UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MARCOS ANTONIO DE MACEDO

MANIFESTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS FORMAS INDETERMINADAS DE FUNÇÕES: SITUAÇÕES DIDÁTICAS APOIADAS NA TECNOLOGIA

FORTALEZA
2015

MARCOS ANTONIO DE MACEDO

MANIFESTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS FORMAS INDETERMINADAS DE FUNÇÕES: SITUAÇÕES DIDÁTICAS APOIADAS NA TECNOLOGIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

M122m Macedo, Marcos Antonio de
Manifestação geométrica das formas indeterminadas de funções: situações didáticas apoiadas na tecnologia / Marcos Antonio de Macedo. – 2015.
118 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Cálculo. 2. Regra de L'Hôpital. 3. Software Geogebra. 4. Sessões didáticas. I. Título.

CDD 510

MARCOS ANTONIO DE MACEDO

MANIFESTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS FORMAS INDETERMINADAS DE FUNÇÕES: SITUAÇÕES DIDÁTICAS APOIADAS NA TECNOLOGIA.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aprovada em: 23/03/2015

BANCA EXAMINADORA

Francisco Régis V. Alves

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)

Instituto Federal do Ceará – IFCE

Maria José Costa dos Santos

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos

Universidade Federal do Ceará – UFC

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Dedico este trabalho a Deus primeiramente, a minha família e aos amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, razão da minha existência, presente a todo instante e responsável por todas as minhas conquistas.

A minha filha Bárbara Raquel por compreender a minha falta em função da necessidade de dedicação aos estudos durante os últimos dois anos.

Aos meus pais, pelo amor incondicional e por sempre acreditarem em mim.

Aos meus avós já falecidos e, em especial, a minha avó também já falecida, “Dona Senhorinha”, cuja contribuição para minha vida estudantil e, consequentemente, minha formação foi fundamental.

A todos os professores do ENCIMA, mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática que contribuíram para minha formação.

Aos companheiros do ENCIMA da Turma 2012.2 e, em especial, a parceira Cristina Alves, por tantos obstáculos vencidos juntos.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, pelas valiosas contribuições dadas ao meu trabalho.

Aos membros da Banca de Qualificação, Prof. Dra. Ana Carolina Costa Pereira e Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos, pelas valiosas sugestões e contribuições, que se tornaram muito importantes para a realização deste trabalho.

“O bom senso é o que existe de melhor dividido no mundo, pois todos se julgam tão bem dotados dele que não costumam querê-lo mais do que têm”.

René Descartes

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo central apresentar uma proposta de ensino para as formas indeterminadas e Regra de L'Hôspital por meio de sequências didáticas estruturadas, com base nos pressupostos da Sequência Fedathi como metodologia de ensino, e a exploração do software Geogebra como ferramenta para o ensino. Um outro objetivo da pesquisa é propor aos professores um material de apoio por meio de videoaulas que possa auxiliá-los em aulas sobre o tema. Quanto à metodologia de pesquisa empregada, optamos pela Engenharia Didática considerando que ela representa um referencial, pois uma de suas características é unir a pesquisa teórica e a ação prática por meio de sessões didáticas. Ressaltamos que foram utilizadas apenas as duas primeiras etapas da Engenharia Didática, em consonância com os objetivos buscados em nossa pesquisa. De acordo com a CAPES o mestrado Profissional destaca a produção técnica/tecnológica na área de ensino como Produtos Educacionais que possam ser consumidos por professores e outros profissionais envolvidos com o ensino. Nesta perspectiva, produzimos videoaulas concebidas a partir das sequências de ensino e dispusemos num *blog* estruturado com materiais sobre o tema. Desse modo, acreditamos que o ensino de Cálculo, mais especificamente o ensino das formas Indeterminadas e regra de L'Hôpital, apresentará melhorias quando associado a uma metodologia que possibilite ao aluno a construção do seu próprio conhecimento, como é o caso da Sequência Fedathi. Nesse sentido, a inserção da tecnologia, por intermédio do software Geogebra, possibilita ao aluno uma maneira alternativa e, a nosso ver, adequada à construção de novos conhecimentos.

Palavras-Chave: Cálculo. Regra de L'Hôpital. Sequência Fedathi. Geogebra. Sessões Didáticas.

ABSTRACT

This work had as main objective to present an educational proposal for indeterminate and rule of L'Hospital ways through teaching sequences structured, based on assumptions of Fedathi sequence as teaching methodology, and the exploitation of Geogebra software as a tool for education. Another objective of the research is to propose to the teachers support material by means of video classes that can assist them in classes on the subject. As for the research methodology employed, we chose the Didactic Engineering considering that it is a reference, as one of its features is to unite the theoretical research and practical action through teaching sessions. We emphasize that we used only the first two stages of the Didactic Engineering, in line with the objectives pursued in our research. According to CAPES the Professional Masters highlights the technical / production technology in teaching as educational products that can be consumed by teachers and other professionals involved with teaching. In this perspective, we produced video classes designed from teaching sequences and became willing a blog structured materials on the subject. Thus, we believe that the calculation of teaching, more specifically the teaching of Indeterminate forms and L'Hôpital rule, submit improvements when combined with a methodology that enables the student to build their own knowledge, as in the case of Fedathi sequence. In this sense, the inclusion of technology through the Geogebra software, enables the student to an alternative way and, in our view, appropriate to the construction of new knowledge.

Key words: Calculation. Rule of L'Hôpital. Fedathi sequence. Geogebra. Teaching sessions

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 PROBLEMÁTICA

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas universidades brasileiras tem representado objeto de preocupação por diversos pesquisadores na área de Educação Matemática, tendo em vista os índices alarmantes de reprovação e de evasão na disciplina e alguns propõem medidas razoáveis de metodologias ou abordagem dos conteúdos. Dentre esses pesquisadores podemos destacar: Alves (2012), Barros e Meloni (2006), Baruffi (1999), Fiorentini (1995), Nasser (2009), Rezende (2003), entre outros.

Barros e Meloni (2006) aponta que o ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento por diversos pesquisadores, uma vez que os índices de reprovação e evasão são preocupantes e motivados pela dificuldade apresentada pelos alunos na aprendizagem.

Em sua tese de doutorado, Barufi (1999) relata que o índice de reprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%. Ainda nesse contexto, Rezende (2003) apresenta taxas de reprovação ainda mais expressivas. Na Universidade Federal Fluminense-UFF, segundo esse pesquisador, no período de 1996 a 2000, o índice de reprovação estava na faixa de 45% a 95% e, no curso de Matemática, essa taxa foi superior a 65%, o que implica taxa de aprovação inferior a 45%%.

Resende (2003) afirma que alguns pesquisadores acreditam que o problema é de natureza psicológica, pois os alunos não aprendem por não possuírem estruturas cognitivas que lhes possibilitem a absolvição dos conceitos de Cálculo tendo em vista seu alto grau de complexidade.

Para Frescki e Pigatto (2009), no ensino superior das Ciências Exatas, existe um modelo de educação tradicional de ensino, em que a metodologia utilizada não contribui para um rendimento satisfatório nos processos de ensino e de aprendizagem. Segundo esse pesquisador, perpetua-se o desenvolvimento nos estudantes de habilidades de memorização e reprodução e que ficam à mercê das orientações do professor sem nenhuma capacidade de autonomia quanto ao processo de aprendizagem.

Na mesma linha de raciocínio, podemos citar Melo (2002) que afirma estar sendo "ensinados" conceitos de Cálculo, na maioria das vezes, por meio de aulas que valorizam a memorização e a aplicação de fórmulas.

Assunção e Ferreira (2012, p. 1) descrevem que:

> Nos últimos anos a disciplina de Cálculo diferencial e integral desenvolvida em inúmeros Cursos Superiores é objeto de pesquisa em muitos estudos, devido às dificuldades encontradas pelos alunos em alguns conteúdos presentes na mesma, acarretando elevados índices de reprovação e desistência. Diante disto, buscaram-se através de pesquisa bibliográficas possíveis causas desta problemática.

Observamos também que o uso da tecnologia computacionais nos processos de ensino e de aprendizagem tem sido objeto de pesquisa em alguns trabalhos relacionados ao ensino de Matemática. Encontramos considerações relevantes sobre as potencialidades e contribuições que o computador pode proporcionar ao ensino de Matemática, como por exemplo, Artigue (1998), Alves (2013), Siguenãs (2009), entre outros.

Bittar *et al* (2009) diz que a intervenção do professor no processo é fundamental e cabe a ele uma postura em relação às escolhas das atividades com base em metodologias adequadas e, além disso, conhecer as tecnologias disponíveis para utilizá-las como mais um recurso didático no processo de ensino, tornando a aprendizagem mais significativa propondo interação entre aluno e tecnologia na construção do conhecimento.

Em seu trabalho sobre a utilização do software Geogebra no ensino de derivadas Siguenãs (2009) relata que o *software GeoGebra* propiciou um entendimento do conhecimento de limites e derivadas, de forma diferente, por meio de construções e manipulações feitas no software e que por sua vez despertou mais interesse e atenção nos alunos, colaborando para uma aprendizagem mais efetiva.

Deste modo, ‘A utilização da tecnologia não se destina, simplesmente, a "facilitar" os cálculos ou as medidas. A tecnologia permite transformar os processos de pensamento e os processos de construção do conhecimento’ (MATHIAS; BORCHARDT; CORRÊA, 2013, p. 3)

Em seu trabalho sobre a contribuição do software Geogebra Richit *et al* (2012) observou que a inserção da tecnologia despertou uma motivação nos alunos, gerando um envolvimento maior durante a realização das atividades, instigando-os a levantar hipóteses a partir de um problema dado. Esse autor afirma ainda que a utilização do software proporciona uma interação mais efetiva entre os alunos propiciando um ambiente favorável à exploração.

Tendo em vista o exposto acima, consideramos que os processos de ensino e de aprendizagem podem tornar-se mais instigante para o aluno com a utilização da tecnologia, considerando que, a nosso ver, representa uma nova necessidade nos processos de ensino e de aprendizagem.

As concepções aqui expostas representaram uma grande contribuição para a escolha da temática dessa pesquisa. Outro fato que nos instigou a realizar um trabalho a respeito de ensino de Cálculo Diferencial e Integral está relacionado às minhas experiências como aluno e como professor. Na graduação, as aulas de Cálculo eram centradas no professor que fazia uso da metodologia tradicional de ensino em que as ferramentas, como recursos básicos, eram livro, quadro negro e giz. Durante toda a graduação não houve outro método ou recurso que pudesse promover de maneira mais eficaz e mais significativa a absolvição dos conteúdos o que, de certa forma, me trouxe algum prejuízo no que diz respeito aos significados dos conceitos dessa disciplina. Como professor da Licenciatura em Matemática na disciplina de Cálculo[1], percebemos que os nossos alunos apresentavam dificuldade no entendimento do significado dos conceitos, fato esse que culminava na maioria das vezes em reprovação e, conseguintemente, evasão causada pelo desestímulo.

O alto índice de reprovação em Cálculo indica que as aulas precisam mudar e, a nosso ver, ao integrar as ferramentas tecnológicas digitais estaremos buscando novos caminhos.

1.1 Identificação do problema

Ao iniciar o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, percebemos a oportunidade em ajudar os nossos colegas professores e alunos a superar as dificuldades apresentadas nos processos de ensino e de aprendizagem na disciplina de Cálculo. Assim, por meio de uma reflexão a respeito das possíveis contribuições que o uso das tecnologias digitais podem fornecer aos estudantes de Licenciaturas em Matemática na referida disciplina, surgiu a ideia em se criar um mecanismo de apoio ao ensino dessa disciplina que pudesse diminuir ou superar tal problema. Dessa forma, resolvemos, neste trabalho, elaborar e propor aos professores de Cálculo das instituições de nível superior sequências didáticas[2] com base na tecnologia e com o intuito de instigá-los a uma reflexão a respeito do ensino da disciplina.

Como metodologia de pesquisa utilizaremos a Engenharia Didática (E.D) que representa um referencial que une a pesquisa teórica à ação prática contextualizada e tem como base a construção e realização de sequências didáticas.

Utilizaremos em nossa pesquisa o *software* Geogebra como recurso tecnológico e ferramenta facilitadora dos processos de ensino e de aprendizagem, considerando que tal

---

[1] O termo **Cálculo** usado nesse trabalho faz referência ao Cálculo Diferencial e Integral.

[2] Segundo Souza (2010, p.75) "**situação didática** refere-se ao conjunto das relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, dentro de uma situação organizada para um fim específico de ensino".

ferramenta oferece ao ensino de Geometria, Cálculo e álgebra recursos que permitem uma melhor exploração dos conceitos. Uma das características desse software que consideramos importante para nossa pesquisa diz respeito a uma melhor interação entre os elementos algébricos e as respectivas representações geométricas além de promover um dinamismo nos objetos criados, tendo em vista que o Cálculo é uma disciplina dinâmica e para tanto requer ferramentas dinâmicas para sua exploração. Além disso, trata-se de um *software* livre, de fácil acesso por ser gratuito, motivador e possui uma interface atrativa e com ferramentas de fácil manuseio. Segundo Andrade (2011), esse *software* minimiza as dificuldades nas construções de figuras que, geralmente, proporcionam uma visualização insatisfatória na medida em que a exatidão de medidas e traçados fica limitada a habilidades manuais do professor.

Alves (2012) enfatiza que na abordagem da relação de L'Hôpital nos livros didáticos, percebe-se um considerável apelo à manipulação algébrica enquanto que ações isoladas do uso da tecnologia digital em relação ao significado geométrico da referida regra pode proporcionar um tratamento diferenciado das indeterminações de funções.

Assunção e Ferreira (2012) observou que os recursos tecnológicos, por meio do *software GeoGebra,* podem ser considerados como ferramentas facilitadoras no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos Cálculo.

Alves (2012) discute, por meio das potencialidades do Geogebra, a descrição de um modelo de aprendizagem que contempla o aluno com um melhor entendimento a respeito da manifestação geométrica das formas indeterminadas, utilizando de maneira restrita o algebrismo. Esse autor explica que "nem sempre o entendimento da demonstração formal desta regra, implica entendimento conceitual de propriedades geométricas relacionadas com esse enunciado" (ALVES, 2012, p. 336)

Concordamos que o uso de recursos tecnológicos digitais em sala de aula, com base numa metodologia que contribua para exploração do conteúdo, possa favorecer o ensino de Cálculo promovendo, por parte do aluno, um rendimento que possibilite uma melhor compreensão dos conteúdos trabalhados. Desse modo, acatamos a sugestão do nosso orientador em utilizar a Sequência Fedathi como metodologia de ensino, tendo em vista que ela tem a característica de permitir que o aluno seja o autor do seu próprio conhecimento.

Como objeto de estudo no ensino de Cálculo optamos por restringir as Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôpital, no intuito de apresentar uma abordagem por meio do Geogebra, analisando o comportamento de uma função em certo ponto do seu domínio e identificar, por meio desse *software,* os tipos de indeterminações que podem manifestar-se ao calcularmos o limite de uma função. Optamos por esse objeto de pesquisa pela oportunidade de mostrar que temas como esse, tratados nos livros de Cálculo de maneira predominantemente analítica e desprovida de qualquer significado, podem ser explorados de maneira diferenciada por intermédio da tecnologia.

1.1.1 Revisão de literatura

O Cálculo Diferencial e Integral possui um conjunto de elementos fundamentais na aplicabilidade nas mais diversas áreas de conhecimento, no entanto, essa disciplina representa objeto de pesquisa para muitos pesquisadores, seja pela dificuldade de aprendizagem dos alunos na assimilação da complexidade dos seus conceitos ou pelo alto índice de reprovação e de evasão apresentado pelos pesquisadores em seus trabalhos.

Embora haja evidente preocupação de muitos pesquisadores a respeito do baixo índice de rendimento e deficiência nos resultados de ensino e aprendizagem em cálculo, acreditamos que um dos fatores que instiga a permanência de tal problema esteja relacionado à falta de articulação entre os resultados apresentados nas pesquisas e a prática docente. Segundo Santos *et al* (2012, p. 130):

> Através da prática profissional docente, observamos que, nos cursos de graduação de grande parte das universidades brasileiras, muito se fala sobre inclusão digital e sobre a influência da tecnologia nas metodologias educacionais. No entanto, pouco se utiliza das ferramentas tecnológicas de forma consciente e consistente nas atividades docentes nas disciplinas das áreas de Ciências Exatas.

Siguenâs (2009) aponta que muitas pesquisas foram realizadas, buscando informações novas a respeito da influência dos computadores na aprendizagem, em que se pretende explorar esse recurso da melhor maneira possível.

Para Nasser (2009), muitos trabalhos de pesquisa têm enfatizado as dificuldades dos alunos de cursos superiores na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Fiorentini (1995) acredita que um dos motivos pelos quais ocorre essa deficiência no ensino e consequentemente no aprendizado de Cálculo está na escolha inadequada da metodologia adotada, caracterizada por um ensino livresco e focado no professor, cujo papel principal, na maioria das vezes, é de um mero repassador de informações.

Para Fundamentar a proposta desenvolvida nesta pesquisa, foram revisados trabalhos brasileiros que articulam Tecnologias Digitais e Cálculo Diferencial e Integral, enfatizando características que aparecem quando os conceitos dos elementos de Cálculo são trabalhados num ponto de vista de investigação possibilitado por softwares geométricos.

Constatamos uma escassez de trabalhos no Brasil que busquem compreender dificuldades específicas em relação ao ensino do nosso objeto de estudo. Em nossas pesquisas em teses e dissertações defendidas em Programas de Pós-graduação na área de Ensino de Ciências e Matemática bem como artigos que contemplam o tema abordado, percebemos que os pesquisadores optam com mais frequência por temas mais abrangentes do Cálculo como Derivadas e Integrais.

