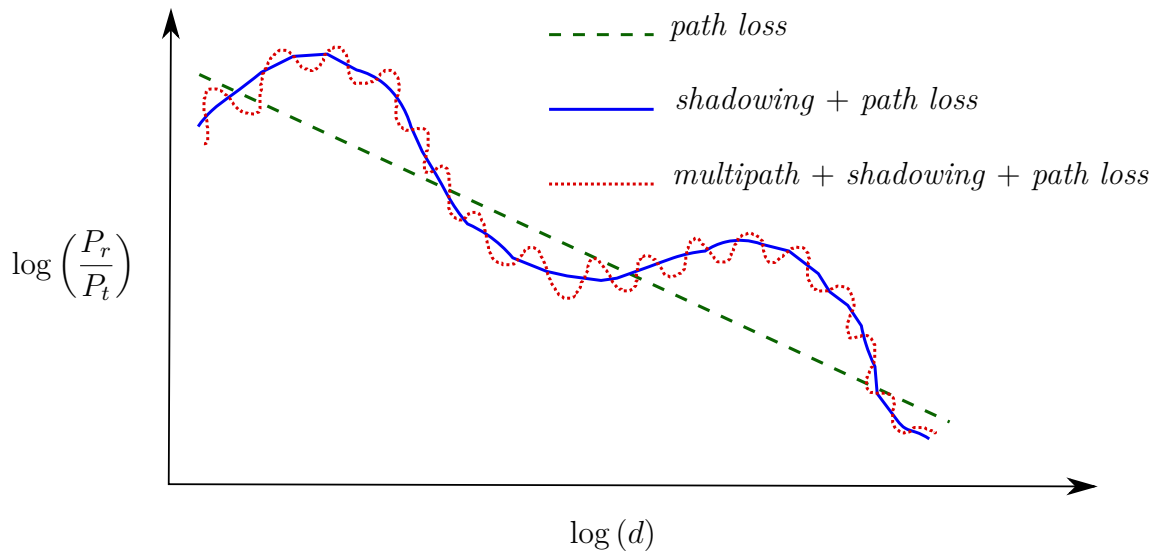


Figura 1.4 – Variações da potência do sinal recebido devido ao multipercurso, sombreamento e perda de percurso.

estas componentes, a intensidade do sinal recebido por um receptor localizado em \mathbf{y} no plano cartesiano de um transmissor i em \mathbf{x}_i é descrita em escala linear como se segue:

$$P_{r,i}(\mathbf{y}) = AP_t(\mathbf{x}_i)h_{\mathbf{x}_i,\mathbf{y}}\ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|), \quad (1.17)$$

em que A é uma constante de propagação, $h_{\mathbf{x}_i,\mathbf{y}}$ é uma variável aleatória a qual indica o ganho de potência do canal diante das localizações espaciais entre o transmissor e receptor, e $\ell(\cdot)$ é a função de atenuação do sinal transmitido ou função *path-loss*. Habitualmente, tal função é dada por

$$\ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^{-\eta} \quad (1.18)$$

sendo $\eta > 2$ o expoente de perda de percurso. Em particular, para caso do receptor localizado na origem do sistema cartesiano, tem-se

$$\ell(\|\mathbf{x}_i\|) = \|\mathbf{x}_i\|^{-\eta}, \quad (1.19)$$

e a potência do sinal recebido fica com a seguinte expressão simplificada para um transmissor localizado em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$P_r = AP_t(\mathbf{x})h_x\|\mathbf{x}\|^{-\eta}. \quad (1.20)$$

A Figura 1.5 descreve o comportamento da função *path-loss* para o caso do receptor posicionado na origem do espaço euclidiano.

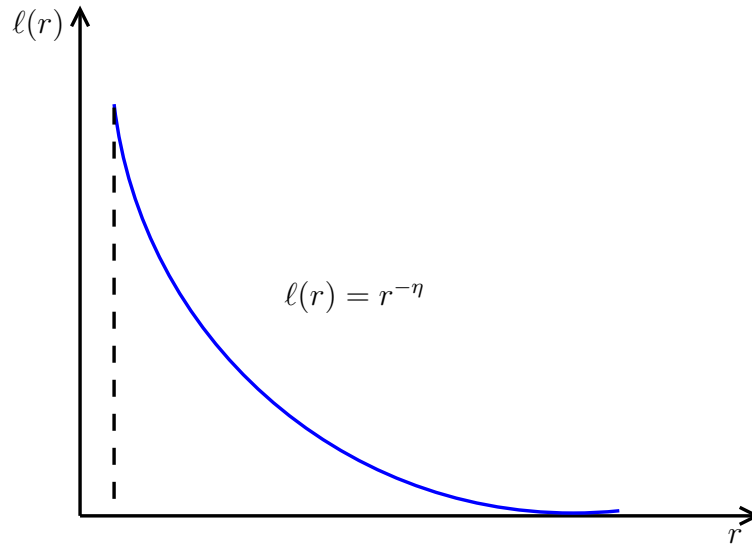


Figura 1.5 – Função de atenuação do sinal transmitido.

Observemos que a lei de decaimento da potência é válida apenas para ambiente campo distante, pois caso o transmissor estiver a distância muito próxima do receptor, o modelo de perda de percurso tende a crescer indefinidamente devido a singularidade da função *path-loss* na origem. No entanto, mesmo com esta limitação, tal modelo é amplamente utilizado em ambientes *indoor* devido à sua simplicidade (HAENGGI; GANTI, 2009).

Recentemente, a modelagem de redes sem-fio utilizando uma ferramenta chamada de Geometria Estocástica, usa modelos de desvanecimento alternativos, chamados de modelos de desvanecimento limitado ou potência de recepção limitada. Em cada caso, a função de atenuação é ligeiramente modificada para evitar tal singularidade. Consequentemente, obtém-se cenários mais realistas e resultados mais precisos, em contrapartida, o desenvolvimento analítico torna-se mais complexo. A seguir são apresentadas as principais funções *path-loss* modificadas (HAENGGI, 2013; BACCELLI; BLASZCZYNSZYN, 2009a; LEE; TEPEDELENLIOGLU, 2012):

$$(P_1) \ell(\|\mathbf{x}\|) = \min \{a^{-\eta}, \|\mathbf{x}\|^{-\eta}\};$$

$$(P_2) \ell(\|\mathbf{x}\|) = (a + b\|\mathbf{x}\|)^{-\eta};$$

$$(P_3) \ell(\|\mathbf{x}\|) = (a + b\|\mathbf{x}\|^\eta)^{-1}.$$

sendo a e b números reais tais que $a \geq 0$ e $b > 0$. Tal função também tem a seguinte representação:

$$\ell(r) = \begin{cases} a^{-\eta}, & \text{se } r < a, \\ r^{-\eta}, & \text{se } r \geq a. \end{cases} \quad (1.21)$$

De fato, se $r < a$, então $r^\eta < a^\eta$. Desta forma, tem-se a inequação $r^{-\eta} > a^{-\eta}$ a qual resulta em $a^{-\eta} = \min \{a^{-\eta}, r^{-\eta}\}$. Analogamente, prova-se para o caso $r \geq a$.

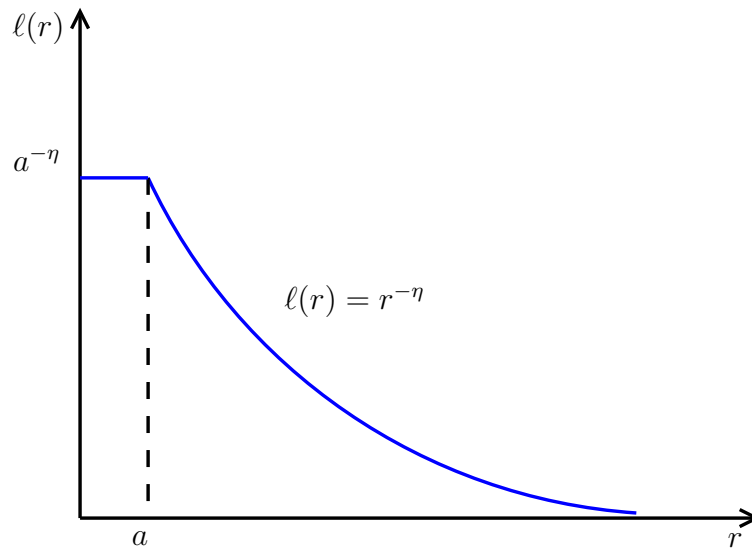


Figura 1.6 – Função de atenuação do sinal transmitido modificada.

A Equação (1.21) é um caso particular da seguinte função da lei de decaimento de potência modificada representada em dois parâmetros a qual é usualmente adotada na literatura (CARDIERI, 2010):

$$\ell(k, r) = \begin{cases} k, & \text{se } r < r_0, \\ kr^{-\eta}, & \text{se } r \geq r_0. \end{cases} \quad (1.22)$$

1.3 Síntese

Neste capítulo, foram apresentadas de forma sucinta algumas características macroscópicas da propagação de rádio, bem como as principais distribuições estatísticas utilizadas na modelagem de canais em sistemas de comunicação sem-fio. Dentre as estudadas, este trabalho focará na distribuição Nakagami- m , devido ao fato de que as outras distribuições são obtidas como um caso particular na escolha do fator m . Na sequência, descreveremos um modelo matemático para a intensidade do sinal recebido e também foi definida uma função chamada de *função de atenuação do sinal transmitido* a qual é

dada em termos do expoente de perda de percurso. A partir desta definição, tivemos a oportunidade de definir outras três versões de função de *path-loss* e inseri-las numa ideia inicial de Geometria Estocástica, objeto de estudo desta tese.

Veremos que no capítulo que se segue, a função de perda de percurso será de grande importância na modelagem da interferência em redes *ad-hoc*. Além disso, vale comentar que os resultados obtidos por este trabalho serão desenvolvidos sobre a função (P_1) , para $a = 1$, devido sua generalidade.

Interferência em Redes *Ad-Hoc* Sem-Fio

Este capítulo aborda o problema da caracterização da interferência em redes *ad-hoc* sem-fio. Então, para modelar tal interferência em redes faz-se necessário ter uma representação dos fenômenos que a produzem. A propagação, o modelo de acesso ao sistema e a topologia da rede no sentido da disposição das fontes de interferência são os fenômenos mais atuantes nesse processo. A primeira parte deste capítulo é reservada à revisão da literatura com uma descrição para redes *ad-hoc*. Na sequência, abordaremos o problema da interferência segundo a geometria estocástica a qual modela aleatoriamente a disposição dos usuários interferentes na rede de forma aleatória. A partir de então, medidas de desempenho serão definidas com o propósito de serem desenvolvidas durante toda a tese.

2.1 Conceitos básicos de redes *ad-hoc* sem-fio

Um ambiente móvel é um sistema composto de dispositivos móveis que permitem aos usuários acessarem a informação independentemente de suas localizações geográficas. As redes móveis ou redes sem-fio podem ser classificadas em duas categorias: redes com infraestrutura e redes sem infraestrutura.

O modelo de rede móvel com infraestrutura integra dois conjuntos de entidades distintos: pontos fixos ou pontos de acesso (*access point*, do inglês) e unidades móveis. Os pontos fixos, também chamados de pontos de acesso, são munidos de uma interface de comunicação sem-fio que permitem interligar de forma direta com as unidades móveis, localizados dentro de uma área geográfica limitada, a qual é denominada de célula. Cada ponto de acesso corresponde uma célula da qual as unidades móveis podem enviar e receber mensagens como mostra a Figura 2.1. As ligações entre os pontos de acessos são geralmente realizadas via rede com fios. Neste modelo, o usuário deve inicialmente

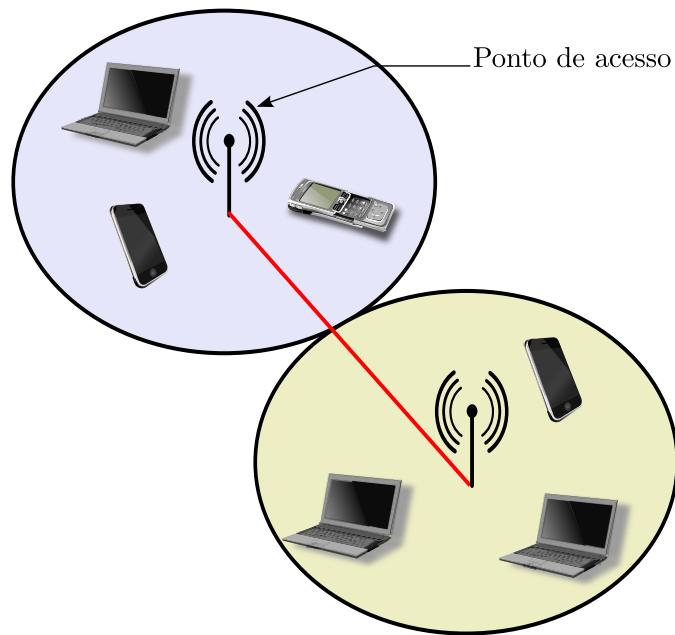


Figura 2.1 – Modelo de rede com infraestrutura.

associar-se ao ponto de acesso dentro de sua célula para obter conexão aos serviços de rede. Além disso, ele pode se comunicar com um outro usuário que este esteja conectado com o mesmo ou outro ponto de acesso.

O modelo de rede sem infraestrutura pré-existente não comporta pontos fixos como descritos anteriormente. Todos os dispositivos da rede são móveis e comunicam-se de forma direta usando suas interfaces de comunicação sem-fio, como ilustra a Figura 2.2.

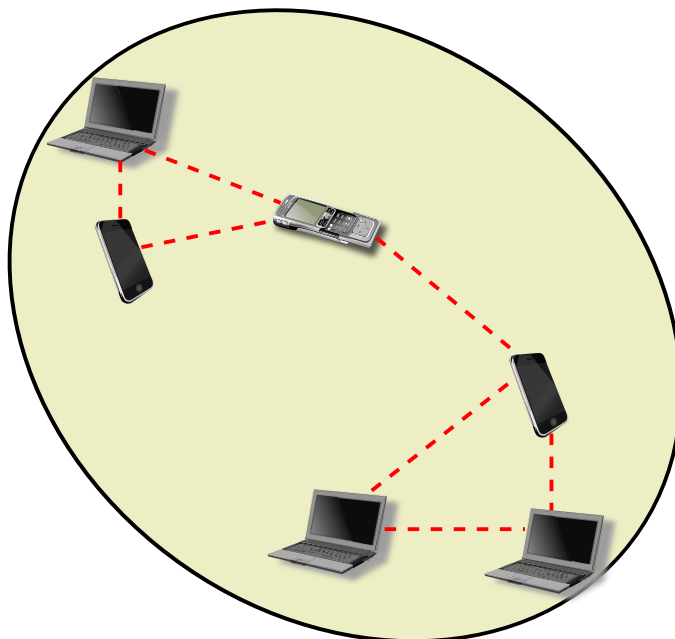


Figura 2.2 – Modelo de rede sem infraestrutura.

A falta de infraestrutura ou estações fixas obriga as unidades móveis a se comportarem como roteadores que participam na descoberta e manutenção de percursos entre os nós da rede.

Em termos gerais, os sistemas de comunicação celular baseiam-se essencialmente na utilização de redes sem-fio e na presença de estações base centrais, que cobrem as diferentes unidades móveis do sistema. Redes *ad-hoc* sem-fio, por outro lado, são compostas unicamente de dispositivos móveis os quais assumem funções para roteamento. Estas redes se organizam automaticamente, sem infraestrutura fixa e devem ser capazes de se adaptar rapidamente às condições de propagação, tráfego e deslocamento.

2.1.1 Mecanismo de funcionamento da rede

As redes *ad-hoc* são formadas em situações onde os dispositivos móveis requerem aplicações de rede, enquanto uma infraestrutura de rede fixa não é disponível ou é inexistente. Noutros termos, uma rede *ad-hoc* é uma rede de área local (*local area network* (LAN), do inglês) definida pela maneira em que os nós estão organizados na rede, e onde não existe um nó central de convergência de informações, as quais são provenientes de outros nós. Desta forma, elimina-se a necessidade de um elemento central de coordenação e controle de acesso que faça a interligação da rede com os outros destinos (FRODIGH; JOHANSSON; LARSSON, 2000).

Para o caso *wireless local area network* (WLAN), cada dispositivo (terminal ou repetidor) comunica-se com qualquer outro da rede e, mesmo que um nó esteja fora de alcance de uma estação base, ele consegue receber pacotes de dados devido aos nós intermediários que recebem e retransmitem a informação ao destino. Além disso, para implantar tal rede não são necessários muitos recursos de infraestrutura, minimizando assim a necessidade de investimentos em estações transmissoras, torres e antenas. A Figura 2.3 fornece um diagrama simples de uma rede *ad-hoc*. Nesse exemplo dois usuários são destacados (fontes A e B) com o objetivo de mostrar dois caminhos através dos terminais intermediários em direção ao nó destino.

Se um dos terminais intermediários vier a falhar (por exemplo, usuário que sai da área de cobertura), a rede irá automaticamente se reconfigurar e tentará localizar um caminho alternativo entre os dispositivos existentes naquele determinado instante. A rede se auto-configura e se adapta em função, principalmente, através:

- das condições de propagação das ondas de rádio;
- da ativação e desativação de terminais;
- das alterações do perfil de tráfego, dentre outros motivos.

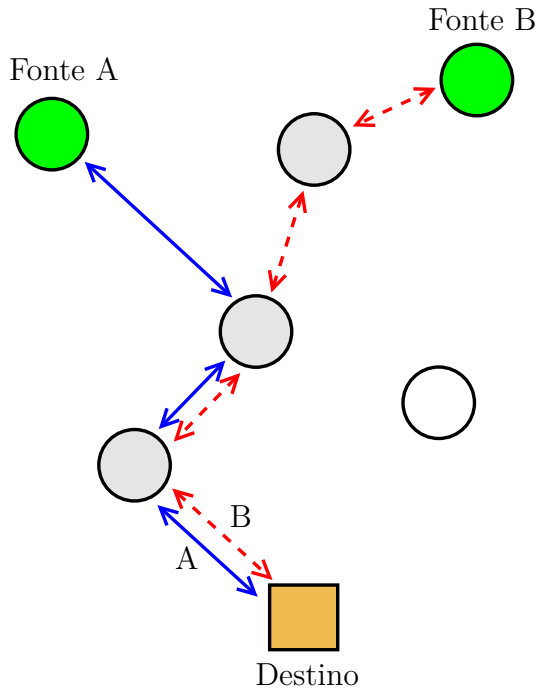


Figura 2.3 – Estrutura básica de uma rede *ad-hoc* sem fio.

A Figura 2.4 mostra um mecanismo de como as redes *ad-hoc* determinam sua configuração. Na Figura 2.4a, cada dispositivo identifica os nós que estão disponíveis para comunicação, com base na intensidade de sinal, os quais estão relacionados basicamente com a distância. No entanto, deve-se levar em consideração as obstruções e, principalmente, as interferências, uma vez que, uma transmissão a partir de um dispositivo sem fio, dentro de uma rede, é recebida frequentemente por vários terminais dentro de sua vizinhança, o que possivelmente causa interferência para estes nós vizinhos.

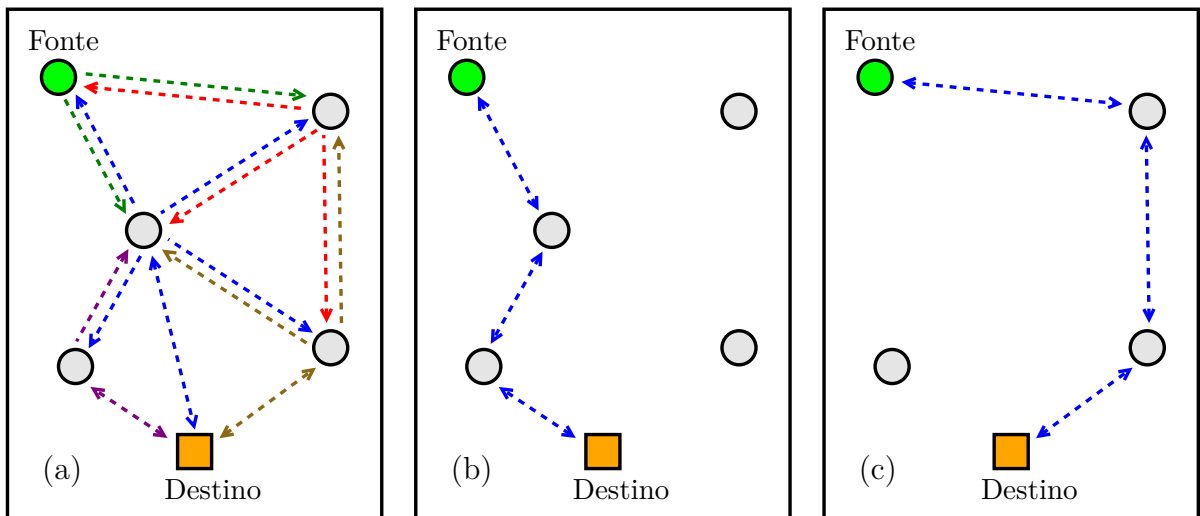


Figura 2.4 – Criação, adaptação e reconfiguração de uma rede *ad-hoc*.

Alguns dispositivos móveis podem estar fora de alcance, outros podem ser detectados, porém com intensidade de sinal insuficiente para estabelecer comunicação em nível adequado. Um vez que os dispositivos são identificados, esta informação é comunicada aos outros nós, juntamente com a informação sobre o destino desejado (Figura 2.4b). Utilizando-se a lista de conexões disponíveis, o algoritmo de configuração de rede seleciona uma rota específica para cada usuário a seu destino. Este processo requer algoritmos de tomada de decisão com base em critérios práticos para intensidade de sinal, confiabilidade do caminho ao longo do tempo, e padrões de configuração de rede (HEKMAT, 2006).

Ao longo do tempo, quase que continuamente, a rede irá mudar com os usuários entrando e saindo do sistema, os dispositivos podem estar em movimento ou pode haver alterações no ambiente que interfiram a propagação das ondas de rádio entre os nós. Segundo (ILYAS, 2002), à medida que essas mudanças ocorrem, a rede atualizará sua configuração e identificará novos caminhos dos usuários em direção ao destino como ilustra a Figura 2.4c. Este tipo de reconfiguração será repetida quantas vezes forem dadas as alterações na rede. Além disso, este processo é o mesmo utilizado na Internet, em que problemas de hardware e carregamento de sistemas exigem redirecionamento de dados de um usuário através de diferentes roteadores (FOROUZAN, 2006). Vejamos agora alguns exemplos de aplicações e características das redes *ad-hoc*.

2.1.2 Aplicações das redes *ad-hoc*

Como a rede *ad-hoc* não necessita de qualquer infraestrutura fixa, isto permite rapidez e facilidade de implantação de sistemas. Situações estas bastante comuns em operações táticas de segurança, militar e de exploração. Recentemente, a tecnologia *ad-hoc* vem abrangendo o campo de atuação em aplicações de caráter civil das quais destacam-se (FRODIGH; JOHANSSON; LARSSON, 2000):

- coordenação de resgates em situações de emergência, tais como: operação de busca e salvamento de pessoas em terremotos, incêndios, inundações, etc.
- troca de informações táticas em exercícios militares;
- compartilhamento de informações em ambientes como: residências, aeroportos, universidades, salas de reuniões, etc.
- educação à distância;
- aplicações em redes de sensores como em controle de equipamentos à distância, estudo de condições climáticas, etc.

2.1.3 Características das redes *ad-hoc*

Redes *ad-hoc* sem-fio apresentam certas vantagens sobre as redes de comunicação tradicionais. Algumas dessas vantagens são (HEKMAT, 2006):

- *A topologia é dinâmica/* As unidades móveis na rede, se movimentam de forma livre e arbitrária. Conseqüentemente, a topologia pode mudar em instantes de maneira rápida e aleatória.
- *Flexibilidade/* A constante adaptação e reconfiguração das rotas propicia que perdas de conectividade entre dispositivos possam ser rapidamente resolvidas desde que existam caminhos alternativos.
- *A falta de infraestrutura/* As redes *ad-hoc* se distinguem das outras redes móveis pela propriedade de nenhuma infraestrutura pré-existente ser necessária para o seu funcionamento, além da não necessidade de administração centralizada.
- *Mobilidade/* É possível ter acesso a rede de diferentes pontos de localização.
- *Conectividade/* Os dispositivos móveis podem se comunicar diretamente desde que cada nó esteja na área de alcance, ou seja, as unidades móveis são responsáveis por estabelecer e manter a conectividade da rede de maneira contínua.

Por outro lado, redes *ad-hoc* também apresentam limitações, tais como (ILYAS, 2002):

- *Banda passante é limitada/* Esta é uma das características principais das redes baseadas em comunicação sem-fio em que o meio de comunicação é compartilhado. Esta partilha faz com que a banda passante reservada à rede seja modesta.
- *Restrição energética/* O tempo de vida das baterias dos dispositivos móveis é limitado.
- *Segurança física limitada/* As redes móveis *ad-hoc* são mais afetadas por questões de segurança do que as redes cabeadas convencionais, uma vez que todos os nós são equivalentes e potencialmente necessários ao funcionamento da rede.
- *Interferência/* Há maior interferência entre os dispositivos móveis da rede. As interferências aumentam o número de erros sobre a transmissão e impõem uma diminuição de desempenho.
- *Redes esparsas/* Há problemas de conectividade quando os usuários estão muito espaçados (caso de redes esparsas).

- *Sistemas de larga escala/* As redes de larga escala (*large system*, do inglês) podem ter excessiva latência, a qual afeta algumas aplicações;

A próxima seção é dedicada à descrição do estudo de protocolos de acesso ao meio físico em redes sem-fio com ênfase em redes *ad-hoc*. Mais detalhes deste assunto podem ser encontrados, por exemplo, em (FOROUZAN, 2006).

2.2 Protocolos de acesso ao meio

O controle de acesso ao meio (*medium access control* (MAC), do inglês) compreende todos os mecanismos que permitem o usuário ter acesso ao meio físico e compartilhar tal meio com os outros usuários na rede. O padrão de rede IEEE 802.11 usa um método de acesso aleatório (BASAGNI *et al.*, 2004).

Em protocolo de acesso aleatório, os usuários buscam o acesso ao canal de maneira descoordenada. Um nó transmissor utiliza sempre toda a capacidade do canal durante a transmissão e quando existe colisão (ver Figura 2.5), cada nó envolvido na colisão retransmite seu *frame* até que fique completamente sem colisão. No entanto, o transmissor não necessariamente retransmite seu *frame* que foi colidido imediatamente, mas depois de um atraso aleatório independentemente escolhido. O nó que escolher o menor atraso aleatório será o primeiro a retransmitir seu pacote de dados.

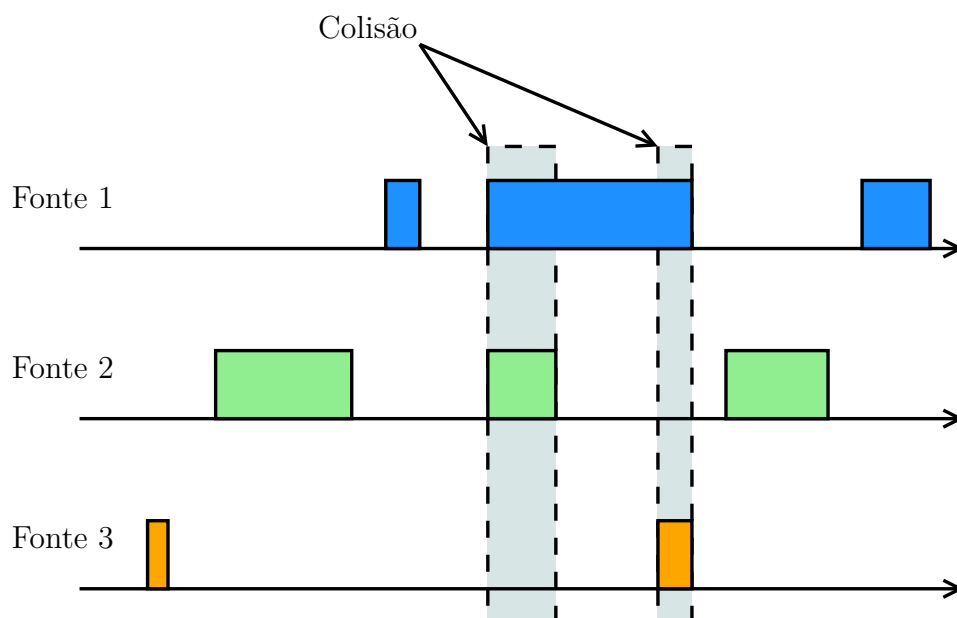


Figura 2.5 – Esquema de colisão entre pacotes de dados.

Os protocolos de acesso aleatório mais populares são: ALOHA e o acesso múltiplo com verificação de portadora (*carrier sense multiple access* (CSMA), do inglês).

Em protocolos ALOHA, um nó começa a transmitir indiferentemente se outros nós estão transmitindo (FOROUZAN, 2006). Por outro lado, o protocolo CSMA segue a ideia de que antes de começar a falar, uma pessoa educada escuta se alguém está falando e espera até que todos tenham terminado. O protocolo CSMA propõe mecanismos mais civilizados, seguindo as regras de conversação entre pessoas educadas. Especificamente, CSMA é um mecanismo MAC no qual um usuário verifica a ausência de outro transmissor tentando acessar o meio compartilhado (FOROUZAN, 2006). O termo “verificação de portadora” significa que o transmissor ‘escuta’ um sinal de portadora antes de tentar transmitir. Se uma portadora é detectada, ele espera até o final da transmissão de um determinado nó para iniciar sua própria transmissão.

Uma outra regra de conversação é que se alguém começa a falar ao mesmo tempo, deve-se então parar de falar. Este é um fenômeno chamado de detecção de colisão (*collision detection* (CD), do inglês) que é empregado pelo protocolo CSMA/CD em redes Ethernet. A detecção melhora o desempenho do CSMA por finalizar a transmissão assim que é detectada uma colisão, o que reduz a probabilidade de uma segunda colisão ao tentar novamente retransmitir a mensagem. Dito de outra forma, uma estação de transmissão de dados que detecta outro sinal durante sua transmissão *pára* de transmitir, em seguida emite um sinal especial (chamado de *jam signal*) para garantir que todos os usuários saibam da colisão, e aguarda um intervalo de tempo aleatório antes de tentar transmitir sua mensagem (FOROUZAN, 2006).

O padrão IEEE 802.11 também utiliza o protocolo de acesso múltiplo com verificação de portadora com anulação/prevenção de colisão CSMA/CA (*collision avoidance*). A prevenção de colisão torna-se um esquema de avaliação do meio para definir se o canal está ocupado ou livre. Portanto, se o canal é percebido livre o usuário irá atrasar a transmissão por um intervalo de tempo aleatório, procedimento este chamado de *backoff*, e caso após este tempo permanecer livre, então o usuário processa imediatamente sua transmissão. Caso contrário, a transmissão é adiada e executa-se novamente o procedimento de *backoff*. Isto reduz a probabilidade de colisão no canal (SCHILLER, 2000).

O IEEE 802.11 também define mecanismos suplementares para o controle de *frames* no CSMA/CA chamados de “solicitar para enviar” (*request-to-send* (RTS), do inglês) e o “livre para enviar” (*clear-to-send* (CTS), do inglês). Antes de uma transmissão do pacote de dados, um usuário transmite um RTS informando sobre a estação e quanto tempo irá realizar a tarefa, em seguida o receptor responde com um CTS. Estes pacotes de dados de controle são significativamente menores que os *frames* de dados. Além disso, colisões entre pacotes RTS são menos impactantes ao sistema do que colisões envolvendo pacotes de dados usuários.

2.2.1 Descrição do protocolo CSMA/CA

O padrão IEEE 802.11 propõe duas funções, ou dois modos, de acesso ao meio (SCHILLER, 2000):

- função de coordenação distribuída (*distributed coordination function* (DCF), do inglês);
- função de coordenação pontual (*point coordination function* (PCF), do inglês).

A função DCF é um modo utilizado por todos os dispositivos móveis da rede e que permite o acesso equitativo ao canal de rádio sem qualquer gerenciamento centralizado de acesso (modo totalmente distribuído). Em particular, este modo é utilizado pelas redes *ad-hoc*. Já para função PCF, o acesso é efetuado de forma ordenada com a autorização de um controlador. Este é um modo no qual as estações base são responsáveis pela gestão de acesso ao canal em sua área de cobertura para os dispositivos móveis que lhes são inerentes. Como esta tese tem foco em redes *ad-hoc*, não entraremos em detalhes para o caso PCF.

O princípio da função DCF consiste em ‘escutar’ o meio para disponibilizar-se da informação de que existe ou não uma outra estação transmitindo. O transmissor deve portanto garantir que o meio está livre para um determinado período de tempo, o qual é referenciado como espaço entre *frames* (*distributed inter-frame space* (DIFS)), antes de transmitir. Se o meio está livre durante este tempo, a fonte inicia a transmissão de seu pacote de dados, caso contrário, a transmissão é então adiada por período de tempo aleatório para que seja retransmitido. O terminal receptor envia um pacote de confirmação chamado de *acknowledge packet* (ACK) depois de um curto período de tempo conhecido como *short inter-frame space* (SIFS).

A Figura 2.6 descreve em resumo o protocolo CSMA/CA de uma rede *ad-hoc*. A Fonte 1 deseja transmitir um pacote de dados pela rede sem-fio, então ele envia um *frame* RTS para o destino para solicitar permissão para transmitir com parâmetro de reserva após esperar pelo DIFS. O receptor pode então permitir a transmissão, neste caso após o SIFS, ele envia um *frame* CTS indicando que está pronto para receber a mensagem. Após o recebimento do CTS, a Fonte 1 executa o procedimento e inicia a transmissão de seu pacote de dados. Se o receptor é capaz de decodificar corretamente o pacote recebido, ele envia de volta um *frame* ACK de confirmação do sucesso na recepção após um curto período de tempo SIFS. Por fim, em termos dos usuários, a reserva do canal é implementada devido ao vetor de alocação de rede (*network allocation vector* (NAV), do inglês) o qual é um indicador para a estação de quanto tempo ele deve adiar para acessar o meio.

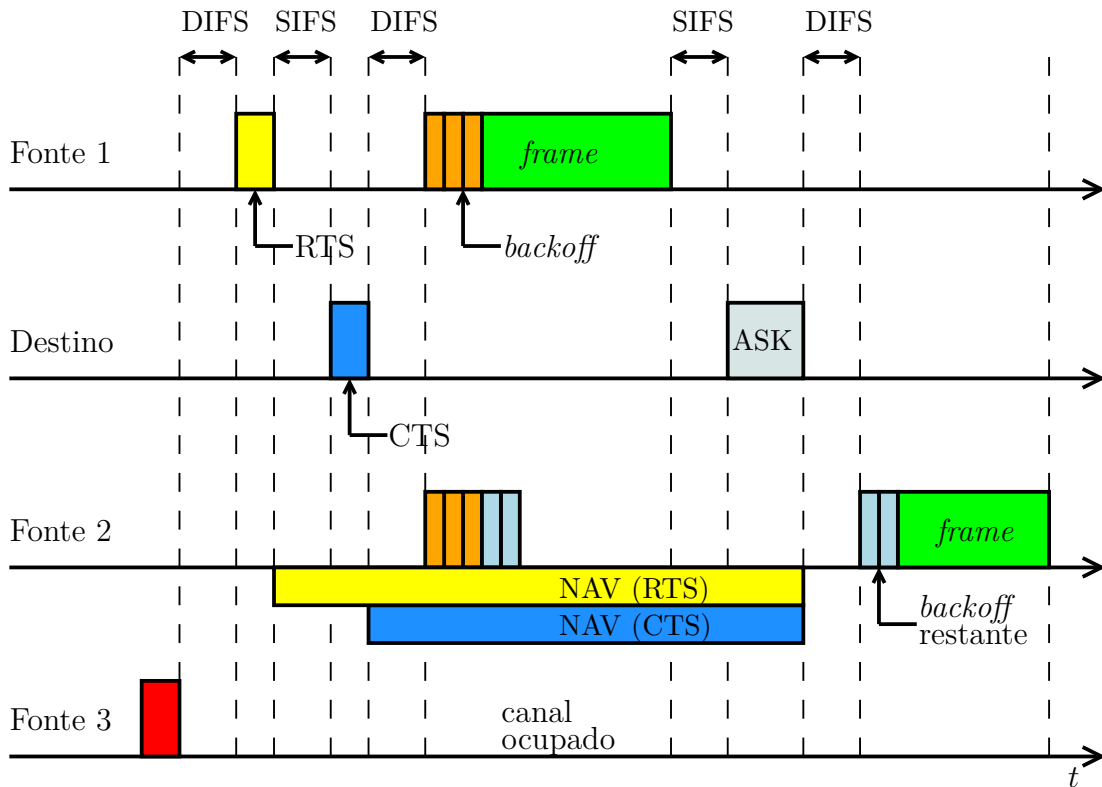


Figura 2.6 – Descrição do protocolo CSMA/CA.

Numa rede *ad-hoc* sem-fio, nem todas as estações estão ao alcance uma das outras. Diante disso, ocasiona-se dois problemas distintos chamados de: problema da estação oculta e problema da estação exposta. Os mecanismos de proteção adicionais RTS/CTS definidos pelo IEEE 802.11 também tem a função de combater tais problemas. Vejamos com mais detalhes a ocorrência de tais situações.

2.2.2 Problema da estação oculta

Este problema ocorre quando duas estações não conseguem ‘escutar’ qualquer tipo de informação uma da outra devido à distância ou obstáculos entre elas. A Figura 2.7 mostra uma situação do problema da estação oculta. As estações A e C conseguem se conectar por não estarem dentro da mesma célula, no entanto, suas zonas de transmissão são não disjuntas. Uma colisão pode então ocorrer quando os usuários A e C enviarem dados simultaneamente para a estação B que se encontra na interseção de suas zonas de transmissão. Neste caso, diz-se que as estações A e C estão ocultas entre si em relação a B.

Os mecanismos RTS/CTS descritos anteriormente permitem resolver este problema da seguinte forma: antes de transmitir, o usuário A envia uma mensagem RTS à B. Na sequência, o usuário B autoriza a transmissão em resposta pela mensagem CTS para estação A. Como C também está dentro do alcance de B, segue que a mensagem CTS

também chega ao usuário C. Desta forma, a estação C identifica que algum dispositivo oculto está utilizando o canal e, automaticamente, pára de transmitir seus dados, até que A tenha concluído a sua transmissão.

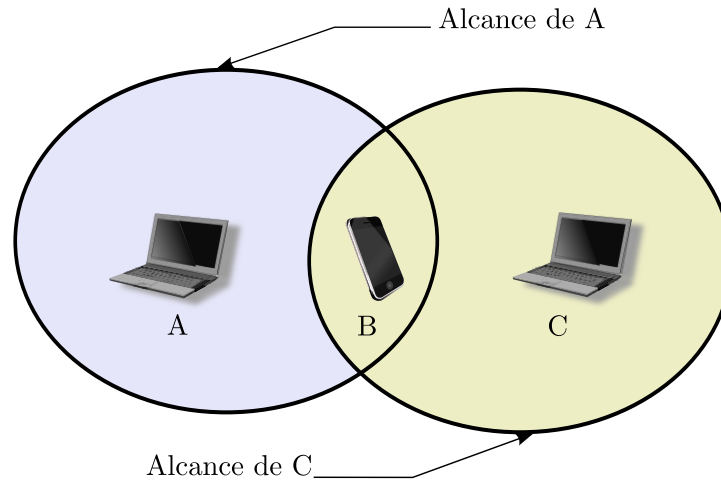


Figura 2.7 – O problema da estação oculta.

2.2.3 Problema da estação exposta

A Figura 2.8 ilustra uma transmissão da estação B para A. O usuário C é o vizinho de B e detecta que o canal está ocupado. Então, quando C tem pacote de dados para enviar para o usuário D, ele não consegue tal procedimento devido à exposição na transmissão do usuário B. No entanto, C pode transmitir pacotes de dados em direção à D sem interferir o receptor A. Este problema em que uma estação deixa de utilizar o canal quando ele está disponível é chamado de problema da estação exposta, devido a estação C está exposta à transmissão de A e de B.

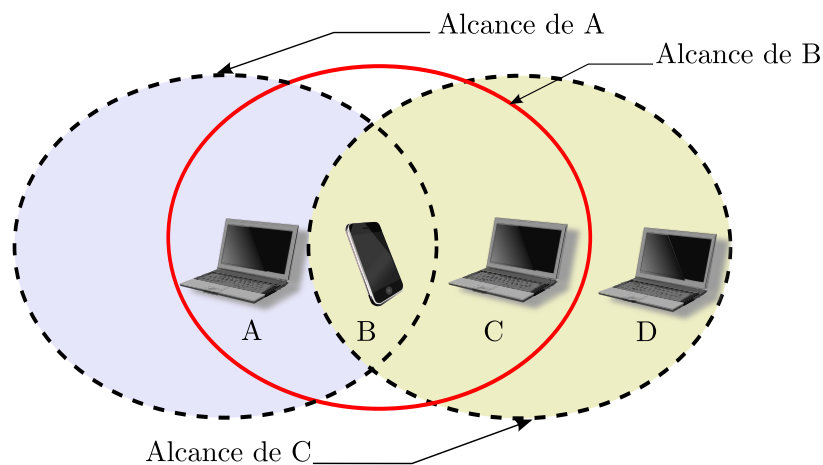


Figura 2.8 – O problema da estação exposta.

A presença de interferência em redes *ad-hoc* é abordada nas próximas seções cujo modelo introduzido baseia-se no processo denominado de *shot-noise*.

2.3 Interferência em sistemas celular sem-fio

Uma rede de comunicação é normalmente composta por uma grande quantidade de nós comunicantes. Naturalmente, tal situação introduz interferência no sistema a qual é gerada principalmente quando vários nós transmitem na mesma frequência. Teoricamente, ela pode aumentar ou diminuir a potência do sinal desejado como um resultado de uma superposição de múltiplas ondas com a mesma banda de frequência celular.

Este tipo de interferência é chamada de *interferência co-canal* ou, simplesmente, interferência. No entanto, há um outro tipo de interferência a qual é chamada de *interferência por canal adjacente*. Segundo (RAPPAPORT, 1996), a interferência por canal adjacente ocorre devido a imperfeições nos dispositivos de recepção e pode ser minimizada mantendo uma separação suficientemente grande entre as bandas de frequência dos canais em determinada célula. Desta maneira, tal fenômeno é praticamente negligenciado ou insignificante em comparação com a interferência co-canal a qual é difícil de ser controlada em razão na natureza aleatória da propagação das ondas de rádio.

Em áreas urbanas, para minimizar os níveis de interferência co-canal, as células co-canal devem estar fisicamente separadas por uma distância mínima, com o propósito de assegurar um isolamento satisfatório entre elas. Na Figura 2.9, é descrito um conjunto de células co-canal de raio R , para um *cluster* constituído de $N = 7$ células, cuja distância entre os centros das células (co-canal) mais próximas é igual a D .

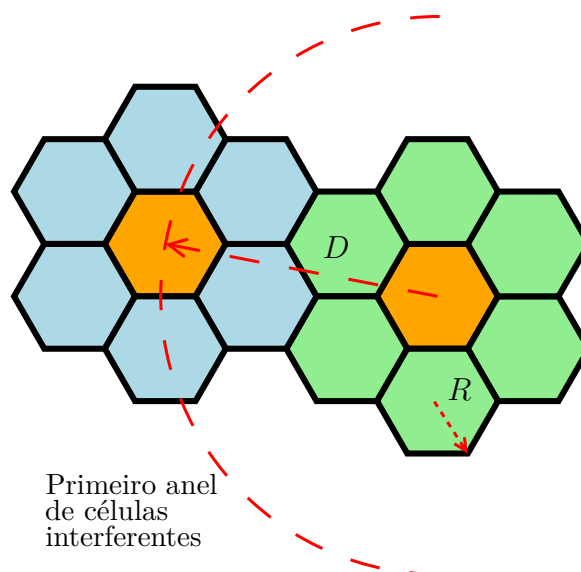


Figura 2.9 – Criação, adaptação e reconfiguração de uma rede *ad-hoc*.

Um outro parâmetro importante de comunicação celular é a razão de reuso co-canal Q a qual é dada por:

$$Q = \frac{D}{R} = \sqrt{3N}. \quad (2.1)$$

Como observa-se a razão de reuso co-canal é diretamente proporcional ao tamanho do *cluster* N . Conseqüentemente, aumentando-se o valor de Q , implica que a separação espacial entre as células co-canais relativa a distância de cobertura de uma célula é aumentada. Por conseguinte, um grande valor de Q melhora a qualidade de transmissão devido a um menor nível de interferência co-canal. Por outro lado, pequenos valores de Q ou, equivalentemente, *clusters* de tamanhos pequenos, fornece maior capacidade ao sistema e maior interferência co-canal. Contudo, para redes sem fio *ad-hoc*, geralmente, não é possível fazer tal separação espacial ocasionando assim elevados níveis de interferência.

Para um receptor localizado em \mathbf{y} , os efeitos da interferência co-canal podem ser avaliados a partir da razão sinal interferência (*signal-to-interference ratio* (SIR), do inglês):

$$\text{SIR}(\mathbf{y}) = \frac{P_{r,0}(\mathbf{y})}{\mathcal{I}(\mathbf{y})}, \quad (2.2)$$

em que $P_{r,0}(\cdot)$ é a potência de recepção (ver Eq. (1.17)) para um transmissor localizado em \mathbf{x}_0 (sinal desejado) e \mathcal{I} é a potência de interferência co-canal agregada ao sistema ou interferência total a qual é dada por

$$\mathcal{I}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}} AP_t(\mathbf{x})h_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|), \quad (2.3)$$

sendo \mathcal{T} o conjunto de todos os transmissores interferentes co-canais, A é uma constante de propagação, $h_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ é a variável aleatória referente ao ganho do canal e, por fim, $\ell(\cdot)$ é a função *path-loss*, conforme estudado na capítulo anterior.

Uma outra métrica importante na caracterização dos efeitos de interferência é a razão sinal-ruído mais interferência (*signal-to-interference-plus-noise ratio* (SINR), do inglês) a qual leva em consideração os efeitos causados potência do ruído térmico na antena de recepção o qual é descrito como um ruído gaussiano aditivo branco (*Additive White Gaussian Noise* (AWGN), do inglês). Portanto, a SINR é definida como a razão da potência do sinal recebido sobre a interferência causada pelos outros nós transmissores mais a potência do ruído térmico W , ou seja,

$$\text{SINR}(\mathbf{y}) = \frac{P_{r,0}(\mathbf{y})}{W_{\mathbf{y}} + \mathcal{I}(\mathbf{y})}. \quad (2.4)$$

Na próxima seção, continuaremos estudando o problema da caracterização da interferência, contudo nos restringiremos ao caso da modelagem via teoria *short-noise*.

2.4 Modelagem da interferência em redes *ad-hoc* via teoria *shot-noise*

Esta seção será dedicada à caracterização da interferência em redes *ad-hoc* sem-fio utilizando-se a teoria do ruído balístico (*shot-noise theory*, do inglês) a qual será introduzida no contexto de geometria estocástica. Especificamente, apresentaremos a ideia básica de *shot-noise* para o caso unidimensional em seguida, estenderemos o conceito para o caso d -dimensional. (CARDIERI, 2010), descreve detalhadamente os conceitos básicos da teoria *shot-noise* e a insere na modelação da interferência em redes *ad-hoc*¹.

Em linhas gerais, um processo *shot-noise* $\mathcal{I}(t)$ é descrito como uma aglomeração de múltiplos sinais envolvendo parâmetros aleatórios cuja descrição é dada a partir da seguinte expressão:

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(h_i, t - t_i). \quad (2.5)$$

Um processo *shot-noise* pode ser interpretado como a saída de um filtro linear sem memória com função resposta ao impulso $g(h, t)$, em que h é uma variável aleatória. Este filtro é excitado por um trem de impulsos no instante t_i cuja sequência dos tempos de chegadas $\{t_i\}$ seguem uma distribuição de Poisson de intensidade λ (KINGMAN, 1993). Além disso, cada variável aleatória h_i segue uma mesma distribuição em comum e é independente de cada variável t_i . A Figura 2.10 descreve a geração de um processo *shot-noise*. Nela, aparece o acrônimo PPP que significa *processo pontual de Poisson*, o qual será estudado com detalhes no capítulo seguinte. Neste momento, basta-nos considerar tal processo como um processo unidimensional de Poisson, como comentado neste parágrafo.

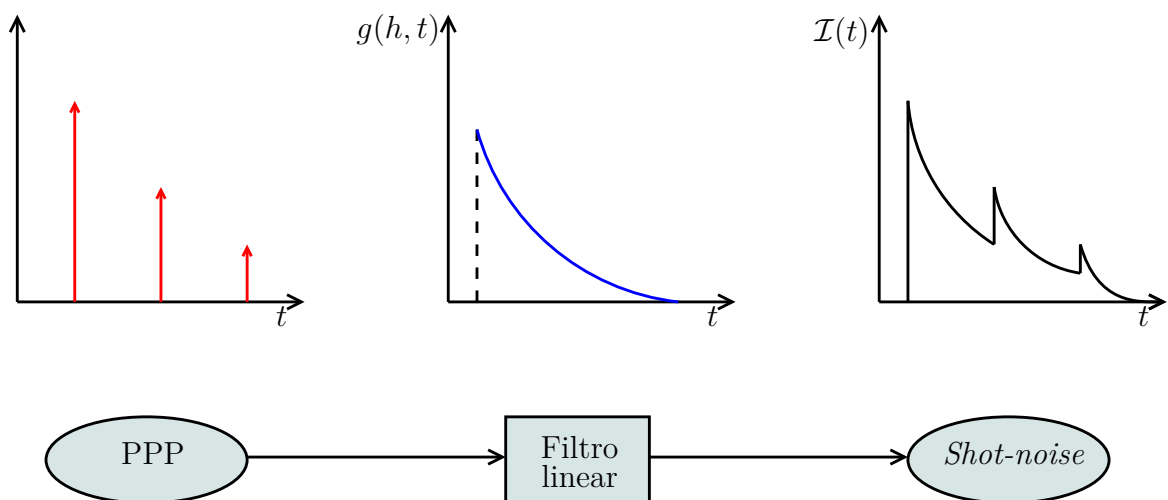


Figura 2.10 – Composição de um processo *shot-noise*.

¹ As figuras desta seção foram extraídas de (CARDIERI, 2010).

Contudo para caracterizar a interferência, é necessário que a função de resposta ao impulso seja uma função do tipo *path-loss* ponderada por uma variável aleatória h que modela os efeitos da propagação do canal, isto é, $g(h, t_i) = h\ell(t_i)$. Como foi visto no capítulo anterior, tal função caracteriza a atenuação de perda de percurso, da distância r entre o receptor e o transmissor, tomando-se como parâmetro o expoente η de perda de percurso. Na literatura é comum considerar o caso $g(h, t_i) = ht_i^{-\eta}$ com $t = 0$ devido a sua simples formulação (VENKATARAMAN; HAENGGI; COLLINS, 2006). Portanto, diante destas hipóteses a função $\mathcal{I}(\cdot)$ para $t = 0$ é dada por:

$$\mathcal{I} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i r_i^{-\eta}. \quad (2.6)$$

Agora, apresentaremos tal modelo no ponto de vista da Geometria Estocástica, como uma motivação de aplicação de tal ferramenta.

2.4.1 Processo *shot-noise*: uma generalização por Geometria Estocástica

Segundo (GANTI, 2009), a versão multi-variável de um processo *shot-noise* foi introduzida por (DALEY, 1971) quando os pontos $\{t_i\}$ em \mathbb{R}^d seguem uma distribuição Poisson homogênea. A motivação do trabalho foi dado para a descrição de campos gravitacionais.

