UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FERNANDO ARAÚJO RIBEIRO

CONSTRUÇÕES DOS NÚMEROS REAIS VOLTADAS PARA OS PROFESSORES DA REDE BÁSICA DE ENSINO

FORTALEZA

2015

FERNANDO ARAÚJO RIBEIRO

CONSTRUÇÕES DOS NÚMEROS REAIS VOLTADAS PARA OS PROFESSORES DA REDE BÁSICA DE ENSINO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

R369c Ribeiro, Fernando Araújo
Construções dos números reais voltadas para os professores da rede básica de ensino / Fernando Araújo Ribeiro. – 2015.
66 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Números reais. 2. Corpo ordenado completo. 3. Sequências de Cauchy. I. Título.

CDD 510

FERNANDO ARAÚJO RIBEIRO

CONSTRUÇÕES DOS NÚMEROS REAIS VOLTADAS PARA OS PROFESSORES DA REDE BÁSICA DE ENSINO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 11 / 06 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Regis V. Alves

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho à minha querida e amada esposa Maria Leidiane Ivo Rosário.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por revelar-se parcialmente e tão lindamente por meio da Matemática.

À minha esposa, Maria Leidiane Ivo Rosário, por me apoiar em tudo que faço e pelo seu amor que, certamente, independe de títulos.

Aos meus pais, que sempre apontaram a educação como o caminho a ser seguido.

À SBM e a todos aqueles que trabalharam para tornar o PROFMAT possível.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

A todos os professores que lecionaram no curso. Especialmente, aos professores Marcos Melo e Antonio Caminha cujo domínio de conteúdo, organização e dedicação ao ensino impressionam. Sinto-me honrado em ter sido aluno de vocês.

Ao meu professor orientador Dr. Marcelo Ferreira de Melo, que sempre respondeu, prontamente, os vários e-mails que enviei, sempre esteve disponível para me receber em seu gabinete e sempre me deu palavras de incentivo.

"Deus criou os inteiros, todo o resto é trabalho do homem."

Leopold Kronecker

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo e que, a menos de um isomorfismo, é único. Este trabalho é voltado para todos aqueles que tenham interesse em Matemática, sobretudo, para os professores de Matemática do ensino médio que utilizam as propriedades do conjunto dos números reais sem conhecer a teoria matemática envolvida. Para tanto, é necessário caracterizar o conjunto dos reais a fim de provar suas propriedades. Aqui, utilizamos duas construções, a saber: os reais via sequências de Cauchy devido a Cantor e os reais via Cortes de Dedekind. A partir dessas caracterizações, conseguimos construir um corpo K munido das operações de soma e multiplicação onde mostramos que ele cumpre as condições da definição de corpo. Definida uma relação de ordem em K, mostramos que tal corpo é ordenado e, além disso, conseguimos mostrar que todo subconjunto de K admite supremo, o que quer dizer que tal corpo é completo. Finalmente, mostramos que qualquer outro corpo ordenado completo que possa, por ventura, existir é uma mera caracterização de $\mathbb{R}$, o que quer dizer que $\mathbb{R}$ é único, a menos dessas possíveis outras caracterizações. Tal caracterização será chamada de isomorfismo que é uma função bijetora de $\mathbb{R}$ para K.

Palavras-chave: Números Reais. Corpo Ordenado Completo. Sequências de Cauchy. Cortes de Dedekind.

ABSTRACT

This work aims to show that the set of real numbers is a complete ordered field that, within an isomorphism, is unique. This work is aimed at all those who are interested in mathematics, especially for that high school math teacher who uses the real numbers of the set of properties without knowing the mathematical theory involved. Therefore, it is necessary to characterize the set of the real in order to prove their properties. Here, we use two buildings, namely: the real via Cauchy sequences due to Cantor and the real via Dedekind cuts. From these characterizations, we can build a field K equipped with the addition and multiplication operations which show that it meets the definition of field conditions. Set an order relation in K, we show that such a body is ordered and in addition, we show that every subset of K admits supreme, which means that such a field is complete. Finally, we show that any complete ordered field that can, perchance appear is a mere characterization of $\mathbb{R}$, which means that $\mathbb{R}$ is unique, unless these possible other characterizations. This characterization will be called isomorphism which is a function bijetora of $\mathbb{R}$ to K.

Keywords: Real Numbers. Complete Ordered Field. Cauchy sequences. Dedekind cuts.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, daremos início ao nosso trabalho falando a respeito da descoberta dos incomensuráveis, motivação do nosso trabalho. Para mais detalhes, recomendamos [7].

Admitiremos conhecidos os números racionais e suas propriedades. Além disso, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais terá o 1 como menor elemento.

Acreditava-se, desde a Grécia antiga, que, dados dois segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sempre existia um segmento de reta $\overline{EF}$ que cabia, inteiramente, *n* vezes em $\overline{AB}$ e *m* vezes em $\overline{CD}$. Tal crença talvez se justifique na aritmética, onde dois números quaisquer têm sempre um divisor comum. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ eram, por essa razão, chamados segmentos comensuráveis.

Para medir tais segmentos, tomava-se um segmento padrão *u* cuja medida, por definição, é igual a 1. Assim, se o segmento *u* coubesse *n* vezes em $\overline{AB}$, a medida do segmento $\overline{AB}$ era *n*. No entanto, poderia ocorrer do segmento unitário *u* não caber *n* vezes em $\overline{AB}$, daí, bastava encontrar um pequeno segmento de reta *w* que coubesse *n* vezes em *u* e *m* vezes em $\overline{AB}$. Dessa forma, o comprimento de *w* é $\frac{1}{n}$ e o comprimento de $\overline{AB}$ é $\frac{m}{n}$.

Note que os comprimentos $\frac{1}{n}$ e $\frac{m}{n}$ representam números racionais que, na época, não eram encarados como números e sim como razão entre dois números naturais.

A ideia da comensurabilidade durou até o quarto século antes de Cristo quando um dos discípulos de Pitágoras, líder de uma seita filosófica religiosa, observou que a diagonal e o lado de um quadrado não eram segmentos de reta comensuráveis. O argumento usado para mostrar a existência dos incomensuráveis é bem simples. Dado um quadrado de lado unitário *u* e diagonal *d*, suponha que haja um segmento *w* que caiba *n* vezes em *u* e *m* vezes em *d*. Ora, a medida do segmento *u*, por definição, é igual a 1 enquanto a medida da diagonal d é $\frac{m}{n}$. Pelo teorema de Pitágoras, temos: $\frac{m^2}{n^2} = 1^2 + 1^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$. Mas o primeiro membro da segunda igualdade nos diz que, na decomposição de m^2 em fatores primos, o expoente do fator 2 é par enquanto o de $2n^2$ é ímpar, o que é um absurdo. Como $d = \sqrt{2}$, segue que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

A existência de segmentos incomensuráveis significa que os números naturais mais as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta, ou seja, embora $\mathbb{Q}$ seja um corpo ordenado ele não é completo (no capítulo 1, daremos mais detalhes sobre estes conceitos). A solução que se impunha e que foi, finalmente, adotada era a de estender o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais. Em linguagem moderna, a solução foi ampliar o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, obtendo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Durante muito tempo, esses “novos números” foram utilizados sem que houvesse uma definição formal para eles, o que só foi acontecer no século XIX com os matemáticos alemães Richard Dedekind (1831 – 1916) e Georg Cantor (1845 – 1918) (Veja [2]).

Na rede básica de ensino, o aluno aprende a utilizar símbolos numéricos para representar o resultado de contagens, medições, pesagens... Além disso, nessa etapa de ensino, é muito importante que eles saibam resolver problemas manipulando tais símbolos por meio de operações aritméticas. No entanto, não é ensinado ao aluno o conceito rigoroso de número. É claro que uma construção formal dos números reais, por exemplo, foge dos interesses do ensino médio. Mas o que dizer dos professores de matemática que atuam nessa modalidade de ensino? Certamente, não é difícil encontrar professores que não conhecem tais construções. Isso talvez se justifique pelo fato da maioria dos textos que abordam o tema usarem uma linguagem algébrica avançada.

Procuramos não carregar a linguagem a fim de tornar a leitura do texto mais agradável. Este trabalho traz, basicamente, as duas mais conhecidas construções dos números reais, a saber: os cortes de Dedekind e as classes de equivalência das sequências de Cauchy devido a Cantor. Nosso objetivo é mostrar, com ambas as construções, que o conjunto $\mathbb{R}$ de números reais é um corpo ordenado e completo. Lembre-se que o conjunto dos números racionais é um exemplo de corpo ordenado, mas, como mostra o exemplo anterior, não é completo, no sentido que os números pertencentes a $\mathbb{Q}$ não são suficientes para medir todos os segmentos de reta.

É muito importante que o professor de matemática conheça a teoria que está por trás dos resultados ensinados em sala de aula, mesmo que não utilize certo conhecimento de forma direta. Por exemplo, o fato de não apresentarmos, rigorosamente, os números reais no ensino médio, não quer dizer que não precisamos conhecê-lo. Sem dúvida, a construção dos números reais é importante para a fundamentação teórica e cultura matemática de qualquer professor.

2 PRELIMINARES

A fim de facilitar a escrita, concordaremos que, a menos que se especifique o contrário, os conjuntos tomados aqui, neste capítulo, serão subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

Alguns dos resultados feitos aqui, neste capítulo, podem ser vistos com mais detalhes em [2], [5] e [9].

Definição 2.1 Se $x \in A$ e $x \notin B$, diremos que $x \in A \backslash B$. O símbolo '$\backslash$' significa diferença de conjuntos.

Definição 2.2 Sejam a, b elementos de um conjunto K, uma relação R no conjunto K é uma lei que associa o elemento a ao elemento b. Se a se relacionar com b, escreveremos aRb. A negação disto é $a(\sim R)b$.

Exemplo 2.1 Dado o conjunto $C = \{1, 2\}$, temos que a lei da igualdade é uma relação em C, pois $1 = 1$ e $2 = 2$.

Exemplo 2.2 Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Como $1 < 2$, $1 < 3$ e $2 < 3$, segue que a lei da desigualdade, representada pelo símbolo $<$, é uma relação em A.

Exemplo 2.3 Considerando ainda o conjunto C do exemplo 2.1, temos que a lei, representada pelo símbolo $\leq$, que associa um elemento a outro maior do que ou igual a ele é uma relação. Neste caso, $1 \leq 1$, $1 \leq 2$ e $2 \leq 2$.

Exemplo 2.4 Dado o conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, temos que a lei que associa o lado de um quadrado com sua respectiva área, representada pelo símbolo "$\rightarrow$", é uma relação no conjunto B, pois $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 9$.

Existem três tipos de relação muito importantes em matemática das quais lançaremos mão quando formos construir os reais: relação de equivalência, relação de ordem parcial estrita e relação de ordem parcial não estrita. A definição de cada uma se encontra abaixo.

Definição 2.3 Uma relação R em A diz-se uma relação de equivalência se possuir as seguintes propriedades:

i) reflexiva: aRa, para todo $a \in A$;

ii) simétrica: se $a, b \in A$ e aRb, então bRa;

iii) transitiva: para $a, b, c \in A$, se aRb e bRc, então aRc.

Exemplo 2.5 A relação de igualdade é uma relação de equivalência.

i) Claramente, $a = a$, para todo $a \in A$;

ii) se $a = b$, então $a = b \Leftrightarrow a + (-a - b) = b + (-a - b) \Leftrightarrow -b = -a \Leftrightarrow$ $(-b).(-1) = (-a).(-1) \Leftrightarrow b = a$ e, finalmente,

iii) se $a = b$ e $b = c$, temos: $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c \Leftrightarrow a - c = 0 \Leftrightarrow a - c + c = 0 + c \Leftrightarrow a = c$.

Exemplo 2.6 Considere o conjunto A formado pelos naturais que, ao serem divididos por 3, deixam resto 2, isto é, $A = \{2, 5, 8, \ldots, (n-1).3+2\}$. Considere, ainda, a relação R que toma a diferença de dois elementos quaisquer de A. Note que tal diferença é um inteiro múltiplo de três. De fato, se a, b e $c \in A$, então existem n_1, n_2 e $n_3 \in \mathbb{N}$ tais que $a = (n_1 - 1).3 + 2$, $b = (n_2 - 1).3 + 2$ e $c = (n_3 - 1).3 + 2$. Assim, $a - b = [(n_1 - 1).3 + 2] - [(n_2 - 1).3 + 2] = 3.(n_1 - n_2)$. Tal relação é uma relação de equivalência. Ora, $a - a = 0 = 0.3$, isto mostra que R é reflexiva; se $a - b = 3.(n_1 - n_2)$, então $b - a = 3.(n_2 - n_1)$, o que mostra que R é simétrica e, finalmente, se $a - b = 3.(n_1 - n_2)$ e $b - c = 3.(n_2 - n_3)$, então $a - c = 3.(n_1 - n_3)$, o que mostra a transitividade de R.

Definição 2.4 Uma relação R em A diz-se uma relação de ordem parcial estrita se possuir as seguintes propriedades:

i) antirreflexiva: $a(\sim R)a$, para todo $a \in A$, isto é, a não se relaciona consigo mesmo;

ii) antissimétrica: se $a, b \in A$ e aRb, então $b(\sim R)a$, isto é, embora a se relacione com b, b não se relaciona com a;

iii) transitiva: para $a, b, c \in A$, se aRb e bRc, então aRc.

Exemplo 2.7 No exemplo 2.2, a relação $<$ é uma relação de ordem parcial estrita. Neste caso, se $a < b$, dizemos que a é estritamente menor do que b ou, quando não houver risco de confusão, diremos apenas a menor do que b. Por simplicidade, chamaremos tal relação de relação de ordem estrita ou, simplesmente, relação de ordem quando não houver risco de confusão.

Definição 2.5 Uma relação R em A diz-se uma relação de ordem parcial não estrita se possuir as seguintes propriedades:

i) reflexiva: aRa, para todo $a \in A$;

ii) antissimétrica: se $a, b \in A$ e aRb e bRa, então $a = b$;

iii) transitiva: para $a, b, c \in A$, se aRb e bRc, então aRc.

Exemplo 2.8 No exemplo 2.3, a relação $\leq$ é uma relação de ordem parcial não estrita. Neste caso, se $a \leq b$, diremos que a é menor do que ou igual a b. Chamaremos tal relação de relação de ordem não estrita ou, simplesmente, relação de ordem quando não houver risco de confusão.

O fato é que se um corpo é ordenado, ele possui uma relação de ordem. Dependendo do objetivo, pode-se adotar qualquer uma das duas relações de ordem para um corpo ordenado K. Por exemplo, ao construir os reais via sequências de Cauchy, usaremos a relação de ordem estrita ao passo que, na construção via cortes de Dedekind, usaremos a relação de ordem não estrita.

Definição 2.6 Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $a \in A$ um elemento fixado arbitrariamente. O conjunto $\bar{a} = \{x \in A \mid xRa\}$ chama-se classe de equivalência de a pela relação R. Ou seja, é o conjunto constituído por todos os elementos de A que são equivalentes a a.

Exemplo 2.9 No exemplo 2.6, temos que $\bar{2}$, por exemplo, representa o conjunto A, pois todos os elementos de A são equivalentes a 2 pela relação R.

Nosso objetivo, em ambas as construções, é mostrar que $\mathbb{R}$ é um **corpo ordenado completo**. Abaixo, daremos a definição de **corpo**, **corpo ordenado** e **corpo ordenado completo.**

Definição 2.7 Um conjunto não vazio K munido de duas operações (K, +, $\cdot$), adição (+) e multiplicação ($\cdot$), é um **corpo**, se a adição e a multiplicação gozarem das seguintes propriedades:

i) fechamento: dados a, $b \in K$, $a + b \in K$ e $a.b \in K$, isto é, K é um conjunto fechado em relação à adição e à multiplicação;

ii) associativa: dados $a, b, c \in K$, temos: $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a.b).c = a.(b.c)$;

iii) comutativa: dados $a, b \in K$, temos: $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$;

iv) elemento neutro: dado $a \in K$, existem 0 e $1 \in K$ tais que $a + 0 = a$ e $a.1 = a;$

v) elemento oposto (adição) e elemento inverso (multiplicação): dados a, $b \in K$ com $b \neq 0$, existem $(-a)$, $b^{-1} \in K$ tais que $a + (-a) = 0$ e $b.\,b^{-1} = 1$;

vi) distributividade da multiplicação em relação à adição: dados a, b, $c \in K$, temos: $a.(b + c) = a.b + a.c.$

Exemplo 2.10 O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não é um corpo, pois apenas os números 1 e -1 admitem inversos multiplicativos. Já o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo.

Proposição 2.1 (Unicidade do elemento neutro na adição e na multiplicação) Se K é um corpo, então, em K, só existe um elemento neutro na adição e na multiplicação. Demonstração.

Mostraremos, inicialmente, a unicidade do elemento neutro na adição:

i) suponha que existam $0', 0'' \in K$ tais que $0'$ e $0''$ sejam elementos neutros na adição. Assim, $0' = (0' + 0'') = (0'' + 0') = 0''$. A primeira igualdade vem do fato de $0''$ ser elemento neutro, a segunda vem do fato da soma ser comutativa e a terceira vem do fato de $0'$ também ser elemento neutro, logo, $0' = 0''$. Mostraremos, agora, a unicidade do elemento neutro na multiplicação. ■

ii) suponha que existam $1', 1'' \in K$ tais que $1'$ e $1''$ sejam elementos neutros na multiplicação. Assim, $1' = (1'.1'') = (1''.1') = 1''$. A primeira igualdade vem do fato de $1''$ ser elemento neutro, a segunda vem do fato da multiplicação ser comutativa e a terceira vem do fato de $1'$ também ser elemento neutro, logo, $1' = 1''$. ■

Proposição 2.2 (Unicidade do elemento oposto da adição e do elemento inverso da multiplicação) Se K é um corpo, então o elemento oposto e o elemento inverso de um dado elemento em K são únicos.

Demonstração.

Mostraremos, inicialmente, a unicidade do elemento oposto.

i) suponha que existam $a, a', a'' \in K$ tais que a' e a'' sejam elementos opostos de a. Assim,

$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a + a') + a'' = 0 + a'' = a''$;

ii) suponha que existam $b \neq 0, b', b'' \in K$ tais que b' e b'' sejam elementos inversos de b. Assim,

$b' = b'.1 = b'.(b.b'') = (b.b').b'' = 1.b'' = b''$. ■

Definição 2.8 Um corpo $(K, +, \cdot)$ é ordenado se nele está contido um subconjunto próprio P que satisfaz as seguintes condições:

P_1) Dados $x, y \in P$, tem-se: $x + y \in P$ e $x.y \in P$, ou seja, P é fechado em relação à adição "+" e à multiplicação "$\cdot$" ;

P_2) Dados $x \in K$, tem-se que exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $x = 0$ ou $x \in P$ ou $-x \in P$ onde 0 é o elemento neutro da adição.

Se $(K +, \cdot)$ é um corpo ordenado, pode-se formar o conjunto $-P = \{-x; x \in P\}$ e assim obter: $K = P \cup \{0\} \cup -P$. Note que os conjuntos P, $\{0\}$, $-P$ são dois a dois disjuntos.

Exemplo 2.11 O corpo ($\mathbb{Q}$, +, ·) é ordenado.

Considere o subconjunto de $\mathbb{Q}$ formado apenas pelos racionais positivos: $\mathbb{Q}_+^* = \left\{\frac{a}{b}, com\ a, b \in \mathbb{N}\right\}$. Para provarmos que o corpo ($\mathbb{Q}$, +, ·) é ordenado, precisamos mostrar que o conjunto $\mathbb{Q}_+^*$ possui as propriedades P_1 e P_2. Assim, sejam $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ tais que $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. Dessa forma, temos:

i) $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{b.d}$. Como $(a.d + b.c)$, $(b.d) \in \mathbb{N}$, segue que $(x + y) \in \mathbb{Q}_+^*$;

ii) $x.\ y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a..c}{b.d}$. Como $(a.c)$, $(b.d) \in \mathbb{N}$, segue que $(x.\ y) \in \mathbb{Q}_+^*$. Isto verifica P_1.

Por outro lado, se $x \in \mathbb{Q}$, então existem $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$ tais que $x = \frac{a}{b}$ onde temos as seguintes possibilidades: ou $a.b = 0$ ou $a.b > 0$ ou $a.b < 0$. Se $a.b = 0$, então $a = 0$, pois $b \in \mathbb{N}$, logo, $\frac{a}{b} = 0$. Se $a.b > 0$, então $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$ e, finalmente, se $a.b < 0$, então $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$. Isto verifica P_2.

Proposição 2.3 Sejam (K, +, ·) um corpo ordenado e P um subconjunto de K que satisfaz as propriedades P_1 e P_2 da definição 1.8. Se $a \neq 0$ e $a \in K$, então $a^2 \in P$.