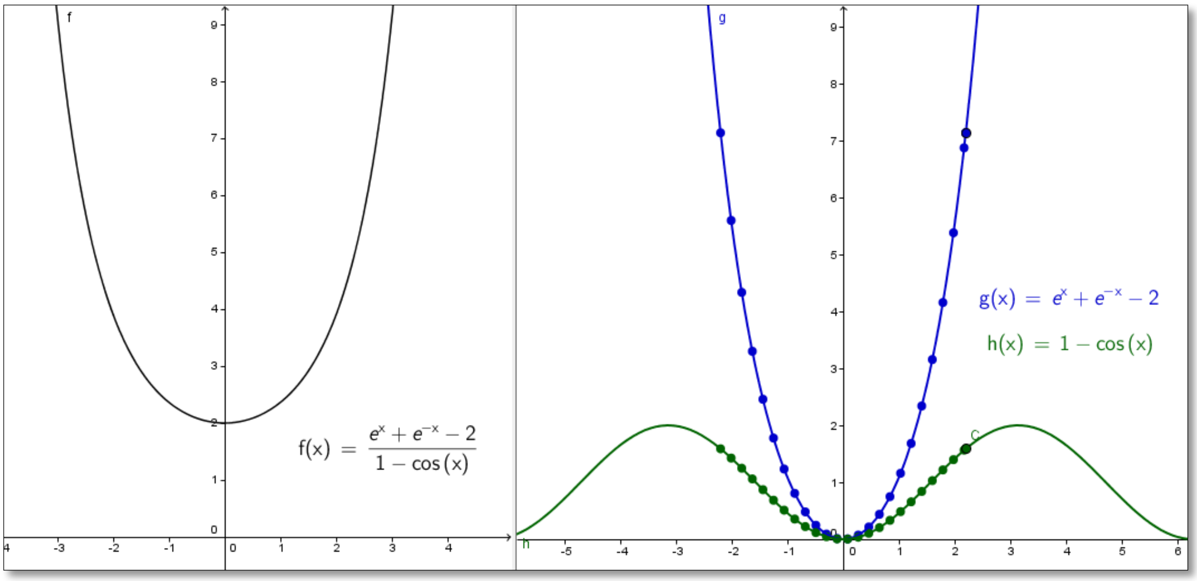
Marin e Penteado (2011) investigaram como professores do ensino superior estão usando a tecnologia da informação para apresentarem suas aulas de Cálculo. Segundo os autores, a capacidade da tecnologia digital possibilita planejar atividades de ensino antes impensáveis com o uso de lousa e giz e, para o ensino de matemática, há vários softwares que permitem explorar os conceitos de matemática de uma forma mais dinâmica. Ainda segundo os autores, com base na entrevista realizada com os professores universitários que utilizaram a tecnologia da informação nas suas aulas de Cálculo, no que diz respeito a preparação das aulas, os dados mostram a existência tanto de atividades coletivas em relação ao uso da tecnologia quanto individual. Os autores destacam que, os entrevistados que afirmaram trabalhar com auxílio das tecnologias de forma individual, se deu pelo fato de seus colegas de departamento não se sentirem motivados a enfrentar o desafio de aderir às tecnologias.

Richit (2013) propôs uma oficina cujo objetivo era apresentar os conceitos de Cálculo como funções, limites, derivadas e integrais, numa perspectiva de investigação com o auxílio do software Geogebra. "Entendemos que as tecnologias propiciam investigações matemáticas, pois, com uma única atividade podem emergir outras perguntas, problemas, observação de regularidades, investigações e outros conceitos podem ser retomados ou abordados" (RICHIT 2013, p. 5)

Alves (2012) evidencia as potencialidades do software Geogebra no contexto do ensino de conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, trazendo exemplos de interpretações geométricas das formas indeterminadas com o auxílio do *software* Geogebra. O autor apresenta um mecanismo de aprendizagem que, segundo ele, permite ao aluno um entendimento a partir da visualização acerca dessas indeterminações, fato esse que evita o algebrismo exagerado que predominam nos livros de Cálculo, além de fornecer um meio alternativo para o entendimento da referida regra, tendo em vista que, segundo esse autor, os argumentos formais que sustentam a fundamentação da demonstração da regra de L'Hôpital nem sempre são acessíveis a todos os alunos dos períodos iniciais de estudos acadêmicos no Brasil.

Destacamos no seu trabalho exemplos de algumas funções indeterminadas e apresentaremos as considerações e análise feitas pelo autor no que diz respeito à manifestação geométrica de alguns tipos de formas indeterminadas. Inicialmente, o autor apresenta a função $f(x) = (e^x + x^{-x} - 2)/(1 - \cos(x))$ descontínua em $x = 0$ (Figura 1, lado esquerdo) o que caracteriza uma indeterminação do tipo $0/0$ e, em seguida, chama a atenção para o fato de que $1 - \cos(x)$ se aproxima mais rapidamente de zero do que $x^x + e^{-x} - 2$, fato este que justifica o emprego da regra de L'Hôpital, como mostra a figura 1 (lado direito).

Figura 1 - Manifestação da Indeterminação do tipo 0/0 por meio geométrico

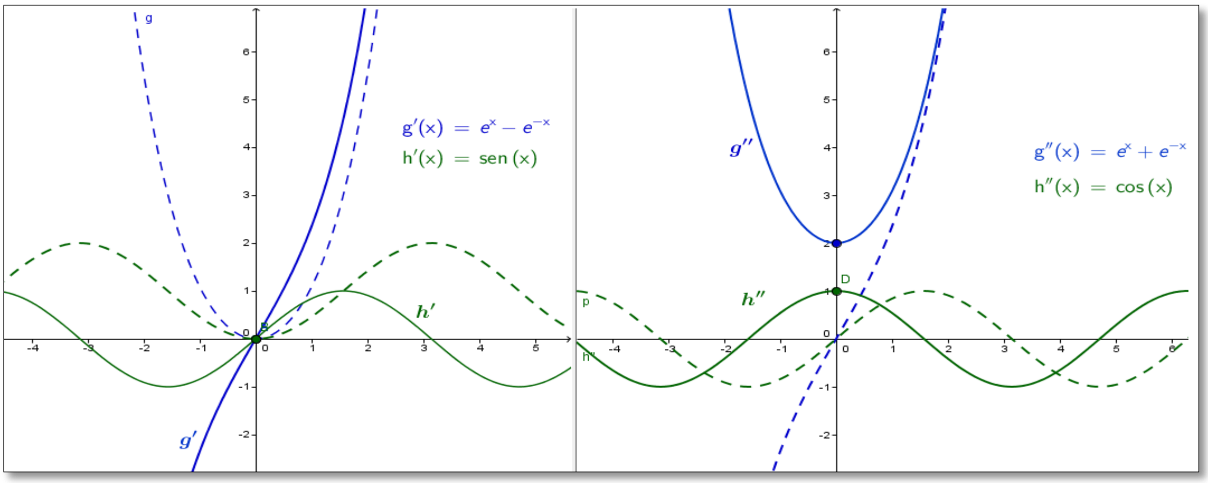


Fonte: Produção nossa

O autor, mediante inspeção geométrica mostra a necessidade da aplicação duas vezes sucessiva da referida regra. De fato, após a primeira aplicação, ambas as funções $g'(x) = x^x - e^{-x}$ e $h'(x) = sen\,(x)$ não são definidas para $x = 0$ persistindo, dessa forma, a indeterminação $0/0$ (figura 2, lado esquerdo). Neste exemplo, após a aplicação duas vezes da Regra de L'Hôpital chega-se ao valor 2 (figura 2, lado direito). O pesquisador destaca que devemos adquirir o entendimento sobre a necessidade da aplicação sucessiva da regra.

Num segundo exemplo, é apresentada uma situação de indeterminação do tipo, por meio do limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$. Para que pudéssemos entender melhor o comportamento das

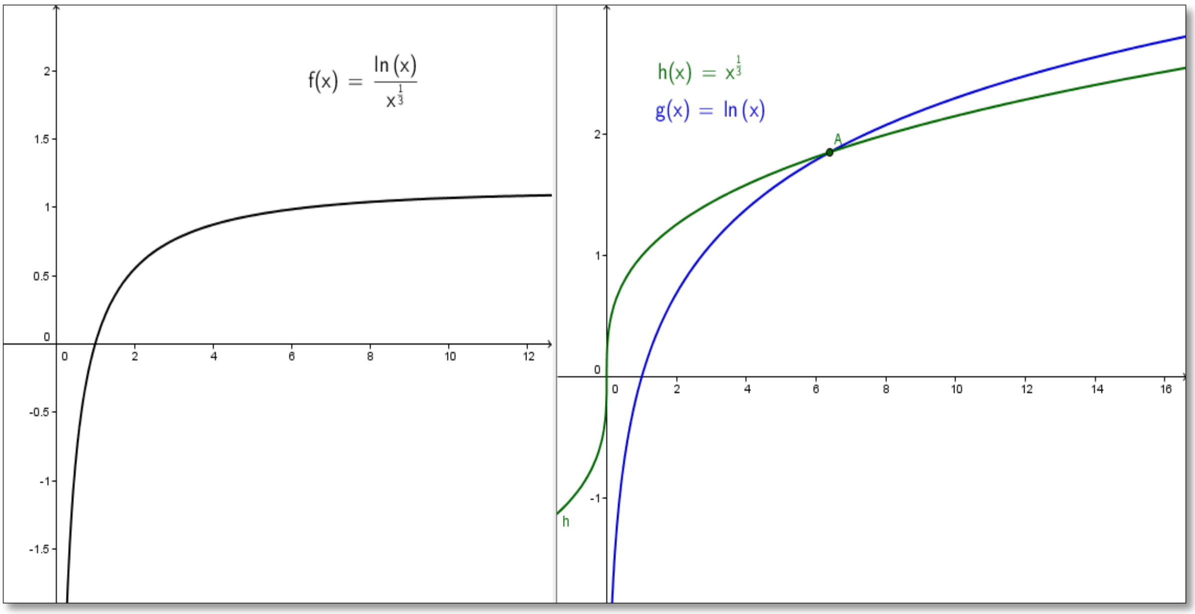
Figura 2 - Identificação Geométrica para aplicação da Regra de L'Hôpital



Fonte: Elaboração própria

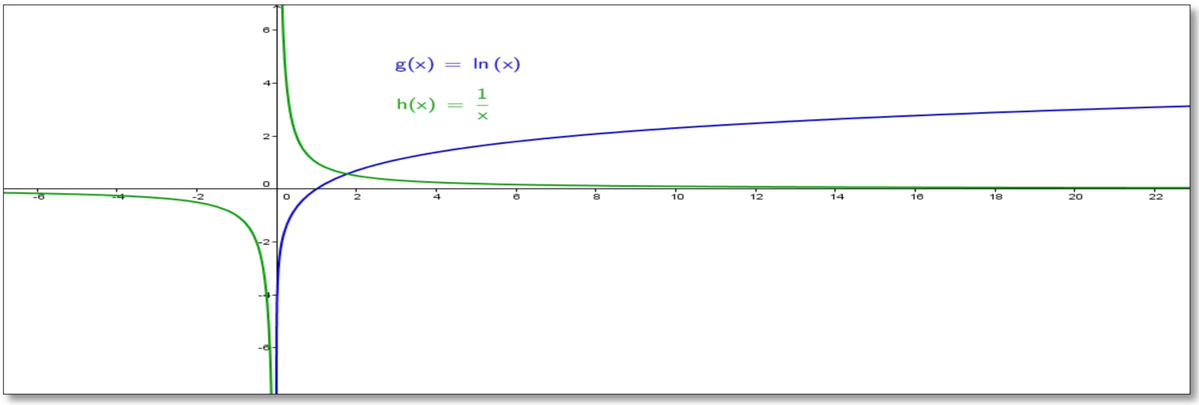
funções envolvidas usamos o software Geogebra com um ponto dinâmico e a respectiva imagem em cada uma das funções e, a partir de uma animação, percebemos que a função $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$ atinge seu valor máximo em $x = 20{,}09$ e, a partir daí passa a ter um decrescimento lento, tendendo a zero. Vale ressaltar que tal fato foi verificado no intervalo $[0, 100.000]$. Em relação as funções $\ln(x)$ e $\sqrt[3]{x}$, figura 3 lado direito, percebemos um crescimento indefinido em ambas quando x cresce tendendo a $+\infty$ e a partir da interseção dos gráficos, que ocorre em $x = 93{,}35$, percebe-se um crescimento muito rápido do denominador $\sqrt[3]{x}$ em relação ao numerador $\ln(x)$ aproximando, desse modo, o quociente $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$ de zero. Alves (2012) explica que para valores grandes de x a representação ∞/∞ deve ser interpretada de maneira dinâmica e intuitiva, como o infinito do denominador maior que o infinito do numerador. Em seguida, o autor apresenta mais dois exemplos da manifestação de formas indeterminadas do tipo 0.(- ∞) e 1^{∞} e explica que diante dessas indeterminações nada se pode concluir sem o uso da fórmula da Regra de L'Hôpital. De fato, vemos por intermédio da figura 4 que a imagem de $\ln(x)$ cresce indefinidamente enquanto a imagem de $\dfrac{1}{x}$ decresce indefinidamente tendendo a zero. Em princípio a intuição nos leva a crer que se trata apenas de uma indeterminação do tipo $-\infty/\infty$, no entanto, obtendo as derivadas sucessivas das funções $\ln(x)$ e $1/x$ percebemos que as funções continuam tendendo a $-\infty$ e $-\infty$, respectivamente.

Figura 3 - Noção da velocidade de crescimento das funções f e g



Fonte: Elaboração nossa

Figura 4 - Descrição geométrica da indeterminação $\mathbf{0}.\infty$



Fonte: Elaboração nossa

No seu artigo cujo título é "Uma Sequência Didática para explorar a regra de L`Hospital com o uso da Tecnologia", Alves e Borges Neto (2012) apresentam a Engenharia Didática envolvendo situações de ensino na abordagem da Regra de L'Hôpital apoiada na metodologia de ensino Sequência Fedathi, num curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Educação, Ciência e tecnologia do Ceará – IFCE. "Produziu-se um clima de investigação em duas atividades, com a participação de quatro duplas de alunos da Licenciatura em Matemática, em que o uso do Geogebra se mostrou essencial" (ALVES; BORGES NETO, 2012, p.337). Esses autores relatam que a sequência de experimentação de ensino foi apoiada na metodologia de ensino Sequência Fedathi em que o uso do software Geogebra teve papel fundamental. Na etapa de análise a *posteriori*, da pesquisa, os autores relatam que, com o auxílio do software, os alunos compararam os dados de natureza geométrica com os de natureza analítico-algébrico e nesse processo o *software* possibilitou um entendimento da manifestação das indeterminações de natureza geométrica além de evitar a aplicação mecânica da regra, o que ocorre com grande frequência nos processos de ensino que se limitam ao quadro algébrico.

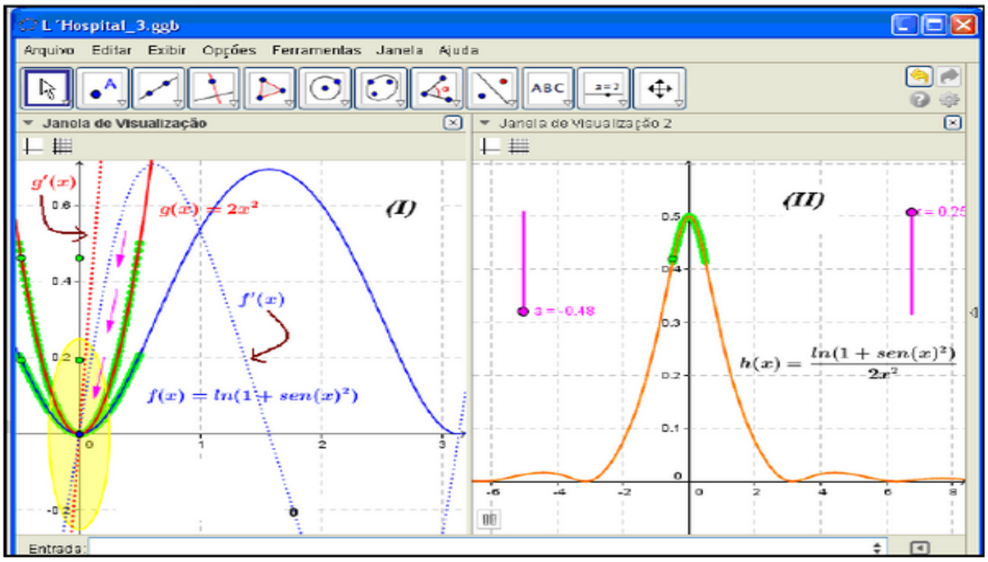
Em seu trabalho *Exploring the L´Hospital rule using Geogebra* publicado em *Geogebra International Journal of Romania,* Alves (2013) critica a forma de abordagem dos livros de Cálculo de autores brasileiros que enfatizam apenas os aspectos processuais e argumentos analíticos e apresenta uma proposta de abordagem da regra de L'Hôpital em que se evita o emprego precipitado das regras analíticas usuais. Segundo Alves (2013, p. 15):

> [...] o software Geogebra pode ajudar o professor a motivar a participação dos alunos, ao mesmo tempo, eles visualizam e podem manipular e explorar os gráficos complexos das funções no ambiente de computador.

Nesse trabalho, o autor discute a forma de abordagem dos símbolos 0/0, ∞/∞, 0^0, 0^∞, 1^∞ e $\infty - \infty$ afirmando que o problema está no estilo formal de ensino no ambiente acadêmico. Na figura 5 está representada a primeira situação problema em que o autor solicita que seja decidida a natureza do limite indicado por $\lim_{x \to ?} \ln \frac{(1+sen^2 x)}{2x^2}$ e indique o ponto em que ocorre uma forma indeterminada. Em uma análise a respeito do problema, o autor apresenta um procedimento em busca da solução com a utilização da visualização e, de maneira paralela, desenvolve a solução analiticamente. Alves (2013, p. 16) afirma que o caso de indeterminação fica claramente evidenciado por meio da visualização do gráfico, uma vez que as funções estão cada vez mais próximas do ponto (0,0) quando x tende a zero e que faz sentido usar a regra de L'Hôpital, considerando que por meio do gráfico (figura 5) vemos que a oscilação da curva que representa a função tende a diminuir quando tomamos valores cada vez maiores de *x*. Após uma segunda diferenciação das funções f e g chega-se à solução procurada.

Consideramos os procedimentos descritos por Alves (2013) de grande relevância para obtenção de um aprendizado significativo, tendo em vista que para cada passo realizado sob o ponto de vista analítico há um significado geométrico que, segundo Gouveia (2010), ao apresentar diversas metodologias para a aprendizagem e desenvolvimento dos conceitos matemáticos por meio da visualização estamos permitindo que os alunos construam seu próprio conhecimento.