A partir de então surgiram naturalmente outros trabalhos inserindo o processo *shot-noise* no espaço d -dimensional. Para o caso de redes celulares, o artigo de (BACCELLI; BLASZCZYSZYN; MUHLETHALER, 2006) foi um dos pioneiros a analisar a interferência como *shot-noise* multi-variável em termos da distribuição espacial dos nós, fazendo-se uso da distribuição pontual de Poisson homogênea. No referido trabalho dentre as hipóteses assumiu-se:

- canal com distribuição Rayleigh e função *path-loss* simplificada $\ell(r) = br^{-\eta}$;
- receptor teste posicionado na origem do sistema cartesiano;
- transmissores co-canais com mesma potência.

Obtendo-se, desta forma, a seguinte medida da interferência:

$$\mathcal{I}_{\Phi} = \sum_{\mathbf{x} \in \Phi} h_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|^{-\eta}. \quad (2.7)$$

em que Φ é um PPP homogêneo de intensidade λ cujos elementos são transmissores interferentes distribuídos sobre o plano real e $h_{\mathbf{x}}$ é a variável aleatória associada ao ganho de potência do canal entre do transmissor em \mathbf{x} e do receptor na origem do plano cartesiano.

Contudo, a generalização da medida de interferência para um receptor em \mathbf{y} considerando uma função de atenuação arbitrária é dada por (ver Eq. (2.3)):

$$\mathcal{I}_{\Phi}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Phi} AP_t(\mathbf{x})h_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\ell(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \quad (2.8)$$

sendo a sequência $\{h_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\}_{\mathbf{x} \in \Phi}$ uma sequência de variáveis aleatórias positivas que permite levar em consideração os fenômenos de propagação tais como desvanecimento e sombreamento. A Figura 2.11 ilustra o aspecto geométrico da interferência como modelo *shot-noise* para o caso bidimensional.

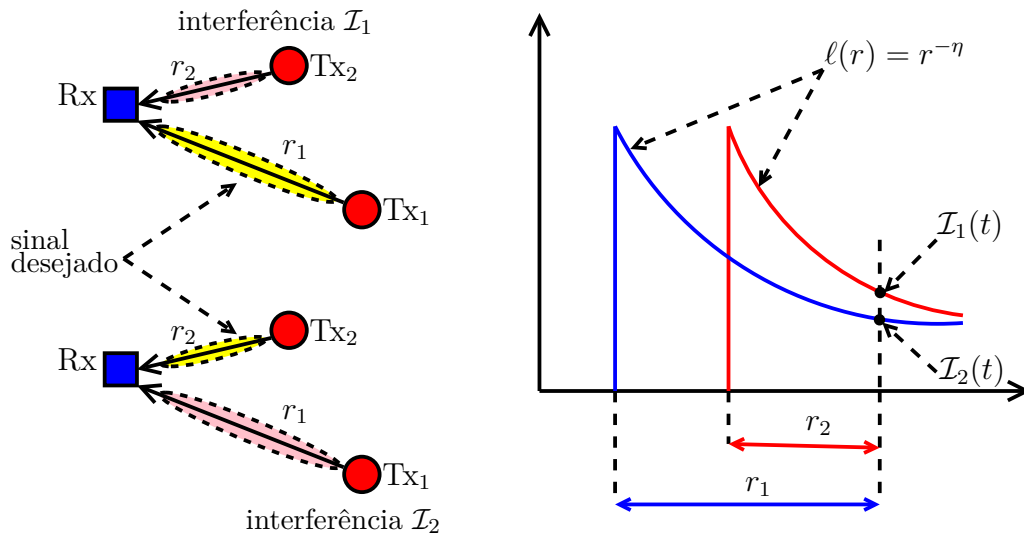


Figura 2.11 – Interferência como processo *shot-noise* bidimensional.

2.4.2 Distribuição espacial dos nós na rede

Em seções anteriores já foi discutido que a interferência provém de sinais indesejados de transmissões simultâneas a partir de outros nós vizinhos da rede no mesmo canal físico. Em ambientes externos, a informação sobre a separação espacial entre transmissores e receptores faz-se necessária para modelar a interferência causada pelo sistema e com isto, mensurar o quanto ela intervém na qualidade do sinal.

Diante desse contexto, geralmente a localização espacial dos nós é modelada de forma determinística, para tal restringe-se a estrutura regulares. Um exemplo clássico é as estruturas hexagonal de localização de estações rádio base. Como inconveniente, o modelo não é realista o suficiente, pois a localização de um receptor como um usuário na rede é na maioria das vezes desconhecida, bem como a posição dos nós interferentes em relação a este usuário. Este problema é agravado em considerar redes *ad-hoc* sem-fio em que não existe estação central de comando, as unidades móveis são dispostas espacialmente de forma aleatória em ambiente limitados e não há uma estrutura de tráfego prédefinida. Além disso,

devido a geometria da rede, o controle da interferência com planejamento de frequência torna-se bem mais complicado em comparação com a estrutura celular *outdoor*. Segundo (CARDIERI, 2010), para uma pequena separação, a atenuação da potência não segue a *lei de atenuação de potência*. Então, para contornar esta situação, usualmente, utiliza-se uma função da lei de decaimento de potência modificada como apresentada na Equação (1.22). Desta forma, a área de interferência em torno do receptor é dividida em duas regiões como mostra a Figura 2.12. A Região 1 consiste num disco centrado na posição espacial

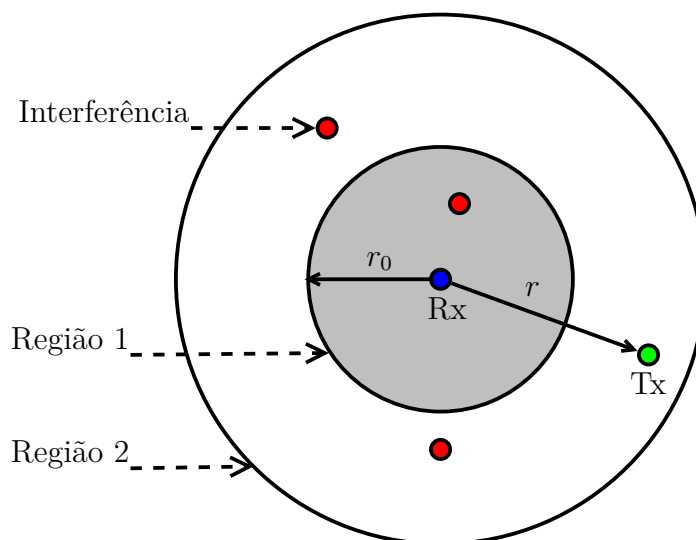


Figura 2.12 – Composição de um processo *shot-noise*.

do receptor (Rx) com raio r_0 , enquanto a Região 2 é a coroa circular obtida a partir da Região 1. Neste modelo, existem dois níveis de interferência a serem considerados, ou seja, dentro e fora da Região 1. (CARDIERI, 2010), por exemplo, apresenta as funções características de tais níveis de interferência para um canal Rayleigh.

Portanto, a Geometria Estocástica vem a ser uma ferramenta interessante no modelagem do problema de interferência levando-se em consideração a distribuição espacial do nós na rede.

2.5 Síntese

Iniciamos este capítulo apresentando os conceitos básicos de redes em ambientes móveis dando ênfase as redes *ad-hoc*, mediante o protocolo de acesso ao meio CSMA/CA. Além do mais, foi apresentada uma lista de importantes características das referidas redes. Dentre as citadas, destaca-se a facilidade de implantação em ambientes sem qualquer infraestrutura.

Na sequência, descreveu-se globalmente as principais abordagens utilizadas para a modelagem da interferência em ambientes *wireless*. Especificamente, mediante a modela-

gem da interferência segundo o processo *shot-noise*, aliada a disposição espacial dos nós interferentes na rede, introduziu-se a Geometria Estocástica como uma poderosa ferramenta na modelagem da interferência em redes *ad-hoc* sem-fio.

Com o objetivo de desenvolver métricas que caracterizam a performance de um sistema sem-fio, construído a partir de uma rede *ad-hoc* com modelagem estocástica pontual espacial, o próximo capítulo é dedicado ao estudo dos principais conceitos e resultados de Geometria Estocástica.

Parte II

Teoria da Medida e Geometria Estocástica

Espaços Mensuráveis

Neste capítulo, introduziremos os conceitos básicos de *Teoria da Medida* como propósito de entendermos os fundamentos dos processos pontuais estudados na Geometria Estocástica, dentre eles o processo pontual de Poisson e o processo pontual marcado, os quais serão utilizados para modelar a interferência e a posição dos nós interferentes de uma rede *ad-hoc*, como será visto nos capítulos posteriores. Contudo, antes de entrarmos efetivamente no estudo dos espaços mensuráveis, apresentaremos alguns fundamentos de *Topologia Geral* cujas notações serão empregadas na sequência do capítulo e algumas delas por todo o restante da tese.

3.1 Noções de espaços topológicos

Iniciaremos esta seção com um breve estudo de espaços métricos onde serão apresentados os conceitos de espaços métricos completos e separáveis. Na sequência, introduz-se a noção de espaços topológicos, dando destaque aos espaços topológicos métricos. Mais detalhes a respeito desses assuntos podem ser encontrados em (MENDELSON, 1990).

3.1.1 Espaços métricos

Um **espaço métrico** é um conjunto munido de uma medida quantitativa a qual prescreve o grau de proximidade dos pares de pontos nesse espaço. Noutros termos, um espaço métrico é um par (M, d) consistindo de um conjunto M juntamente de uma função real $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ a qual satisfaz as seguintes condições para todo $x, y, z \in M$:

- (i) $d(x, y) \geq 0$;
- (ii) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

A função $d(\cdot, \cdot)$ é chamada de métrica sobre o conjunto \mathbf{M} . Se não houver confusão na escolha de métrica em questão, geralmente referencia-se o espaço métrico apenas pelo conjunto \mathbf{M} , ao invés do par (\mathbf{M}, d) . O exemplo a seguir mostra que para um mesmo conjunto é possível definir várias métricas, obtendo-se assim espaços métricos distintos.

Exemplo 3.1 O espaço euclidiano d -dimensional \mathbb{R}^d , o qual é definido como o conjunto das d -uplas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ de números reais é um espaço métrico a partir das seguintes funções distâncias:

(a) *métrica usual* sobre \mathbb{R}^d

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2} \quad (3.1)$$

(b) *métrica do máximo*: é definida como o maior valor absoluto entre as diferenças das coordenadas correspondentes de \mathbf{x} and \mathbf{y} , isto é,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq d} \{|x_i - y_i|\}; \quad (3.2)$$

(c) *métrica da soma*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|. \quad (3.3)$$

◀

Na próxima subseção, veremos que qualquer métrica pode gerar uma *topologia*. No entanto, para entendermos tal resultado faz-se necessário definir o seguinte conjunto:

$$\mathcal{B}(a; r) = \{x \in \mathbf{M} \mid d(x, a) < r\} \quad (3.4)$$

o qual é chamado de **bola aberta** centrada no ponto $a \in \mathbf{M}$ and raio $r > 0$. Na sequência, baseado nesse conjunto, introduz-se o conceito de *vizinhança* de um ponto $x \in X$ em espaços métricos. Portanto, uma **vizinhança** de um ponto $x \in X$ é qualquer bola aberta centrada em x . A próxima figura retrata essa ideia.

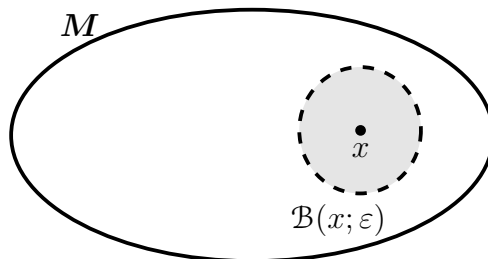


Figura 3.1 – Vizinhança de uma ponto x em \mathbf{M} .

A noção de *convergência* em um espaço métrico está associada ao estudo de convergência de sequência, a qual é fundamentada na teoria dos limites. Portanto, uma **sequência** em um espaço métrico (M, d) é uma função $f(\cdot)$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento unicamente determinado de M . Usualmente, utiliza-se a notação de índices para indicar seus termos, como em x_n , ao invés de $f(n)$ e, para listá-los na sequência escreve-se $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) . Ademais, uma **susequência** de (x_n) em M é constituída de uma outra sequência derivada da original. As notações $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ são utilizadas para indicar uma subseqüência.

A seqüência é dita **convergente** em $x \in M$ (notação $x_n \rightarrow x$) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0. \tag{3.5}$$

Equivalentemente, a seqüência (x_n) converge para $x \in M$ se para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe pelo menos um número natural N tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, sempre que a condição $n \geq N$ seja satisfeita. Como consequência da definição, as seguintes proposições são equivalentes:

- (a) para cada $\varepsilon > 0$, a bola aberta $\mathcal{B}(x; \varepsilon)$ contém infinitos pontos de M ;
- (b) existe uma seqüência (x_n) de pontos em M tal que $x_n \neq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, para cada bola aberta de centro x contém todos os termos da seqüência (x_n) , exceto possivelmente um número finito de índices $n = 1, 2, \dots, N$ como mostra a próxima figura:

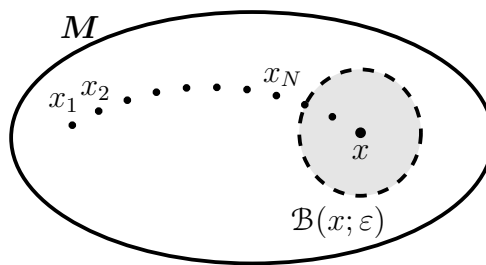


Figura 3.2 – Uma seqüência convergente em um espaço métrico (M, d) .

Por sua vez, um subconjunto S de M é dito **limitado**, se existe um elemento $x \in M$ e um número real positivo k tal que $d(m, x) \leq k$, para todo m em M . Além disso, diz-se que o espaço métrico (M, d) é **totalmente limitado** (ou M é *totalmente limitado*) se para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe uma quantidade finita de pontos x_1, x_2, \dots, x_n em M tais que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(x_i; \varepsilon). \tag{3.6}$$

A coleção de bolas abertas $\{\mathcal{B}(x_i; \varepsilon)\}$ é chamada de **cobertura finita** de \mathbf{M} . Na Figura 3.3, ilustra-se uma cobertura finita de \mathbf{M} .

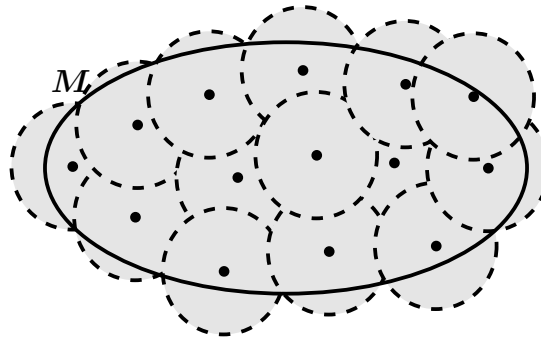


Figura 3.3 – Uma cobertura finita do espaço métrico (\mathbf{M}, d) .

O exemplo a seguir prova que toda sequência convergente é limitada. Com efeito,

Exemplo 3.2 Dado que (x_n) é convergente em x em \mathbf{M} , então existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para todo $n \geq N$. Seja agora, $k = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \dots, d(x_N, x), \varepsilon\}$, segue que $d(x_n, x) \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., a sequência (x_n) é limitada. ◀

Notemos que nossa análise de espaços métricos tem se dedicado ao estudo de sequências convergentes. Adotando, portanto, o mesmo critério, introduziremos os conceitos de *compacidade* e *sequência de Cauchy* em (\mathbf{M}, d) . Em detalhes, um subconjunto A de \mathbf{M} é chamado de **compacto**, se cada sequência

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A possui uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ a qual é convergente para algum ponto de A . Por outro lado, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbf{M} é chamada de **Cauchy**, se para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, sempre que $m \geq N$ e $n \geq N$. Dito de uma outra forma, a sequência (x_n) é de Cauchy se

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} d(x_m, x_n) = 0. \quad (3.7)$$

Por sua vez, o espaço métrico em que cada sequência de Cauchy é convergente é denominado de **espaço métrico completo**. Como resultado, o espaço Euclidiano d -dimensional é um espaço métrico completo mediante as métricas apresentadas no Exemplo 3.1. Com base nas últimas definições, destacamos:

- (a) toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy;
- (b) toda sequência de Cauchy é limitada;
- (c) um espaço métrico é compacto se, e somente se, é completo e totalmente limitado.

Por fim, apresentaremos de forma simplificada o conceito de *espaços separáveis*. Geralmente, para tratar de tal assunto, faz-se necessário introduzir algumas definições intermediárias bem como alguns resultados. Contudo, com o propósito de aplicar os conceitos até aqui estudados e não deixar esta revisão muito extensa, seguiremos a proposta de (SCHECHTER, 1997): o espaço métrico (M, d) é dito ser **separável** se for possível encontrar uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que para cada $x \in M$, este é limite de uma certa subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Consequentemente, qualquer espaço métrico compacto é separável.

3.1.2 Espaços topológicos

Neste momento, apresentamos uma noção de espaços topológicos, na sequência falaremos de espaços topológicos metrizáveis. Especificamente, uma **topologia** sobre um conjunto X , é uma coleção \mathcal{T}_X de subconjuntos de X , chamados de **conjuntos abertos**, que satisfazem as seguintes condições:

- (i) os conjuntos \emptyset e X pertencem a \mathcal{T}_X , i.e., \emptyset e X são conjuntos abertos;
- (ii) se $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n \in \mathcal{T}_X$, então a interseção $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ pertence a \mathcal{T}_X . Em outras palavras, a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto;
- (iii) a união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto, ou seja, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_X$, em que I é um conjunto indexador arbitrário.

O conjunto \mathcal{T}_X é denominado de uma *topologia* para X e o par (X, \mathcal{T}_X) é chamado de um **espaço topológico**. Os complementos dos conjuntos abertos são ditos de conjuntos fechados. Consequentemente, X e \emptyset são simultaneamente conjuntos abertos e fechados.

É importante mencionar que qualquer métrica pode gerar uma topologia. É fato que, as bolas abertas em M geram uma topologia sobre o espaço métrico, denominadas de **topologia métrica**. De uma forma geral, sempre que (M, \mathcal{T}_M) é um espaço topológico cuja topologia \mathcal{T}_M é a topologia métrica, para alguma métrica sobre M , diz-se que o par (M, \mathcal{T}_M) é um **espaço topológico metrizável**. Diante desta afirmação, conclui-se que o espaço euclidiano d -dimensional é um espaço metrizável para qualquer métrica descrita no Exemplo 3.1.

A próxima seção será dedicada ao estudo dos espaços mensuráveis.

3.2 Uma breve introdução de Teoria da Medida

Esta seção resume alguns conceitos de Teoria da Medida os quais serão empregados por toda a tese e, também, serão introduzidas várias notações e convenções. A maior parte deste conceitos podem ser encontrados em qualquer livro introdutório de Teoria da

Medida. Como sugestão, tem-se as seguintes referências: (ASH; DOLÉANS-DADE, 2000) ou (DUDLEY, 2002).

3.2.1 Espaços mensuráveis

Na teoria da probabilidade moderna, o conceito de medida tem uma importância significativa. Na verdade, medidas são extensões funções reais reais definidas em famílias de conjuntos chamadas de σ -álgebras. Especificamente, uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω é uma família \mathcal{S}_Ω de subconjuntos de Ω que possuem as seguintes propriedades:

- (i) os conjuntos \emptyset e Ω pertencem a \mathcal{S}_Ω ;
- (ii) *fechado sobre o complemento*: se A pertence a \mathcal{S}_Ω , então o complemento $\Omega \setminus A$ também pertence ao conjunto \mathcal{S}_Ω ;
- (iii) *fechado sobre a união enumerável*: Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em \mathcal{S}_Ω , então a união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ pertence a \mathcal{S}_Ω .

Nesse contexto, o par $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega)$ é chamado de **espaço mensurável**, e os conjuntos em \mathcal{S}_Ω são denominados de **conjunto mensuráveis**. Se C é uma coleção de subconjuntos de Ω , então a σ -álgebra gerada por C , denotada por $\sigma(C)$, é definida como

$$\sigma(C) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{I}(C)} \mathcal{A}, \quad (3.8)$$

em que o conjunto indexador $\mathcal{I}(C)$ é a coleção de todas as σ -álgebras contendo C , i.e.,

$$\mathcal{I}(C) = \{\mathcal{A} \mid C \subset \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{A} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra sobre } \Omega\}. \quad (3.9)$$

Como resultado, $\sigma(C)$ é a menor σ -álgebra contendo o conjunto C .

Há muitos exemplos de σ -álgebra na literatura, no entanto este trabalho focará em uma classe específica referida como σ -álgebra de Borel. Aqui, Ω é um conjunto equipado com um topologia \mathcal{T}_Ω , e a σ -álgebra (usualmente escrita como \mathcal{B}_Ω) é gerada por todos os abertos de Ω . Sobre a σ -álgebra de Borel, destacamos as seguintes considerações:

- o par $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ é denominado de **espaço de Borel** e um **conjunto de Borel** é um elemento de \mathcal{B}_Ω ;
- a σ -álgebra de Borel \mathcal{B}_Ω sobre o espaço topológico Ω é a menor σ -álgebra que contém os abertos da topologia. Assim,

$$\mathcal{B}_\Omega = \sigma(\{\mathcal{O} \mid \mathcal{O} \text{ é um conjunto aberto de } \Omega\}); \quad (3.10)$$

- o conjunto \mathcal{B}_Ω contém todos os abertos e todos os fechados de Ω , bem como as uniões enumeráveis de abertos e interseções de conjuntos fechados;

- por conveniência quando $\Omega = \mathbb{R}^d$, representaremos tal σ -álgebra simplesmente por \mathcal{B}^d ;
- o conjunto $\mathcal{B}_0^d \subset \mathcal{B}^d$ refere-se a coleção de todos os conjuntos de Borel limitados.

Agora, mediante o conceito de espaço mensurável, podemos definir uma medida específica em $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega)$, a qual é extensão natural da noção de *comprimento*, *área* e *volume* ideias estas desenvolvidas pelo matemáticos da Grécia antiga. Rigorosamente falando, uma **medida** positiva é uma função real estendida e não-negativa $\mu : \mathcal{S}_\Omega \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ tal que

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (b) *aditividade contável*: Para qualquer sequência de conjuntos mutuamente disjuntos $E_n \in \mathcal{S}_\Omega$, tem-se

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \quad (3.11)$$

Um **espaço mensurável** é denotado por uma tripla $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mu)$, em que Ω é um conjunto arbitrário, \mathcal{S}_Ω é a σ -álgebra de conjuntos mensuráveis, e μ é a medida definida em \mathcal{S}_Ω . A medida μ é dita ser **finita** se $\mu(\Omega) < \infty$. Por sua vez, uma medida definida sobre uma σ -álgebra de Borel tem as seguintes características:

- ela é denominada de **medida de Borel** se $\mu(\mathcal{O}) \in \mathbb{N}_0$, para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{B}^d$;
- uma medida de Borel é dita ser **localmente finita** se para cada $x \in \Omega$, tem-se uma vizinhança de medida finita, isto é,

$$\text{dado } x \in \Omega, \text{ existe } \mathcal{O} \in \mathcal{B}_\Omega, \text{ com } x \in \mathcal{O}, \text{ tal que } \mu(\mathcal{O}) < \infty; \quad (3.12)$$

- quando o conjunto de Borel Ω é igual ao espaço euclidiano d -dimensional, o respectivo espaço mensurável é denotado por $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \nu_d)$. Note que, escreve-se ν_d ao invés de μ para indicar a dimensão do espaço.

No que segue, apresentamos alguns exemplos importantes, no contexto deste trabalho, de espaços mensuráveis.

Exemplo 3.3 (Medida de contagem) Sejam Ω um conjunto arbitrário e \mathcal{S}_Ω uma σ -álgebra sobre Ω . Defina a função $\mu : \mathcal{S}_\Omega \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} \#(A), & \text{se } A \text{ é um conjunto finito,} \\ \infty, & \text{se } A \text{ é um conjunto infinito.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Segue que, μ é uma medida em Ω , chamada de *medida de contagem*. Aqui, $\#(A)$ representa a cardinalidade do conjunto A . ◀

Exemplo 3.4 (Medida de Dirac) Sejam Ω um conjunto não-vazio e $x \in \Omega$. A *medida de Dirac* é a medida $\delta_x : \mathcal{S}_\Omega \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ com

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \quad (3.14)$$

◀

Exemplo 3.5 (Medida de probabilidade) A medida μ sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega)$ é chamada de um *medida de probabilidade* se $\mu(\Omega) = 1$. Nesse caso, habitualmente escreve-se $\mu = \mathbb{P}$, para indicar tal medida. ◀

Mediante as definições e resultados até então estudados, a subseção será dedicada ao estudo das funções mensuráveis.

3.2.2 Funções mensuráveis

Funções mensuráveis em teoria da medida são análogas às funções contínuas na topologia geral. Noutros termos, sejam $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega)$ e (Ψ, \mathcal{S}_Ψ) espaços mensuráveis. Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \Psi$ é chamada de **mensurável** se para cada conjunto $A \in \mathcal{S}_\Psi$, sua imagem inversa

$$f^{-1}(A) = \{x \in \Omega \mid f(x) \in A\} \quad (3.15)$$

pertence a σ -álgebra \mathcal{S}_Ω . Se $f(\cdot)$ é uma função entre espaços mensuráveis, os quais equipados com suas respectivas σ -álgebras de Borel, tal aplicação é referida como uma **função de Borel**. Como uma consequência da definição, a **função indicadora** $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.16)$$

com $A \subset \Omega$, é uma função de Borel, se A pertence a σ -álgebra \mathcal{S}_Ω . Alguns autores preferem representar a função indicadora como $\mathbf{1}(x \in A)$ ao invés de $\mathbf{1}_A(x)$. Assim, $\mathbf{1}(x \in A) = 1$, se $x \in A$ e $\mathbf{1}(x \in A) = 0$, caso contrário¹.

Agora, fazendo-se $\Psi = \mathbb{R}$, tem-se um outro importante caso de função de Borel. Pois, para qualquer conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, a função real $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, ou

$$\nu(A) = \mu(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}) \quad (3.17)$$

define uma medida finita sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Mais especificamente, se $f(\cdot)$ é uma função de Borel sobre $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mathbb{P})$, então a atribuição $\nu(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\})$ é uma medida de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, e

$$\nu((-\infty, x]) = \mathbb{P}(f \leq x) = F_f(x). \quad (3.18)$$

¹ Neste trabalho, utilizaremos as duas notações para a função indicadora.

Nesse caso, a função $f(\cdot)$ é referida como uma variável aleatória e $F_f(\cdot)$ é a *função distribuição cumulativa* (CDF) da variável aleatória. Normalmente, a representação de uma variável aleatória é dada como no exemplo a seguir.

Exemplo 3.6 (Variável aleatória) Considere o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mathbb{P})$. Uma *variável aleatória* X é uma funções de Borel do tipo

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned} \quad (3.19)$$

que associa um valor $X(\omega)$ para cada elemento ω em Ω . Além disso,

- a variável aleatória define uma σ -álgebra $\{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{S}_\Omega$ chamada de σ -álgebra gerada por X ;
- a variável aleatória X define uma medida de probabilidade sobre o espaço de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ por $P_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$, isto é,

$$P_X(B) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B), \quad (3.20)$$

para todo $B \in \mathcal{B}$. A medida de probabilidade P_X é denominada de **distribuição** de X . ◀

Exemplo 3.7 (Processo estocástico) Um *processo estocástico* é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t \mid t \in \mathcal{I}\}$ definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mathbb{P})$. O conjunto \mathcal{I} é denominado de *conjunto indexador* do processo e representa um subconjunto de \mathbb{R} . Em especial, se $\mathcal{I} = \mathbb{N}_0$, o processo é dito ser um *processo discreto*, e se \mathcal{I} é um conjunto não-enumerável, o processo é chamado de um *processo contínuo*. O conjunto dos possíveis valores de X_t é denotado como *espaço de estado* do processo e, por sua vez, para cada $\omega \in \Omega$, a aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned} \quad (3.21)$$

é chamada de uma *realização* ou uma função amostra do processo. Ademais, para cada k -upla (t_1, t_2, \dots, t_k) de elementos de \mathcal{I}^k , o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ tem distribuição

$$P_{\mathbf{X}}(B) = \mathbb{P} \circ \mathbf{X}^{-1}(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B). \quad (3.22)$$

Nesta situação, a distribuição de probabilidade $P_{\mathbf{X}}(\cdot)$ do vetor aleatório

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ \omega &\longmapsto (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

é denominada de distribuição de dimensão finita (*finite-dimensional distribution* (fidi)) do processo $\{X_t \mid t \in \mathcal{I}\}$. ◀

No exemplo anterior, apresentamos *processo estocástico* como uma família de variáveis aleatórias $\{X_t \mid t \in \mathcal{I}\}$, indexada por um parâmetro t , em que t pertence a algum conjunto indexador \mathcal{I} . Esta definição pode ser naturalmente estendida, resultando uma versão mais abstrata, ou seja, ao invés de pensarmos os parâmetros indexadores t como medidas de tempo, estes podem ser, por exemplo, a posição de um determinado objeto numa região plana ou no espaço. Ideia esta incorporada nos *processos pontuais* estudadas na Geometria Estocástica (GAETAN; GUYON, 2009).

Portanto, o considerando o conjunto indexador \mathcal{I} como uma família de conjuntos, então a classe $\{X_B \mid B \in \mathcal{I}\}$ é designada como um **processo estocástico espacial** sobre \mathcal{I} , e cada termo X_B é tratado com uma variável aleatória. Por sua vez, cada conjunto finito $\{B_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ é denominado como uma localização amostral conforme descreve a Figura 3.4. Como num processo estocástico padrão, a importância de se estudar coleções

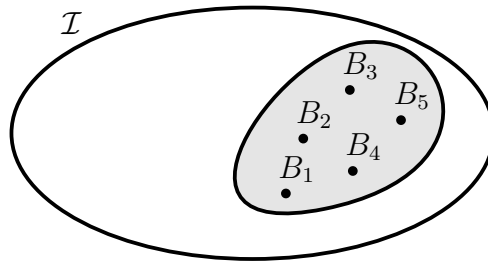


Figura 3.4 – Conjunto de localizações amostrais.

infinitas de variáveis aleatórias como em $\{X_B \mid B \in \mathcal{I}\}$, é tomar amostras finitas X_B e tentar tirar conclusões com bases nessas informações.

Finalizamos este capítulo com a discussão sobre a teoria da integração em espaços mensuráveis.

3.2.3 Teoria da integração

O desenvolvimento da *teoria da integração* é suportada sobre a teoria das funções mensuráveis. Em resumo, seja $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mu)$ um espaço mensurável, o objetivo aqui é integrar uma função $f(\cdot)$ definida sobre Ω com respeito a medida μ . Para o caso de funções não-negativas, a integração tem dois pontos de vista, o primeiro deles é:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i), \quad (3.24)$$

cujas definições são dadas em termos de *funções simples*. Nesse caso, a função $f(\cdot)$ é definida como

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad (3.25)$$

em que $\alpha_i \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ e A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de Ω dois a dois disjuntos tais que $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$.

O segundo caso, trata-se da integração de funções $f(\cdot)$ de Borel com respeito a medida μ a qual é definida como

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \, d\mu \mid \phi \in S_f \right\}. \quad (3.26)$$

Aqui, a integral de $f(\cdot)$ é dada em termos do *supremo* da coleção S_f de todas as funções simples não-negativas, as quais satisfazem a condição $\phi(\omega) \leq f(\omega)$ para qualquer $\omega \in \Omega$. Ocasionalmente, tal integral também é escrita como

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx). \quad (3.27)$$

Existe uma lista extensa de resultados e propriedades de integração de funções os quais podem ser encontrados, por exemplo, em (DUDLEY, 2002). Neste trabalho, apresentaremos somente as propriedades significantes para os nossos propósitos, as quais serão encontradas ao longo do desenvolvimento da tese. Portanto, para qualquer caso descrito acima, vale as seguintes propriedades:

- (a) $\int_{\Omega} (af + bg) \, d\mu = a \int_{\Omega} f \, d\mu + b \int_{\Omega} g \, d\mu$ para $a, b \in \mathbb{R}$;
- (b) $\int_{\Omega} \mathbf{1}_A \, d\mu = \mu(A)$;
- (c) $\int_{\Omega} \mathbf{1}_A f \, d\mu = \int_A f \, d\mu$.

Como aplicação, o **valor esperado** da variável aleatória X é definida como a integral de X com respeito a medida de probabilidade P_X , isto é,

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X. \quad (3.28)$$

Em particular, para todo $A \in \mathcal{S}_{\Omega}$, tem-se

$$\mathbb{E}\{\mathbf{1}_A\} = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A), \quad (3.29)$$

e conseqüentemente, $\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{\Omega}\} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Assim, a noção de esperança é uma extensão natural da noção de probabilidade. Por sua vez, um resultado importante que envolve esperança de variáveis aleatórias não-negativas é

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t) \, dt. \quad (3.30)$$

De fato,

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} \mathbf{1}(X > t) \, dt \right) d\mathbb{P} = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t) \, dt. \quad (3.31)$$

Mais geralmente, se X é uma variável aleatória sobre $(\Omega, \mathcal{S}_{\Omega}, \mathbb{P})$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Borel com $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$, então

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \int_{\Omega} g(X) \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega} g(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X, \quad (3.32)$$

o que conclui esta seção.

3.3 Síntese

Em termos gerais, o referido capítulo destinou-se à fundamentação no estudo dos espaços e funções mensuráveis, com ênfase aos espaços de Borel. A partir deste, introduziram-se importantes conceitos, procedimentos e resultados, em que os mesmos servirão de base para o entendimento da teoria da Geometria Estocástica. Dentre o que foi visto, destacam-se: a medida de contagem, a medida de probabilidade, variável aleatória e processo estocástico espacial. Por fim, a teoria da integração em espaços mensuráveis foi investigada com foco nos espaços de medida de probabilidade.

É importante frisar que o objetivo central deste capítulo é servir de ponto inicial aos dois próximos capítulos, onde descrevem as ideias básicas dos processos pontuais.

Introdução aos Processos Pontuais

Este capítulo é dedicado à fundamentação teórica dos processos pontuais aleatórios. Aqui, serão apresentados importantes conceitos e resultados, além de notações as quais serão bastante utilizadas ao longo da tese. Com mais detalhes, introduziremos os processos pontuais d -dimensionais seguindo a ideia de (DALEY; VERE-JONES, 2008), cuja proposta fundamenta-se em espaços topológicos metrizáveis os quais foram devidamente apresentados no capítulo anterior. Em geral, os processos pontuais fornecem modelos para padrões irregulares ou descrevem configurações aleatórias de pontos no espaço d -dimensional. Matematicamente, um processo pontual pode ser descrito por duas maneiras equivalentes (BADDELEY *et al.*, 2007):

- medida de contagem aleatória;
- conjuntos fechados aleatórios.

Neste trabalho, focaremos no primeiro caso, em que os processos pontuais são usados para modelar conjuntos aleatórios de pontos discretos. Mais detalhes sobre o caso de conjuntos fechados aleatórios podem ser encontrados em (MOLCHANOV, 2005). Por sua vez, um rigoroso tratamento matemático dos processos pontuais, em termos de medida de contagem, pode ser encontrado nas seguintes livros-textos: (STOYAN; KENDALL; MECKE, 1996; DALEY; VERE-JONES, 2008; BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009a; HAENGGI, 2013).

4.1 Processo pontual como uma medida de contagem aleatória

Nesta seção, introduzimos alguns conceitos preliminares baseados em espaços topológicos metrizáveis e espaços, objetos de estudo do capítulo precedente, para então definirmos um processo pontual como uma medida de contagem aleatória.

Seja $(\mathbf{M}, \mathcal{B}^d)$ um espaço topológico metrizável sobre \mathbb{R}^d , em que \mathcal{B}^d é a σ -álgebra de Borel. Define-se o *espaço dos subconjuntos de \mathbf{M} localmente finitos* como sendo o seguinte conjunto

$$N_{\text{lf}} = \left\{ E \subset \mathbf{M} \mid \#(E \cap \mathcal{O}) < \infty, \text{ para todo } \mathcal{O} \in \mathcal{B}_0^d \right\}, \quad (4.1)$$

em que, \mathcal{B}_0^d é classe dos conjuntos limitados de Borel em \mathbb{R}^d . Assim, para cada $E \in N_{\text{lf}}$, a função de Borel $\mu_E : \mathcal{B}_0^d \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\mu_E(\mathcal{O}) = \#(E \cap \mathcal{O}) \quad (4.2)$$

é uma medida de contagem. Uma vez que, cada elemento $E \in N_{\text{lf}}$ é um subconjunto do espaço euclidiano d -dimensional \mathbb{R}^d , segue que cada elemento de N_{lf} é chamado de uma configuração pontual localmente finita (*locally finite point configuration*, do inglês) ou simplesmente uma configuração do espaço dos subconjuntos de \mathbf{M} localmente finitos. Na sequência, seja N_{lf}^* a coleção de todas as configurações de \mathbf{M} , mediante a seguinte restrição

$$N_{\text{lf}}^* = \left\{ E \in N_{\text{lf}} \mid \#(E \cap A) = k, k \in \mathbb{N}_0, A \in \mathcal{B}_0^d \right\}. \quad (4.3)$$

Como comentado na Subseção 3.2.1, $\sigma(N_{\text{lf}}^*)$ é a menor σ -álgebra contendo o conjunto N_{lf}^* . Desta forma, um **processo pontual** Φ on $(\mathbf{M}, \mathcal{B}^d)$ aplicação mensurável (MÖLLER; WAAGEPETERSEN, 2004)

$$\begin{aligned} \Phi : (\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mathbb{P}) &\longrightarrow (N_{\text{lf}}^*, \sigma(N_{\text{lf}}^*)) \\ \omega &\longmapsto \Phi^\omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ um termo Φ^ω o qual é um subconjunto de N_{lf}^* . Consequentemente, tem-se $\#(\Phi^\omega \cap \mathcal{O}) < \infty$, para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{B}_0^d$.

Agora, fixando-se um conjunto limitado de Borel, como por exemplo, $\mathcal{O} = \mathbf{B}$, a cardinalidade de $\#(\Phi^\omega \cap \mathbf{B})$ pode ser escrita, equivalentemente, como

$$\#(\Phi^\omega \cap \mathbf{B}) = \sum_{x \in \Phi^\omega} \mathbf{1}(x \in \mathbf{B}). \quad (4.5)$$

Portanto, o processo pontual Φ gera uma **medida de contagem aleatória**, a qual é caracterizada pela contagem do número de pontos pertencentes ao conjunto limitado de Borel $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$. Por sua vez, denotando por $N_{\mathbf{B}}$ o número de pontos em \mathbf{B} e negligenciando o parâmetro $\omega \in \Omega$, a medida de contagem aleatória é dada por

$$N_{\mathbf{B}} = \#(\Phi \cap \mathbf{B}). \quad (4.6)$$

Assim, o processo pontual tem-se uma outra simbologia matemática. Por isso, o contador $N_{\mathbf{B}}$ pode ser interpretado como uma simples variável aleatória, para cada $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$, resultando desta forma a aplicação

$$N_{\mathbf{B}} : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0. \quad (4.7)$$

Noutros termos, o conjunto $\{N_{\mathbf{B}} \mid N_{\mathbf{B}} \in \mathcal{B}_0^d\}$ é um processo estocástico espacial indexado pela família de conjuntos limitados de Borel \mathcal{B}_0^d .

Na sequência, seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de vetores aleatórios sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mathbb{P})$ tal que:

- (i) $X_i : (\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_0^d)$, para todo $i = 1, 2, \dots$;
- (ii) $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(X_i \in \mathbf{B}) < \infty$, para todo $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$.

Desta maneira, a medida de contagem aleatória $N_{\mathbf{B}}$, também pode ser escrita como

$$N_{\mathbf{B}}(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(X_i(\omega) \in \mathbf{B}), \quad (4.8)$$

para cada $\omega \in \Omega$, ou simplesmente,

$$N_{\mathbf{B}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(X_i \in \mathbf{B}). \quad (4.9)$$

Mediante estas hipóteses, o processo pontual Φ , também poder escrito como uma sequência de vetores aleatórios quase sempre (*almost surely*, do inglês) distintos, isto é, $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $X_i \neq X_j$ para $i \neq j$. Isto garante que, em cada ‘região’ \mathbf{B} , existe pelo menos um ponto X_i que possa ser contado. Desta forma, tal processo é conhecido como **processo pontual simples**. Além disso,

$$\#(\Phi \cap \mathbf{B}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(X_i \in \mathbf{B}). \quad (4.10)$$

Como esperado, a medida de contagem aleatória fica dada por

$$N_{\mathbf{B}} = \#(\Phi \cap \mathbf{B}). \quad (4.11)$$

Desde que $\Phi = \{X_1, X_2, \dots\}$ consiste de um conjunto de vetores aleatórios em \mathbb{R}^d , o processo pontual é considerado como um *conjunto aleatório enumerável* (HAENGGI, 2013). Para este trabalho, nos concentraremos neste tipo de processo o qual é também referenciado como processo pontual simples. A Figura 4.1, mostra a situação de um processo pontual simples em \mathbb{R}^2 .

Com base nas hipóteses propostas ao processo pontual simples e considerando $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma *configuração* fixada, assim é possível definir a seguinte função mensurável

$$N : (\Omega, \mathcal{S}_\Omega, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbf{N}, \sigma(\mathbf{N})), \quad (4.12)$$

onde \mathbf{N} é uma coleção de medidas de contagem localmente finitas sobre $(\mathbf{M}, \mathcal{B}^d)$, i.e.,

$$\mathbf{N} = \left\{ \nu_d \text{ on } \mathcal{B}^d \mid \nu_d(\mathcal{O}) = k \right\}, \text{ para } k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } \mathcal{O} \in \mathcal{B}_0^d. \quad (4.13)$$

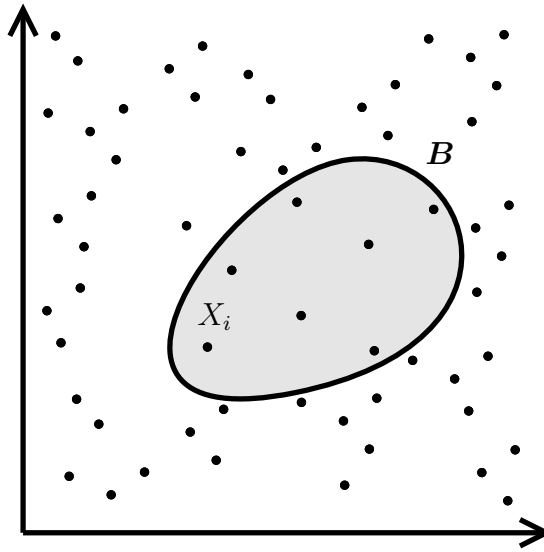


Figura 4.1 – Realização de uma processo pontual simples. Neste caso, $N_B = 7$.

e $\sigma(\mathbf{N})$ é a menor σ -álgebra contendo \mathbf{N} . Assim, N é uma variável aleatória, em que $N(\omega)$ é uma medida sobre \mathbb{R}^d . Ademais, o conjunto $\{N_B \mid N_B \in \mathcal{B}_0^d\}$ é um processo estocástico como previamente mencionado, onde

$$N_B = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(X_i \in B) = \#(\Phi \cap B). \tag{4.14}$$

como descrito em (4.9) e (4.11), respectivamente. De maneira análoga, refere-se a aplicação mensurável $N(\cdot)$ como um *processo pontual simples* devido a similaridade analítica proposta em (4.4). Como consequência, o processo pontual pode ser escrito da seguinte forma:

$$N = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{X_i} \tag{4.15}$$

ou, explicitamente considerando todos os parâmetros:

$$N_B(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(X_i(\omega) \in B). \tag{4.16}$$

Deve-se observar que

- $N_{B_0}(\omega)$ é uma variável aleatória discreta, se $B_0 \in \mathcal{B}_0^d$ é fixado;
- para qualquer $\omega_0 \in \Omega$, $N_B(\omega_0)$ é uma medida sobre a família dos conjuntos limitados de Borel \mathcal{B}_0^d .

Por um ponto de vista prático, é mais conveniente tratar a teoria do processo pontual adotando as configurações do processo como uma sequência de vetores aleatórios, devido ao fato que os resultados são naturalmente inseridos na teoria da probabilidades.

Assim, a distribuição¹ de N é a probabilidade induzida P_N sobre $(\mathbf{N}, \sigma(\mathbf{N}))$, isto é, $P_N : \mathbf{N} \rightarrow [0, 1]$ tal que,

$$P_N(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid N(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(N \in A), \text{ para todo } A \in \sigma(\mathbf{N}). \quad (4.17)$$

Desde que $N(\cdot)$ é uma aplicação mensurável, então $N^{-1}(A) \in \mathcal{S}_\Omega$, para todo $A \in \sigma(\mathbf{N})$.

Dando continuidade ao trabalho, observando N_B como uma função de \mathbf{B} , tem-se as seguintes propriedades provenientes da teoria da medida:

- (a) $N_B = 0$, se $\mathbf{B} = \emptyset$;
- (b) $N_{A \cup B} = N_A + N_B$, sempre que \mathbf{A} e \mathbf{B} conjuntos disjuntos;
- (c) seja $\mathbf{B} \subset \mathcal{B}_0^d$ e $\{\mathbf{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente em \mathcal{B}_0^d (i.e., $\mathbf{B}_n \supset \mathbf{B}_{n+1}$). Se $\mathbf{B} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{B}_n$, então a sequência de medidas $\{\mathbf{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em \mathbb{R} ($N_{\mathbf{B}_{n+1}} \leq N_{\mathbf{B}_n}$) com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\mathbf{B}_n} = N_B; \quad (4.18)$$

- (d) se $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dN = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(X_n) = \sum_{X \in \Phi} f(X). \quad (4.19)$$

Em particular, se $\mathbf{B} \subset \mathcal{B}_0^d$, então

$$\int_{\mathbf{B}} dN = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathbf{B}} \, dN = \sum_{X \in \Phi} \mathbf{1}(X \in \mathbf{B}) = N_B. \quad (4.20)$$

A próxima seção se restringirá ao estudo de propriedades dos processos pontuais, sendo algumas delas utilizadas na modelagem da interferência de uma rede sem-fio segundo a geometria estocástica.

4.2 Propriedades dos processos pontuais

A fim de simplificar o estudo dos processos pontuais, presume-se condições que preservam alguma regularidade no processo. Do ponto de vista prático, tais condições são adotadas neste trabalho de forma implícita. Portanto, para um processo pontual simples $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é assumido:

- estacionariedade;
- isotropia;

¹ Por questão de simplicidade, refere-se a distribuição de N como a distribuição de $\Phi = \{X_1, X_2, \dots\}$ e a função de probabilidade $P_N(\cdot)$ será escrita como $\mathbb{P}(\cdot)$.

- ergodicidade;
- mistura (*mixing*, do inglês),

os quais serão discutidos em mais detalhes na sequência.

4.2.1 Estacionariedade e isotropia

Em primeiro lugar, é importante lembrar de alguns resultados de álgebra linear, os quais podem ser encontrados em (HORN; JOHNSON, 1990). Seja (\mathbf{M}_1, d_1) e (\mathbf{M}_2, d_2) dois espaços métricos. A aplicação $f : \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ é dita ser uma *isometria* se para todo $x, y \in \mathbf{M}_1$, tem-se

$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)). \quad (4.21)$$

A *transformação ortogonal* $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um exemplo de isometria, a qual é uma transformação linear que preserva produto interno, ou seja,

$$\langle A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \quad (4.22)$$

Como resultado, se $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma isometria, então

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{o}) + A(\mathbf{x}), \quad (4.23)$$

em que \mathbf{o} é a origem de \mathbb{R}^d e $A(\cdot)$ é uma transformação ortogonal. Em particular, se $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, então $f(\cdot)$ é dito ser uma *rotação* em torno da origem. Assim, para cada variável aleatória X_i em \mathbb{R}^d , tem-se $f(X_i) = AX_i$, e naturalmente define-se o processo pontual:

$$A\Phi = \{AX_1, AX_2, \dots\}. \quad (4.24)$$

Por sua vez, se a transformação ortogonal é a *transformação identidade*, então claramente tem-se $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{o}) + \mathbf{x}$ e nesse caso, $f(\cdot)$ é chamada de uma *translação*. Similarmente ao caso anterior, fazendo-se $f(\mathbf{o}) = \mathbf{b}$, isto define o seguinte conjunto aleatório:

$$\Phi + \mathbf{b} = \{X_1 + \mathbf{b}, X_2 + \mathbf{b}, \dots\}. \quad (4.25)$$

Portanto, um processo pontual Φ on \mathbb{R}^r é **estacionário** se para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, a distribuição do processo pontual transladado $\Phi + \mathbf{b}$ é a mesma de Φ . Simbolicamente,

$$\Phi \stackrel{d}{=} \Phi + \mathbf{b}. \quad (4.26)$$

Por sua vez, um processo pontual Φ é **isotrópico** se sua distribuição é invariante sobre rotações em torno da origem, ou

$$\Phi \stackrel{d}{=} A\Phi, \quad (4.27)$$

isto é, a distribuição de $A\Phi$ tem a mesma distribuição de Φ , para toda transformação ortogonal $A(\cdot)$.

4.2.2 Ergodicidade e *mixing*

Agora, vamos brevemente introduzir as ideias *ergodicidade* e *mixing* sobre Φ , sendo este uma aplicação mensurável (primeira proposta para processo pontual). A fim de preservar o argumento teórico da Teoria da Informação, a qual garante sob certas condições que toda informação a respeito de um processo está contida em apenas uma realização, a partir de uma janela de amostragem suficientemente grande (COVER; THOMAS, 2006), para a definição de ergodicidade e *mixing*, faz-se necessário incluir o conceito de sequência de janelas médias (*sequence of averaging windows*, do inglês). Especificamente, uma sequência de janelas médias $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de um conjunto limitado de Borel (i.e., $W_n \in \mathcal{B}_0^d$) segue as seguintes condições, para todo $n \in \mathbb{N}$:

- (i) W_n é um conjunto convexo;
- (ii) ela é uma sequência crescente ($W_n \subset W_{n+1}$)
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{r \mid B_r(\mathbf{x}) \subset W_n, \text{ para algum } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\} = \infty$.

Finalmente, o processo pontual é **ergódico** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} P_\Phi((A + \mathbf{x}) \cap B) d\mathbf{x} = P_\Phi(A)P_\Phi(B) \quad (4.28)$$

e **mixing** se

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} P_\Phi((A + \mathbf{x}) \cap B) = P_\Phi(A)P_\Phi(B), \quad (4.29)$$

para todo $A, B \in \sigma(N_{\text{lf}}^*)$ e para cada W_n .

De acordo com (HAENGGI, 2013), a condição de ergodicidade é em geral muito difícil de verificar diretamente. Assim, na prática utiliza-se um resultado auxiliar que também é um critério de ergodicidade, o qual fornece uma conexão entre ergodicidade, estacionariedade e *mixing*. Tal resultado diz que: se um processo pontual é simultaneamente, estacionário e *mixing*, então o processo pontual é ergódico. Encontra-se a prova desta afirmação, por exemplo, em (DALEY; VERE-JONES, 2008).

Na sequência, investigaremos algumas formas de caracterizar estatisticamente um processo pontual por meio das seguintes transformações: *função geradora de momento*, *função característica*, *transformada de Laplace-Stieltjes*, dentre outras.