Demonstração.

Se $a \in K$, então ou $a \in P$ ou $(-a) \in P$. Se $a \in P$, então $a.\ a \in P$. Se $(-a) \in P$, então $(-a).(-a) \in P$. Como $a.a = (-a).(-a) = a^2$, segue que $a^2 \in P$. ■

Exemplo 2.12 O corpo ($\mathbb{C}$, +, ·) dos números complexos não é ordenado.

Se fosse ordenado, existiria um subconjunto $P \subset \mathbb{C}$ possuindo as propriedades P_1 e P_2 da definição 2.8. Como 1 é o elemento neutro de $\mathbb{C}$, $i \in \mathbb{C}$ e $i \neq 0$, segue, pela proposição 2.3, que $i^2 \in P$, logo, $-1 \in P$, que é um absurdo.

Definição 2.9 Seja (K, +, ·) um corpo, se $x \in K$, definimos $|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0, \\ -x & se\ x < 0. \end{cases}$

O símbolo $|x|$ é chamado módulo de x e expressa seu valor absoluto.

Para todo $x \in K$, $|x|$ é o único elemento $z \in K$ tal que $z \geq 0$ e $z^2 = x^2$. Para demonstrar isso, observe, inicialmente, que $|x|^2 = x^2$ e $|x| \geq 0$ para todo $x \in K$. Ora, dado $a \in K$, $a > 0$, existe no máximo dois elementos $z \in K$ tais que $z^2 = a$, pois o polinômio $t^2 - a$

tem, no máximo, duas raízes. Se $w^2 = a$, então $w \neq 0$ e, além disso, $(-w)^2 = w^2 = a$. Dessa forma, existe, no máximo, um elemento positivo $z \in K$ tal que $z^2 = a$.

Definimos o símbolo $\sqrt{a}$, com $a \geq 0$ em K, como o elemento $z \geq 0$ de K tal que $z^2 = a$, se tal elemento existe. Caso contrário, $\sqrt{a}$ não está definido. Note que esta definição leva em conta o conjunto tomado K, pois, embora $\mathbb{Q}$ seja um corpo ordenado como mostra o exemplo 2.11, nem sempre a raiz quadrada de um número positivo está definida em $\mathbb{Q}$. Como vimos na introdução deste trabalho, embora $2 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Se $a, b \in K$ com $a, b \geq 0$ e, além disso, $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ estão definidas em K, então, como K é um corpo, $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ também existe em K (propriedade do fechamento) e $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$. De fato, suponhamos $z, w \geq 0$ com $z^2 = a$ e $w^2 = b$. Assim, $(z.w)^2 = z^2.w^2 = a.b$, logo $\sqrt{a.b} = z.w = \sqrt{a}.\sqrt{b}$. Dessa forma, podemos expressar a definição do valor absoluto por meio da expressão $|x| = \sqrt{x^2}$.

Proposição 2.4 Seja K um corpo ordenado. Para todo $x, y \in K$, temos:

i) $|xy| = |x||y|$;

ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

iii) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Demonstração.

i) $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = |x||y|$;

ii) $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$. Extraindo as raízes quadradas, resulta o que queríamos;

iii) $|x - y|^2 = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2$. Extraindo as raízes quadradas, resulta o que queríamos.

Definição 2.10 Sejam $(K, +, \cdot)$ um corpo ordenado e A um subconjunto próprio não vazio de K. A é limitado superiormente se existe $c \in K$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in A$. Nesse caso, c é denominado cota superior de A. A menor das cotas superiores de um conjunto A limitado superiormente é denominada supremo do conjunto A, denotado por sup(A). Portanto, a definição de supremo de K pode ser reformulada do seguinte modo: diz-se que um elemento $c \in K$ é o supremo de A ($A \subset K$) se, e somente se, são válidas as seguintes condições:

i) $x \leq c$ para todo $x \in A$;

ii) se c' é um elemento qualquer de K e se $c' < c$, então existe x em A tal que $c' < x \leq c$.

Note que a segunda condição nos diz que se A admite supremo, então ele é único.

Definição 2.11 Sejam (K, +, ⋅) um corpo ordenado e A um subconjunto próprio não vazio de K. A é limitado inferiormente se existe $c \in K$ tal que $x \geq c$ para todo $x \in A$. Nesse caso, c é denominado cota inferior de A. A maior das cotas inferiores de um conjunto A limitado inferiormente é denominada ínfimo do conjunto A, denotado por inf(A).

Definição 2.12 Sejam (K, +, ⋅) um corpo ordenado e A um subconjunto próprio não vazio de K. Quando A for limitado superiormente e inferiormente, diz-se que A é um conjunto limitado.

Exemplo 2.13 O conjunto $A = \left\{\frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente e inferiormente. Nesse conjunto, inf(A) = 1 e sup(A) = 2.

Definição 2.13 Um corpo K é dito completo se todo subconjunto não vazio $A \subset K$, limitado superiormente, possui supremo em K.

Exemplo 2.14 Seja $A = \mathbb{Q}_-^* \cup \{x \in \mathbb{Q}_+ |\ x^2 < 2\}$. Mostraremos que o conjunto A, embora seja limitado, não possui supremo em $\mathbb{Q}$, logo não é completo.

Mostraremos, inicialmente, que o conjunto A não admite elemento máximo. Devemos provar que para todo $x \in A$, existe $y \in A$ tal que $y > x$. Se $x \leq 0$, não há o que provar. Suponhamos $x > 0$ com $x^2 < 2$. Para encontrarmos um y nas condições acima, devemos exibir um $h \in \mathbb{Q}_+^*$ tal que $(x+h)^2 < 2$ onde $y = x + h$. Assim, temos: $(x+h)^2 < 2$ $\Rightarrow x^2 + 2xh + h^2 < 2$. Se tomarmos $h < 1$, não perderemos generalidade. Dessa forma, temos: $x^2 + 2xh + h^2 < x^2 + 2xh + h$, pois $h < 1 \Rightarrow h^2 < h$. Assim, se tomarmos $h < \frac{2-x^2}{2x+1}$, teremos $x^2 + 2xh + h < 2$ (o que faz sentido, pois $x > 0$). Como a expressão $\frac{2-x^2}{2x+1}$ é positiva, tomando $0 < h < \min\left\{1, \frac{2-x^2}{2x+1}\right\}$ e $y = x + h$, obtemos $y^2 = (x+h)^2 < 2$, isto é, $y \in A$ e $y > x$. Isso mostra que o conjunto A não admite elemento máximo.

Mostraremos, agora, que o conjunto A não admite cota superior mínima, isto é, não admite supremo. Observe, primeiramente, que os racionais que não pertencem a A são os positivos que têm quadrado ≥ 2. Sabemos que não existe racional cujo quadrado é 2. Logo $y \in \mathbb{Q} \setminus A$ se, e somente se, $y > 0$ e $y^2 > 2$. Sabemos que todo elemento $y \in \mathbb{Q} \setminus A$ é maior que qualquer elemento $x \in A$. Vamos mostrar que dado $y \in \mathbb{Q} \setminus A$, existe $z \in \mathbb{Q} \setminus A$ com $z < y$ tal que $z^2 > 2$. Busquemos h racional positivo tal que $(y-h)^2 > 2$ e façamos $z = y - h$. Novamente, não perderemos generalidade se supusermos $h < 1$. A condição $(y-h)^2 > 2$

equivale a $y^2 - 2yh + h^2 > 2$ ou $y^2 - h\,(2y - h) > 2$ ou $h < \frac{y^2-2}{2y-h}$, uma vez que $2y - h > 0$ (pois $y > 1$ e $h < 1$). Como $h > 0$, então $\frac{y^2-2}{2y-h} > \frac{y^2-2}{2y}$. Assim, tomando $h < \min\left\{1, \frac{y^2-2}{2y}\right\}$ em $\mathbb{Q}_+^*$, obtemos: $(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2y.\frac{y^2-2}{2y} + h^2 = 2 + h^2 > 2$. Isso mostra que o conjunto A não admite supremo, logo, pela definição 1.10, o conjunto $\mathbb{Q}$ não é completo.

Definição 2.14 Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Dizemos que a ordenação de K é arquimediana ou que K é um corpo arquimediano se o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais for ilimitado superiormente em K, isto é, para todo $k \in K$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$.

Exemplo 2.15 A ordenação de $\mathbb{Q}$ é arquimediana.

De fato, se $\mathbb{Q}$ não fosse arquimediano, existiria um racional $\frac{p}{q}$ tal que $n \leq \frac{p}{q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $p, q \in \mathbb{N}$, teríamos, em particular, $p + 1 \leq \frac{p}{q} \Rightarrow (p+1).q \leq p \Rightarrow q \leq \frac{p}{(p+1)} \Rightarrow q < 1$, que é uma contradição, pois $q \in \mathbb{N}$ que, por definição, tem o 1 como menor elemento. Portanto, $\mathbb{Q}$ é arquimediano.

3 CONSTRUÇÃO DOS REAIS VIA CORTES DE DEDEKIND

Neste capítulo, mostraremos os detalhes da construção dos reais via cortes de Dedekind. Para mais detalhes, recomendamos [2].

Definição 3.1 Um conjunto α de números racionais diz-se um corte se satisfizer as seguintes condições:

i) $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$;

ii) se $r \in \alpha$ e $s < r$ $(s \in \mathbb{Q})$, então $s \in \alpha$;

iii) em α não existe elemento máximo.

Proposição 3.1 Todo corte é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado superiormente.

Demonstração.

Suponha que α seja um corte e um subconjunto de $\mathbb{Q}$ ilimitado superiormente. Assim, para todo $s \in \mathbb{Q}$, existe $r \in \alpha$ tal que $s < r$, logo, pelo item (ii) da definição de corte, segue que $s \in \alpha$. Isto significa que $\mathbb{Q} \subset \alpha$, pois todo elemento de $\mathbb{Q} \in \alpha$. Como $\alpha \subset \mathbb{Q}$, segue que $\alpha = \mathbb{Q}$, contradizendo a condição (i) da definição de corte. ∎

Proposição 3.2 Sejam α um corte e $r \in \mathbb{Q}$. Então, r é cota superior de α, se e somente se $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$.

Demonstração.

Sendo r uma cota superior de α, segue que $r \notin \alpha$, pois, caso contrário, r seria o elemento máximo de α, contrariando a condição (iii) da definição de corte. Do mesmo modo, se $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, então r é uma cota superior de α, pois se existisse um $x \in \alpha$ tal que $r \leq x$, então, pela condição (ii) da definição de corte, $r \in \alpha$, contrariando nossa hipótese. ∎

Proposição 3.3 Se $r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$, então α é um corte e r é a menor cota superior de α.

Demonstração.

O conjunto α, definido acima, cumpre as três condições da definição de corte, veja:

(i) Seja $s \in \mathbb{Q}_+^*$, segue que $r - s$, $r + s \in \mathbb{Q}$. Por um lado, $r - s < r$, logo $r - s \in \alpha$, portanto, $\alpha \neq \emptyset$. Por outro lado, $r + s > r$, logo $r + s \notin \alpha$, portanto, $\mathbb{Q} \neq \alpha$;

(ii) Se $a \in \alpha$, então $a < r$. Se $b \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a$, então, por transitividade, segue que b

Portanto, $b \in \alpha$;

(iii) Se $s \in \alpha$, então $s < r$. Como $s < \frac{s+r}{2} < r$ e $\frac{s+r}{2} \in \mathbb{Q}$, segue que $\frac{s+r}{2} \in \alpha$. Assim, s não é elemento máximo de α. Mostramos, assim, que α cumpre as três condições da definição de corte.

Observe que, pela definição de α, qualquer racional menor do que r pertence a α. Logo, r' seria o maior elemento de α, contrariando a condição (iii) da definição de corte. Portanto, r é a menor cota superior de α. ■

Definição 3.2 Os cortes do tipo da proposição anterior são denominados cortes racionais e se representam por r^*.

Proposição 3.4 Todo corte que possui cota superior mínima é racional.

Demonstração.

Seja α um corte que possui cota superior mínima r, $r \in \mathbb{Q}$. Isto significa que para todo $a \in \alpha$, temos $a < r$. Assim, $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$. Portanto, de acordo com a definição 3.2, α é um corte racional. Por outro lado, se α é um corte racional, segue que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$, $r \in \mathbb{Q}$. Se r não fosse cota superior mínima de α, então existiria $s \in \mathbb{Q} \backslash \alpha$ tal que $s < r$, o que implicaria $s \in \alpha$, uma contradição. ■

Mostraremos, a seguir, que há cortes que não possuem cota superior mínima, logo que não são racionais.

Teorema 3.1 Seja $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_-^*$. Então α é um corte que não é racional.

Demonstração.

O conjunto α, definido acima, cumpre as três condições da definição de corte, veja:

(i) Observe que $1 \in \alpha$ e $2 \notin \alpha$, logo, $\alpha \neq \emptyset$ e $\mathbb{Q} \neq \alpha$;

(ii) Seja $x \in \alpha$. Se $y < x$, então $y^2 < x^2 < 2$, portanto, $y \in \alpha$;

(iii) Ver exemplo 2.14. ■

Notação 3.1 Denotaremos por $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cortes.

Definição 3.3 Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$. Dizemos que α é menor do que β e escrevemos $\alpha < \beta$ quando $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$.

Exemplo 3.1 $5^* > \left(\frac{2}{3}\right)^*$, pois $2 \in 5^* \backslash \left(\frac{2}{3}\right)^*$.

Definição 3.4 Se $\alpha \in \mathcal{C}$ e $\alpha > 0^*$, α chama-se corte positivo. Se $\alpha < 0^*$, α é dito corte negativo. Se $\alpha \geq 0^*$, α chama-se corte não negativo e se $\alpha \leq 0^*$, α chama-se não positivo.

Proposição 3.5 Se p, $q \in \mathbb{Q}$, então $p^* \leq q^*$ se, e somente se, $p \leq q$. Demonstração.

Suponha que $p^* = q^*$, então, pela definição 3.2, ele tem, como cota superior mínima, p e q. Pela proposição 3.3, só há uma cota superior mínima, logo $p = q$. Por outro lado, se $p = q$, então não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $p \leq r < q$ ou $q \leq r < p$, logo $q^* \backslash p^* = p^* \backslash q^* = \emptyset$, portanto, pela definição 3.3, $p^* = q^*$.

Suponha, agora, que $p^* < q^*$, assim $p^* < q^* \Leftrightarrow q^* \backslash p^* \neq \emptyset \Leftrightarrow$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \in q^*$ e $r \notin p^* \Leftrightarrow p \leq r < q \Leftrightarrow p < q$. ■

Proposição 3.6 Para $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, valem as seguintes equivalências:

1) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$;

2) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$.

Demonstração.

1) Suponha que $\alpha < \beta$ e $\alpha \not\subset \beta$. Assim, existe $r \in \alpha$ tal que $r \notin \beta$. Logo, $\alpha - \beta \neq \emptyset$ que, pela definição 3.3, nos dá $\alpha > \beta$, uma contradição. Note que se $\alpha < \beta$, então $\beta - \alpha \neq \emptyset$, logo $\beta \neq \alpha$. Suponha, agora, que $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$. Se $\alpha > \beta$, então $\alpha - \beta \neq \emptyset$. Assim, $\exists\, r \in \alpha$ tal que $r \notin \beta$ $\Rightarrow \alpha \not\subset \beta$, uma contradição. Logo, devemos ter $\alpha < \beta$.

2) Se $\alpha \leq \beta$, então, por 1) e pela igualdade de conjuntos, $\alpha \subset \beta$. Se $\alpha \subset \beta$, então $\alpha - \beta = \emptyset$, logo, devemos ter $\alpha \leq \beta$. ■

Teorema 3.2 (Tricotomia) Para $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, temos que uma e apenas uma das possibilidades a seguir ocorre: ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$.

Demonstração.

Se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, então ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$. Se $\alpha = \beta$, então, $\alpha - \beta = \beta - \alpha = \emptyset$. De acordo com a definição 3.3, segue que nem $\alpha < \beta$ nem $\alpha > \beta$. Suponha, agora, que $\alpha \neq \beta$, então, $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$. Suponha que $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$ simultaneamente. Assim, existem $p, q \in \mathbb{Q}$ tais que $p \in \beta \backslash \alpha$ e $q \in \alpha \backslash \beta$. De $p \in \beta$ e $q \in \alpha \backslash \beta$, temos $p < q$, de $q \in \alpha$ e $p \in \beta \backslash \alpha$, temos $q < p$, contrariando a lei da tricotomia em $\mathbb{Q}$. ■

Teorema 3.3 Sejam α, β, $\gamma \in \mathcal{C}$. A relação ≤ é uma relação de ordem em $\mathcal{C}$.

Demonstração.

i) (Reflexividade) Em particular, α = α, logo, α ≤ α.

ii) (Antissimetria) Como vimos no teorema 3.2, se α ≤ β e α ≥ β, então α = β.

iii) (Transitividade) Se α ≤ β, então α ⊂ β. Se $\beta \leq \gamma$, então $\beta \subset \gamma$. Logo, pela transitividade da inclusão de conjuntos, segue $\alpha \subset \gamma$, que, de acordo com a proposição 3.6, nos dá $\alpha \leq \gamma$.

■

Teorema 3.4 Sejam α, β ∈ $\mathcal{C}$. Se $\gamma = \{r + s \mid r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}$, então $\gamma \in \mathcal{C}$.

Demonstração.

Vamos mostrar que γ satisfaz as três condições da definição de corte.

i) Pela própria definição de γ, temos que $\gamma \neq \emptyset$. Sejam $p \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ e $q \in \mathbb{Q}\backslash\beta$. Como $p > r$, $\forall\, r \in \alpha$ e $q > s$, $\forall\, s \in \beta$, então $p + q > r + s$, isto é, $p + q \notin \gamma$. Logo, $\mathbb{Q} \neq \gamma$;

ii) Sejam $p \in \gamma$ e $t \in \mathbb{Q}$ tais que $t < p$. Assim, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ tais que $p = r + s$. Como $t < p$, então $t - r < s$, que nos dá $t - r \in \beta$. Escrevendo $t = r + (t - r)$, temos que $t \in \gamma$, pois $r \in \alpha$ e $t - r \in \beta$;

iii) Seja $p \in \gamma$. Assim, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ tais que $p = r + s$. Como existem $r' \in \alpha$ e $s' \in \beta$ tais que $r' > r$ e $s' > s$, segue que $r + s < r' + s'$. Chamando $q = r' + s'$, temos $p < q$, com $q \in \gamma$. ■

Definição 3.5 Para α, β ∈ $\mathcal{C}$, definimos α + β como sendo o corte do teorema anterior, ou seja, $\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}$.

Proposição 3.7 Se $p, q \in \mathbb{Q}$, então $(p^* + q^*) = (p + q)^*$.

Demonstração.

Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r + s \in (p^* + q^*)$ com $r \in p^*$ e $s \in q^*$. Como, $r < p$ e $s < q$, segue que, $r + s < p + q$. Portanto, $r + s \in (p + q)^*$. Isso mostra que $(p^* + q^*) \subset (p + q)^*$. Considere, agora, $r \in (p + q)^*$, isto é, $r < p + q$. Como $r - p < q$, segue que $(r - p) \in q^*$, logo, existe $t \in q^*$ tal que $(r - p) < t < q$, pois em q^* não há elemento máximo.

Escrevendo $t = (r - p + x)$, com $x \in \mathbb{Q}_+^*$ e $r = (p - x) + (r - p + x)$, segue que $r \in (p^* + q^*)$, pois $(p - x) < p$ e $(r - p + x) < q$. Isso mostra que $(p + q)^* \subset (p^* + q^*)$. Como $(p^* + q^*) \subset (p + q)^*$, segue que $(p^* + q^*) = (p + q)^*$. ■

Teorema 3.5 A adição em $\mathcal{C}$ é comutativa, associativa e tem 0^* como elemento neutro.
Demonstração.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$ e $p, q, r \in \mathbb{Q}$.

i) (Comutatividade) $\alpha + \beta = \{p+q \mid p \in \alpha \text{ e } q \in \beta\} = \{q + p \mid q \in \beta \text{ e } p \in \alpha\} = \beta + \alpha$;

ii) (Associatividade) $(\alpha + \beta) + \gamma = \{(p + q) + r \mid (p + q) \in (\alpha + \beta) \text{ e } r \in \gamma\} = \{p + (q + r) \mid p \in \alpha \text{ e } (q + r) \in (\beta + \gamma)\} = \alpha + (\beta + \gamma)$.

iii) (Elemento neutro) Mostraremos que $\alpha + 0^* = \alpha$. Se $p + q \in \alpha + 0^*$, então $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$. Como $q < 0$, segue que $p + q < p$, logo, $p + q \in \alpha$. Por outro lado, se $p \in \alpha$, então existe $x \in \mathbb{Q}_+^*$ tal que $p + x \in \alpha$, pois em α não há elemento máximo. Como $p = (p + x) - x$ e $-x < 0$, segue que $p \in \alpha + 0^*$. ■

Proposição 3.8 Se $s \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{Q}_+^*$, então $\{s + mr \mid m \in \mathbb{N}\}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$.