Figura 5 - Manifestação da indeterminação 0/0



Fonte: Elaboração nossa

Desse modo, com base nessa proposta de metodologia por meio da visualização, apresentaremos na próxima seção os objetivos do nosso trabalho.

1.2 Objetivos

Na nossa concepção, a situação didática bem elaborada com a utilização de recursos tecnológicos e uma metodologia adequada, disponíveis para professores de Cálculo, pode contribuir de maneira significativa para os processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina. Pensando dessa forma, traçamos o objetivo geral e os objetivos específicos de nossa pesquisa.

Objetivo geral:

- Elaborar e descrever situações de ensino apoiadas na tecnologia relativas às formas indeterminadas.

Objetivos específicos:

- Elaborar e apresentar situações didáticas amparadas pela sequência Fedathi sobre as formas indeterminadas de funções e Regra de L'Hôpital;
- Descrever com auxílio do software Geogebra as manifestações geométricas das formas indeterminadas de funções;

- Estruturar um site para apresentação de situações didáticas com arrimo no software Geogebra.

1.3 Desenvolvimento e organização

No capítulo 1, após a apresentação do problema do nosso trabalho partiremos para o referencial teórico elaborado a partir de resultados de pesquisas bibliográficas a respeito do ensino de Cálculo e utilização de Tecnologias da informação nessa disciplina.

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos Teórico-Metodológico, com uma explanação a respeito da metodologia de ensino a Sequência Fedathi e da metodologia de pesquisa, no caso a Engenharia Didática, no intuito de construirmos um saber significativo.

No capítulo 3, apresentamos nossa pesquisa em seu contexto: Apresentação do Software Geogebra no contexto das formas indeterminadas seguido dos aspectos Históricos da Regra de L'Hôpital. Considerando que nosso trabalho foi elaborado segundo os pressupostos teóricos das etapas da Engenharia Didática em que um dos pontos que essa metodologia sugere nas análises preliminares está relacionado ao estudo da organização matemática, fizemos uma análise da estrutura matemática do conceito bem como elementos relacionados a seus pré-requisitos como limite, derivada e continuidade. Ainda nesse capítulo fizemos uma análise de quatro livros de Cálculo para que pudéssemos compor um conjunto de subsídios que nos embasasse na elaboração das sequências didáticas.

O capítulo 4 caracteriza a análise a priori da Engenharia Didática (ED). Nesse capítulo, apresentamos a descrição detalhada das atividades propostas representadas por cinco sequências didáticas sobre as Formas Indeterminadas 0/0, $\infty/\infty, \infty-\infty$, $0.\infty$ e $f(x)^{g(x)}$ quando $\lim_{x\to a} f(x)=1$ e $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$.

O capítulo 5 apresenta nosso Produto Educacional. Por se tratar de um mestrado profissional, a pesquisa deve apresentar, obrigatoriamente, um produto educacional que forneça uma contribuição para o ensino e que possa ser consumido pela comunidade. Desse modo, nesse capítulo, elaboramos e estruturamos um blog composto por videoaulas com base nas sequências didáticas e que possam ser utilizadas por professores de cálculo em suas aulas como uma maneira alternativa de abordagem das Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôpital. Trazemos também no blog, teses, dissertações, artigos cujos temas estão relacionados ao ensino de cálculo, sobretudo, associado ao uso das tecnologias de visualização nessa disciplina.

Já nas considerações finais, no capítulo 6, retomamos a temática da investigação, os objetivos traçados e apresentamos um conjunto de considerações consistentes à nossa questão investigada.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, faremos uma abordagem sobre dois temas de grande importância em nosso trabalho: A Engenharia Didática, que será utilizada como metodologia de pesquisa e a Sequência Fedathi como metodologia de ensino no desenvolvimento das sequências didáticas visando ao nosso produto final.

2.1 Sequência Fedathi como metodologia de ensino

Nosso objetivo, neste trabalho, foi desenvolver e apresentar sequências didática das formas indeterminadas e Regra de L'Hôpital, por um caminho diferente daquele que é geralmente exposto pelos livros de Cálculo. Deste modo, orientamo-nos de acordo com as etapas constituintes da sequência Fedathi (SF).

Trata-se de uma proposta teórico-metodológica de ensino de matemática que objetiva uma melhoria da prática pedagógica e que "tem como essência contribuir para que o aluno supere os obstáculos epistemológicos e didáticos que ocorrem na abordagem dos conceitos matemáticos em sala de aula" (SANTOS; LIMA; BORGES NETO, 2013, p. 7633).

A (SF) tem seus pressupostos teóricos com base num movimento "chamado no meio científico de *transposição didática interna*[3] " (DORIER, 2003, p.3 *apud* ALVES, 2011, p. 152). Segundo Santos, Lima e Borges Neto (2013, p. 7633) no que diz respeito à Sequência Fedathi:

> Essa Teoria pode ser utilizada em diversas áreas de conhecimento, partindo da premissa de que uma construção deve ser executada, integrando o projeto teórico e prático em ações didáticas concretas, sendo útil para planejar, (re)construir, investigar e buscar na análise dos dados extraídos da realidade a validação ou refutação das hipóteses levantadas durante o desenvolvimento das sequências didáticas.

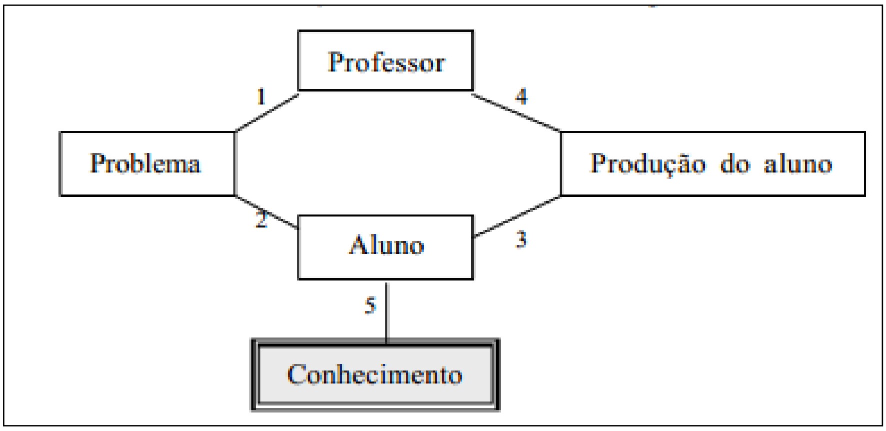
[3] Instrumento por meio do qual se transforma o conhecimento científico em conhecimento escolar, para que possa ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos. Chevallard conceitua "transposição didática" como o trabalho de fabricar um objeto de ensino, ou seja, fazer um objeto de saber produzido pelo "sábio" ser objeto do saber escolar.

“A Sequência Fedathi, essencialmente, se caracteriza por possibilitar que o aluno vivencie a experiência Matemática, e por exigir do professor uma atitude diferente da qual estamos acostumados a ver nas salas de aula” (SANTOS, 2011, p. 2). Desse modo, espera-se que o professor assuma determinadas posturas, como a de versatilidade, a de pesquisador, a de observador, a de motivador e, sobretudo, a capacidade de intermediar e intervir no processo ensino e aprendizagem quando necessário.

Segundo Borges Neto *et al* (2001), O aluno, com a orientação e mediação do professor, reproduz o aprendizado que a humanidade percorreu para compreender os ensinamentos matemáticos, sem que, para isso, necessite do mesmo período de tempo que a história dispôs para chegar ao cenário atual.

Entendemos que o procedimento dessa reprodução em sala de aula aconteça considerando que, nesse processo, o aluno seja o autor da construção dos conceitos de maneira significativa por meio da resolução de problemas em que o professor assume o papel de mediador, conduzindo-o a uma ação de construção do conhecimento. Nessa metodologia, o professor deve considerar as experiências matemáticas adquiridas pelo aluno no seu cotidiano e conhecimentos anteriores a respeito das atividades desenvolvidas.

Figura 6 - Relação entre professor e aluno com base nos pressupostos da S.F



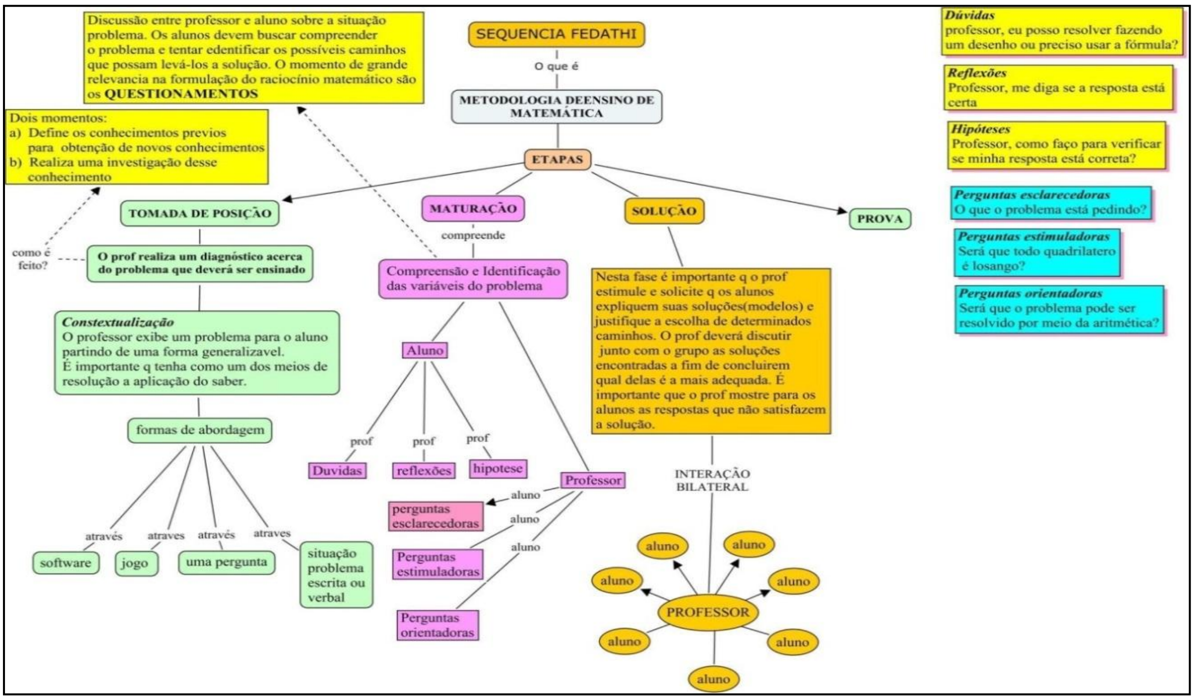
Fonte: Elaboração nossa

No esquema apresentado na figura 6 por Borges Neto *et al* (2001), o processo é iniciado pelo professor ao apresentar para o aluno um problema relacionado ao tema que se pretende ensinar, partindo da forma generalizável e por meio de uma linguagem apropriada. A partir daí o aluno será instigado pelo professor mediador, mediante questionamentos, a enxergar as variáveis que o levará à solução do problema que por sua vez será analisada pelo professor e socializada com os demais alunos. Esse processo de mediação deve culminar na construção do conhecimento por parte do aluno.

> Nesse modelo, ao se deparar com um problema novo, o aluno reproduz os passos que um matemático utiliza ao se debruçar sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos anteriormente adquiridos para ajudar na solução, testa os resultados encontrados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo (BORGES NETO, et al., 2001, p.6)

Para a realização do mecanismo apresentado acima, a (SF) se utiliza de quatro etapas, a saber: Tomada de posição; Maturação; Solução e Prova. No mapa conceitual da figura 7 estão representadas as quatro fases da (SF) com a descrição das respectivas características.

Figura 7 - Mapa conceitual das etapas da SF



Fonte: Elaboração nossa

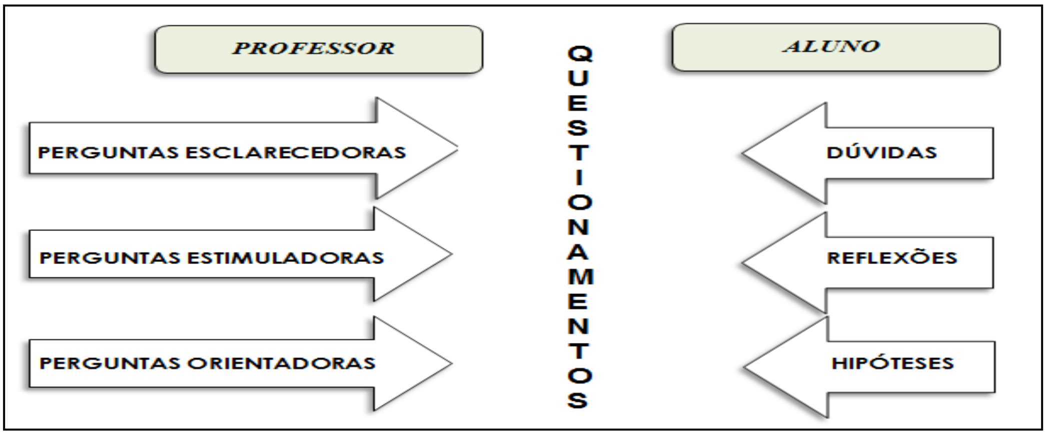
Na **tomada de posição**, será apresentado para o aluno um problema partindo da forma generalizável e tendo como um dos meios de resolução a aplicação do conhecimento a ser aprendido. A apresentação do problema pelo professor pode ser realizada de diversas formas: Exposição verbal por meio de um software ou um jogo, de uma pergunta ou de um problema. Antes da apresentação do problema é importante que o professor realize um diagnóstico a respeito do nível de conhecimento do aluno e dos pré-requisitos necessários à aquisição de novos conhecimentos. Segundo Borges Neto *et al* (2001) o professor é investigador da própria sala de aula. Entendemos que uma das principais características dessa teoria diz respeito à atividade entre professor e aluno, desse modo, o professor deve esclarecer as dúvidas que por ventura venham a surgir e instigar os alunos a uma ação colaborativa, interativa e cooperativa. É imprescindível que o professor utilize uma linguagem acessível, proporcionando ao educando uma melhor desenvoltura no desenvolvimento das etapas subsequentes. Borges Neto *et al* (2001) explica que para alcançar seus objetivos é necessário que o professor prepare o ambiente, conquiste e prepare o aluno, só assim seu planejamento implicará, de maneira positiva, condução das aulas. No caso da nossa primeira sequência didática no capítulo quatro, na etapa "tomada de posição" da Sequência Fedathi, é apresentado ao aluno o gráfico da função $h(x) = \frac{(e^{x} + e^{-x} - 2)}{1 - \cos x}$ e solicitado que ele, por meio do *software* Geogebra, verifique a existência de pontos de indeterminação e, em seguida, analise o comportamento da função nesse ponto.

Na **maturação**, fase caracterizada pela compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema, é o momento em que ocorre a efetiva participação do professor como mediador no processo de aquisição do conhecimento. Na concepção de Alves (2011), esta fase da (SF) envolve a identificação de conjecturas elaboradas pelos alunos e aperfeiçoadas pelo professor e que detém maior relevância para cada tarefa.

Nesta fase, por meio de perguntas esclarecedoras, perguntas motivadoras e orientadoras, o professor instiga o aluno a identificar os possíveis caminhos que os levem a solução do problema. "Feitas suas interpretações, os alunos deverão identificar quais são os dados contido no problema, qual a relação entre eles e o que está sendo solicitado pela atividade" (BORGES NETO, *et al*, 2007, p. 8). Durante essa fase, o professor deve atentar para as estratégias e interpretação dos alunos no que diz respeito às variáveis envolvidas no problema, no intuito de identificar o momento oportuno de intervir utilizando-se do seu papel de mediador do processo. A fase da maturação está representada na figura 8. No caso da segunda sequência didática, na página 27 do capítulo quatro, nesta fase da sequência Fedathi, o professor espera que o aluno tome a iniciativa para verificação da condição da aplicação da regra de L'Hôpital por meio da reta tangente ou função derivada.

Caso o aluno apresente dificuldade na identificação dessas variáveis, o professor deve intervir com perguntas esclarecedoras no intuito de instigar o aluno a construir seu próprio resultado.

Figura 8 - Representação da fase maturação da SF



Fonte: Elaboração nossa

A **solução** diz respeito à fase em que ocorre a apresentação e organização dos modelos que possam conduzir a solução do problema. Vale ressaltar que nessa etapa é fundamental que ocorra uma socialização em relação às ideias, opiniões e discussões entre os alunos.

Menezes (2014) destaca a importância da discussão das soluções. Segundo ele a socialização das diferentes compreensões e representações do grupo promove a busca pela solução da situação-problema.

Ao final, o professor solicita que os alunos exponham seus modelos e justifiquem o caminho utilizado, questionando-os sobre a utilização de maneira integral das variáveis envolvidas no processo de resolução do problema. Nessa fase, os alunos precisarão de tempo para que possam analisar suas respostas por meio de tentativas e erros apontados pelo professor. Borges Neto *et al* (2007, p.8) ressalta que:

> É importante que o professor motive os alunos a buscarem formas de verificação dos resultados encontrados. A refutação dos modelos inadequados poderá ser realizada através de contraexemplos. O professor deverá mostrar para os alunos que a solução ideal deve satisfazer não só o problema em questão ou somente determinadas situações, mas sim, o número maior possível de situações que necessitem desse conhecimento para serem resolvidas.

Após as discussões realizadas na etapa anterior a respeito dos modelos apresentados pelos alunos, a etapa da **prova** consiste na apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado. Nesta fase, a didática do professor é imprescindível para a absolvição dos novos conhecimentos por parte dos alunos, considerando que o professor deve vincular o modelo científico já existente ao modelo apresentado pelos alunos.

Na seção seguinte, apresentaremos a Engenharia Didática que, assim como a Sequência Fedathi é também uma metodologia de ensino e de investigação que, segundo

Santos (2011), pode ser utilizada em diversas áreas de conhecimento. “No momento em que o professor está aplicando a Sequência Fedathi, automaticamente, está utilizando a Engenharia Didática, que faz parte de todo o desenvolvimento e experimentação na Sequência Fedathi.” (SANTOS, 2011, P.2).