4.3 Caracterização das distribuições dos processos pontuais

Estatisticamente, a distribuição de um processo pontual $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é completamente especificado para algumas formas:

- probabilidades nulas ou vazias;

- distribuições dimensionais finitas (fidis);
- funcionais de Laplace;
- funcionais geradores de probabilidade.

4.3.1 Probabilidades vazias

A **probabilidades vazia** de um processo pontual refere-se a probabilidades da não existência de pontos em um conjunto de Borel limitado $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$, isto é,

$$V(\mathbf{B}) = \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0) \quad (4.30)$$

Equivalentemente, a Equação (4.30) pode ser analisada a partir dos **indicadores vazios** como em (BADDELEY *et al.*, 2007)

$$\begin{aligned} V(\mathbf{B}) &= \mathbf{1}(N_{\mathbf{B}} = 0) \\ &= \mathbf{1}(\{\text{não há pontos existentes em } \mathbf{B}\}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

O comportamento de processo pontual segundo a probabilidade vazia é ilustrado na Figura 4.2. É importante comentar que um processo pontual é unicamente determinado

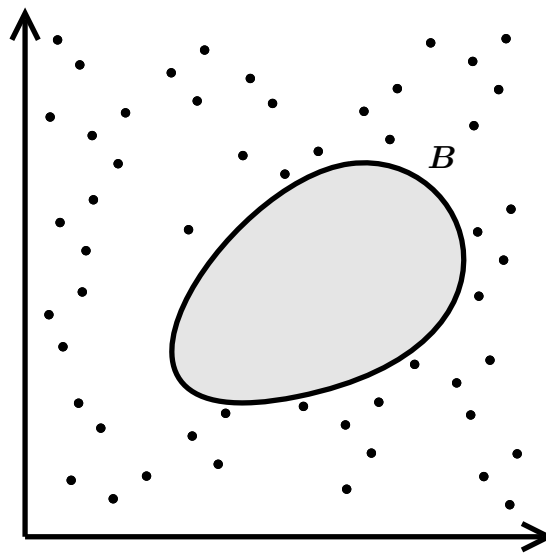


Figura 4.2 – Probabilidade vazia $V(\mathbf{B})$ para um processo pontual simples.

pelos probabilidades vazias (MØLLER; WAAGEPETERSEN, 2004).

4.3.2 Distribuições dimensionais finitas

A distribuição de Φ é também unicamente determinada pela família de **distribuições dimensionais finitas** (fidis) dos vetores aleatórios

$$(N_{\mathbf{B}_1}, N_{\mathbf{B}_2}, \dots, N_{\mathbf{B}_k}) \quad (4.32)$$

para todo vetor finito $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k)$ de conjuntos limitados de Borel $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$ com $i = 1, 2, \dots, k$. Em outros termos, se dois processos pontuais compartilham a mesma família de fidis, então eles são iguais em distribuição. Conseqüentemente, se o processo Φ é estacionário e isotrópico, tem-se:

(i) estacionariedade

$$(N_{\mathbf{B}_1}, N_{\mathbf{B}_2}, \dots, N_{\mathbf{B}_k}) \stackrel{d}{=} (N_{\mathbf{B}_1+\mathbf{x}}, N_{\mathbf{B}_2+\mathbf{x}}, \dots, N_{\mathbf{B}_k+\mathbf{x}})$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ e $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k)$ em \mathcal{B}_0^d .

(ii) isotropia

$$(N_{\mathbf{B}_1}, N_{\mathbf{B}_2}, \dots, N_{\mathbf{B}_k}) \stackrel{d}{=} (N_{A\mathbf{B}_1}, N_{A\mathbf{B}_2}, \dots, N_{A\mathbf{B}_k})$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$, para qualquer rotação A e $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k)$ em \mathcal{B}_0^d .

Ademais, os fidis especificam as probabilidades de todos os eventos da forma

$$\{N_{\mathbf{B}_1} = n_1, N_{\mathbf{B}_2} = n_2, \dots, N_{\mathbf{B}_k} = n_k\} \quad (4.33)$$

com $n_i \in \mathbb{N}_0$ e $i = 1, 2, \dots, k$. Portanto, existem infinitas distribuições que descrevem um processo pontual. Notes que as probabilidades vazias são casos particulares dos fidis.

4.3.3 Funcional de Laplace e Funcional gerador de probabilidade

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ o espaço de todas funções não-negativas, mensuráveis e limitadas. O **funcional de Laplace** $L_N[\cdot]$ de um processo pontual $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma aplicação do conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ em \mathbb{R} , isto é, $L_N : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+) \rightarrow [0, \infty)$ a qual é definida como

$$\begin{aligned} L_N[f] &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} f \, dN \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \sum_{X \in \Phi} f(X) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como resultado, o funcional de Laplace determina unicamente a distribuição $\mathbb{P}(\cdot)$ do processo pontual Φ . Com efeito, considere a função não-negativa $f_s(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ definida por

$$f_s = s_1 \mathbf{1}_{\mathbf{B}_1} + s_2 \mathbf{1}_{\mathbf{B}_2} + \dots + s_k \mathbf{1}_{\mathbf{B}_k}, \quad (4.35)$$

em que $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ é um vetor de \mathbb{R}^k com $s_i \geq 0$, e $\mathbf{B}_i \in \mathcal{B}_0^d$, $i = 1, 2, \dots, k$. Assim, aplicando-se o funcional de Laplace em $f_s(\cdot)$ tem-se

$$\begin{aligned} L_N[f_s] &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \sum_{X \in \Phi} f_s(X) \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \{ \exp (-(s_1 N_{\mathbf{B}_1} + s_2 N_{\mathbf{B}_2} + \dots + N_{\mathbf{B}_k})) \}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Esta última expressão é a conhecida transformada de Laplace de um vetor aleatório em \mathbb{R}^k , a qual determina de maneira única a distribuição do vetor $(N_{\mathbf{B}_1}, N_{\mathbf{B}_2}, \dots, N_{\mathbf{B}_k})$. Consequentemente, a coleção $L_N[f_s]$ (com $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$) determina todos os fidis do processo pontual. Por sua vez, desde que os fidis de $N(\cdot)$ determinam a distribuição $P(\cdot)$, então está provada a afirmação.

Por outro lado, o **funcional gerador de probabilidade** também fornece uma conveniente forma de representar os fidis e, assim especificar unicamente o processo pontual. O funcional gerador de probabilidade $G_N[\cdot]$ de Φ é definido por

$$\begin{aligned} G_N[g] &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \ln g \, dN \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\sum_{X \in \Phi} \ln g(X) \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \prod_{X \in \Phi} g(X) \right\}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

em que, $g(\cdot)$ pertence a família de todas as funções mensuráveis $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ tal que $1 - g$ tem suporte limitado. Tal família será representada por $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$. A seguir são apresentadas algumas aplicações deste funcional:

- (a) $G_N[h] = L_N[-\ln h]$ (uma relação entre os funcionais de Laplace de gerador de probabilidade);
- (b) sejam $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$ e $g(\mathbf{x}) = t^{\mathbf{1}(\mathbf{x} \in \mathbf{B})}$, com $t \in [0, 1]$. Então, $G_N[g] = \mathbb{E}\{t^{N_{\mathbf{B}}}\}$, cuja igualdade é um função de probabilidade para $N_{\mathbf{B}}$.

Com o objetivo de resumir as questões tratadas nesta subseção, a seguir apresentaremos um resultado que comprova a equivalência entre os funcionais que caracterizam os processos pontuais. Então, para os processos pontuais simples

$$M = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Y_i} \quad \text{e} \quad N = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{X_i}, \tag{4.38}$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $M \stackrel{d}{=} N$;
- (ii) $(M_{\mathbf{B}_1}, M_{\mathbf{B}_2}, \dots, M_{\mathbf{B}_k}) \stackrel{d}{=} (N_{\mathbf{B}_1}, N_{\mathbf{B}_2}, \dots, N_{\mathbf{B}_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ em \mathcal{B}_0^d ;
- (iii) $V_M(\mathbf{B}) = V_N(\mathbf{B})$ for all $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$ (probabilidades vazias);
- (iv) $L_M[f] = L_N[f]$, para todo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$;
- (v) $G_M[g] = G_N[g]$, para todo $g \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

O principal objeto de estudo da seção seguinte é o desenvolvimento de *Teorema de Campbell* o qual nos permite determinar a esperança de uma soma aleatória indexada pelos pontos de um processo pontual. Contudo, necessita-se de uma definição preliminar chamada de intensidade de medida como mostra a seguir.

4.4 Intensidade de medida e Teorema de Campbell

A **intensidade de medida** ou **primeiro momento** de um processo pontual $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma função real não-negativa $\Lambda : \mathcal{B}_0^d \rightarrow [0, \infty)$ definida como o número esperado de pontos do processo Φ que caem em $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{B}) &= \mathbb{E}\{N_{\mathbf{B}}\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(X_n \in \mathbf{B})\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\sum_{X \in \Phi} \mathbf{1}(X \in \mathbf{B})\right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Note que a intensidade de medida $\Lambda(\cdot)$ é uma medida de Borel.

Por outro lado, desde que $N_{\mathbf{B}}$ é uma medida de contagem aleatória, então por similaridade ao valor esperado de uma variável aleatória (ver Eq. (3.28)), a intensidade de medida $\mu(\cdot)$ fica dada por

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{B}) &= \int_{\mathcal{N}} \nu(\mathbf{B}) \mathbb{P}(d\nu) \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{\mathcal{N}} \sum_{X \in \Phi'} \mathbf{1}(X \in \mathbf{B}) \mathbb{P}(d\nu) \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(\mathbf{x} \in \mathbf{B}) \nu(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\nu) \\ &\stackrel{(c)}{=} \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbf{B}} \nu(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\nu) \\ &= \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbf{B}} d\nu d\mathbb{P}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Neste caso, nota-se que em (a) a medida $\nu(\cdot)$ é uma medida de contagem localmente finita, enquanto (b) e (c) seguem da Equação (4.20). Além de tudo, motivado pela Equação (4.19), para qualquer função mensurável $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se

$$\mathbb{E}\{f(N_{\mathbf{B}})\} = \int_{\mathcal{N}} f(\nu(\mathbf{B})) \mathbb{P}(d\nu), \quad (4.41)$$

a qual denota uma extensão do conceito de medida de intensidade.

Agora, se $\Lambda(\cdot)$ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue, então existe uma função mensurável de Borel $\lambda : \mathcal{B}_0^d \rightarrow [0, \infty)$, tal que (GELFAND *et al.*, 2010)

$$\Lambda(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{B}} \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.42)$$

A função não-negativa $\lambda(\cdot)$ é chamada de uma **função de intensidade** do processo pontual Φ , e se a função intensidade é constante, então Φ é dita ser **homogênea**, caso contrário o processo pontual é **não-homogêneo**. Em particular, se Φ é estacionário, isto implica que medida de intensidade é invariante com respeito a translação. De fato,

$$\Lambda(\mathbf{B}) = \mathbb{E}\{N_{\mathbf{B}}\} = \mathbb{E}\{N_{\mathbf{B}+\mathbf{x}}\} = \Lambda(\mathbf{B} + \mathbf{x}). \quad (4.43)$$

Agora, a partir de resultados conhecidos de teoria da medida, este último resultado também implica que existe um número real não-negativo tal que (ILLIAN *et al.*, 2008)

$$\Lambda(\mathbf{B}) = \lambda \nu_d(\mathbf{B}), \quad (4.44)$$

em que $\nu_d(\cdot)$ é a medida de Borel d -dimensional. Assim,

$$\lambda = \frac{\mathbb{E}\{N_{\mathbf{B}}\}}{\nu_d(\mathbf{B})} \quad (4.45)$$

O mesmo resultado é obtido para processos pontuais não-homogêneos.

A constante λ é chamada de **intensidade** do processo pontual. Conseqüentemente, uma estimativa natural da intensidade é dada por

$$\hat{\lambda} = \frac{N_{\mathbf{B}}}{\nu_d(\mathbf{B})}, \quad (4.46)$$

pois,

$$\mathbb{E}\{\hat{\lambda}\} = \frac{\mathbb{E}\{N_{\mathbf{B}}\}}{\nu_d(\mathbf{B})} = \frac{\Lambda(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{B})} = \lambda. \quad (4.47)$$

A análise o caso de não-homogeneidade é proposta por (MØLLER; WAAGEPETERSEN, 2004). Por sua vez, a intensidade λ pode ser interpretada como uma média de pontos de Φ por unidade volume d -dimensional como descrito a seguir:

$$\lambda = \mathbb{E}\{N_{[0,1]^d}\}. \quad (4.48)$$

Ao longo deste trabalho, referimos o conjunto $\mathbf{W} = [a, b]^d = \prod_{i=1}^d [a, b]$ como uma *janela de observação* do processo. Uma realização de um processo pontual sobre uma janela de observação em \mathbb{R}^d é representada na figura a seguir. Aqui, a média de pontos do processo que caem em \mathbf{W} , por unidade de área determina a intensidade do processo pontual.

4.4.1 A média de uma soma aleatória de um processo pontual

A importância de função de intensidade ficará mais evidente a partir da média de uma soma aleatória indexada pelos pontos de um processo pontual, tal resultado é denominado de **Teorema de Campbell**, como descreve a seguir.

Seja $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um processo pontual em \mathbb{R}^d com intensidade de medida $\Lambda(\cdot)$ e, considere a função mensurável $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Segue que,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dN = \sum_{X \in \Phi} f(X) \quad (4.49)$$

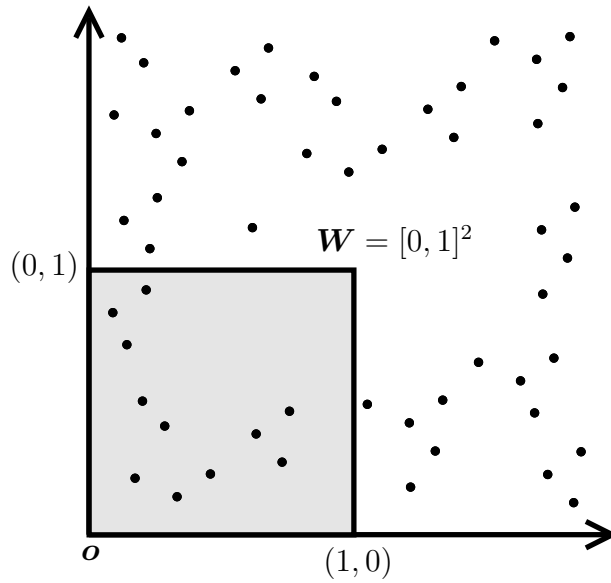


Figura 4.3 – Realização de um processo pontual (não-estacionário) mediante uma janela de observação em \mathbb{R}^2 .

é uma variável aleatória e,

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{X \in \Phi} f(X) \right\} = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\Lambda. \quad (4.50)$$

Em particular, se Φ é estacionário, temos que $\Lambda(\mathbf{B}) = \lambda \nu_d(\mathbf{B})$, para algum $\lambda > 0$, para todo $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$ e

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{X \in \Phi} f(X) \right\} = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_d = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (4.51)$$

A prova deste último resultado requer a aplicação do Teorema de Fubini (DUDLEY, 2002). Em primeiro lugar, baseado em (4.49), definamos a função

$$g_N(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, dN = \sum_{X \in \Phi} f(X) \quad (4.52)$$

Tomando o operador esperança em $g(\cdot)$, tem-se (HAENGGI; GANTI, 2008)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{X \in \Phi} f(X) \right\} &= \mathbb{E}\{g_N(\Phi)\} \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{\mathcal{N}} g_N(\Phi') \mathbb{P}(d\nu) \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{\mathcal{N}} \sum_{X \in \Phi'} f(X) \mathbb{P}(d\nu) \\ &\stackrel{(c)}{=} \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \nu(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\nu) \\ &\stackrel{(d)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{N}} \nu(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\nu) \\ &\stackrel{(e)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \Lambda(d\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Aqui, (a) é segue da Equação (3.32), (b) é uma simples aplicação da definição de $g(\cdot)$, com $\Phi' = \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sendo uma sequência arbitrária de variáveis aleatórias, (c) segue as hipótese do teorema de Campbell (Eq. (4.49)), (d) é a aplicação do teorema de Fubini e, finalmente, (e) é basicamente a primeira igualdade de (4.40).

Finalizemos este capítulo investigando a distância entre pontos de um processo pontual.

4.5 Distâncias em processos pontuais

Em Geometria Estocástica, as técnicas clássicas de investigação entre a interação entre pontos surgem, em algumas situações, a partir dos métodos de distância, ou seja, mediante à medidas de distância entre pontos. A abordagem geral dos métodos consiste em calcular função de distribuição empírica de um padrão pontual e compará-la com uma função de distribuição teórica. Aqui, nos concentraremos nos seguintes critérios de distância para processos pontuais (BADDELEY *et al.*, 2007):

- distância do vizinho mais próximo;
- distância de contato.

Especificamente, seja $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um processo pontual, a *distância do vizinho mais próximo* representa a distância de um específico ponto X_i em Φ a um outro ponto $X_j \in \Phi$ sendo este o mais próximo de X_i . Simbolicamente, a distância do ponto mais próximo de $X \in \Phi$ é um número

$$\text{dist}(X, \Phi \setminus \{X\}) = \inf_{Y \in \Phi \setminus \{X\}} \{d(Y, X)\}. \quad (4.54)$$

Como consequência dessa definição, as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\text{dist}(X, \Phi \setminus \{X\}) > r, \text{ se, e somente se, } N_{\mathcal{B}(X;r)} = 0. \quad (4.55)$$

Por sua vez, a *distância de contato* é a distância a partir de um determinado ponto \mathbf{p} in \mathbb{R}^d ao ponto mais próximo do processo pontual of Φ . Assim,

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \Phi) = \inf_{Y \in \Phi} \{d(Y, \mathbf{p})\}. \quad (4.56)$$

e

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \Phi) > r, \text{ se, e somente se, } N_{\mathcal{B}(\mathbf{p};r)} = 0. \quad (4.57)$$

As duas situações são mostradas na Figura 4.4, onde os pontos indicados por (o) representam pontos fixos de \mathbb{R}^2 , os quais não pertencem a Φ , e os pontos indicados por (•) representam os efetivos pontos do processo pontual. As linhas sólidas ilustram a distância

entre os pontos do processos aos seus respectivos vizinho mais próximos, enquanto que as linhas tracejadas indicam a distância entre os pontos do plano com seus respectivos vizinhos mais próximo do processo pontual.

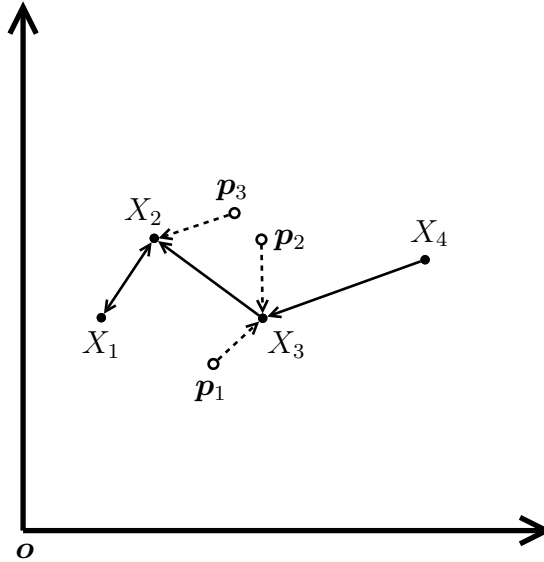


Figura 4.4 – A distância de contato e a distância do vizinho mais próximo.

4.5.1 A função de distribuição da distância do vizinho mais próximo

Com base na afirmação dada na Equação (4.54), a distância $\text{dist}(X, \Phi \setminus \{X\})$ de um ponto X ao seu vizinho mais próximo em Φ tem a seguinte CDF:

$$G_X(r) = \mathbb{P}(\text{dist}(X, \Phi \setminus \{X\}) \leq r) = 1 - \mathbb{P}(N_{\mathcal{B}(X;r)} = 0), \quad r \geq 0, \quad X \in \Phi, \quad (4.58)$$

a qual é referenciada como a **função de distribuição da distância do vizinho mais próximo**. Se Φ , então obtém-se os seguintes resultados:

- (i) a CDF $G_X(\cdot)$ não depende da variável aleatória X , i.e., $G_X(\cdot) = G(\cdot)$;
- (ii) dada uma janela de observação \mathbf{W} , a função de distribuição empírica da função de distribuição da distância do vizinho mais próximo é dada por:

$$\hat{G}(r) = \frac{1}{\nu_d(\mathbf{W}_{-r})} \sum_{X \in \Phi \cap \mathbf{W}_{-r}} \mathbf{1}(\text{dist}(X, \Phi \setminus \{X\}) \leq r), \quad (4.59)$$

em que $\mathbf{W}_{-r} \subset \mathbf{W}$ e $\mathbf{W}_{-r} = \{X \in \mathbf{W} \mid \text{dist}(X, \partial \mathbf{W}) \geq r\}$ (BADDELEY *et al.*,

2007). Este é um estimador de $G(\cdot)$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\widehat{G}(r)\} &= \frac{1}{\nu_d(\mathbf{W}_{-r})} \mathbb{E}\left\{ \int_{\mathbf{W}_{-r}} \mathbf{1}(\text{dist}(\mathbf{x}, \Phi \setminus \{\mathbf{x}\}) \leq r) d\mathbf{x} \right\} \\
 &= \frac{1}{\nu_d(\mathbf{W}_{-r})} \int_{\mathbf{W}_{-r}} \mathbb{E}\{\mathbf{1}(\text{dist}(\mathbf{x}, \Phi \setminus \{\mathbf{x}\}) \leq r)\} d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{\nu_d(\mathbf{W}_{-r})} \int_{\mathbf{W}_{-r}} \mathbb{P}\{\text{dist}(\mathbf{x}, \Phi \setminus \{\mathbf{x}\}) \leq r\} d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{\nu_d(\mathbf{W}_{-r})} \int_{\mathbf{W}_{-r}} G(r) d\mathbf{x} \\
 &= G(r).
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Uma realização de um processo pontual sobre uma janela de observação é mostrada na Figura 4.5, a qual é visualizada em termos da distância do vizinho mais próximo.

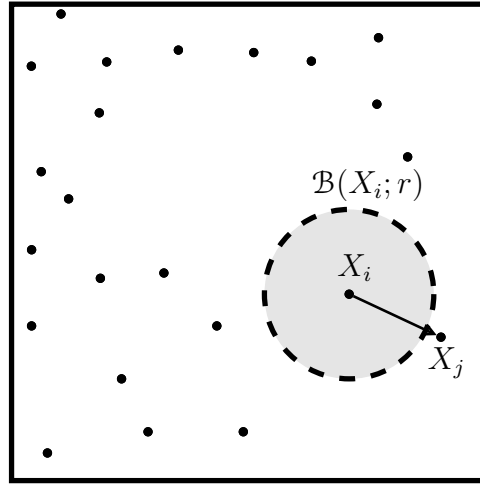


Figura 4.5 – Realização de um processo pontual para o caso da distância do vizinho mais próximo

4.5.2 Função de distribuição da distância de contato

De modo semelhante ao caso anterior, a **função de distribuição da distância de contato** ou a **função de espaço vazio** é definida por:

$$F_p(r) = \mathbb{P}(\text{dist}(\mathbf{p}, \Phi) \leq r) = 1 - \mathbb{P}(N_{\mathcal{B}(\mathbf{p}; r)} = 0), \quad r \geq 0, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d. \tag{4.61}$$

Ademais, se o processo é estacionário, tem-se:

- (i) a CDF $F_p(\cdot)$ não depende da escolha do ponto \mathbf{p} , i.e., $F_p(\cdot) = F(\cdot)$. Aqui, o ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ é denominado de *localização de referência arbitrária*.
- (ii) dada uma configuração finita de pontos $\mathcal{X} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$ em uma janela de observação, a função de distribuição empírica da função de espaço vazio é dada por:

$$\hat{F}(r) = \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{X} \cap \Phi} \mathbf{1}(\text{dist}(\mathbf{p}, \Phi) \leq r). \quad (4.62)$$

Por fim, uma realização de um processo pontual para o caso da distância de contato é ilustrada na figura seguinte.

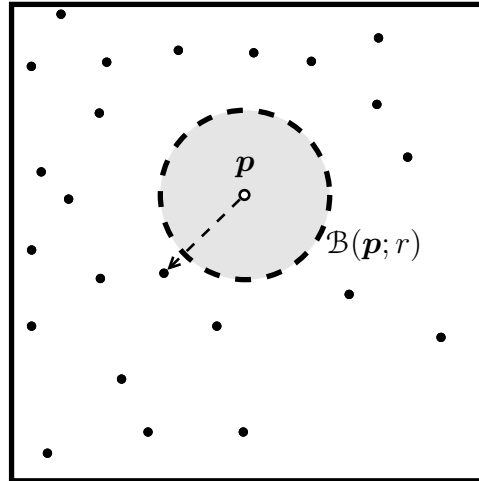


Figura 4.6 – Realização de um processo pontual para o caso da distância de contato.

O próximo resultado comenta da relação entre os métodos de distâncias estudadas nesta subseção.

4.5.3 A função J

Mediante a hipótese de que o processo pontual Φ é estacionário, define-se uma função que permite comparar a distância do vizinho mais próximo e a distância de contato. Tal função é denominada de função J (*J-function*, do inglês), a qual é definida por

$$J(r) = \frac{1 - G(r)}{1 - F(r)}. \quad (4.63)$$

Com um pouco mais de detalhes, a função J indica o comportamento ou a interação entre os pontos mediante uma janela de interação. (LIESHOUT; BADDELEY, 1996), mostrou que para valores da função J menores ou iguais a 1, isto indica que os pontos do processo estão bem aglomerados, enquanto para $J(r) > 1$, indicar uma maior regularidade da distribuição espacial dos pontos. Em particular, para um *processo pontual de Poisson* com intensidade λ , tem-se $J(r)$, isto é, $G(r) = F(r)$.

4.6 Síntese

Neste capítulo, introduziu-se a Geometria Estocástica segundo a teoria dos processos pontuais e foram apresentadas importantes propriedades, tais como: estacionariedade,

isotropia, ergodicidade e *mixing*. Na sequência, mediante a hipótese de que um processo pontual pode ser dado a partir de uma medida de contagem aleatória, definiu-se processo pontual simples e foi apresentada uma lista de operadores que caracterizam a distribuição de um processo. Por sua vez, estudou-se o Teorema de Campbell a partir da intensidade do processo pontual. Por fim, investigou-se métodos para determinar a distância entre pontos do processo.

Para o capítulo subsequente, investigaremos os principais processos encontrados na literatura em se tratando de redes *ad-hoc* sem-fio. Dentre eles, daremos destaque ao processo pontual marcado, o qual será objeto de estudo desta tese.

Processo Pontual de Poisson

No capítulo anterior introduziu-se o estudo dos processos pontuais, onde apresentou-se importantes resultados os quais serão utilizados na sequência deste trabalho. Dentre eles destacam-se a medida de intensidade e o Teorema de Campbell. Para este capítulo, apresentaremos os principais processo pontuais estudados na literatura dentre os quais daremos ênfase aos processos denominados de *processo pontual de Poisson* e *processo pontual marcado*, devido ao fato das aplicações destes na modelagem dos nós interferentes em redes *ad-hoc* sem-fio, cuja proposta será inserida em nosso trabalho nos capítulos posteriores. Além destes resultados, também apresentaremos uma versão do Teorema de Campbell para os processos pontuais marcados.

5.1 Processo pontual binomial

Começamos esta seção apresentando um dos processos pontuais mais simples, chamado de **processo pontual binomial** (*binomial point process* (BPP), do inglês). Seja $\mathbf{W} \subset \mathcal{B}_0^d$ um conjunto de Borel limitado de medida estritamente positiva $\nu_d(\mathbf{W})$ e seja $f(\cdot)$ uma função densidade de probabilidade definida no conjunto limitado de Borel $\mathbf{B} \subset \mathbf{W}$. Fixando um número inteiro não-negativo $k \in \mathbb{N}_0$, o processo pontual $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ consistindo de k variáveis independentes e identicamente distribuídas X_1, X_2, \dots, X_k com densidade $f(\cdot)$, é denominada de *processo pontual binomial* de k pontos em \mathbf{W} . Como notação, escreve-se:

$$\Phi \sim \text{binomial}(\mathbf{B}, k, f). \quad (5.1)$$

Assim, para um BPP consistindo de apenas um único ponto, tem-se:

$$\mathbb{P}(X_i \in \mathbf{B}) = \frac{\int_{\mathbf{B}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\mathbf{W}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} = \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}. \quad (5.2)$$

Notemos que cada variável X_i da sequência X_1, X_2, \dots, X_k é uniformemente distribuída em \mathbf{W} . Além disso, esta igualdade significa que a probabilidade do ponto X_i do processo

pertencer ao conjunto $\mathbf{B} \subset \mathbf{W}$ é igual a razão entre as medidas dos conjuntos \mathbf{B} e \mathbf{W} . A Figura 5.1 representa uma situação de BPP de um único ponto.

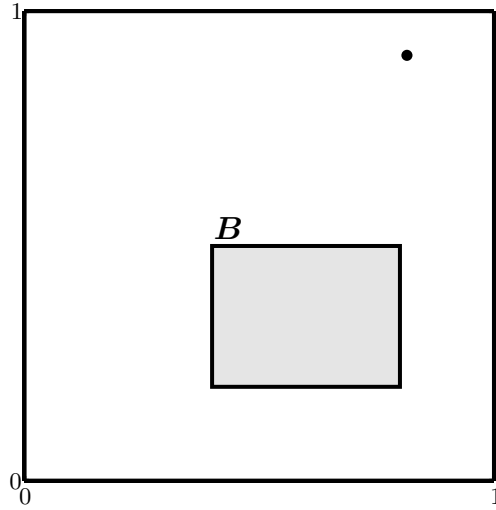


Figura 5.1 – O ponto aleatório X_i é uniformemente distribuído na janela de observação $\mathbf{W} = [0, 1]^2$.

Pelo apresentado no capítulo anterior, o número de pontos que caem no conjunto limitado de Borel $\mathbf{B} \subset \mathbf{W}$ é dado pela seguinte medida de contagem

$$N_{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i \in \mathbf{B}) \quad (5.3)$$

a qual segue um distribuição binomial com parâmetro n e função densidade $f_{\mathbf{B}}(\cdot) = \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}$, i.e.,

$$N_{\mathbf{B}} \sim \text{binomial}\left(\mathbf{B}, n, \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}\right). \quad (5.4)$$

Mais especificamente,

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}\right)^k \left(1 - \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

Equivalentemente, um BPP definido sobre um conjunto limitado de Borel \mathbf{B} in \mathbf{W} é uma superposição de n pontos i.i.d. e uniformemente distribuídos sobre um conjunto \mathbf{W} . A seguir, uma simulação para $n = 25$ e $\mathbf{W} = [0, 1]^2$ é representado na Figura 5.2.

Na sequência, baseada na Equação (5.5), nota-se que as *probabilidades vazias* de tal processo pontual são dadas por:

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0) = \frac{(\nu_d(\mathbf{W}) - \nu_d(\mathbf{B}))^n}{\nu_d(\mathbf{W})^n}. \quad (5.6)$$

Agora, em termos dos fidis, o BPP é unicamente determinado por

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}_1} = n_1, N_{\mathbf{B}_2} = n_2, \dots, N_{\mathbf{B}_k} = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \cdot \frac{\nu_d(\mathbf{B}_1)^{n_1} \nu_d(\mathbf{B}_2)^{n_2} \dots \nu_d(\mathbf{B}_k)^{n_k}}{\nu_d(\mathbf{W})^n}, \quad (5.7)$$

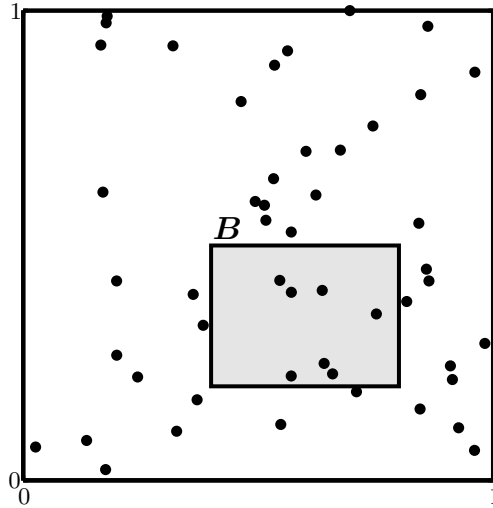


Figura 5.2 – Realização de um processo pontual binomial de 25 pontos em um quadrado de área unitária.

em que $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ são conjuntos disjuntos tais que $\bigcup_{i=1}^k \mathbf{B}_i = \mathbf{W}$ e $\sum_{i=1}^k n_i = n$. A respectiva distribuição é conhecida como *distribuição multinomial* com parâmetros:

$$n, \frac{\nu_d(\mathbf{B}_1)}{\nu_d(\mathbf{W})}, \frac{\nu_d(\mathbf{B}_2)}{\nu_d(\mathbf{W})}, \dots, \frac{\nu_d(\mathbf{B}_k)}{\nu_d(\mathbf{W})}. \quad (5.8)$$

Além disso, desde que o valor esperado de um BPP é igual a $n \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}$, segue que a média do número de pontos em \mathbf{B} é

$$n \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})} = \lambda \nu_d(\mathbf{B}), \quad (5.9)$$

em que λ é média do número de pontos por unidade de área ou volume, ou seja, ela é a intensidade do processo binomial. Noutros termos,

$$\lambda = \frac{n}{\nu_d(\mathbf{W})}. \quad (5.10)$$

A próxima seção se dedicará à investigação de um importante processo pontual o qual dá origem o outros importantes processos estudados na literatura. Este chama-se de *processo pontual de Poisson*.

5.2 Processo pontual de Poisson

O **processo pontual de Poisson** (*Poisson point process* (PPP), do inglês) constitui um das classes mais importantes de processos pontuais, devido a não interação entre eventos ou configurações de pontos em regiões disjuntas, implicando em um comportamento independente os eventos. Adicionalmente, este processo deriva outros modelos mais complexos, tais como:

- processo pontual marcado;
- processo de Cox;
- processo pontual aglomerado (*cluster point process*, do inglês);
- processo de Neyman-Scott;
- processo de Matérn;
- processo *hard-core*, etc.

Como mencionado anteriormente, o processo de Poisson é um caso particular de um processo pontual, então pode ser definida utilizando-se a proposta via medida de contagem. Especificamente, seja $\Lambda(\cdot)$ uma medida de contagem localmente finita ($\Lambda(\cdot) \in \mathcal{N}$). Portanto, um processo pontual $N(\cdot)$ é denominado de *processo pontual de Poisson* com intensidade de medida $\Lambda(\cdot)$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i) para qualquer $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$, a variável aleatória $N_{\mathbf{B}}$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\nu_d(\mathbf{B})$. Por convenção, escreve-se $N_{\mathbf{B}} \sim \text{Poisson}(\nu_d(\mathbf{B}))$.
- (ii) para quaisquer conjuntos disjuntos e limitados de Borel $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ em \mathcal{B}_0^d , as variáveis aleatórias $N_{\mathbf{B}_1}, N_{\mathbf{B}_2}, \dots, N_{\mathbf{B}_k}$ são independentes.

Como consequência da definição, o processo pontual de Poisson satisfaz as seguintes propriedades as quais caracterizam o referido processo:

- (a) *probabilidade vazia*

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0) = \exp(-\Lambda(\mathbf{B})); \quad (5.11)$$

- (b) *Functional de Laplace*

$$L_N[f] = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} [1 - \exp(-f(\mathbf{x}))] \Lambda(d\mathbf{x})\right); \quad (5.12)$$

A demonstração desta última afirmação segue o argumento proposto por (HANGGI, 2013), o qual indica que é suficiente considerar apenas funções simples da forma

$$f = \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{1}_{\mathbf{B}_i}, \quad (5.13)$$

em que cada b_i é um número não-negativo e $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k \in \mathcal{B}_0^d$ é uma sequência de conjuntos disjuntos. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f dN = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathbf{B}_i} dN = \sum_{i=1}^k b_i N_{\mathbf{B}_i}. \quad (5.14)$$

Como consequência, o funcional de Laplace do processo pontual é dado por:

$$L_N[f] = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^k b_i N_{\mathbf{B}_i}\right\} = \prod_{i=1}^k \mathbb{E}\{\exp(-b_i N_{\mathbf{B}_i})\}, \quad (5.15)$$

em que a última igualdade é satisfeita devido as independências das variáveis aleatórias $N_{\mathbf{B}_i}$. Agora, observemos que para qualquer variável aleatória de Poisson X com média $m > 0$ e, para qualquer número real c , tem-se

$$\mathbb{E}\{\exp(cX)\} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \exp(-m) \frac{m^k}{k!} \exp(ck) = \exp(-m[1 - \exp(c)]). \quad (5.16)$$

Assim, conclui-se que

$$\begin{aligned} L_N[f] &= \prod_{i=1}^k \exp(-\nu_d(\mathbf{B}_i)) [1 - \exp(b_i)] \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} [1 - \exp(-b_i \mathbf{1}_{\mathbf{B}_i})] dN\right) \\ &= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} [1 - \exp(f)] dN\right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Uma vez que qualquer função mensurável positiva é limite não-decrescente de tais funções, tal resultado está comprovado.

(c) *Funcional gerador de probabilidade*

$$G_N[g] = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} [1 - g(\mathbf{x})] \Lambda(d\mathbf{x})\right);$$

Este é caracterizado pela transformação $G_N[g] = L_N[-\ln g]$ a qual foi previamente apresentada na Subseção 4.3.3.

No caso de um **processo pontual de Poisson homogêneo**, a intensidade de medida $\Lambda(\cdot)$ é dada por $\Lambda(\mathbf{B}) = \lambda \nu_d(\mathbf{B})$, para todo $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$, em que λ é a intensidade do processo pontual e, $\nu_d(\mathbf{B})$ é o volume d -dimensional de \mathbf{B} . A seguir, é listada algumas propriedades do PPP.

1. *Condicional sobre a variável $N_{\mathbf{B}}$ (Distribuição de Poisson).*

A hipótese (i) implica que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \exp(\lambda \nu_d(\mathbf{W})) \frac{(\lambda \nu_d(\mathbf{W}))^n}{n!} \binom{n}{k} \left(\frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}\right)^k \left(1 - \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}\right)^{n-k} \\ &= \exp(-\lambda \nu_d(\mathbf{B})) \frac{(\lambda \nu_d(\mathbf{B}))^k}{k!}. \end{aligned}$$

2. *A intensidade λ não depende do conjunto de Borel \mathbf{B} .*

De fato, a partir da esperança de uma variável aleatória com distribuição de Poisson, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{N_{\mathbf{B}}\} &= k \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda \nu_d(\mathbf{B})) \frac{(\lambda \nu_d(\mathbf{B}))^k}{k!} \\ &= \lambda \nu_d(\mathbf{B}).\end{aligned}\quad (5.18)$$

Portanto,

$$\lambda = \frac{N_{\mathbf{B}}}{\nu_d(\mathbf{B})}, \quad (5.19)$$

o que prova o resultado.

3. Distribuições dimensionais finitas (fidis).

Se $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ são conjuntos limitados de Borel disjuntos em \mathbf{W} tais que $\cup_{i=1}^k \mathbf{B}_i = \mathbf{W}$ e $\nu_d(\mathbf{W}) = n$, então $N_{\mathbf{B}_1}, N_{\mathbf{B}_2}, \dots, N_{\mathbf{B}_k}$ são variáveis aleatórias de Poisson independentes e identicamente distribuídas com respectivas médias

$$\lambda \nu_d(\mathbf{B}_1), \lambda \nu_d(\mathbf{B}_2), \dots, \lambda \nu_d(\mathbf{B}_k). \quad (5.20)$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}_1} = n_1, N_{\mathbf{B}_2} = n_2, \dots, N_{\mathbf{B}_k} = n_k) = \lambda^n \prod_{i=1}^k \frac{\nu_d(\mathbf{B}_i)^{n_i}}{n_i!} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^k \nu_d(\mathbf{B}_i)\right). \quad (5.21)$$

4. Estacionaridade e isotropia.

O PPP homogêneo é tanto estacionário como isotrópico. De fato, para o caso da estacionaridade, desde que a distribuição do PPP é unicamente determinada por suas probabilidades vazias e, a medida de Borel sobre \mathbb{R}^d é invariante mediante a translações, então para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, tem-se

$$\Lambda(\mathbf{B}) = \lambda \nu_d(\mathbf{B}) = \lambda \nu_d(\mathbf{B} + \mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{B} + \mathbf{x}) \quad (5.22)$$

e

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0) = \exp(-\Lambda(\mathbf{B})) = \exp(-\Lambda(\mathbf{B} + \mathbf{x})) = \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}+\mathbf{x}} = 0). \quad (5.23)$$

A caso da isotropia é similar.

5. A função J .

Desde que o PPP $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é estacionário, então a função de distribuição da distância do vizinho mais próxima $G(\cdot)$ e a função de contato $F(\cdot)$ não dependem da localização de referência. Assim, se if $X \in \Phi$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$, obtém-se

$$G(r) = 1 - \mathbb{P}(N_{\mathcal{B}(X,r)} = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_{\mathcal{B}(\mathbf{p},r)} = 0) = F(r). \quad (5.24)$$

Portanto, $J(r) = 1$, para todo $r \geq 0$. Em particular, se a origem de \mathbb{R}^d é adotada como ponto de localização de referência, então

$$G(r) = F(r) = 1 - \exp(-\lambda b_d r^d). \quad (5.25)$$

Aqui, b_d a medida da bola aberta unitária d -dimensional, ou seja,

$$b_d = \nu_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; 1)) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}, \quad (5.26)$$

em que, $\Gamma(t) = \int_0^\infty \exp(-x)x^{t-1}dx$ for $t > 0$ para $t > 0$ denota a função Gama. Assim, para $d = 1, 2$, e 3 , temos $b_1 = 2$, $b_2 = \pi$ e $b_3 = \frac{4}{3}\pi$, respectivamente.

6. Relação com o processo pontual binomial.

Desde que o PPP é estacionário, então podemos considerar a restrição de Φ com relação um conjunto limitado de Borel \mathbf{W} sob a condição $N_{\mathbf{W}} = n$. Este condicionamento produz um BPP em \mathbf{W} com n pontos independentes e uniformemente distribuídos. Tomando, desta maneira, um conjunto limitado de Borel qualquer em \mathbf{W} , a probabilidade vazia de \mathbf{B} dada a condição $N_{\mathbf{W}} = n$ é igual a

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0 | N_{\mathbf{W}} = n) = \frac{\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0, N_{\mathbf{W} \setminus \mathbf{B}} = n)}{\mathbb{P}(N_{\mathbf{W}} = n)} = \frac{\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0) \mathbb{P}(N_{\mathbf{W} \setminus \mathbf{B}} = n)}{\mathbb{P}(N_{\mathbf{W}} = n)}. \quad (5.27)$$

Observemos que a última igualdade é válida devido a independência das variáveis $N_{\mathbf{B}}$ e $N_{\mathbf{W} \setminus \mathbf{B}}$. Ademais, $N_{\mathbf{B}}$, $N_{\mathbf{W} \setminus \mathbf{B}}$ e $N_{\mathbf{W}}$ possuem distribuições de Poisson o que produz

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0 | N_{\mathbf{W}} = n) &= \frac{\exp(-\Lambda(\mathbf{B})) \frac{\Lambda(\mathbf{W} \setminus \mathbf{B})^n}{n!} \exp(-\Lambda(\mathbf{W} \setminus \mathbf{B}))}{\frac{\Lambda(\mathbf{W})^n}{n!} \exp(-\Lambda(\mathbf{W}))} \\ &= \left(\frac{\Lambda(\mathbf{W} \setminus \mathbf{B})}{\Lambda(\mathbf{W})} \right)^n. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Noutros termos,

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0 | N_{\mathbf{W}} = n) = \frac{(\nu_d(\mathbf{W}) - \nu_d(\mathbf{B}))^n}{\nu_d(\mathbf{W})^n}, \quad (5.29)$$

cuja expressão coincide com a Equação (5.6) para as probabilidades vazias do BPP.

Na sequência apresentemos alguns processo pontuais obtidos de um PPP que ainda preservam a condições de serem de Poisson.

5.3 Processos que preservam a condição de Poisson

Nesta seção, construiremos novos processos pontuais de Poisson a partir de um PPP homogêneo pela condição de remoção aleatória de pontos (*thinning*), pela adição

extra de pontos ao processo (superposição) e pela translação aleatória. Aqui, nos restringiremos as duas primeiras situações, para o caso da translação nós sugerimos a referência (GELFAND *et al.*, 2010).

5.3.1 Superposição

Uma união disjunta $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_i$ dos processos pontuais é chamada de uma **superposição**. A proposta que se segue é fazer com que esta união seja um PPP. Devemos pois provar o seguinte resultado: Se Φ_1, Φ_2, \dots são PPP mutuamente independentes com funções intensidades $\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot), \dots$, respectivamente, então a superposição $\Phi_{\text{sup}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_i$ é também um PPP, porém função intensidade $\lambda(\cdot) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(\cdot)$. Com efeito, a prova desta afirmação segue a teoria das probabilidades vazias. Portanto, para os processos pontuais Φ_{sup} e Φ_i , denotemos a quantidade de pontos que caem no conjunto $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$ por $N_{\mathbf{B}}$ e $N_{\mathbf{B}}^i$, respectivamente. Desta forma,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = 0) &= \mathbb{P}(\#(\Phi_{\text{sup}} \cap \mathbf{B}) = 0) \\
 &= \mathbb{P}(\#(\Phi_1 \cap \mathbf{B}) = 0, \#(\Phi_2 \cap \mathbf{B}) = 0, \dots) \\
 &= \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}}^1 = 0, N_{\mathbf{B}}^2 = 0, \dots) \\
 &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}}^i = 0) \\
 &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\exp(-\Lambda_i(\mathbf{B}))) \\
 &= \exp(\Lambda(\mathbf{B})),
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

em que $\Lambda_i(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{B}} \lambda_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ e $\Lambda(\mathbf{B}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_i(\mathbf{B})$, o que conclui a demonstração.

Em resumo, a sobreposição pode ser entendida como uma soma de medidas ou a união de conjuntos. A Figura 5.3 esboça a superposição de dois processos pontuais de Poisson Φ_1 and Φ_2 , cujos pontos são marcados, em uma janela de observação \mathbf{W} , por (\bullet) e (\circ) , respectivamente.

5.3.2 Thinning

Em um processo pontual Φ , um procedimento de diluição (*thinning*, do inglês) obedece uma determinada regra de exclusão de pontos do processo original, produzindo assim um processo chamado de processo pontual diluído (*thinned point process*, do inglês). Em outras palavras, a operação de *thinning* é referida como uma diluição do processo original. Observando o processo pontual como um conjunto aleatório, o processo pontual *thinned* é um subconjunto de Φ , isto é,

$$\Phi_{\text{th}} \subset \Phi. \tag{5.31}$$

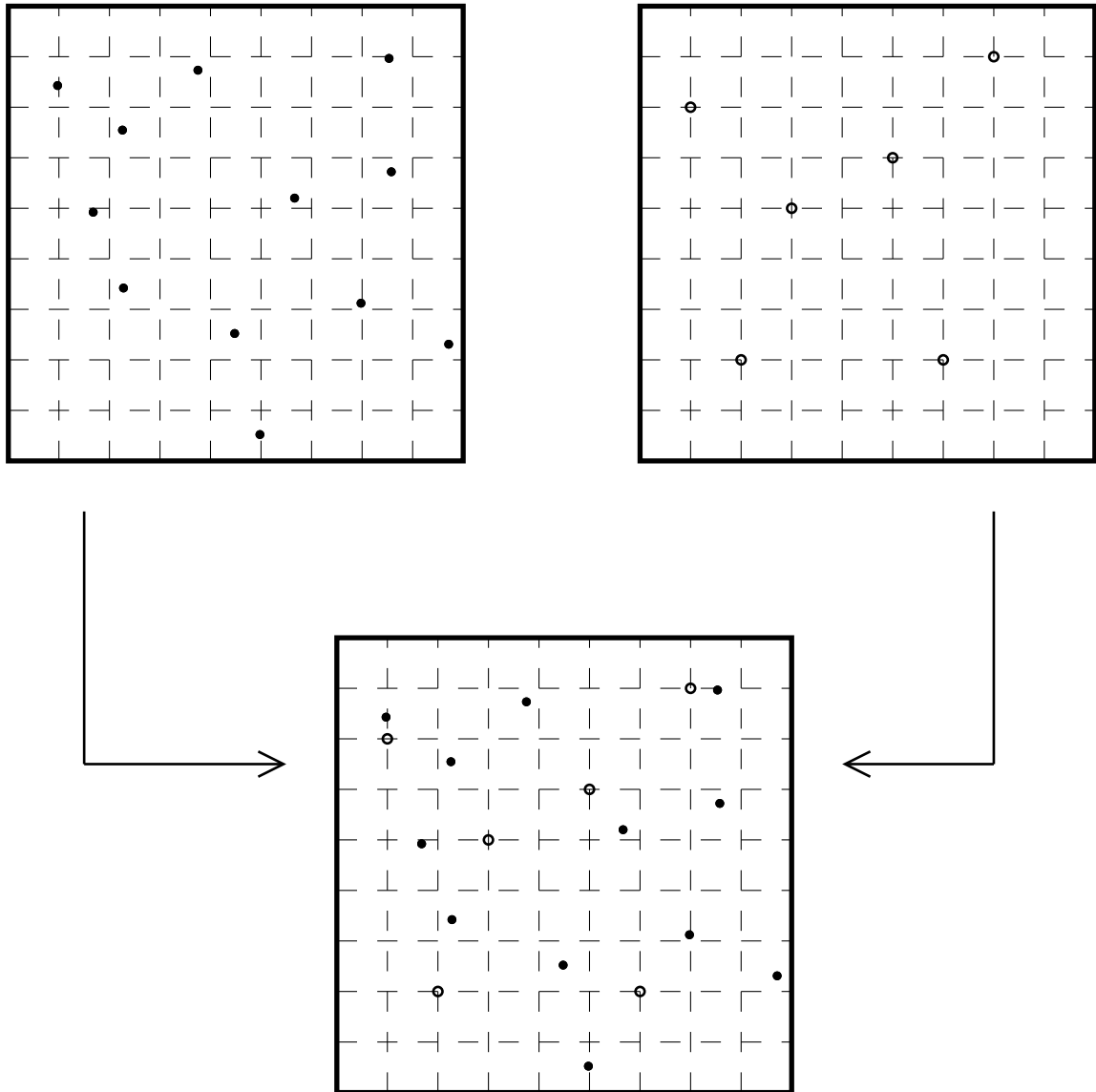


Figura 5.3 – Superposição de dois processos pontuais de Poisson.

Mais precisamente, seja $p : \mathbf{W} \rightarrow [0, 1]$ uma função e Φ um processo pontual sobre o conjunto $\mathbf{W} \subset \mathcal{B}_0^d$. O processo Φ_{th} é obtido a partir de Φ deletando cada ponto de $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com probabilidade $1 - p(X_i)$ e, por sua vez, retendo-o com probabilidade $p(X_i)$, onde a exclusão ou a não exclusão de qualquer ponto não depende destas mesmas operações com os outros pontos do processo. Além disso, tal processo é chamado *thinning* independente de Φ com probabilidade de retenção $p(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$. Às vezes tal procedimento sobre Φ é referido como $p(\mathbf{x})$ -*thinning*, com o objetivo de enfatizar a probabilidade de retenção. A Figura 5.4, representa um esquema para a determinação dos pontos de um processo *thinned*.