Demonstração.

Se esse conjunto fosse limitado superiormente em $\mathbb{Q}$, então existiria um número racional positivo p tal que $s + mr < p$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Mas isto nos daria $m < \frac{p-s}{r}$ (essa expressão faz sentido, pois $r \in \mathbb{Q}_+^*$), que é um absurdo, pois $\mathbb{Q}$ é arquimediano. ■

Lema 3.1 Sejam $\alpha \in \mathcal{C}$ e $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Então existem números racionais p e q tais que $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q não é cota superior mínima de α e $q - p = r$.
Demonstração.

Em outras palavras, dado $r \in \mathbb{Q}_+^*$, existem $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ (onde q não é cota superior mínima de α) tais que $q - p = r$.
Tomemos s arbitrário em α e consideremos a sequência

$$s, s + r, s + 2r, s + 3r, \dots, s + nr, \dots$$

Como essa sequência não é limitada superiormente, α é limitado superiormente e $s \in \alpha$, então existe um único inteiro $m \geq 0$ tal que $s + mr \in \alpha$ e $s + (m+1)r \notin \alpha$. Se $s + (m+1)r$ não for cota superior mínima de α, tome $p = s + mr$ e $q = s + (m+1)r$. Se $s + (m+1)r$ for a cota superior mínima de α, tome $p = s + mr + \frac{r}{2}$ e $q = s + (m+1)r + \frac{r}{2}$. ■

Teorema 3.6 Seja $\alpha \in \mathcal{C}$. Existe um único $\beta \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. Como no caso dos inteiros e racionais, tal β denota-se por – α e se chama simétrico ou inverso aditivo de α.

Demonstração.

(Existência) Dado $\alpha \in \mathcal{C}$, o candidato a – α é o conjunto obtido pelos negativos dos elementos que estão fora de α, isto é, $\beta = \{p \in \mathbb{Q} \mid -p \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ e $-p$ é cota superior não mínima de $\alpha\}$. Mostremos que β é um corte e que $\alpha + \beta = 0^*$.

i) Claramente, $\beta \neq \emptyset$. Se $q \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$, então $q \notin \beta$. Portanto, $\mathbb{Q} \neq \beta$;

ii) Sejam $s \in \beta$ e $r < s$, $r \in \mathbb{Q}$. Como $-r > -s$ e $-s \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$, segue que $-r \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$, portanto, $r \in \beta$;

iii) Se $p \in \beta$, então $-p \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$. Como $-p$ é cota superior não mínima de α, então existe $-q \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ ($q \in \beta$) tal que $-q < -p$, logo, $q > p$. Portanto, como β satisfaz as três condições da definição de corte, segue que $\beta \in \mathcal{C}$. Mostraremos, agora, que $\alpha + \beta = 0^*$.

Temos que mostrar que $(\alpha + \beta) \subset 0^*$ e $0^* \subset (\alpha + \beta)$. Se $p + q \in \alpha + \beta$, então $p \in \alpha$ e $q \in \beta$, logo $p < -q$, pois $-q \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$, daí, $p + q < 0$. Portanto, $p + q \in 0^*$. Por outro lado, se $r \in 0^*$, então $r < 0$. Pelo lema 3.1, existem $p' \in \alpha$ e $q' \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$, onde q' é cota superior não mínima de α, tais que $q' - p' = r'$, com $r' \in \mathbb{Q}_+^*$. Seja $-r = r'$, então $r = -r' = p' + (-q')$. Como $p' \in \alpha$ e $-q' \in \beta$, segue que $r \in \alpha + \beta$. Portanto, $\alpha + \beta = 0^*$.

(Unicidade) Suponha que existam β_1 e $\beta_2 \in \mathcal{C}$, tais que $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = 0^*$. Assim, $\beta_1 = \beta_1 + 0^* = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = 0^* + \beta_2 = \beta_2$. ■

Definição 3.6 Definimos a subtração em $\mathcal{C}$ por $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{C}$.

Proposição 3.9 Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$, vale:

i) $-(-\alpha) = \alpha$;

ii) $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$;

iii) $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$;

iv) $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$;

v) $\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$.

Demonstração.

i) $p \in -(-\alpha) \Leftrightarrow -p \notin (-\alpha) \Leftrightarrow p \in \alpha$;

ii) $-\alpha + \beta = \{p + q \mid p \in -\alpha \text{ e } q \in \beta\} = \{q + p \mid q \in \beta \text{ e } p \in -\alpha\} = \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha$;

iii) $\alpha - (-\beta) = \alpha + [-(-\beta)] = \alpha + [\beta] = \alpha + \beta$;

iv) $p + q \in -\alpha - \beta \Leftrightarrow p \in -\alpha \text{ e } q \in -\beta \Leftrightarrow -p \notin \alpha \text{ e } -q \notin \beta \Leftrightarrow -p - q \notin \alpha + \beta \Leftrightarrow p + q \in -(\alpha + \beta)$;

v) $p + q \in \alpha - (\beta + \gamma) \Leftrightarrow p \in \alpha \text{ e } q \in -(\beta + \gamma) \Leftrightarrow p \in \alpha \text{ e } q \in (-\beta - \gamma) \Leftrightarrow p + q \in \alpha - \beta - \gamma$. ■

Proposição 3.10 (Compatibilidade da relação de ordem com a adição) Sejam $\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{C}$ tais que $\alpha \leq \beta$. Então, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Demonstração.

$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$. Assim, $p + q \in \alpha + \gamma \Rightarrow p \in \alpha \text{ e } q \in \gamma \Rightarrow p \in \beta \text{ e } q \in \gamma \Rightarrow p + q \in \beta + \gamma$, logo, $\alpha + \gamma \subset \beta + \gamma$. Portanto, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. ■

Proposição 3.11 Se $\alpha \geq 0^*$, então $-\alpha \leq 0^*$.

Demonstração.

$\alpha \geq 0^* \Leftrightarrow \alpha - \alpha \geq 0^* - \alpha \Leftrightarrow 0^* \geq -\alpha$. ■

Teorema 3.7 Para $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ com $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, seja $\gamma = \mathbb{Q}_-^* \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r = pq, \text{ com } p \in \alpha, q \in \beta, p \geq 0 \text{ e } q \geq 0\}$. Então, γ é um corte e $\gamma \geq 0^*$.

Demonstração.

Como $\mathbb{Q}_-^* \subset \gamma$, segue que $0^* \leq \gamma$. Mostremos, agora, que γ cumpre as três condições da definição de corte:

i) Claramente, $\gamma \neq \emptyset$. Sejam $u, v \in \mathbb{Q}_+^*$ tais que $u \notin \alpha$ e $v \notin \beta$. Como $uv \in \mathbb{Q}$ e $uv \notin \gamma$, segue que $\mathbb{Q} \neq \gamma$;

ii) Sejam $r \in \gamma$ e $s \in \mathbb{Q}$ tais que $s < r$. Se $r = 0$, então $s \in \gamma$, pois $s \in \mathbb{Q}_-^*$. Seja $r = pq$, com $0 < p \in \alpha$ e $0 < q \in \beta$. Ora, $s < r \Rightarrow s < pq \Rightarrow \frac{s}{p} < q \Rightarrow \frac{s}{p} \in \beta$. Como $s = p.\,\frac{s}{p}$, segue que $s \in \gamma$;

iii) Seja $r = pq \in \gamma$. Queremos mostrar que existe $s \in \gamma$ tal que $s > r$. Como $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, então existem $p' \in \alpha$, $q' \in \beta$ tais que $p < p'$ e $q < q'$, chamando $s = p'q'$, temos, $pq < p'q'$, isto é, $r < s$. ■

Definição 3.7 Se $\alpha,\beta \in \mathcal{C}$ e $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$, definimos o produto $\alpha\beta$ como sendo o corte do teorema anterior.

Definição 3.8 Dado $\alpha \in \mathcal{C}$, definimos o valor absoluto de α (ou o módulo de α), representado por $|\alpha|$, do seguinte modo:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, se\ \alpha \ \geq \ 0^* \\ -\ \alpha, se\ \alpha < \ 0^* \end{cases}$$

Proposição 3.12 Para qualquer $\alpha \in \mathcal{C}$, tem-se:

i) $|\alpha| \geq \ 0^*$;

ii) $|\alpha| = 0^*$ se, e somente se, $\alpha = 0^*$;

iii) $|\alpha| = |-\ \alpha|$.

Demonstração.

1) Se $\alpha \geq 0^*$, então, pela definição 3.8, $|\alpha| = \alpha$. Como $\alpha \geq 0^*$, segue que $|\alpha| \geq 0^*$. Se $\alpha < 0^*$, então $|\alpha| = -\ \alpha$, mas $-\ \alpha > 0^*$, logo, $|\alpha| > 0^*$;

2) Se $|\alpha| = 0^*$, então $\alpha = 0^*$ ou $-\ \alpha = 0^*$. Se $-\ \alpha = 0^*$, então $-\ \alpha + \alpha = 0^* + \alpha$, o que implica $0^* = \alpha$. Por outro lado, se $\alpha = 0^*$, então, por definição, $|\alpha| = \alpha$, isto é, $|\alpha| = 0^*$;

3) Se $\alpha \geq 0^*$, então $|\alpha| = \alpha$ e $|-\ \alpha| = -(-\alpha) = \alpha$. Se $\alpha < 0^*$, então $|\alpha| = -\ \alpha$ e $|-\ \alpha| = -\ \alpha$. ■

Definição 3.9 Se $\alpha,\beta \in \mathcal{C}$, definimos:

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|),\ se\ \alpha \leq 0^*, \beta \geq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|),\ se\ \alpha \geq 0^*, \beta \leq 0^*; \\ \quad |\alpha||\beta|,\ se\ \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

Proposição 3.13 Para $\alpha,\beta \in \mathcal{C}$, temos $(-\ \alpha)\beta = \alpha(-\ \beta) = -\ (\alpha\beta)$ e $(-\ \alpha)(-\ \beta) = \alpha\beta$.

Demonstração.

Se $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$, então $-\ \alpha \leq \ 0^*$ e $-\beta \leq 0^*$. Assim,

i) $(-\alpha)\beta = -(|-\alpha||\beta|) = \ -([-(-\alpha)]\beta) = -(\alpha\beta)$;

ii) $\alpha(-\ \beta) = -(|\alpha||-\beta|) = -(\alpha[-(-\beta)] = -(\alpha\beta)$;

iii) $(-\alpha)(-\beta) = |-\alpha||-\beta| = [-(-\alpha)][-(-\beta)] = \ \alpha\beta$. ■

Teorema 3.8 A multiplicação de cortes é comutativa, associativa e tem 1^* como elemento neutro.

Demonstração.

Suponhamos α, β, γ ≥ 0^*. Os demais casos são consequências das propriedades já estudadas, principalmente, as regras de sinais. Mostraremos, inicialmente, que a multiplicação de cortes é comutativa, associativa e tem 1^* como elemento neutro. Se $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$, $\gamma \geq 0^*$, então $-\alpha \leq 0^*$, $-\beta \leq 0^*$, $-\gamma \leq 0^*$.

a) (Comutatividade)

i) $\alpha\beta = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r = pq, \text{ com } p \in \alpha, q \in \beta, p \geq 0, q \geq 0\} = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r = qp, \text{ com } q \in \beta, p \in \alpha, q \geq 0, p \geq 0\} = \beta\alpha$;

ii) $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta) = -(\beta\alpha) = \beta(-\alpha)$;

iii) $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta) = -(\beta\alpha) = (-\beta)\alpha$;

iv) $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta = \beta\alpha = (-\beta)(-\alpha)$.

b) (Associatividade)

i) $(\alpha\beta)\gamma = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r = (pq)t, \text{ com } pq \in \alpha\beta, 0 \leq t \in \gamma, 0 \leq p \in \alpha, 0 \leq q \in \beta\} = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r = p(qt), \text{ com } 0 \leq p \in \alpha, qt \in \beta\gamma, 0 \leq q \in \beta, 0 \leq t \in \gamma\} = \alpha(\beta\gamma)$;

ii) $[(-\alpha)\beta]\gamma = [-(\alpha\beta)]\gamma = -[(\alpha\beta)\gamma] = -[\alpha(\beta\gamma)] = (-\alpha)(\beta\gamma)$;

iii) $[\alpha(-\beta)]\gamma = [-(\alpha\beta)]\gamma = -[(\alpha\beta)\gamma] = -[\alpha(\beta\gamma)] = \alpha[-(\beta\gamma)] = \alpha[(-\beta)\gamma]$;

iv) $(\alpha\beta)(-\gamma) = -[(\alpha\beta)\gamma] = -[\alpha(\beta\gamma)] = \alpha[-(\beta\gamma)] = \alpha[\beta(-\gamma)]$;

v) $[(-\alpha)(-\beta)](-\gamma) = [\alpha\beta](-\gamma) = -[(\alpha\beta)\gamma] = -[\alpha(\beta\gamma)] = (-\alpha)[(-\beta)(-\gamma)]$;

vi) $[\alpha(-\beta)](-\gamma) = [-(\alpha\beta)](-\gamma) = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha[(-\beta)(-\gamma)]$;

vii) $[(-\alpha)\beta](-\gamma) = [-(\alpha\beta)](-\gamma) = -[(\alpha\beta)(-\gamma)] = -\{\alpha[\beta(-\gamma)]\} = (-\alpha)[\beta(-\gamma)]$;

viii) $[(-\alpha)(-\beta)]\gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = (-\alpha)[-(\beta\gamma)] = (-\alpha)[(-\beta)\gamma]$.

c) (Elemento neutro)

Se $r \in \alpha$, então existe $s \in \alpha$, $s \neq 0$, tal que $r < s$. Se $r \geq 0$, então $\frac{r}{s} < 1$. Se $s < 0$, então $\frac{s}{r} < 1$. Assim, todo elemento de α pode ser escrito como um produto da seguinte forma: $r = s \cdot \frac{r}{s}$, com $r, s \in \alpha$ e $\frac{r}{s} \in 1^*$. ■

Teorema 3.9 Se, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{C}$, vale:

1) (Distributividade) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

2) $\alpha . 0^* = 0^*$;

3) Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq 0^*$, então $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$;

4) Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma < 0^*$, então $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$;

5) Se α $\neq 0^*$, em $\mathcal{C}$, existe um único β ∈ $\mathcal{C}$ tal que αβ = 1^*. Esse corte chama-se inverso de α e é denotado por α^{-1}.

Demonstração.

i) (Distributividade)

α(β +γ) = αβ + αγ. Suponhamos α, β, γ ≥ 0^*. Os demais casos são consequências desse e das propriedades já estudadas, principalmente, as regras de sinais. Caracterizaremos os elementos dos conjuntos de racionais A = α(β + γ) e B = αβ + αγ e mostraremos que $A = B$. Temos: β + γ = $\{y + z \in \mathbb{Q} \mid y \in \beta \text{ e } z \in \gamma\}$ e $A = \alpha(\beta + \gamma) = \mathbb{Q}_-^* \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r = p(y + z)$, com $0 \leq p \in \alpha$ e $0 \leq (y + z) \in \beta + \gamma\}$. Logo, os elementos de A ou são racionais negativos ou são da forma: $r = py + pz$. Por outro lado, temos: $\alpha\beta = \mathbb{Q}_-^* \cup \{r' \in \mathbb{Q} \mid r' = p'y'$, com $0 \leq p' \in \alpha$ e $0 \leq y' \in \beta\}$, $\alpha\gamma = \mathbb{Q}_-^* \cup \{r'' \in \mathbb{Q} \mid r'' = p''z''$, com $0 \leq p'' \in \alpha$ e $0 \leq z'' \in \gamma\}$ e $B = \alpha\beta + \alpha\gamma = \{s + t \in \mathbb{Q} \mid s \in \alpha\beta \text{ e } t \in \alpha\gamma\}$. Assim, os elementos de β são de uma das formas seguintes:

a) $a + b$, com $a, b \in \mathbb{Q}_-^*$;

b) $a + p''z''$, com $a \in \mathbb{Q}_-^*$, $0 \leq p'' \in \alpha$ e $0 \leq z'' \in \gamma$;

c) $p'y' + b$, com $b \in \mathbb{Q}_-^*$, $0 \leq p' \in \alpha$ e $0 \leq y' \in \beta$;

d) $p'y' + p''z''$, com $0 \leq p' \in \alpha$, $0 \leq y' \in \beta$, $0 \leq p'' \in \alpha$ e $0 \leq z'' \in \gamma$.

Devemos provar que qualquer elemento de A é uma das formas presentes em B e vice-versa. Vamos verificar que qualquer elemento presente em A assume uma das quatro formas em B. Assim, consideremos um elemento de A da forma $py + pz$, com $0 \leq p \in \alpha$, $0 \leq y \in \beta$, $0 \leq z \in \gamma$ e $0 \leq (y + z)$. Novamente, a subcasos a considerar:

1) se $py, pz \in \mathbb{Q}_-^*$, então $py + pz$ assume a forma (a) em B;

2) se $y < 0$, $p \geq 0$ e $z \geq 0$, então $py + pz$ assume a forma (b) em B;

3) se $p \geq 0$, $y \geq 0$ e $z < 0$, então $py + pz$ assume a forma (c) em B;

4) se y, p e z são maiores do que ou iguais a 0, então $py + pz$ assume a forma (d) em B.

Concluímos que $A \subset B$.

Tomando, agora, um elemento qualquer de B, mostraremos que esse elemento pertence à A:

1) seja $(a + b) \in B$, com $a, b \in \mathbb{Q}_-^*$, como $a + b \in \mathbb{Q}_-^*$, segue que $a + b \in A$;

2) seja $a + p''z''$, (com $a \in \mathbb{Q}_-^*$, $0 \leq p'' \in \alpha$, $0 \leq y'' \in \beta$, $0 \leq z'' \in \gamma$) $\in B$. Como $a < 0 \leq$

$p''y'' \in \alpha\beta$, segue que $a + p''z'' < p''y'' + p''z''$, como A é um corte e $p''y'' + p''z'' \in A$, segue que $a + p''z'' \in A$;

3) seja $p'y' + b$, (com $b \in \mathbb{Q}_-^*$, $0 \leq p' \in \alpha$, $0 \leq z' \in \gamma$, $0 \leq y' \in \beta$) $\in B$. Como $b < 0 \leq p'z' \in \alpha\gamma$, segue que $p'y' + b < p'y' + p'z'$, como A é um corte e $p'y' + p'z' \in A$, segue que $p'y' + b \in A$;

4) seja $p'y' + p''z''$, (com $0 \leq p' \in \alpha$, $0 \leq y' \in \beta$, $0 \leq p'' \in \alpha$ e $0 \leq z'' \in \gamma$) $\in B$. Se $p' = p''$, não há o que mostrar. Suponha então que $p' < p'' \Rightarrow p'y' < p''y' \Rightarrow p'y' + p''z'' < p''y' + p''z''$. Como A é um corte e $p''y' + p''z'' \in A$, segue que $p'y' + p''z'' \in A$. Assim, $B \subset A$.

Dessa forma, concluímos a demonstração da distributividade para o caso em que $\alpha, \beta, \gamma \geq 0^*$. Conforme comentado no inicio desta demonstração, os demais casos são consequências desse e das demais propriedades aritméticas já estudadas.

Afirmação 1) Se $\beta, \gamma \leq 0$, então $\beta + \gamma = -|\beta| - |\gamma| = -(|\beta| + |\gamma|)$;

Afirmação 2) Se $\beta \geq \gamma \geq 0^*$ e $\alpha \geq 0^*$, então $\alpha\beta = \alpha(\beta - \gamma + \gamma) = \alpha[(\beta - \gamma) + \gamma] = \alpha(\beta - \gamma) + \alpha\gamma$, de onde segue que $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$.

Analisemos os casos seguintes:

ii) $\alpha < 0^*$ e $\beta, \gamma \geq 0^*$.

Assim, temos: $\alpha(\beta + \gamma) = -(|\alpha||\beta + \gamma|) = -[(-\alpha)(\beta + \gamma)] = -[(-\alpha)(\beta) + (-\alpha)(\gamma)] = -[-\alpha\beta - \alpha\gamma] = -[-(\alpha\beta + \alpha\gamma)] = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

iii) $\alpha, \gamma \geq 0^*$ e $\beta < 0^*$.