2.2 A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que surgiu na didática da matemática francesa no início dos anos 80 e se caracteriza pela observação e análise de sequências de ensino. Tal conceito foi elaborado inicialmente por Guy Brousseau e posteriormente divulgado por Michèle Artigue no início dos anos 80. Essa metodologia pode ser entendida tanto como uma metodologia de pesquisa específica, como uma sequência didática *“*A engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (AUMOLOUD, 2007, P. 171).

A engenharia didática recebe essa dominação por representar uma sequência de mecanismo que, segundo Artigue (1988), é semelhante a uma atividade desenvolvida por um engenheiro que ao desenvolver um projeto se apoia em conhecimentos científicos para solucionar problemas complexos.

> Esse termo foi cunhado para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico, mas ao mesmo tempo, se obriga a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1996 apud FANTINELLE, 2010, P.15)

A Engenharia Didática une “o plano teórico da racionalidade à experimentação da prática educativa, numa execução que envolve desde o pensar das ideias iniciais até a prática, que no caso do professor pesquisador, será quase sempre em sala de aula” (SOUZA, 2013, P. 7576).

Para Artigue (1996, apud, BRUM, 2014, p. 2), “é preciso uma metodologia de investigação científica que procure extrair relações entre pesquisa e ação sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos preestabelecidos”. Nesse sentido, na perspectiva de Brum (2014) a Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa caracteriza-se como produto didático que envolve plano de ensino e experimentos baseados nas realizações didáticas.

Na nossa pesquisa, encontramos várias investigações no campo da Educação Matemática que foram concebidas com a aplicação dos pressupostos da Engenharia Didática, dos quais podemos citar entre outros: Rocha (2010) e Alves (2013). Este último, em sua pesquisa sobre Funções Implícitas, descreve apenas as duas primeiras etapas da Engenharia Didática.

Nossa opção por essa metodologia está no fato de que se trata de um referencial de pesquisa que tem por objetivo unir a pesquisa teórica à ação prática, tendo como foco o ensino de matemática.

Numa pesquisa cuja metodologia está fundamentada nas pressuposições da Engenharia Didática, é possível identificar algumas etapas de seu desenvolvimento. Tais etapas são denotadas por: análises prévias ou preliminares, análise a *priori*, experimentação e análise a *posteriori*. Vejamos a seguir:

Análises prévias ou preliminares

Nesta fase, são coletados elementos que representem papeis fundamentais na pesquisa no sentido de se fazer uma reflexão sobre eles e com isso estruturar uma maneira positiva de intervenção no ensino. Santos (2011) explica que as Análises preliminares é a fase em que vamos pesquisar o que julgamos necessário para o desenvolvimento da sequência didática.

Almouloud (2007) afirma que um dos objetivos das análises prévias está relacionada à identificação dos entraves em relação ao ensino e aprendizagem do objeto de estudo além de nortear de maneira fundamentada os pressupostos teóricos e metodológicos da pesquisa. Abaixo apresentamos a descrição das vertentes dessa etapa apresentada por Almouloud (2007):

- estudo da organização matemática, que compreende um estudo da gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas; obstáculos epistemológicos relativo ao objeto de pesquisa; análise da estrutura matemática do objeto investigado; análise do ensino usual e seus efeitos; considerar os objetivos específicos;
- análise de organização didática do objeto matemático escolhido para a investigação. Deve-se: Analisar as diferentes instituições de ensino em que o

saber deve ser ensinado e aprendido; Realizar uma análise crítica dos livros didáticos; realizar um levantamento bibliográfico sobre os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do objeto de estudo;

- definição das questões de pesquisa e justificar suas escolhas feitas.

Segundo Artigue (1988), citada por Almouloud (2007, p. 72), cada uma dessas fases pode ser retomada e aprimorada durante a fase de investigação, tendo em vista as necessidades emergentes.

Nesta fase da Engenharia Didática, foi realizado um estudo a respeito do nosso objeto de pesquisa e dos prerrequisitos necessários a sua compreensão além de uma investigação a respeito do *software* Geogebra em alguns trabalhos sobre o ensino de Cálculo.

Análises *a priori*

Almouloud (2007) afirma que, nesta fase, com o intuito de responder às questões e validar as hipóteses levantadas na fase anterior, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema, nas quais o pesquisador delimita certo número de variáveis sobre os quais o ensino pode atuar. No entanto, considerando os objetivos de nossa pesquisa, é importante frisar que iremos desenvolver apenas as duas primeiras etapas da Engenharia Didática tendo em vista os nossos objetivos. O autor recomenda que na construção dessas situações didáticas devem-se levar em consideração alguns pontos que estão relacionados abaixo:

- Que os alunos entendam facilmente os dados do problema;
- Essas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que se deseja explorar e no qual o conhecimento está inserido;
- Os conhecimentos, objetos de aprendizagem, são ferramenta que devem ser utilizados em última instância, para se obter a solução final.
- O problema deve envolver vários domínios de conhecimentos
- As atividades devem ter como objetivos: auxiliar os alunos na construção do conhecimento de maneira construtiva e significativa. As situações-problema devem ter a característica de instigar o aluno a refletir e evoluir por iniciativa própria, na busca da obtenção de novos conhecimentos.
- O professor é apenas um mediador do processo, portanto ele deve instigar o aluno a um debate de confrontação dos resultados obtido pelos demais alunos.

- É importante que o professor, após o debate, selecione e organize as descobertas dos alunos e sistematize os novos conhecimentos e saberes, no intuito de contemplar os alunos com uma melhor compreensão do objeto.

Segundo Nasserala (2014), nesta fase, o professor deverá antecipar as atitudes que os alunos porventura terão durante o desenvolvimento da atividade e preparar-se para mediar esses comportamentos, de modo que resultem na aprendizagem esperada para aquela sessão didática.

Almououde (2007) ressalta a importância dessa fase considerando que sua qualidade depende do sucesso da situação-problema além de permitir ao professor controlar a realização das atividades dos alunos e que é possível, segundo Pommer (2013), antecipar, na análise a priori, o que é imaginável de ocorrer na aprendizagem, pela escolha conveniente das variáveis didáticas.

Ainda de acordo com Pommer (2013), cabe ao professor utilizar, propor e procurar situações de aprendizagem em que os alunos possam dar sentido ao conhecimento, por meio da contextualização e personalização do saber.

Experimentação

Representa a fase que configura um contato com os sujeitos a serem pesquisados, da explicitação dos objetivos e condições de trabalho; momento em que se estabelece o contrato didático.

> [...] é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica, um retorno à análise *a priori,* um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise á *posteriori* que se apoia num conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. (ALMOULOUD, 2007, p. 177)

Representa a “ida a campo para aplicação da sequência didática com uma certa população de alunos e os registros de observações realizadas durante ela” (ARTIGUE, 1988, apud SOUSA; CORDEIRO,2005 P.37). É nesse momento que ocorre a aplicação da sequência Fedathi.

Análise *a Posteriori*

Essa fase se caracteriza pela verificação das hipóteses definidas na análise a priori podendo comparar as sequências didáticas com os resultados de experimentação. Para Artigue (1996) citada por Brum (2014), os dados são geralmente completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou a partir dele. Nessa etapa, são sintetizados os dados colhidos e a confrontação com a análise a priori, proporcionando a interpretação dos resultados e expondo em que condições as questões levantadas foram respondidas.

3 ANÁLISE PRELIMINARES

Nesta fase, fundamentamos toda a elaboração do nosso trabalho, momento em que buscaremos todos os dados a fim de que possamos refletir sobre eles e com isso estruturar uma maneira de intervir no ensino. Santos (2011) esclarece que é nessa fase em que realizaremos uma pesquisa a respeito de todos os elementos imprescindíveis para o desenvolvimento da sequência didática, ou seja, “vamos pesquisar o que precisamos para desenvolver a sequência didática” (SANTOS, 2011, p. 2).

Desse modo, faremos um estudo sobre os livros de Cálculo, verificando a forma como eles abordam o tema Formas Indeterminadas e regra de L’Hôpital, a fim de que possamos ter uma visão diagnóstica do ensino atual e para que isso nos forneça subsídios que nos auxilie na construção das sequências de ensino. Nessa seção, realizamos também um estudo sobre as formas indeterminadas e sobre conceitos que julgamos necessários para a compreensão desse tema bem como uma apresentação do *software* Geogebra utilizado como ferramenta didática e facilitadora no processo que, de acordo com Assumpção e Ferreira (2012), os recursos tecnológicos, em particular o *software* GeoGebra, podem ser considerados como ferramentas facilitadora no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

3.1 O software GeoGebra

Concordamos com Hiele (1986) quando afirma que a visualização tem uma importância fundamental no processo de construção do conhecimento. De acordo com esse autor, a representação mental dos objetos geométricos e a disposição formal das propriedades geométricas de um conceito geométrico representam elementos básicos para o entendimento da formalização de um conceito. Nesse sentido, Ramalho (2013) aponta o uso dos computadores como uma opção na grande diversidade de tecnologia que podem ser utilizadas no intuito de facilitar a aprendizagem. Segundo esse autor, o uso desses elementos promove o aumento das possibilidades em termos de estratégias pedagógicas que favorece a construção do conhecimento nos processos de ensino e de aprendizagem. Para Borchardt (2013) o uso das tecnologias não se destina apenas a "facilitar" os cálculos, a tecnologia permite transformar os processos de pensamento e os processos de construção do conhecimento.

O número de softwares educacionais disponíveis e gratuitos que podem auxiliar o professor em sua prática pedagógica é bastante considerável, no entanto é fundamental que, antes da escolha por um determinado software, realize-se uma avaliação a respeito da qualidade e da adequação de tais programas no tema abordado, uma vez que nem todos podem contribuintes para a aprendizagem.

Nesse sentido, destacamos os softwares de Geometria Dinâmica que, segundo Rithit (2005) dispõem de diversos recursos que podem enriquecer a abordagem de conceitos, como a opção animar[4], e a facilidade na visualização de formas e as várias funções que promovem a interação aluno/computador.

Para o ensino da Geometria, uma das grandes vantagens em se trabalhar com softwares educacionais é o pensamento visual, que "ao permitir uma fonte rica de imagens virtuais privilegia a visualização e compreensão de conceitos matemáticos, que outrora seriam de difícil percepção sem esse recurso" (RAMALHO, 2013, p.6)

Neste sentido, destacamos o Geogebra, que é um software que vai além da Geometria Dinâmica, mas é classificado com um software de Matemática Dinâmica. Trata-se de um software desenvolvido por Markus Horenwarter e Judith Preiner, com início do projeto em 2001 na *University of Salzburg* e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University e destinado a ser utilizado, sobretudo, no ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas básicas, podendo ser usado também em nível superior.

Para MOLON (2013) O Geogebra possui inúmeras possibilidades de trabalho e aplicações na matemática dispondo de recursos dinâmicos que permite uma análise crítica de diversos problemas que envolvem algum tipo de variação. Além disso, trata-se de um software que possui um recurso computacional poderoso, pois permite aliar o estudo da álgebra ao da geometria e ao do Cálculo.

Para nossa proposta de sequência didáticas por meio de vídeos com o amparo da sequência Fedathi como metodologia de ensino, usamos este software como ferramenta facilitadora do ensino, considerando suas características relevantes para a atividade proposta.

[4] Recurso do *software* Geogebra que possibilita a animação de um objeto disposto na região gráfica.

Neste trabalho, fazemos uso da versão 4.4 criada em 01 de dezembro de 2013. Sendo aplicativo multiplataforma[5] ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

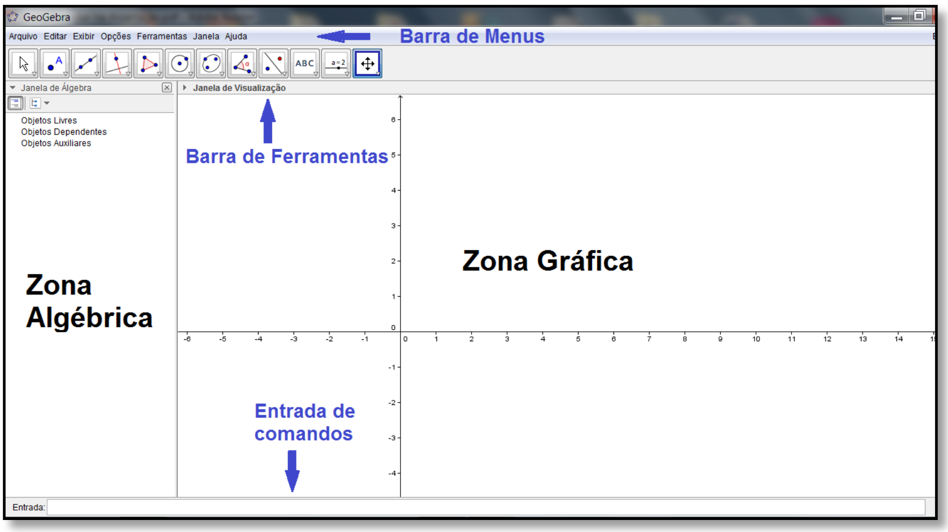
O Geogebra é composto por ferramentas tradicionais da geometria, álgebra e Cálculo, apresentando dois pontos de vista diferentes de um mesmo objeto matemático que podem ser visualizados na janela gráfica e na janela de álgebra.

Enquanto na janela de visualização os objetos são construídos e editados, na janela de álgebra podem-se identificar os respectivos elementos algébricos, sendo essa a principal característica do *software*. Todas essas características mostram que o Geogebra é mais do que um software de Geometria Dinâmica, se lançando no campo de *softwares* educacionais livres e multiplataforma como já foi mencionado anteriormente.

A figura 9 apresenta a interface do Geogebra após ser carregado, destacando os seguintes elementos: A **barra de menus** fornece opções para salvar o projeto em arquivo (ggb) e para controlar configurações gerais. A **Barra de Ferramentas** apresenta todas as ferramentas úteis e necessárias para realização de atividades como a construção de pontos, retas, gráficos e etc. Cada ícone dessa barra implica outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito. A **janela de Álgebra** representa a área em que são exibidas as coordenadas, equações e outros objetos construídos na janela de visualização. A janela gráfica ou de visualização permite a inserção de gráficos, figuras e coordenadas para a construção de objetos diretamente. Na **Zona gráfica**, são representados graficamente ou geometricamente todos os objetos cujos comandos são inseridos na **Entrada de comandos.** Uma das características dos elementos inseridos na zona gráfica, além da visualização, está na possibilidade de deslocar tais elementos, com a utilização do mouse, para diferentes posições. Para uma melhor compreensão das ferramentas bem como sua utilização e manipulação sugerimos consultar o site www.geogebra.org.

[5] Significa que o software pode ser executado em mais do que uma plataforma, como o Mozilla Firefox, Explorer e Chrome.

Figura 9 - Interface do *software* Geogebra



Fonte: Elaboração nossa

3.1.1 O Geogebra no contexto das Formas Indeterminadas

Richit *et al* (2012) utilizou o *software* em aulas de cálculo e a partir daí, concluiu-se que o Geogebra se mostrou apropriado para a realização das atividades de natureza exploratório--investigativa, uma vez que, foi possível reduzir o número de repetições durante a verificação de um resultado. Segundo esse autor, o que no papel e lápis seria preciso vários desenhos, o software mostrou, por meio da variação de parâmetros, o comportamento das funções.

Segundo Gonçalves (2013) a utilização de *softwares* proporciona a assimilação dos cálculos e permite explorarmos por intermédio de construções que podem ser manipuladas, deixando de ser estáticas e proporcionando uma nova visão da matemática. Para Guimarães (2009, p. 1):

> Desenhar o gráfico de funções, observar a existência de limites, determinar e visualizar a reta tangente ao gráfico da curva em uma tela de computador são exemplos de como o uso de recursos computacionais podem trazer grandes benefícios num curso de Cálculo Diferencial e Integral I. Mas, para isso é necessário escolher softwares adequados e uma metodologia capaz de tirar proveito das características positivas do computador [...]

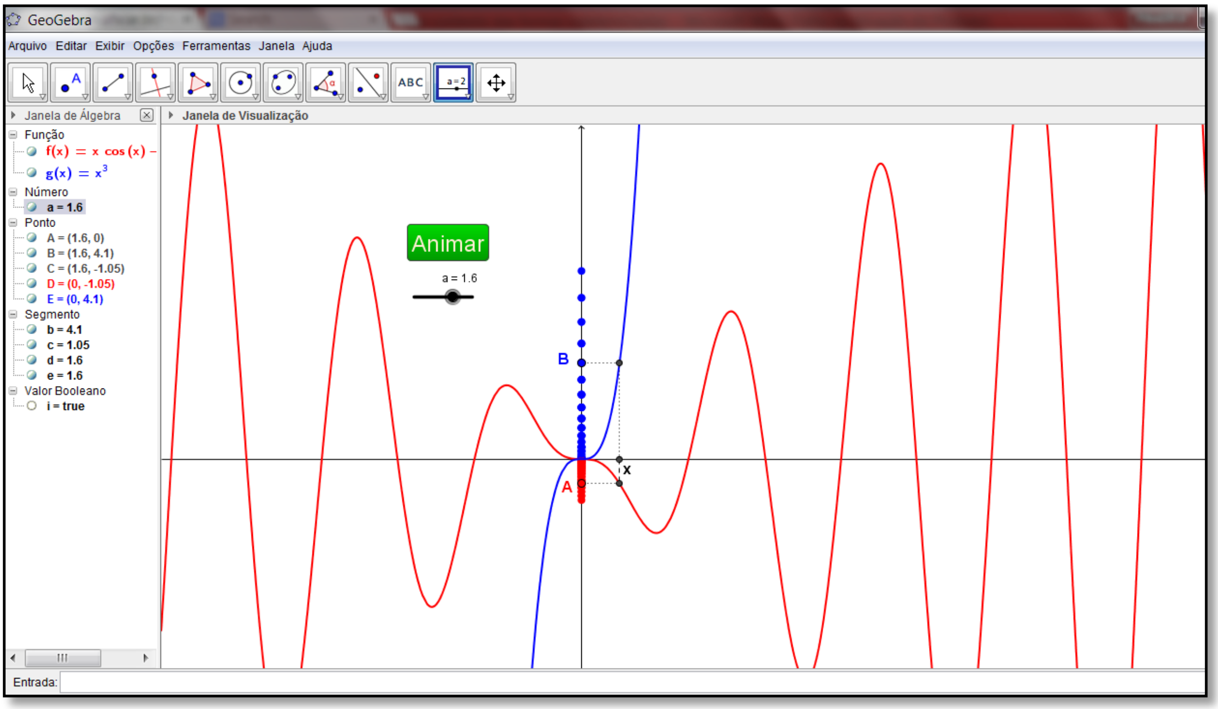
Em concordância com os pesquisadores acima e considerando relevantes as características algébricas e geométricas do Geogebra, optamos por esse *software* considerando essas características adequadas ao nosso estudo.