Por sua vez, é possível descrever o processo *thinned* Φ_{th} a partir de um PPP homogêneo Φ . Esta afirmação, novamente, pode ser comprovada pelas probabilidades vazias do processo original. Com efeito, denotando por $N_{\mathbf{B}}$ e $N_{\mathbf{B}}^{\text{th}}$ o número de pontos que

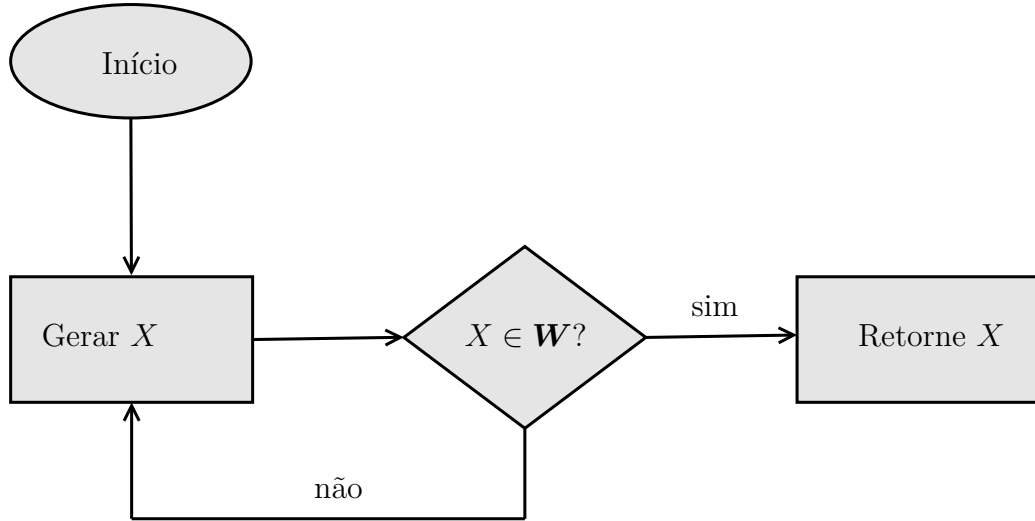


Figura 5.4 – Algoritmo de retenção.

caem no conjunto $\mathbf{B} \subset \mathcal{B}_0^d$ com relação aos processos Φ e Φ_{th} , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}}^{\text{th}} = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = k) \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}}^{\text{th}} = 0 | N_{\mathbf{B}} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda \nu_d(\mathbf{B})) \frac{\lambda^k \nu_d(\mathbf{B})^k}{k!} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}}^{\text{th}} = 0 | N_{\mathbf{B}} = k). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dado que $N_{\mathbf{B}} = k$, tem-se que os k pontos de Φ em \mathbf{B} são uniformemente distribuídos. Assim, a probabilidade condicional de $N_{\mathbf{B}}^{\text{th}} = 0$ dado que $N_{\mathbf{B}} = k$ é justamente

$$\mathbb{P}(N_{\mathbf{B}}^{\text{th}} = 0 | N_{\mathbf{B}} = k) = \left(1 - \frac{1}{\nu_d(\mathbf{B})} \int_{\mathbf{B}} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}\right)^k. \quad (5.33)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}}^{\text{th}} = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda \nu_d(\mathbf{B})) \frac{\lambda^k \nu_d(\mathbf{B})^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{\nu_d(\mathbf{B})} \int_{\mathbf{B}} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}\right)^k \\ &= \exp\left(-\lambda \int_{\mathbf{B}} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}\right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Uma consequência imediata deste fato é que: se Φ_{th} é resultado de um $p(\mathbf{x})$ -*thinning* do processo homogêneo PPP Φ , então a intensidade de medida $\Lambda_{\text{th}}(\cdot)$ do processo *thinned* é dada por

$$\Lambda_{\text{th}} \mathbf{B} = \int_{\mathbf{B}} p(\mathbf{x}) \Lambda(d\mathbf{x}), \quad (5.35)$$

e, equivalentemente, a função de intensidade do referido processo é

$$\lambda_{\text{th}}(\mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x}). \quad (5.36)$$

Por fim, (MØLLER; WAAGEPETERSEN, 2004) apresentaram um resultado consequente que diante de algumas restrições pode-se obter igualdade entre as funções de

intensidade processos de Poisson e *thinned*. Com mais detalhes, se Φ é um PPP com função intensidade limitada, isto é, $\lambda(\cdot) \leq c$, então $X \in \Phi$ é distribuído como processo *thinned* obtido de um PPP de intensidade c e probabilidade de retenção $p(X) = \frac{\lambda(X)}{c}$. Consequentemente, a operação gera um PPP não-homogêneo com função intensidade $\lambda_{\text{th}}(\mathbf{x}) = cp(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$. Uma interpretação intuitiva de um processo pontual *thinned* é mostrada na Figura 5.5, em que alguns pontos de um processo pontual Φ foram excluídos.

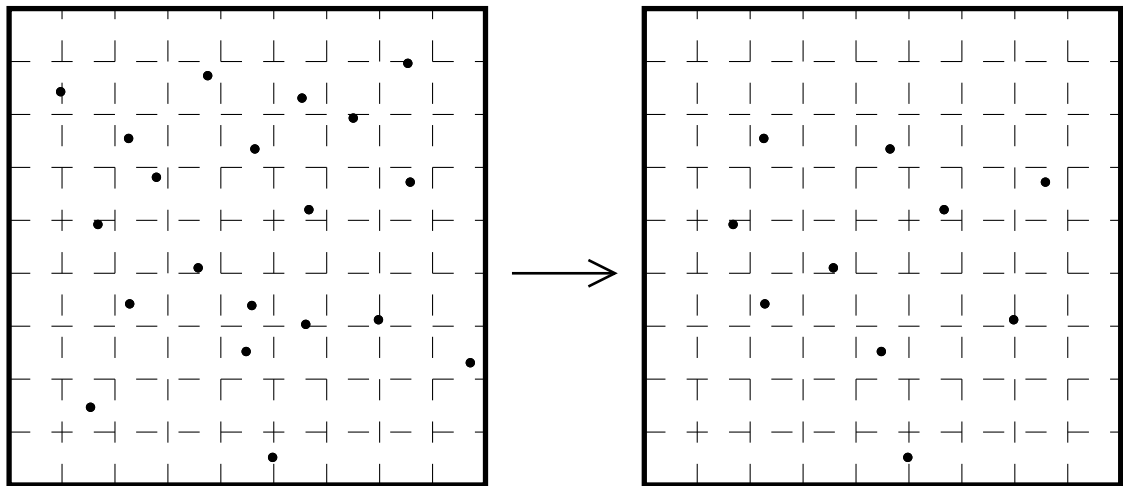


Figura 5.5 – Processo pontual *thinned*. Pontos de um processo original (à esquerda) foram removidos produzindo um processo *thinned* (à direita)

Na sequência, são apresentados métodos que possibilitam simular computacionalmente os processos pontuais de Poisson, tanto para o caso homogêneo como não-homogêneo.

5.4 Simulação de um processo pontual de Poisson

Desde que o processo pontual de Poisson uma estrutura matemática sólida, por isso, fundamenta vários outros processos, desta forma é de fundamental importância sermos capazes de simular tal processo, com o objetivo de gerar os processos derivados. Os passos dos algoritmos seguem diretamente dos resultados e comentários descritos nas seções anteriores.

5.4.1 Caso do processo homogêneo

Na Seção 5.2 foi apresentada uma relação entre os processos de Poisson e binomial. A partir deste resultado, deduz-se a maneira de simular um PPP sobre um determinado conjunto $\mathbf{W} \subset \mathcal{B}_0^d$. Neste caso, parte-se do processo pontual $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e escolhe-se

uma configuração \mathcal{X} consistindo de τ pontos, ou seja,

$$\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_\tau\}, \quad X_i \in \Phi, \quad (5.37)$$

obedecendo as seguintes condições:

(a) as variáveis aleatórias X_i em \mathcal{X} são i.i.d. com distribuição em comum dada por

$$\mathbb{P}(X_i \in \mathbf{B}) = \frac{\nu_d(\mathbf{B})}{\nu_d(\mathbf{W})}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq \tau; \quad (5.38)$$

(b) τ é uma variável independente de X_i , para todo $1 \leq i \leq \tau$;

(c) τ possui distribuição de Poisson, isto é,

$$\tau \sim \text{Poisson}(\lambda \nu_d(\mathbf{W})). \quad (5.39)$$

Portanto, o processo de contagem

$$N_{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{1}(X_i \in \mathbf{B}), \quad \text{com } \mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d, \quad (5.40)$$

é um processo pontual de Poisson. Como podemos verificar, a construção estabelece uma forma de simular um PPP para qualquer conjunto $\mathbf{W} \in \mathcal{B}_0^d$ e isto é resumido no Algoritmo 1.

Algorithm 1 Simulação de um PPP homogêneo sobre um conjunto limitado de Borel \mathbf{W} .

```

1: procedure HOM_PPP_ALGORITHM( $\lambda, \mathbf{W}$ )
2:   Compute  $\tau \sim \text{Poisson}(\lambda \nu_d(\mathbf{W}))$        $\triangleright$  O número de pontos em  $\mathbf{W}$  segue uma
      variável de Poisson de média  $\lambda \nu_d(\mathbf{W})$ .
3:   for  $i = 1$  to  $\tau$  do
4:     Compute  $X_i \sim \text{uniform}(\mathbf{W})$            $\triangleright$  Gerar  $\tau$  pontos uniforme em  $\mathbf{W}$ .
5:   end for
6:   return  $\tau, X_1, X_2, \dots, X_\tau$ 
7: end procedure

```

Por sua vez, a Figura 5.6 esboça realizações de um PPP em quadrado de área unitária $\mathbf{W} = [0, 1]^2$ com intensidades $\lambda = 10$ e $\lambda = 25$, respectivamente. O número inteiro não-negativo τ representa o número de pontos de Φ que caíram em \mathbf{W} .

5.4.2 Caso do processo não-homogêneo

Como mencionado na Seção 5.3, um PPP não-homogêneo pode ser gerado utilizando-se um processo pontual *thinned*, sendo este último obtido de um PPP homogêneo. De acordo com (ILLIAN *et al.*, 2008), a simulação de tal processo necessita-se de poucos

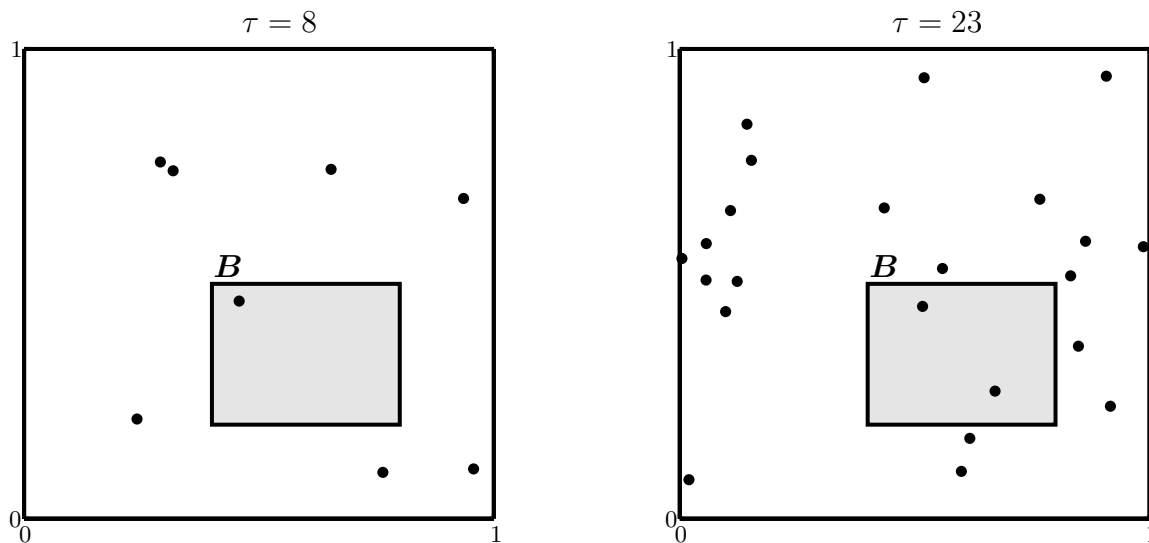


Figura 5.6 – Realização de dois PPP homogêneos sobre um quadrado de área unitária com intensidades $\lambda = 10$ e $\lambda = 25$, respectivamente.

passos. De fato, suponha que Φ_{in} é um PPP não-homogêneo sobre o conjunto \mathbf{W} , com intensidade $\lambda_{\text{in}}(\cdot)$. Gera-se, primeiramente, um PPP homogêneo com intensidade

$$\lambda^* = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{W}} \{\lambda_{\text{in}}(\mathbf{x})\}, \tag{5.41}$$

utilizando o método descrito no Algoritmo 1. No que segue, obtém-se uma realização de Φ_{in} por um processo de *thinning*, em que cada ponto $X \in \Phi$ é retido ou excluído, independentemente dos outros pontos, com probabilidade de retenção

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_{\text{in}}(\mathbf{x})}{\lambda^*}. \tag{5.42}$$

Produzindo desta forma um PPP não-homogêneo, o qual é dado por (MØLLER; WAAGEPETERSEN, 2004)

$$\Phi_{\text{in}} = \{X_i \in \Phi \mid U_i \leq p(X_i)\} \subset \Phi, \tag{5.43}$$

em que $\{U_i\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 1]$ e independentes de Φ . O algoritmo a seguir resume os passos sugerimos e gera um PPP não-homogêneo.

Algorithm 2 Simulação de um PPP não-homogêneo sobre um conjunto limitado de Borel \mathbf{W} .

```

1: procedure INHOM_PPP_ALGORITHM( $\lambda_{\text{in}}(\cdot)$ ,  $\mathbf{W}$ )
2:   Compute  $\lambda^* = \max_{x \in \mathbf{W}} \{\lambda_{\text{in}}(x)\}$ 
3:   HOM_PPP_ALGORITHM( $\lambda^*$ ,  $\mathbf{W}$ )  $\triangleright$  Ver Algoritmo 1.
4:    $k \leftarrow 0$   $\triangleright$  Índice de contagem.
5:   for  $i = 1$  to  $\tau$  do
6:     Compute  $U_i \sim \text{uniform}([0, 1])$ 
7:     if  $U_i \leq \frac{\lambda_{\text{in}}(X_i)}{\lambda^*}$  then
8:        $Y_i \leftarrow X_i$ 
9:        $k \leftarrow k + 1$ 
10:    end if
11:  end for
12:  return  $k, Y_1, Y_2, \dots, Y_k$   $\triangleright$  Note que:  $Y_i \in \Phi$  e  $k \leq \tau$ .
13: end procedure

```

A Figura 5.7 esboça as realizações de dois PPP não homogêneos em \mathbb{R}^2 sobre um quadrado de área unitária $\mathbf{W} = [0, 1]^2$. Em (a), consideramos a função de intensidade $\lambda(x, y) = \exp(5x)$. O número de pontos simulados do processo PPP homogêneo Φ que caíram em \mathbf{W} foi igual a $\tau = 148$, obtendo assim $k = 32$ para o número de pontos sobre \mathbf{W} para Φ_{in} (PPP não-homogêneo derivado). Por sua vez, em (b) a função de intensidade considerada foi $\lambda(x, y) = 500|x - 0.2||y - 0.1|$. Neste caso, obtivemos $\tau = 351$ e $k = 65$.

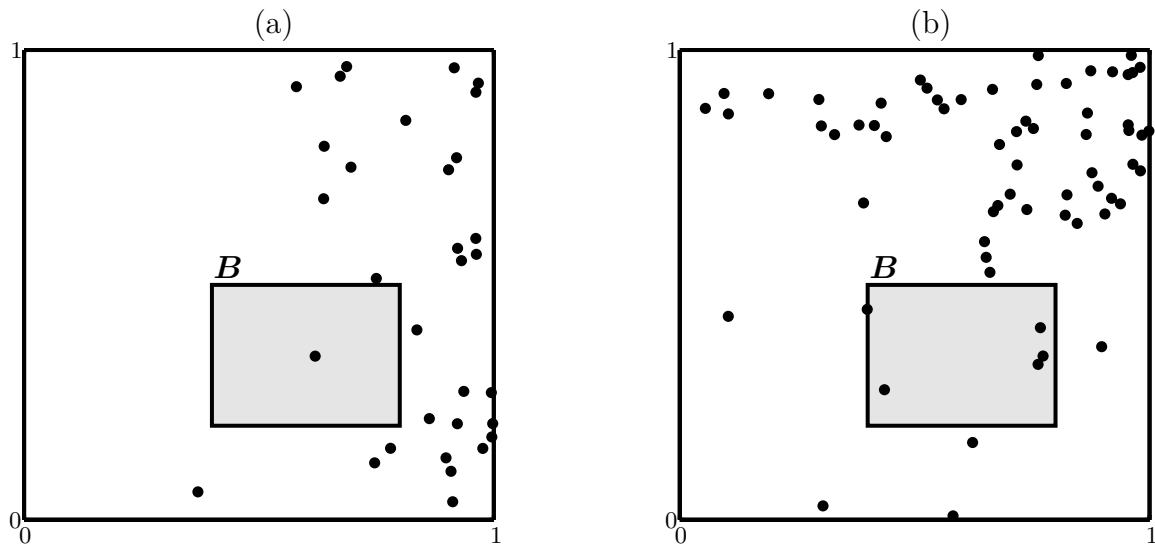


Figura 5.7 – Realização de dois PPP não-homogêneos sobre um quadrado de área unitária.

A seção seguinte é dedicada ao estudo a medida de intensidade de um PPP.

5.5 Densidade de um processo pontual de Poisson

Seja $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado de Borel e $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um PPP de medida de intensidade

$$\Lambda(\mathbf{B}) = \mathbb{E} \left\{ \sum_{X \in \mathbf{B}} \mathbf{1}(X \in \mathbf{B}) \right\} = \int_{\mathbf{B}} \lambda(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (5.44)$$

Se \mathcal{U} denota qualquer evento que descreve um padrão no posicionamento de pontos em \mathbf{B} , então a partir da seguinte probabilidade

$$\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = n) \mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U} \mid N_{\mathbf{B}} = n) \quad (5.45)$$

e da definição do PPP, a probabilidade de ocorrência do evento $\{\Phi \in \mathcal{U}\}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\Lambda(\mathbf{B})) \frac{\Lambda(\mathbf{B})^n}{n!} \int_{\mathbf{B}} \cdots \int_{\mathbf{B}} \mathbf{1}(\mathcal{X} \in \mathcal{U}) \frac{\Lambda(d\mathbf{x}_1)}{\Lambda(\mathbf{B})} \frac{\Lambda(d\mathbf{x}_2)}{\Lambda(\mathbf{B})} \cdots \frac{\Lambda(d\mathbf{x}_n)}{\Lambda(\mathbf{B})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\Lambda(\mathbf{B}))}{n!} \int_{\mathbf{B}^n} \mathbf{1}(\mathcal{X} \in \mathcal{U}) \Lambda(d\mathbf{x}_1) \Lambda(d\mathbf{x}_2) \cdots \Lambda(d\mathbf{x}_n). \end{aligned} \quad (5.46)$$

em que $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Neste caso, diz-se que Φ é um PPP com distribuição $\Pi(\cdot)$, onde $\Pi(\mathcal{U}) = \mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U})$. Equivalentemente, em termos da função intensidade, tem-se

$$\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\Lambda(\mathbf{B}))}{n!} \int_{\mathbf{B}^n} \mathbf{1}(\mathcal{X} \in \mathcal{U}) \lambda(\mathbf{x}_1) \lambda(\mathbf{x}_2) \cdots \lambda(\mathbf{x}_n) \, d\mathbf{x}_1 \, d\mathbf{x}_2 \cdots \, d\mathbf{x}_n. \quad (5.47)$$

Portanto, diante destas considerações, um processo pontual arbitrário tem *densidade* $f(\cdot)$ com respeito a medida $\Pi(\cdot)$ se (BENES; RATAJ, 2004)

$$\mathbb{P}(\Phi' \in \mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} f(\mathcal{X}) \Pi(d\mathcal{X}). \quad (5.48)$$

Como consequência, a distribuição de Φ' é dada por $\mathbb{P}(\Phi' \in \mathcal{U}) = \mathbb{E}\{f(\Phi) \mathbf{1}(\Phi \in \mathcal{U})\}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi' \in \mathcal{U}) &= \int_{\mathcal{U}} f(\mathcal{X}) \Pi(d\mathcal{X}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\Lambda(\mathbf{B}))}{n!} \int_{\mathbf{B}^n} \mathbf{1}(\mathcal{X} \in \mathcal{U}) f(\mathcal{X}) \Lambda(d\mathbf{x}_1) \Lambda(d\mathbf{x}_2) \cdots \Lambda(d\mathbf{x}_n) \\ &= \mathbb{E}\{f(\Phi) \mathbf{1}(\Phi \in \mathcal{U})\}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

em que $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ e Φ é um PPP com distribuição $\Pi(\cdot)$. Em particular, a probabilidade do evento $\{N_{\mathbf{B}} = n\}$ é dada por

$$p_n = \mathbb{P}(N_{\mathbf{B}} = n) = \frac{\exp(-\nu_d(\mathbf{B}))}{n!} \int_{\mathbf{B}^n} f(\mathcal{X}) \, d\mathbf{x}_1 \, d\mathbf{x}_2 \cdots \, d\mathbf{x}_n. \quad (5.50)$$

Finalmente, a distribuição de um PPP arbitrário Φ com intensidade $\lambda(\cdot)$ é completamente caracterizado por um processo homogêneo PPP $\Phi_{(1)}$ com intensidade $\lambda = 1$,

o qual é chamado de *processo pontuais de Poisson de taxa unitária*. Especificamente, a função

$$f(\mathcal{X}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \exp(\nu_d(\mathbf{B}) - \Lambda(\mathbf{B})) \prod_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i) \quad (5.51)$$

caracteriza um PPP devido a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{f(\Phi_{(1)})\mathbf{1}(\Phi_{(1)} \in \mathcal{U})\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\Lambda(\mathbf{B}))}{n!} \int_{\mathbf{B}^n} \exp(\nu_d(\mathbf{B}) - \Lambda(\mathbf{B})) \prod_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_n \\ &= \mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}), \end{aligned} \quad (5.52)$$

como descrito na Equação (5.47). Por fim, como um caso particular, o PPP homogêneo $\Phi_{(\lambda)}$ com intensidade λ tem a seguinte densidade

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \exp((1 - \lambda)\nu_d(\mathbf{B}))\lambda^n. \quad (5.53)$$

Finalizemos este capítulo com um processo, chamado de *processo pontual marcado*, que também pode ser obtido de um PPP, o qual será adotado para caracterização da interferências para redes *ad-hoc* sem-fio.

5.6 Processo pontual marcado

Nas seções anteriores, temos tratado de padrões de pontos sem ‘marcas’. Agora, forneceremos um estudo breve dos padrões de pontos marcados. Com mais detalhes, **processos de pontos marcados** (*marked point process* (MPP), do inglês) são generalizações dos processos pontuais, em que cada ponto X_i é associado com uma *marca* ou uma característica $m(X_i)$ tomada de um *espaço de marcas* \mathbf{M} , o qual é assumido ser um espaço topológico metrizável. Em geral, a marca carrega informações significantes ao ponto em questão X_i , como por exemplo, a raio aleatório de uma bola aberta centrada em X_i como ilustra a Figura 5.8. As referências (BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009a; HAENGGI, 2013) fornecem um tratamento rigoroso deste assunto e também inclui importantes exemplos processos pontuais com marcas utilizados em sistemas de comunicação sem-fio.

Dando continuidade, denotando por \mathcal{M} a σ -álgebra de \mathbf{M} , um *processo pontual marcado* sobre \mathbb{R}^d é uma sequência aleatória

$$\Psi = \{(X_n, m(X_n))\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(X_1, m(X_1)), (X_2, m(X_2)), \dots\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}, \quad (5.54)$$

em que $m(X_i)$ é a marca ou a característica de X_i . A quantidade aleatória de pontos localizados em $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d$, os quais tem marcas em $\mathbf{L} \in \mathcal{M}$ é dada por

$$N_{\mathbf{B} \times \mathbf{L}} = \sum_{(X, m(X)) \in \Psi} \mathbf{1}(X \in \mathbf{B}) \cdot \mathbf{1}(m(X) \in \mathbf{L}). \quad (5.55)$$

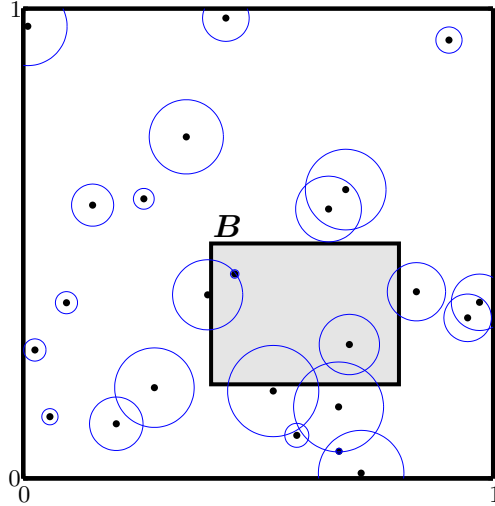


Figura 5.8 – Realização de um processo pontual marcado cujas marcas são uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 0.1]$.

Notemos que um MPP é um processo pontual sobre o espaço $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$.

Agora, a fim de definir um *processo pontual marcado estacionário*, a operação translação deve ser tratada adequadamente. Então, um MPP $\Psi = \{(X_n, m(X_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dito estacionário se para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, o processo de translação

$$\Psi_{\mathbf{x}} = \{(X_1 + \mathbf{x}, m(X_1)), (X_2 + \mathbf{x}, m(X_2)), \dots\}, \quad (5.56)$$

tem mesma distribuição de Ψ . Em outras palavras, um MPP Ψ é estacionário se, e somente se, $\Psi = \Psi_{\mathbf{x}}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. A definição de *isotropia* segue ideia análoga.

Por sua vez, desde que um MPP é um caso particular sobre um produto de σ -álgebras $\mathcal{B}_0^d \otimes \mathcal{M}$, a definição de *intensidade de medida* pode ser estendida de maneira natural. Com efeito, a intensidade de medida é uma função real não-negativa $\Lambda_* : \mathcal{B}_0^d \otimes \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$\Lambda_*(\mathbf{B} \times \mathbf{L}) = \mathbb{E}\{N_{\mathbf{B} \times \mathbf{L}}\}, \quad \text{para todo } \mathbf{B} \in \mathcal{B}_0^d, \mathbf{L} \in \mathcal{M}. \quad (5.57)$$

Segue que, $\Lambda_*(\mathbf{B} \times \mathbf{L})$ representa a quantidade média de pontos de Ψ em \mathbf{B} com marcas em \mathbf{L} . Quando Ψ é estacionário, implica que

$$\Lambda_*(\mathbf{B} \times \mathbf{L}) = \mathbb{E}\{N_{\mathbf{B} \times \mathbf{L}}\} = \mathbb{E}\{N_{(\mathbf{B} + \mathbf{x}) \times \mathbf{L}}\} = \Lambda_*((\mathbf{B} + \mathbf{x}) \times \mathbf{L}), \quad (5.58)$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Ademais, existe uma constante $\lambda_{\mathbf{L}} > 0$ tal que

$$\lambda_{\mathbf{L}} = \frac{\mathbb{E}\{N_{\mathbf{B} \times \mathbf{L}}\}}{\nu_d(\mathbf{B})}, \quad (5.59)$$

isto é, $\lambda_{\mathbf{L}}$ é interpretado como uma média do número de pontos de Ψ in \mathbf{B} por unidade de volume com marcas em \mathbf{L} . Consequentemente,

$$\Lambda_*(\mathbf{B} \times \mathbf{L}) = \lambda_{\mathbf{L}} \nu_d(\mathbf{B}). \quad (5.60)$$

O número $\lambda_{\mathbf{L}}$ é chamado de *intensidade* de Ψ com respeito a \mathbf{L} . Se $\mathbf{L} = \mathcal{M}$, as marcas não necessitam ser consideradas, pois

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{B} \times \mathcal{M}} &= \sum_{(X, m(X)) \in \Psi} \mathbf{1}(X \in \mathbf{B}) \cdot \mathbf{1}(m(X) \in \mathcal{M}) \\ &= \sum_{X \in \Phi} \mathbf{1}(X \in \mathbf{B}) \\ &= N_{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

cujo resultado produz $\mathbb{E}\{N_{\mathbf{B} \times \mathcal{M}}\} = \lambda \nu_d(\mathbf{B})$ ou $\lambda_{\mathcal{M}} = \lambda$, em que o número λ é a intensidade do processo pontual sem marcar $\Phi = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por sua vez, se $\mathbf{L} = \emptyset$, tem-se $\lambda_{\emptyset} = 0$. Finalmente, $\mathbf{L} \subset \mathbf{Q}$ com $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}$, implica que $\lambda_{\mathbf{L}} \leq \lambda_{\mathbf{Q}}$. Portanto, mediante a três últimas propriedades, a razão $\lambda_{\mathbf{B}}/\lambda$ fornece uma função distribuição $F(\cdot)$, a qual depende do conjunto \mathbf{L} , ou seja,

$$F(\mathbf{L}) = \frac{\lambda_{\mathbf{L}}}{\lambda}. \quad (5.62)$$

Tal distribuição é denominada de *função de distribuição de marcas* do processo pontual marcado estacionário Ψ e, esta satisfaz a seguinte condição

$$\mathbb{E}\{N_{\mathbf{B} \times \mathbf{L}}\} = \lambda F(\mathbf{L}) \nu_d(\mathbf{B}). \quad (5.63)$$

No que se segue, introduzimos a definição de *processo pontual independentemente marcado*, o qual será bastante investigado no decorrer deste trabalho. O processo pontual marcado $\Psi = \{(X_n, m(X_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamado de *independentemente marcado* se a sequência de pontos $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e a sequência de marcas $\{m(X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ são independentes e as marcas são variáveis aleatórias i.i.d. Retornando a Figura 5.8, ela foi gerada a partir de um processo pontual independentemente marcado cujas marcas (raio das bolas abertas) são variáveis i.i.d. e independentes das localizações dos pontos.

Finalizemos este capítulo apresentando o Teorema de Campbell para processos marcados, o qual generaliza o resultado proposto para processos pontuais não marcados.

5.6.1 O Teorema de Campbell para processos marcados

Um processo pontual marcado Ψ pode ser interpretado como um processo pontual padrão sem marcas sobre o espaço $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$, acarretando assim a seguinte versão do *Teorema de Campbell*

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{(X, m(X)) \in \Psi} f(X, m(X)) \right\} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} f(\mathbf{x}, \mathbf{m}) \Lambda_*(d((\mathbf{x}, \mathbf{m}))) \quad (5.64)$$

para qualquer função não negativa $f(\cdot)$ on $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$. Desde que (STOYAN; KENDALL; MECKE, 1996)

$$\Lambda_*(d(\mathbf{x}, \mathbf{m})) = F_{\mathbf{x}}(d\mathbf{m})\Lambda(d\mathbf{x}) \quad (5.65)$$

em que $F_{\mathbf{x}}(\cdot)$ é uma medida de probabilidade sobre $(\mathbf{M}, \mathcal{M})$, esta pode ser considerada como a distribuição da marca no ponto \mathbf{x} .

Em particular, se o processo é estacionário, tem-se $F_{\mathbf{x}}(\cdot) = F(\cdot)$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, além disso o Teorema de Campbell toma a seguinte forma

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{(X, m(X)) \in \Psi} f(X, m(X)) \right\} = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbf{M}} f(\mathbf{x}, \mathbf{m}) F(d\mathbf{m}) d\mathbf{x}. \quad (5.66)$$

Nesse caso, as marcas assume valores reais, isto é, $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}$. Agora, adotando que \mathbf{M} é uma variável aleatória contínua, obtém-se a PDF $p_{\mathbf{M}}(\cdot)$ referentes as marcas a qual é dada por

$$F_{\mathbf{M}}(m) = \int_{-\infty}^m p_{\mathbf{M}}(t) dt, \quad (5.67)$$

e, por sua vez, média do conjunto de marcas é

$$\bar{m} = \int_{-\infty}^{\infty} t p_{\mathbf{M}}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} t dF_{\mathbf{M}}(t). \quad (5.68)$$

Finalmente, para um processo pontual independentemente marcado e estacionário, o Teorema de Campbell é simplificado para

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{(X, m(X)) \in \Psi} f(X, m(X)) \right\} = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, t) p_{\mathbf{M}}(t) dt d\mathbf{x}, \quad (5.69)$$

o que conclui esta seção.

5.7 Síntese

Este capítulo teve como propósito a investigação sobre os processos pontual de Poisson e seus derivados. No entanto, iniciou-se com o processo Binomial, o qual baseado em estatísticas condicionais fornece um método simples para simular computacionalmente um PPP homogêneo. Após, foram apresentadas algumas propriedades de processos pontuais, as quais foram estudadas no capítulo anterior, que caracterização particularmente um processo de Poisson. Na continuação, dedicou-se a discussão de processos derivados do PPP, os quais mediante a algumas condições ainda preservam a condição ser de Poisson. Finalmente, estudou-se o processo pontual marcado com uma generalização de um processo pontual sem marcas. Além disso, foi mostrada uma versão do Teorema de Campbell para este tipo de processo.

O capítulo posterior, o qual iniciará com o modelo de sistema adotado por esta tese, terá como ponto de partida um MPP homogêneo. Por este motivo, tivemos a preocupação defini-lo e fundamentá-lo, preliminarmente, para que o entendimento na modelagem da posição espacial dos nós interferentes numa rede *ad-hoc* seja ficasse prejudicado.

Parte III

Propostas e Contribuições

Modelos de Conectividade em Redes Ad-Hoc Sem-Fio

A té o momento estudamos conceitos e ideias fundamentais de Geometria Estocástica com o objetivo de propormos um modelo de sistema adequado que nos permita analisar a performance de redes *ad-hoc* sem-fio mediante a utilização de processos pontuais, os quais estão inseridos na localização dos nós na rede, na representação da interferência, dentre outros.

Este capítulo se inicia com uma condensação das informações adquiridas nos capítulos anteriores e descreve um modelo de sistema que será utilizado no restante do trabalho. Na sequência, constituiremos um estudo analítico de modelos de conectividade via geometria estocástica em redes sem-fio em ambientes *indoor*, sem levar em consideração os efeitos de interferência. Serão, portanto, dois modelos de conectividade entre transmissor e receptor, sendo a localização espacial do transmissor modelada a partir de um MPP, enquanto que o receptor terá uma posição fixa na rede. Tais modelos, como efeito de comparação, serão tomados como referência a taxa de SNR entre transmissor e receptor como um fator de conectividade. Parte das ideias deste capítulo foram tomadas da referência (BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009b).

6.1 Descrição do Modelo de Sistema

Em um contexto geral, uma rede *ad-hoc* sem-fio é composta por um conjunto de nós independentes e identicamente distribuídos no espaço. Além disso, tal rede é caracterizada por sua intensidade, a qual mensura a quantidade de nós presentes na rede por unidade de área. Os nós por sua vez, tem as seguintes características das quais algumas já foram citadas (HAENGGI, 2013):

- os nós são homogêneos no sentido de que eles usam a mesma técnica de transmissão

e recepção em termos das características de antena, tratamento de sinal, etc;

- as potências de transmissão são idênticas e constantes;
- a cada intervalo de tempo, os dispositivos móveis decidem individualmente ser receptor ou transmissor seguindo uma descrição probabilística;
- eles seguem algum protocolo de transmissão específico, por exemplo, o protocolo ALOHA ou CSMA/CA.
- toda unidade móvel receptora está sujeita a interferência gerada por todos os nós transmissores, com exceção de seu próprio transmissor.

Muitas vezes, a distribuição espacial dos dispositivos móveis na rede é modelada aleatoriamente de acordo com alguma distribuição conhecida. Nesta circunstância, a modelagem estocástica dos nós, por distribuições espaciais via Geometria Estocástica, conduz resultados satisfatórios na análise de métricas de desempenho em redes sem-fio (BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009b).

O modelo descrito anteriormente é uma descrição informal de um processo pontual de Poisson estudado no Capítulo 5. Processos pontuais representam uma família de modelos que analisa a estrutura e característica de conjunto de pontos dispostos espacialmente. O modelo de Poisson é ponto de partida para obtenção de muitos outros processos cuja descrição é baseada em que cada ponto é independente de todos os outros existentes. No entanto, para deixar o modelo mais realista, faz-se necessário associar para cada posição do espaço \mathbf{x} uma marca ou mais marcas $m(\mathbf{x})$ dando origem ao MPP. Voltando ao caso da rede sem-fio, para cada transmissor é possível associar o ganho de canal, a potência de transmissão, o acesso ao meio, dentre outros. Para este trabalho de tese, daremos ênfase ao MPP conforme mostrará a próxima seção.

6.1.1 Modelo estocástico da rede *ad-hoc*

Esta seção descreve com detalhes o modelo adotado por todo o restante do trabalho. Especificamente, assumimos o modelo de rede *ad-hoc* com protocolo de acesso ao meio CSMA/CA. O conjunto de nós transmissores (ativos e inativos) em determinado intervalo de tempo é modelado por um MPP homogêneo e estacionário $\Phi = \{(\mathbf{x}_n, m(\mathbf{x}_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$, sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a localização do transmissor e $m(\mathbf{x})$, os rótulos associados a \mathbf{x} . Nesse caso, $m(\mathbf{x}) = (\delta_{\mathbf{x}}, h_{\mathbf{x}})$ em que (BACCELLI; BLASZCZYSZYN; MUHLETHALER, 2006):

- (i) $\{\delta_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \Phi}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., onde $\delta_{\mathbf{x}}$ representa o fator indicador de acesso ao meio, isto é, $\delta_{\mathbf{x}} = 1$ significa que o nó é um transmissor efetivo com probabilidade $\mathbb{P}(\delta_{\mathbf{x}} = 1) = p$, enquanto que $\delta_{\mathbf{x}} = 0$ indica \mathbf{x} como um potencial receptor, com probabilidade $\mathbb{P}(\delta_{\mathbf{x}} = 0) = 1 - p$.

- (ii) $\{h_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \Phi}$ também é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., porém nesse caso cada variável $h_{\mathbf{x}}$ representa o ganho de potência do canal entre o transmissor localizado em \mathbf{x} e um receptor teste localizado em \mathbf{y}_0 . Obviamente, para o caso de um receptor localizado ponto \mathbf{x} , o rótulo $h_{\mathbf{x}}$ não faz sentido, pois não há ganho de canal entre dois dispositivos receptores.

De maneira geral, todos os canais tem um perfil idêntico de desvanecimento, de modo que é suficiente considerar um par transmissor/receptor como referência. Assim, a performance da rede será avaliada, em cada canal, a partir de uma transmissão típica entre um par transmissor e um receptor de referência, porém este receptor estará posicionado na origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Pode-se então removê-los de Φ sem que as propriedades inerentes ao processo sejam modificadas. Esta hipótese é justificada pela distribuição de *Palm* (STOYAN; KENDALL; MECKE, 1996) em conjunto com *Teorema de Slivnyak* (HAENGGI, 2013) o qual envolve o condicionamento de um processo pontual Ψ sobre o evento de que Ψ contém um determinado ponto \mathbf{x}_0 . Então, se \mathcal{P} é uma propriedade qualquer do processo pontual, espera-se que

$$\mathbb{P}(\Psi \text{ ter propriedade } \mathcal{P} \mid \mathbf{x}_0) = \mathbb{P}(\Psi \text{ ter propriedade } \mathcal{P} \mid \mathbf{x}_0 \in \Psi). \quad (6.1)$$

Essencialmente, se o processo pontual estacionário é de Poisson, então o *Teorema de Slivnyak* afirma que (STOYAN; KENDALL; MECKE, 1996)

$$\mathbb{P}(\Psi \text{ ter propriedade } \mathcal{P} \mid \mathbf{o}) = \mathbb{P}(\Psi \cup \{\mathbf{o}\} \text{ ter propriedade } \mathcal{P}). \quad (6.2)$$

Retornado a nossa situação, o MPP Φ adotado nesta tese gera dois processos homogêneos pontuais tipo *thinned* sendo um para os efetivos transmissores, o qual denotaremos por Φ_T , o outro para os receptores em potencial Φ_R . Em linguagem de conjuntos tem-se:

$$\Phi_T = \{\mathbf{x} \in \Phi \mid \delta_{\mathbf{x}} = 1, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0\} \quad \text{e} \quad \Phi_R = \{\mathbf{x} \in \Phi \mid \delta_{\mathbf{x}} = 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0\}, \quad (6.3)$$

em que, Φ_T e Φ_R disjuntos e $\Phi = \Phi_T \cup \Phi_R \cup \{\mathbf{x}_0, \mathbf{o}\}$. Diante da teoria estudada para TPP, as intensidades de Φ_T e Φ_R são, respectivamente, λp e $\lambda(1 - p)$, em que λ é a intensidade do MPP proposto. Além disso, o processo Φ_T pode ser pensado como um MPP mais simples com apenas uma marca e representando o conjunto dos transmissores interferentes, ou seja, os transmissores ativos usando o mesmo canal do transmissor teste. Desta forma, segundo a notação de MPP tem-se $\Psi = \{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}})\}_{\mathbf{x} \in \Phi_T}$.

Na sequência, para modelar a propagação de rádio através do canal sem-fio, os sinais estão sujeitos a dois fenômenos independentes:

- o desvanecimento de pequena escala;

- o modelo que segue a lei de decaimento da potência em função da distância d entre transmissor e receptor e, do expoente η de perda de percurso.

O desvanecimento do canal será do tipo Nakagami- m , com a finalidade de generalizar para os casos de desvanecimento Rayleigh e Rice. Consequentemente, a variável aleatória $h_{\mathbf{x}}$ ($h_{\mathbf{x}} = h$) relativa ao ganho de potência do canal tem distribuição Gama. Com efeito, seja H uma variável Nakagami- m tal que $h = H^2$. Conforme foi comentado na Seção 1.1.2, a PDF de h a qual é uma Gama é dada por:

$$p_h(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m x^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}x\right), \quad (6.4)$$

cujos parâmetros são

$$h \sim \text{Gama}\left(m, \frac{\Omega}{m}\right). \quad (6.5)$$

Para o caso da representação da atenuação do sinal, adotaremos o modelo de função de *path-loss* modificada do tipo:

$$\ell(\|\mathbf{x}\|) = \min\{a^{-\eta}, \|\mathbf{x}\|^{-\eta}\}, \quad (6.6)$$

para $a = 1$ e $\eta = 3$. Assim, deduz-se que o ambiente em questão é *indoor* conforme foi descrito na Tabela 1.1. Esta última expressão por muitas ocasiões será substituída por $\ell(r) = \min\{1, r^{-\eta}\}$ para indicar que distância entre o transmissor localizado em \mathbf{x} e o receptor na origem de \mathbb{R}^2 é igual a r . A maioria dos trabalhos publicados em processos pontuais para redes de comunicação sem-fio, faz uso do modelo de atenuação simplificado $\ell(r) = r^{-\eta}$ (BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009a; HAENGGI; GANTI, 2009). Este proporciona certas facilidades nos desenvolvimentos algébricos em métricas de desempenho, porém tal formulação não é tão realista, pois para transmissores muito próximos do receptor tende acarreta que o sinal tende a ser amplificado, entrando em contradição com a lei de decaimento de potência. Portanto, para evitar este problema preferimos a utilização da versão modificada apresentada em (6.6).

Por hipótese, a interferência será analisada para o nó localizado em $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$ seguindo o processo pontual marcado homogêneo Ψ . Através do conceito de processo *shot-noise* introduzido no Capítulo 2, a interferência \mathcal{I}_{Ψ} na origem pode ser dada por

$$\mathcal{I}_{\Psi} = \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} P h_{\mathbf{x}} \ell(\|\mathbf{x}\|). \quad (6.7)$$

Aqui consideraremos que $P_t(\mathbf{x}) = P = 13$ dBm, para todo interferente \mathbf{x} em Ψ . Noutras palavras, todos os nós transmissores terão potência constante. Como consequência, as taxas instantâneas de SIR e SINR podem ser re-escritas, respectivamente, como

$$\text{SIR} = \frac{P h_{\mathbf{x}_0} \ell(r)}{\mathcal{I}_{\Psi}}, \quad (6.8)$$

sendo $r > 0$ a distância entre transmissor e receptor de referência, e

$$\text{SINR} = \frac{Ph_{x_0}\ell(r)}{W + \mathcal{I}_\Psi}, \quad (6.9)$$

em que W é a potência do ruído térmico do tipo AWGN. É importante comentar que, durante o desenvolvimento do trabalho serão propostos, geralmente, dois modelos em termos da potência de ruído, sendo um deles de potência constante com $W = -104$ dBm e o outro de potência distribuída exponencialmente de média $\mu = -104$ dBm (WANG; ZHOU; REED, 2013), como propósito de verificar o impacto de tais hipóteses sobre as métricas de desempenho que serão propostas.

Por fim, vale ressaltar que os dispositivos móveis transmissores e receptores tratados neste trabalho possuem uma única antena omnidirecional. A tabela a seguir resume todas considerações até o momento comentadas:

Modelo de Sistema	
Rede sem-fio	<i>Ad-hoc</i>
Posições dos interferentes	MPP homogêneo
Intensidade da rede	λ usuários/ m^2
Controle de acesso ao meio	CSMA/CA
Potência de transmissão	Constante para todos os nós
Valor da potência de transmissão	$P = 13$ dBm
Função <i>path-loss</i>	$\ell(r) = \min \{1, r^{-\eta}\}$
Expoente de <i>path-loss</i>	$\eta = 3$
Desvanecimento	Distribuição Nakagami- m
Ganho de canal	Distribuição Gama
Interferência	Processo <i>shot-noise</i>
Ruído	AWGN
Potência de ruído constante	-104 dBm
Potência de ruído aleatória (média)	-104 dBm

Tabela 6.1 – Cenário para o modelo de sistema.

Para o restante desta tese, serão analisadas métricas de performance em redes *ad-hoc* sem-fio segundo o MPP proposto por esta seção. De um modo geral, analisaremos a interferência segundo os critérios de SIR e SINR, porém para o restante deste capítulo estudaremos modelos de conectividade entre transmissor e receptor, porém sem incluir os efeitos de interferência.

6.2 Modelo de conectividade sem interferência

Nesta seção, para um receptor localizado em uma determinada posição de referência, determinaremos o número médio de transmissões bem sucedidas para tal receptor

adotando um modelo simples sem interferência, o qual nos auxiliará como um parâmetro de como um processo pontual atua na performance de uma rede sem-fio.

Portanto, consideremos um modelo de canal de rádio em que a interferência não é considerada. Desta forma, uma transmissão é recebida com sucesso se a relação sinal-ruído (*signal-to-noise-ratio* (SNR), do inglês) está acima de um determinado limiar (*threshold*). Assim, para um transmissor posicionado em \mathbf{x} e receptor em \mathbf{y} , a transmissão é recebida com sucesso se a seguinte desigualdade for satisfeita:

$$\text{SNR}(\mathbf{x}) = \frac{Ph_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\ell(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{W_{\mathbf{y}}} > T, \quad (6.10)$$

em que, $W_{\mathbf{y}}$ é o nível de ruído para a localização $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Portanto, a probabilidade da transmissão ser bem sucedida, sem interferência, a partir de uma transmissão típica entre um transmissor de referência \mathbf{x}_0 e um receptor posicionado na origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 é dada por (BACCELLI; BLASZCZYSZYN; MUHLETHALER, 2006):

$$p(r) = \mathbb{P}(\text{SNR} > T) = \mathbb{P}\left(\frac{Ph_{\mathbf{x}_0}\ell(r)}{W} > T\right). \quad (6.11)$$

Aqui, r representa a distância entre os nós de referência e W a potência do ruído em \mathbf{o} .

O número de transmissões bem sucedidas para um dado limiar, com ausência de interferência, para o receptor teste, é dado por (KEELER; BLASZCZYSZYN; KARRAY, 2013):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} \mathbf{1}(\text{SNR}(\mathbf{x}) > T) \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} \mathbf{1}\left(\frac{Ph_{\mathbf{x}}\ell(\|\mathbf{x}\|)}{W} > T\right) \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} \mathbf{1}\left(\frac{Ph_{\mathbf{x}}}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1}\right) \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (6.12)$$

sendo a função $f(\cdot)$ definida da seguinte forma $f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) = \mathbf{1}\left(\frac{Ph_{\mathbf{x}}}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1}\right)$. Portanto, o número médio \mathcal{N} de transmissões bem sucedidas segue a proposta do Teorema de Campbell¹ o qual é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \mathbb{E}\left\{\sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}})\right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}\left(\frac{Ph}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1}\right) \Lambda_*(d(\mathbf{x}, h)). \end{aligned} \quad (6.13)$$

¹ Ver Seção 5.6.1 para mais detalhes.

Na sequência, diante das hipóteses feitas no capítulo anterior, desenvolveremos esta última integral para obtermos uma expressão fechada para tal operador esperança. Com efeito, a medida de intensidade do MPP sobre o conjunto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ é dada por $\lambda d\mathbf{x}F_h(dr)$, isto é,

$$\Lambda_*(d(\mathbf{x}, h)) = \lambda d\mathbf{x}F_h(dh), \quad (6.14)$$

sendo $F_h(\cdot)$ a CDF da variável Gama $h_{\mathbf{x}}$ para todo $\mathbf{x} \in \Psi$. Assim, fazendo-se esta substituição na integral obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \mathbf{1}\left(\frac{Ph}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1}\right) p_h(h) dh d\mathbf{x} \\ &= \lambda \int_0^\infty p_h(h) \left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}\left(\frac{Ph}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1}\right) d\mathbf{x} \right] dh. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Paralelamente, devido a integral entre colchetes da Equação (6.15), apresentemos um resultado de integração múltipla (à Riemann) que nos permitirá transformar a referida integral dupla em uma integral imprópria simples. Tal resultado é chamado de integração de funções esfericamente simétricas (TESCHL, 2013). Explicitamente, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, segue que uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser esfericamente simétrica, com relação à origem \mathbf{o} de \mathbb{R}^d , se $f(\cdot)$ depende apenas da norma do vetor \mathbf{x} . Assim, por abuso de linguagem escreve-se $f(\|\mathbf{x}\|)$. Além disso, vale o seguinte resultado (TESCHL, 2013)

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} = d \cdot b_d \int_0^\infty f(r) r^{d-1} dr, \quad (6.16)$$

em que b_d é volume de bola aberta d -dimensional de raio unitário conforme apresentado na Equação (5.26). Em particular, para o caso bi-dimensional, a integral de $f(\cdot)$ reduz-se para

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} = 2\pi \int_0^\infty f(r) r dr. \quad (6.17)$$

Retornando à Equação (6.15), o número médio de transmissões bem sucedidas torna-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= 2\pi\lambda \int_0^\infty p_h(h) \left[\int_0^\infty \mathbf{1}\left(\frac{Ph}{TW} > \ell(r)^{-1}\right) r dr \right] dh \\ &= 2\pi\lambda \int_0^\infty r \left[\int_0^\infty \mathbf{1}\left(\frac{Ph}{TW} > \ell(r)^{-1}\right) p_h(h) dh \right] dr \\ &= 2\pi\lambda \int_0^\infty r \left[\int_0^\infty \mathbf{1}\left(h > \frac{TW}{P} \ell(r)^{-1}\right) p_h(h) dh \right] dr. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aplicando-se o resultado (3.29) previamente apresentado no Capítulo 3 o qual relaciona a probabilidade de ocorrência de um evento com operador esperança garante-se as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(h > \frac{TW}{P} \ell(r)^{-1}\right) &= \mathbb{E}\left\{ \mathbf{1}\left(h > \frac{TW}{P} \ell(r)^{-1}\right) \right\} \\ &= \int_0^\infty \mathbf{1}\left(h > \frac{TW}{P} \ell(r)^{-1}\right) p_h(h) dh. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Consequentemente, a esperança da variável aleatória $\mathcal{N}(T)$ é simplificada para

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= 2\pi\lambda \int_0^\infty r \mathbb{P}\left(h > \frac{TW}{P}\ell(r)^{-1}\right) dr \\ &= 2\pi\lambda \int_0^\infty r \left(1 - F_h\left(\frac{TW}{P}\ell(r)^{-1}\right)\right) dr,\end{aligned}\quad (6.20)$$

sendo $F_h(\cdot)$ a CDF de h . Obtivemos portanto uma expressão ainda não fechada para a média de transmissões bem sucedidas, uma vez que não foi dado detalhes do comportamento da potência de ruído.