Assim, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha[\gamma - (-\beta)]$. Temos dois subcasos a considerar: $\gamma - (-\beta) \geq 0^*$ ou $\gamma - (-\beta) \leq 0^*$. Se $\gamma - (-\beta) \geq 0^*$, então $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha[\gamma - (-\beta)] = \alpha\gamma - \alpha(-\beta) = \alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Por outro lado, se $\gamma - (-\beta) \leq 0^*$, então $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha[\gamma - (-\beta)] = -(|\alpha||\gamma - (-\beta)|) = -(\alpha[-(\gamma - (-\beta)]) = -(\alpha[-\gamma + (-\beta)]) = -(\alpha[(-\beta) + (-\gamma)] = -(\alpha(-\beta) - \alpha(-\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

iv) $\alpha, \beta \geq 0^*$ e $\gamma \leq 0^*$.

Demonstração análoga a que foi feita no item iii);

v) $\alpha \geq 0^*$ e $\beta, \gamma \leq 0^*$.

Assim, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha[-(|\beta| + |\gamma|)] = -(\alpha[|\beta| + |\gamma|]) = -(\alpha|\beta| + \alpha|\gamma|) = -\big(\alpha(-\beta) + \alpha-\gamma=-\alpha-\beta+(-\alpha)-\gamma=\alpha\beta+\alpha\gamma$;

vi) $\alpha, \gamma \leq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$.

Assim, $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha[\beta - (-\gamma)]$. Aqui, temos que considerar dois subcasos: $\beta - (-\gamma) \geq 0^*$ ou $\beta - (-\gamma) \leq 0^*$. Se $\beta - (-\gamma) \geq 0^*$, então $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha[\beta - (-\gamma)] = -(|\alpha||\beta -$
$-\gamma=-[-\alpha\beta--\gamma=--\alpha\beta--\alpha-\gamma=-[-\alpha\beta-\alpha\gamma]=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

Por outro lado, se $\beta - (-\gamma) \leq 0^*$, então $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha[\beta - (-\gamma)] = (|\alpha||\beta - (-\gamma)| = \big[(-\alpha)\big((-\gamma) - \beta\big)\big] = [(-\alpha)(-\gamma) - (-\alpha)\beta] = [\alpha\gamma + \alpha\beta] = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

vii) $\alpha, \beta \leq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

Demonstração análoga a que foi feita no item vi).

viii) $\alpha, \beta, \gamma \leq 0^*$.

Assim, $\alpha(\beta+\gamma) = |\alpha||\beta+\gamma| = (-\alpha)[-(\beta+\gamma)] = (-\alpha)[(-\beta)+(-\gamma)] = (-\alpha)(-\beta) + (-\alpha)(-\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. ■

2) $\alpha.0^* = 0^*$.

Demonstração.

Se $p \in \alpha.0^*$, então ou $p \in \mathbb{Q}^*_-$ ou $p = rs$, com $0 \leq r \in \alpha$ e $0 \leq s \in 0^*$. Mas, se $s \in 0^*$, então $s < 0$, logo, $p \in \mathbb{Q}^*_-$, isto é, $p \in 0^*$. Isto nos diz que $\alpha.0^* \subset 0^*$. Por outro lado, se $p \in 0^*$, então $p < 0$, logo, $p \in \mathbb{Q}^*_-$, ou seja, $p \in \alpha.0^*$. Isto nos diz que $0^* \subset \alpha.0^*$. Assim, temos que $\alpha.0^* = 0^*$.

■

3) Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq 0^*$, então $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Demonstração.

$\alpha = \beta \Rightarrow \beta - \alpha = 0^* \Rightarrow \gamma(\beta - \alpha) = 0^* \Rightarrow \gamma\beta - \gamma\alpha = 0^* \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$, o que também ocorre se $\gamma = 0^*$.

Suponha $\alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$, então $\gamma(\beta - \alpha) > 0^*$, pois existe $p = rs$, com $0 \leq r \in \gamma$, $0 \leq s \in (\beta - \alpha)$, assim, $p \geq 0$.Dessa forma, temos $\gamma(\beta - \alpha) > 0^* \Rightarrow \gamma\beta - \gamma\alpha > 0^* \Rightarrow \gamma\beta > \gamma\alpha \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$. ■

4) Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma < 0^*$, então $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$.

Demonstração.

$\alpha = \beta \Rightarrow \beta - \alpha = 0^* \Rightarrow \gamma(\beta - \alpha) = 0^* \Rightarrow \gamma\beta - \gamma\alpha = 0^* \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$, o que também ocorre se $\gamma = 0^*$.

Suponha $\alpha < \beta$ e $\gamma < 0^*$. Assim, $\gamma(\beta - \alpha) = -[(-\gamma)(\beta - \alpha)]$. Se $p \in -[(-\gamma)(\beta - \alpha)]$, então $-p \notin [(-\gamma)(\beta - \alpha)]$ Ora, se $q \in [(-\gamma)(\beta - \alpha)]$, então $q \in \mathbb{Q}^*_-$ ou $q = rs$, com $0 \leq r \in (-\gamma)$ e $0 \leq s \in (\beta - \alpha)$, então $-r \notin \gamma$, como $\gamma < 0^*$, temos $-r \geq 0$, logo, $r = 0$. Portanto, $q \leq 0$. Como $-p \notin [(-\gamma)(\beta - \alpha)]$, segue que $-p > 0$, logo, $p < 0$. Daí, $\gamma(\beta - \alpha) < 0^* \Rightarrow \gamma\beta - \gamma\alpha < 0^* \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.

■

5) Se $\alpha \neq 0^*$, em $\mathcal{C}$, existe um único $\beta \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha\beta = 1^*$. Esse corte chama-se inverso de α e é denotado por α^{-1}.

Demonstração.

Suponhamos, inicialmente, $\alpha < 0^*$. Assim, se $r \in \alpha$, então, como α é um corte, existe $s \in \alpha$ tal que $r < s$, daí, $\frac{s}{r} < 1$. Tomando $s \in \alpha$ e $\frac{1}{r} \in \beta$, segue que $\alpha\beta \subset 1^*$. Por outro lado, se $p \in 1^*$, como p é racional, podemos escrever $p = a. \frac{1}{b}$, com $a, b < 0$ e $a > b$. Suponhamos, agora, $\alpha \geq 0^*$. Assim, se $r \in \alpha$, então, como α é um corte, existe $s \in \alpha$ tal que $0 < r < s$, daí, $\frac{r}{s} < 1$. Tomando $r \in \alpha$ e $\frac{1}{s} \in \beta$, segue que $\alpha\beta \subset 1^*$. Por outro lado, se $p \in 1^*$, como p é racional, podemos escrever $p = a. \frac{1}{b}$, com $a, b > 0$ e $a < b$. ■

Proposição 3.14 $\alpha\beta = 0^*$ se, e somente se, $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$.

Demonstração.

Suponha $\alpha\beta = 0^*$ e $\alpha \neq 0^*$. Assim, existe $\alpha^{-1} \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha^{-1}\alpha = 1^*$, logo, $\beta = 0^*$. Analogamente, se $\alpha\beta = 0^*$ e $\beta \neq 0^*$, então existe $\beta^{-1} \in \mathcal{C}$ tal que $\beta\beta^{-1} = 1^*$, logo, $\alpha = 0^*$. Por outro lado, já vimos que $\alpha.0^* = 0^*$. Assim, se $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$, então $\alpha\beta = 0^*$. ■

Proposição 3.15 Se $p, q \in \mathbb{Q}$, então $p^*. q^* = (p.q)^*$.

Demonstração.

Se $rs \in p^*. q^*$, então $0 \leq r < p$ e $0 \leq s < q$, logo, $rs < pq$. Por outro lado, se $r \in (p.q)^*$, então $r < pq$. Como r não é máximo, existe $s \in (p.q)^*$ tal que $r < s$. Seja $p' < p$ tal que $s = p'.q$ com $p' \neq 0$. Assim, $\frac{r}{p'}, < q$. Escrevendo $r = p'. \frac{r}{p'}$, temos $r \in p^*. q^*$. ■

Proposição 3.16 Se $\alpha \in \mathcal{C}$, temos que $r \in \alpha$ se, e somente se, $r^* < \alpha$.

Demonstração.

Se $r \in \alpha$ e $\alpha \in \mathcal{C}$, então $r^* \neq \alpha$, pois $r \notin r^*$. Suponha, $r^* > \alpha$. Assim, $r^* \backslash \alpha \neq \emptyset$, logo, existe $p \in r^*$ tal que $p \notin \alpha$, o que é uma contradição, pois se $p < r$, $r \in \alpha$ e $\alpha \in \mathcal{C}$, então $p \in \alpha$. Portanto, se $r \in \alpha$, então $r^* < \alpha$. Por outro lado, sejam $r^* < \alpha$ e $\alpha \in \mathcal{C}$. Assim, se $p \in \alpha \backslash r^*$, então $p \geq r$, como $r \in \mathbb{Q}$, segue que $r \in \alpha$. ■

Teorema 3.10 Se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ e $\alpha < \beta$, então existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.
Demonstração.

Basta tomar r como uma cota superior NÃO mínima de α. Dessa forma, é claro que $\alpha \neq r^*$. Como $\alpha < \beta$, segue que $\beta\backslash\alpha \neq \emptyset$. Seja $r \in \beta\backslash\alpha$, pela proposição 3.16, temos $r^* < \beta$. Mostraremos que $\alpha < r^*$. De fato, se $\alpha > r^*$, então $r \in \alpha$, o que é uma contradição, pois $r \in \beta\backslash\alpha$. ■

Temos, então, $\mathcal{C}$ munido de duas operações e uma relação de ordem obedecendo às mesmas leis aritméticas dos racionais, assim, $\mathcal{C}$ é, como $\mathbb{Q}$, um corpo ordenado. Além disso, a aplicação $j: \mathbb{Q} \to \mathcal{C}$ dada por $j(r) = r^*$ é injetora e preserva adição, multiplicação e ordem, conforme as proposições 3.7, 3.15 e 3.5 respectivamente.

Definição 3.10 O conjunto $\mathcal{C}$ dos cortes será, a partir de agora, denominado conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Os cortes racionais serão identificados, via a injeção j, com os números racionais. Todo corte que não for racional será denominado número irracional.

Notação 3.2 a identificação de $j(\mathbb{Q})$ com $\mathbb{Q}$ nos permite escrever $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números irracionais.

Definição 3.11 Sejam A e B subconjuntos de um corpo ordenado tais que:

i) $K = A \cup B$;

ii) $A \cap B = \emptyset$;

iii) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;

iv) se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$.

Nessas condições, dizemos que K é **completo**, se existe um, e apenas um, $c \in K$ tal que $a \leq c \leq b$, para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$.

Exemplo 3.2 $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, porém não é completo.

De fato, considerando os subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_-^*$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 > 2\}$. É fácil ver que $\mathbb{Q}$ cumpre as quatro condições da definição anterior. No entanto, de acordo com o teorema 3.1, não existe $r \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $s \leq r$ para todo $s \in A$ e $r \leq t$ para todo $t \in B$.

Teorema 3.11 O corpo ordenado $\mathbb{R}$ dos números reais é completo.

Demonstração.

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que:

i) $\mathbb{R} = A \cup B$;

ii) $A \cap B = \emptyset$;

iii) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;

iv) se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$.

Mostraremos, nessas condições, que existe um, e apenas um, número real γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, para todo $\alpha \in A$ e para todo $\beta \in B$.

(Existência) Seja $\gamma = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \in \alpha$, para algum $\alpha \in A\}$. Mostraremos que γ é um corte nas condições dadas.

i) $\emptyset \neq \gamma \neq \mathbb{Q}$.

Como $A \neq \emptyset$, segue que existe algum α em A. Como $\alpha \neq \emptyset$, segue que $\gamma \neq \emptyset$. Para mostrar que $\gamma \neq \mathbb{Q}$, tomemos $\beta \in B$. Seja $s \in \mathbb{Q} \backslash \beta$. Como $\alpha \subset \beta \ \forall \ \alpha \in A$, então $s \notin \alpha \ \forall \ \alpha \in A$, logo, $s \notin \gamma$.

ii) Se $r \in \gamma$ e $s < r$, $s \in \mathbb{Q}$, então $s \in \gamma$.

Temos que $r \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ e, como $s < r$, seque que $s \in \alpha$, logo, $s \in \gamma$.

iii) Se $r \in \gamma$, então existe $s > r$ em α tal que $s \in \gamma$.

Temos que $r \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ e, como α é um corte, existe $s > r$ com $s \in \alpha$, logo, $s \in \gamma$.

Assim, γ é um número real e temos que $\alpha \leq \gamma \ \forall \ \alpha \in A$, pois, pela definição de γ, sabemos que $\alpha \subset \gamma \ \forall \ \alpha \in A$. Mostremos, agora, que $\gamma \leq \beta \ \forall \ \beta \in B$. Suponhamos que exista $\beta \in B$ tal que $\beta < \gamma$. Assim, existe um racional $r \in \gamma \backslash \beta$. Por pertencer a γ, r é um elemento de algum α em A e, não sendo elemento de B, obtemos $\beta < \alpha$, contrariando a hipótese (iv).

(Unicidade) Suponha que existam dois números γ_1e γ_2, com $\gamma_1 < \gamma_2$ nas condições do enunciado. De acordo com o teorema 3.10, existe γ_3 tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$. De $\gamma_3 < \gamma_2$, resulta $\gamma_3 \in A$, pois $\beta \geq \gamma_2 > \gamma_3$ para todo $\beta \in B$ e $A \cup B = \mathbb{R}$. Analogamente, de $\gamma_1 < \gamma_3$, resulta $\gamma_3 \in B$. Como $\gamma_3 \in A$ e $\gamma_3 \in B$, temos $\gamma_3 \in A \cap B$, uma contradição. ■

Corolário 3.1 Nas condições do teorema anterior, ou existe em A um número máximo ou, em B, um número mínimo.

Demonstração.

Seja γ como no teorema anterior. Então, pela hipótese (i), γ está em A ou em B e, por (ii), em apenas um desses conjuntos. Se $\gamma \in A$, então γ é elemento máximo de A e, se $\gamma \in B$, então γ é elemento mínimo de B. ■

Teorema 3.12 (Princípio do Supremo) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Demonstração.

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Mostraremos que X tem um supremo, isto é, verificaremos as duas condições da definição 2.10. Definamos o conjunto A como o conjunto formado pelos números reais que não são cotas superiores de X. Seja B o conjunto formado pelos números reais que são cotas superiores de X. Vamos mostrar que A e B satisfazem as condições do teorema 3.11. Claramente,

i) $A \cup B = \mathbb{R}$ e ii) $A \cap B \neq \emptyset$.

iii) Como X é não vazio e limitado superiormente, qualquer $\alpha < x$ é elemento de A ($A \neq \emptyset$) e qualquer $\beta \geq x$ é elemento de B ($B \neq \emptyset$).

iv) Se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então existe $x \in X$ tal que $\alpha < x$. Como $x \leq \beta \;\; \forall\, x \in X$, segue que $\alpha < \beta$.

Sendo $\mathbb{R}$ um corpo ordenado completo, segue, pelo corolário 3.1, que ou A possui elemento mínimo ou B possui elemento máximo. Mostraremos que A não possui elemento máximo. Seja α um elemento qualquer de A. Existe $x \in X$ tal que $\alpha < x$. Pelo teorema 3.10, existe r^* tal que $\alpha < r^* < x$. Como $r^* < x$, segue que $r^* \in A$. Assim, vemos que, em A, não há elemento máximo. Logo, B possui elemento mínimo, isto é, existe $\beta' \in B$ tal que $\beta' \leq \beta$ para todo $\beta \in B$.

Afirmamos que sup(X) = β'. Em primeiro lugar, note que $x < \beta'$ para todo $x \in X$, o que satisfaz a primeira condição da definição 2.10. Em segundo lugar, suponha, por absurdo, que exista outro elemento $\beta'' \in \mathbb{R}$ candidato a sup. Como β' é o elemento mínimo de B, segue que $\beta'' \in A$. Como A não possui elemento máximo, segue que existe $x \in X$ tal que $\beta'' < x$, logo,

$\beta'' < x < \beta'$, o que satisfaz a segunda condição da definição 2.10. ■

Teorema 3.13 A ordenação de $\mathbb{R}$ é arquimediana.

Demonstração.

Suponhamos $\mathbb{N}$ limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e seja $\alpha = \sup \mathbb{N}$. Assim, $\alpha \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $n + 1 \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \leq \alpha$, logo, $\alpha - 1 \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\alpha - 1 < \alpha$, segue que α não é o $\sup \mathbb{N}$, uma contradição. ■

4 CONSTRUÇÃO DOS REAIS VIA SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Neste capítulo, mostraremos os detalhes da construção dos reais via sequências de Cauchy. Alguns dos resultados feitos aqui estão em nossa referência, ver [1], [3], [4], [5], [8] e [9].

Definição 4.1 Uma sequência de números racionais é uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por $s(n)$ que associa cada número natural n a um único número racional $s(n)$. Assim, usaremos o símbolo $\{s_n\}$ para representar uma sequência de números racionais e usaremos o símbolo s_n, no lugar de $s(n)$, para representar o enésimo termo da sequência.

Exemplo 4.1 Dada a sequência $\{s_n\}$ tal que $s_n = \frac{n}{n+1}$, temos:

$s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{2}{3}$, $s_3 = \frac{3}{4}$... Portanto, $\{s_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\}$.

Definição 4.2 Uma sequência $\{a_n\}$ é uma **sequência de Cauchy** se para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n, m \geq n_0$, então $|a_n - a_m| < \frac{1}{k}$. Em outras palavras, para valores de n e m suficientemente grandes, os termos da sequência tornam-se tão próximos um do outro que a diferença entre dois desses termos tende a zero. Para facilitar, a menos que se especifique o contrário, concordaremos que $k, n, m, n_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, serão números naturais.

Exemplo 4.2 A sequência constante $\{r\}$ tal que $a_n = r$ para todo n é de Cauchy, pois, para todo n, m, temos $a_n = a_m = r$, logo $|r - r| = 0 < \frac{1}{k}$ para todo k.

Exemplo 4.3 A sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy, pois, como $\mathbb{N}$ é ilimitado, para todo k, podemos tomar n_0 tal que $n_0 > 2k$, logo, $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2k}$. Assim, para todo k, existe n_0 tal que $n, m \geq n_0$ implica $|a_n - a_m| \leq |a_n| + |a_m| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$.

Exemplo 4.4 A sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = n$ não é de Cauchy, pois $|a_n - a_m| < \frac{1}{k} \Leftrightarrow$

$$|n - m| < \frac{1}{k} \Leftrightarrow m - \frac{1}{k} < n < m + \frac{1}{k} \Leftrightarrow m = n.$$

Notação 4.1 Chamaremos S o conjunto das sequências de Cauchy de números racionais. Escreveremos $\{a_n\} \in S$, se $\{a_n\}$ for uma sequência de Cauchy de números racionais.

Definição 4.3 Dizemos que a sequência $\{a_n\}$ converge para $L \in \mathbb{Q}$ se para todo k, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, então $|a_n - L| < \frac{1}{k}$. Isto significa que os termos da sequência aproximam-se do número racional L à medida que n cresce, ou seja, quanto maior for o valor de n maior será tal aproximação. Chamaremos o número L de **limite da sequência** $\{a_n\}$. Em linguagem simbólica, representaremos isto assim: $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$ (lê-se: o limite da sequência, quando n for suficientemente grande, é L). Em particular, se $\{a_n\} \in S$, dizemos que $\{a_n\}$ é uma **sequência nula** se para todo k, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $|a_n| < \frac{1}{k}$, isto é, para n suficientemente grande, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$. Isto significa que, a partir de certo momento, os termos da sequência aproximam-se de zero.

Proposição 4.1 Se a sequência $\{a_n\}$ é convergente, então seu limite é único. Demonstração.

Suponha que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$. Suponha ainda que exista outro $M \in \mathbb{Q}$, $M \neq L$, tal que $|a_n - M| < \frac{1}{k}$ para n suficientemente grande. Como $L - M \neq 0$ e $\mathbb{Q}$ é arquimediano, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{|L-M|} < k$. Assim, para todo k, existe n suficientemente grande tal que $|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |a_n - L| + |a_n - M| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k} < |L - M|$, que é um absurdo. Portanto, $L = M$. ■

Exemplo 4.5 Dada a sequência $\{s_n\}$ tal que $s_n = \frac{n}{n+1}$, temos que $s_n = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Assim, para valores de n suficientemente grandes, temos que $\frac{1}{n+1}$ se aproxima de zero, logo, $\lim_{n\to\infty}\{s_n\} = 1$. De fato, para todo k, existe n tal que $n + 1 > k$, logo, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{k}$, assim, temos: $|s_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{k}$.