Na figura 10 vemos uma situação em que o Geogebra foi utilizado para a construção dos gráficos das funções *f* e *g* que compõe o numerador e denominador da função

$h(x) = \dfrac{x\cos(x) - sen(x)}{x^3}$ caracterizando uma indeterminação 0/0 para $x = 0$. A utilização da inserção de um parâmetro e a característica dinâmica do software por meio do controle deslizante nos permite analisar com maior segurança o comportamento da função na vizinhança de $x = 0$ identificando o tipo de indeterminação.

Quando o usuário utiliza adequadamente as propriedades geométricas na construção, a dinâmica dos movimentos do software promove uma melhor compreensão dos elementos que não sofrem variação, alertando-o para determinados padrões e instigando-o a realizar conjecturas e a testar suas convicções. Nessa perspectiva, por meio dos mecanismos de animação do Geogebra é permitido ao aluno manipular, analisar e assimilar o comportamento e características de várias situações no aprendizado de conceitos de Cálculo.

Figura 10 - Representação geométrica da forma indeterminada 0/0

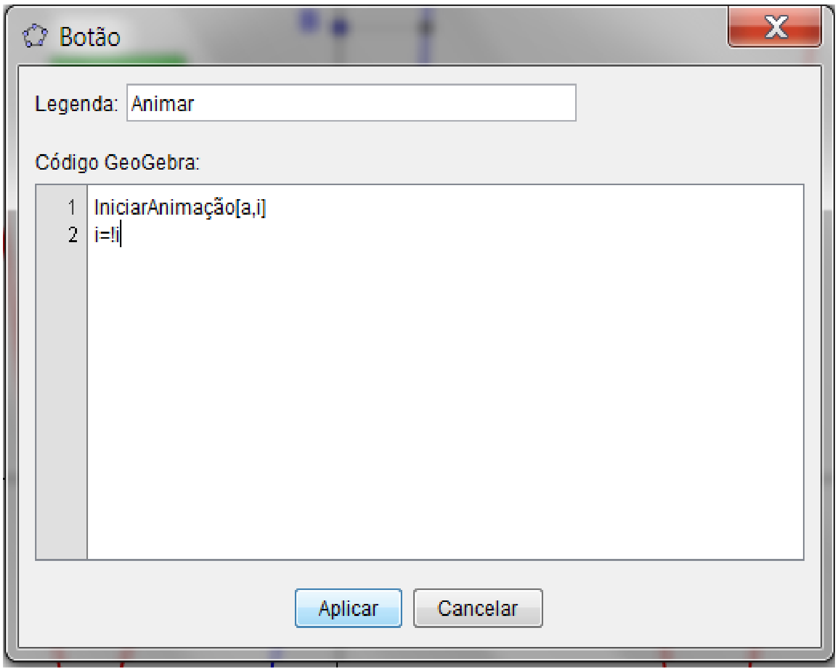


Fonte: Elaboração nossa

A ferramenta “inserir botão” com a utilização dos valores booleano “i=true” Figura 11 para controlar a animação dos pontos A e B mostra grande praticidade para simular o comportamento das imagens de x pelas funções f e g quando x se aproxima de zero.

O Geogebra também se mostrou bastante adequado na construção e animação das retas tangentes às funções f e g usando a ferramenta “Reta tangente”, na figura 12, apontando necessidade de uma segunda derivação, considerando que a animação nos permitiu identificar

Figura 11 - Configuração do botão animar

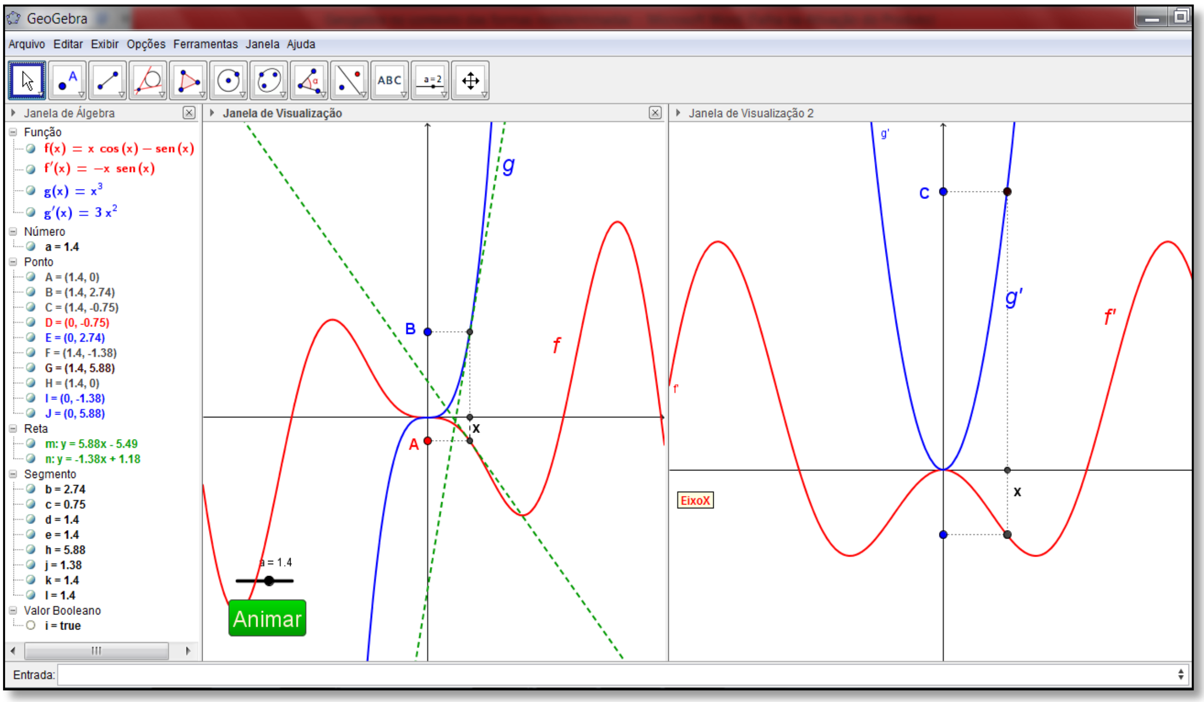


Fonte: Elaboração nossa

que as derivadas das funções f e g no ponto $x = 0$ são nulas. A Inserção da "janela de visualização 2" (lado direito da figura) nos permite comparar as funções derivadas das funções f e g e ao mesmo tempo comparar essas derivadas com a inclinação das retas tangentes.

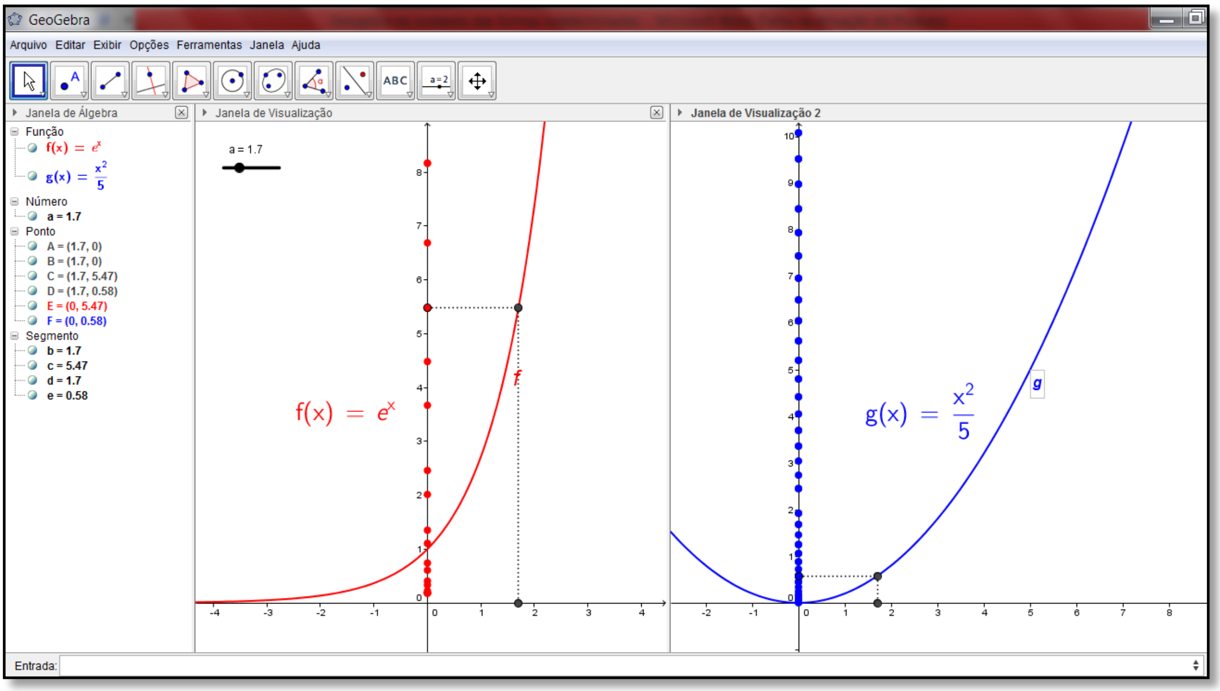
Outro ponto relevante na visualização do limite é que o Geogebra nos permite intuir, por meio da ferramenta "animar objeto", o comportamento das funções quando x cresce indefinidamente. Percebemos na figura 13 que o software nos mostra que a função g cresce mais rapidamente que a função f e que de outra forma ficaria difícil conjecturar. De acordo com o exposto, vemos que o GeoGebera possui características que propiciam a criação de ambientes para atividades relacionadas a conceitos de cálculo como por exemplo, visualizar a noção intuitiva de limites e formas indeterminadas e interpretar geometricamente as derivadas, possibilitando ao aluno verificar propriedades de uma função por intermédio de um processo dinâmico.

Figura 12 - Derivada das funções f e g



Fonte: Elaboração nossa

Figura 13 - Taxa de crescimento das funções f e g



Fonte: Elaboração nossa

Na próxima seção faremos uma abordagem mesmo que preliminar dos fatos históricos envolvidos que marcaram a regra de L'Hôpital, tendo em vista que representa tarefa fundamental para o nosso trabalho considerando nossa metodologia de pesquisa. Nesse contexto exporemos o desenvolvimento feito por L'Hôpital e Bernoulli e as controvérsias sobre a origem e autoria.

3.2 Aspectos históricos da Regra de L'Hôpital

Figura 14 - Marquês de L'Hôpital (1661 – 1704)

Fonte: Barbosa (2008, p. 14)

Neste trabalho dissertativo, tratamos sobre um modo alternativo para calcular os limites de formas indeterminadas conhecido como Relação de L'Hôpital, portanto faremos um levantamento histórico dos principais eventos envolvidos no descobrimento da referida regra; apresentaremos uma breve biografia do Marques de L'Hôpital e demonstração feita por L'Hôpital e Bernoulli e as controvérsias sobre a origem e autoria. Vale ressaltar que esta seção contempla um dos elementos que sugere a Engenharia Didática na sua fase Análises Preliminares. "Análises preliminares em que vamos pesquisar o que precisamos para desenvolver a sequência didática, sobre análise epistemológica dos conteúdos contemplados; conhecimentos prévios dos sujeitos investigados, dificuldades e obstáculos [...]" (SANTOS, 2011, P.2). Nossa pesquisa buscou fatos históricos da Relação de L'Hôpital em autores como Barbosa (2008), Boyer (1996) entre outros e internet.

Guillaume François Antoine de L'Hospital, Marquês de Saint Mesme, mais conhecido como marquês de L'Hôpital, matemático francês da era bernoulliana, nasceu em Paris, hoje lembrado no cálculo de formas indeterminadas pela Regra de L'Lôpital, que muitos acreditam que tenha sido criação de Bernoulli. Barbosa (2008) explica que o nome original do marquês era L'Hospital, porém uma série de reformas ortográficas sucedidas na França entre os séculos XVII e XIX influenciou na grafia L'Hôpital. Esse fato explica as variações na grafia apresentadas nos livros cálculo atuais que aparecem ora como Regra de L'Hôpital, ora como Regra de L'Hôspital. Fez parte da elite matemática da época como Newton, Leibniz e os Bernoullis destacando-se como ícone matemático da França, não apenas pelos trabalhos científicos, mas também pelos contatos que manteve com Leibniz e Bernoulli. Foi membro da l'Académie des Science de Paris, de 1690 até sua morte aos 43 anos de idade. Johann Bernoulli foi o que teve contato direto com o Marquês de L'Hôpital. O bom desempenho de Bernoulli nos cálculos fascinaram o marquês L'Hôpital, que segundo Boyer (1996), durante uma discussão sobre o conceito de curvatura, Bernoulli impressionou-o ao calcular em poucos minutos o raio de curvatura para várias curvas. Barbosa (2008) explica que houve um acordo entre o marques e Bernoulli que permitia L'Hôpital usar todo o conteúdo ensinado como o desejasse. A consequência desse acordo foi a importante contribuição de Johann Bernoulli à conhecida Regra de L'Hôpital, publicada pelo marquês em seu livro *courbes Analyse Infiniment Petits Pour l'intelligence des lignes* (Análise dos Infinitamente Pequenos para o Estudo de Linhas Curvas) considerado o primeiro livro texto escrito sobre cálculo diferencial, publicado em 1696 e que influenciou praticamente toda a matemática do século XVIII com suas ideias inovadoras. Nesse sentido, Barbosa (2008) ressalta que o marquês demonstra por meio dessa obra ser excelente escritor, exibindo de maneira ordenada, por meio de seus dons pedagógicos, todo um progresso das principais ideias da nova matemática que estava surgindo. Segundo Lacroix, apud Barbosa (2008), L'Hôpital, na sua época foi um dos geômetras que mais contribuiu para o Cálculo Diferencial:

> No ano de 1699, L'Hôpital foi um dos poucos geômetras que fez algum progresso no Cálculo Diferencial e ele próprio trouxe uma contribuição os infinitamente pequenos. Este livro foi por um longo tempo o melhor livro sobre esta matéria, mas ele não escreveu (deixou de escrever) um tratado sobre o Cálculo Integral, porque ele sabia que Leibniz tinha em mãos uma grande obra com o título "De Scientia Infiniti" e que queria tornar conhecida, e que ele ainda não tinha completa (LACROIX, 1799, p.xxviii, *apud* Barbosa, 2008)

Na história da humanidade, foram muitos os que apresentaram contribuições relevantes para o desenvolvimento da ciência por meio de suas teorias e descobertas promovendo grandes avanços. Neste sentido, vale ressaltar a família Bernoulli que nos contemplou com famosos intelectuais e muitos deles grandes matemáticos.

> Podemos fazer conclusões a respeito da família Bernoulli dizendo que a história dos descendentes é muito semelhante à dos pais, não revelando queda para os negócios da família, inscreveram-se na Universidade onde cursaram Magistratura ou Medicina. Anos mais tarde acabariam por se dedicar à Matemática onde viriam a dar contribuições importantes, nomeadamente na área do cálculo (BARBOSA, 2008, p. 23)

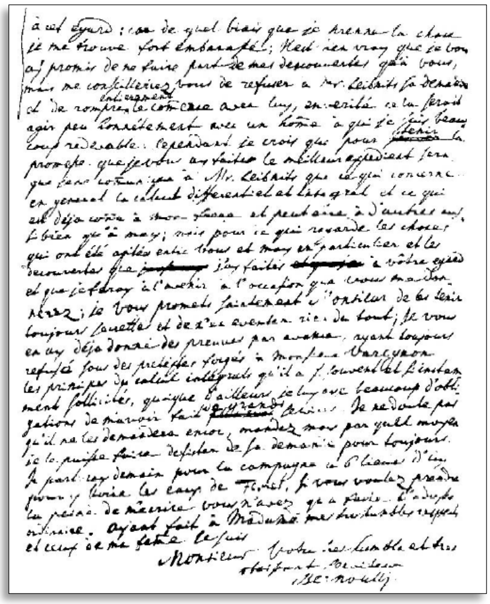
Johann Bernoulli, o que teve contato direto com o marquês de L'Hopital, desde criança, provavelmente influenciado pelo seu irmão Jacob Bernoulli, já demonstrava um certo interesse pela matemática. Segundo Barbosa (2008), Johann nunca chegou a publicar seu livro sobre o cálculo, no entanto, Boyer (1996) lembra que durante 1691-1692 ele escreveu dois pequenos livros didáticos sobre Cálculo diferencial e integral que só foi publicado muito mais tarde.

Segundo Pastor & Babini, apud Barbosa (2008), encontramos vários problemas de aplicações dos métodos infinitesimais à geometria e à mecânica proposta por Johann e seu irmão Jacob. Boyer (1996, p. 288) conta que Jacob Bernoulli tinha atração por curvas e pelo cálculo, é tanto que uma curva leva seu nome a "*lumniscata de Bernoulli*" dada pela equação $r^2 = a \cos 2\theta$. Fazendo uma análise na obra de Barbosa (2008) vemos que outros pesquisadores como Pastor & Babini (1986, p.100), Gratton-Guinness (1984,p. 108) mencionam contribuições de johann Bernoulli. Barbosa (2008) lembra que o original método da quadratura por séries, exposto em 1694, de onde se originou a conhecida série de Taylor era devido a Johann. Johann Bernoulli morreu no dia primeiro de janeiro de 1748, completamente louco, suicidando-se, cortando os pulsos, com 81 anos de idade, na Basileia.