Analisaremos nas próximas subseções algumas situações: a primeira delas é o caso frequentemente utilizado na literatura em que W tem potência constante e, o segundo caso trata de considerar que a potência de ruído segue uma distribuição de probabilidade, proporcionando assim um cenário mais realista do que considerar potência constante para o fenômeno ruído. Para este trabalho de tese, adotaremos, quando W for uma variável aleatória, que ela tenha distribuição exponencial de média $\mu > 0$. Noutros termos,

$$W \sim \exp\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (6.21)$$

6.2.1 Potência de ruído constante

Diante do modelo de canal proposto no capítulo anterior, a variável aleatória h referente ao ganho de potência do canal tem distribuição Gama, o qual tem parâmetros arbitrários $\alpha = m$ e $\beta = \frac{\Omega}{m}$. Segundo (KRISHNAN, 2006), a CDF de uma variável Gama $h \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ pode ser representada da seguinte forma

$$F_h(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\gamma\left(\alpha, \frac{x}{\beta}\right), \quad (6.22)$$

sendo $\gamma(\cdot, \cdot)$ a função Gama incompleta (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964). No entanto, pela Equação (A.6), isto é,

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x), \quad (6.23)$$

em que $\Gamma(\cdot, \cdot)$ é a função Gama incompleta complementar, a PDF também pode ser dada por

$$F_h(x) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(\alpha, \frac{x}{\beta}\right). \quad (6.24)$$

Admitindo que a potência do ruído no receptor de referência seja constante, então a média do número de transmissões com sucesso é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \int_0^\infty r \Gamma\left(m, \frac{mTW}{\Omega P}\ell(r)^{-1}\right) dr \\ &= \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \left[\underbrace{\int_0^1 r \Gamma\left(m, \frac{mTW}{\Omega P}\right) dr}_{\text{integral } \mathcal{J}_1} + \underbrace{\int_1^\infty r \Gamma\left(m, \frac{mTW}{\Omega P}r^\eta\right) dr}_{\text{integral } \mathcal{J}_2} \right].\end{aligned}\quad (6.25)$$

A soma de integrais $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ é justificada pela aplicação da função de *path-loss* modificada $\ell(\cdot)$ conforme descrita no capítulo anterior. O nosso problema resume-se neste momento a resolução de duas integrais sendo a primeira delas muito simples, pois como a função $\Gamma(\cdot, \cdot)$ é vista como constante na integração, obtém-se

$$\mathcal{J}_1 = \Gamma\left(m, \frac{mTW}{\Omega P}\right) \int_0^1 r \, dr = \frac{1}{2} \Gamma\left(m, \frac{mTW}{\Omega P}\right). \quad (6.26)$$

No caso de \mathcal{J}_2 , fazendo-se a mudança de variável $x = r^\eta$ tal integral fica dada por

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{\eta} \int_1^\infty x^{\frac{2}{\eta}-1} \Gamma\left(m, \frac{mTW}{\Omega P} x\right) dx, \quad (6.27)$$

sendo $\eta > 2$ o expoente de perda de percurso. Esta integral pertence a uma classe de integrais em que um dos termos do integrando é constituído por uma função do tipo Meijer- G (*Meijer G-function*, do inglês). Como a função Gama incompleta complementar $\Gamma(\cdot, \cdot)$ é um caso particular de tal função, conforme mostra a Equação (A.17), ela se enquadra na família de integrações citada. Ademais, objetiva-se transformar a integral \mathcal{J}_2 nessa classe de integrações especiais envolvendo a função Meijer- G , devido a variedade de resultados os quais são passíveis de simulações computacionais. (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2010), por exemplo apresenta uma lista de integrações de tal função especial, bem como algumas propriedades.

Especificamente, a integral \mathcal{J}_2 pode ser representada da seguinte forma

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{\eta} \int_1^\infty x^{-(1-\frac{2}{\eta})} G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mTW}{\Omega P} x \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0, m \end{matrix} \right] dx. \quad (6.28)$$

Aplicando o resultado (A.18) chega-se em

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{\eta} G_{2,3}^{3,0} \left[\frac{TW}{\Omega P} \middle| \begin{matrix} 1, 1-\frac{2}{\eta} \\ -\frac{2}{\eta}, 0, m \end{matrix} \right], \quad (6.29)$$

e conseqüentemente, o número médio de transmissões bem sucedidas para um dado limiar T , é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} [\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2] \\ &= \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(m, \frac{mTW}{\Omega P}\right) + \frac{1}{\eta} G_{2,3}^{3,0} \left[\frac{mTW}{\Omega P} \middle| \begin{matrix} 1, 1-\frac{2}{\eta} \\ -\frac{2}{\eta}, 0, m \end{matrix} \right] \right], \end{aligned} \quad (6.30)$$

isto é,

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \left[\frac{1}{2} G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mTW}{\Omega P} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0, m \end{matrix} \right] + \frac{1}{\eta} G_{2,3}^{3,0} \left[\frac{mTW}{\Omega P} \middle| \begin{matrix} 1, 1-\frac{2}{\eta} \\ -\frac{2}{\eta}, 0, m \end{matrix} \right] \right]. \quad (6.31)$$

sendo esta última igualdade devido a aplicação da Equação (A.17). Como comentado na introdução deste trabalho, os resultados obtidos estão destacados. A seguir apresentemos um resultado equivalente para o caso em que a potência de ruído tem distribuição exponencial de média μ .

6.2.2 Potência de ruído com distribuição exponencial

Nesta subseção, a média de transmissões bem sucedidas para um receptor de referência localizado na origem será dada considerando a hipótese de que a potência de ruído tem distribuição $W \sim \exp(1/\mu)$ cuja PDF é dada por

$$p_W(w) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{1}{\mu}w\right), \quad w > 0. \quad (6.32)$$

No entanto, antes de entrarmos efetivamente no desenvolvimento algébrico das equações, apresentemos um resultado que será utilizado com bastante frequência neste trabalho.

Sejam X e Y duas variáveis contínuas e independentes de PDF's $p_X(\cdot)$ e $p_Y(\cdot)$, respectivamente. Determinemos a probabilidade da variável X ser menor ou igual a Y , isto é, determinemos $\mathbb{P}(X \leq Y)$. Condicionado, portanto, sobre o valor de Y , produz

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq Y) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X \leq Y \mid Y = y) p_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X \leq y \mid Y = y) p_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X \leq y) p_Y(y) dy \quad (\text{independências das variáveis}) \\ &= \int_0^\infty F_X(y) p_Y(y) dy \end{aligned} \quad (6.33)$$

sendo $F_X(\cdot)$ a CDF da variável aleatória X . Em resumo,

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_0^\infty F_X(y) p_Y(y) dy. \quad (6.34)$$

Retornando à Equação (6.20), a esperança $\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}$ também pode ser escrita como

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = 2\pi\lambda \int_0^\infty r (1 - \mathbb{P}(S_r \leq W)) dr, \quad (6.35)$$

com

$$S_r = \frac{P\ell(r)}{T}h. \quad (6.36)$$

Nesse momento, concentraremos na determinação da probabilidade $\mathbb{P}(S_r \leq W)$, em seguida com o resultado obtido, desenvolveremos a integral em (6.35) com propósito de obtenção de uma fórmula fechada equivalente ao caso do ruído de potência constante para $\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}$, conforme o modelo descrito.

Aplicando o resultado obtido na Equação (6.34), tem-se

$$\mathbb{P}(S_r \leq W) = \int_0^\infty F_{S_r}(w) p_W(w) dw. \quad (6.37)$$

Por sua vez,

$$F_{S_r}(w) = F_h\left(\frac{T\ell(r)^{-1}}{P}w\right) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \Gamma\left(m, \frac{mT\ell(r)^{-1}}{\Omega P}w\right). \quad (6.38)$$

Assim, a probabilidade $\mathbb{P}(S_r \leq W)$ fica dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_r \leq W) &= \int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \Gamma\left(m, \frac{mT\ell(r)^{-1}}{\Omega P} w\right) \right] p_W(w) dw \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \Gamma\left(m, \frac{mT\ell(r)^{-1}}{\Omega P} w\right) p_W(w) dw \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mT\ell(r)^{-1}}{\Omega P} w \middle|_{0,m}^1 \right] p_W(w) dw. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Novamente, foi considerado o fato que a função $\Gamma(\cdot, \cdot)$ é um caso particular de uma função Meijer-G. Agora, como W tem distribuição exponencial de média μ , substituindo sua PDF (Eq. 6.32) na integral acima nós obtemos

$$\mathbb{P}(S_r \leq W) = 1 - \frac{1}{\mu\Gamma(m)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{\mu}w\right) G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mT\ell(r)^{-1}}{\Omega P} w \middle|_{0,m}^1 \right] dw. \quad (6.40)$$

Pela Equação (A.20), a probabilidade $\mathbb{P}(S_r \leq W)$ reduz-se a

$$\mathbb{P}(S_r \leq W) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T \ell(r)^{-1}}{\Omega P} \middle|_{0,m}^{0,1} \right], \quad (6.41)$$

e substituindo tal expressão em (6.35), a média de transmissões bem sucedidas fica

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \int_0^\infty r G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T \ell(r)^{-1}}{\Omega P} \middle|_{0,m}^{0,1} \right] dr. \quad (6.42)$$

Como a função de atenuação do sinal é dada por $\ell(r) = \min\{1, r^{-\eta}\}$, decompõem-se a esperança $\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}$ como a soma de duas integrais \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 , isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \left[\underbrace{G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} \middle|_{0,m}^{0,1} \right] \int_0^1 r dr}_{\text{integral } \mathcal{J}_1} + \underbrace{\int_1^\infty r G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} r^\eta \middle|_{0,m}^{0,1} \right] dr}_{\text{integral } \mathcal{J}_2} \right] \\ &= \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \left[\frac{1}{2} G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} \middle|_{0,m}^{0,1} \right] + \underbrace{\int_1^\infty r G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} r^\eta \middle|_{0,m}^{0,1} \right] dr}_{\text{integral } \mathcal{J}_2} \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Com a mudança de variável $x = r^\eta$ para integral \mathcal{J}_2 chega-se em

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{\eta} \int_1^\infty x^{\frac{2}{\eta}-1} G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} x \middle|_{0,m}^{0,1} \right] dx, \quad (6.44)$$

que por sua vez, com o propósito de aplicar o resultado (A.18), iremos escrevê-la equivalente como

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{\eta} \int_1^\infty x^{-(1-\frac{2}{\eta})} (x-1)^{1-1} G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} x \middle|_{0,m}^{0,1} \right] dx. \quad (6.45)$$

Consequentemente, a integral \mathcal{J}_2 fica dada por

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{\eta} G_{3,3}^{3,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} \middle| \begin{matrix} 0, 1, 1 - \frac{2}{\eta} \\ -\frac{2}{\eta}, 0, m \end{matrix} \right]. \quad (6.46)$$

Finalmente, número médio de transmissões bem sucedidas é igual a

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = \frac{2\pi\lambda}{\Gamma(m)} \left[\frac{1}{2} G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} \middle| \begin{matrix} 0, 1 \\ 0, m \end{matrix} \right] + \frac{1}{\eta} G_{3,3}^{3,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} \middle| \begin{matrix} 0, 1, 1 - \frac{2}{\eta} \\ -\frac{2}{\eta}, 0, m \end{matrix} \right] \right]. \quad (6.47)$$

Este, por sua vez, é um resultado equivalente ao proposto na Equação (6.31).

Na continuação deste capítulo, propomos as mesmas métricas de transmissões com êxito em um outro modelo, para potência de ruído constante e aleatório, tomando-se como base a área de cobertura em que o receptor teste está inserido em relação a cada transmissor.

6.3 Modelo alternativo de conectividade

Esta seção dedica-se a investigação de um modelo alternativo de conectividade em termos da distância aleatória entre o receptor teste e nós transmissores efetivos da rede, preservando a ideia apresentada na seção anterior de que a quantidade de transmissões bem sucedidas sem interferência é analisada a partir de valores de SNR acima de um determinado limiar. Aqui, exploraremos a distância entre o receptor/transmissor em um outro contexto. Inicialmente, consideraremos cada transmissor efetivo é centro de um disco (bola aberta) de raio aleatório e , em seguida, verificaremos se o dispositivo de recepção se encontra dentro da área do referido círculo. Diante desta construção, tem-se que a quantidade de transmissões bem sucedidas no processo, está associada a região de cobertura a qual o receptor está inserido. A Figura 6.1 descreve uma situação em que a transmissão é considerada bem sucedida, em que um receptor localizado em \mathbf{y} pertence a bola aberta centrada na posição espacial do transmissor efetivo de raio aleatório R_x . Este

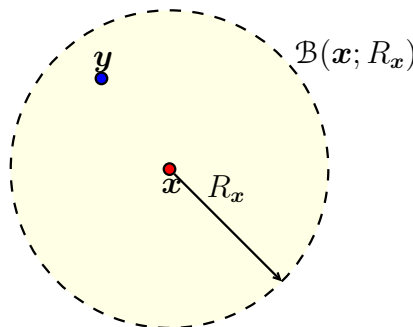


Figura 6.1 – Caso de uma transmissão bem sucedida.

argumento é justificado devido aos nós estarem dispostos espacialmente de forma aleatória

segundo um modelo pontual, assim as potências de recepção tornam-se variáveis aleatórias em função de alguns parâmetros como, por exemplo, os efeitos do meio e distância.

Por outro lado, a Figura 6.1 sugere que, se transferirmos o centro da bola aberta para a posição onde se encontra o receptor e, adotando o mesmo raio R_x , tem-se que, nesta situação, o transmissor se encontra dentro do disco $\mathcal{B}(\mathbf{y}; R_x)$, ainda assim, continuaremos com a proposta de uma transmissão bem sucedida. Portanto, dentro deste contexto, desenvolveremos o restante desta seção. A comprovação matemática deste argumento é explicado no próximo parágrafo.

Antes de entrarmos no modelo alternativo proposto nesta seção, em termos da SNR, consideremos um MPP arbitrário $\Phi = \{(\mathbf{x}, R_x)\}$ homogêneo e intensidade λ , no qual $R_x > 0$ é uma variável aleatória. Fixando um ponto \mathbf{y} de \mathbb{R}^d , tem-se para cada \mathbf{x} do processo, este ponto pode pertencer ou não a bola aberta de centro \mathbf{y} e raio R_x . De fato, uma vez que \mathbf{y} esteja na bola aberta $\mathcal{B}(\mathbf{x}; R_x)$, tem-se por definição $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < R_x$. Como $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, conclui-se que \mathbf{x} pertence à bola aberta $\mathcal{B}(\mathbf{y}; R_x)$. Na figura a seguir, são tomados dois pontos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 e suas respectivas bolas abertas $\mathcal{B}(\mathbf{y}; R_{x_1})$ e $\mathcal{B}(\mathbf{y}; R_{x_2})$, sendo $\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{B}(\mathbf{y}; R_{x_1})$ e $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{y}; R_{x_2})$.

O modelo de conectividade é baseado na bola aberta centrada em \mathbf{y} , onde admite-se sucesso na transmissão de um sinal emitido pelo nó em \mathbf{x} para um receptor em \mathbf{y} se \mathbf{x} pertence a bola aberta $\mathcal{B}(\mathbf{y}; R_x)$, cujo raio R_x é aleatório. Novamente, de acordo com a Figura 6.2, o caso de \mathbf{x}_2 pertencer a bola aberta $\mathcal{B}(\mathbf{y}; R_{x_1})$ não é levado em consideração. Portanto, o número de transmissões bem sucedidas diante do modelo é dado por

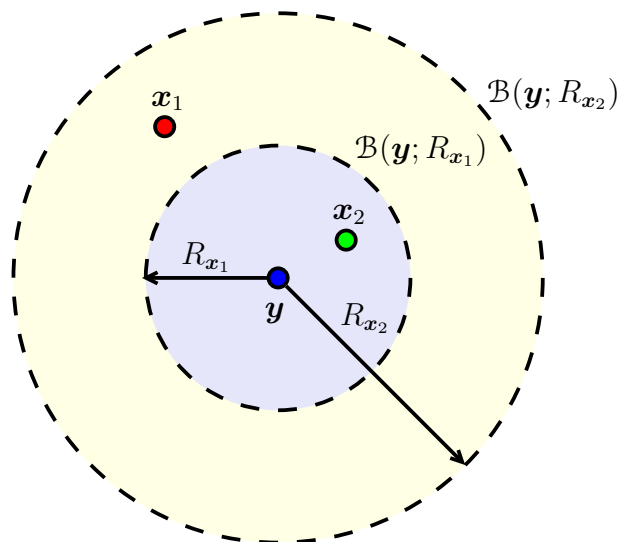


Figura 6.2 – Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(\mathbf{y}) &= \sum_{(\mathbf{x}, R_{\mathbf{x}}) \in \Phi} \mathbf{1}(\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{y}; R_{\mathbf{x}})) \\
 &= \sum_{(\mathbf{x}, R_{\mathbf{x}}) \in \Phi} \mathbf{1}(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < R_{\mathbf{x}}).
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

e a respectiva média é

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(\mathbf{y})\} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r) \Lambda_*(d(\mathbf{x}, r)). \tag{6.49}$$

O desenvolvimento algébrico desta integral é semelhante ao apresentado Seção 6.2 para a obtenção da Equação (6.20), desta forma alguns detalhes serão omitidos. Seja $p_R(\cdot)$ a PDF relativa a variável $R_{\mathbf{x}}$ e a integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r) d\mathbf{x} = \mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{y}; r)), \tag{6.50}$$

com $\mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; r))$ o volume de uma bola aberta d -dimensional de raio r cuja medida independe de onde a bola esteja centrada. Em particular, para uma bola aberta centrada na origem \mathbf{o} de \mathbb{R}^d

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r) d\mathbf{x} = \mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{y}; r)) = \mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; r)). \tag{6.51}$$

Diante dessas considerações, o número médio de transmissões com sucesso fica

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\mathcal{N}(\mathbf{y})\} &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathbf{1}(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r) p_R(r) dr d\mathbf{x} \\
 &= \lambda \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{y}; r)) d\mathbf{x} \right] dr \\
 &= \lambda \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{o}; r)) d\mathbf{x} \right] dr \\
 &= \lambda \int_0^\infty p_R(r) \mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; r)) dr.
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Por sua vez, a medida $\mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; r))$ pode ser dada em termos do volume de uma bola aberta de raio unitário a partir da seguinte relação (BADDELEY *et al.*, 2007)

$$\mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; r)) = r^d \mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; 1)). \tag{6.53}$$

Desta forma, para a esperança de $\mathcal{N}(\mathbf{y})$ tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\mathcal{N}(\mathbf{y})\} &= \lambda \mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; 1)) \int_0^\infty r^d p_R(r) dr \\
 &= \lambda \mathcal{V}_d(\mathcal{B}(\mathbf{o}; 1)) \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}^d\},
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Particularmente, para o caso bidimensional e para um receptor localizado na origem \mathbf{o} , a média de transmissores com sucesso baseado numa bola aberta centrada em \mathbf{o} resume-se para

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(\mathbf{o})\} = \lambda \pi \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}^2\}. \tag{6.55}$$

Perante o modelo proposto, é possível fazer uma conexão com o esquema da Seção 6.2 o qual considera que uma transmissão é recebida com sucesso se a relação sinal-ruído está acima de um limiar específico. De fato, iniciemos com a Equação (6.12), ou seja,

$$\mathcal{N}(T) = \sum_{(x, h_x) \in \Psi} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x \ell(\|\mathbf{x}\|)}{W} > T \right). \quad (6.56)$$

Decompondo o somatório em duas parcelas: a primeiras delas tomando pontos relativos ao processo cuja norma é menor ou igual a 1, e a outra parcela para caso contrário. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| \leq 1}} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x \ell(\|\mathbf{x}\|)}{W} > T \right) + \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| > 1}} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x \ell(\|\mathbf{x}\|)}{W} > T \right) \\ &= \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| \leq 1}} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \right) + \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| > 1}} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x}{TW} > d(\mathbf{x}, \mathbf{o})^\eta \right) \\ &= \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| \leq 1}} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \right) + \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| > 1}} \mathbf{1} \left(\left(\frac{Ph_x}{TW} \right)^{\frac{1}{\eta}} > d(\mathbf{x}, \mathbf{o}) \right) \\ &= \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| \leq 1}} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \right) + \sum_{\substack{(x, h_x) \in \Psi \\ \|\mathbf{x}\| > 1}} \mathbf{1} \left(\mathbf{x} \in \mathcal{B} \left(\mathbf{o}; \left(\frac{Ph_x}{TW} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right) \right) \\ &= \sum_{(x, h_x) \in \Psi} \mathbf{1} \left(\frac{Ph_x}{TW} > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1 \right) + \mathbf{1} \left(\mathbf{x} \in \mathcal{B} \left(\mathbf{o}; \left(\frac{Ph_x}{TW} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.57)$$

e a média do processo fica escrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \left[\mathbf{1} \left(\tau > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1 \right) + \mathbf{1} \left(\mathbf{x} \in \mathcal{B} \left(\mathbf{o}; \tau^{\frac{1}{\eta}} \right) \right) \right] \Lambda_*(d\mathbf{x}, d\tau) \\ &= \lambda \left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \mathbf{1} \left(\tau > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1 \right) p_R(\tau) d\tau d\mathbf{x}}_{\text{integral } \mathcal{J}_1} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \mathbf{1} \left(\mathbf{x} \in \mathcal{B} \left(\mathbf{o}; \tau^{\frac{1}{\eta}} \right) \right) p_R(\tau) d\tau d\mathbf{x}}_{\text{integral } \mathcal{J}_2} \right], \end{aligned} \quad (6.58)$$

sendo $\Lambda_*(d(\mathbf{x}, \tau)) = \lambda d\mathbf{x} F_R(d\tau)$ e $F_R(\cdot)$ a CDF da variável $R = \frac{Ph_x}{TW}$. Neste ponto de vista, tal variável normaliza o ganho de canal entre transmissor/receptor teste. Portanto,

tal resultado pode ser decomposto em duas integrais \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 . Para \mathcal{J}_1 observa-se que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_1 &= \int_0^\infty P_R(\tau) \left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}(\tau > \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \|\mathbf{x}\| \leq 1) d\mathbf{x} \right] d\tau \\
 &= \int_0^\infty P_R(\tau) \left[2\pi \int_0^1 \mathbf{1}(\tau > 1) r dr \right] d\tau \\
 &= \pi \int_0^\infty \mathbf{1}(\tau > 1) p_R(\tau) d\tau \\
 &= \pi (1 - F_R(1)).
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Por outro lado, para a integral \mathcal{J}_2 o trabalho já foi basicamente realizado na conclusão da Equação (6.55), ou seja, $\mathcal{J}_2 = \pi \mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\}$. Portanto, segundo as integrais \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 , a média de transmissões com sucesso (com SNR acima de um limiar T) é dada por

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = \lambda\pi \left[(1 - F_R(1)) + \mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\} \right]. \tag{6.60}$$

Outra vez, investigaremos tal resultado em face das seguintes situações: o potência de ruído constante e potência de ruído com variável exponencial de média μ , como vem a seguir.

6.3.1 Potência de ruído constante

Embora tenhamos uma expressão bem simplificada para $\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}$, ainda faz-se necessário desenvolvê-la, posto que a variável aleatória R é dada por $R = \frac{Ph_x}{TW}$. Começemos portanto pela CDF $F_R(\cdot)$ da variável R . Como, por definição, $F_R(r) = \mathbb{P}(R \leq r)$, segue então

$$F_R(r) = \mathbb{P}\left(\frac{Ph_x}{TW} \leq r\right) = \mathbb{P}\left(h_x \leq \frac{TW}{P}r\right) = F_h\left(\frac{TW}{P}r\right). \tag{6.61}$$

Pelas Equações (6.24) e (A.17), a CDF $F_R(\cdot)$ fica dada por

$$F_R(r) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \Gamma\left(m, \frac{mWT}{\Omega P}r\right) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mWT}{\Omega P}r \middle| 1 \right]_{0,m}. \tag{6.62}$$

Em particular, para $r = 1$, segue que

$$F_R(1) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mWT}{\Omega P} \middle| 1 \right]_{0,m}. \tag{6.63}$$

Na sequência, desenvolveremos a esperança $\mathbb{E}\{R^a\}$, sendo a um número real positivo. Primeiramente, atentemos para as seguinte igualdade:

$$\mathbb{E}\{R^a\} = \left(\frac{P}{TW}\right)^a \mathbb{E}\{h_x^a\}. \tag{6.64}$$

Como h_x tem distribuição Gama, tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{h_x^a\} &= \int_0^\infty s^a p_h(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \int_0^\infty s^{(m+a)-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}s\right) ds
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

Esta integral pode ser encontrada no Apêndice deste trabalho (ver Equação (A.3)). Fazendo-se a devida substituição para esta integração, encontra-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{h_x^a\} &= \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \left(\frac{m}{\Omega}\right)^{-(m+a)} \Gamma(m+a) \\ &= \left(\frac{\Omega}{m}\right)^a \frac{\Gamma(m+a)}{\Gamma(m)}.\end{aligned}\quad (6.66)$$

No entanto, o que nos interessa é o valor de a para $\frac{2}{\eta}$, ou seja, $a = \frac{2}{\eta}$. Dest forma, a esperança $\mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\}$ fica dada por

$$\mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\} = \left(\frac{\Omega P}{mTW}\right)^{\frac{2}{\eta}} \frac{1}{\Gamma(m)} \Gamma\left(m + \frac{2}{\eta}\right).\quad (6.67)$$

Em conclusão, o número médio de transmissões com sucesso é dado por

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = \frac{\lambda\pi}{\Gamma(m)} \left[G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mWT}{\Omega P} \middle|_{0,m}^1 \right] + \left(\frac{\Omega P}{mTW}\right)^{\frac{2}{\eta}} \Gamma\left(m + \frac{2}{\eta}\right) \right].\quad (6.68)$$

6.3.2 Potência de ruído com distribuição exponencial

Para o caso da potência de ruído ter distribuição exponencial de média μ , devemos novamente calcular as expressões para a CDF da variável aleatória R e a esperança $\mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\}$. Contudo, aproveitaremos os resultados similares desenvolvidos na seção anterior com relação ao mesmo assunto. Para a CDF $F_R(\cdot)$ tem-se

$$F_R(r) = \mathbb{P}\left(\frac{Pr^{-1}}{T} h_x \leq W\right) = \mathbb{P}(S_r \leq W),\quad (6.69)$$

sendo $S_r = \frac{Pr^{-1}}{T} h_x$. Como

$$F_{S_r}(w) = F_h\left(\frac{rT}{P} w\right) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{mrWT}{\Omega P} w \middle|_{0,m}^1 \right],\quad (6.70)$$

e pela Equações (6.37) e (6.40), segue que

$$F_R(r) = \mathbb{P}(S_r \leq W) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} r \middle|_{0,m}^{0,1} \right].\quad (6.71)$$

Portanto, a CDF $F_P(\cdot)$ para $r = 1$ é dada por

$$F_R(1) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} G_{2,2}^{2,1} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} \middle|_{0,m}^{0,1} \right].\quad (6.72)$$

Por fim, determinemos a esperança $\mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\}$. Como as variáveis h_x e W são independentes, tal hipótese nos conduz as seguintes igualdades

$$\mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\} = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{Ph_x}{TW}\right)^{\frac{2}{\eta}}\right\} = \left(\frac{P}{T}\right)^{\frac{2}{\eta}} \mathbb{E}\left\{h_x^{\frac{2}{\eta}}\right\} \mathbb{E}\left\{W^{-\frac{2}{\eta}}\right\}.\quad (6.73)$$

A esperança $\mathbb{E}\left\{h_x^{\frac{2}{\eta}}\right\}$ já foi desenvolvida em (6.66), basta-nos agora determinar $\mathbb{E}\left\{W^{-\frac{2}{\eta}}\right\}$. No entanto, daremos um resultado mais geral, determinemos $\mathbb{E}\{W^{-a}\}$, para $0 < a < 1$ e $W \sim \exp\left(\frac{1}{\mu}\right)$, como demonstrado a seguir. Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{W^{-a}\} &= \int_0^{\infty} w^{-a} p_W(w) dw \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} w^{(1-a)-1} \exp\left(-\frac{1}{\mu}w\right) dw.\end{aligned}\quad (6.74)$$

Aplicando a Equação (A.3) a esta última integral, encontra-se

$$\mathbb{E}\{W^{-a}\} = \frac{1}{\mu^a} \Gamma(1-a). \quad (6.75)$$

Assim, para $a = \frac{2}{\eta}$ tem-se

$$\mathbb{E}\{W^{-\frac{2}{\eta}}\} = \frac{1}{\mu^{\frac{2}{\eta}}} \Gamma\left(1 - \frac{2}{\eta}\right) \quad (6.76)$$

e

$$\mathbb{E}\{R^{\frac{2}{\eta}}\} = \left(\frac{\Omega P}{\mu m T}\right)^{\frac{2}{\eta}} \frac{1}{\Gamma(m)} \Gamma\left(m + \frac{2}{\eta}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{\eta}\right). \quad (6.77)$$

Portanto, juntando as informações obtidas obtém-se a média de transmissões bem sucedidas em (6.21) é dada por

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = \frac{\lambda\pi}{\Gamma(m)} \left[G_{1,2}^{2,0} \left[\frac{\mu m T}{\Omega P} \middle|_{0,m}^1 \right] + \left(\frac{\Omega P}{\mu m T}\right)^{\frac{2}{\eta}} \Gamma\left(m + \frac{2}{\eta}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{\eta}\right) \right]. \quad (6.78)$$

Para concluirmos esta seção, determinemos a probabilidade de se obter pelo menos uma única transmissão com sucesso ao considerar o receptor localizado na origem do espaço euclidiano. A probabilidade das transmissões não serem bem sucedidas é dada a partir da *probabilidade vazia* do processo do pontual a qual está devidamente apresentada na Equação (4.30). Assim,

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}(T) = 0) = \exp(-\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}). \quad (6.79)$$

Consequentemente, a probabilidade de pelo menos uma transmissão ser bem sucedida é igual a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{N}(T) \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(T) = 0) \\ &= 1 - \exp(-\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}),\end{aligned}\quad (6.80)$$

ou seja,

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}(T) \geq 1) = 1 - \exp(-\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}), \quad (6.81)$$

sendo a esperança $\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}$ dada na Equação (6.78).

Todos os resultados até então destacados, serão devidamente investigados computacionalmente na seção a seguir.

6.4 Avaliação numérica dos resultados

Nesta seção, resultados experimentais são fornecidos com base na avaliação das expressões do número médio de transmissões bem sucedidas para um receptor de referência, e todos os resultados são obtidos a partir das fórmulas analíticas desse capítulo. Além disso, verificaremos o impacto do fator de severidade de desvanecimento da distribuição Nakagami- m , bem como o impacto da intensidade λ usuário por metro quadrado do processo pontual MPP, sobre a média do número de sucessos. Vale comentar que na avaliação das métricas de desempenho propostas por este trabalho, as quais tem o fator m como parâmetro, os valores tomados para tal índice de desvanecimento estarão compreendidos no intervalo semi-aberto $(0, 20]$. A escolha para este tamanho de intervalo deve-se apenas por questões teóricas com o intuito de estudar o comportamento das curvas resultantes para altos valores de m , embora que na prática não se alcance este valor máximo no intervalo.

Por questões de simplicidade, os modelos sem interferência com potência de ruído constante e potência segundo uma variável aleatória exponencial da Seção 6.2 serão denominados de ‘Modelo 1’, enquanto que os modelos da seção subsequente serão denominados de ‘Modelo 2’.

As Figura 6.3 e 6.4, mostram a comparação dos Modelos 1 e 2, sendo a primeira delas para o caso de potência de ruído constante e outra para potência de ruído exponencialmente distribuída. Noutros termos, na Figura 6.3 comparamos as Equações (6.31) e (6.68), enquanto que na Figura 6.4 a comparação é feita para as Equações (6.47) e (6.78), respectivamente. Além do mais, adotamos três limiares, a saber: 8 dB, 10 dB e 12 dB; e o comportamento da curva referente a média de transmissões bem sucedidas é dada em função do limiar T considerando diferentes valores do fator m do desvanecimento de pequena escala Nakagami- m .

Ao analisar os modelos separadamente e diante das hipóteses consideradas, uma transmissão é recebida com sucesso se a SNR está acima de um determinado limiar, então era de se esperar que ao aumentar o valor de T , a média do número de sucessos decrescesse diante dos mesmos parâmetros. Por exemplo, para o caso do Modelo 2, na passagem de 8 para 10 dB, tem-se uma redução aproximada de 27% do número de sucessos, enquanto que de 8 para 12 dB, a redução no números de sucessos fica em torno de 45% e tais taxas se mantém constantes no aumento dos parâmetros m .

Por sua vez, observando o comportamento conjunto dos modelos 1 e 2, notemos que para um mesmo limiar, as maiores médias dos números de sucessos nas transmissões

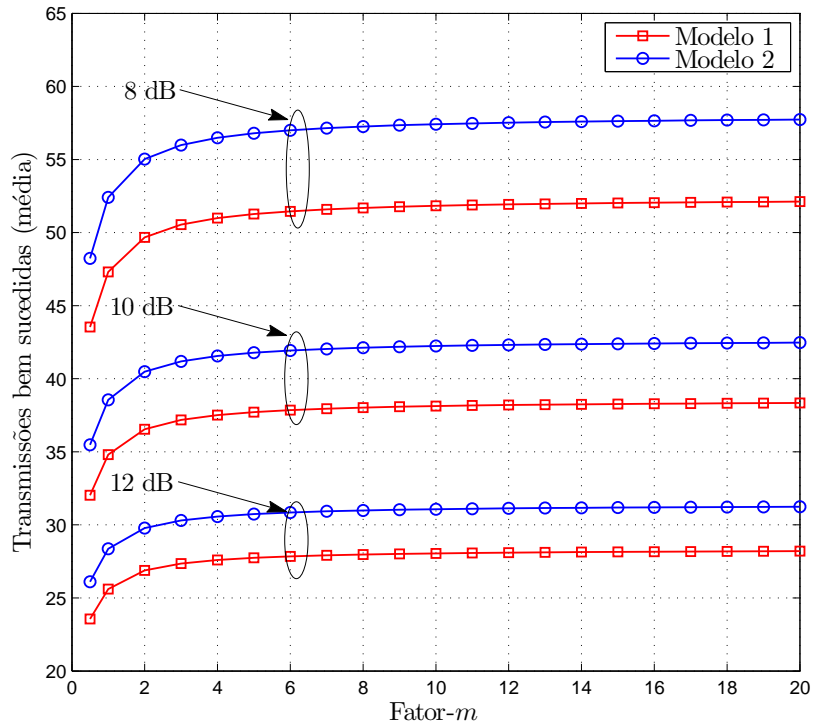


Figura 6.3 – Comparação entre as Equações (6.31) (do Modelo 1) e (6.68) (do Modelo 2) para o caso da potência de ruído constante.

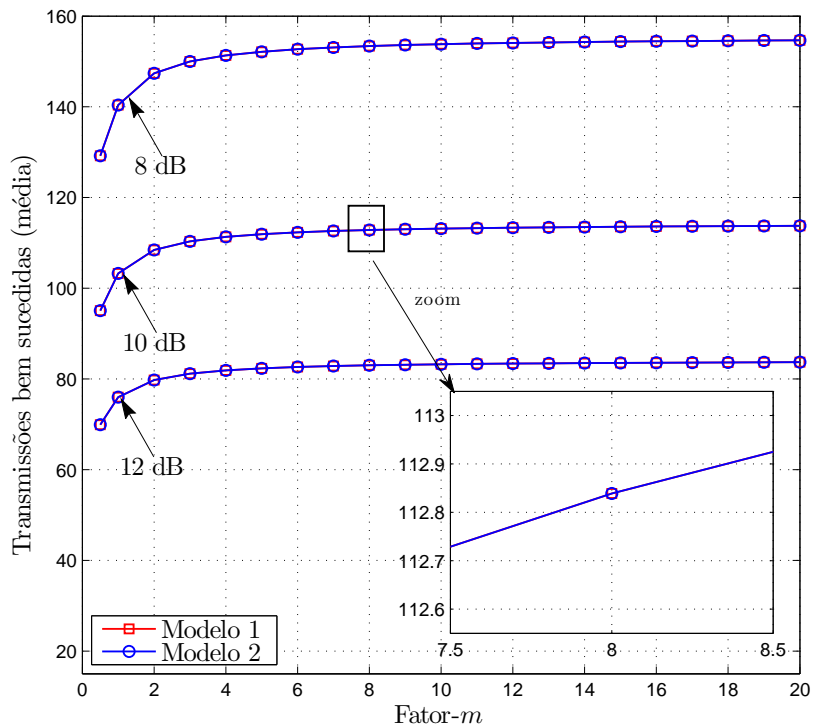


Figura 6.4 – Comparação entre as Equações (6.47) (do Modelo 1) e (6.78) (do Modelo 2) para o caso da potência de ruído distribuída exponencialmente.

são encontradas no Modelo 2 para um valor de m fixo. Este ganho deve-se ao fato que tal modelo, associado ao processo pontual MPP, apresenta uma variável aleatória R que

corrige o ganho de canal h_x entre um determinado transmissor posicionado aleatoriamente na rede e o receptor de referência.

No caso da Figura 6.4, a potência de ruído para ambos modelos seguem uma distribuição exponencial de média $\mu = -104$ dBm, ao invés de uma potência constante nesse valor como foi o caso anterior. Nota-se que para o respectivo limiar T , a média de transmissões bem sucedidas é maior que qualquer um dos casos em considerar a potência de ruído constante. Mais detalhes deste comparativo encontra-se na Figura 6.5 na sequência. Além disso, os Modelos 1 e 2 apresentaram praticamente o mesmo desempenho, embora que os dados simulados se mostraram ligeiramente distintos. Para ilustrar esta situação, foi feito uma ampliação da imagem à curva para 10 dB, no intervalo do fator- m compreendido entre 7,5 a 8,5. Justifica-se esta situação devido a hipótese mais realista em considerar a potência de ruído como fenômeno aleatório.

Como comentado no parágrafo anterior, confrontaremos os resultados obtidos para o caso de potência de ruído constante e ruído cuja potência é distribuída exponencialmente. Para que a comparação fique justa, fixemos um limiar $T = 10$ dB e um modelo específico, no caso o Modelo 2, o qual obteve melhores resultados em referência ao Modelo 1 e, ainda possui uma expressão matemática mais simples. Além disso, para os próximos resultados nos deteremos ao Modelo 2. Portanto, na Figura 6.5, que compara as Equações (6.68) e (6.78), evidencia esta diferença na média nas transmissões bem sucedidas a qual se dá acima de 70 acessos. Novamente, isto deve-se ao fato que a hipótese do ruído ser variável, proporciona ao MPP mais uma marca a ser considerada ao processo pontual homogêneo.

A Figura 6.6 avalia de maneira mais clara o impacto do coeficiente de severidade da distribuição Nakagami- m sobre o número médio de sucessos. Desta forma, optamos em considerar apenas uma única curva para acompanhar o comportamento da curva em termos do aumento do fator m . Conforme estudado na Subseção 1.1.2, o fenômeno de desvanecimento será mais acentuado para os valores $m = 0,5$ e $m = 1$ os quais representam as distribuições gaussiana unilateral e Rayleigh, respectivamente, e ele irá se atenuar quando atribui-se a m valores mais altos. Implica-se, portanto, na redução de tal fenômeno. Como consequência, a média de sucessos é menor e diretamente proporcional ao fator- m e tende a estabilizar-se quando m assume valores elevados.

Na sequência, as Figuras 6.7 e 6.8 são apresentadas como objetivo de visualizar o impacto da intensidade do processo pontual marcado sobre a média de transmissões bem sucedidas para o caso da potência de ruído ser exponencialmente distribuída. Em ambos os casos, a média $\mathbb{E}\{N(T)\}$ obtida na Equação (6.68) (bem como os outros resultados equivalentes) é uma função linear crescente em termos da intensidade λ . Esta fator de crescimento é devido a ausência dos efeitos de interferência no processo. Na Figura 6.7, fixou-se um limiar de 10 dB e os fatores da distribuição Nakagami- m , isto é, $m = 1, 2$ e

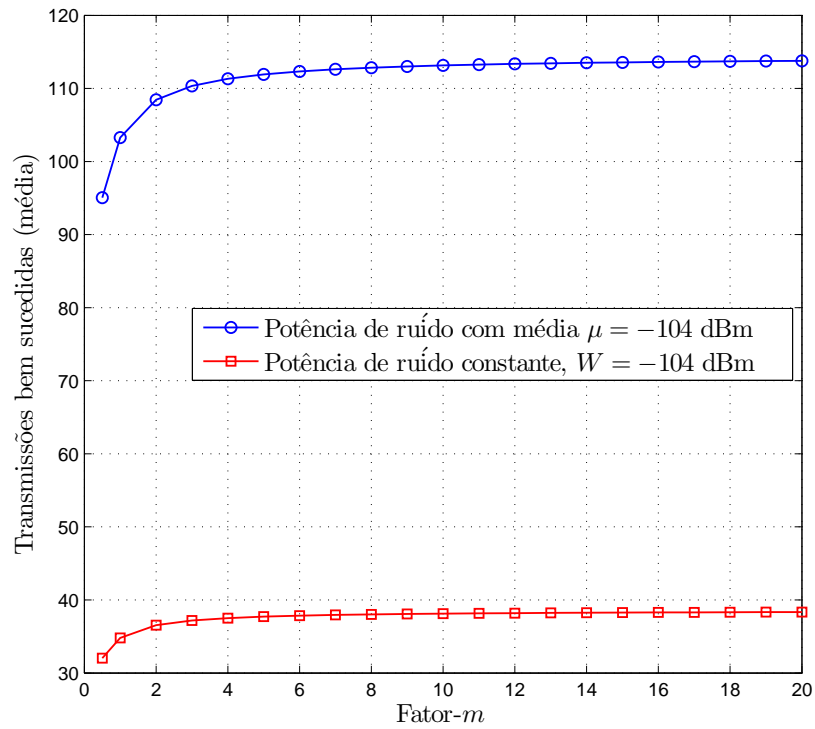


Figura 6.5 – Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta. Comparação entre as Equações (6.68) e (6.78)

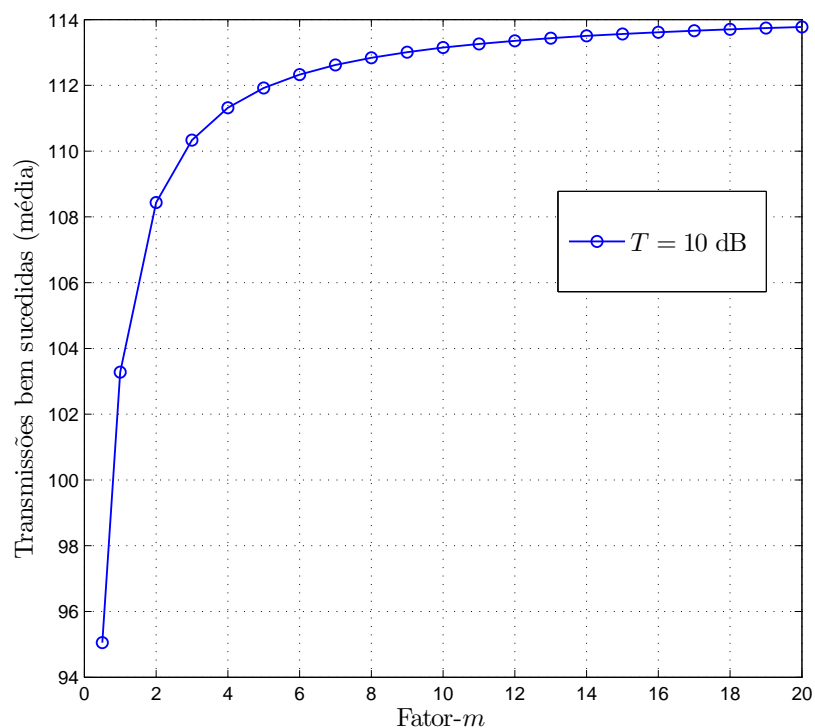


Figura 6.6 – Média de transmissões bem sucedidas considerando o Modelo 2 com potência de ruído aleatório.

20. Como previsto, a média do número de sucessos tende a ser maior para um maior fator de severidade da distribuição. No entanto, a diferença entre as retas praticamente inexistente

para intensidades muito baixas. Além disso, não há uma diferença muito acentuada na média para os casos extremos $m = 1$ e $m = 20$. Por outro lado, o impacto da interferência na Figura 6.8 é investigado em um outro contexto. Aqui, para um específico valor de m , no caso $m = 2$, os gráficos das funções linear foram construídos a partir dos limiares 8, 10 e 12 dB. Contudo, a medida que intensidade aumenta, as retas tendem a ter um distanciamento bem mais acentuado que na figura anterior. Naturalmente, fixando um valor de intensidade, o aumento no limiar para que uma transmissão ser recebida com sucesso, implica na diminuição da média $\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}$.

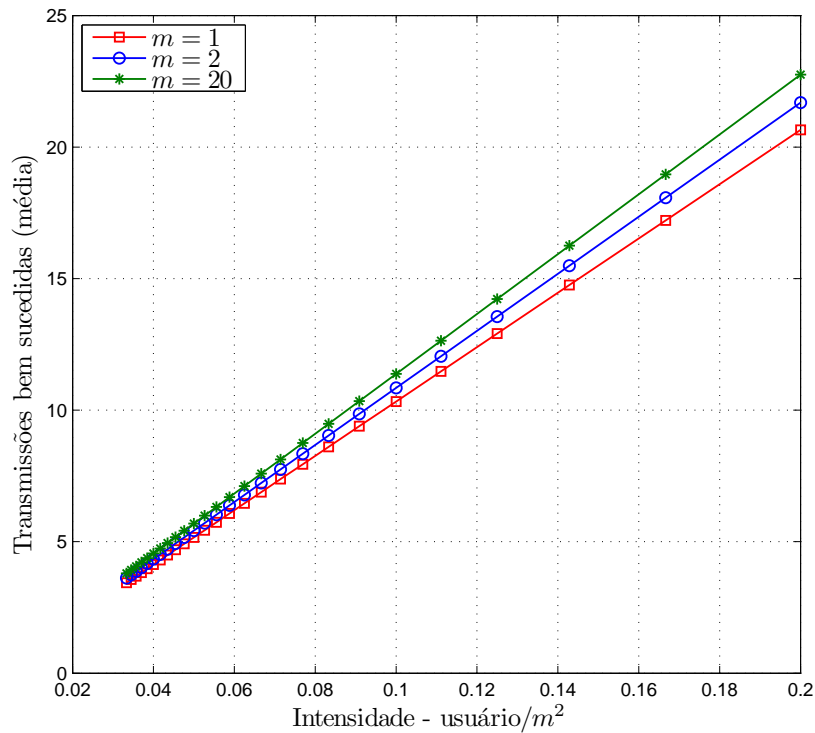


Figura 6.7 – Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta ($T = 10$ dB).

Por fim, a Figura 6.9 retrata o comportamento da curva de probabilidades de se obter pelo menos uma transmissão bem sucedida em termos da intensidade da rede em um ambiente *indoor* sem interferência conforme encontrado na Equação (6.81). Observemos que mesmo para um limiar elevado, a probabilidade de se conseguir no mínimo 1 sucesso de transmissão é de pelo menos 93% e quando tem-se uma intensidade maior tal métrica tende a 100%. Fundamenta-se tal argumento devido aos transmissores efetivos estarem mais próximos do receptor teste no caso de intensidades mais elevadas.

6.5 Síntese

No início, este capítulo se deteve a descrever o modelo de rede do sistema o qual será empregado por toda a tese. Tal modelo visa estabelecer uma relação entre os nós

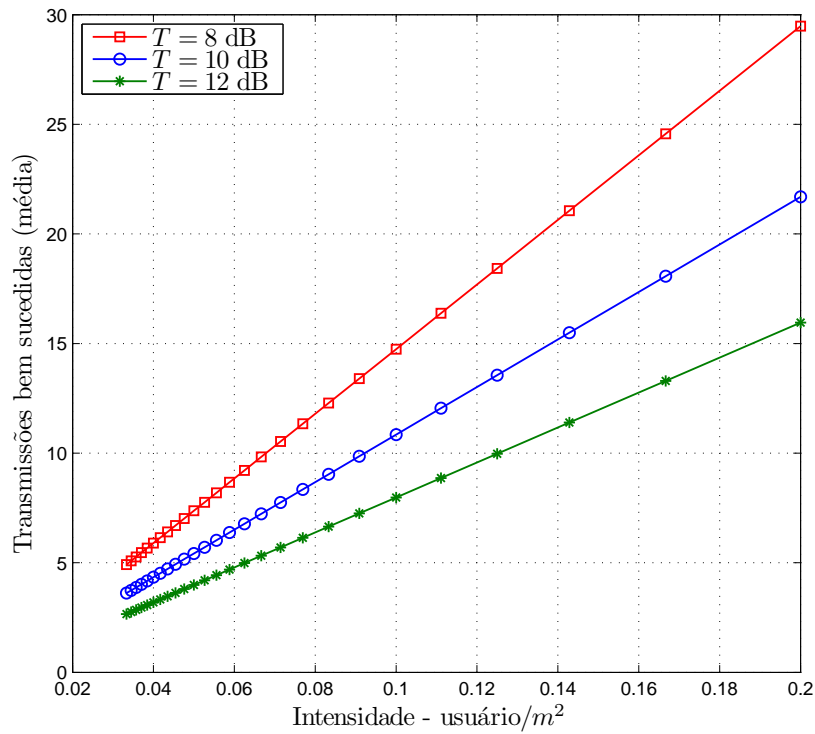


Figura 6.8 – Modelo de conectividade a partir de uma bola aberta ($m = 2$).

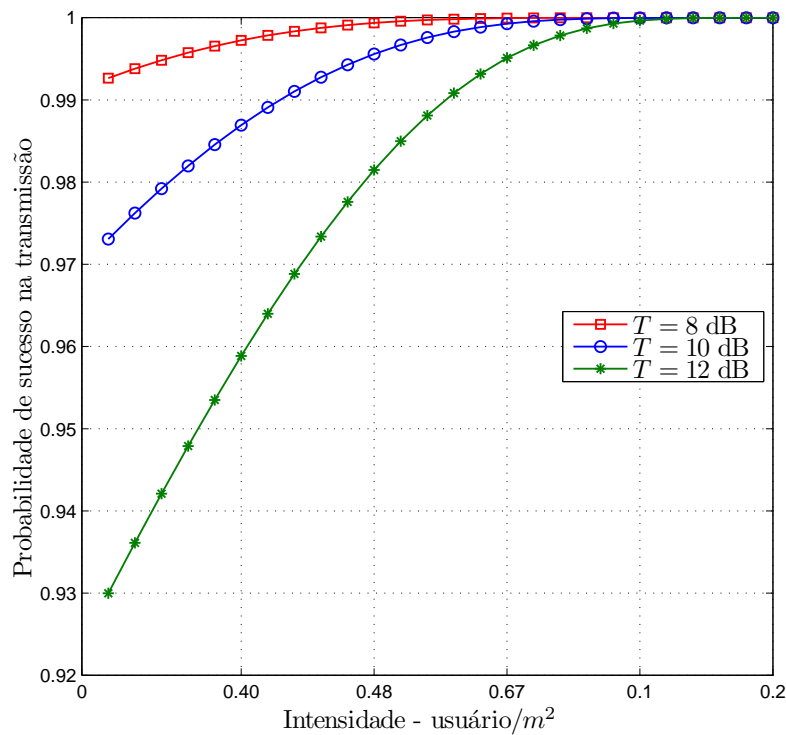


Figura 6.9 – Probabilidade de se obter pelo menos uma transmissão bem sucedida.

distribuídos aleatoriamente, em uma rede *ad-hoc* sem-fio, mediante um processo pontual marcado homogêneo. Além disso, acrescentou-se que o desvanecimento de pequena escala

segue uma distribuição Nakagami- m , e função perda de percurso do tipo modificada.