Exemplo 4.6 A sequência constante $\{a_n\}$ tal que $a_n = 0$ é nula, pois $|0 - 0| = 0 < \frac{1}{k}$ para todo k. Representamos tal sequência assim $\{0\}$.

Exemplo 4.7 A sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{1}{n}$ é nula, pois, para todo k, existe n tal que $n > k$ implica $\frac{1}{n} < \frac{1}{k}$. Assim, $|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{k}$. De fato, quando n é suficientemente grande, a razão $\frac{1}{n}$ aproxima-se de zero, logo, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$.

A próxima proposição nos dará uma condição suficiente para que uma dada sequência seja de Cauchy: a condição de convergência.

Proposição 4.2 Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

Demonstração.

De acordo com a definição de convergência, a sequência $\{a_n\}$ converge para L se para todo k, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, então $|a_n - L| < \frac{1}{k}$. Assim, supondo que $\{a_n\}$ converge para L, segue que para todo k, existe n_0 tal que se n, $m \geq n_0$ então $|a_n - L| < \frac{1}{2k}$ e $|a_m - L| < \frac{1}{2k}$. Dessa forma, $|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| = |(a_n - L) - (a_m - L)| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$. Isso mostra que $\{a_n\} \in S$. ■

Assim, para mostrar que uma dada sequência é de Cauchy, basta verificar se a sequência converge.

Exemplo 4.8 As sequências dos exemplos 4.1, 4.2, 4.3, 4.6 são de Cauchy, pois são convergentes. No entanto, a sequência do exemplo 4.4 não é de Cauchy, pois a sequência não converge.

Definição 4.4 Dada uma sequência $\{a_n\} \in S$, uma **subsequência** de $\{a_n\}$ é uma restrição da função s a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_i, \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Representaremos tal subsequência de $\{a_n\}$ por $\overline{\{a_n\}}$.

Observação 4.1 Estritamente falando, uma subsequência não é uma sequência, pois, de acordo com a definição 4.1, uma sequência está definida para todo n natural. No entanto, podemos considerar $\overline{\{a_n\}}$ como uma função definida em $\mathbb{N}$, bastar tomar a função $s(1) = \overline{a_{n_1}}$, $s(2) = \overline{a_{n_2}}$, ..., $s(\mathrm{i}) = \overline{a_{n_i}}$, ...

Exemplo 4.9 Considere a sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n-1000}, se\ n \neq 1000 \\ 0 \quad , se\ n = 1000 \end{cases}$.

Uma subsequência de $\{a_n\}$ tal que todos os termos sejam positivos é qualquer sequência definida no conjunto $\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N} | n > 1000\}$. Assim, $\overline{\{a_n\}} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$ tomando $n_1 = 1001$. Por outro lado, a sequência $\overline{\{b_n\}} = \left\{\frac{1}{1000}, \frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \ldots\right\}$ é outra subsequência de $\{a_n\}$ tomando $n_1 = 2000$.

Proposição 4.3 Se $\{a_n\} \in S$ tem uma subsequência que converge para $L \in \mathbb{Q}$, então $\{a_n\}$ também converge para L.

Demonstração.

Por um lado, como $\{a_n\} \in S$, segue que para todo k, existe n_0 tal que se n, $m \geq n_0$, então $|a_n - a_m| < \frac{1}{2k}$. Por outro lado, existe também $n_1 \geq n_0$, tal que $|a_{n_1} - L| < \frac{1}{2k}$, pois $\{a_n\}$ tem uma subsequência que converge para L. Assim, se $n \geq n_1$, então $|a_n - L| = |a_n - a_{n_1} + a_{n_1} - L| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - L| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$. Isto mostra que $\{a_n\}$ converge para L. ■

Proposição 4.4 Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração.

Se $\{a_n\} \in S$, então para $k = 1$, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $|a_n - a_{n_0}| < 1$. Como $|a_n| - |a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}|$, segue que $|a_n| < 1 + |a_{n_0}|$. Sendo A o maior elemento do conjunto $\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}|, |a_{n_0}| + 1\}$, segue que $|a_n| < A$. Note que $A \in \mathbb{Q}$. ■

Definição 4.5 Se $\{a_n\}$ é uma sequência de números racionais, definimos $-\{a_n\}$ como a sequência $\{-a_n\}$, isto é, a sequência cujo enésimo termo é $-a_n$. Assim, dizemos que $\{-a_n\}$ é a sequência oposta de $\{a_n\}$.

Exemplo 4.10 Se $\{a_n\} = \left\{-4, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{n-5}{n}\right\}$ então $\{-a_n\} = \left\{4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{8}, \dots, \frac{5-n}{n}\right\}$. Em particular, observe que $\frac{n-5}{n} = 1 - \frac{5}{n}$ e $\frac{5-n}{n} = \frac{5}{n} - 1$, assim, para n suficientemente grande, temos: $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 1$ e $\lim_{n\to\infty}\{-a_n\} = -1$, ou seja, como a sequência $\{a_n\}$ é convergente, sua oposta também é, além disso, seus limites são opostos. A próxima proposição tratará desse tema.

Proposição 4.5 Se $\{a_n\} \in S$, então $\{-a_n\} \in S$, além disso, se $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$, então $\lim_{n\to\infty}\{-a_n\} = -L$.

Demonstração.

Como $\{a_n\} \in S$, segue que para todo k, existe n_0 tal que $n, m \geq n_0$ implica $|a_n - a_m| < \frac{1}{k}$. Ora, $|-a_n - (-a_m)| = |a_m - a_n| = |a_n - a_m| < \frac{1}{k}$. Isso mostra que $\{-a_n\} \in S$. Semelhante modo, se $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$, então, para todo k, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $|a_n - L| < \frac{1}{k}$. Assim, $|(-a_n) - (-L)| = |L - a_n| = |a_n - L| < \frac{1}{k}$. Isso mostra que $\lim_{n\to\infty}\{-a_n\} = -L$. ■

Definição 4.6 Uma sequência $\{a_n\}$ de Cauchy de números racionais é **positiva** ($\{a_n\} > 0$) quando existem k, n_0, tais que $n \geq n_0$ implica $a_n \geq \frac{1}{k}$. Uma sequência de Cauchy de números racionais é **negativa** ($\{a_n\} < 0$) quando existem k, n_0 tais que $n \geq n_0$ implica $a_n \leq -\frac{1}{k}$, isto é, $(-a_n) \geq \frac{1}{k}$. Dito de outro modo, uma sequência é positiva quando seus termos, para n suficientemente grande, se distanciam de zero pela direita em relação à reta dos racionais. Uma sequência é negativa quando seus termos, para n suficientemente grande, se distanciam de zero pela esquerda em relação à reta dos racionais.

Exemplo 4.11 Por um lado, no exemplo 4.10, a sequência $\{a_n\}$ é positiva, pois para $n \geq 6$, temos $0 < a_n \leq 1$. Note que $\{a_n\}$ admite alguns termos negativos e que seu limite é igual a 1.

Por outro lado, a sequência $\{-a_n\}$ é negativa, pois para $n \geq 6$, temos $-1 \leq a_n < 0$. Note que $\{-a_n\}$ admite alguns termos positivos e que seu limite é igual a -1.

Exemplo 4.12 A sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{\frac{n}{10}+1}{n}$ é uma sequência que só admite termos positivos. Como $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \frac{1}{10}$, concluímos que $\{a_n\}$ é positiva, pois, para todo n, $0 < a_n \leq \frac{1}{10}$.

Exemplo 4.13 A sequência $\{b_n\}$ tal que $b_n = -\frac{5n+1}{n}$ é uma sequência que só admite termos negativos. Como $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = -5$, concluímos que $\{b_n\}$ é negativa, pois, para todo n, $-5 \leq b_n < 0$.

Será que existem sequências de Cauchy não nulas que não sejam positivas nem negativas? A proposição 4.6 nos diz que não.

Lema 4.1 Seja $\{a_n\} \in S$ uma sequência não nula. Assim, existem k, n_0 tais que $|a_n| \geq \frac{1}{k}$ para todo $n \geq n_0$.

Demonstração.

Suponha o contrário, isto é, que para todo k, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implique $|a_n| < \frac{1}{k}$. Isso mostra que $\{a_n\}$ é uma sequência nula, contrariando nossa hipótese. ■

Proposição 4.6 Se $\{a_n\} \in S$, então ou $\{a_n\}$ é nula ou $\{a_n\}$ é positiva ou $\{a_n\}$ é negativa.

Demonstração.

É claro que as alternativas são mutuamente exclusivas, isto é, ocorrendo uma delas as outras duas não podem ocorrer. Mostraremos que necessariamente uma delas ocorre. Dada uma sequência $\{a_n\} \in S$ ela pode convergir para zero ou não. Suponha que $\{a_n\}$ seja não nula, assim, pelo lema 4.1, existem k, n_0, tais que $n \geq n_0$ implica $|a_n| \geq \frac{1}{k}$. Suponha que existam n, m suficientemente grandes tais que $a_n \geq \frac{1}{2k}$ e $(a_m) \leq \frac{1}{2k}$. Assim, $a_n - a_m > \frac{1}{k}$, contradizendo o fato de $\{a_n\} \in S$. Isso mostra que, a partir de certo momento, todos os termos da sequência são maiores do que zero (sequência positiva) ou todos os termos da sequência são menores do que zero (sequência negativa). ■

Exemplo 4.14 Ver exemplo 4.10.

Exemplo 4.15 Não confunda. Ao falarmos em sequências positivas ou negativas, não estamos olhando simplesmente para o sinal algébrico de seus termos. Por exemplo, a sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{1}{n}$ não admite termos negativos. No entanto, como já vimos, essa sequência é nula, pois seus termos aproximam-se de zero para n suficientemente grande.

Definição 4.7 Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ são sequências de números racionais, definimos $\{a_n\}$ + $\{b_n\}$ como a sequência $\{a_n + b_n\}$, isto é, a sequência cujo enésimo termo é $a_n + b_n$. Definimos $\{a_n\}.\{b_n\}$ como a sequência $\{a_n.b_n\}$, isto é, a sequência cujo enésimo termo é $a_n.b_n$.

Exemplo 4.16 Dadas as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $a_n = \frac{n+1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, segue que $\{a_n\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}\right\}$ e $\{b_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$. Assim, $\{a_n\}$ + $\{b_n\} = \{a_n + b_n\} =$ $\left\{3, 2, \frac{5}{3}, \dots, \frac{n+2}{n}\right\} =$ e $\{a_n\}.\{b_n\} = \{a_n.b_n\} = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n+1}{n^2}\right\}$.

Note que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 1$, $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\{a_n + b_n\} = 1$ e $\lim_{n\to\infty}\{a_n.b_n\} = 0$.

Proposição 4.7 Se $\{a_n\}, \{b_n\}$ são sequências positivas, então: $\{a_n\} + \{b_n\}$ e $\{a_n\}.\{b_n\}$ também são sequências positivas.

Demonstração.

Como $\{a_n\}, \{b_n\}$ são sequências positivas, segue que existem k, n_0, tais que para todo $n \geq n_0$, $a_n, b_n \geq \frac{1}{k}$. Assim, para n suficientemente grande, $(a_n + b_n) \geq \frac{1}{2k}$ e $(a_n.b_n) \geq \frac{1}{k^2}$. ■

Proposição 4.8 O conjunto S é fechado em relação à soma, multiplicação e multiplicação por escalar, isto é:

a) Se $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in S$, então $\{a_n + b_n\} \in S$.

b) Se $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in S$, então $\{a_n.b_n\} \in S$.

c) Se $\{a_n\} \in S$ e $c \in \mathbb{Q}$, então $\{c.a_n\} \in S$.

Demonstração.

Para todo k, existe n_0 tal que n, $m \geq n_0$ implica $|a_n - a_m| < \frac{1}{2k}, |b_n - b_m| < \frac{1}{2k}$.

a) $|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \leq |(a_n - a_m)| + |(b_n - b_m)| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$.

b) Por um lado, pela proposição 4.4, existem A, $B \in \mathbb{Q}$ tais que $|a_n| < A$ e $|b_n| < B$. Por outro lado, para todo k, existe n_0 tal que n, $m \geq n_0$ implica $|a_n - a_m| < \frac{1}{(A+B)k}, |b_n - b_m| < \frac{1}{(A+B)k}$, assim:

$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| = |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \leq$ $|a_n(b_n - b_m)| + |b_m(a_n - a_m)| = |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m| < \frac{A}{k(A+B)} + \frac{B}{k(A+B)} = \frac{1}{k}$.

c) Se $c = 0$, não há o que mostrar. Suponha, então $c \neq 0$. Assim, para todo k, existe n_0 tal que $n, m \geq n_0$ implica $|a_n - a_m| < \frac{1}{|c|k}$. Logo,

$|ca_n - ca_m| = |c|.|a_n - a_m| < \frac{1}{k.|c|}.\frac{|c|}{1} = \frac{1}{k}$ ■

Definimos convergência de sequências para números racionais, em particular, quando convergem para zero.

Proposição 4.9 Se $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$ e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = M$, então $\lim_{n\to\infty}\{a_n + b_n\} = L + M$ e $\lim_{n\to\infty}\{a_n.b_n\} = L.M$.

Demonstração.

i) Se $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$ e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = M$, então para todo k, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $|a_n - L| < \frac{1}{2k}, |b_n - M| < \frac{1}{2k}$. Assim,

$$|(a_n + b_n) - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

ii) Por um lado, pela proposição 4.4, existem A, $M \in \mathbb{Q}$ tais que $|a_n| < A$ e $|b_n| < M$. Por outro lado, para todo k, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $|a_n - L| < \frac{1}{(A+|M|)k}, |b_n - M| < \frac{1}{(A+|M|)k}$. Assim,

$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - a_n M + a_n M - LM| \leq |a_n|.|b_n - M| + |M|.|a_n - L| < \frac{A}{(A+|M|)k} + \frac{|M|}{(A+|M|)k} = \frac{1}{k}$. ■

Exemplo 4.17 Ver exemplo 4.16.

Já mostramos que o limite é único, no entanto, podemos ter sequências distintas convergindo para o mesmo racional L. Como exemplo, sejam $\{a_n\}, \{1\} \in S$ onde $a_n = \frac{n+1}{n}$. Assim, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{1\} = 1$.

Definição 4.8 Dizemos que $\{a_n\}$ é equivalente à $\{b_n\}$ e escrevemos $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ quando $\{a_n - b_n\}$ converge para o número racional 0, isto é, quando as sequências convergem para o mesmo limite.

Exemplo 4.18 Dadas as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $a_n = \frac{2n+3}{n}$ e $b_n = 2$, temos que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 2$ e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 2$, logo $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. Por isso, o $\lim_{n\to\infty}\{a_n - b_n\} =$ lim$n\to\infty 2n+3n-2=$lim$n\to\infty 3n=0$.

Exemplo 4.19 Dadas as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $a_n = \frac{n+1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, segue que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 1$ e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 0$, logo, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ não são equivalentes.

Proposição 4.10 A relação ~ é uma relação de equivalência em S.

Demonstração.

i) (Reflexividade) Se $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$, então $\{a_n\} \sim \{a_n\}$.

ii) (Simetria) Se $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, então $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{b_n\} = L$, logo, $\{b_n\} \sim \{a_n\}$.

iii) (Transitividade) Se $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, então $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{b_n\} = L$, se $\{b_n\} \sim \{c_n\}$, então $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = \lim_{n\to\infty}\{c_n\} = L$, logo, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{c_n\} = L$, ou seja, $\{a_n\} \sim \{c_n\}$. ■

Proposição 4.11 Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, $\{d_n\} \in S$ onde $\{d_n\}$ é uma sequência nula. A soma dessas sequências goza das seguintes propriedades:

i) Associativa: $(\{a_n\} + \{b_n\}) + \{c_n\} = \{a_n + b_n\} + \{c_n\} = \{a_n + b_n + c_n\} = \{a_n + (b_n + c_n)\} = \{a_n\} + \{b_n + c_n\} = \{a_n\} + (\{b_n\} + \{c_n\})$;

ii) Comutativa: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} = \{b_n + a_n\} = \{b_n\} + \{a_n\}$;

iii) Elemento neutro: para n suficientemente grande, temos $\{a_n\} + \{d_n\} = \{a_n + d_n\} = \{a_n\}$;

iv) Elemento oposto $\{a_n\} + (-\{a_n\}) = \{a_n - a_n\} = \{0\}$. ■

Lembre que a sequência $\{0\}$ é uma sequência nula onde todos os seus termos são iguais a 0.

Proposição 4.12 (Lei do corte na adição). Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S$. Dessa forma, $\{a_n\} + \{b_n\} = \{c_n\} + \{b_n\}$ se, e somente se, $\{a_n\} = \{c_n\}$.

Demonstração.

$\{a_n\} + \{b_n\} = \{c_n\} + \{b_n\} \Leftrightarrow \{a_n + b_n\} = \{c_n + b_n\} \Leftrightarrow a_n + b_n = c_n + b_n \Leftrightarrow a_n = c_n \Leftrightarrow \{a_n\} = \{c_n\}$. ■

Proposição 4.13 Suponha que $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S$.

a) Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergem para 0, então $\{a_n + b_n\}$ converge para 0.

Demonstração.

Como $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergem para 0, segue que para todo k, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $|a_n| < \frac{1}{2k}$ e $|b_n| < \frac{1}{2k}$. Assim, $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$. ■

b) Se $\{a_n\}$ converge para 0, então $\{a_n . c_n\}$ converge para 0.

Demonstração.

Por um lado, de acordo com a proposição 4.4, existe $A \in \mathbb{Q}$ tal que $|c_n| < A$. Por outro lado, segue que para todo k, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $|a_n| < \frac{1}{Ak}$. Assim, $|c_n a_n| \leq |c_n|.|a_n| < A.\frac{1}{Ak} = \frac{1}{k}$. ■

Definição 4.9 Seja $\{a_n\} \in S$ uma sequência não nula. Como vimos na proposição 4.6, a partir de certo momento, os termos da sequência passam a ser todos positivos ou passam a ser todos negativos, isto é, para n suficientemente grande ($n \geq n_0$), os termos de $\{a_n\}$ se distanciam de zero. Definimos o inverso multiplicativo de $\{a_n\}$ como sendo a sequência $\{a_n{}^{-1}\}$. Construímos a sequência $\{a_n{}^{-1}\}$ do seguinte modo: para $n < n_0$, os termos da sequência são todos iguais a 1; para $n \geq n_0$, os termos da sequência são iguais a $a_n{}^{-1}$, isto é, são iguais ao inverso de a_n.

Exemplo 4.20 Dada a sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{3-n}{n}$, temos que: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{4}$, ..., $a_{1000} = -\frac{997}{1000} = -0{,}997$. Note que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = -1$. Assim, $\{a_n\}$ é uma sequência negativa, logo, admite inversa. Observe que, para $n \geq 4$, os termos de $\{a_n\}$ se distanciam de zero. Assim, a inversa de $\{a_n\}$, será construída do seguinte modo: para $n < 4$, $a_n{}^{-1} = 1$; para $n \geq 4$, $a_n{}^{-1} = \frac{1}{a_n} = \frac{n}{3-n}$. Dessa forma, a sequência $\{a_n{}^{-1}\}$ terá os seguintes termos:

$a_1{}^{-1} = 1$, $a_2{}^{-1} = 1$, $a_3{}^{-1} = 1$, $a_4{}^{-1} = -4$, ..., $a_{1000}{}^{-1} = -\frac{1000}{997} \cong -1{,}003$, ..., $a_n{}^{-1} = \frac{n}{3-n}$. Note que $\lim_{n\to\infty}\{a_n{}^{-1}\} = -1$. Pela proposição 3.9, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}.\{a_n{}^{-1}\} = (-1).(-1) = 1$, isto é, a sequência $\{a_n\}.\{a_n{}^{-1}\}$ converge para 1.

Exemplo 4.21 Dada a sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{2n-4}{n}$, temos que: $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = 1$, ..., $a_{1000} = \frac{1996}{1000} = 1{,}996$. Note que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 2$. Assim, $\{a_n\}$ é uma sequência positiva, logo, admite inversa. Observe que, para $n \geq 3$, os termos de $\{a_n\}$ se distanciam de zero. Assim, a inversa de $\{a_n\}$, será construída do seguinte modo: para $n < 3$, $a_n{}^{-1} = 1$; para $n \geq 3$, $a_n{}^{-1} = \frac{1}{a_n} = \frac{n}{2n-4}$. Dessa forma, a sequência $\{a_n{}^{-1}\}$ terá os seguintes termos:

$a_1{}^{-1} = 1$, $a_2{}^{-1} = 1$, $a_3{}^{-1} = \frac{3}{2}$, $a_4{}^{-1} = 1$, ..., $a_{1000}{}^{-1} = \frac{1000}{1996} \cong 0{,}501$, ..., $a_n{}^{-1} = \frac{n}{2n-4}$. Note que $\lim_{n\to\infty}\{a_n{}^{-1}\} = \frac{1}{2}$. Pela proposição 3.9, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}.\{a_n{}^{-1}\} = (2).\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, isto é, a sequência $\{a_n\}.\{a_n{}^{-1}\}$, também, converge para 1.