Durante um bom tempo, esperava-se que toda a obra no livro *Analyse Infiniment Petits Pour l'intelligence des lignes* era de fato obras de L'Hôpital. O Marquês não estava totalmente certo de que pudesse entender o novo cálculo apresentado por Leibniz, e por isso pediu ao jovem Johann Bernoulli que o ajudasse. Barbosa (2008) relata que em uma carta de 17 de março de 1694 L'Hôpital oferece a Johann um salário de 300 libras mensais para que Bernoulli o ajudasse no desenvolvimento dos novos conceitos do cálculo. No entanto, Bernoulli deveria comunicar-lhe suas descobertas, e em particular, pediu que Bernoulli não comunicasse a nenhuma outra pessoa. Segundo Barbosa (2008) L'Hôpital propunha um acordo em que Bernoulli ficaria encarregado de: trabalhar todos os problemas matemáticos enviados a ele por L'Hôpital; Mostrar a ele toda descoberta matemática, e não enviar a outros cópias das notas enviadas a L'Hôpital. A resposta de Bernoulli nunca foi encontrada, mas, por uma carta de 22 de julho de 1694, sabe-se que ele aceitou a proposta. Para Bernoulli que ainda jovem recém--casado e desprovido de recursos financeiros, esse acordo teria vindo em bom momento. O autor afirma que não se sabe até quando durou o acordo. Apesar de L'Hôpital solicitar que Bernoulli não repassasse cópias das lições a ninguém, isso não aconteceu, houve momentos em que as notas de aulas foram fatalmente conhecidas por outros. Para Abéllan (2004), citado por Barbosa (2008), durante as aulas em Paris, as lições de Johann eram copiadas pelo seu amigo Stahelin quando esteve em Oucques. Diversas cartas entre Bernoulli e L'Hôpital foram recentemente publicadas, e de acordo com Struik (1963) *apud* Barbosa (2008), na carta de 22 de julho de 1694, Bernoulli mostra a regra do 0/0. Segundo esse autor a formulação da regra é muito parecida com a que aparece no livro de L'Hôpital.

Abaixo está um trecho da carta[6] de Bernoulli enviada ao Marquês de L'Hôpital afirmando que estava enviando os resultados apenas ao Marquês e muito aborrecido por não ter a oportunidade de mostrar nenhum trabalho a Leibniz tendo em vista que foi quem muito o ajudou nos assuntos de Cálculo, mas que manteria o acordo firmado com L'Hôpital. Esse material foi extraído do trabalho de Barbosa (2008, p.43):

Figura 15 - Carta de Bernoulli enviada ao Marquês de L'Hôpital



Fonte: Barbosa (2008, p. 42)

Hoje a maioria dos livros de cálculo consideram a regra para obtenção de limites indeterminados como sendo a *Regra de L'Hôpital*. No entanto, agora sabemos que o verdadeiro autor dessa regra foi Johann Bernoulli.

---

[6] **Tradução da carta da figura 15**: "estou assumindo uma coisa que me deixa muito envergonhado; prometi para o senhor que não iria compartilhar minhas descobertas com ninguém, mas aconselho a falar sobre o nosso rato para o Sr Leibniz, se ele procurar. Na verdade seria muito desonesto mentir para um homem a quem eu sou fortemente grato. No entanto, penso que para manter a promessa que lhe fiz, o melhor seria falar a Leibniz que se trata do cálculo diferencial e integral geral, e é aquilo que meu irmão, e talvez outros já saibam; bem como ele, mas no que diz respeito às coisas que têm sido discutidas entre você e ele, em particular, as descobertas feitas por ele eu vou respeitar, no futuro, com sua permissão, eu vos prometo, excelentíssimo senhor, manter sempre em segredo. Já tenho dado provas anteriores, que sempre recusei prestar algum tipo de auxílio ao senhor Varignon sobre cálculo usando pretextos falsos, ele que tantas vezes me procurou, embora, na realidade, eu teria obrigações de ajudá-lo, pois ele tem prestado muitos serviços. Não tenha qualquer dúvida, que após me pedir segredo, eu mantive o seu pedido para sempre. Para obter outros trabalhos basta me escrever. Meus humildes cumprimentos e de minha esposa". (tradução: Barbosa, (2008))

3.3 Sobre Limite, Derivada e Continuidade

O estudo das formas indeterminadas e Regra de L'Hôpital, objeto de nossa pesquisa, é parte integrante do Cálculo Diferencial e para tanto consideramos necessário o estudo de alguns temas do cálculo necessários à sua compreensão. Deste modo faremos uma abordagem um tanto superficial a respeito dos conceitos de limite, derivada e continuidade.

O conceito de Limite que conhecemos nos livros de Cálculo do ensino superior é apresentado de maneira intuitiva ou sob a forma de uma sentença com certo formalismo e rigor matemático. Informalmente, dizer que o limite de uma função é o número L quando " x tende ao número a significa que a imagem de f converge para o número L na medida em que tomamos valores de x cada vez mais próximos de a, seja por valores de x maiores que a ou tomando valores menores que a. Assim, se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos quanto quisermos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas não iguais a a), então escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$.Vale ressaltar que no propósito do estudo de limites é essencial entender que não importa o valor de $f(x)$ para $x = a$, o que realmente interessa é o comportamento da função f para valores de x próximos de a. Para Simmons (1987, p. 93):

> As descrições informais do significado de limite são úteis para a intuição e adequadas para muitos propósitos práticos, no entanto são muito vagos para serem aceitáveis como definição por conta da imprecisão de expressões tais como "cada vez mais próximos" e "tende a".

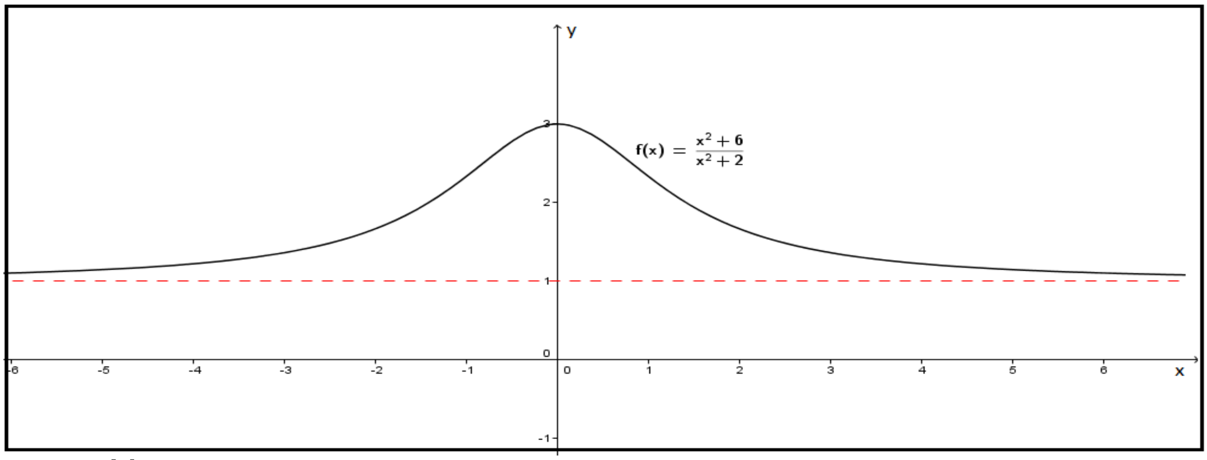
Destacamos a definição formal de limite (LIMA, 1997, p. 48):

> Sejam $X \subset R$ um conjunto de números reais, $f : x \to R$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X$ um ponto de acumulação do conjunto X. Diz-se que o número real L é limite de $f(x)$ quando x tende a a, e escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| > \varepsilon$ sempre que $x \in X$ $0 < |x - a| < \delta$

Observa-se que essa definição é uma maneira bastante habilidosa de afirmar que $f(x)$ está cada vez mais próximo do número L quando tomamos valores de x cada vez mais próximos a. Isso se explica claramente quando afirmamos que o limite só existirá se para qualquer x pertencente ao intervalo $(\mathrm{a} - \delta, \mathrm{a} + \delta)$, tivermos, obrigatoriamente, $f(x)$ pertencente ao intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ onde ε e δ são números reais arbitrários. A expressão $0 < |x - a| < \delta$ indica a não aceitação da variável x assumir o valor de a, noutras palavras, que *a* seja um ponto de acumulação. Lima (2006, p. 52) define: "O número $a \in R$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X \subset R$ quando toda vizinhança $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ de *a* (com ε arbitrário), contém algum ponto de X diferente do próprio *a*". Observa-se que essa definição reforça a expressão $0 < x - a < \delta$.

Agora vamos tomar *x* arbitrariamente grande em valor absoluto e analisar o que ocorre com $f(x)$. Vejamos uma análise do comportamento da função $f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{x^2 + 2}$, cujo gráfico feito no computador está na figura 16. Observa-se quanto maior for o valor de x, mais próximo $f(x)$ vai estar de 1. Vemos que podemos tomar valores tão próximos do número 1 quanto quisermos, basta que, tomemos valores de x suficientemente grandes. Descrevemos essa situação pela expressão $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 6}{x^2 + 2} = 1$.

Figura 16 - representação geométrica do limite da função

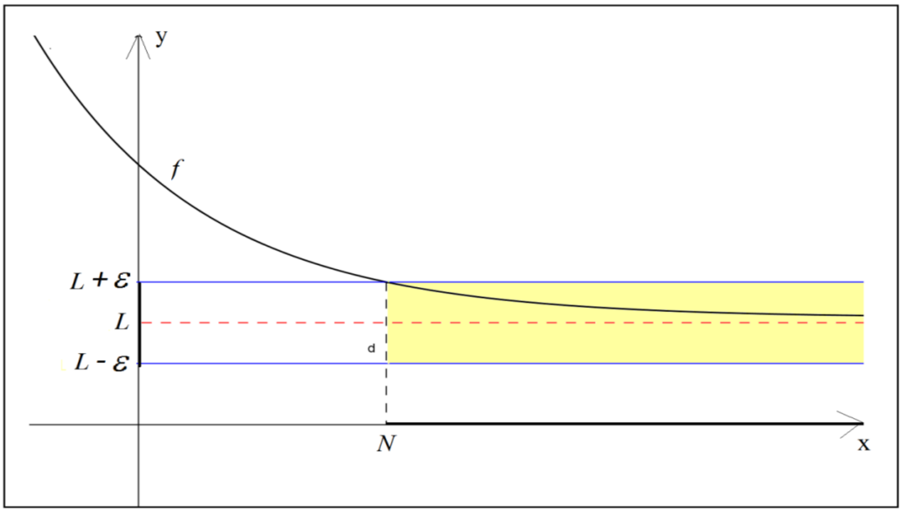


Fonte: Elaboração nossa

Stewart (213, p.120) afirma que, em geral, usamos a notação $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ para indicar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L à medida que x fica cada vez maior. Segue a definição (IEZZI, 1998, p. 70-H):

"Seja uma função definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existir $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| > \varepsilon$". Observa-se na figura 17 que, se é garantida a permanência de $f(x)$ no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para $x > N$ então podemos obter $f(x)$ infinitamente próximo de L quando tornamos x infinitamente grande. Neste caso, a reta $y = a$ é uma assíntota horizontal de f .

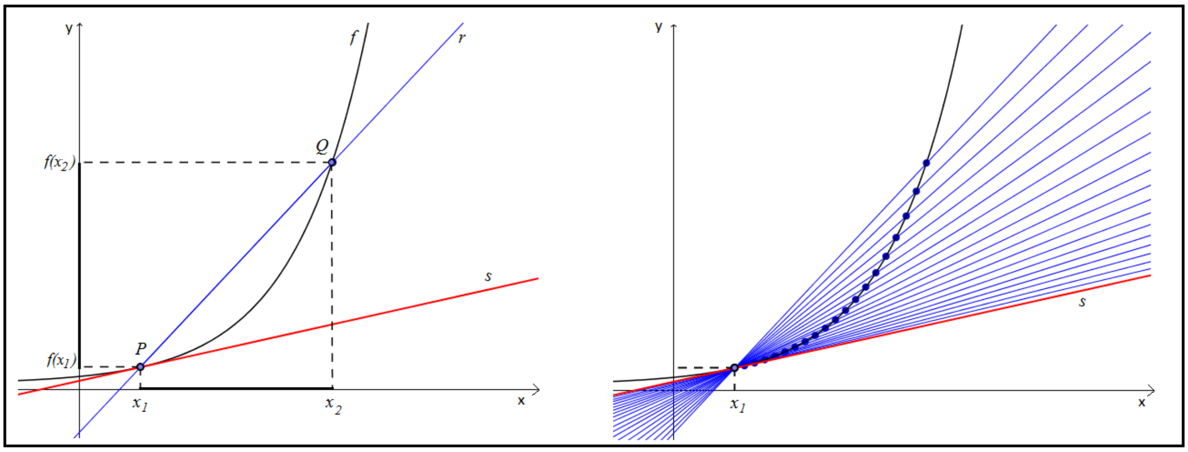
Figura 17 - Representação geométrica do limite no infinito



Fonte: Elaboração nossa

Uma das mais importantes aplicações de limites é a derivada, que está relacionada com dois elementos: a taxa de variação de uma função e coeficiente angular da reta tangente. Simons (1987) define a tangente no ponto P como a posição limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva em direção a *P*, como mostra a figura 18. Assim, para se determinar o coeficiente angular ***m*** ou inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_1, f(x_1))$, calcula-se o limite da secante *PQ* quando $x_2 \to x_1$

Figura 18 - Representação geométrica da derivada



Fonte: Elaboração nossa

Destacamos a definição (STEWART, 2011, p.112): "A derivada de função *f* em $\boldsymbol{x_1}$ é dada por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Desde que esse limite exista. "Uma função é derivável ou diferenciável em x se sua derivada existir em x".

Embora a maioria dos autores de livros de cálculo considere a derivada como coeficiente angular de uma curva num ponto considerado, parece razoável que a interpretação mais correta e geral de derivada está relacionada à taxa de variação instantânea. Isto se deve ao fato de que, se os eixos coordenados apresentarem graduações diferentes, como geralmente ocorre na física em que as grandezas, em geral, têm naturezas diferentes, o coeficiente angular não estaria em conformidade com o ângulo que a reta tangente faz com a horizontal e assim tem-se um coeficiente angular "destorcido". Estão relacionadas abaixo as funções derivadas obtidas a partir da aplicação da fórmula (3) para algumas funções:

Tabela 1 - Derivada das funções elementares

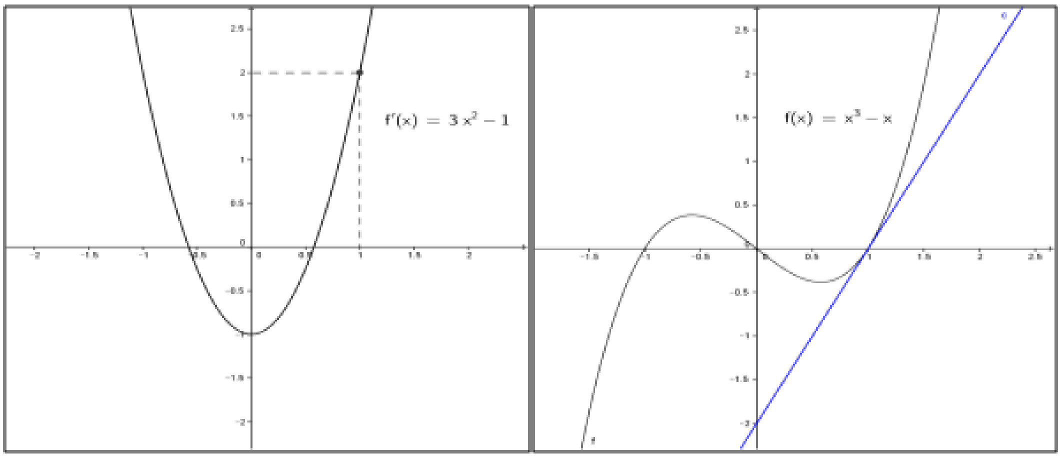
Função	Derivada	Função	Derivada
a	0	$\sec(x)$	$\sec(x).tg(x)$
ax^n	$anx^{(n-1)}$	$\cos\sec(x)$	$-\cos\sec(x)$ .cotg(x)
$sen(x)$	$\cos(x)$	$\cot g(x)$	$-\cos\sec^2(x)$
$\cos(x)$	$-sen(x)$	x^x	x^x.lna
$tg(x)$	$\sec^2(x)$		

Fonte: elaboração nossa

Substituindo x_1 pela variável x chegamos à definição (SIMMONS, 1987, p.79): "dada uma função $f(x)$ qualquer, sua derivada $f'(x)$ é a nova função cujo valor num ponto x é definido por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$". Desse modo, dado qualquer número x para o qual esse limite exista, associamos a x o número $f'(x)$ em que podemos considerar como uma nova função chamada **função derivada de *f*** ou simplesmente **derivada de f**.

Para ilustrar o que acabamos de expor, vamos considerar a função $f(x) = x^3 - x$ e sua função derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$ representada na figura 19. A partir da função *f* do lado esquerdo, construída com auxílio do computador, podemos obter o valor da derivada para qualquer valor de *x*. Por exemplo, para $x = 1$ temos $f'(1) = 2$ o que significa que a reta tangente à função *f* (lado esquerdo da figura 17) possui coeficiente angular dois.

Figura 19 - Representação geométrica da função f e a respectiva função derivada



Fonte: produção nossa

Além disso, f é decrescente no intervalo $(-0.58,\ 0.58)$ e crescente em $(-\infty,\ -0.58)$ ou $(0.58,\ +\infty)$, fato esse que é facilmente observado no lado direito da figura onde se observa que $f'(x) < 0$ em $(-0.58,\ 0.58)$ e $f'(x) > 0$ em $(-\infty,\ -0.58)$ ou $(0.58,\ +\infty)$. É fácil ver também que as tangentes em $x = -0.58$ e $x = -0.58$ são horizontais; logo ali a derivada é 0 e o gráfico de *f'* cruza o eixo *x* em -0,58 e 0,58.