Na sequência, introduziu-se alguns conceitos e resultados de processos pontuais espaciais para a modelagem de conectividade entre transmissores efetivos e um determinado receptor teste. Em detalhes, a partir de um MPP modelou-se as posições dos nós transmissores em uma rede *ad-hoc* sem-fio e definiu-se dois modelos em que a conectividade está diretamente relacionada ao êxito na transmissão de dados a um receptor de referência, segundo um valor limite mínimo de SNR. Além disso, para o segundo modelo levou-se em consideração regiões circulares em que o receptor e os transmissores estão inseridos. Além destes resultados, também foi descrita a probabilidade de se obter pelo menos uma transmissão ser bem sucedida durante o processo.

Nas simulações computacionais, os impactos do fator de severidade da distribuição Nakagami- m e da intensidade da rede foram analisados sobre a quantidade média de transmissões bem sucedidas. Observou-se também que considerar a potência de ruído ser exponencialmente distribuída atinge-se resultados mais satisfatórios do que ao adotar potência constante.

Para o próximo capítulo, o problema de interferência entre os nós que transmitem em um mesmo canal será investigado usando métricas estatísticas como média e variância e, também, por outro modelos de conectividade baseados na SIR e SINR.

Modelos de Conectividade na Presença de Interferência

O referido capítulo se destinará a caracterizar, sob o ponto de vista do processo *shot-noise*, a interferência de redes *ad-hoc* sem-fio. Especificamente, investigaremos a interferência média segundo um MPP e a respectiva variância do processo. Na sequência, proporemos uma expressão analítica para a transformada de Laplace de variável interferência segundo uma função do tipo Meijer- G . No final, como uma aplicação desta transformada de Laplace, apresentaremos dois modelos de conectividade baseados na SIR e SINR mediante a limiars de conexão.

7.1 Caracterização da interferência média em redes *ad-hoc*

Esta seção será destinada a caracterizar o fenômeno interferência em redes *ad-hoc* sem-fio a partir do modelo já descrito no Capítulo 6. Neste trabalho, a interferência agregada é uma medida aleatória a qual é dada em função da posição dos transmissores interferentes, ou seja, tal medida é obtida da soma sobre um processo pontual, que no nosso caso é um processo pontual marcado do tipo $\Psi = \{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}})\}_{\mathbf{x} \in \Phi_T}$, conforme apresentado na Equação (6.7):

$$\mathcal{I}_{\Psi} = \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} P h_{\mathbf{x}} \ell(\|\mathbf{x}\|), \quad (7.1)$$

sendo P a potência de transmissão (constante) de cada nó interferente, $\|\mathbf{x}\|$ denota a distância do interferente localizado em \mathbf{x} para origem \mathbf{o} em \mathbb{R}^2 onde o receptor teste se encontra, enquanto que $\ell(\cdot)$ é a função de *path-loss* e $h_{\mathbf{x}}$ é o ganho de potência do canal entre o transmissor estabelecido em \mathbf{x} e o receptor na origem.

Com propósito de obter mais detalhes da interferência, determinaremos a interferência média do processo, ou seja, a partir dos resultados de geometria estocástica estabelecemos uma expressão fechada para $\mathbb{E}\{\mathcal{I}_{\Psi}\}$. O desenvolvimento algébrico é semelhante

ao apresentado no capítulo anterior em função da medida de intensidade de um processo pontual. Com efeito,

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi\} = \mathbb{E}\left\{ \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} Ph_{\mathbf{x}}\ell(\mathbf{x}) \right\} = \mathbb{E}\left\{ \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \right\}, \quad (7.2)$$

sendo a função $f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) = Ph_{\mathbf{x}}\ell(\mathbf{x})$. Novamente, com a medida de intensidade do MPP

$$\Lambda_*(d(\mathbf{x}, s)) = \lambda d\mathbf{x} F_h(ds), \quad (7.3)$$

em que, $F_h(\cdot)$ é a CDF da variável Gama $h_{\mathbf{x}}$ para todo $\mathbf{x} \in \Psi$, segue que a interferência média é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi\} &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} f(\mathbf{x}, s) \Lambda_*(d(\mathbf{x}, s)) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty f(\mathbf{x}, s) p_h(s) ds d\mathbf{x} \\ &= \lambda \int_0^\infty p_h(s) \left[\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x} \right] ds. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Substituindo a função $f(\cdot, \cdot)$ por $Ph_{\mathbf{x}}\ell(\mathbf{x})$, então a esperança $\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi\}$ resulta em

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi\} &= \lambda P \int_0^\infty p_h(s) \left[\int_{\mathbb{R}^2} s\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] ds \\ &= \lambda P \int_0^\infty s p_h(s) ds \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

A primeira integral é, por definição, a esperança $\mathbb{E}\{h\}$ da variável Gama h . Calculemos tal resultado de uma forma generalizada, ou seja, supondo-se que $h \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$. Assim,

$$\mathbb{E}\{h\} = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{(\alpha+1)-1} \exp\left(-\frac{s}{\beta}\right) ds = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1). \quad (7.6)$$

sendo esta última igualdade devido a (A.3). Agora, aplicando a fórmula recursiva para a função Gama (Equação (A.2)), conclui-se que a esperança da variável Gama é $\mathbb{E}\{h\} = \alpha\beta$. Em particular, como $\alpha = m$ e $\beta = \frac{\Omega}{m}$, tem-se $\mathbb{E}\{h\} = \Omega$. Retornado à Equação (7.5), determinemos a segunda integral como consequência da integração em (6.17). Além disso, como $\ell(r) = \min\{1, r^{-\eta}\}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2\pi \int_0^\infty \ell(r) r dr \\ &= 2\pi \left[\int_0^1 r dr + \int_1^\infty r^{-\eta+1} dr \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} + \frac{r^{-\eta+2}}{-\eta+2} \Big|_1^\infty \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\eta-2} \right] \\ &= \frac{\eta\pi}{\eta-2}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

uma vez que $\eta > 2$. Por conseguinte, a interferência média do MPP em um canal Nakagami- m é dada por

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi\} = \lambda\pi\Omega P \frac{\eta}{\eta - 2}. \quad (7.8)$$

É importante frisar que tal resultado é válido para qualquer valor $\eta > 2$ (sendo η o expoente de perda de percurso). Obviamente, a referida esperança não se aplica para cenários onde o expoente de perda de percurso é menor ou igual a 2. Além disso, embora não esteja explicitamente claro na Equação (7.8), a interferência média depende do fator m , uma vez que o parâmetro Ω da distribuição Nakagami- m depende da escolha de tal coeficiente de severidade (ver Equação (1.10)).

Na Figura 7.1, fixando-se as intensidades da rede para $\lambda = 0,04, 0,1$ e $0,2$, o comportamento da interferência média é descrito a partir do crescimento do expoente de perda de percurso. Como podemos verificar, redes com maiores valores de intensidade, implicam em elevados níveis em interferência média na rede, pois pelo resultado encontrado na Equação (7.1), a interferência média é vista como uma função linear em termos da intensidade. Além disso, como esperado, para o aumento no expoente de *path-loss* os níveis de interferência diminuem.

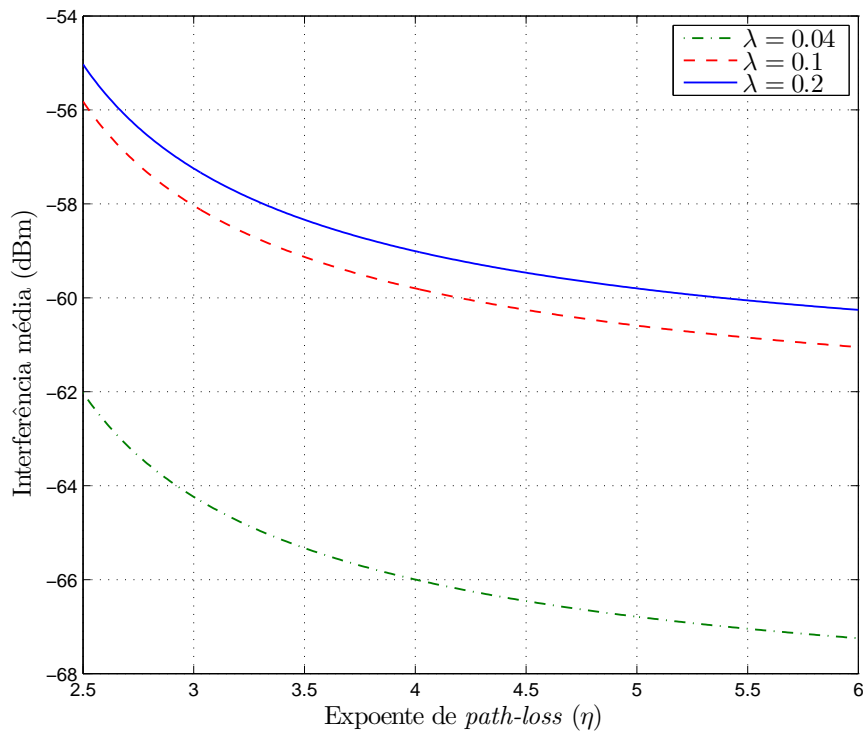


Figura 7.1 – Análise de interferência média em redes *ad-hoc* para $\Omega = 1$.

A próxima seção será dedicada ao cálculo da variância de interferência agregada

à rede.

7.2 Variância de interferência

Dentre as métricas que caracterizam os dados estatísticos ou uma variável aleatória, a variância desempenha um papel importante pois mede o grau de dispersão dos dados numéricos em torno de um valor médio. Veremos nessa seção, que segundo o teorema de Campbell para MPP homogêneos (HAENGGI, 2013, Teorema 7.3) é possível determinar a variância da interferência \mathcal{I}_Ψ , a qual será representada por $\text{var}\{\mathcal{I}_\Psi\}$.

Especificamente, proveniente deste resultado, a variância de interferência do nosso processo pontual fica dada por

$$\text{var}\{\mathcal{I}_\Psi\} = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} f(\mathbf{x}, s)^2 \Lambda_*(d(\mathbf{x}, s)). \quad (7.9)$$

Em vista disso, tem-se basicamente o desenvolvimento algébrico descrito na determinação da interferência média. Assim, omitindo alguns detalhes, a integral fica dada por

$$\begin{aligned} \text{var}\{\mathcal{I}_\Psi\} &= \lambda P^2 \int_0^\infty s^2 p_h(s) ds \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \\ &= \lambda P^2 \mathbb{E}\{h_x^2\} \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

A esperança $\mathbb{E}\{h_x^2\}$ já foi determinada em (6.66), sendo dada por

$$\mathbb{E}\{h_x^2\} = \left(\frac{\Omega}{m}\right)^2 \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m)}. \quad (7.11)$$

Agora, aplicando a recorrência $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para a função Gama $\Gamma(m+2)$, obtém-se a seguinte igualdade

$$\Gamma(m+2) = m(m+1)\Gamma(m). \quad (7.12)$$

Ao substituir tal resultado na Equação (7.11), a esperança $\mathbb{E}\{h_x^2\}$ fica simplificada para

$$\mathbb{E}\{h_x^2\} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \Omega^2. \quad (7.13)$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} &= 2\pi \int_0^\infty \ell(r)^2 r dr \\ &= 2\pi \left[\int_0^1 r dr + \int_1^\infty r^{-2\eta+1} dr \right] \\ &= \frac{\eta}{\eta-1}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Fazendo-se as devidas substituições, a variância de interferência do MPP homogêneo fica dada por

$$\text{var} \{ \mathcal{I}_\Psi \} = \lambda \pi (\Omega P)^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\eta}{\eta - 1} \right). \quad (7.15)$$

Na Figura 7.2, mostramos o resultado analítico da variância de interferência para diferentes valores do expoente de perda de percurso e para $m = 2$ como coeficiente de severidade da distribuição do canal.

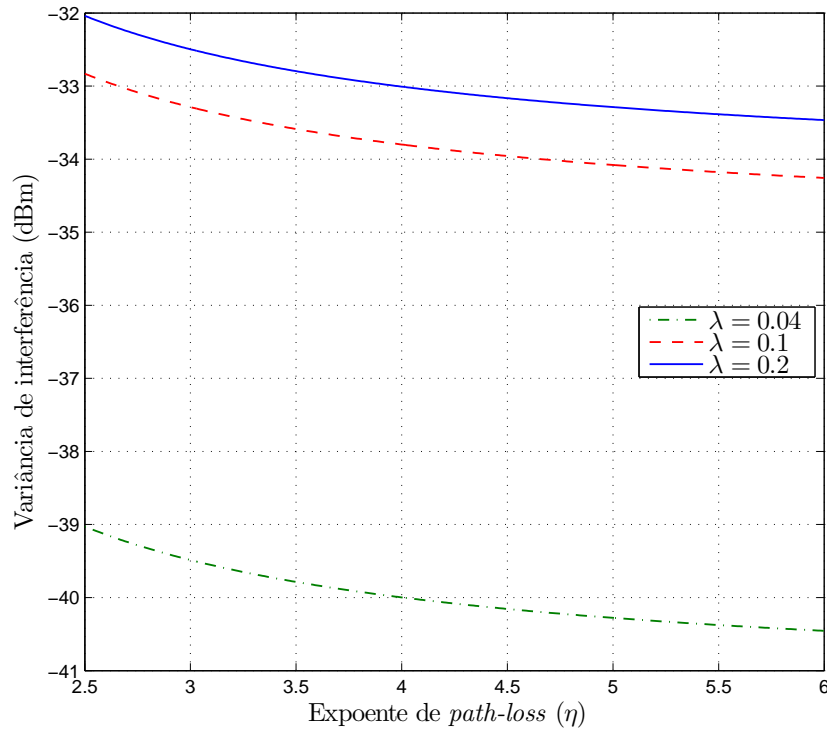


Figura 7.2 – Análise da variância de interferência em redes *ad-hoc* para $m = 2$.

A próxima seção será reservada para a determinação da *transformada de Laplace* da interferência agregada da rede, cuja função é contribuir na caracterização da interferência.

7.3 A transformada de Laplace da interferência

A interferência pode ser completamente caracterizada pela sua função densidade de probabilidade ou, a partir de sua função de distribuição cumulativa. No entanto, geralmente tanto a PDF como CDF não possuem expressões fechadas para a variável que descreve a interferência. Então, para contornar esta situação, e conseguir caracterizar a interferência de forma precisa faz-se uso das seguintes das seguintes funções equivalentes para processos pontuais (ELSAWY; HOSSAIN; HAENGGI, 2013)

- transformada de Laplace;

- função característica;
- função geradora de momentos.

Os detalhes à respeito desses funcionais na caracterização de um processo pontual encontram-se na Seção 4.3. Determinemos portanto a transformada de Laplace da variável interferência agregada cuja expressão, em termos gerais, é dada por (HAENGGI, 2013):

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t) = \mathbb{E}\{\exp(-t\mathcal{I}_\Psi)\}. \quad (7.16)$$

Mais uma vez, por questões de simplificações, façamos $f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) = Ph_{\mathbf{x}}\ell(\mathbf{x})$. Assim, aplicando a definição de transformada de Laplace na interferência agregada \mathcal{I}_Ψ tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t) &= \mathbb{E}\left\{\exp\left(-t \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} Ph_{\mathbf{x}}\ell(\mathbf{x})\right)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\exp\left(-t \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}})\right)\right\}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Uma vez que o processo pontual marcado $\Psi = \{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}})\}_{\mathbf{x} \in \Phi_T}$ foi modelado por um PPP homogêneo Φ_T e o conjunto $\{h_{\mathbf{x}}\}$ cujas marcas são independentes, pelo Teorema da Marcação (*Marking theorem*, do inglês), a transformada de Laplace resulta em (STREIT, 2010)

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t) = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} [1 - \exp(-tf(\mathbf{x}, s))] \Lambda_*(d(\mathbf{x}, s))\right). \quad (7.18)$$

Com a aplicação da função logarítmica natural em ambos lados da igualdade, obtém-se

$$\begin{aligned} \ln(\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t)) &= -\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty [1 - \exp(-tsP\ell(\|\mathbf{x}\|))] p_h(s) d\mathbf{x} ds \\ &= -\lambda \int_0^\infty p_h(s) \left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} 1 - \exp(-tsP\ell(\|\mathbf{x}\|)) d\mathbf{x}}_{\text{integral } \mathcal{J}} \right] ds \end{aligned} \quad (7.19)$$

Primeiramente, para desenvolvermos a integral \mathcal{J} , observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= 2\pi \int_0^\infty [1 - \exp(-tsP\ell(r))] r dr \\ &= 2\pi \left[\int_0^1 [1 - \exp(-tsP)] r dr + \int_1^\infty [1 - \exp(-tsPr^{-\eta})] r dr \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{1 - \exp(-tsP)}{2} + \underbrace{\int_1^\infty [1 - \exp(-tsPr^{-\eta})] r dr}_{\text{integral } \mathcal{J}_1} \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Agora, por sua vez, devemos nos concentrar na integral \mathcal{J}_1 . Mediante a mudança de variável $x = r^{-\eta}$, tal resultado é equivalentemente escrito como

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{\eta} \int_0^1 [1 - \exp(-tsPx)] x^{-\frac{2}{\eta}-1} dx, \quad (7.21)$$

e pela regra da cadeira encontra-se

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} \left[\exp(-tsP) - 1 + tsP \int_0^1 x^{(1-\frac{2}{\eta})-1} \exp(-tsPx) dx \right]. \quad (7.22)$$

Pela Equação (A.7), a integral anterior pode ser escrita em termos da função Gama incompleta, isto é,

$$\int_0^1 x^{(1-\frac{2}{\eta})-1} \exp(-tsPx) dx = (tsP)^{\frac{2}{\eta}-1} \gamma\left(1 - \frac{2}{\eta}, tsP\right). \quad (7.23)$$

Tal função $\gamma(\cdot, \cdot)$ é um caso particular da função Meijer- G (ver Equações (A.5) e (A.17)). Assim, a integral referente a \mathcal{J}_1 pode ser reescrita como

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} \left[\exp(-tsP) - 1 + (tsP)^{\frac{2}{\eta}} G_{1,2}^{1,1} \left[tsP \left|_{1-\frac{2}{\eta}, 0}^1 \right. \right] \right]. \quad (7.24)$$

Ao substituir o resultado de \mathcal{J}_1 em (7.20), a integral \mathcal{J} fica dada por

$$\mathcal{J} = \pi (tsP)^{\frac{2}{\eta}} G_{1,2}^{1,1} \left[tsP \left|_{1-\frac{2}{\eta}, 0}^1 \right. \right]. \quad (7.25)$$

Conseqüentemente, a integral para $\ln(\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t))$ é dada por em termos da função Meijer- G , isto é,

$$\ln(\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t)) = -\lambda \pi (Pt)^{\frac{2}{\eta}} \int_0^\infty s^{\frac{2}{\eta}} G_{1,2}^{1,1} \left[Pts \left|_{1-\frac{2}{\eta}, 0}^1 \right. \right] p_h(s) ds. \quad (7.26)$$

Passemos, portanto, para a última etapa na determinação da transformada de Laplace da variável interferência \mathcal{I}_Ψ . Desta vez, como h tem distribuição Gama do tipo

$$h \sim \text{Gama}\left(m, \frac{\Omega}{m}\right) \quad (7.27)$$

segue pela PDF da potência de ganho de canal h (Equação (6.4)) que

$$\begin{aligned} \ln(\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t)) &= -\frac{\lambda \pi (Pt)^{\frac{2}{\eta}}}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \int_0^\infty s^{\frac{2}{\eta}} s^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} s\right) G_{1,2}^{1,1} \left[Pts \left|_{1-\frac{2}{\eta}, 0}^1 \right. \right] ds \\ &= -\frac{\lambda \pi (Pt)^{\frac{2}{\eta}}}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \int_0^\infty s^{-(1-\frac{2}{\eta}-m)} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} s\right) G_{1,2}^{1,1} \left[Pts \left|_{1-\frac{2}{\eta}, 0}^1 \right. \right] ds. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Por intermédio do resultado o qual envolve a função Meijer- G , obtemos desse modo, após algumas simplificações, a expressão

$$\ln(\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t)) = -\frac{\lambda \pi}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m} Pt\right)^{\frac{2}{\eta}} G_{2,2}^{1,2} \left[\frac{\Omega}{m} Pt \left|_{1-\frac{2}{\eta}, 0}^{1-\frac{2}{\eta}-m, 1} \right. \right]. \quad (7.29)$$

Portanto, a transformada de Laplace da interferência \mathcal{I}_Ψ é dada por

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(t) = \exp\left(-\frac{\lambda \pi}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m} Pt\right)^{\frac{2}{\eta}} G_{2,2}^{1,2} \left[\frac{\Omega}{m} Pt \left|_{1-\frac{2}{\eta}, 0}^{1-\frac{2}{\eta}-m, 1} \right. \right]\right), \quad (7.30)$$

a qual pode ser simplificada para

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}}(t) = \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{\Gamma(m)} G_{2,2}^{1,2}\left[\frac{\Omega}{m} Pt \left| \begin{matrix} 1-m, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta} \end{matrix} \right.\right]\right), \quad (7.31)$$

sendo esta igualdade devido a propriedade apresentada na Equação (A.15).

Como comentado anteriormente, tal função auxilia na caracterização da interferência devido ao fato da não disponibilidade de sua PDF. Por exemplo, pode-se determinar os momentos da variável aleatória interferência, mediante a função geradora de momentos. Em termos gerais, a função geradora de momentos de uma variável aleatória arbitrária X é definida como

$$M_X(t) = \mathbb{E}\{\exp(tX)\} \quad (7.32)$$

em que t é um número real e o k -ésimo momento de X é dado por

$$\mathbb{E}\{X^k\} = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \Big|_{t=0}. \quad (7.33)$$

Aplicando a função geradora de momentos sobre a transformada de Laplace da interferência \mathcal{I}_{Φ} tem-se

$$M_{\mathcal{I}_{\Phi}}(t) = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}}(-t). \quad (7.34)$$

Assim, para o k -ésimo momento da variável \mathcal{I}_{Φ}

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_{\Psi}^k\} = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}}(t) \Big|_{t=0}. \quad (7.35)$$

Observemos que na última igualdade tem-se a k -ésima derivada de uma função composta do tipo $g(f(t))$, sendo $g(t) = \exp(t)$ e $f(t)$ a função envolvendo a Meijer- G , isto é,

$$f(t) = -\frac{\lambda\pi}{\Gamma(m)} G_{2,2}^{1,2}\left[\frac{\Omega}{m} Pt \left| \begin{matrix} 1-m, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta} \end{matrix} \right.\right]. \quad (7.36)$$

Curiosamente, existe uma expressão fechada para k -ésima derivada de funções compostas $g(f(t))$ a qual é conhecida como *Fórmula de Faà di Bruno*, em homenagem ao matemático italiano Francesco Faà di Bruno, cuja expressão é dada por (HARDY, 2006)

$$\frac{d^k}{dt^k} f(g(t)) = \sum \frac{k!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_k! k!^{m_k}} \cdot f^{(m_1+\dots+m_k)}(g(t)) \cdot \prod_{j=1}^k \left(g^{(j)}(t)\right)^{m_j} \quad (7.37)$$

em que a soma é sobre todas as k -uplas ordenadas de números inteiros não-negativos m_1, m_2, \dots, m_k que satisfazem a restrição

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + k \cdot m_k = k. \quad (7.38)$$

Recentemente, a Fórmula de Faà di Bruno foi utilizada por (DHILLON; KOUNTOURIS; ANDREWS, 2013) no auxílio para modelagem de redes heterogêneas sob um processo pontual de Poisson.

Para a próxima seção, a transformada de Laplace da interferência será de fundamental importância para continuidade deste trabalho, pois as métricas de performance que serão propostas partem do princípio do conhecimento de tal ferramenta.

7.4 Modelo de conectividade baseado na SIR

No capítulo anterior, apresentou-se modelos de conectividade entre transmissor e receptor onde foram exibidas algumas expressões analíticas referentes a média de transmissões bem sucedidas identificadas por um receptor teste, as quais não consideram os efeitos de interferência da rede. Para esta seção, faremos uma pequena modificação no modelo de conectividade, inserindo o fenômeno interferência até então negligenciado. Aqui, adotaremos que a recepção do sinal de interferência seja estatisticamente limitada de tal forma que a potência de transmissão P seja muito maior que a potência de ruído, ou seja, $P \gg W$. Além disso, assumimos que uma transmissão é decodificada com sucesso se o nível de SIR identificado no receptor teste está acima de um limiar fixado T . Portanto, para o receptor de referência localizado na origem do espaço euclidiano e a distância entre transmissor e receptor denotada por r (sendo $r = \|\mathbf{x}_0\|$), segue que a transmissão feita por transmissor localizado em \mathbf{x}_0 é decodificada com sucesso se

$$\text{SIR} = \frac{Ph_{\mathbf{x}_0}\ell(r)}{\mathcal{I}_\Psi} > T. \quad (7.39)$$

Notemos que a potência de transmissão P da expressão acima pode ser cancelada pois, sabe-se que

$$\mathcal{I}_\Psi = \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} Ph_{\mathbf{x}}\ell(\|\mathbf{x}\|), \quad (7.40)$$

então,

$$\text{SIR} = \frac{h_{\mathbf{x}_0}\ell(r)}{\mathcal{I}_\Psi^*} > T. \quad (7.41)$$

sendo \mathcal{I}_Ψ^* a interferência normalizada de \mathcal{I}_Ψ , isto é,

$$\mathcal{I}_\Psi^* = \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} h_{\mathbf{x}}\ell(\|\mathbf{x}\|). \quad (7.42)$$

Ademais, esta seção se propõe à determinação da probabilidade $p(r, T)$ de que a transmissão seja dada com êxito. Noutros termos, desenvolveremos a seguinte expressão

$$p(r, T) = \mathbb{P}(\text{SIR} > T) = \mathbb{P}\left(\frac{h_{\mathbf{x}_0}\ell(r)}{\mathcal{I}_\Psi^*} > T\right). \quad (7.43)$$

É importante esclarecer que a ideia considerada nesta parte do trabalho torna-se diferente à adotado no capítulo anterior, pois não abordaremos a quantidade média de transmissões bem sucedidas identificadas por um receptor de referência.

Ao isolar a variável relativa ao ganho de canal, a probabilidade de se obter sucesso na transmissão é dada por

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \mathbb{P}(h_{\mathbf{x}} > T\ell(r)^{-1}\mathcal{I}_{\Psi}^*) \\ &= 1 - \mathbb{P}(h_{\mathbf{x}} \leq T\ell(r)^{-1}\mathcal{I}_{\Psi}^*). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Com o objetivo de facilitar os cálculos, definamos a variável aleatória $Z = T\ell(r)^{-1}\mathcal{I}_{\Psi}^*$. Assim, mediante o resultado da Equação (6.34), garante-se que probabilidade $p(r, T)$ pode ser dada por

$$p(r, T) = 1 - \int_0^{\infty} F_h(x)p_Z(x) dx, \quad (7.45)$$

sendo $F_h(\cdot)$ a CDF da variável $h_{\mathbf{x}}$, enquanto que $p_Z(\cdot)$ é a PDF de Z . A CDF de $h_{\mathbf{x}}$ está descrita na Equação (6.24), ou seja,

$$F_h(x) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)}\Gamma\left(m, \frac{m}{\Omega}x\right), \quad (7.46)$$

ao passo que, a PDF de Z é dada em termos da PDF da interferência normalizada \mathcal{I}_{Ψ}^*

$$p_Z(x) = \frac{\ell(r)}{T}p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}\left(\frac{\ell(r)}{T}x\right). \quad (7.47)$$

Conseqüentemente, a Equação (7.45) pode ser reescrita como

$$p(r, T) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \Gamma(m, K_T(r)x) p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) dx, \quad (7.48)$$

ou, equivalentemente, como

$$p(r, T) = \mathbb{E}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*} \{ \Gamma(m, K_T(r)\mathcal{I}_{\Psi}^*) \}, \quad (7.49)$$

com

$$K_T(r) = \frac{m\ell(r)^{-1}T}{\Omega}. \quad (7.50)$$

A determinação da probabilidade $p(r, T)$ de que a transmissão seja dada com êxito fica restrita à determinação da PDF da variável interferência \mathcal{I}_{Ψ}^* , a qual é indisponível. Para contornar tal situação, faremos uso da sua transformada de Laplace, embora que nem sempre seja possível ter uma expressão fechada para $p(r, T)$ em canais com desvanecimento do tipo Nakagami- m , como veremos na sequência. Para o caso Rayleigh tal resultado pode ser encontrado em (HAENGGI, 2013, Seção 5.2).

Contudo, antes de entrarmos efetivamente no desenvolvimento da probabilidade $p(r, T)$, verifiquemos a relação entre as duas transformadas de Laplace apresentadas nesse trabalho, em que uma representa a transformada de uma função (cuja expressão encontra-se em (A.21) e a outra definida na Seção 7.3) que representa a transformada da interferência. Especificamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x); t] &= \int_0^{\infty} \exp(-tx)p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) dx \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*} \{ -t\mathcal{I}_{\Psi}^* \} \\ &= \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(t), \end{aligned} \quad (7.51)$$

ou seja, a relação entre as transformadas é dada a partir da seguinte igualdade

$$\mathcal{L} \left[p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x); s \right] = \exp \left(-\frac{\lambda\pi}{\Gamma(m)} G_{2,2}^{1,2} \left[\frac{\Omega}{m} t \left| \begin{matrix} 1-m, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta} \end{matrix} \right. \right] \right), \quad (7.52)$$

a qual será bastante empregada no restante da tese.

7.4.1 A probabilidade $p(r, T)$ para o caso do fator- m inteiro positivo

Neste ponto, apresentemos uma expressão analítica para a probabilidade $p(r, T)$ de se obter uma transmissão a qual é decodificada com êxito se a SIR no receptor teste está acima de um determinado limiar. Para tal, consideremos que o fator de severidade m do desvanecimento Nakagami- m seja um número inteiro positivo, isto é, $m = n + 1$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Segundo o resultado (A.8), a função Gama incompleta complementar $\Gamma(m, K_T(r)\mathcal{I}_{\Psi}^*)$ pode ser representada da seguinte forma

$$\Gamma(m, K_T(r)x) = \Gamma(n + 1, K_T(r)x) = n! \exp(-K_T(r)x) \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} x^k. \quad (7.53)$$

Desta maneira, a probabilidade $p(r, T)$ fica dada por

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \Gamma(m, K_T(r)x) p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) dx \\ &= \frac{n!}{\Gamma(n + 1)} \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)x) \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} x^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) dx \\ &= \frac{n!}{\Gamma(n + 1)} \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)x) x^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)x) x^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) dx, \end{aligned} \quad (7.54)$$

sendo a última igualdade em virtude da função Gama em que $\Gamma(n + 1) = n!$, para o caso do número n ser inteiro não-negativo. Depois disso, aplicando a transformada de Laplace na função $x^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x)$ no ponto $K_T(r)$, tem-se

$$\mathcal{L} \left[x^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x); K_T(r) \right] = \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)x) x^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) dx. \quad (7.55)$$

Por conseguinte, obtém-se a seguinte expressão para a probabilidade $p(r, T)$

$$p(r, T) = \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} \mathcal{L} \left[x^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x); K_T(r) \right]. \quad (7.56)$$

Como k é um inteiro não-negativo, a transformada acima existe e denomina-se transformada de Laplace da derivada da função $p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x)$ cuja expressão está escrita na Equação (A.22). Portanto, diante disso tem-se

$$p(r, T) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{K_T(r)^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \mathcal{L} \left[p_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x); K_T(r) \right]. \quad (7.57)$$

Por fim, utilizando-se a relação obtida em (7.51) entre transformadas de Laplace, a probabilidade $p(r, T)$ fica reduzida para

$$p(r, T) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{K_T(r)^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(x) \Big|_{x=K_T(r)}. \quad (7.58)$$

Constatemos que o resultado adequou-se à transformada de Laplace do processo pontual mediante sua k -ésima derivada aplicada no ponto $K_T(r)$, contornando assim o problema da inexistência da PDF da variável interferência. Além disso, é importante comentar que embora tenhamos uma expressão algébrica fechada para a probabilidade $p(r, T)$, a determinação de derivadas de ordem superior à transformada de Laplace da variável interferência inviabiliza a determinação de tal métrica de desempenho para elevados valores do fator de desvanecimento m . Esta dificuldade é proveniente das sucessivas derivadas da função Meijer- G . Tal situação pode ser contornada se considerarmos na transformada de Laplace em termos da função especial H -Fox (MATHAI; SAXENA; HAUBOLD, 2010), a qual tem a função Meijer- G como um caso particular e cuja derivada ainda resulta em uma H -Fox. Para não mudar a proposta deste trabalho o qual foca em funções do tipo Meijer- G , deixaremos esta ideia para trabalhos futuros.

Com o propósito de apresentarmos um resultado numérico para a probabilidade de que uma transmissão seja decodificada com sucesso, avaliemos tal expressão para o caso em que o fator de severidade seja igual a 2, ou seja, para $n = 1$. Então, perante a isso segue que

$$p(r, T) = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(K_T(r)) - K_T(r) \frac{d}{dx} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(x) \Big|_{x=K_T(r)}. \quad (7.59)$$

Determinemos na sequência a derivada de transformada de Laplace da interferência cuja expressão encontra-se na Equação (7.52) qual é uma função exponencial composta de uma Meijer- G . Então, pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(x) = -\frac{\lambda\pi}{\Gamma(2)} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(x) \frac{d}{dx} G_{2,2}^{1,2} \left[\frac{\Omega}{2} x \Big|_{1, \frac{2}{\eta}}^{-1, 1 + \frac{2}{\eta}} \right]. \quad (7.60)$$

Empregando agora o resultado (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1990)

$$\frac{d}{dz} \left[z^\sigma G_{p,q}^{m,n} \left[z \Big|_{b_1, b_2, \dots, b_q}^{a_1, a_2, \dots, a_p} \right] \right] = z^{\sigma-1} G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[z \Big|_{b_1, b_2, \dots, b_q, 1-\sigma}^{-\sigma, a_1, a_2, \dots, a_p} \right] \quad (7.61)$$

referente a derivação de uma função Meijer- G , tem-se que, com $\sigma = 0$, a derivada da

função Meijer- G fica dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G_{2,2}^{1,2} \left[\frac{\Omega}{2} x \middle| \begin{matrix} -1, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta} \end{matrix} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\Omega}{2} x \right)^0 G_{2,2}^{1,2} \left[\frac{\Omega}{2} x \middle| \begin{matrix} -1, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta} \end{matrix} \right] \right] \\ &= \frac{\Omega}{2} \left(\frac{\Omega}{2} x \right)^{-1} G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} x \middle| \begin{matrix} 0, -1, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta}, 1 \end{matrix} \right] \\ &= \frac{\Omega}{2} G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} x \middle| \begin{matrix} -1, -2, \frac{2}{\eta} \\ 0, \frac{2}{\eta}-1, 0 \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (7.62)$$

sendo a última igualdade devido a propriedade (A.15). Como consequência, obtemos a derivada da transformada de Laplace $\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x)$, isto é,

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) = -\frac{\lambda\pi\Omega}{2} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} x \middle| \begin{matrix} -1, -2, \frac{2}{\eta} \\ 0, \frac{2}{\eta}-1, 0 \end{matrix} \right], \quad (7.63)$$

a qual aplicada em $x = K_T(r)$ resulta em

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(x) \Big|_{x=K_T(r)} = -\frac{\lambda\pi\Omega}{2} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(K_T(r)) G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} K_T(r) \middle| \begin{matrix} -1, -2, \frac{2}{\eta} \\ 0, \frac{2}{\eta}-1, 0 \end{matrix} \right]. \quad (7.64)$$

Finalmente, substituindo tal expressão na Equação (7.59), obtém-se portanto uma expressão analítica fechada para a probabilidade $p(r, T)$ dado que $m = 2$,

$$p(r, T) = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(K_T(r)) \left[1 + \lambda\pi \frac{\Omega}{2} K_T(r) G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} K_T(r) \middle| \begin{matrix} -1, -2, \frac{2}{\eta} \\ 0, \frac{2}{\eta}-1, 0 \end{matrix} \right] \right], \quad (7.65)$$

ou melhor, utilizando (Eq. (A.15) novamente)

$$p(r, T) = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(K_T(r)) \left[1 + \lambda\pi G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} K_T(r) \middle| \begin{matrix} 0, -1, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta}, 1 \end{matrix} \right] \right], \quad (7.66)$$

sendo

$$K_T(r) = \frac{2\ell(r)^{-1}T}{\Omega}. \quad (7.67)$$

As próximas figuras comparam os resultados referentes a probabilidade $p(r, T)$ de que uma transmissão é decodificada com sucesso se o nível de SIR identificado no receptor está acima de determinado limiar. Contudo, para os resultados numéricos, adotaremos $m = 2$ como o parâmetro de severidade de desvanecimento, com o propósito de investigarmos o comportamento das curvas de $p(r, T)$ geradas pela Equação (7.66).

Na Figura 7.3, fixando-se os limiares de conexão entre *links* para $T = 8, 10$ e 12 dB e intensidade da rede para $\lambda = 0,1$ usuário/ m^2 , a probabilidade $p(r, T)$ é descrita como função da distância entre um transmissor de referência localizado em \mathbf{x}_0 e um receptor localizado na origem $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$. Como aguardado, se o transmissor posiciona-se

muito próximo do receptor, os efeitos da interferência é praticamente desprezado pelo dispositivo de recepção. Tais efeitos são significativamente percebidos no distanciamento entre o transmissor teste com relação ao receptor, embora que, para até 100 m de distância, obteve-se probabilidade de se receber um *frame* com sucesso acima de 97%. Por fim, o comportamento das curvas, para cada limiar, é praticamente o mesmo para os primeiros 40 m de distância. A partir deste valor, obtém-se melhores desempenhos para baixos valores de T , mesmo que isso não seja tão significativo com relação aos limiares preestabelecidos.

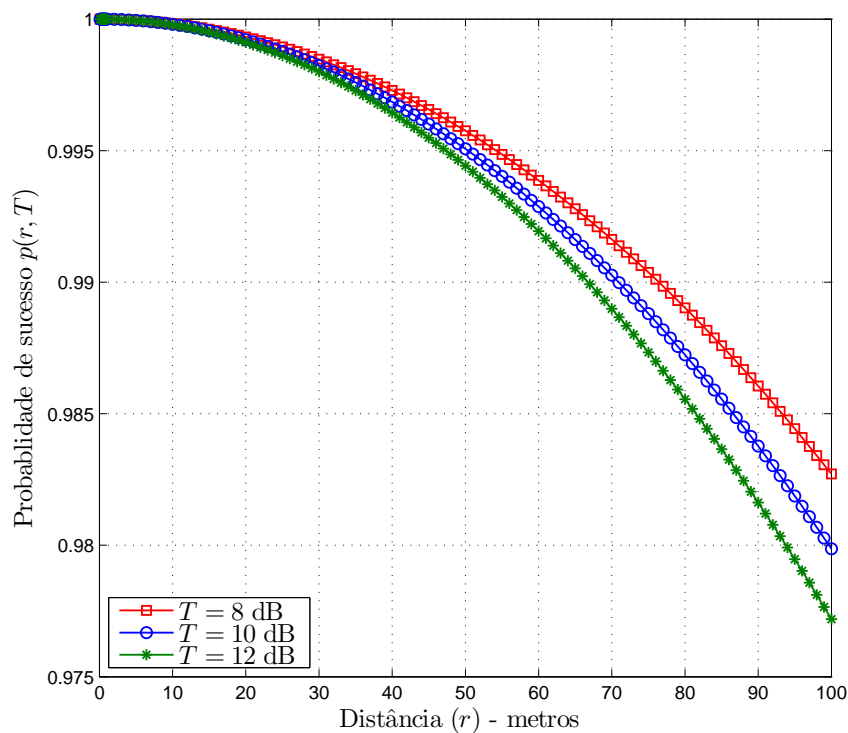


Figura 7.3 – Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com intensidade de rede $\lambda = 0,1$ usuários/ m^2 .

A Figura 7.4, ilustra também o comportamento das curvas, da função probabilidade $p(r, T)$, em termos da distância entre transmissor e receptor de referências, para uma mesmo limiar de conexão de 10 dB. No entanto, neste caso a análise foi desenvolvida com base em três valores de intensidade de rede, ou seja, $\lambda = 0,04, 0,1$ e $0,2$ usuário/ m^2 . Novamente, a probabilidade de se transmitir um pacote de dados o qual é decodificado com êxito se a SIR no receptor de referência está acima de 10 dB, tende a decrescer com o distanciamento entre os dispositivos de referência. Porém, observa-se que o aumento de intensidade de rede, tem um impacto bem mais expressivo no valor de $p(r, T)$ do que nos casos apresentados na figura anterior. Por exemplo, para se obter uma probabilidade de 98 % de sucesso no *link*, o transmissor teste deve está localizado a uma distância de até 70 m do receptor, para o caso da rede ter intensidade de $0,2$ usuário/ m^2 , enquanto que, para $\lambda = 0,04$ usuário/ m^2 , tal taxa é atingida para um distanciamento bem maior do que

100 m, contando que para $\lambda = 0,1$ usuário/ m^2 , o resultado é obtido para até 100 m de distância entre os dispositivos de referência.

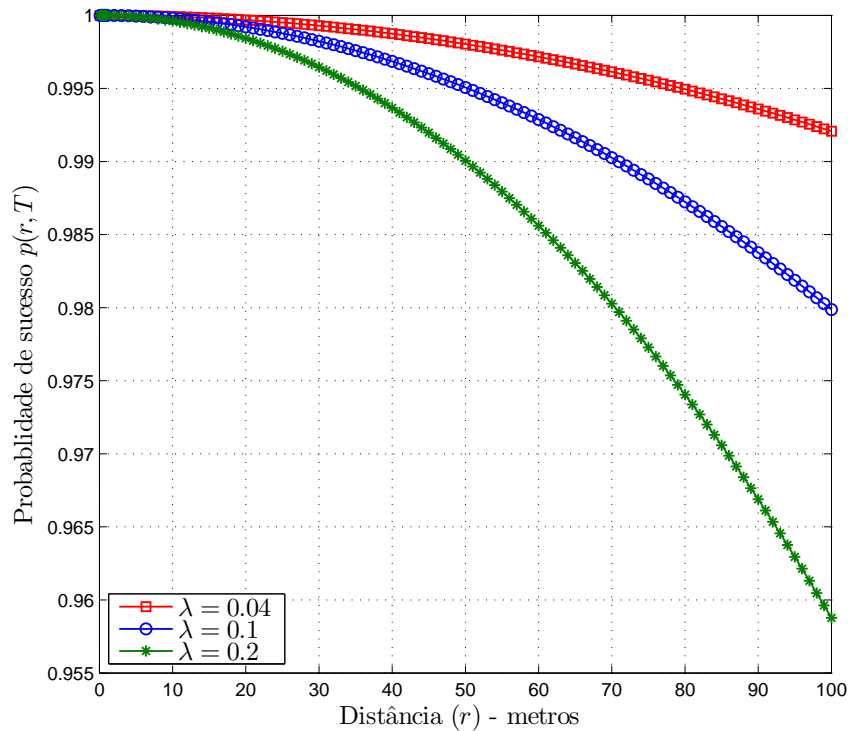


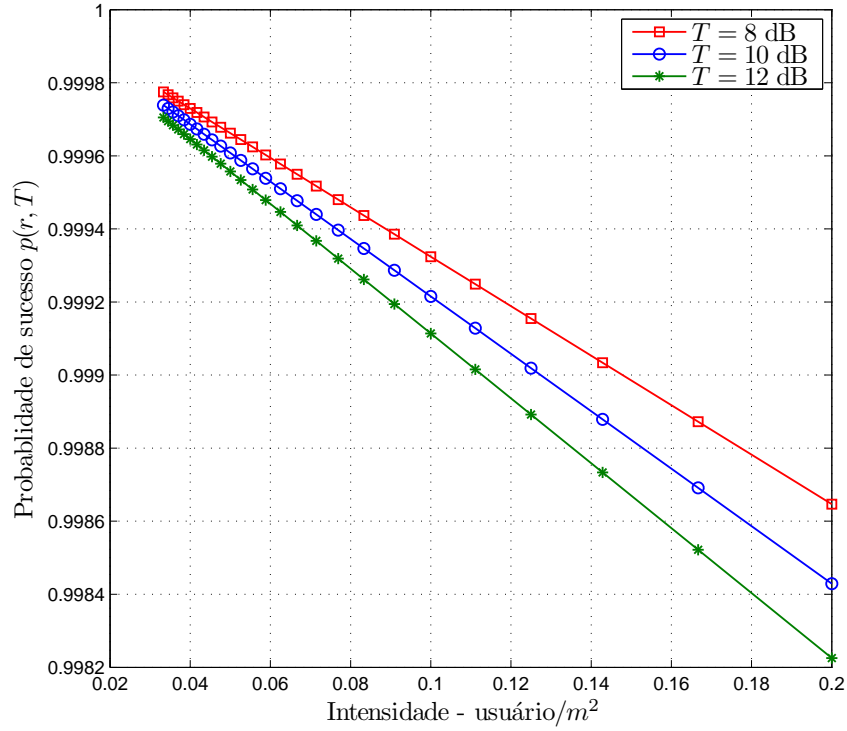
Figura 7.4 – Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com limiar de conexão de $T = 10$ dB.

Por fim, a Figura 7.5 toma-se os limiares de conexão entre *links* para $T = 8, 10$ e 12 dB e considerando que transmissor teste esteja afastado do receptor a uma distância de 20 m, a probabilidade $p(r, T)$, desta vez, será dada como função da intensidade da rede sem-fio. Como sugere a (7.66), tem-se que $p(r, T)$ em termos da intensidade, é uma função linear decrescente, pois como comentado anteriormente, o aumento de intensidade tende a degradar a performance do sistema. Além de tudo, como esperado dos resultados da Figura 7.3, a diferença entre os valores dos limiares escolhidos não causam tanto impacto na probabilidade de que uma transmissão seja decodificada com sucesso. Vejamos que, para uma distância de 20 m entre dispositivos teste, a probabilidade de obter êxito no *link*, para qualquer limiar de conexão, está acima de 99% de chance.

Na continuidade deste trabalho, estudaremos os níveis de interferência na rede sem-fio a partir da análise da SIR média caracterizada pelo processo pontual.

7.4.2 SIR média do processo pontual marcado

Mediante a informação da transformada de Laplace do processo pontual marcado \mathcal{I}_Ψ , determinaremos a SIR média do processo. Desta forma, admite-se que a recepção do sinal de interferência seja estatisticamente limitada segundo a condição de que a potência


 Figura 7.5 – Análise de interferência média em redes *ad-hoc*.

de transmissão P seja muito maior que a potência de ruído, conforme descrito na Seção 7.4. Portanto, segundo a Equação (7.41) e o fato que as variáveis h_x e \mathcal{I}_Ψ são independentes, a SIR média resulta em

$$\mathbb{E}\{\text{SIR}\} = \ell(r)\mathbb{E}\{h_x\}\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-1}\}. \quad (7.68)$$

A esperança da variável Gama h_x já foi devidamente calculada no capítulo anterior cujo valor é $\mathbb{E}\{h_x\} = \Omega$. Basta-nos então, determinarmos a outra esperança $\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-1}\}$.

Nos antecipando ao resultado, mostraremos, de uma forma generalizada, que

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-p}\} = \frac{1}{\Gamma(p)}\mathcal{M}\left[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s); p\right], \quad (7.69)$$

sendo $\mathcal{M}\left[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s); p\right]$ a transformada de Mellin (ver Eq. (A.23) para mais detalhes) da função $\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s)$ no ponto $p > 0$. Contudo, faz-se necessário do seguinte resultado preliminar

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-p}\} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty s^{p-1}\mathbb{E}\{\exp(-\mathcal{I}_\Psi s)\} ds. \quad (7.70)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty s^{p-1} \mathbb{E}\{\exp(-\mathcal{I}_\Psi s)\} ds &= \int_0^\infty s^{p-1} \int_0^\infty \exp(-sx) p_{\mathcal{I}_\Psi}(x) dx ds \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{p-1} \exp(-sx) p_{\mathcal{I}_\Psi}(x) dx ds \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{p-1} \exp(-sx) p_{\mathcal{I}_\Psi}(x) ds dx \\
 &= \int_0^\infty p_{\mathcal{I}_\Psi}(x) \int_0^\infty s^{p-1} \exp(-sx) ds dx.
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

Pela Equação (A.3), garante-se que

$$\int_0^\infty s^{p-1} \exp(-sx) ds = \frac{1}{x^p} \Gamma(p), \tag{7.72}$$

desde que $x > 0$. Como consequência, tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty s^{p-1} \mathbb{E}\{\exp(-\mathcal{I}_\Psi s)\} ds &= \Gamma(p) \int_0^\infty x^{-p} p_{\mathcal{I}_\Psi}(x) dx \\
 &= \Gamma(p) \mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-p}\}.
 \end{aligned} \tag{7.73}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-p}\} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty s^{p-1} \mathbb{E}\{\exp(-\mathcal{I}_\Psi s)\} ds \tag{7.74}$$

como argumentado anteriormente.

Como a esperança $\mathbb{E}\{\exp(-\mathcal{I}_\Psi s)\}$ é dada em termos da transformada de Laplace do processo \mathcal{I}_Ψ , isto é,

$$\mathbb{E}\{\exp(-\mathcal{I}_\Psi s)\} = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s), \tag{7.75}$$

segue que a $\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-p}\}$ fica dada por

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-p}\} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty s^{p-1} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s) ds \tag{7.76}$$

cuja integral é equivalentemente representada na transformada de Mellin como em (7.69), ou seja,

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-p}\} = \frac{1}{\Gamma(p)} \mathcal{M}[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s); p]. \tag{7.77}$$

Em particular, para $p = 1$, tem-se

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^{-1}\} = \mathcal{M}[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s); 1], \tag{7.78}$$

uma vez que $\Gamma(1) = 1$. Portanto, fazendo-se as devidas substituições, a SIR média resulta em

$$\mathbb{E}\{\text{SIR}\} = \Omega \ell(r) \mathcal{M}[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(s); 1]. \tag{7.79}$$

Os efeitos da interferência são descritos nas próximas figuras. Por exemplo, a Figura 7.6 ilustra que o fator de severidade de desvanecimento do canal de rádio, os quais foram escolhidos $m = 2$ e $m = 20$, praticamente não afeta em média, o comportamento da interferência com o distanciamento entre os dispositivos testes. Isto deve-se ao rápido decrescimento da função exponencial que define a transformada de Laplace da variável interferência. Ademais, como esperado, os níveis de interferência tendem a crescer devido a este distanciamento.