Proposição 4.14 Se $\{a_n\} \in S$ é uma sequência não nula, então $\{{a_n}^{-1}\}$ também $\in S$. Além disso, se $\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = L$, então o $\lim_{n\to\infty} \{{a_n}^{-1}\} = \frac{1}{L}$.

Demonstração.

$\{a_n\}$ é não nula, logo existe n_0 e $A \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_n| \geq A$ para todo $n \geq n_0$. Se $\{a_n\} \in S$, então, para todo k, existe n_0 tal que $n,\ m \geq n_0$ implica $|a_n - a_m| < \frac{A^2}{k}$. Assim, $|{a_n}^{-1} -$ *am−1=an−am.1an.|am|<A2k.1A2=1k.* Analogamente, mostra-se que $\lim_{n\to\infty}\{{a_n}^{-1}\} = \frac{1}{L}$.

■

Proposição 4.15 Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\} \in S$ onde $\{d_n\}$ é qualquer sequência cujo limite é igual a 1. O produto dessas sequências goza das seguintes propriedades:

i) Associativa $(\{a_n\}.\{b_n\}).\{c_n\} = \{a_n.b_n\}.\{c_n\} = \{a_n.b_n.c_n\} = \{a_n.(b_n.c_n)\} =$
$\{a_n\}.\{b_n.c_n\} = \{a_n\}.(\{b_n\}.\{c_n\})$;

ii) Comutativa $\{a_n\}.\{b_n\} = \{a_n.b_n\} = \{b_n.a_n\} = \{b_n\}.\{a_n\}$;

iii) Elemento neutro: para *n* suficientemente grande, temos $\{a_n\}.\{d_n\} = \{a_n.d_n\} = \{a_n\}$;

iv) Elemento inverso: para *n* suficientemente grande, temos $\{a_n\}.\{{a_n}^{-1}\} = \left\{a_n.\frac{1}{a_n}\right\} = \{1\}$.

■

Lembre que a sequência $\{1\}$ é uma sequência constante onde todos os seus termos são iguais a 1 e que, naturalmente, converge para 1.

Proposição 4.16 (Lei do corte na multiplicação). Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S$ onde $\{b_n\}$ é não nula. Assim, $\{a_n\}.\{b_n\} = \{c_n\}.\{b_n\}$ se, e somente se, $\{a_n\} = \{c_n\}$.

Demonstração.

Para *n* suficientemente grande, temos:

$\{a_n\}.\{b_n\} = \{c_n\}.\{b_n\} \Leftrightarrow \{a_n.b_n\} = \{c_n.b_n\} \Leftrightarrow a_n.b_n = c_n.b_n \Leftrightarrow a_n = c_n \Leftrightarrow \{a_n\} = \{c_n\}$.

■

Proposição 4.17 As regras de sinais na multiplicação de sequências são as mesmas em $\mathbb{Q}$.

Demonstração.

Sejam $\{a_n\},\ \{b_n\} \in S$, assim:

i) $\{-a_n\}.\{b_n\} = \{(-a_n).b_n\} = \{-(a_n.b_n)\} = -\{a_n.b_n\} = -\{a_n\}.\{b_n\}$;

ii) $\{-a_n\}.\{-b_n\} = \{(-a_n).(-b_n)\} = \{a_n.b_n\} = \{a_n\}.\{b_n\}$.

Proposição 4.18 Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S$. Assim, existe a distributividade da multiplicação em relação à adição de sequências.

Demonstração.

i) $\{a_n\}.(\{b_n\} + \{c_n\}) = \{a_n\}\{b_n + c_n\} = \{a_n.b_n + a_n.c_n\} = \{a_n.b_n\} + \{a_n.c_n\} = \{a_n\}.\{b_n\} + \{a_n\}.\{c_n\}$;

ii) $\{a_n\}.(\{b_n\} + \{-c_n\}) = \{a_n\}.(\{b_n\} - \{c_n\}) = \{a_n\}.\{b_n - c_n\} = \{a_n(b_n - c_n)\} = \{a_n.b_n - a_n.c_n\} = \{a_n.b_n\} - \{a_n.c_n\} = \{a_n\}.\{b_n\} - \{a_n\}.\{c_n\}$;

iii) $\{a_n\}.(\{-b_n\} + \{-c_n\}) = \{a_n\}.(\{-b_n\} - \{c_n\}) = \{a_n\}.\{-b_n - c_n\} = \{a_n(-b_n - c_n)\} = \{-a_n.b_n - a_n.c_n\} = \{-a_n.b_n\} - \{a_n.c_n\} = -\{a_n\}.\{b_n\} - \{a_n\}.\{c_n\}$;

iv) $\{-a_n\}.(\{b_n\} + \{c_n\}) = \{-a_n\}\{b_n + c_n\} = \{(-a_n).(b_n + c_n)\} = \{-a_n.b_n - a_n.c_n\} = \{-a_n.b_n\} - \{a_n.c_n\} = -\{a_n\}.\{b_n\} - \{a_n\}.\{c_n\}$;

v) $\{-a_n\}.(\{b_n\} + \{-c_n\}) = \{-a_n\}.(\{b_n\} - \{c_n\}) = \{-a_n\}.\{b_n - c_n\} = \{(-a_n).(b_n -$
cn=−an.bn+an.cn=−an.bn+an.cn=−an.bn+an}.{cn;

vi) $\{-a_n\}.(\{-b_n\} + \{-c_n\}) = \{-a_n\}.(\{-b_n\} - \{c_n\}) = \{-a_n\}.\{-b_n - c_n\} = \{(-a_n).(-b_n - c_n)\} = \{a_n.b_n + a_n.c_n\} = \{a_n.b_n\} + \{a_n.c_n\} = \{a_n\}.\{b_n\} + \{a_n\}.\{c_n\}$.

■

Definição 4.10 Definimos o conjunto $\mathbb{R}$ de números reais como sendo o conjunto das classes de equivalência das sequências de Cauchy de números racionais pela relação ~ . Duas sequências de Cauchy representam o mesmo número real quando são equivalentes, isto é, quando sua diferença converge para zero, ou seja, quando têm o mesmo limite. Seja $\{a_n\} \in S$ tal que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}$ = α, indicaremos por $[\{a_n\}]$ a classe de equivalência pela relação ~ representada por $\{a_n\}$, isto é, $[\{a_n\}] = \big\{\{x_n\} \in S \mid \{x_n\} \sim \{a_n\}\big\}$. Assim, $[\{a_n\}] \in \mathbb{R}$. Para facilitar a escrita, usaremos letras minúsculas gregas, latinas ou números, em negrito, para representar um número real enquanto o mesmo símbolo, sem negrito, representa seu limite. Por exemplo, **α** = $[\{a_n\}]$, visto que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}$ = α.

Exemplo 4.22 A classe **0** consiste de elementos de S que convergem para zero, ele será o elemento neutro aditivo em $\mathbb{R}$. A classe **1** consiste de elementos de S que convergem para o número racional 1, ele será o elemento neutro multiplicativo em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.23 Dadas as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $a_n = \frac{\alpha n+M}{n}$ e $b_n =$ α, temos: $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}$ = α e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\}$ = α. Como $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, segue que o número real **α** pode ser representado por ambas as sequências.

Definição 4.11 O número real $\boldsymbol{\alpha}$ é **positivo** ($\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$) se para cada sequência $\{a_n\} \in \boldsymbol{\alpha}$ existe k, n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $a_n \geq \frac{1}{k}$. O número real $\boldsymbol{\alpha}$ é **negativo** ($\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}$) se $-\boldsymbol{\alpha}$ é positivo onde $-\boldsymbol{\alpha} = [\{-a_n\}$, com $\{a_n\} \in \boldsymbol{\alpha}]$. O número real $\boldsymbol{\alpha}$ é **nulo** ou **igual a zero** ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$) se para cada sequência $\{a_n\} \in \boldsymbol{\alpha}$ e para todo k, existe n_0, tal que $n \geq n_0$ implica $|a_n| < \frac{1}{k}$.

Mostraremos, no próximo lema, que se uma dada sequência em $\boldsymbol{\alpha}$ for positiva, então todas as outras sequências em $\boldsymbol{\alpha}$ também serão. Semelhante modo, se uma dada sequência em $\boldsymbol{\alpha}$ for negativa ou nula, então todas as outras sequências em $\boldsymbol{\alpha}$ também serão.

Lema 4.2 (Lei da tricotomia em $\mathbb{R}$) Todas as sequências em $\boldsymbol{\alpha}$ ou são todas nulas ou são todas positivas ou são todas negativas.

Demonstração.

Sejam $\{a_n\}, \{b_n\} \in \boldsymbol{\alpha}$ onde $\{a_n\}$ é uma sequência não nula. Note que, de acordo com a definição 4.10, a sequência $\{b_n\}$ também é não nula, pois, caso contrário, elas teriam limites diferentes, mas $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.

i) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\} \in \boldsymbol{\alpha}$ onde $\{a_n\}$ é uma sequência positiva, isto é, existem k, n_0 tais que para todo $n \geq n_0$, temos $a_n \geq \frac{1}{k}$. Como $\{a_n\}, \{b_n\} \in \boldsymbol{\alpha}$, seque que sua diferença converge para zero, assim: $|a_n - b_n| < \frac{1}{k}$ para todo k e n suficientemente grande. Dessa forma, temos: $b_n - \frac{1}{k} < a_n < b_n + \frac{1}{k}$. Como $\frac{1}{k} \leq a_n < b_n + \frac{1}{k}$, segue que $b_n > 0$ para n suficientemente grande. Isso mostra que $\{b_n\}$ também é uma sequência positiva.

ii) Suponha agora que $\{a_n\}$ seja uma sequência negativa. Neste caso, existem k, n_0 tais que para todo $n \geq n_0$, temos $(-a_n) \geq \frac{1}{k}$, isto é, $a_n \leq -\frac{1}{k}$. Como $\{a_n\}, \{b_n\} \in \boldsymbol{\alpha}$, seque que sua diferença converge para zero, assim: $|a_n - b_n| < \frac{1}{k}$ para todo k e n suficientemente grande. Dessa forma, temos: $b_n - \frac{1}{k} < a_n < b_n + \frac{1}{k}$. Como $b_n - \frac{1}{k} < a_n \leq -\frac{1}{k}$, segue que $b_n < 0$. Isso mostra que $\{b_n\}$ também é uma sequência negativa.

iii) Finalmente, suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência nula. Como $\{a_n\}, \{b_n\} \in \boldsymbol{\alpha}$, segue que $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, isto é, elas têm o mesmo limite, logo, $\{b_n\}$ também é uma sequência nula. ■

Assim,

i) se uma dada sequência em **α** for positiva, segue que **α** é **positivo** (**α** > **0**);
ii) se uma dada sequência em **α** for negativa, segue que **α** é **negativo** (**α** < **0**);
iii) se uma dada sequência em **α** for nula, segue que **α** é **nulo** ou **igual a zero** (**α** = **0**).

Exemplo 4.24 A sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{n-4}{n}$ tem limite igual a 1. Como a sequência constante $\{b_n\} = \{1\}$ também tem limite igual a 1, segue que $\{a_n\}$ ~ $\{b_n\}$. Assim, ambas as sequências pertencem ao número real **1**, ou seja, o número real **1** pode ser representado tanto por $\{a_n\}$ como por $\{b_n\}$. Além disso, como essas sequências são positivas, segue que o número **1** é **positivo**.

Exemplo 4.25 A sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{10-n}{n}$ tem limite igual a -1. Como a sequência constante $\{b_n\} = \{-1\}$ também tem limite igual a -1, segue que $\{a_n\}$ ~ $\{b_n\}$. Assim, ambas as sequências pertencem ao número real $\mathbf{-1}$. Além disso, como essas sequências são negativas, segue que o número $\mathbf{-1}$ é **negativo**.

Dessa forma, provamos a **tricotomia** em $\mathbb{R}$. A seguir, definiremos as operações algébricas em $\mathbb{R}$. Escreveremos $[\{a_n\}]$ para representar o conjunto cujos elementos são todos equivalentes à $\{a_n\}$, isto é, $[\{a_n\}]$ é a classe de equivalência contendo $\{a_n\}$.

Definição 4.12 Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sequências contidas nos números reais **α**, **β** respectivamente. A **soma** e o **produto** de **α** e **β** são definidas por **α + β** = $[\{a_n + b_n\}]$ e **αβ** = $[\{a_n . b_n\}]$. Para a nossa definição ser válida, precisamos mostrar que os resultados não dependem dos elementos que escolhemos dentre as classes.

Lema 4.3 A adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$ estão bem definidas. Demonstração.

Sejam $\{a_n\}$, $\{a'_n\} \in$ **α** e $\{b_n\}$, $\{b'_n\} \in$ **β**, devemos mostrar que $\{a_n + b_n\}$ ~ $\{a'_n + b'_n\}$ e $\{a_n . b_n\}$ ~ $\{a'_n . b'_n\}$, para isso, precisamos mostrar que $\{a_n + b_n\} - \{a'_n + b'_n\}$ e $\{a_n . b_n\} - \{a'_n . b'_n\}$ convergem para zero.

i) Como $\{a_n\}$, $\{a'_n\} \in$ **α**, segue que $\{a_n\}$ ~ $\{a'_n\}$. Assim, para todo *k*, existe *n* suficientemente grande tal que $|a_n - a'_n| < \frac{1}{2k}$. Semelhante modo, como $\{b_n\}$, $\{b'_n\} \in$ **β**, temos $\{b_n\}$ ~ $\{b'_n\}$. Assim, para todo *k* , existe *n* suficientemente grande tal que $|b_n - b'_n| < \frac{1}{2k}$. Portanto,

$$|(a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)| \leq |a_n - a'_n| + |b_n - b'_n| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

(ii) Pela proposição 4.4, $\{a_n\}$ e $\{b'_n\}$ são limitadas, logo existem *A*, *B* ∈ $\mathbb{Q}$ tais que $|a_n| < A$ e $|b'_n| < B$. Como $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ ∈ **α**, segue que $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$. Assim, para todo *k*, existem *n* suficientemente grande e $A \in \mathbb{Q}$ tais que $|a_n - a'_n| < \frac{1}{(A+B)k}$. Semelhante modo, como $\{b_n\}$, $\{b'_n\}$ ∈ **β**, temos $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$. Assim, para todo *k*, existem *n* suficientemente grande e $B \in \mathbb{Q}$ tais que $|b_n - b'_n| < \frac{1}{(A+B)k}$. Portanto,

$$|a_n b_n - a'_n b'_n| = |a_n b_n - a_n b'_n + a_n b'_n - a'_n b'_n| = |a_n(b_n - b'_n) + b'_n(a_n - a'_n)| \leq |a_n(b_n - b'_n)| + |b'_n(a_n - a'_n)| \leq |a_n|.|(b_n - b'_n)| + |b'_n|.|(a_n - a'_n)| < \frac{A}{(A+B)k} + \frac{B}{(A+B)k} = \frac{1}{k}.$$ ■

Note que já definimos: zero, um, positivo, negativo, soma e produto.

Exemplo 4.26 Calculemos a soma e o produto dos números reais **2** e **5**. O números reais **2**, **5**,**7** e **10** podem ser representados, respectivamente, pelas sequências constantes {2}, {5}, {7} e {10}. Assim:

i) **2** + **5 = [**{2 + 5}] = [{7}] = **7**;

ii) **2**.**5** = [{2.5}] = [{10}] = **10**.

Lema 4.4 O conjunto ℝ é fechado em relação à adição e à multiplicação.

Demonstração.

Como o conjunto *S* é fechado em relação à adição e à multiplicação, o resultado segue. ■

Definição 4.13 Definimos como **inverso aditivo** de **α**, o número real – **α** = [$\{-a_n\}$,] onde $\{a_n\}$, é um elemento qualquer de **α**. Esta definição é válida, pois se $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ ∈ **α**, então $\{a_n - a'_n\}$ ∈ **0**. Assim, $\{-a_n\} - \{-a'_n\} = \{-a_n - (-a'_n)\} = \{a'_n - a_n\}$, logo, $\{-a_n\} \sim \{-a'_n\}$. Isto nos diz que – **α** também é uma classe de equivalência. Seja **β** um número real diferente de zero e $\{b_n\}$ ∈ **β**. Pela proposição 3.6, para valores de *n* suficientemente grandes, cada elemento de $\{b_n\}$ é diferente de zero. Definimos como **inverso multiplicativo** de **β**, o número real $\boldsymbol{\beta}^{-1}$ = [$\{b_n{}^{-1}\}$]. Esta definição também é válida. De fato, se $\{b_n\}$, $\{b'_n\}$ ∈ **β**, segue que $\{b_n - b'_n\}$ converge para zero. Queremos mostrar que $\{b_n{}^{-1}\}$ ~ $\{b'_n{}^{-1}\}$. Para isso, basta ver que $\{b_n{}^{-1}\} - \{b'_n{}^{-1}\}$ ∈ **0**. De fato, para valores de *n* suficientemente grandes, $\{b_n{}^{-1}\} - \{b'_n{}^{-1}\} = \{b_n{}^{-1} - b'_n{}^{-1}\} = \left\{\frac{b'_n - b_n}{b_n . b'_n}\right\} \in \mathbf{0}$.

Observação 4.2 O número real **0** não tem inverso multiplicativo, pois, de acordo com a proposição 4.13, o produto de uma dada sequência por uma sequência nula é igual a uma sequência nula.

Exemplo 4.27 A definição 4.5, a proposição 4.5 e o exemplo 4.10 falam sobre o inverso aditivo de uma dada sequência. Assim, para encontrar o inverso aditivo de um número real **α**, basta determinar o inverso aditivo de uma sequência qualquer em **α**.

Exemplo 4.28 A definição 4.9, a proposição 4.14 e o exemplo 4.21 falam sobre o inverso multiplicativo de uma dada sequência. Assim, para encontrar o inverso multiplicativo de um número real **α**, basta determinar o inverso multiplicativo de uma sequência qualquer em **α**.

Lema 4.5 A adição em ℝ é comutativa, associativa, tem elemento oposto e elemento neutro.

Demonstração.

Sejam **α**, **β**, **γ** ∈ ℝ. Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$, $\{c_n\}$ ∈ **α**, **β**, **γ** respectivamente. De acordo com a definição 4.12, somar números reais implica somar seus representantes. Pela proposição 4.11, a soma de sequências é comutativa, associativa, tem elemento oposto e elemento neutro, logo:

i) **α** + **β** = $[\{a_n\} + \{b_n\}] = [\{b_n\} + \{a_n\}]$ = **β** + **α**;

ii) (**α** + **β**) + **γ** = $[(\{a_n\} + \{b_n\}) + \{c_n\}] = [\ \{a_n\} + (\{b_n + c_n\})]$ = **α** + (**β** + **γ**);

iii) **α** + (−**α**) = $[\{a_n\} + \{-a_n\}] = [\{0\}]$ = **0**;

iv) **α** + **0** = $[\{a_n\} + \{0\}] = [\{a_n\}]$ = **α**. ■

Lema 4.6 Na adição, o elemento neutro e oposto são únicos.

Demonstração.

i) Suponha que $\mathbf{0_1}$ e $\mathbf{0_2}$ sejam elementos neutros em ℝ. Assim, $\mathbf{0_1} = \mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} = \mathbf{0_2}$.

ii) Suponha que **α**' e **α**'' sejam os inversos aditivos de **α** em ℝ. Assim, **α**' = **α**' + **0** = **α**' + (**α** + **α**'') = (**α**' + **α**) + **α**'' = **0** + **α**'' = **α**''. ■

Lema 4.7 (Lei do corte na adição) Sejam $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$. Assim, $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}$ se, e somente se, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$.

Demonstração.

Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ respectivamente. Assim,

$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow [\{a_n\} + \{b_n\}] = [\{c_n\} + \{b_n\}] \Leftrightarrow (\{a_n\} + \{b_n\}) \sim (\{c_n\} + \{b_n\}) \Leftrightarrow \{(a_n + b_n) - (c_n + b_n)\} \in \mathbf{0} \Leftrightarrow \{a_n - c_n\} \in \mathbf{0} \Leftrightarrow \{a_n\} \sim \{c_n\} \Leftrightarrow [\{a_n\}] = [\{c_n\}] \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$.

■

Lema 4.8 A multiplicação em $\mathbb{R}$ é comutativa, associativa, tem elemento inverso e elemento neutro.

Demonstração.