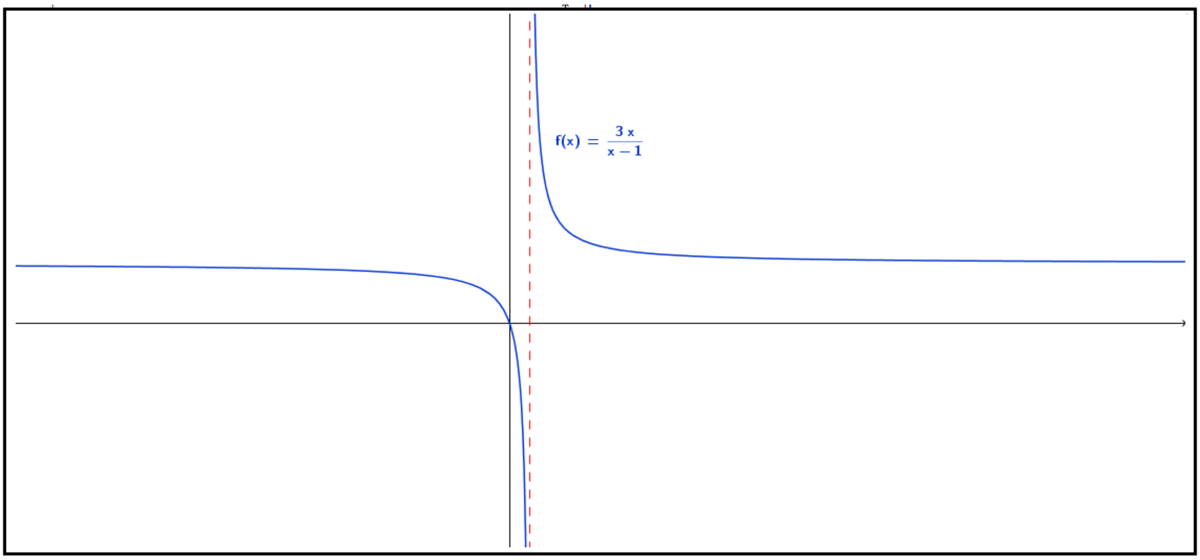
As situações didáticas que se pretende descrever para visualização com o uso do *software* GeoGebra, diz respeito às Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôpital, portanto, a seguir apresentaremos as principais definições relacionadas a esse tema. Tivemos como referência autores como Guidorizzi (2001), Lima (2006), Stewart (2009), Munem (1982), Anton (2007), portanto os conceitos e definições que iremos apresentar na seção seguinte partiram desses autores.

3.4 Sobre as Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôpital

Nosso propósito neste segmento é o de compreender os tipos de problemas de limites que surgem e apresentam mecanismos que possibilitarão resolvê-los com toda a eficiência. Tendo em vista que uma das noções básicas de cálculo diferencial – a derivada – é definida por meio de limites, "seria razoável o emprego de derivadas na resolução de situações de cálculo envolvendo limites" (MUNEM, 1982, p. 570). Neste sentido, serão discutidas situações relacionadas a limites de funções racionais que apresentam comportamentos imprevisíveis, denominadas de indeterminações, e que requerem um mecanismo de resolução que usa como base o conceito de derivada.

Muitos dos mais importantes limites são da forma irracional $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e precisam de uma análise mais detalhada no que diz respeito ao comportamento das funções $f(x)$ e $g(x)$. Assim, por exemplo, a função $\frac{3x}{x-1}$ não é definida para $x=1$ e neste caso, ao tomarmos valores de x cada vez mais próximo de 1, por inspeção do gráfico na figura 20 concluímos que a imagem de f cresce ou decresce indefinidamente, a qual atribuímos o símbolo $+\infty$ ou $-\infty$. "Vale enfatizar que $\lim_{x \to 1} \frac{3x}{x-1} = \pm\infty$ não é um número nem tampouco que o limite existe" (STEWART, 2009, p. 281).

Figura 20 - Representação geométrica da função **3x/(x-1)**



Fonte: produção nossa

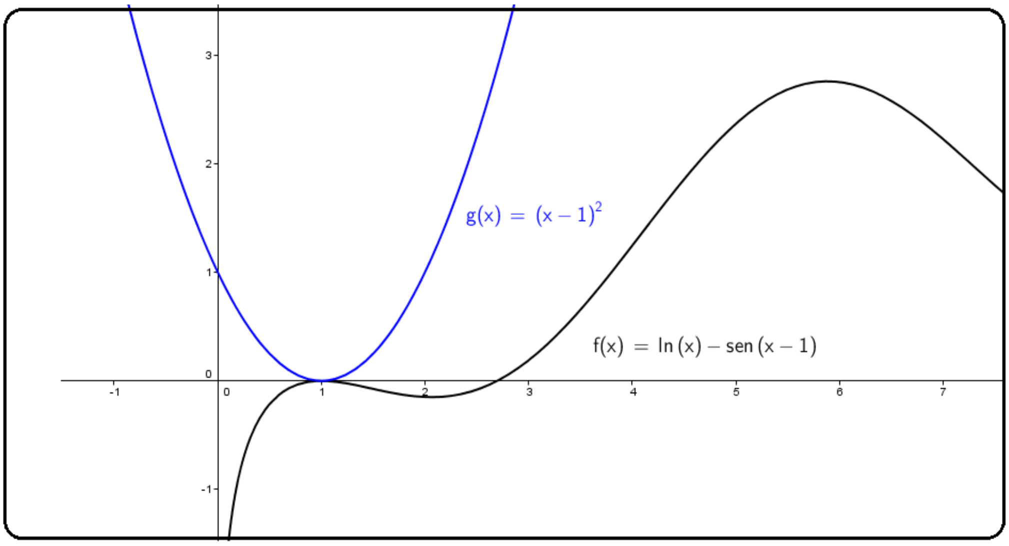
Portanto, numa função racional, se o limite do denominador é zero, mas o limite do numerador não é, ANTON (2007) afirma que é possível provar que o limite da função irracional não existe. Sendo assim, $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ existe desde que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ e

$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. No entanto, se $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, então $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ obrigatoriamente. De fato, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[\dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} \,.\, g(x) \right] = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} . \lim_{\mathrm{x \to a}} \mathrm{g(x)} = 0$.

Quando numa função sob a forma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, se tem $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ diz-se que ela está associada a uma forma indeterminada $0/0$. Vale lembrar que $g(x) \neq 0$ para valores de x próximos de a, porém diferente de a. Às vezes, os limites de formas indeterminadas do tipo $0/0$ podem ser determinados por meio de simplificações algébricas como é o caso da função $\dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$ que possui uma indeterminação do tipo 0/0 para $x = 64$, no entanto, as funções $\sqrt{x} - 8$ e $\sqrt[3]{x} - 4$ possuem um zero $x = 64$, portanto pelo cancelamento dos fatores $(x - 64)$, podemos reduzi-la a forma $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16}{\sqrt{x} + 8}$ em que o limite pode ser obtido pela substituição direta do x por 64. A função $\dfrac{1 - \cos x}{x}$, por exemplo, que também apresenta uma forma indeterminada do tipo $0/0$ para $x = 0$ pode ser simplificada para a forma $\dfrac{1}{1 + \cos x}$ tendo em vista o limite trigonométrico fundamental $\lim_{\mathrm{x \to 0}} \dfrac{\mathrm{sen\ x}}{\mathrm{x}} = 0$, “eliminando” dessa forma a indeterminação. Por outro lado, o comportamento indeterminado de algumas funções como, por exemplo, a função $\dfrac{\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{x}}}$ para $\mathrm{x} = 1$, não dispões de um mecanismo direto de eliminação da indeterminação por meio de uma manipulação algébrica.

Como vimos em sessões anteriores, para se determinar a derivada de uma função *f* num ponto x_1 do seu domínio, aplicamos o limite $f'(x_1) = \lim_{\Delta X \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. Com a substituição simples de Δx por zero resulta numa divisão por zero. O numerador deve ser simplificado de tal modo que Δx possa ser fatorado e consequentemente cancelado. A função $f'(x)$ resultante é a derivada de $f(x)$. Em diversas situações que envolvem cálculo sobre limites nos defrontamos com situações desse tipo e nos livramos delas por meio de manipulações algébricas. O comportamento gráfico desse tipo de indeterminação quando *x=a* está representado no gráfico da figura 21. Observa-se que se as funções são contínuas em *a*, então este representará a abscissa do ponto em que as curvas das funções *f* e *g* interceptam o eixo 0x. Caso o número a não faça parte do domínio das funções então $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Figura 21 - Manifestação da forma indeterminada 0/0



Fonte: Produção nossa

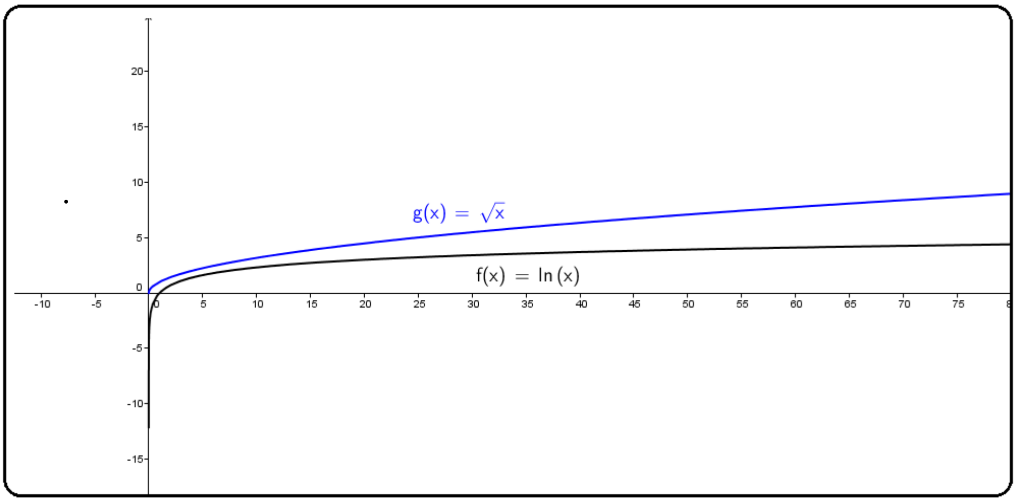
Além da indeterminação do tipo $0/0$ há no cálculo de limite outras situações que, embora o limite exista, seu valor não é óbvio, que é o caso das indeterminações do tipo: ∞/∞, ∞^0, ∞^∞, 1^∞ e 0^0 que serão discutidas a seguir. Devemos atentar para o fato de que tanto a representação 0/0 como as demais são apenas simbólicas, portanto representa apenas uma ideia.

Forma indeterminada ∞/∞

Considere o problema de encontrar uma assíntota horizontal da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-2}$, por exemplo, por meio do cálculo do limite $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-2}$. Observa-se que o valor desse limite não é óbvio, visto que, tanto o numerador quanto o denominador se tornam muito grande quando $x \to \infty$, ou seja, $\lim_{x \to \infty} \sqrt{2x^2+1} = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} (3x-2) = \infty$, neste caso temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Alguns limites como este podem ser resolvidos facilmente por meio de uma manipulação algébrica. Neste caso, se dividirmos o numerador e o denominador por x temos $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. No entanto, no limite $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ que também está associada à forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ não podemos proceder como o exemplo anterior, mas podemos concluir antecipadamente que o resultado desse limite é 0, considerando que a nossa intuição nos leva a perceber que a função $\sqrt{x}$ cresce mais rapidamente que a função $\ln x$ como mostra a figura 22.

Observe que a indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$ pode ser entendida como $\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}$ que representa também $\frac{\infty}{\infty}$. Deste modo, se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ está associada à forma $\frac{0}{0}$, no entanto podemos escrever tal limite na forma $\frac{\infty}{\infty}$ pondo $\left[\frac{1}{f(x)}\right] / \left[\frac{1}{g(x)}\right]$.

Figura 22 - Relação visual do crescimento das funções *f* e *g*



Fonte: produção nossa

Outra situação de indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ocorre quando dividimos dois polinômios com $x \to +\infty$. Por exemplo, na função $h(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x - 4}$, ao dividir o numerador e o denominador pelo termo de maior expoente entre os maiores do numerador e denominador notamos que $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{x^2}$ e $\frac{4}{x^3}$ tendem a zero quando $x \to +\infty$, portanto $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 4$ indicando que há uma assíntota horizontal $y = 4$.

Forma indeterminada ∞ - ∞

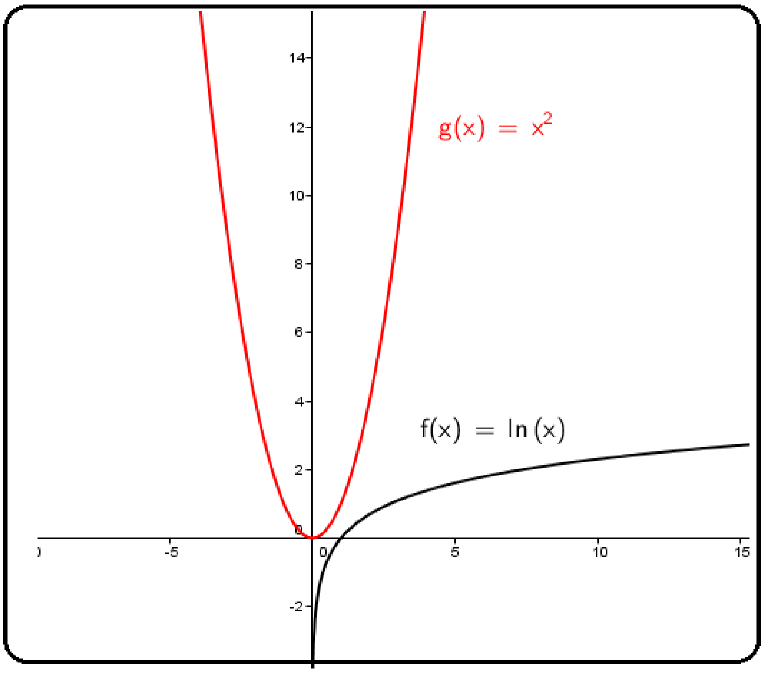
Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ diz-se que a diferença $f(x) - g(x)$ está associada à forma indeterminada $\infty - \infty$ em a. Há uma disputa entre as funções *f* e *g*. Stewart (2009) afirma que a resposta será $+\infty$ (se *f* ganhar) ou será $-\infty$ (se *g* ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio e, neste caso, a resposta é um número finito. Munem (1982) esclarece que, para se obter o limite de uma função com indeterminação do tipo $\infty - \infty$ faz-se o uso do artifício que consiste em representar $f(x) - g(x)$ como $\frac{1/f(x) - 1/g(x)}{1/(f(x).g(x)}$ observando que essa última expressão está associada a indeterminação 0/0, considerando que, quando $f(x) \to \pm\infty$ e $g(x) \to \pm\infty$ então $\frac{1}{f(x)} \to 0$ e $\frac{1}{g(x)} \to 0$.

Forma indeterminada $0.\infty$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty\ (ou - \infty)$ não está claro qual será o valor do limite do produto das funções, se houver. Neste caso, o produto $f(x).g(x)$ está associado à forma indeterminada $0.\infty$ em $x = a$. Stewart (2013, p. 276) afirma que há uma disputa entre *f* e *g:* “Se f ganhar a resposta é 0; se g vencer a resposta será $\infty(ou - \infty)$, ou pode haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero”.

A função $h(x) = x^2 \ln(x)$, quando $x \to 0^+$, está associada à forma indeterminada $0.\infty$ uma vez que, neste caso, $x^2 \to 0$ e $\ln(x) \to +\infty$ como mostra o gráfico da figura 23. No entanto podemos prever o comportamento da função *h* quando $x \to +\infty$, uma vez que x^2 em valor absoluto cresce mais rapidamente que $\ln(x)$, ganhando dessa forma “a disputa”. O produto $f(x).g(x)$ pode ser escrito como $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ou $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ convertendo desta forma, para uma indeterminação $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, respectivamente.

Figura 23 - Manifestação da indeterminação do tipo 0. ∞



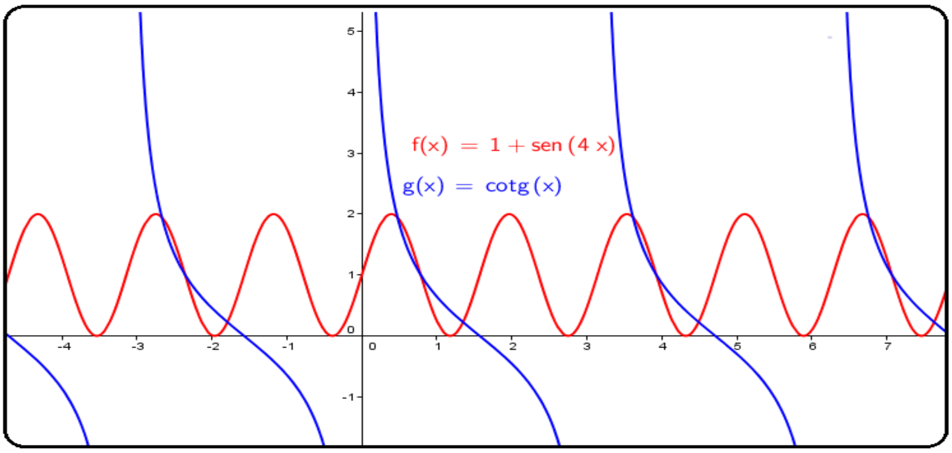
Fonte: Elaboração nossa

É possível escrever a função $h = x^2 \ln(x)$ como $\dfrac{x^2}{ln(x)^{(-1)}}$ ou $\dfrac{ln(x)}{x^{(-2)}}$ caracterizando a forma $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$, respectivamente, tendo em vista que, quando $x \to 0^+$, $x^2 \to 0$, $ln(x)^{(-1)}$ e $ln(x) \to -\infty$.