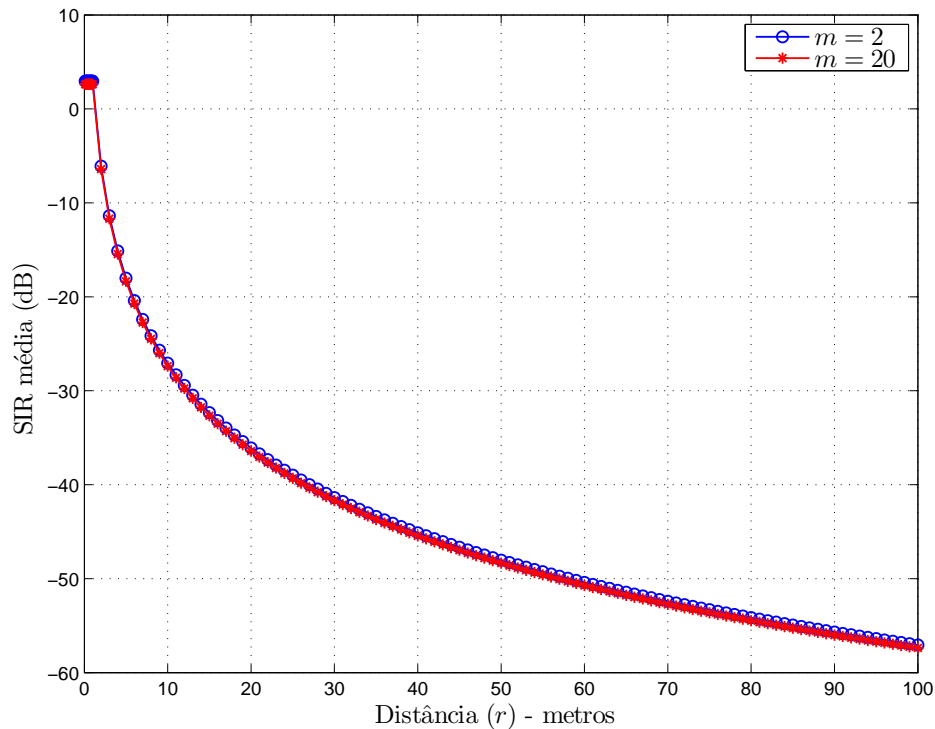


Figura 7.6 – SIR média do MPP em termos da distância entre dispositivos móveis de referência.

Já no caso da Figura 7.7, a SIR média do MPP é relacionada com a intensidade da rede sem-fio a qual é fixada uma distância de 20 metros entre transmissor/receptor com fator- m igual a 2. Como sugere a Equação (7.69), a medida que a intensidade da rede aumenta, os níveis de interferência percebida no receptor teste também aumentam em média. Aqui, decidimos analisar o comportamento apenas de uma curva para a SIR média, em razão do fator de desvanecimento não causar impacto na taxa de SIR para uma determinada distância entre dispositivos, como visto na figura anterior.

Para a próxima seção, investigaremos a probabilidade de um determinado usuário conseguir se conectar a um receptor de referência, no entanto a análise será em função da SINR, ou seja, inseriremos no sistema os efeitos da potência de ruído.

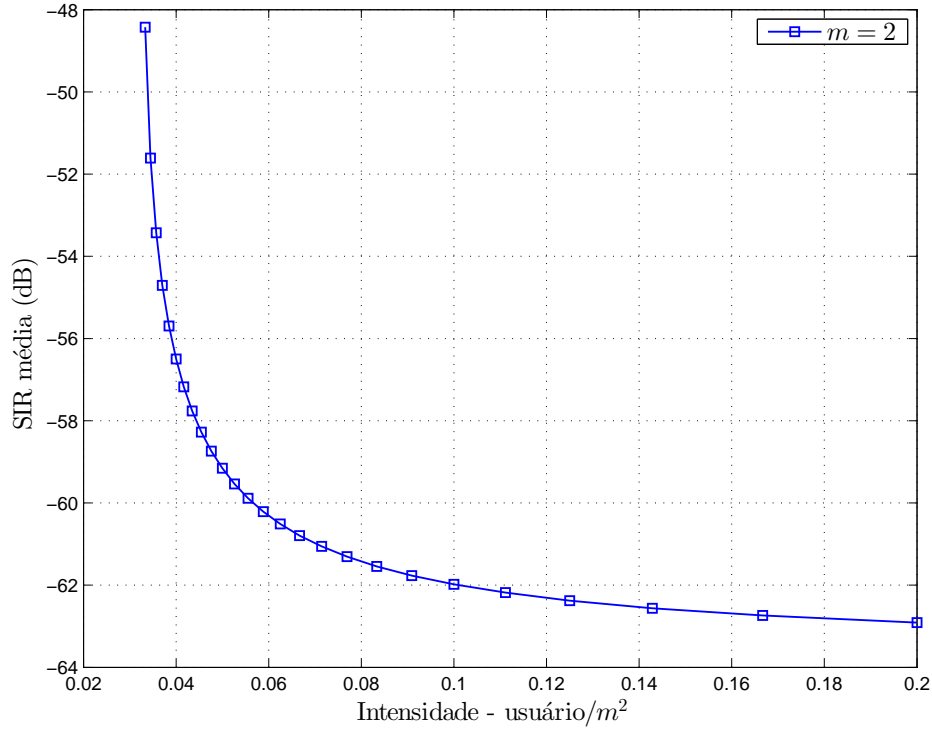


Figura 7.7 – SIR média do MPP em termos da intensidade de rede.

7.5 Modelo de conectividade baseado na SINR

Na seção anterior, o modelo de conectividade fundamentou-se sobre o estudo de SIR percebida no receptor, inserindo a hipótese que a recepção do sinal de interferência limitada. Agora em diante, o modelo de conectividade será baseado em torno da SINR, em que a transmissão é decodificada com sucesso se

$$\text{SINR} = \frac{Ph_{x_0}\ell(r)}{W + \mathcal{I}_\Psi} > T. \quad (7.80)$$

Aqui, propõe-se à determinação da probabilidade $p(r, T)$, de que a transmissão seja dada com êxito, mediante a seguinte condição

$$p(r, T) = \mathbb{P}(\text{SINR} > T) = \mathbb{P}\left(\frac{Ph_{x_0}\ell(r)}{W + \mathcal{I}_\Psi} > T\right). \quad (7.81)$$

Além de tudo, introduziremos os efeitos da potência de ruído, os quais foram omitidos na seção precedente, ao considerar que a recepção do sinal de interferência era estatisticamente limitada. Desta maneira, nos deteremos ao caso em que do ruído percebido no dispositivo de recepção ter potência constante. Para tal, faremos algumas considerações preliminares, as quais parte delas já foram desenvolvidas anteriormente.

Começamos isolando a variável h_x , para obter

$$p(r, T) = \mathbb{P}\left(h_x > \frac{(W + \mathcal{I}_\Psi)T\ell(r)^{-1}}{P}\right). \quad (7.82)$$

Por sua vez, definindo a variável aleatória Z como $Z = W + \mathcal{I}_\Psi$ e a função real $g(\cdot)$ como

$$g(Z) = \frac{\ell(r)^{-1}T}{P}Z, \quad (7.83)$$

segue que a probabilidade $p(r, T)$ fica representada por

$$p(r, T) = \mathbb{P}(h_{\mathbf{x}} > g(Z)) = 1 - \mathbb{P}(h_{\mathbf{x}} \leq g(Z)). \quad (7.84)$$

Outra vez, aplicando o resultado (6.34), tem-se que a probabilidade $\mathbb{P}(h_{\mathbf{x}} \leq g(Z))$ fica dada por

$$p(r, T) = 1 - \int_0^\infty F_h(g(x))p_Z(x) dx, \quad (7.85)$$

sendo $F_h(\cdot)$ a CDF da variável $h_{\mathbf{x}}$, enquanto que $p_Z(\cdot)$ é a PDF de Z . Após algumas outras substituições já descritas na seção anterior, para a probabilidade $p(r, T)$ chega-se em

$$p(r, T) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \Gamma\left(m, \frac{m}{\Omega}g(x)\right) p_Z(x) dx. \quad (7.86)$$

Noutros termos,

$$p(r, T) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \Gamma(m, K_T(r)x) p_{W+\mathcal{I}_\Psi}(x) dx, \quad (7.87)$$

em que

$$K_T(r) = \frac{m\ell(r)^{-1}T}{\Omega P}. \quad (7.88)$$

Portanto, os resultados que se seguem ficam condicionados ao desenvolvimento da integral dada na Equação (7.87). Partimos agora da hipótese de que o ruído no receptor de referência tenha potência constante.

7.5.1 A probabilidade $p(r, T)$ para o caso de potência de ruído constante

O desenvolvimento algébrico para a probabilidade $p(r, T)$ também segue a suposição de que o fator de severidade de desvanecimento da distribuição Nakagami- m é um inteiro positivo, isto é, $m = n + 1$, em que $n = 0, 1, 2, \dots$, contando que o ruído tenha potência constante. Por outro lado, apesar da indisponibilidade da PDF da interferência, faremos a seguinte restrição para função: $p_{\mathcal{I}_\Psi}(t) = 0$, se $t < 0$.

Por conseguinte, como W tem potência constante e, desde que a variável Z é representada como $Z = W + \mathcal{I}_\Psi$, tem-se que a PDF de Z é dada em termos da PDF da interferência a partir da seguinte relação (PAPOULIS; PILLAI, 2002)

$$p_{W+\mathcal{I}_\Psi}(x) = p_Z(x) = p_{\mathcal{I}_\Psi}(x - W). \quad (7.89)$$

Logo, a probabilidade de êxito no *link* desejado é dada por

$$p(r, T) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \Gamma(m, K_T(r)x) p_{\mathcal{I}_\Psi}(x - W) dx. \quad (7.90)$$

Na sequência, aplicando-se a mudança de variável $y = x - W$, obtém-se

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{-W}^{\infty} \Gamma(m, K_T(r)(y + W)) p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \Gamma(m, K_T(r)(y + W)) p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy, \end{aligned} \quad (7.91)$$

sendo a última igualdade devido ao fato da PDF da interferência $p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(t)$ ser nula para $t < 0$. Então, novamente empregando o resultado (A.8), tem-se que a probabilidade $P(r, T)$ fica dada por

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \frac{n!}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)(y + W)) \sum_{k=0}^n \frac{[K_T(r)(y + W)]^k}{k!} p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy \\ &= \exp(-K_T(r)W) \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)y)(y + W)^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Como k é um número inteiro positivo, então segundo o Teorema Binomial (WADE, 2004), o desenvolvimento de $(y + W)^k$ é igual a

$$(y + W)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} W^{k-l} y^l. \quad (7.93)$$

Desta maneira, a integral descrita na Equação (7.92) também pode ser escrita da seguinte forma

$$\int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)y)(y + W)^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} W^{k-l} \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)y) y^l p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy. \quad (7.94)$$

Agora, mediante a transformada de Laplace aplicada à função $y^l p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)y)(y + W)^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} W^{k-l} \mathcal{L} [y^l p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y); K_T(r)] \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} W^{k-l} (-1)^l \frac{d^l}{dy^l} \mathcal{L} [p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y); K_T(r)], \end{aligned} \quad (7.95)$$

sendo esta última igualdade devido a (A.22). Por sua vez, da relação

$$\mathcal{L} [p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y); K_T(r)] = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(y) \Big|_{y=K_T(r)}, \quad (7.96)$$

encontra-se

$$\int_0^{\infty} \exp(-K_T(r)y)(y + W)^k p_{\mathcal{I}_{\Psi}}(y) dy = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} W^{k-l} (-1)^l \frac{d^l}{dy^l} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(y) \Big|_{y=K_T(r)}. \quad (7.97)$$

Substituindo tal resultado na Equação (7.92), obtém-se portanto uma expressão analítica para $p(r, T)$ para o caso em a potência de ruído é constante, isto é,

$$p(r, T) = \exp(-K_T(r)W) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \frac{K_T(r)^k}{k!} \binom{k}{l} W^{k-l} (-1)^l \frac{d^l}{dy^l} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(y) \Big|_{y=K_T(r)}. \quad (7.98)$$

Em particular, para $m = 2$ ($n = 1$), a expressão fica reduzida para

$$p(r, T) = \exp(-K_T(r)W) \left[(1 + K_T(r)W) \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(K_T(r)) - K_T(r) \frac{d}{dy} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(y) \Big|_{y=K_T(r)} \right], \quad (7.99)$$

em que (pela Equação (7.64))

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(x) \Big|_{x=K_T(r)} = -\frac{\lambda\pi\Omega}{2} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(K_T(r)) G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} K_T(r) \Big|_{0, \frac{2}{\eta}, -1, 0}^{-1, -2, \frac{2}{\eta}} \right]. \quad (7.100)$$

Consequentemente,

$$p(r, T) = \exp(-K_T(r)W) \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi^*}(K_T(r)) \left[1 + K_T(r)W + \lambda\pi G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} K_T(r) \Big|_{1, \frac{2}{\eta}, 1}^{0, -1, 1 + \frac{2}{\eta}} \right] \right], \quad (7.101)$$

o que conclui o resultado.

Em termos computacionais, a Figura 7.8 descreve a probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste adotando potência constante no dispositivo de recepção. Notemos que os resultados são coerentes aos previamente apresentados para a Figura 7.3, considerando os mesmos parâmetros. Outra vez, para uma dada distância, os limiares de conexão propostos não determinam uma disparidade muito acentuada nos valores da probabilidade de sucesso $p(r, T)$, principalmente quando o transmissor teste se encontra na vizinhança do receptor. Entretanto, a Figura 7.9 ilustra que o aumento da intensidade da rede implica de maneira mais expressiva no decrescimento da probabilidade de se obter sucesso de transmissão no *link* pretendido.

7.5.2 A probabilidade $p(r, T)$ para o caso de potência de ruído ter distribuição exponencial

Aqui, continuaremos com o modelo de conectividade baseado na SINR, porém a análise sobre a probabilidade $p(r, T)$ será dada sobre a hipótese de que a potência de ruído tenha distribuição exponencial de média μ , ou seja,

$$W \sim \exp\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (7.102)$$

Como exposto no início desta seção, a Equação (7.87) é nosso ponto de partida. Além disso, parte da dedução é análoga ao caso da potência de ruído constante, por isso, seremos um pouco mais breve nas explicações de cada afirmação.

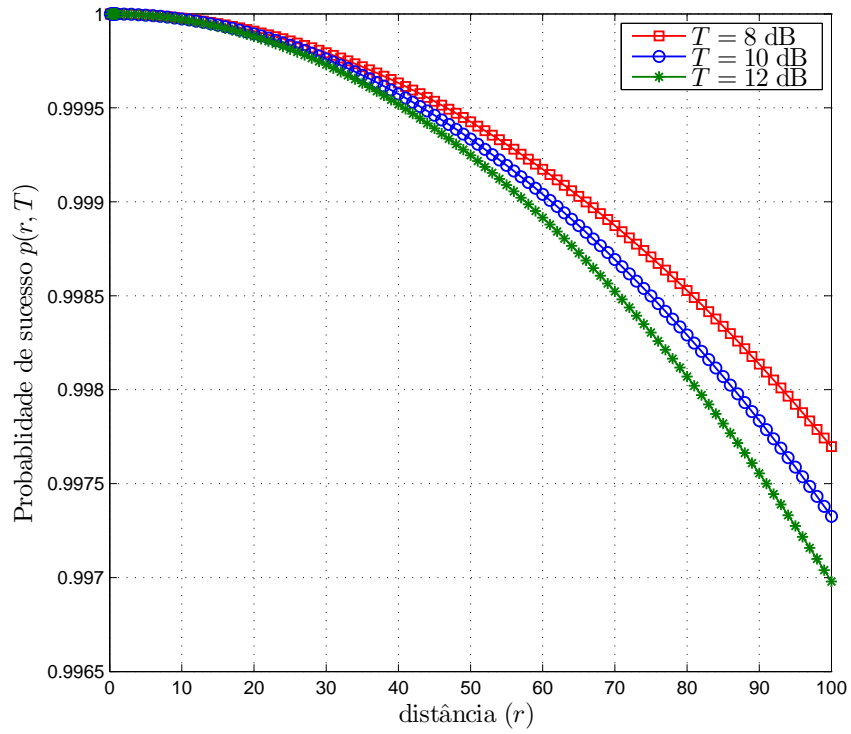


Figura 7.8 – Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com intensidade de rede $\lambda = 0.1$ usuários/ m^2 (caso potência constante).

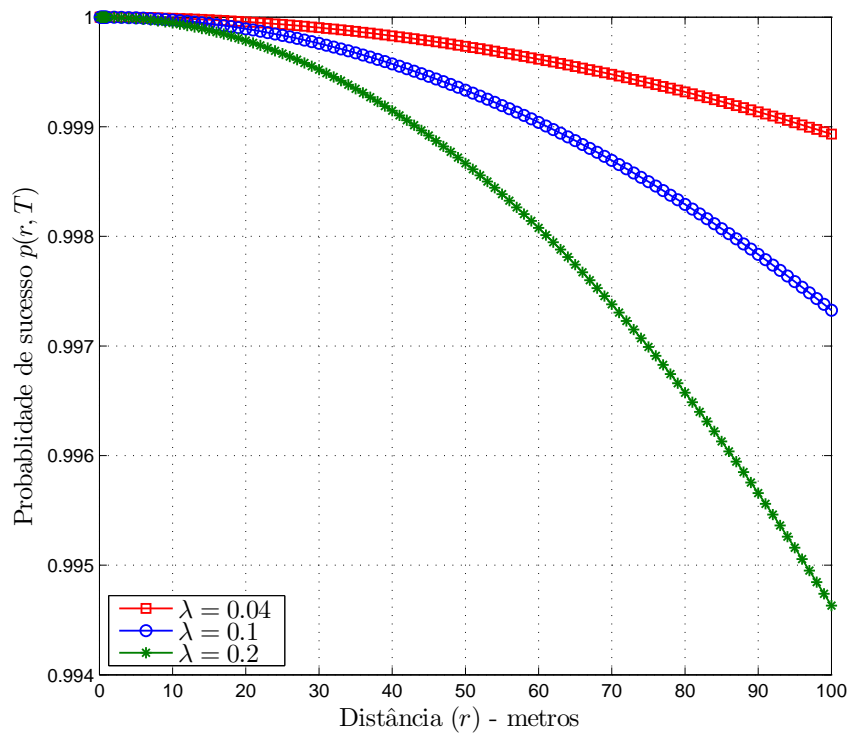


Figura 7.9 – Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste, com limiar de conexão de $T = 10$ dB (caso potência constante).

Outra vez, ao definir a variável Z , como $Z = W + \mathcal{I}_\Psi$, então a probabilidade $p(r, T)$ em relação a esperança de Z fica dada por

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \mathbb{E}\{\Gamma(n+1, K_T(r)Z)\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\exp(-K_T(r)Z) \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k Z^k}{k!}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} \mathbb{E}\{\exp(-K_T(r)Z) Z^k\}. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Substituindo a variável aleatória Z por $W + \mathcal{I}_\Psi$, a igualdade remanescente fica dada por

$$p(r, T) = \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} \mathbb{E}\{\exp(-K_T(r)(W + \mathcal{I}_\Psi)) (W + \mathcal{I}_\Psi)^k\}. \quad (7.104)$$

Aplicando-se novamente o Teorema Binomial como em (7.93), obtém-se

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \sum_{k=0}^n \frac{K_T(r)^k}{k!} \mathbb{E}\left\{\exp(-K_T(r)W) \exp(-K_T(r)\mathcal{I}_\Psi) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} W^{k-l} \mathcal{I}_\Psi^l\right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \frac{K_T(r)^k}{k!} \binom{k}{l} \mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^l \exp(-K_T(r)\mathcal{I}_\Psi)\} \mathbb{E}\{W^{k-l} \exp(-K_T(r)W)\}. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Recordemos que a primeira esperança já foi determinada na subseção precedente, pois

$$\mathbb{E}\{\mathcal{I}_\Psi^l \exp(-K_T(r)\mathcal{I}_\Psi)\} = \int_0^\infty \exp(-K_T(r)y) y^l p_{\mathcal{I}_\Psi}(y) dy \quad (7.106)$$

como apresentado na Equação (7.94). Para a outra esperança, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{W^{k-l} \exp(-K_T(r)W)\} &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty x^{k-l} \exp(-K_T(r)x) \exp\left(-\frac{1}{\mu}x\right) dx \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty x^{(k-l+1)-1} \exp\left(-\left(\frac{1}{\mu} + K_T(r)\right)x\right) dx. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Pelos resultados (A.3) e (A.2), nesta sequência, a referida esperança fica reduzida para

$$\mathbb{E}\{W^{k-l} \exp(-K_T(r)W)\} = \frac{(k-l)! \mu^{k-l}}{(1 + \mu K_T(r))^{k-l+1}}. \quad (7.108)$$

Finalmente, fazendo-se as devidas substituições e simplificações com relação ao número binomial em (7.106), a probabilidade $p(r, T)$ é igual a

$$p(r, T) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \frac{\mu^{k-l} K_T(r)^k}{l! (1 + \mu K_T(r))^{k-l+1}} (-1)^l \frac{d^l}{dy^l} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(y) \Big|_{y=K_T(r)}. \quad (7.109)$$

Em particular, para $m = 2$, tem-se

$$p(r, T) = \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\Psi}(K_T(r))}{1 + \mu K_T(r)} \left[1 + \frac{\mu K_T(r)}{1 + \mu K_T(r)} + \lambda \pi G_{3,3}^{1,3} \left[\frac{\Omega}{2} K_T(r) \Big|_{1, \frac{2}{\eta}, 1}^{0, -1, 1 + \frac{2}{\eta}} \right] \right]. \quad (7.110)$$

Finalizemos esta seção com uma comparação entre os casos de potência de ruído constante e exponencialmente distribuída, com o propósito de verificarmos o ganho de performance de uma em relação a outra, conforme ilustra a Figura 7.10. Como pode-

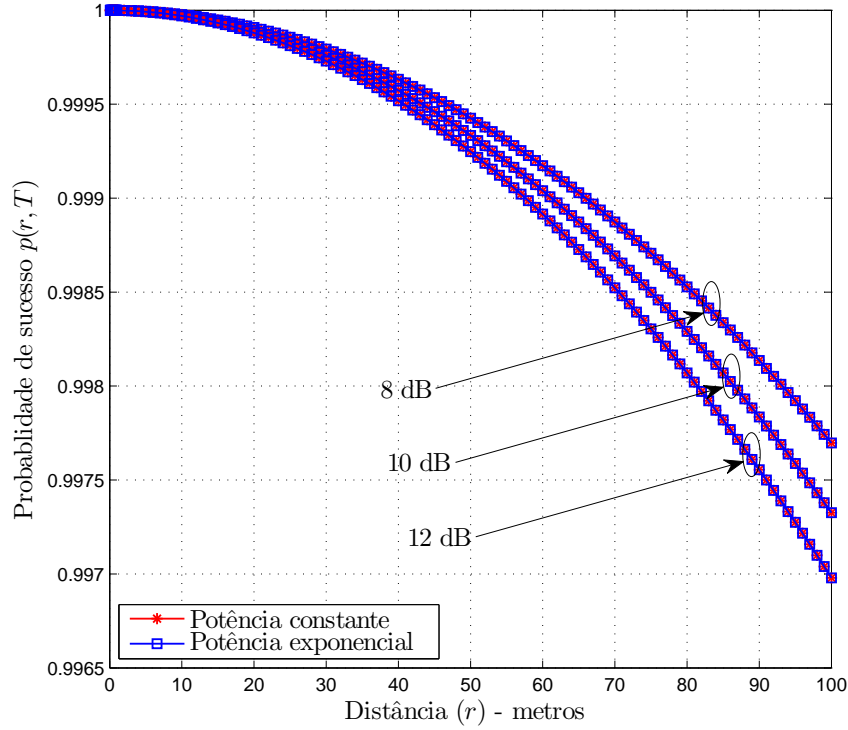


Figura 7.10 – Análise da probabilidade $p(r, T)$ em termos da distância entre transmissor e receptor teste ao comparar potência de ruído constante e exponencialmente distribuída, para $W = \mu = -104$ dBm.

mos verificar, as curvas praticamente se sobrepõem, para o respectivo limiar de conexão. Conclui-se assim, para um distanciamento de até 100 metros entre os dispositivos testes, a diferença entre os modelos é quase imperceptível. Isto posto, não há perda de performance, se no modelo adotado, em termos da SINR, considerarmos apenas potência de ruído constante.

7.6 Síntese

Este capítulo dedicou-se a analisar estatisticamente o comportamento do fenômeno interferência em redes *ad-hoc* sem-fio sob o contexto de um processo marcado de Poisson. Neste, determinou expressões analíticas fechadas para interferência média e variância do processo. Por sua vez, como a PDF da variável que descreve a interferência não foi devidamente modelada, obteve-se a transformada de Laplace como uma ferramenta auxiliar na caracterização de tal fenômeno. Na continuidade do trabalho, foram apresentados dois modelos de conectividade: um deles baseado na SIR, em que adotou-se que a recepção do sinal de interferência era estatisticamente limitado, e outro segundo a SINR, sendo para este considerou-se a potência de ruído constante. Por fim, verificou-se o comportamento

das funções propostas no capítulo por simulações computacionais diante a variação de vários parâmetros.

No capítulo que se segue, com a proposta de evitarmos as derivadas de ordem superior da transformada de Laplace da variável interferência, apresentaremos alguns limitantes a probabilidade $p(r, T)$, segundo as desigualdades estatísticas de Chernoff e Markov.

Limitantes às Métricas dos Modelos de Conectividade

No capítulo anterior, obtivemos algumas métricas que avaliam o comportamento da interferência a partir de limiares de conectividade para SIR e SINR. As expressões analíticas propostas foram desenvolvidas, mediante a fixação de um fator de severidade de desvanecimento do canal de rádio, para valores inteiros positivos. Como a densidade de probabilidade da interferência não é conhecida, utilizou-se a transformada de Laplace para a determinação de tais resultados. Contudo, mesmo com a disponibilidade da transformada, fica inviável a determinação de expressões analíticas para quaisquer que sejam os valores de severidade da distribuição Nakagami- m devido a determinação de ordem superiores da referida transformada. Diante desta problemática, e para contornar esta situação, a sequência deste trabalho se dedica à determinação de limitantes de tais métricas e as avaliaremos segundo simulações computacionais. Com mais detalhes, inicialmente nos delimitaremos à determinação de limitantes à probabilidade de que uma transmissão é decodificada com sucesso se o nível de SIR identificado no receptor teste está acima de um limiar fixado T , conforme foi definido na Seção 7.4. Aqui, proporemos alguns resultados mediante as inequações de Chernoff (MITZENMACHER; UPFAL, 2005). Por fim, dedicaremos uma seção para o estudo de otimização em redes *ad-hoc* a partir de limitantes superiores porventura encontrados.

8.1 Desigualdades de Chernoff

Em linhas gerais, as desigualdades de Chernoff sobre uma variável aleatória X é obtida aplicando a inequação de Markov na variável $\exp(tX)$ resultando

$$\mathbb{P}(X \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}\{\exp(tX)\}}{\exp(tk)}, \quad (8.1)$$

para qualquer que seja $t > 0$ e

$$\mathbb{P}(X \leq k) \leq \frac{\mathbb{E}\{\exp(tX)\}}{\exp(tk)}, \quad (8.2)$$

para qualquer $t < 0$.

A partir destas desigualdades é mostrado que a probabilidade $\mathbb{P}(X \geq k)$ fica limitada pelas seguintes desigualdades

$$1 - \frac{\mathbb{E}\{\exp(tX)\}}{\exp(tk)} \leq \mathbb{P}(X \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}\{\exp(tX)\}}{\exp(tk)}, \quad (8.3)$$

para $t \leq 1$ e $X > 0$. Com efeito, o limitante superior de $\mathbb{P}(X \leq k)$ é uma aplicação direta da primeira desigualdade de Chernoff apresentada em (8.1). Para o limitante inferior, suponha por absurdo que exista $t^* > 1$ tal que a desigualdade seja dada por

$$1 - \frac{\mathbb{E}\{\exp(t^*X)\}}{\exp(t^*k)} > \mathbb{P}(X \geq k). \quad (8.4)$$

Como $\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X < k)$, tem-se que a desigualdade acima fica dada por

$$1 - \frac{\mathbb{E}\{\exp(t^*X)\}}{\exp(t^*k)} > 1 - \mathbb{P}(X < k), \quad (8.5)$$

ou seja,

$$\frac{\mathbb{E}\{\exp(t^*X)\}}{\exp(t^*k)} < \mathbb{P}(X < k). \quad (8.6)$$

Agora aplicando a segunda desigualdade de Chernoff descrita em (8.1), obtém-se

$$\frac{\mathbb{E}\{\exp(t^*X)\}}{\exp(t^*k)} < \frac{\mathbb{E}\{\exp(-tX)\}}{\exp(-tk)}, \quad (8.7)$$

para todo $t > 0$. Em particular, para $t = t^*$, segue que

$$\frac{\mathbb{E}\{\exp(t^*X)\}}{\exp(t^*k)} < \frac{\mathbb{E}\{\exp(-t^*X)\}}{\exp(-t^*k)} \quad (8.8)$$

Como a seguinte desigualdade é válida

$$\frac{1}{\exp(t^*k)} < \frac{1}{\exp(-t^*k)}, \quad (8.9)$$

logo, devemos ter

$$\mathbb{E}\{\exp(t^*X)\} < \mathbb{E}\{\exp(-t^*X)\} \quad (8.10)$$

uma contradição, pois $\mathbb{E}\{\exp(t^*X)\} \geq \mathbb{E}\{\exp(-t^*X)\}$. Portanto, para todo $t \leq 1$, tem-se

$$1 - \frac{\mathbb{E}\{\exp(tX)\}}{\exp(tk)} \leq \mathbb{P}(X \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}\{\exp(tX)\}}{\exp(tk)}. \quad (8.11)$$

Como comentado no início desta seção, tal resultado servirá de apoio para obtenção de limitantes aos modelos de conectividade para SIR e SINR, como veremos na sequência.

8.2 Limitantes ao modelo de conectividade baseado na SIR

Para esta seção, comecemos propondo limitantes a probabilidade $p(r, T)$ segundo o modelo de conectividade baseado na SIR. Contudo, pelo resultado apresentado na Equação (8.11), basta-nos determinar o limitante superior para que o resultado seja caracterizado. Desta maneira, segue que:

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \mathbb{P}\left(\frac{h_{x_0}\ell(r)}{\mathcal{I}_{\Psi^*}} \geq T\right) \\ &= \mathbb{P}(h_{x_0}\ell(r) \geq T\mathcal{I}_{\Psi^*}) \\ &= \mathbb{P}(h_{x_0}\ell(r) - T\mathcal{I}_{\Psi^*} \geq 0). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Segundo a inequação de Chernoff, a probabilidade $p(r, T)$ fica limitada superiormente por

$$p(r, T) \leq \mathbb{E}\{\exp((h_{x_0}\ell(r) - T\mathcal{I}_{\Psi^*})t)\} = \mathbb{E}\{\exp(h_{x_0}\ell(r)t) \exp(-T\mathcal{I}_{\Psi^*}t)\}, \quad (8.13)$$

para uma escolha conveniente de $t > 0$. Agora, devido a independência das variáveis aleatórias h_{x_0} e \mathcal{I}_{Ψ^*} tem-se que

$$p(r, T) \leq \mathbb{E}\{\exp(h_{x_0}\ell(r)t)\} \mathbb{E}\{\exp(-T\mathcal{I}_{\Psi^*}t)\}. \quad (8.14)$$

Basta-nos determinar a primeira esperança $\mathbb{E}\{\exp(h_{x_0}\ell(r)t)\}$ uma vez que a outra é dada em termos da transformada de Laplace da variável \mathcal{I}_{Ψ^*} , ou seja,

$$\mathbb{E}\{\exp(-T\mathcal{I}_{\Psi^*}t)\} = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi^*}}(Tt). \quad (8.15)$$

Lembrando que h_{x_0} tem distribuição Gama sendo

$$h_{x_0} \sim \text{Gama}\left(m, \frac{\Omega}{m}\right). \quad (8.16)$$

Desta maneira, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\exp(h_{x_0}\ell(r)t)\} &= \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \int_0^\infty x^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}x\right) \exp(\ell(r)tx) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \int_0^\infty x^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{\Omega} - \ell(r)t\right)x\right) dx. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Segundo a referência (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2010, Eq. 3.381-4), este último resultado é integrável desde que o fator $\frac{m}{\Omega} - \ell(r)t$ seja positivo. Com isso, devemos fazer uma restrição para o valor de t . Portanto, desenvolvendo a referida desigualdade encontra-se

$$0 < t < \frac{m}{\Omega} \ell(r)^{-1}. \quad (8.18)$$

Nesse caso, o valor de t fica condicionado ao valor a distância entre os dispositivos de referência. Retornado a última integral em (8.17) e aplicando-se o resultado (A.3), encontra-se

$$\int_0^\infty x^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{\Omega} - \ell(r)t\right)x\right) dx = \frac{1}{\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega\ell(r)}{m}t}\right)^m \Gamma(m). \quad (8.19)$$

Assim, a esperança $\mathbb{E}\{\exp(h_{x_0}\ell(r)t)\}$ fica dada por

$$\mathbb{E}\{\exp(h_{x_0}\ell(r)t)\} = \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{1}{\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega\ell(r)}{m}t}\right)^m \Gamma(m), \quad (8.20)$$

ou seja,

$$\mathbb{E}\{\exp(h_{x_0}\ell(r))\} = \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega\ell(r)}{m}t}\right)^m. \quad (8.21)$$

Logo, a probabilidade $p(r, T)$ fica limitada superiormente por

$$p(r, T) \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega\ell(r)}{m}t}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt). \quad (8.22)$$

Por fim, aplicando o resultado (8.11), $p(r, T)$ é limitada inferiormente e superiormente por

$$1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega\ell(r)}{m}t}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt) \leq p(r, T) \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega\ell(r)}{m}t}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt). \quad (8.23)$$

para t definido em (8.18). Aqui é importante ressaltar que o limitantes sobre $p(r, T)$ é válido para qualquer valor $m > 1$, ou seja, tal resultado é válido não apenas para fatores de desvanecimento com valores inteiro, como foi estudado no capítulo anterior.

Ademais, a partir do limitante inferior encontrado, mediante a algumas manipulações algébricas chega-se a um limitante inferior $L_{\text{SIR}}(r, T)$ à probabilidade $p(r, T)$ mais “apertado” do que o proposto, a saber:

$$L_{\text{SIR}}(r, T) = \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\Omega\ell(r)}{m}t}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt). \quad (8.24)$$

Na continuação (Figura (8.2)), exibimos os resultados computacionais para o caso do limitante $L_{\text{SIR}}(r, T)$, pois em termos do limitante superior, os resultados numéricos apesar de coerentes, não apresentaram precisão aceitável. É importante mencionar que para construir as curvas da função $L_{\text{SIR}}(r, T)$ para os limiares de 8, 10 e 12 dB, deve respeitar a seguintes restrições de (8.18). Portanto, ao variar o valor da distância entre os dispositivos transmissor/receptor de referências, consideraremos o parâmetro t como uma função deste distanciamento, ou seja, $t = t(r)$. Além disso, para garantir que $t(r)$ pertença ao intervalo aberto $(0, \frac{m}{\Omega}\ell(r)^{-1})$, tomemos

$$t(r) = \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{\Omega}\ell(r)^{-1} = \frac{1}{\Omega}\ell(r)^{-1}, \quad (8.25)$$

desde que $m > 1$ e, esta escolha também garante que $t(r) \leq 1$. Particularmente, se $m = 2$, tem-se que $t(r)$ é tomado como ponto médio do segmento $(0, \frac{m}{\Omega}\ell(r)^{-1})$, como

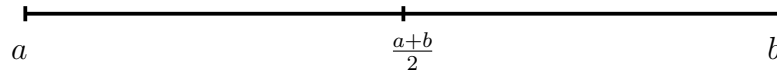


Figura 8.1 – Ponto médio do intervalo (a, b) .

ilustra o esquema na Figura (8.1) para um intervalo arbitrário (a, b) . De agora em diante, o limitante inferior $L_{\text{SIR}}(r, T)$ à probabilidade $p(r, T)$ é dado por

$$L_{\text{SIR}}(r, T) = \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*} \left(\frac{\ell(r)^{-1}}{\Omega} T \right). \quad (8.26)$$

A figura a seguir, descreve o comportamento das curvas que limitam inferiormente a probabilidade $p(r, T)$ em comparação com as curvas já apresentadas na Figura 7.3. Como podemos verificar, os limitantes inferiores apresentaram resultados satisfatórios com

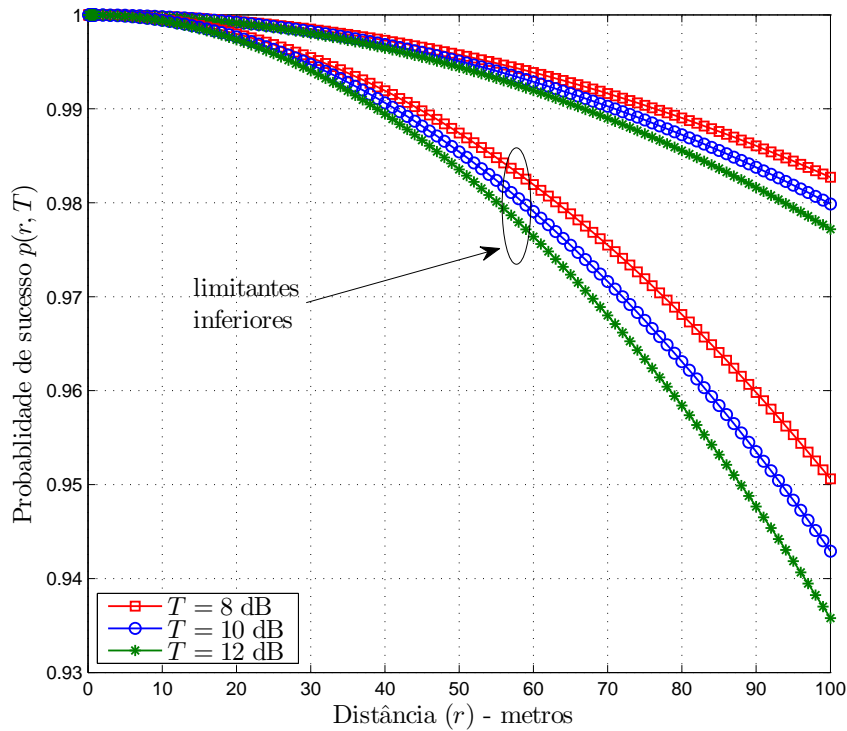


Figura 8.2 – Limitantes inferiores à probabilidade $p(r, T)$ segundo o modelo de conectividade baseado na SIR.

relação as expressões analíticas fechadas para a probabilidade $p(r, T)$ das transmissões bem sucedidas, mesmo com o distanciamento do transmissor teste. Por exemplo, para um limiar de 12 dB, e distância entre dispositivos de 50 metros, tem-se, pelo limitante inferior, que a probabilidade de que a transmissão seja decodificada com êxito é acima de 97%, o qual é aproximadamente dois pontos percentuais para menos com relação a expressão exata. Além disso, para um distanciamento de 100 metros, a probabilidade de se obter sucesso de transmissão fica acima de 93% de possibilidade, para qualquer que seja o limiar de conexão.

Para a seção seguinte, também determinaremos limitantes à $p(r, T)$, porém para o modelo de conectividade segundo a SINR.

8.3 Limitantes ao modelo de conectividade baseado na SINR

Seguindo a mesma ideia da desigualdade de Chernoff, a seguir são apresentados limitantes a probabilidade $p(r, T)$, para os casos de potência de ruído constante e potência de ruído exponencialmente distribuída. Contudo, em ambos os casos os desenvolvimentos algébricos já foram basicamente descritos na última seção.

Como foi apresentado em capítulos anteriores, a probabilidade de obter sucesso no *link* desejado para um limiar de conexão T segundo o modelo baseado na SINR é dado por

$$\text{SINR} = \frac{Ph_{x_0}\ell(r)}{W + \mathcal{I}_{\Psi^*}} > T. \quad (8.27)$$

Iniciemos, portanto com o caso da potência de ruído constante. Reorganizando os termos da última equação, encontra-se

$$\begin{aligned} p(r, T) &= \mathbb{P}(Ph_{x_0}\ell(r) > T(W + \mathcal{I}_{\Psi^*})) \\ &= \mathbb{P}(Ph_{x_0}\ell(r) - T\mathcal{I}_{\Psi^*} > TW). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Pela desigualdade de Chernoff, para todo $t > 0$ tem-se

$$p(r, T) \leq \frac{\mathbb{E}\{\exp(Ph_{x_0}\ell(r) - T\mathcal{I}_{\Psi^*})t\}}{\exp(TWt)}, \quad (8.29)$$

cuja desigualdade pode ser reescrita como

$$p(r, T) \leq \frac{\mathbb{E}\{\exp(Ph_{x_0}\ell(r)t)\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi^*}}(Tt)\}}{\exp(TWt)}, \quad (8.30)$$

visto que as variáveis são independentes. Por sua vez, para

$$0 < t < \frac{m}{\Omega P} \ell(r)^{-1}, \quad (8.31)$$

a respectiva esperança fica dada por

$$\mathbb{E}\{\exp(Ph_{x_0}\ell(r))\} = \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega P \ell(r)}{m} t} \right)^m. \quad (8.32)$$

Deste modo, para todo $t \leq 1$, a probabilidade $p(r, T)$ fica limitada por

$$1 - \exp(-TWt) \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega P \ell(r)}{m} t} \right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi^*}}(Tt) \leq p(r, T) \quad (8.33)$$

e para todo $t > 0$, tem-se

$$p(r, T) \leq \exp(-TWt) \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega P \ell(r)}{m} t} \right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi^*}}(Tt). \quad (8.34)$$

Novamente, para um limitante inferior mais apertado, considera-se o limitante $L_{\text{SINR}}^{W(\text{cte})}(r, T)$ dado por

$$L_{\text{SINR}}^{W(\text{cte})}(r, T) = \exp(-TWt) \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\Omega P \ell(r)}{m} t}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt), \quad (8.35)$$

o qual indica que o modelo de conexão é dado em termos da SINR com potência de ruído constante. Por sua vez, para

$$t = t(r) = \frac{1}{\Omega P} \ell(r)^{-1}, \quad (8.36)$$

segue que

$$L_{\text{SINR}}^{W(\text{cte})}(r, T) = \exp\left(-\frac{W \ell(r)^{-1}}{\Omega P} T\right) \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}\left(\frac{\ell(r)^{-1}}{\Omega P} T\right). \quad (8.37)$$

Em particular, se a potência de transmissão P é unitária e a potência de ruído nula, segue que este modelo coincide com caso baseado em termos da SIR, ou seja,

$$L_{\text{SINR}}^{W(\text{cte})}(r, T) = L_{\text{SIR}}(r, T). \quad (8.38)$$

Agora, investigaremos o caso da potência de ruído ser exponencialmente distribuída. De maneira análoga aos casos anteriores, proporemos um limitante inferior a probabilidade $p(r, T)$ o qual será denotado por $L_{\text{SINR}}^{W(\text{exp})}(r, T)$. Ao retornar à Equação (8.28), podemos reproduzi-la da seguinte forma

$$p(r, T) = \mathbb{P}(Ph_{x_0} \ell(r) - TW - T\mathcal{I}_{\Psi}^* > 0). \quad (8.39)$$

Então, mediante a desigualdade de Chernoff tem-se

$$p(r, T) \leq \mathbb{E}\{\exp(Ph_{x_0} \ell(r)t)\} \mathbb{E}\{\exp(-TWt)\} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt). \quad (8.40)$$

Para determinar este limitante superior, falta-nos apenas desenvolver a esperança a qual envolve a variável aleatória W . Como ela tem distribuição exponencial de média $1/\mu$, isto resulta em

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\exp(-TWt)\} &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \exp(-Ttw) \exp\left(-\frac{1}{\mu} w\right) dw \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \exp\left(-\left(Tt + \frac{1}{\mu}\right) w\right) dw \\ &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{Tt + \frac{1}{\mu}} \\ &= \frac{1}{1 + \mu Tt}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Diante de todas essas considerações, a probabilidade $p(r, T)$ limita-se por

$$1 - \frac{1}{1 + \mu Tt} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega P \ell(r)}{m} t}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt) \leq p(r, T) \leq \frac{1}{1 + \mu Tt} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega P \ell(r)}{m} t}\right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt). \quad (8.42)$$

Como previamente mencionado, em termos computacionais, será tomado o limitante inferior

$$L_{\text{SINR}}^{W(\text{exp})}(r, T) = \frac{1}{1 + \mu T t} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\Omega P \ell(r)}{m} t} \right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(Tt). \quad (8.43)$$

Enfim, como o valor parâmetro t sugerido em (8.36), tal igualdade fica reduzida para

$$L_{\text{SINR}}^{W(\text{exp})}(r, T) = \frac{1}{1 + \frac{\mu \ell(r)^{-1}}{\Omega P} T} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \right)^m \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*} \left(\frac{\ell(r)^{-1}}{\Omega P} T \right). \quad (8.44)$$

Para uma intensidade de rede de 0,1 usuário/ m^2 e fator- m igual a 2, a Figura 8.3 retrata um comparativo entre três curvas ao fixar um limiar de conexão. Similar a figura anterior, os limitantes inferiores são comparados com uma expressão analítica exata, proporcionando assim uma investigação de quão próximos eles estão. Observa-se que as curvas, referentes ao limitantes dos modelos: potência de ruído constante e exponencialmente distribuída, são praticamente coincidentes, para o seu respectivo limiar. Como verificado no capítulo anterior, para uma distância de até 100 metros para o *link* desejado as funções $L_{\text{SINR}}^{W(\text{cte})}(r, T)$ e $L_{\text{SINR}}^{W(\text{exp})}(r, T)$ são aproximadamente idênticas. Simbolicamente,

$$L_{\text{SINR}}^{W(\text{cte})}(r, T) \simeq L_{\text{SINR}}^{W(\text{exp})}(r, T) \quad (8.45)$$

Por fim, os respectivos limitantes exibem notáveis aproximações da curva analítica, mesmo com o distanciamento entre os dispositivos de referência. Fato este também ocorrido para o caso do modelo de conexão baseado na SIR.

A próxima seção será dedicada ao estudo de uma outra métrica de análise de desempenho de uma rede sem-fio chamada de *throughput* de Shannon.

8.4 *Throughput* de Shannon

O *throughput* de Shannon ou, simplesmente, *throughput* será o objeto de estudo desta seção. Em linha gerais, o *throughput* é uma métrica de análise de desempenho de redes, o qual indica a medida de banda que tal rede irá consumir. O conhecimento desta métrica é de fundamental importância para a análise da qualidade de serviço (*quality-of-service* (QoS), do inglês) de uma rede celular sem-fio (BLASZCZYSZYN; JOVANOVIĆ; KARRAY, 2013).

Com um pouco mais de detalhes, o *throughput* \mathcal{T} , sobre um *link* de comunicação, representa uma taxa de transmissão média o qual é determinado pelo conhecimento da SINR no dispositivo de recepção através da seguinte fórmula (BACCELLI; BLASZCZYSZYN, 2009b):

$$\mathcal{T} = \mathbb{E}\{\ln(1 + \text{SINR})\}, \quad (8.46)$$

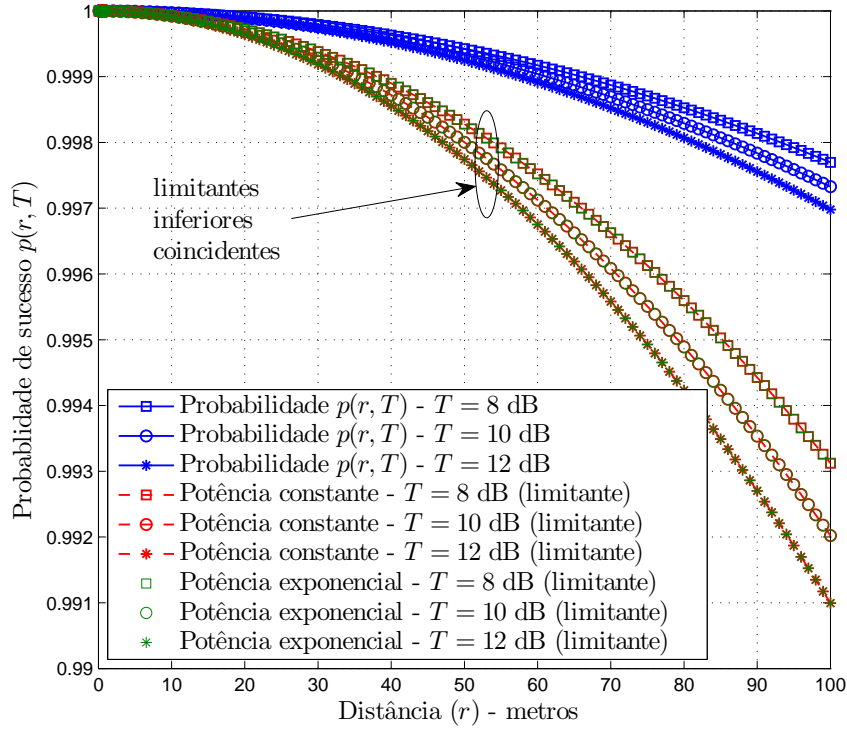


Figura 8.3 – Limitantes inferiores à probabilidade $p(r, T)$ segundo o modelo de conectividade baseado na SINR.

cujo resultado poder escrito, equivalentemente, como (ELSAWY; HOSSAIN; HAENGGI, 2013)

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\ln(1 + \text{SINR}) > t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\text{SINR} > (e^t - 1)) dt. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Diante das hipóteses levantadas por este trabalho, fica impraticável a obtenção de uma expressão fechada para esta integral, mesmo que utilizando os limitantes propostos (tanto superior como inferior). Para comprovar esta afirmação, suponha por simplicidade que a potência de ruído seja nula. Desta maneira, o modelo de conectividade é baseado na SIR cujo limitante inferior é dado em (8.26). Como

$$L_{\text{SIR}}(r, (e^t - 1)) \leq P(r, (e^t - 1)) = \mathbb{P}(\text{SINR} > (e^t - 1)), \quad (8.48)$$

tem-se

$$\mathcal{J} \geq \int_0^{\infty} L_{\text{SIR}}(r, (e^t - 1)) dt, \quad (8.49)$$

ou seja,

$$\mathcal{J} \geq \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}\right)^m \int_0^{\infty} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*} \left(\frac{\ell(r)^{-1}}{\Omega} (e^t - 1) \right) dt. \quad (8.50)$$

Fazendo-se a mudança de variável $x = e^t - 1$, tal integral fica escrita como

$$\mathcal{J} \geq \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}\right)^m \int_0^{\infty} (x + 1)^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*} \left(\frac{\ell(r)^{-1}}{\Omega} x \right) dx. \quad (8.51)$$

Portanto, ao substituir pela transformada de Laplace em (7.52), o *throughput* fica limitado inferiormente por

$$\mathcal{T} \geq \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}\right)^m \int_0^\infty (x + 1)^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{\Gamma(m)} G_{2,2}^{1,2} \left[\frac{\ell(r)^{-1}}{m} x \middle| \begin{matrix} 1-m, 1+\frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta} \end{matrix} \right]\right) dx, \quad (8.52)$$

cuja integral não possui uma expressão fechada devido a composição da função exponencial com uma função Meijer- G .

Apesar de não termos encontrado um resultado fechado, tal limitante pode ser resolvidos por métodos numéricos. Contudo, para esta seção nos restringiremos apenas a apresentação de tal resultado e destacar que a obtenção de expressões analíticas (exatas ou limitantes) para o referido *throughput* ainda é um grande desafio na literatura. Como um trabalho futuro, objetivamos abordar tal problema, porém com outras estratégias de obtenção de limitantes, como por exemplo, utilizando-se as desigualdades de Markov e Chebyshev.