Sejam $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$ com $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ respectivamente. De acordo com a definição 4.12, multiplicar números reais implica multiplicar seus representantes. Pela proposição 4.15, a multiplicação de sequências é comutativa, associativa, tem elemento inverso e elemento neutro, logo:

i) $\boldsymbol{\alpha\beta} = [\{a_n\}.\{b_n\}] = [\{b_n\}.\{a_n\}] = \boldsymbol{\beta\alpha}$;

ii) $(\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{\gamma} = [(\{a_n\}.\{b_n\})\{c_n\}] = [\{a_n\}(\{b_n\}.\{c_n\})] = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta\gamma})$;

iii) $\boldsymbol{\alpha\alpha^{-1}} = [\{a_n\}.\{a_n{}^{-1}\}] = [\{1\}] = \mathbf{1}$;

iv) $\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{1} = [\{a_n\}.\{1\}] = [\{a_n\}] = \boldsymbol{\alpha}$. ■

Lema 4.9 (Regra de sinais da multiplicação) Em $\mathbb{R}$, valem as mesmas regras de sinais de $\mathbb{Q}$.

Demonstração.

Sejam $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$. Sejam $\{a_n\}, \{b_n\} \in \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ respectivamente. Pela proposição 4.17, temos: $\{-a_n\}.\{b_n\} = -\{a_n\}.\{b_n\}$ e $\{-a_n\}.\{-b_n\} = \{a_n\}.\{b_n\}$. Assim,

i) $(-\boldsymbol{\alpha}).\boldsymbol{\beta} = [\{-a_n\}].[\{b_n\}] = [\{-a_n\}.\{b_n\}] = [-(\{a_n\}.\{b_n\})] = -[\{a_n\}.\{b_n\}] = -[\{a_n\}].[\{b_n\}] = -(\boldsymbol{\alpha\beta})$;

ii) $(-\boldsymbol{\alpha}).(-\boldsymbol{\beta}) = [\{-a_n\}].[\{-b_n\}] = [\{-a_n\}.\{-b_n\}] = [(\{a_n\}.\{b_n\})] = [\{a_n\}.\{b_n\}] = [\{a_n\}].[\{b_n\}] = (\boldsymbol{\alpha\beta})$. ■

Lema 4.10 (Lei do corte na multiplicação) Sejam $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$ com $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. Assim, $\boldsymbol{\alpha\beta} = \boldsymbol{\gamma\beta}$ se, e somente se, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$.

Demonstração.

Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ respectivamente. Assim,

αβ = **γβ** $\Leftrightarrow$ $[\{a_n\}.\{b_n\}] = [\{c_n\}.\{b_n\}] \Leftrightarrow (\{a_n\}.\{b_n\}) \sim (\{c_n\}.\{b_n\}) \Leftrightarrow \{(a_n b_n) - (c_n b_n)\}$ $\in$ **0** $\Leftrightarrow \{a_n - c_n\} \in$ **0** $\Leftrightarrow \{a_n\} \sim \{c_n\} \Leftrightarrow [\{a_n\}] = [\{c_n\}] \Leftrightarrow$ **α** = **γ**. ■

Lema 4.11 (Lei absorvente da multiplicação) Seja **α** $\in \mathbb{R}$ e $\{a_n\} \in$ **α**, temos: **α.0** = **0**.

Demonstração.

α.0 = [$\{a_n\}].[\{0\}] = [\{a_n.0\}] = [\{0\}] =$ **0**. ■

Lema 4.12 (Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição) Sejam **α**, **β**, **γ** $\in$ $\mathbb{R}$. Assim: **α**.(**β** + **γ**) = **αβ** + **αγ**.

Demonstração.

Sejam $\{a_n\},\{b_n\}$, $\{c_n\}$ $\in$ **α**, **β**, **γ** respectivamente. Consideremos **α**, **β**, **γ** números reais positivos. Pela proposição 4.18, temos:

i) **α**.(**β** + **γ**) = $[\{a_n\}].[\{\, b_n + c_n\}] = [\{a_n.b_n + a_n.c_n\}] = [\{a_n.b_n\} + \{a_n.c_n\}] =$
$[\{a_n.b_n\}] + [\{a_n.c_n\}] = [\{a_n\}].[\{b_n\}] + [\{a_n\}].[\{c_n\}] =$ **αβ** + **αγ**;

ii) **α**.(**β** $-$ **γ**) = $[\{a_n\}].[\{\, b_n + (-c_n\}] = [\{a_n.b_n - a_n.c_n\}] = [\{a_n.b_n\} - \{a_n.c_n\}] =$
$[\{a_n.b_n\}] - [\{a_n.c_n\}] = [\{a_n\}].[\{b_n\}] - [\{a_n\}].[\{c_n\}] =$ **αβ** $-$ **αγ**;

iii) **α**.($-$**β** $-$ **γ**) = $[\{a_n\}].[\{\,(-b_n) + (-c_n\}] = [\{-(a_n.b_n) - a_n.c_n\}] = [-\{a_n.b_n\} -$
an.cn=−an.bn−an.cn=−an.bn−an.cn=− **αβ** $-$ **αγ**;

iv) ($-$ **α**).(**β** + **γ**) = $[\{-a_n\}].[\{\, b_n + c_n\}] = [\{-a_n.b_n - a_n.c_n\}] = [-\{a_n.b_n\} - \{a_n.c_n\}] =$
$[-\{a_n.b_n\}] - [\{a_n.c_n\}] = -[\{a_n\}].[\{b_n\}] - [\{a_n\}].[\{c_n\}] = -$ **αβ** $-$ **αγ**;

v) ($-$**α**).(**β** $-$ **γ**) = $[\{-a_n\}].[\{\, b_n - c_n\}] = [\{-a_n.b_n + a_n.c_n\}] = [-\{a_n.b_n\} + \{a_n.c_n\}] =$
$[-\{a_n.b_n\}] + [\{a_n.c_n\}] = -[\{a_n\}].[\{b_n\}] + [\{a_n\}].[\{c_n\}] = -$ **αβ** + **αγ**;

vi) ($-$ **α**).($-$ **β** $-$ **γ**) = $[\{-a_n\}].[\{-b_n - c_n\}] = [\{a_n.b_n + a_n.c_n\}] = [\{a_n.b_n\} + \{a_n.c_n\}] =$
$[\{a_n.b_n\}] + [\{a_n.c_n\}] = [\{a_n\}].[\{b_n\}] + [\{a_n\}].[\{c_n\}] =$ **αβ** + **αγ**. ■

Teorema 4.1 O conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações + e $\cdot$ ($\mathbb{R}$, +, $\cdot$) é um corpo.

Demonstração. Lemas: **4.4**, **4.5**, **4.8** e **4.12**. ■

Lema 4.13 Seja $P \subset \mathbb{R}$ o conjunto de todos os reais positivos. Se **α**, **β** $\in P$ e $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $\in$ **α**,**β**, respectivamente, então **α** + **β** $\in P$ e **α.β** $\in P$.

Demonstração.

De acordo com a proposição 4.7, a soma e o produto de sequências positivas também são sequências positivas. Como $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências positivas (lema 4.2), segue que:

$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = [\{a_n + b_n\}] \in P$ e $\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\beta} = [\{a_n.b_n\}] \in P$. ■

Teorema 4.2 O corpo ($\mathbb{R}$, +, ·) é ordenado.

Demonstração.

Em relação à definição 2.8, o lema 4.13 mostra a condição P_1 enquanto o lema 4.2 mostra a condição P_2. ■

Definição 4.14 Sejam *x*, *y* elementos de um corpo ordenado (K, +, ·) e P um subconjunto de K que satisfaz as propriedades P_1 e P_2 da definição 2.8. Diz-se que *x* "é menor do que *y*", denotado por $x < y$ quando $y - x \in P$. Diz-se que *x* "é maior do que *y*", denotado por $x > y$ quando $x - y \in P$.

As relações $x < y$ e $x > y$ são as relações de ordem em (K, +, ·).

Proposição 4.19 A relação de ordem $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ em ($\mathbb{R}$, +, ·) goza das seguintes propriedades:

i) (Transitividade) Sejam $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$. Se $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma}$, então $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}$.

Demonstração.

$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}), (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}) \in P \Rightarrow (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}) \in P \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha} \in P \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}$;

ii) (Tricotomia) Dados $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$, tem-se que, exatamente, uma das três alternativas ocorre: ou $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ ou $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ ou $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$.

Demonstração.

Dados dois números reais $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$: ou eles são iguais ou são diferentes. Se forem iguais, não há o que mostrar. Suponha que eles sejam diferentes. Assim, $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ ou $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$. Mostraremos que apenas uma dessas duas opções ocorre. Suponha que $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$, assim:

$(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}), (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \in P \Rightarrow (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \in P \Rightarrow \mathbf{0} \in P$, o que é um absurdo, pois P é o conjunto formado, apenas, pelos reais positivos;

iii) (Monotonicidade da adição) Sejam $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$. Se $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, então $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} < \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$.

Demonstração.

$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \Rightarrow (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) \in P \Rightarrow (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{0} \in P \Rightarrow (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}) \in P \Rightarrow (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) + (-\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma}) \in P \Rightarrow$ $(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}) \in P \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} < \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$;

iv) (Monotonicidade da multiplicação) Sejam $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$. Se $\boldsymbol{\gamma} \in P$ e $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, então $\boldsymbol{\alpha\gamma} < \boldsymbol{\beta\gamma}$. Mas, se $(-\boldsymbol{\gamma}) \in P$ e $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, então $\boldsymbol{\alpha\gamma} > \boldsymbol{\beta\gamma}$. Note que, se $(-\boldsymbol{\gamma}) \in P$, então $\boldsymbol{\gamma}$ é negativo.

Demonstração.

Por um lado, se $\gamma \in P$ e $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, então $(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}).\ \gamma \in P \Rightarrow \boldsymbol{\beta\gamma} - \boldsymbol{\alpha\gamma} \in P \Rightarrow \boldsymbol{\alpha\gamma} < \boldsymbol{\beta\gamma}$. Por outro lado, se $(-\gamma) \in P$ e $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, então $(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}).\ (-\gamma) \in P \Rightarrow -\boldsymbol{\beta\gamma} + \boldsymbol{\alpha\gamma} \in P \Rightarrow \boldsymbol{\alpha\gamma} > \boldsymbol{\beta\gamma}$. ■

De modo análogo, a relação de ordem $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$ em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ goza das mesmas propriedades.

Exemplo 4.29 Os exemplos 4.24 e 4.25 mostram que **1** é positivo enquanto **–1** é negativo. Sendo **0** o elemento neutro de $\mathbb{R}$, segue que:

i) $\mathbf{1} \in P \Rightarrow (\mathbf{1} - \mathbf{0}) \in P \Rightarrow \mathbf{0} < \mathbf{1}$;

ii) $-(\mathbf{-1}) \in P \Rightarrow \mathbf{0} - (\mathbf{-1}) \in P \Rightarrow \mathbf{-1} < \mathbf{0}$.

Assim, segue que $\mathbf{-1} < \mathbf{0} < \mathbf{1}$.

Proposição 4.20 Sejam $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ um corpo ordenado e P um subconjunto de $\mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades P_1 e P_2 da definição 2.8. Se $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, então $\boldsymbol{\alpha}^2 \in P$.

Demonstração.

Se $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, então ou $\boldsymbol{\alpha} \in P$ ou $(-\boldsymbol{\alpha}) \in P$. Se $\boldsymbol{\alpha} \in P$, então $\boldsymbol{\alpha}.\ \boldsymbol{\alpha} \in P$. Se $(-\boldsymbol{\alpha}) \in P$, então $(-\boldsymbol{\alpha}).(-\boldsymbol{\alpha}) \in P$. Como $\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\alpha} = (-\boldsymbol{\alpha}).(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^2$, segue que $\boldsymbol{\alpha}^2 \in P$. ■

Definição 4.15 Número racional real é todo número real formado por sequências que convergem para um mesmo número racional. Dado um número racional r, podemos obter uma sequência constante $\{a_n\}$ tal que $a_n = r$ para todo n. De acordo com a definição 4.10, podemos definir o número racional real $\boldsymbol{r} = [\{r\}]$. Dessa forma, podemos ver que todo número racional é, por definição, um número real. É nesse sentido que dizemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Definição 4.16 Um corpo ordenado K $(+, \cdot)$ é dito **completo** se toda sequência de Cauchy converge para valores em K.

Antes de prosseguirmos, convém lembrar que nosso objetivo é mostrar que existe um corpo ordenado completo. Já sabemos, por exemplo, que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, porém, não é completo. Esse fato pode ser visto, dentro do nosso contexto (sequências de Cauchy), pelo seguinte fato: nem toda sequência de Cauchy de números racionais converge para $L \in \mathbb{Q}$. Mostraremos isso por meio do exemplo abaixo.

Exemplo 4.30 Seja $\{a_n\}$ uma sequência cujo enésimo termo é a maior fração de denominador 10^n tal que ${a_n}^2 < 2$. Assim, $\{a_n\} = \left\{\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \ldots\right\}$. Note que, a medida que n cresce, os valores de a_n aproximam-se de $\sqrt{2}$, logo, o $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \sqrt{2}$. Assim, pela proposição 3.2, segue que $\{a_n\} \in S$. Portanto, $\{a_n\}$ é uma sequência de Cauchy de números racionais, porém, como já demonstramos no capítulo 1, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, logo, pela definição 4.16, segue que $\mathbb{Q}$ não é completo.

Teorema 4.3 A ordenação de $\mathbb{R}$ é arquimediana.

Demonstração.

Seja $\boldsymbol{\alpha}$ o número real representado pela sequência de Cauchy de números racionais $\{a_n\}$. Pela proposição 4.4, existe $A \in \mathbb{Q}$ tal que $a_n < A$ para todo n. Como a ordenação em $\mathbb{Q}$ é arquimediana, existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $A < b$, logo, por transitividade, $a_n < b$. Considere a sequência constante $\{b_n\}$ tal que $b_n = b$. Seja $\boldsymbol{b}$ o número natural real representado pela sequência $\{b_n\}$. Como a sequência $\{b_n - a_n\} > 0$ para todo n, pois $b - a_n > 0$, segue, pela definição 4.11 e pelo lema 4.2, que $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{\alpha} \in P$, logo, $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{b}$. ■

Lema 4.14 Dados dois números reais distintos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, sempre existe um número racional real $\boldsymbol{r}$ tal que $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$.

Demonstração.

Como $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$, suponha $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$. Pelo teorema 4.3, existe $\boldsymbol{n}_1$ natural real tal que $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{n}_1$ ou, equivalentemente, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}_1} < \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}$. Considere o conjunto A formado por números inteiros reais $\boldsymbol{m}$ tais que se $\boldsymbol{m} \in A$, então $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{\alpha}$. Ora, o conjunto A tem um menor elemento. De fato, se $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{1}$ será o menor elemento de A. Se $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, e $\boldsymbol{n}_1 < \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\alpha}}$ para todo $\boldsymbol{m}$, então $\mathbb{N}$ é limitado, o que é um absurdo. Logo, A tem um menor elemento $\boldsymbol{m}_1$. Assim, $\boldsymbol{m}_1 > \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{m}_1 - \mathbf{1} \leq \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{\alpha}$. Logo,

$\boldsymbol{\alpha} < \frac{\boldsymbol{m}_1}{\boldsymbol{n}_1} = \frac{\boldsymbol{m}_1 - \mathbf{1}}{\boldsymbol{n}_1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}_1} < \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. Portanto, chamando $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{m}_1}{\boldsymbol{n}_1}$, segue que $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$. ■

Lema 4.15 Sejam $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ e c um número racional positivo. Se $|a_n| \leq c$ para n suficientemente grande, então $|\boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{c}$.

Demonstração.

Se $c \in \mathbb{Q}$, podemos obter a sequência constante $\{c\}$ tal que $\boldsymbol{c} = [\{c\}]$. Se $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, não há o que mostrar. Suponha que $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$. Assim, $|\boldsymbol{\alpha}| = \boldsymbol{\alpha}$. Queremos mostrar que $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{\alpha} \in P$. Ora, como $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$, então $\{a_n\} > 0$, logo, para n suficientemente grande,

$(c - a_n) > 0 \Rightarrow [\{c - a_n\}] \in P \Rightarrow [\{c\}] - [\{a_n\}] \in P \Rightarrow \boldsymbol{c} - \boldsymbol{\alpha} \in P \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{c}$.

Se $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{0}$, então $-\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{0}$, logo $-\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} > -\boldsymbol{c}$. ■

Definição 4.17 Definimos sequência de números racionais reais como a sequência $\{\boldsymbol{a_n}\}$ onde $\{a_n\} \in S$, isto é, basta olhar para cada termo de $\{a_n\}$ e tomar o número racional real como na definição 4.15.

Lema 4.16 Toda sequência de Cauchy de números racionais reais converge para um número real. Além disso, se $\{a_n\} \in S$, então $\lim_{n\to\infty} \{\boldsymbol{a_n}\} = [\{a_n\}]$.

Demonstração.

Dado ε racional > 0, existem n, $m \geq n_0$ tais que $| a_n - a_m| < \varepsilon \Rightarrow a_n - \varepsilon < a_m < a_n + \varepsilon$. Fixemos $p > n_0$ e indiquemos a_p por a. Assim, $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon \in \mathbb{Q}$, podemos tomar os números racionais reais $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon} = [\{a - \varepsilon\}]$ e $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon} = [\{a + \varepsilon\}]$. Pelo lema 4.15, pondo $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$, temos:

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon} < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{a_p}| < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Resumindo, dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, existe n_0 tal que $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{a_p}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ para todo $p > n_0$, portanto, $\lim_{n\to\infty} \{\boldsymbol{a_n}\} = [\{a_n\}]$. ■

Teorema 4.4 O corpo ordenado $\mathbb{R}$ dos números reais é completo.

Demonstração.

Seja $X = \{X_n\}$ uma sequência de Cauchy de números reais. Pelo lema 4.14, para cada n natural, existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que $X_n - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{a_n} < X_n + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} \Rightarrow |X_n - \boldsymbol{a_n}| < \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}$. Como X é de Cauchy, dado $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$, existe n_0 tal que $|X_n - X_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo m, $n \geq n_0$. Seja $n_1 > n_0$ tal que $n_1 > \frac{3}{\varepsilon}$. Temos, para todo n, $m > n_1$, que:

$|\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{a_m}| = |\boldsymbol{a_n} - X_n + X_n - X_m + X_m - \boldsymbol{a_m}| \leq |\boldsymbol{a_n} - X_n| + |X_n - X_m| + |X_m - \boldsymbol{a_m}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Isso prova que a sequência $\{\boldsymbol{a_n}\}$ é uma sequência de Cauchy de números racionais reais. Logo, pelo lema 4.16, $\lim_{n\to\infty} \{\boldsymbol{a_n}\} = [\{a_n\}] = \boldsymbol{\alpha}$.

Assim, dado um ε real positivo, existe n suficientemente grande, tal que

$|X_n - \boldsymbol{a_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{\alpha}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, temos:

$|X_n - \boldsymbol{\alpha}| = |X_n - \boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq |X_n - \boldsymbol{a_n}| + |\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{\alpha}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ e, portanto, X é convergente. ■

Definição 4.18 Uma sequência $\{a_n\}$ chama-se crescente quando $a_1 < a_2 < a_3 <$ ..., isto é, quando $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, a sequência diz-se não decrescente.

Semelhante modo, uma sequência $\{a_n\}$ chama-se decrescente quando $a_1 > a_2 > a_3 >$ ..., isto é, quando $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n, a sequência diz-se não crescente.

As sequências crescentes, não crescentes, decrescentes e não decrescentes são chamadas sequências monótonas.

Exemplo 4.31 Sequências crescentes e não decrescentes são, sempre, limitadas inferiormente. Por outro lado, sequências decrescentes e não crescentes são, sempre, limitadas superiormente.

Exemplo 4.32 A sequência constante $\{a_n\}$ = {1,1,1,1,..., 1} é limitada e monótona, pois é não crescente e não decrescente.

Exemplo 4.33 A sequência $\{a_n\} = \{1,2,3, \ldots, n\}$ tal que $a_n = n$ é limitada inferiormente, ilimitada superiormente e monótona crescente, note que o $\inf\{a_n\} = 1$.

Exemplo 4.34 A sequência $\{a_n\}$ tal que $a_n = \frac{2}{n}$ é limitada e monótona decrescente, note que o $\inf\{a_n\} = 0$ e $\sup\{a_n\} = 2$.

Exemplo 4.35 A sequência $\{a_n\} = \{1,0,1,0,1,0, \ldots\}$ tal que $a_n = \begin{cases} 1, se\ n\ for\ \text{ímpar} \\ 0, \quad se\ n\ for\ par \end{cases}$ é uma sequência limitada, $0 \leq a_n \leq 1$, e não é monótona.

Lema 4.17 Seja K um corpo arquimediano. Toda sequência monótona não decrescente e limitada superiormente de K é de Cauchy em K.

Demonstração.

Sejam $c \in K$ e $\{a_n\}$ uma sequência monótona não decrescente e limitada superiormente de K tal que $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $\varepsilon \in K_+^*$, considere o conjunto $M = \left\{\mathfrak{z} \in \mathbb{Z}_+ \mid \mathfrak{z} \leq \frac{c-a_n}{\varepsilon}\right\}$. Note que o conjunto M é formado pelos inteiros cuja expressão $(c - \mathfrak{z}\varepsilon)$ ainda é cota superior de $\{a_n\}$. Como $0 \in M$, segue que o conjunto M é não vazio. Além disso, M deve possuir um maior elemento, pois, caso contrário, como K é arquimediano, se tomássemos $\mathfrak{z} > \frac{c-a_1}{\varepsilon}$, teríamos $c - \mathfrak{z}\varepsilon < a_1$, o que implicaria, $a_n \leq a_1$, que é uma contradição, posto que $\{a_n\}$ é uma sequência monótona não decrescente. Assim, seja m

o maior elemento de M. Como $m \in M$ e $(m + 1) \notin M$, temos que $m\varepsilon \leq c - a_n$ para todo n e existe n_0 tal que $c - a_{n_0} < (m + 1)\varepsilon$. Portanto, se $n \geq m \geq n_0$, temos, pelas desigualdades acima e pelo fato de $\{a_n\}$ ser monótona não decrescente, que

$c - a_m \leq c - a_{n_0} < (m + 1)\varepsilon \leq c - a_n + \varepsilon \Rightarrow c - a_m \leq c - a_n + \varepsilon \Rightarrow a_n - a_m < \varepsilon$, logo:

$|a_n - a_m| = a_n - a_m < \varepsilon$, que nos diz que, de fato, $\{a_n\}$ é de Cauchy em K. ■

Lema 4.18 Seja K um corpo arquimediano. Toda sequência monótona não crescente e limitada inferiormente de K é de Cauchy em K.

Demonstração.

Análoga à feita no lema anterior. ■

Teorema 4.5 (Princípio do Supremo) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Demonstração.

Seja T um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Sejam A_1 uma não cota (superior) de T ($A_1 \in \mathbb{R}$), B_1 uma cota (superior) de T ($B_1 \in \mathbb{R}$) e C_1 a média aritmética de A_1 e B_1, isto é, $C_1 = \frac{A_1 + B_1}{2}$. Definamos, indutivamente, as sequências $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ e $\{C_n\}$ do seguinte modo: dados A_n e B_n, calculemos sua média: $C_n = \frac{A_n + B_n}{2}$. Caso C_n não seja uma cota de A, faremos $A_{n+1} = C_n$ e $B_{n+1} = B_n$. Caso C_n seja uma cota de T, faremos $A_{n+1} = A_n$ e $B_{n+1} = C_n$. É simples: por um lado, se C_1 não for cota de T, então C_1 será o próximo termo da sequência $\{A_n\}$ enquanto o próximo termo da sequência $\{B_n\}$ é igual ao anterior, isto é, $A_2 = C_1$ e $B_2 = B_1$; por outro lado, se C_1 for cota de T, então C_1 será o próximo termo da sequência $\{B_n\}$ enquanto o próximo termo da sequência $\{A_n\}$ será igual ao anterior, isto é, $B_2 = C_1$ e $A_2 = A_1$. Como $A_n \leq C_n \leq B_n$ para todo n, segue que a sequência $\{A_n\}$ é não decrescente enquanto a sequência $\{B_n\}$ é não crescente. De acordo com os lemas 4.17 e 4.18, $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ são sequências de Cauchy de números reais, logo, pelo teorema 4.4, $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ são sequências convergentes em $\mathbb{R}$. Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty}\{A_n\} = A$ e $\lim_{n\to\infty}\{B_n\} = B$. Como $A_n \leq B_n$, segue que $A \leq B$. Afirmamos que $A = B$. De fato, se $A \neq B$, temos: $\lim_{n\to\infty}\{C_n\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{A_n + B_n}{2}\right\} = \frac{A+B}{2}$. Para este limite, temos duas opções: i) $\frac{A+B}{2}$ não é cota de T, logo $\frac{A+B}{2} \in \{A_n\}$, isto é, $\frac{A+B}{2} \leq A \Rightarrow B \leq A$;

ii) $\frac{A+B}{2}$ é cota de T, logo $\frac{A+B}{2} \in \{B_n\}$, isto é, $\frac{A+B}{2} \geq B \Rightarrow B \leq A$. Em ambos os casos, temos um absurdo, pois $A \leq B$, logo, $A = B$. Assim, segue que as sequências $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ e $\{C_n\}$ convergem para um mesmo limite A. **Afirmamos que A é o supremo do conjunto T**. Nesse caso, precisamos mostrar que as condições (i) e (ii) da definição 2.10 são satisfeitas. Mostraremos, inicialmente, a condição (i). Suponha que exista p natural tal que $A < A_p$. Como $\lim_{n\to\infty}\{A_n\} = A$, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $| A_n - A | < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = A_p - A$, temos: $A_n < A + A_p - A$, portanto, $A_n < A_p$. Tomando n = máx$\{n_0, p\}$, temos uma contradição, pois a sequência $\{A_n\}$ é não decrescente. Logo, $A_n \leq A$ para todo n.

Mostraremos, agora, a condição (ii). Suponha que exista outro supremo $A' < A$. Assim, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $| A_n - A | < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = A - A'$, temos: $A - (A - A') < A_n < A + A - A'$, portanto, de (i), temos: $A' < A_n \leq A$ para todo n. ■

5 UNICIDADE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Neste capítulo, daremos início à parte final deste trabalho onde mostraremos a unicidade de $\mathbb{R}$. Para mais detalhes, recomendamos [6].

Como construímos dois corpos ordenados, arquimedianos e completos de dois modos distintos, uma pergunta natural que se possa fazer a esta altura e que temos que responder é esta: afinal, quantos corpos ordenados, arquimedianos e completos existem?

A ideia que utilizaremos para responder esta pergunta é a mesma que está por trás das construções feitas aqui. Note que, ao construir os reais segundo as classes de equivalência de Cauchy, "olhamos" para os números reais como o limite para o qual as sequências da classe convergem, esse "olhar" dar uma ideia de função que leva, por exemplo, o número real 0 no "número" **0**. Para mais detalhes, consulte o capítulo 4.

Semelhante modo, ao construir os reais utilizando a noção de corte, "olhamos" para os números reais como o supremo de um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Assim, o número real 1, por exemplo, foi definido como 1^*. Para mais detalhes, consulte o capítulo 3.

O fato é que, nas duas construções, foram definidas, implicitamente, as relações f de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}_S$ (conjunto dos reais como classes de equivalência) e g de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}_C$ (conjunto dos reais como cortes) definidas, respectivamente, por $f(x) = \boldsymbol{x} = [\{a_n\}] = \{\{x_n\} \in S \mid \{x_n\} \sim \{a_n\}\}$ e $g(x) = \bar{x} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$.

Mostraremos que tais relações são funções que recebem um nome especial e gozam de propriedades que serão vistas mais a frente. Nosso objetivo, neste capítulo, é mostrar que se houverem outros corpos que sejam ordenados, arquimedianos e completos, então haverá uma função que fará uma correspondência biunívoca entre os números reais e os elementos desse conjunto.

Representaremos os elementos arbitrários de $\mathbb{R}$ por letras latinas minúsculas ao passo que usaremos "negrito" para representar os elementos arbitrários de outro corpo ordenado, arquimediano e completo F que possa, por ventura, aparecer.

A fim de conhecer os detalhes dessa função que buscamos, daremos as definições seguintes.

Definição 5.1 Se $F_1(+, \cdot, <)$ e $F_2(+, \cdot, <)$ são dois corpos ordenados munidos das operações de soma (+) e multiplicação ($\cdot$) e da relação de ordem (<), então um isomorfismo de F_1 para F_2 é uma função f de F_1 para F_2 com as seguintes propriedades:

i) (injetiva) Se $x_1 \neq x_2$, então $f\,(x_1) \neq f\,(x_2)$ ou, equivalentemente, se $f\,(x_1) = f\,(x_2)$, então $x_1 = x_2$;
ii) (sobrejetiva) Se z está em F_2, então $z = f\,(x)$ para algum x em F_1;
iii) (preservação da adição e da multiplicação) Se x e y estão em F_1, então $f\,(x + y\,) = f\,(x) + f\,(y)$ e $f\,(x.y\,) = f\,(x).f\,(y)$;
iv) (preservação da ordem) Se $x < y$, então $f\,(x) < f\,(y)$.

Definido o isomorfismo, podemos enunciar o que são dois corpos isomorfos.

Definição 5.2 Dois corpos são denominados isomorfos se existe um isomorfismo entre eles.

Exemplo 5.1 A relação f de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}_S$ definida por $f\,(x) = \boldsymbol{x} = [\{a_n\}] = \{\{x_n\} \in \mathrm{S} \mid \{x_n\} \sim \{a_n\}\}$ é um isomorfismo. Precisamos verificar que tal função possui as quatro propriedades da definição 5.1.

i) Sejam x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = x_1$ e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = x_2$. Assim, $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} \Rightarrow [\{a_n\}] = [\{b_n\}] \Rightarrow \{a_n\} \sim \{b_n\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{b_n\} \Rightarrow x_1 = x_2$. Isso mostra que f é injetiva;

ii) Seja $[\{a_n\}]$ um elemento qualquer de $\mathbb{R}_S$, então, por definição, $\{a_n\}$ é uma sequência convergente, logo existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = x$. Assim, $f\,(x) = [\{a_n\}] = \boldsymbol{x}$. Isso mostra que f é sobrejetiva;

iii) Sejam x e $y \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = x$ e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = y$. Assim, $f\,(x + y) = [\{a_n + b_n\}] = [\{a_n\}] + [\{b_n\}] = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = f\,(x) + f\,(y)$ e $f\,(x.y) = [\{a_n.b_n\}] = [\{a_n\}].[\{b_n\}] = \boldsymbol{x}.\,\boldsymbol{y} = f\,(x).f\,(y)$;

iv) Sejam x e $y \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = x$ e $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = y$ tais que $x < y$. Como $y - x > 0$, a sequência $\{b_n - a_n\}$ é positiva. Consequentemente, $[\{b_n - a_n\}] \in P$. Como $[\{b_n - a_n\}] =$, $[\{b_n\}] - [\{a_n\}] = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$, segue que $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$. Assim, $x < y \Rightarrow \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \Rightarrow f\,(x) < f\,(y)$.

Dois corpos isomorfos podem ser considerados, essencialmente, iguais, isto é, qualquer propriedade importante de um pode ser verificada no outro. Então, sendo F um corpo ordenado, arquimediano e completo, não é necessário verificar se ele é igual a $\mathbb{R}$, mas sim se é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Nossa resposta para o questionamento feito no início do capítulo é esta: a menos de um isomorfismo, só existe um corpo ordenado, arquimediano e completo, a saber, o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. O exemplo 5.1 ilustra isso muito bem.

No entanto, para validarmos a nossa resposta, devemos demonstrar o teorema abaixo.

Teorema 5.1 Se F é um corpo ordenado, arquimediano e completo, então F é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Demonstração.

Sejam **0** e **1** os elementos neutros da soma e da multiplicação de F. De acordo com a definição 5.2, para mostrarmos que F é isomorfo a $\mathbb{R}$, devemos encontrar uma função f de $\mathbb{R}$ para F que seja um isomorfismo. Comecemos por definir f por etapas.

Primeiro, para os números inteiros. Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$f(0) = \mathbf{0}$;

$f(1) = \mathbf{1}$;

$f(n) = (\mathbf{1} + \mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1})$ (n vezes a soma do elemento **1**);

$f(-n) = -(\mathbf{1} + \mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1})$ (n vezes a soma do elemento **1**).

É fácil verificar que se $m, n \in \mathbb{Z}$, então

$f(m + n) = f(m) + f(n)$ e $f(m.n) = f(m).f(n)$. É conveniente denotarmos $f(m) = \boldsymbol{m}$.

Agora, definiremos f para os números racionais. Sendo $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(m)}{f(n)} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$. Esta é a divisão em F.

Note que a relação f preserva a relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

De fato, sejam $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{N}$ tais que $r_1 = \frac{a}{b}$, $r_2 = \frac{c}{d}$ e $r_1 < r_2$. Queremos mostrar que $f(r_1) < f(r_2)$. Ora, $f(r_2) - f(r_1) = \frac{\boldsymbol{bc-ad}}{\boldsymbol{bd}}$. Como $r_1 < r_2$, temos $a.d < b.c$, logo $\boldsymbol{b.c} - \boldsymbol{a.d} \in \boldsymbol{P}$. Como $b, d \in \mathbb{N}$, temos $\boldsymbol{b.d} \in \boldsymbol{P}$. Assim, $\frac{\boldsymbol{bc-ad}}{\boldsymbol{bd}} \in \boldsymbol{P}$. Portanto, $f(r_1) < f(r_2)$.

A definição de $f(x)$ para x irracional está relacionada com o modo com que o utilizamos onde qualquer número irracional é determinado pelos números racionais menores do que ele.

Assim, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, consideremos A_x o subconjunto de F que é a imagem de todo racional $r < x$, isto é, se $r < x$, então $f(r) \in A_x$. Note que o conjunto A_x é não vazio e é limitado superiormente, pois se r_0 é um racional maior do que x, então, como visto acima, $f(r) < f(r_0)$ para todo $f(r)$ em A_x.

Uma vez que F é um corpo ordenado e completo, o conjunto A_x admite supremo.

Assim, vamos definir $f\,(x)$ como sup A_x.

Temos, agora, $f\,(x)$ definido de duas maneiras distintas, primeiro para x racional e depois para x qualquer. Precisamos mostrar que esta última definição também se aplica para x racional. Antes, porém, observe que se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são elementos de F com $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, então existe um racional r tal que $\boldsymbol{a} < f\,(r) < \boldsymbol{b}$.

De fato, como F é arquimediano, existe $\boldsymbol{n_1}$ natural tal que $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b-a}} < \boldsymbol{n_1}$ ou, equivalentemente, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_1}} < \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Considere o conjunto A formado por números inteiros $\boldsymbol{m}$ tais que se $\boldsymbol{m} \in A$, então $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n_1 a}$. Ora, o conjunto A tem um menor elemento. De fato, se $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{1}$ será o menor elemento de A. Se $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, e $\boldsymbol{n_1} < \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{a}}$ para todo $\boldsymbol{m}$, então $\mathbb{N}$ é limitado, o que é um absurdo, pois F é arquimediano. Logo, A tem um menor elemento $\boldsymbol{m_1}$. Assim, $\boldsymbol{m_1} > \boldsymbol{n_1 a}$ e $\boldsymbol{m_1} - \mathbf{1} \leq \boldsymbol{n_1 a}$. Logo,
$\boldsymbol{a} < \frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{n_1}} = \frac{\boldsymbol{m_1}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_1}} < \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Portanto, fazendo $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{n_1}} = \frac{f(m_1)}{f(n_1)} = f\left(\frac{m_1}{n_1}\right)$ segue que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$.

Após essa observação, voltemos à demonstração de que se x é racional, tanto faz definir $f\,(x)$ como $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ ou como sup A_x.

Se y e x são números racionais com $y < x$, então $f\,(y) < f\,(x)$, logo $f\,(y) \in A_x$. Assim, todo elemento de A_x é menor do que $f\,(x)$. Consequentemente, sup $A_x \leq f\,(x)$. Suponhamos que sup $A_x < f\,(x)$, então existirá um número racional r tal que sup $A_x < f\,(r) < f\,(x)$. Mas a condição $f\,(r) < f\,(x)$ significa que $r < x$, donde resulta que $f\,(r)$ está em A_x o que contradiz a condição sup $A_x < f\,(r)$. Isso mostra que a suposição anterior é falsa, logo, temos que sup $A_x = f\,(x)$.

Temos assim uma relação f, bem definida, de $\mathbb{R}$ para F, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f\,(x) =$ sup A_x.

Com o intuito de verificar que a relação f é um isomorfismo, temos de verificar que f possui as quatro propriedades da definição 5.1. Comecemos pela propriedade (iv).

Se x e y são números reais com $x < y$, então, claramente, A_x está contido em A_y. Assim, $f\,(x) =$ sup $A_x \leq$ sup $A_y = f\,(y)$. Para eliminar a hipótese da igualdade, notemos que existem números racionais r e s com $x < r < s < y$. Como $f\,(r) < f\,(s)$, temos $f\,(x) \leq f\,(r) < f\,(s) \leq f\,(y)$ donde temos $f\,(x) < f\,(y)$.

A propriedade (i) resulta, imediatamente, da propriedade (iv), pois se $x \neq y$, então

$x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, $f(x) < f(y)$, no segundo caso, $f(y) < f(x)$ e, em qualquer dos casos, $f(x) \neq f(y)$.

Para provar (ii), consideremos a um elemento de F e seja B o conjunto de todos os números racionais r com $f(r) < a$. O conjunto B é não vazio e é limitado superiormente, pois existe um racional s tal que $f(s) > a$, tal que $f(s) > f(r)$ o que implica $r < s$. Seja x o supremo de B, vamos mostrar que $f(x) = a$. Por um lado, se $f(x) < a$, então existe um número racional r com $f(x) < f(r) < a$. Mas isto implica que $x < r$ e $r \in B$, o que contradiz o fato de $x = \sup B$. Por outro lado, se $a < f(x)$ existe um racional r tal que $a < f(r) < f(x)$ o que implica $r < x$. Uma vez que $x = \sup B$, isso implica que $r < s$ para algum s em B. Donde implica que $f(r) < f(s) < a$, que é uma contradição. Assim, $f(x) = a$.

Para verificar (iii), consideremos x e y números reais e suponhamos, com vista a um absurdo, que $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$. Então, $f(x + y) < f(x) + f(y)$ ou $f(x + y) > f(x) + f(y)$. No primeiro caso, se $f(x + y) < f(x) + f(y)$, então existirá um número racional r tal que $f(x + y) < f(r) < f(x) + f(y)$. Mas isso significa que $x + y < r$. Consequentemente, r pode ser escrito como a soma de dois racionais r_1 e r_2 tais que $x < r_1$ e $y < r_2$. Assim, usando os fatos demonstrados para f com respeito a números racionais, temos: $f(r) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) > f(x) + f(y)$, o que é uma contradição. O outro caso, $f(x + y) > f(x) + f(y)$, é tratado de forma análoga.

Finalmente, se x e y são números reais positivos, o mesmo tipo de argumento mostra que $f(x.y) = f(x).f(y)$. O caso geral é então uma simples consequência. ■

6 CONCLUSÃO

Concluímos que o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é um corpo ordenado completo. Além disso, vimos que qualquer outro corpo que seja completo e ordenado é uma mera descrição de $\mathbb{R}$ pela função f. Por isso dizemos que, a menos de um isomorfismo, $\mathbb{R}$ é único.

Durante a pesquisa, vimos que a maioria dos textos dedicados ao tema utiliza uma linguagem algébrica avançada. Pensando no professor de Matemática da rede básica de ensino, desenvolvemos um material que utiliza, ao máximo, sempre que possível, os conceitos matemáticos vistos no ensino médio. Quando não foi possível, devido à complexidade do tema, procuramos, por meio de muitas definições e exemplos, tornar a leitura do texto mais compreensível e agradável. É neste sentido que este trabalho se diferencia de outros que abordam o mesmo tema: mantemos o rigor matemático necessário, porém, utilizamos uma linguagem matemática mais simples possível.

Esperamos que esse texto possa servir como fonte de pesquisa para professores interessados no tema, bem como, para alunos do curso de Matemática ao fazerem, por exemplo, a disciplina de Fundamentos da Matemática onde se estuda a construção dos números.

REFERÊNCIAS

[1] D`ANGELO, John P.; Douglas B. **Mathematical Thinking: problem – solving and proofs.** 2 ed.

[2] FERREIRA, Jamil. **A construção dos números.** 3. ed. Rio de janeiro: SBM, 2013.

[3] HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra.** V. 1. 3. Ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[4] MONTEIRO, Luis Henrique Jacy. **Elementos de Álgebra.** Rio de Janeiro: Ao livro Técnico, 1969.

[5] LANG, Serge. **Álgebra para graduação.** 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008.

[6] LOPES, Paula Cristina Reis. **Construções dos números reais.** 2006. 150 f. Dissertação (Mestrado em Especialização em Matemática para o ensino) – Universidade da Madeira, Funchal, 2006.

[7] LIMA , Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio.** v. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise.** v.1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

[9] SOUZA, Jadson da Silva. **Números Reais: um corpo ordenado e completo.** 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na área do ensino básico de Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.