8.5 Otimização de rede

Esta seção se destinará ao estudo da maximização da quantidade média de transmissões bem sucedidas em uma dada região \mathcal{R} de \mathbb{R}^2 . Adotando o modelo de conexão baseado na SIR, a referida análise será dada sobre a intensidade λ da rede.

No capítulo anterior, a probabilidade $p(r, T) = \mathbb{P}(\text{SIR} > T)$ foi amplamente estudada para um determinado limiar T não dando tanta ênfase na intensidade. Contudo, modificaremos a nomenclatura de $p(r, T)$ para $p_r(\lambda)$ com a finalidade de evidenciar a intensidade da rede. Desta forma, teremos

$$p_r(\lambda) = \mathbb{P}(\text{SIR} > T), \quad (8.53)$$

deixando assim oculto o parâmetro T . Além do mais, esta é a notação adotada por (BACCELLI; BLASZCZYSZYN; MUHLETHALER, 2006), o qual fez esta mesma investigação de otimização para o caso de uma rede sem-fio cujo canal segue um desvanecimento Rayleigh.

Semelhante ao Capítulo 6, o número de transmissões bem sucedidas mediante ao

modelo de SIR é dado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(T) &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} \mathbf{1}(\text{SIR}(x) > T) \\
 &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} \mathbf{1}\left(\frac{h_{\mathbf{x}} \ell(\|\mathbf{x}\|)}{\mathcal{I}_{\Psi^*}} > T\right) \\
 &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} \mathbf{1}(h_{\mathbf{x}} > T \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \mathcal{I}_{\Psi^*}) \\
 &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}),
 \end{aligned} \tag{8.54}$$

e a média do número de transmissões com êxito seguem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \mathbb{E}\left\{ \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi} f(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \right\} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}(h_{\mathbf{x}} > T \ell(\|\mathbf{x}\|)^{-1} \mathcal{I}_{\Psi^*}) \Lambda_*(d(\mathbf{x}, h)).
 \end{aligned} \tag{8.55}$$

Consideremos que os transmissores ativos localizados na região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ obedeçam a seguinte restrição: se $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$, então $\|\mathbf{x}\| = r$. Noutros termos, os transmissores ativos na região \mathcal{R} estão a uma mesma distância do receptor teste localizado na origem $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^2$. Tomando a última integral como relação a região \mathcal{R} tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} &= \int_{\mathcal{R} \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}(h_{\mathbf{x}} > T \ell(r)^{-1} \mathcal{I}_{\Psi^*}) \Lambda_*(d(\mathbf{x}, h)) \\
 &= \lambda \int_{\mathcal{R}} \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s > T \ell(r)^{-1} \mathcal{I}_{\Psi^*}) ds d\mathbf{x} \quad , \\
 &= \lambda \nu(\mathcal{R}) \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s > T \ell(r)^{-1} \mathcal{I}_{\Psi^*}) ds
 \end{aligned} \tag{8.56}$$

$\nu(\mathcal{R})$ é a medida do conjunto \mathcal{R} . Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
 p_r(\lambda) &= \mathbb{P}(\text{SIR} > T) \\
 &= \mathbb{P}(h_{\mathbf{x}} > T \ell(r)^{-1} \mathcal{I}_{\Psi^*}) \\
 &= \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s > T \ell(r)^{-1} \mathcal{I}_{\Psi^*}) ds.
 \end{aligned} \tag{8.57}$$

Portanto, a quantidade média de transmissores bem sucedidas na região \mathcal{R} é dada por

$$\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\} = \lambda p_r(\lambda) \nu(\mathcal{R}), \tag{8.58}$$

em que a medida da região \mathcal{R} , caso exista, tem valor constante. Mediante esta hipótese, em termos da intensidade da rede, maximizar a média $\mathbb{E}\{\mathcal{N}(T)\}$ é equivalente a maximizar o produto $\lambda p_r(\lambda)$, para uma distância r fixa entre os dispositivos testes.

Antes de desenvolvermos efetivamente este problema de otimização, apresentaremos com brevidade alguns conceitos e resultados de *distribuições estáveis* os quais nos auxiliará para tal propósito. O referido assunto pode ser encontrado de forma sucinta em (CARDIERI, 2010; HAENGGI, 2013), porém caso o leitor queira mais detalhes, veja por exemplo a referência (SAMORADNITSKY; TAQQU, 1994).

8.5.1 Distribuições estáveis

Uma variável X é dita ter uma distribuição estável se para todo real positivo a e b , existem $\alpha > 0$ e β também em \mathbb{R} tais que

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} \alpha X + \beta, \quad (8.59)$$

em que X_1 e X_2 são i.i.d. com mesma distribuição da variável X . Se $\beta = 0$, então a distribuição é chamada de estritamente estável. Como resultado, seja a sequência $\{\tau_i\} \subset \mathbb{R}$ a qual representa os tempos de chegada de um PPP de intensidade λ e seja $\{h_i\}$ uma família arbitrária de variáveis aleatórias i.i.d. e independentes de cada τ_i . Se a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^{-1/\delta} h_i \quad (8.60)$$

converge com $0 < \delta \leq 2$, então ela converge para uma variável aleatória estável. A partir desta afirmação, provemos que a interferência \mathcal{I}_{Ψ^*} tem distribuição estável.

Iniciemos com a função real $f(x) = \sqrt[n]{x}$ com $x > 0$ e n um número racional positivo. Tal função é não-decrescente, pois ao derivá-la encontra-se

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} > 0. \quad (8.61)$$

Assim, se $p \leq q$, segue que $f(p) \leq f(q)$, isto é, $\sqrt[p]{p} \leq \sqrt[q]{q}$. Por outro lado, em termos de nosso MPP, mostremos que

$$\min_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|^{-\eta}\} = \left[\max_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|\} \right]^{-\eta}. \quad (8.62)$$

De fato, se $1 = \min_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|^{-\eta}\}$, tem-se $1 \leq \|\mathbf{x}\|^{-\eta}$, para todo $\mathbf{x} \in \Psi^*$. Assim, $\|\mathbf{x}\|^\eta \leq 1$. Aplicando o resultado anterior, segue que $\|\mathbf{x}\| \leq 1$, ou seja, $1 = \max_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|\}$. Portanto, $1 = 1^{-\eta} = [\max_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|\}]^{-\eta}$. De maneira análoga, suponha que exista \mathbf{x}_* em Ψ^* tal que $\|\mathbf{x}_*\|^{-\eta} = \min_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|^{-\eta}\}$. Isto garante que $\|\mathbf{x}_*\|^{-\eta} \leq 1$ e $\|\mathbf{x}_*\|^{-\eta} \leq \|\mathbf{x}\|^{-\eta}$, para todo $\mathbf{x} \in \Psi^*$. Estas duas desigualdades podem ser escritas como: $1 \leq \|\mathbf{x}_*\|^\eta$ e $\|\mathbf{x}\|^\eta \leq \|\mathbf{x}_*\|^\eta$. Portanto, das desigualdades $1 \leq \|\mathbf{x}_*\|$ e $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_*\|$, para todo $\mathbf{x} \in \Psi^*$, garante-se que $\|\mathbf{x}_*\| = \max_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|\}$ e $\|\mathbf{x}_*\|^{-\eta} = [\max_{\mathbf{x} \in \Psi^*} \{1, \|\mathbf{x}\|\}]^{-\eta}$. Isto finaliza a demonstração.

Finalmente, provemos que a interferência \mathcal{I}_{Ψ^*} agregada a rede sem-fio tem distribuição estável. Para tal devemos observar que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\Psi^*}(\lambda) &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi^*} h_{\mathbf{x}} \min \{1, \|\mathbf{x}\|^{-\eta}\} \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi^*} h_{\mathbf{x}} [\max \{1, \|\mathbf{x}\|\}]^{-\eta} \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, h_{\mathbf{x}}) \in \Psi^*} h_{\mathbf{x}} \left[\max \{1, \|\mathbf{x}\|\}^2 \right]^{-\frac{\eta}{2}} \end{aligned} \quad (8.63)$$

Fazendo-se $\frac{1}{\delta} = \frac{\eta}{2}$, tem-se $\delta = \frac{2}{\eta}$. Como por hipótese, $\eta > 2$, garante-se que $0 < \delta < 1$. Portanto, a variável interferência tem distribuição estável.

Um outro resultado de distribuição estável, o qual será utilizado no restante deste trabalho, é o seguinte (HAENGGI, 2013):

Seja $\mathcal{I}_{\Psi}(\lambda)$ a interferência agregada de um PPP homogêneo em \mathbb{R}^d de intensidade λ e expoente de perda de percurso η , segue que

$$a\mathcal{I}(\lambda) = \mathcal{I}(a^\delta\lambda), \text{ para todo } a > 0, \text{ com } \delta = \frac{d}{\eta}. \quad (8.64)$$

Retornado ao nosso caso, mediante esta afirmação faremos com que interferência da rede $\mathcal{I}_{\Psi^*}(\lambda)$ seja proporcional à interferência de um processo equivalente de intensidade de rede igual a 1. Especificamente, façamos $a^\delta = 1$, logo temos $a^\delta = \frac{1}{\lambda}$. Isolando a constante a encontra-se $a = \lambda^{-1/\delta} = \lambda^{-\eta/2}$, uma vez que $d = 2$. Portanto, pela Equação (8.64), tem-se que $\lambda^{-\eta/2}\mathcal{I}_{\Psi^*}(\lambda) = \mathcal{I}_{\Psi^*}(1)$, ou seja, a interferência adotada por este trabalho pode também ser dada pela seguinte igualdade

$$\mathcal{I}_{\Psi^*}(\lambda) = \lambda^{\eta/2}\mathcal{I}_{\Psi^*}(1). \quad (8.65)$$

Tal resultado será empregado a seguir para a maximização do produto $\lambda p_r(\lambda)$, como descrito no início desta seção.

8.5.2 Maximização da quantidade média de transmissões bem sucedidas

Voltemos ao estudo da maximização da quantidade média de transmissões bem sucedidas mediante ao modelo baseado na SIR. Como foi previamente apresentado, devemos maximizar o produto $\lambda p_r(\lambda)$. Por outro lado, é sabido que $p_r(\lambda) = \mathbb{P}(\text{SIR} > T)$. Então,

$$p_r(\lambda) = \mathbb{P}(h_x > T\ell(r)^{-1}\mathcal{I}_{\Psi^*}) \quad (8.66)$$

Como a variável \mathcal{I}_{Ψ^*} tem distribuição estável, então pela Equação (8.65), a última expressão pode ser dada por

$$p_r(\lambda) = \mathbb{P}(h_x > T\ell(r)^{-1}\lambda^{\eta/2}\mathcal{I}_{\Psi^*}(1)) = \mathbb{P}(h_x\mathcal{I}_{\Psi^*}^{-1}(1) > T\ell(r)^{-1}\lambda^{\eta/2}) \quad (8.67)$$

Agora, segundo a *desigualdade de Markov* que diz: se X é uma variável aleatória não negativa, então para quaisquer $a, p > 0$ tem-se (PAPOULIS; PILLAI, 2002)

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\{X^p\}}{a^p}. \quad (8.68)$$

Podemos então, aplicá-lo para encontrar

$$p_r(\lambda) \leq \frac{\mathbb{E}\{h_x^p\}\mathbb{E}\{\mathcal{I}_{\Psi^*}^{-p}(1)\}}{(T\ell(r)^{-1}\lambda^{\eta/2})^p}. \quad (8.69)$$

Estas duas esperanças já foram devidamente determinadas nos capítulos anteriores. Portanto, pelas Equações (6.66) e (7.69), respectivamente, a probabilidade $p_r(\lambda)$ fica limitada superiormente por

$$\begin{aligned} p_r(\lambda) &\leq \left(\frac{\Omega}{mT\ell(r)^{-1}\lambda^{\eta/2}} \right)^p \frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)\Gamma(p)} \mathcal{M} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*(1)}(s); p \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^{p\eta/2}} \left(\frac{\Omega}{mT\ell(r)^{-1}} \right)^p \frac{1}{B(m,p)} \mathcal{M} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*(1)}(s); p \right], \end{aligned} \quad (8.70)$$

sendo $B(\cdot, \cdot)$ a função Beta a qual é dada em (A.10). Como queremos maximizar o produto $\lambda p_r(\lambda)$, devemos portanto multiplicar por λ os dois lados a última desigualdade para encontrarmos desta forma

$$\lambda p_r(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda^{(p\eta/2)-1}} \left(\frac{\Omega}{mT\ell(r)^{-1}} \right)^p \frac{1}{B(m,p)} \mathcal{M} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*(1)}(s); p \right]. \quad (8.71)$$

Para que tenhamos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^{(p\eta/2)-1}} \quad (8.72)$$

há a necessidade de impormos que $\frac{p\eta}{2} - 1 > 0$, ou $p > \frac{2}{\eta}$. Portanto, para que o limite seja satisfeito, o valor de p fica restrito a

$$0 < \frac{2}{\eta} < p. \quad (8.73)$$

Consequentemente, obtém-se

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda p_r(\lambda) = 0. \quad (8.74)$$

Como o limite existe e é finito, então a função $f(\lambda) = \lambda p_r(\lambda)$ é limitada superiormente, isto é, existe $k > 0$, tal que $f(\lambda) \leq k$. Por outro lado, pela desigualdade em (8.71), ao tomar $p = \frac{2}{\eta}$, encontra-se

$$f(\lambda) = \lambda p_r(\lambda) \leq \underbrace{\left(\frac{\Omega}{mT\ell(r)^{-1}} \right)^{\frac{2}{\eta}} \frac{1}{B\left(m, \frac{2}{\eta}\right)} \mathcal{M} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*(1)}(s); \frac{2}{\eta} \right]}_{=k}, \quad (8.75)$$

para todo $\lambda > 0$. Como queremos maximizar o produto $\lambda p_r(\lambda)$, então devemos tomar um $\lambda^* > 0$ de tal forma que

$$\lambda^* p_r(\lambda^*) = \left(\frac{\Omega}{mT\ell(r)^{-1}} \right)^{\frac{2}{\eta}} \frac{1}{B\left(m, \frac{2}{\eta}\right)} \mathcal{M} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*(1)}(s); \frac{2}{\eta} \right]. \quad (8.76)$$

Portanto, este produto maximiza a quantidade média de transmissões bem sucedidas.

Observemos que a determinação do valor ótimo λ^* fica restrito ao conhecimento da probabilidade $p_r(\lambda^*)$ e nem sempre é uma tarefa simples. Como exemplo, para o caso do fator de desvanecimento $m = 2$, cuja probabilidade é descrita em (7.66), isto é,

$$p_r(\lambda^*) = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*} \left(\frac{2\ell(r)^{-1}}{\Omega} T \right) \left[1 + \lambda^* \pi G_{3,3}^{1,3} \left[\ell(r)^{-1} T \left| \begin{matrix} 0, -1, 1 + \frac{2}{\eta} \\ 1, \frac{2}{\eta}, 1 \end{matrix} \right. \right] \right], \quad (8.77)$$

não é possível determinar uma solução única para a equação $\lambda^* p_r(\lambda^*) = k$, sendo k dado em (8.75). Isto deve-se ao fato que a transformada de Laplace $\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\Psi}^*}(\cdot)$, a qual é uma função exponencial, também depende do valor de λ^* .

As maximizações da quantidade média de transmissões bem sucedidas mediante ao modelo baseado na SIR são retratadas nas Figuras 8.4 e 8.5 para um ambiente de desvanecimento $m = 2$. A primeira delas, adotou-se a escala linear para descrever o produto $\lambda p_r(\lambda)$, enquanto para a outra utilizou-se a escala logarítmica com propósito de resgatar mais detalhes nos comportamentos das referidas curvas para limiares de conexão de 8, 10 e 12 dB.

Como aguardado, o aumento da média de transmissões decodificadas com êxito é inversamente proporcional a intensidade da rede, ao fixar uma distância r entre transmissor/receptor testes. Como podemos visualizar nas Figuras 8.4 e 8.5, a maximização do produto $\lambda p_r(\lambda)$ torna-se praticamente constante para um distanciamento a partir de 10 metros entre os dispositivos móveis. Contudo, em qualquer caso, cada valor do produto é considerado baixo. Por fim, os limiares de conexão não causam tanto impacto na maximização da quantidade média de transmissões bem sucedidas.

8.6 Síntese

Mediante as inequações de Chernoff e Markov, neste capítulo foram propostos limitantes a probabilidade referente as transmissões bem sucedidas. Aqui, adotou-se o modelo de conectividade baseado na SIR e SINR e levou-se em consideração todos os parâmetros os quais já vinham sido utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho: o desvanecimento do canal, o expoente de perda de percurso, a intensidade da rede, etc. Em termos numéricos, foram verificados que os limitantes inferiores sugeridos representam uma boa aproximação as referidas expressões analíticas. Na sequência, ao apresentar a métrica relativa ao *throughput* da rede, foi comentado, diante do modelo proposto por este trabalho, da dificuldade de obtenção de uma expressão analítica fechada. Finalmente, o referido capítulo foi finalizado com a investigação na maximização da quantidade média de transmissões bem sucedidas em uma dada região, em termos de distribuições estáveis.

O estudo de limitantes de desempenho em sistemas de comunicação é bastante relevante para permitir uma análise numérica simplificada por meio de funções analíticas. Trabalhos recentes tem utilizado resultados de *Teoria de Majorização* (MARSHALL;

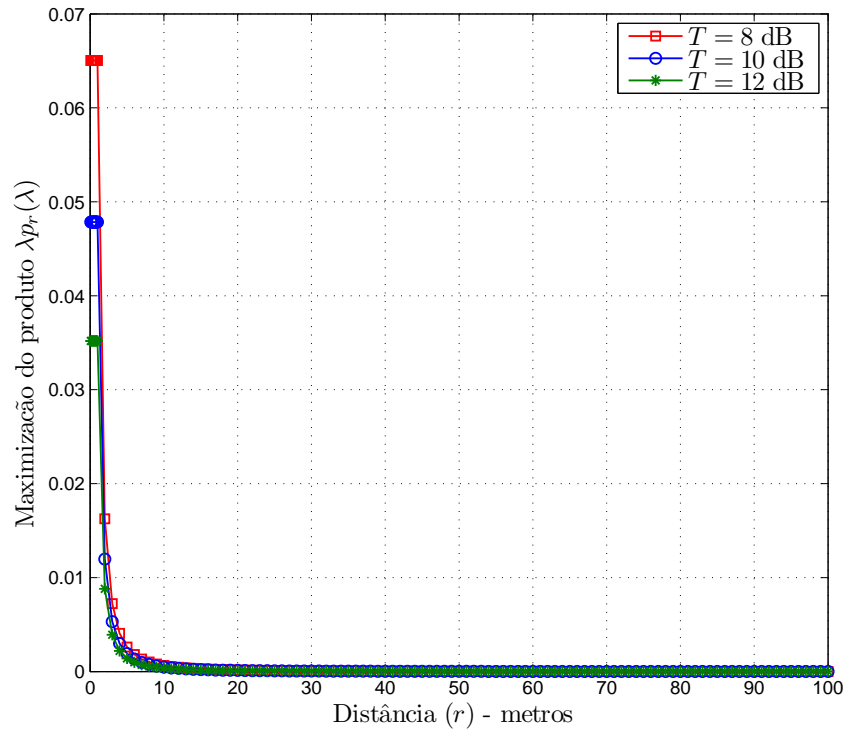


Figura 8.4 – Maximização do produto $\lambda p_r(\lambda)$ em escala linear.

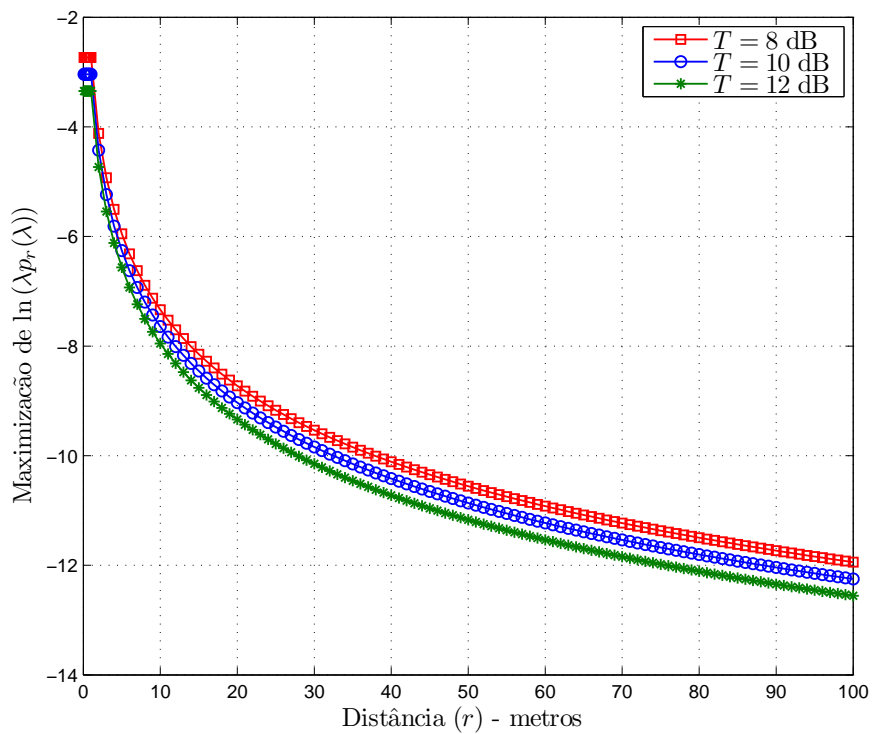


Figura 8.5 – Maximização do produto $\lambda p_r(\lambda)$ em escala logarítmica.

OLKIN; ARNOLD, 2010) como uma ferramenta auxiliar na obtenção de tais limitantes. Diante dessas considerações, vislumbramos resultados significativos, em termos de limitantes, à métricas de análise de desempenho, tais como o *throughput* de Shannon.

Conclusões e Perspectivas

Este capítulo resume os principais resultados obtidos nesta tese, destacando as contribuições resultantes da investigação e também apresentam-se algumas perspectivas de novas direções de pesquisa.

Conclusões

As redes *ad-hoc* possibilitam uma excelente flexibilidade de instalação, em especial para o caso de redes sem-fios em que a infraestrutura é inexistente ou difícil de realizar. As aplicações destes tipos de redes podem ser encontradas em vários de tipos de ambientes, ou seja, desde aplicações simples, tendo como exemplo as redes domésticas e em situações mais complexas, como é o caso dos exercícios militares. A falta de infraestrutura fixa e qualquer administração centralizada, basicamente as principais características das redes *ad-hoc*, complicam a gestão de certos problemas inerente à comunicação sem-fio, dos quais destaca-se a interferência. Portanto, este trabalho de tese, dedicou-se quase em sua totalidade à investigação de tal fenômeno físico.

Especificamente, na primeira etapa do trabalho, identificou-se um modelo representativo das características das redes *ah-hoc* o qual fosse possível inserir os efeitos da interferência. Na literatura, alguns modelos tentam simplificar ou, até mesmo, negligenciar os fenômenos da camada física. Nesta tese adotou-se um modelo recentemente utilizado nas pesquisas de redes de comunicação sem-fio, o qual é baseado na Geometria Estocástica. A partir deste modelo estocástico espacial, as propriedades estatísticas da rede puderam ser analisadas levando-se em consideração as posições e percursos aleatórios dos dispositivos móveis que compõem a referida rede. Além disso, este tipo de modelo permitiu-se a inserção dos efeitos de propagação de rádio em grande e pequena escala.

Mediante o contexto de Geometria Estocástica, modelou-se a interferência, em redes *ad-doc* com protocolo de acesso CSMA/CA, a partir de um processo pontual marcado homogêneo, em que os elementos pertencentes ao processo descreviam as posições ale-

tórias dos nós interferentes. Além disso, para capturar os efeitos da propagação de rádio, adotou-se a distribuição Nakagami- m para a modelagem do desvanecimento de pequena escala do canal de rádio e uma função de *path-loss* modificada que permitisse modelar a lei de decaimento da potência de transmissão, a partir de uma transmissão típica entre um transmissor e receptor, e que também levasse em consideração o expoente de perda de percurso.

Neste parágrafo, listamos as principais motivações que nos levou a tomar tais hipóteses. No caso da escolha do processo pontual marcado, ele consegue ser mais realista do que o processo pontual de Poisson, pois consegue captar em forma de marcas ou rótulos, mais informações pertinentes a modelagem da rede. Para o nosso caso, utilizamos apenas um rótulo referente ao desvanecimento do canal. Por sua vez, adotou-se a distribuição Nakagami- m para o desvanecimento do canal, com o propósito de generalizar os resultados obtidos para distribuições que são alcançadas: Rayleigh e Rice. Dando continuidade, para o caso da função de *path-loss* considerou-se uma função que evitasse o problema de singularidade em torno da origem, ou seja, transmissor e receptor podem ficar suficientemente próximos e, mesmo assim, a lei de decaimento da potência é garantida. Por fim, é importante comentar que na literatura, os modelos de redes *ad-hoc* segundo à Geometria Estocástica adotam hipóteses menos realistas como a utilização de processos pontuais de Poisson com função de *path-loss* simplificada. Além destes, adota-se a distribuição Rayleigh para a modelagem do desvanecimento do canal.

No que se refere às contribuições, este trabalho apresentou um nível teórico, fundamentado basicamente na Teoria da Medida, que respondeu os objetivos propostos em cada capítulo, cujos resultados, na sua maioria, foram descritos em termos de funções especiais. Além desta, também destacam-se como contribuições, os estudos analíticos de modelos de conectividade baseados na SNR, SIR e SINR, bem como a obtenção de limitantes a tais métricas e a maximização de número acesso à rede, levando-se em consideração duas situações: potência de ruído constante e potência de ruído exponencialmente distribuída.

Com mais detalhes, para o caso da SNR foram propostos dois modelos de conectividade, o primeiro deles baseado no limiar de conexão e outro referente a área de cobertura gerada por bolas abertas bidimensionais. Nestes apresentamos resultados equivalentes para o número médio de transmissões bem sucedidas. Na sequência, para os modelos baseados na SIR e SINR, caracterizou-se a interferência mediante a média, a variância e a respectiva transformada de Laplace. Além destas, foram obtidas expressões analíticas fechadas para as métricas que descreviam tais modelos, segundo a restrição de que o fator de desvanecimento é dado por um número inteiro positivo. Por fim, com o propósito de fornecer resultados equivalentes aos modelos de conectividade baseados na SIR e SINR, que sejam válidos para quaisquer que sejam o valor do fator de desvanecimento, introduziu-se alguns limitantes inferiores. Foi verificado que tiveram excelentes avaliações

computacionais, uma vez que apresentaram boas aproximações das curvas prescritas em capítulos precedentes.

Finalmente, pode-se afirmar que esta tese atingiu os objetivos globais com uma quantidade significativa de resultados inovadores à teoria das redes *ad-hoc* segundo a Geometria Estocástica.

Trabalhos futuros

Como perspectivas de estudos futuros, visualizamos nesta mesma linha de pesquisa, a partir dos quantificadores SIR e SINR do sistema, a obtenção de expressões analíticas fechadas e/ou expressões limitantes à métricas que caracterizam a performance de uma rede sem-fio *ad-hoc* baseada em femtocélulas e seguindo o modelo de rede celular baseado no diagrama de Voronoi. A seguir, são listadas as métricas que serão investigadas:

- interferência em redes;
- conectividade sem-fio;
- *throughput* de Shannon;
- *área de cobertura*;
- qualidade de serviço (*quality-of-service* (QoS) do inglês) e
- transmissão de capacidade.

Em paralelo, pretende-se fazer variações de algumas hipóteses levantadas por este trabalho com o objetivo generalizar além dos resultados desta tese, bem como obter novos resultados que certamente contribuirão com o desenvolvimento teórico/prático das redes heterogêneas modeladas por processos pontuais.

Com mais detalhes, planejamos adotar modelos mais gerais de desvanecimento como, por exemplo, os modelos: α - μ , η - μ e κ - μ . Por sua vez, com a proposta de tornar a rede sem-fio mais realista, propomos aleatoriedade no expoente de perda de percurso e também nas potências de transmissão dos nós interferentes, as quais dependerão da referida posição geográfica na rede. Diante destas considerações, produzem-se naturalmente outros rótulos ao processo pontual marcado.

Com relação a caracterização da interferência via transformada de Laplace, pretendemos abordar os desenvolvimentos algébricos mediante a utilização da função especial *H-Fox* a qual tem a função Meijer-*G* com um caso particular.

Agora, em termos práticos intencionamos modelar uma rede WI-FI com protocolo de acesso CSMA/CA com a proposta de simular tal ambiente e confrontar os resultados

mediante as métricas de desempenho propostas para validar os modelos analíticos de conectividade.

Além dessas perspectivas, também vislumbramos pesquisas futuras com a inserção da *Teoria de Majorização* nos modelos pontuais segundo a *Majorização Estocástica*, cujo objetivo é proporcionar um método alternativo na obtenção de limitantes às métricas de desempenho.

Referências

- ABDI, A.; KAVEH, M. On the Utility of Gamma PDF in Modeling Shadow Fading (Slow Fading). In: *IEEE 49th Vehicular Technology Conference, VTC '99*. Houston, TX: 1999. v. 3, p. 2308 – 2312. Citado na página 35.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 119.
- ANDREWS, J.; BACCELLI, F.; GANTI, R. A Tractable Approach to Coverage and Rate in Cellular Networks. *IEEE Trans. Commun.*, v. 59, n. 11, p. 3122–3134, November 2011. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- ANDREWS, L. *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*. New York: Macmillan, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 36, 190 e 191.
- ASH, R.; DOLÉANS-DADE, C. *Probability and Measure Theory*. San Diego: Academic Press, 2000. Citado na página 67.
- BACCELLI, F.; BLASZCZYSZYN, B. *Stochastic Geometry and Wireless Networks, Volume I - Theory*. NoW Publishers, 2009. 150 p. (Foundations and Trends in Networking Vol. 3: No 3-4, pp 249-449, v. 1). Disponível em: <<http://hal.inria.fr/inria-00403039>>. Citado 5 vezes nas páginas 25, 40, 74, 107 e 115.
- _____. *Stochastic Geometry and Wireless Networks, Volume II - Applications*. NoW Publishers, 2009. 209 p. (Foundations and Trends in Networking: Vol. 4: No 1-2, pp 1-312, v. 2). Disponível em: <<http://hal.inria.fr/inria-00403040>>. Citado 5 vezes nas páginas 25, 27, 112, 113 e 170.
- BACCELLI, F.; BLASZCZYSZYN, B.; MUHLETHALER, P. An Aloha Protocol for Multihop Mobile Wireless Networks. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 52, n. 2, p. 421–436, Feb 2006. Citado 4 vezes nas páginas 57, 113, 117 e 172.
- BADDELEY, A.; BÁRÁNY, I.; SCHNEIDER, R.; WEIL, W. *Stochastic Geometry*. Berlin: Springer, 2007. (Lecture Notes in Mathematics). Citado 7 vezes nas páginas 25, 26, 74, 81, 87, 89 e 125.
- BASAGNI, S.; CONTI, M.; GIORDANO, S.; STOJMENOVIC, I. *Mobile Ad Hoc Networking*. Wiley, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 49.

- BATEMAN, H. *Tables of Integral Transforms*. McGraw-Hill, 1954. (Tables of Integral Transforms: Based, in part, on notes left by Harry Bateman, v. 1). Citado na página [194](#).
- BENES, V.; RATAJ, J. *Stochastic Geometry: Selected Topics*. Springer, 2004. (Stochastic Geometry: Selected Topics). Citado na página [106](#).
- BLASZCZYSZYN, B.; JOVANOVIĆ, M.; KARRAY, M. K. Mean User Throughput Versus Traffic Demand in Large Irregular Cellular Networks - A Typical Cell Approach Explaining Real Field Measurements. *CoRR*, abs/1307.8409, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [26](#) e [170](#).
- CARDIERI, P. Modeling Interference in Wireless Ad Hoc Networks. *IEEE Commun. Surveys Tutorials.*, v. 12, n. 4, p. 551–572, Fourth 2010. Citado 4 vezes nas páginas [41](#), [56](#), [59](#) e [173](#).
- CHENG, J.; TELLAMBURA, C.; BEAULIEU, N. Performance of Digital Linear Modulations on Weibull Slow-Fading Channels. *IEEE Transactions on Communications*, v. 52, p. 1265 – 1268, 2004. Citado na página [35](#).
- CLARKE, R. H. A Statistical Theory of Mobile-Radio Reception. *Bell System Technical Journal*, v. 47, p. 957–1000, 1968. Citado na página [35](#).
- COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of Information Theory*. New Jersey: Wiley, 2006. Citado na página [80](#).
- DALEY, D. The Definition of a Multidimensional Generalization of Shot Noise. *Journal of Applied Probab.*, v. 8, p. 128–135, 1971. Citado na página [57](#).
- DALEY, D.; VERE-JONES, D. *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume 2: Elementary Theory and Methods*. 2nd ed. New York: Springer, 2008. (Probability and its Applications). Citado 2 vezes nas páginas [74](#) e [80](#).
- DEBNATH, L.; BHATTA, D. *Integral Transforms and Their Applications*. 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [190](#) e [194](#).
- DHILLON, H.; KOUNTOURIS, M.; ANDREWS, J. Downlink MIMO HetNets: Modeling, Ordering Results and Performance Analysis. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 12, n. 10, p. 5208–5222, October 2013. Citado na página [144](#).
- DUDLEY, R. *Real Analysis and Probability*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Citado 3 vezes nas páginas [67](#), [72](#) e [86](#).
- ELSAWY, H.; HOSSAIN, E.; HAENGGI, M. Stochastic Geometry for Modeling, Analysis, and Design of Multi-Tier and Cognitive Cellular Wireless Networks: A Survey. *IEEE Commun. Surveys Tutorials.*, v. 15, n. 3, p. 996–1019, Third 2013. Citado 2 vezes nas páginas [141](#) e [171](#).
- FOROUZAN, B. *Comunicação de Dados e Redes de Computadores*. Porto Alegre: BOOKMAN COMPANHIA ED, 2006. Citado 3 vezes nas páginas [47](#), [49](#) e [50](#).

- FRODIGH, M.; JOHANSSON, P.; LARSSON, P. Wireless Ad Hoc Networking: The Art of Networking Without a Network. *Ericsson Review*, No. 4, p. 248–263, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 24, 45 e 47.
- GAETAN, C.; GUYON, X. *Spatial Statistics and Modeling*. New York: Springer, 2009. (Springer Series in Statistics). Citado na página 71.
- GANTI, R.; HAENGGI, M. Regularity, Interference, and Capacity of Large Ad Hoc Networks. In: *Fortieth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, ACSSC'06*. 2006. p. 3–7. Citado na página 26.
- GANTI, R. K. *A Stochastic Geometry Approach to the Interference and Outage Characterization of Large Wireless Networks*. Tese (Doutorado) — University of Notre Dame, 2009. Citado na página 57.
- GELFAND, A.; FUENTES, M.; GUTTORP, P.; DIGGLE, P. *Handbook of Spatial Statistics*. Boca Raton, Florida: Taylor & Francis, 2010. (Chapman & Hall/CRC Handbooks of Modern Statistical Methods). Citado 2 vezes nas páginas 84 e 99.
- GOLDSMITH, A. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 24, 34, 35, 36 e 37.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. 7th ed. .. Elsevier Science, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 120, 165, 190, 191, 192 e 193.
- HAENGGI, M. Geometry, Connectivity, and Broadcast Transport Capacity of Random Networks with Fading. In: *IEEE Int. Symp. on Inform. Theory (ISIT)*. 2007. p. 2766–2770. Citado na página 26.
- _____. *Stochastic Geometry for Wireless Networks*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2013. (Stochastic Geometry for Wireless Networks). Citado 14 vezes nas páginas 27, 40, 74, 76, 80, 95, 107, 112, 114, 140, 142, 146, 173 e 175.
- HAENGGI, M.; ANDREWS, J.; BACCELLI, F.; DOUSSE, O.; FRANCESCHETTI, M. Stochastic Geometry and Random Graphs for the Analysis and Design of Wireless Networks. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, v. 27, n. 7, p. 1029–1046, September 2009. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- HAENGGI, M.; GANTI, R. *Interference in Large Wireless Networks*. Now Publishers, 2009. (Foundations and trends in networking). Citado 2 vezes nas páginas 40 e 115.
- HAENGGI, M.; GANTI, R. K. Interference in Large Wireless Networks. *Foundations and Trends in Networking*, v. 3, n. 2, p. 127–248, 2008. Available at <<http://www.nd.edu/~mhaenggi/pubs/now.pdf>>. Citado na página 86.
- HARDY, M. Combinatorics of partial derivatives. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2006. Disponível em: <<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v13i1r1>>. Citado na página 144.
- HAYKIN, S.; MOHER, M. *Sistemas Modernos de Comunicações Wireless*. Porto Alegre: Bookman, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 32, 34 e 35.

- HEATH, R.; KOUNTOURIS, M. Modeling Heterogeneous Network Interference. In: *Information Theory and Applications Workshop (ITA), 2012*. 2012. p. 17–22. Citado na página 26.
- HEKMAT, R. *Ad-hoc Networks: Fundamental Properties and Network Topologies*. Springer, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 24, 47 e 48.
- HORN, R.; JOHNSON, C. *Matrix Analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990. Citado na página 79.
- ILLIAN, J.; PENTTINEN, P.; STOYAN, H.; STOYAN, D. *Statistical Analysis and Modeling of Spatial Point Patterns*. Chichester, England: Wiley, 2008. (Statistics in Practice). Citado 2 vezes nas páginas 85 e 103.
- ILYAS, M. *The Handbook of Ad Hoc Wireless Networks*. Taylor & Francis, 2002. (Electrical Engineering Handbook). Citado 3 vezes nas páginas 27, 47 e 48.
- KEELER, H.; BLASZCZYSZYN, B.; KARRAY, M. K. SINR-Based Coverage Probability in Cellular Networks under Multiple Connections. *CoRR*, abs/1301.6491, 2013. Citado na página 117.
- KINGMAN, J. F. C. *Poisson Process*. New York: Oxford Science Publications, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 56.
- KRISHNAN, V. *Probability and Random Processes*. New Jersey: Wiley, 2006. (Wiley Survival Guides in Engineering and Science). Citado na página 119.
- LEE, J.; TEPEDELENLIOGLU, C. Stochastic Ordering of Interference in Large-Scale Networks. In: *2012 Conference Record of the Forty Sixth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (ASILOMAR)*. Pacific Grove, CA: 2012. p. 1388–1392. Citado na página 40.
- LIESHOUT, V.; BADDELEY, A. A Nonparametric Measure of Spatial Interaction in Point Patterns. *Statistica Neerlandica*, v. 50, p. 344–361, 1996. Citado na página 90.
- MARSHALL, A.; OLKIN, I.; ARNOLD, B. *Inequalities: Theory of Majorization And Its Applications*. 2nd ed. Springer, 2010. Citado na página 178.
- MATHAI, A.; SAXENA, R. *Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*. New York: Springer, 1973. (Lecture Notes in Mathematics). Citado na página 192.
- MATHAI, A.; SAXENA, R.; HAUBOLD, H. *The H-Function: Theory and Applications*. Springer, 2010. Citado na página 148.
- MENDELSON, B. *Introduction to Topology*. 3rd ed. New York: Dover Publication, Inc., 1990. Citado na página 62.
- MILLER, S.; CHILDERS, D. *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. : Elsevier Science, 2004. Citado na página 191.
- MITZENMACHER, M.; UPFAL, E. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 163.

- MOLCHANOV, I. *Theory of Random Sets*. London: Springer, 2005. (Probability and its Applications). Citado na página 74.
- MØLLER, J.; WAAGEPETERSEN, R. P. *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 75, 81, 85, 101 e 104.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 4th ed. McGraw-Hill, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 38, 156 e 175.
- PROAKIS, J. *Digital Communications*. 3rd ed. McGraw-Hill, 1995. Citado na página 36.
- PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and Series, Volume 3: More Special Functions*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 148 e 192.
- RAPPAPORT, T. *Wireless communications: Principles and Practice*. Prentice Hall PTR, 1996. (Prentice Hall communications engineering and emerging technologies series). Citado 5 vezes nas páginas 24, 33, 34, 35 e 54.
- SAMORADNITSKY, G.; TAQQU, S. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Taylor & Francis, 1994. (Stochastic Modeling Series). Citado na página 173.
- SCHECHTER, E. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. San Diego: Elsevier Science, 1997. Citado na página 66.
- SCHILLER, J. *Mobile Communications*. Addison-Wesley, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- STOYAN, D.; KENDALL, W. S.; MECKE, J. *Stochastic Geometry and Its Applications*. 2nd ed. Chichester, U.K.: Wiley, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 25, 74, 109 e 114.
- STREIT, R. *Poisson Point Processes: Imaging, Tracking, and Sensing*. Springer, 2010. Citado na página 142.
- TESCHL, G. *Topics in Real and Functional Analysis*. University of Vienna: 2013. Disponível em: <<http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/index.html>>. Citado na página 118.
- VENKATARAMAN, J.; HAENGGI, M.; COLLINS, O. Shot Noise Models for Outage and Throughput Analyses in Wireless Ad Hoc Networks. In: *IEEE Military Commun. Conf. (MILCOM'06)*. Washington, DC, USA: 2006. p. 1–7. Citado na página 57.
- WADE, W. *An Introduction to Analysis*. Pearson Prentice Hall, 2004. Citado na página 157.
- WANG, H.; ZHOU, X.; REED, M. C. Analytical Evaluation of Coverage-Oriented Femtocell Network Deployment. *CoRR*, abs/1305.3356, 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1305.3356>>. Citado na página 116.

- WEBER, S.; ANDREWS, J. A Stochastic Geometry Approach to Wideband Ad Hoc Networks with Channel Variations. In: *4th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks*. 2006. p. 1–6. Citado na página 27.
- WEBER, S.; ANDREWS, J. G.; JINDAL, N. An Overview of the Transmission Capacity of Wireless Networks. *IEEE Transactions on Communications*, Piscataway, NJ, USA, v. 58, n. 12, p. 3593–3604, dez. 2010. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- WEBER, S. P.; ANDREWS, J.; YANG, X.; VECIANA, G. de. Transmission Capacity of Wireless Ad Hoc Networks With Successive Interference Cancellation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 53, n. 8, p. 2799–2814, Aug 2007. Citado na página 25.
- WIN, M.; PINTO, P.; SHEPP, L. A Mathematical Theory of Network Interference and Its Applications. *Proceedings of the IEEE*, v. 97, n. 2, p. 205–230, Feb 2009. Citado na página 26.
- YACOUB, M.; BAUTISTA, J.; GUEDES, L. G. de R. On Higher Order Statistics of the Nakagami- m Distribution. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, v. 48, n. 3, p. 790–794, maio 1999. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 37.

Apêndices

Funções Especiais e Transformadas Integrais

Um breve resumo de algumas funções especiais e transformadas integrais é dado neste apêndice. Aqui, apresentamos algumas identidades e propriedades de tais funções as quais são amplamente utilizadas no texto, bem como alguns resultados das transformadas de *Laplace* e de *Mellin*. Além de tudo, destacamos as seguintes funções especiais: *Gama*, *Gama incompleta*, *Gama incompleta complementar*, *Beta* e função *Meijer-G*. Os detalhes destes assuntos podem ser encontrados nas seguintes fontes:

- ([ANDREWS, 1985](#)), este é um livro-texto o qual proporciona um bom entendimento das propriedades básicas de tais funções especiais;
- ([GRADSHTEYN; RYZHIK, 2010](#)), este é um livro de fórmulas que contém uma quantidade expressiva de identidades de funções especiais. Nesta, destacamos os resultados referentes a função Meijer-G.
- ([DEBNATH; BHATTA, 2006](#)), esta referência é dedicada ao estudo de transformadas integrais, dentre elas as transformadas de Laplace e de Mellin.

A.1 Funções Gamma e Beta

A função Gama é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \tag{A.1}$$

a qual tem a seguinte fórmula recursiva

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x). \tag{A.2}$$

Particularmente, se n é um inteiro não negativo, então $\Gamma(n + 1) = n!$. Como valores especiais relativos a função Gama, tem-se: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

A partir da definição, obtém-se também a seguinte integral (ANDREWS, 1985, p. 63)

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{x-1} dt = \frac{1}{s^x} \Gamma(x), \quad x > 0, \quad s > 0, \quad (\text{A.3})$$

a qual aparece em várias partes deste trabalho.

Agora, apresentemos duas funções especiais que são baseadas no conceito da função Gama (ANDREWS, 1985). A primeira delas é função Gama incompleta a qual é definida por

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad a > 0. \quad (\text{A.4})$$

A outra, é denominada de função Gama incompleta complementar cuja definição é

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad (\text{A.5})$$

Vale a pena mencionar que tais funções aparecem na composição das CDF's das variáveis aleatórias de distribuição Gama e Nakagami- m (MILLER; CHILDERS, 2004). A justificativa do termo complementar nesta última definição se deve a seguinte igualdade a qual relaciona as duas funções Gama incompleta (ANDREWS, 1985, Eq. (2.41))

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x). \quad (\text{A.6})$$

Como casos especiais, apresentamos outras importantes identidades envolvendo a função $\Gamma(\cdot, \cdot)$ (ver (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2010), Eqs. 3.381-1, 8.352-2 e 8.352-5, respectivamente):

$$\int_0^u x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = \mu^{-\nu} \gamma(\nu, \mu u), \quad \nu > 0. \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma(n+1, x) = n! e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{A.8})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \Gamma(\beta, x) dx = \frac{1}{\alpha} \Gamma(\beta) \left[1 - \frac{1}{(\alpha+1)^\beta} \right], \quad \beta > 0. \quad (\text{A.9})$$

Por sua vez, a função Beta é definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (\text{A.10})$$

e a relação com a função Gama é dada por

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{A.11})$$

Assim, $B(x, y) = B(y, x)$ e para $x = y$, obtém-se

$$B(x, x) = \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)}. \quad (\text{A.12})$$

Ademais, a função Beta também fornece expressões fechadas para algumas classes de integrais. Para este trabalho, apontamos a seguinte identidade (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2010, Eq. 3.194-3):

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^\nu} dx = \frac{1}{\beta^\mu} B(\mu, \nu - \mu), \quad (\text{A.13})$$

em que $\nu > \mu > 0$.

A.2 Função Meijer-G

A função Meijer-G foi introduzida pelo matemático holandês Cornelis Simon Meijer em 1936 com a intenção de proporcionar um significado ao símbolo ${}_pF_q$ (função hipergeométrica generalizada), para o caso $p > q + 1$ (MATHAI; SAXENA, 1973). Contudo, além desta característica, tal função inclui a função hipergeométrica generalizada com um caso especial cuja notação é

$$G_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right], \quad (\text{A.14})$$

em que, as condições abaixo devem satisfeitas:

- (i) x é um número complexo com $x \neq 0$;
- (ii) $0 \leq m \leq q$ e $0 \leq n \leq p$, onde m, n, p e q são números inteiros;
- (iii) os parâmetros a_1, a_2, \dots, a_p e b_1, b_2, \dots, b_q são números complexos;
- (iv) $a_i - b_j \notin \mathbb{N}$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$.

A função Meijer-G apresenta um montante significativo de propriedades, porém para o desenvolvimento utilizou-se basicamente as descritas a seguir ((GRADSHTEYN; RYZHIK, 2010, Eq. (9.31-5)), (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1990, Eq. 8.2.2-30), respectivamente):

$$x^r G_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} a_1+r, \dots, a_p+r \\ b_1+r, \dots, b_q+r \end{matrix} \right. \right] \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{d}{dz} \left(z^\sigma G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \right) = z^{\sigma-1} G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[z \left| \begin{matrix} -\sigma, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1-\sigma \end{matrix} \right. \right] \quad (\text{A.16})$$

Além destas, destacamos que a função Gama incompleta complementar é um caso particular de uma função Meijer-G, pois (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1990, Eq. (8.416-2))

$$\Gamma(a, x) = G_{1,2}^{2,0} \left[x \left| \begin{matrix} 1 \\ 0, a \end{matrix} \right. \right] \quad (\text{A.17})$$

Finalmente, apresentamos alguns resultados de integração envolvendo a função Meijer- G os quais foram diversas vezes no texto. Eles estão dispostos na referência (GRADSH-TEYN; RYZHIK, 2010) de Equações (7.811-3), (7.811-5) e (7.813-1), respectivamente. Vejamos portanto tais resultados.

$$\int_1^{\infty} x^{-\rho}(x-1)^{\sigma-1} G_{p,q}^{m,n} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] dx = \Gamma(\sigma) G_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left[\alpha \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, \rho \\ \rho - \sigma, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \quad (\text{A.18})$$

esta é válida sujeita as seguintes restrições:

- $p + q < 2(m + n)$;
- $|\arg(\alpha)| < \left[m + n - \frac{p + q}{2} \right] \pi$;
- $\operatorname{Re}(\rho - \sigma - a_j) > -1, \quad j = 1, \dots, n$;
- $\operatorname{Re}(\sigma) > 0$.

Uma outra integral envolvendo a função Meijer- G é

$$\int_0^{\infty} x^{\rho-1}(x+\beta)^{-\sigma} G_{p,q}^{m,n} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] dx = \frac{\beta^{\rho-\sigma}}{\Gamma(\sigma)} G_{p+1,q+1}^{m+1,n+1} \left[\alpha \beta \left| \begin{matrix} 1-\rho, a_1, \dots, a_p \\ \sigma-\rho, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right], \quad (\text{A.19})$$

em que,

- $p + q < 2(m + n)$;
- $|\arg(\alpha)| < \left[m + n - \frac{p + q}{2} \right] \pi$;
- $|\arg(\beta)| < \pi$;
- $\operatorname{Re}(\rho + b_j) > 0, \quad j = 1, \dots, m$;
- $\operatorname{Re}(\rho - \sigma + a_j) < 1, \quad j = 1, \dots, n$;
- $\operatorname{Re}(\sigma) > 0$.

Por fim,

$$\int_0^{\infty} x^{-\rho} \exp(-\beta x) G_{p,q}^{m,n} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] dx = \beta^{\rho-1} G_{p+1,q}^{m,n+1} \left[\frac{\alpha}{\beta} \left| \begin{matrix} \rho, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right], \quad (\text{A.20})$$

em que,

- $p + q < 2(m + n)$;
- $|\arg(\alpha)| < \left[m + n - \frac{p + q}{2} \right] \pi$;
- $|\arg(\beta)| < \frac{\pi}{2}$;
- $\operatorname{Re}(b_j - \rho) > -1, \quad j = 1, \dots, m$.

A.3 Transformadas integrais

Nesta seção, fornecemos um breve tratamento de dois tipos de transformadas integrais, a saber: transformada de Laplace e Transformadas de Mellin.

A transformada de Laplace de um número real ou complexo é definida como

$$\mathcal{L}[f(t); s] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.21})$$

desde que a integral exista. Existe uma grande variedade de propriedades em se tratando de transformada de Laplace. Contudo, para este trabalho foca-se apenas na propriedade da transformada de derivada de funções de ordem n , a qual é dada por (DEBNATH; BHATTA, 2006, Eq. (3.6.6)):

$$\mathcal{L}[t^n f(t); s] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t); s], \quad (\text{A.22})$$

em que, $n \in \mathbb{N}_0$.

Por sua vez, a transformada de Mellin de $f(t)$ é definida como

$$\mathcal{M}[f(t); s] = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt. \quad (\text{A.23})$$

É fato que a transformada de Mellin pode ser escrita como uma combinação de duas simples transformadas de Laplace mediante a seguinte relação (BATEMAN, 1954):

$$\mathcal{M}[f(t); s] = \mathcal{L}[f(e^t); -s] + \mathcal{L}[f(e^{-t}); s]. \quad (\text{A.24})$$

Com este resultado nós finalizamos esta seção.