Forma indeterminada $\boldsymbol{f(x)^{g(x)}}$

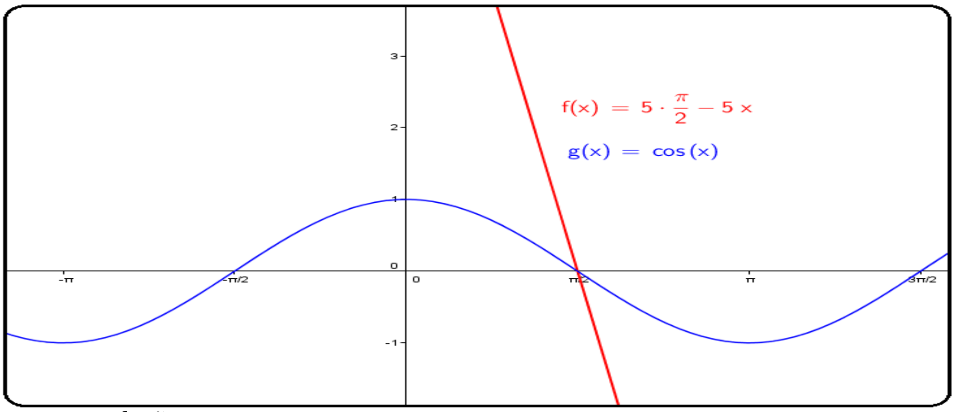
Dado um número real k, Munem (1982) diz que podemos ter $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = k$ ainda que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Com efeito, se tomarmos $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{log\, k}{log\, x}$ chegamos a $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} x^{log\, K / log\, x}$. Aplicando propriedades de logaritmos do lado direito da expressão acima, escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} x^{log_x K} = k$, para todo $x > 0$. Assim, Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, diz-se que a expressão $f(x)^{g(x)}$ está associada a uma forma de indeterminação 0^0 em *a*. Além da forma 0^0, outras indeterminações surgem da expressão $f(x)^{g(x)}$: Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $f(x)^{g(x)}$ está associada à forma indeterminada ∞^0 e, 1^∞ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$. Podemos perceber mediante a análise do gráfico na figura 24 que a função $h(x) = [1 + sen(4x)]^{cotg(x)}$ está associada à forma 1^∞, uma vez que a função $f(x) = 1 + sen(4x)$ assume valores próximo de 1 quando $x > 0$ está próximo de 0, enquanto que $g(x) = cot\,ag(x)$ cresce indefinidamente quando nos aproximamos de x por valores maiores que x. Agora vamos avaliar a seguinte função $f(x) = \left(\frac{5\pi}{2} - 5x\right)^{cos\,x}$. Vamos observar o gráfico das funções $f(x) = \left(\frac{5\pi}{2} - 5x\right)$ e $g(x) = cos(x)$, na figura 25 e verificar que ao tomarmos valores de x, quer pela direita ou esquerda do $\frac{\pi}{2}$ a imagens das funções f e g se aproximam, simultaneamente, de zero, caracterizando a indeterminação 0^0.

Figura 24 - Manifestação geométrica da forma indeterminada 1^∞



Fonte: Elaboração nossa

Figura 25 - Manifestação geométrica da forma indeterminada 0^0



Fonte: produção nossa

Num dos primeiros livros de Cálculo, o matemático amador Francês, Marquês de L'Hôpital (1661-1704), publicou um método simples e elegante para se calcular os limites associados a formas indeterminadas (MUNEM, 1982.p. 571). Trata-se de uma ferramenta que se utiliza de meios algébricos para calcular limites de formas indeterminadas como $0/0$, ∞/∞, $\infty-\infty$, $0.\infty$, 0^0, 1^∞ e ∞^0.

A Regra de L'Hôpital permite que se evite o comportamento, em certos casos, imprevisível, de uma grande classe de funções no cálculo de uma única variável Real (ALVES, 2012.p. 330). As quatro definições a seguir foram extraídas de MUNEM (1982, p.571, 573, 574, 577):

1) Regra de L'Hôpital para a Forma Indeterminada 0/0 quando $x \to a$

Suponha que $\frac{f(x)}{g(x)}$ *tenha associada a ele a forma indeterminada* $\frac{0.}{0}$ *para* $x = a$ *e que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *exista. Então* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2) Regra de L'Hôpital para a Forma Indeterminada 0/0 quando $x \to a^+$

Sejam f e g funções definidas e diferenciáveis no intervalo aberto (a,b) *e suponha que* $g(x) \neq 0$ *quando* $a < x < b$*.Considere que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ *e* $g'(x) \neq 0$ *para* $a < x < b$. *Então, se* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, também existirá* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3) **Regra de L'Hôpital para o limite no infinito**

Sejam f e g funções definidas e diferenciáveis no intervalo aberto da forma $(k,+\infty)$, *em que* $k>0$ *e suponha que* $g(x)\neq 0$ *para* $x>k$. *Suponha que* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ *e* $g'(x)\neq 0$ *para* $x>k$. *Então, se* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, também existirá* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4) **Regra de L'Hôpital associada à forma de indeterminação** ∞/∞

Suponha que as funções f e g sejam definidas e diferenciáveis no intervalo I, exceto possivelmente no ponto a em I. Além disso suponha que $\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty$. *Então, se* $g(x)\neq 0$ *para todos os valores de x em I diferente de a e se* $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, seque-se que* $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *também existe e* $\lim_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Munem (1982) comenta que o uso da regra de L'Hôpital simplesmente nos conduz a uma nova forma indeterminada, quando isso acontece, uma segunda aplicação da regra de L'Hôpital pode ser necessária.

De fato, em algumas situações de indeterminação 0/0, por exemplo, a derivada das funções *f* e *g*, numerador e denominador, respectivamente, possuem limites tendendo para zero quando x tende a *a*, nos obrigando a derivá-las novamente até eliminar a indeterminação para que a regra possa ser aplicada. Munem (1982) ressalta que há casos em que a indeterminação persiste insistentemente, não importando quantas vezes a regra de L'Hôpital seja aplicada, como é o caso da função $h(x)=\dfrac{e^{(-1/x)}}{x}$ que está associada à forma indeterminada 0/0 e após a n-ésima derivada das funções. $f(x)=e^{(-1/x)}$ e $g(x)=x$ temos a função $\frac{e^{(-1/x)}}{kt^{n+1}}$ e que ainda está associada à forma indeterminada 0/0, considerando que $\lim_{x \to 0+} e^{(-1/x)} = 0$ e $\lim_{x \to 0+} kt^{n+1} = 0$.

Vale ressaltar que na aplicação das derivadas das funções *f* e *g* do quociente indeterminado *f/g*, conforme exemplo acima, é necessário atentarmos para a condição da aplicação da regra a cada estágio, ou seja, devemos estar certos de que a fração obtida após cada processo de derivação seja realmente indeterminada.

3.5 Comentários sobre os livros de Cálculo

O ensino e aprendizagem dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral tem representado importante elemento de pesquisa na área de educação Matemática. Para Souza *et al* (2011), um dos fatores que interfere nesse processo é o livro adotado pelo professor e que, segundo Andrade (2011, p. 76) “é ainda uma das principais referências do professor no planejamento de suas aulas [...]”. Desse modo, no intuito de compormos um conjunto de subsídios que nos auxiliem na elaboração das sequências didáticas, consideramos importante observarmos, por meio do livro, a maneira com que o estudo das formas Indeterminadas e regra de L’Hôpital estão sendo ensinadas em sala de aula. Para Amorim (2011, p. 59):

> [...] O livro didático é uma ferramenta imprescindível no processo de ensino aprendizagem e, por isso, merece uma análise prudente devido ao seu poder de influência, uma vez que uma grande parte dos professores, conscientes ou inconscientemente, ao se utilizarem de uma obra, corroboram com as concepções do autor acerca dos temas trabalhados e da maneira de apresentá-los e os utiliza como base para o planejamento e condução das aulas.

Deste modo, propomos um relato a respeito de algumas impressões que obtivemos acerca do conteúdo de Formas Indeterminadas e Regra de L’Hôpital apresentado em quatro livros de Cálculo, buscando compreender como os autores abordam o conteúdo relacionado a nosso objeto de pesquisa. São obras acessíveis aos alunos das universidades públicas elas compõem a bibliografia básica do Programa de Unidade Didática (PUD) da disciplina de Cálculo do IFCE campus Cedro. Esse relato foi constituído a partir dos seguintes livros: Stewart (2009), Guidorizzi (2001), Leithold (1994), e Simmons (1987).

Como critério de análise, observaremos a maneira como o autor introduz os conceitos; aplicação das noções de formação, tratamento e conversão de registros gráficos; abordagem de exercícios e teoremas.

3.5.1 O livro do Stewart (2009)

Consideramos importante iniciarmos o comentário a respeito desse livro apresentando a visão do autor sobre a sua obra e o objetivo principal que, segundo Stewart (2009), é a compreensão dos conceitos por parte dos alunos:

> Nesta edição, bem como nas cinco anteriores, meu objetivo foi mostrar ao estudante a utilidade do cálculo e desenvolver competência técnica, mas ao mesmo tempo desejei transmitir a beleza intrínseca à matéria [...] a ênfase aqui é a compreensão dos conceitos.(STEWART, 2009, p.v)

Antes de iniciar uma abordagem dos conteúdos do cálculo o autor realizou uma discussão a respeito de temas como funções, considerando como ferramentas básicas que nortearão o estudo de cálculo.

O autor inicia apresentando a função $F(x) = (ln\, x)/x$ e justificando o motivo pelo qual, para o cálculo desse limite quando x tende a 1, não é possível usar a regra do quociente explicando que tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero, caracterizando desse modo, um modelo de indeterminação do tipo 0/0. Stewart (2009.p.279) explica que para algumas indeterminações desse tipo é possível encontrar o limite cancelando os fatores comuns. No entanto, o autor afirma que para outros tipos de funções com essa indeterminação, como por exemplo $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$, não funciona. Ele destaca ainda a função $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ afirmando que ocorre um caso de indeterminação do tipo ∞ / ∞ quando tentamos encontrar uma assíntota horizontal, porém nem sempre é possível resolver esse limite por meio de método tradicional, ou seja, pela divisão do numerador e denominador pela potência mais alta de *x.*

Na sequência Stewart (2009 p. 280) apresenta a regra de L'Hopital confirmando a validade do referido método para indeterminações do tipo 0/0:

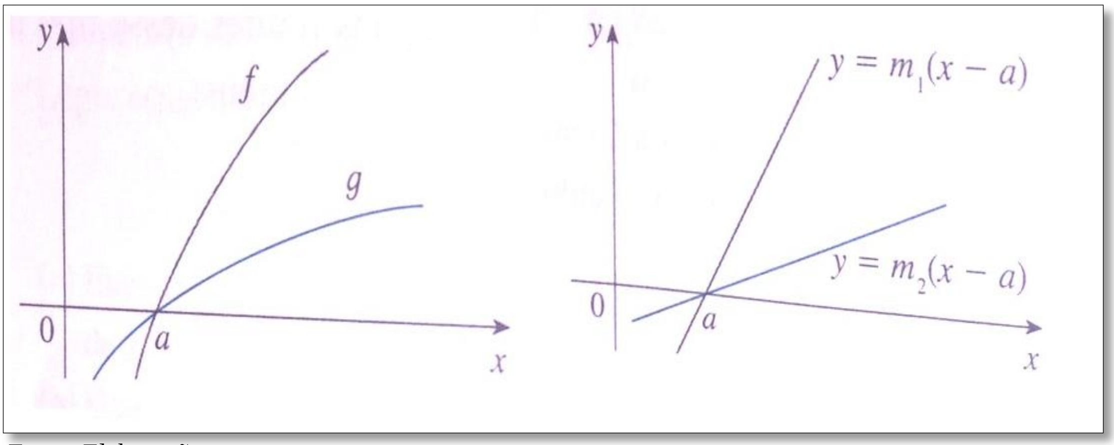
> Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ ou que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ (Em outras palavras, temos uma indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞ / ∞ .) Então $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Se o limite do lado direito existir (ou for $+\infty$ ou $-\infty$)

“A regra de L’Hôpital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas” (STEWART 2009, p. 280). Segue então, uma demonstração para a Regra de L’Hôpital (STEWART, 2009, p. 280):

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Identificamos um registro interessante em que o autor sugere visualmente por meio de gráficos figura 31, uma justificativa para Regra de L’Hôpital para o caso *0/0*. O Gráfico da esquerda da figura 31 mostra duas funções deriváveis f e g que tendem a zero na medida em que $x \to a$. O autor explica que se dermos um zoom em direção ao ponto $(a,0)$ os gráficos parecerão quase lineares. Deste modo, se as funções fossem de fato lineares teriam equações $f(x)=m_1(x-a)$ e $g(x)=m_2(x-a)$, daí $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{m_1}{m_2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Figura 26 - Justificativa gráfica para a Regra de L’Hôpital



Fonte: Elaboração nossa

Na situação acima o autor explora a visualização de registros gráficos quando discute a validade da Relação de L’Hôpital. Acreditamos que abordagens dessa natureza estimulam a formação de imagens mentais e com isso a interpretação de registros algébricos de maneira adequada. O autor explica que é mais difícil demonstrar a versão geral da Regra de L’Hôpital. A seguir apresentaremos a demonstração da Regra de L’Hôpital para o caso mais geral descrita por (STEWART, 2009, p. 44):

O autor inicia afirmando que deve mostrar que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Em seguida, é definida as funções:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I \,/\, x \neq a\}$ e $\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$. Da mesma maneira, G é contínua em I. Seja $x \in I$ e $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x), e $G' = 0$ ali (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$). Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um número y tal que $a < y < x$ e $\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$. Aqui se usa o fato de que, por definição $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$.

Agora se faz $x \to a^+$, então $y \to a^+$ (uma vez que $a < y < x$). Portanto $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$. Um argumento analógico mostra que o limite lateral à esquerda é também L. Logo $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Isso demonstra a regra de L'Hôpital quando a é finito. Se a for infinito, basta faze $t = 1/x$. Então $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$; assim temos $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (Regra de L'Hôpital para o infinito).

A partir daí o autor expões uma série de funções indeterminadas e solicita que seus limites sejam calculados. Todos os exemplos contemplam as indeterminações da forma $0/0$ ou ∞/∞. No exemplo da figura 27, a partir da aplicação da Regra de L'Hôpital uma única vez, chega-se ao resultado $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$. O autor alerta que, quando usamos a Regra, derivamos o numerador e o denominador separadamente e não usamos a regra do quociente. Vale ressaltar que neste exemplo o autor não expõe uma representação gráfica das funções $\ln x$ e $(x - 1)$. No segundo exemplo, representado na figura, o autor apresenta um caso de indeterminação do tipo ∞/∞ em que se faz o uso da Regra por duas vezes sucessivas. Muito

Figura 27 - Resolução algébrica do limite de uma indeterminação 0/0

EXEMPLO 1 ☐ Encontre $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$$

podemos aplicar a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Fonte: Stewart (2009, p. 281)

embora o autor forneça uma representação gráfica da função $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ julgamos que seria mais relevante a exposição das funções e^x e x^2,omitida pelo autor, considerando que nada se pode afirmar em relação à necessidade de aplicações sucessivas da Regra com base no gráfico de $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ figura 28.

Figura 28 - Resolução algébrica do limite de uma indeterminação ∞ / ∞

EXEMPLO 2 ☐ Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

SOLUÇÃO Temos $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$; logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, o limite sobre o lado direito é indeterminado

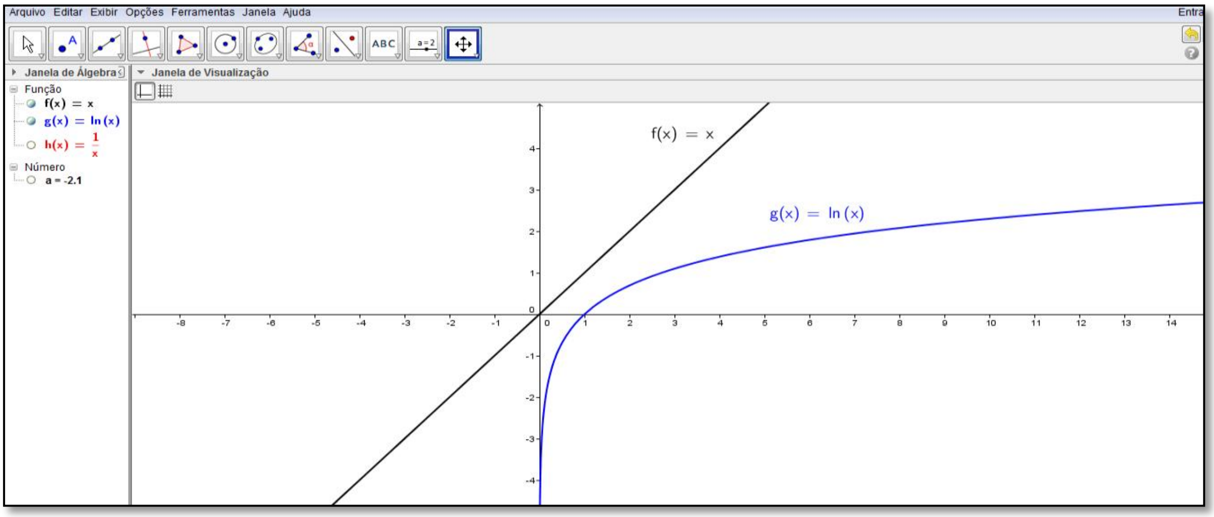
também, mas uma segunda aplicação da Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Fonte: Stewart (2009, p. 281)

No exemplo seguinte representado pelo limite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 1$ embora seja caracterizado por uma indeterminação do tipo ∞/∞, uma segunda aplicação sucessiva da regra nos fornece o limite $\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$. Observa-se que este último limite é agora indeterminado do tipo $0/0$, mas em vez de aplicar a regra mais uma vez, o autor simplifica a expressão cancelando o fator comum. A partir daí são apresentados mais dois exemplos na mesma linha de raciocínio. Destacamos um desses exemplos, em que o autor chama a atenção para o cálculo do limite $\lim_{x\to\pi^-} \frac{sen\, x}{1-\cos x}$ que "se tentarmos usar cegamente a Regra de L'Hôspital obteremos $\lim_{x\to\pi^-} \frac{sen\, x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{senx} = -\infty$" (STEWART, 2009, p. 282). Segundo esse autor, esse cálculo está errado, considerando que, embora o numerador se aproxime de zero, o denominador não tende a zero e, neste caso, não se pode aplicar a Regra de L'Hôpital. De fato, esse exemplo mostra o que pode ocorrer quando usamos impensadamente a regra. O autor destaca que "Outros limites podem ser encontrados pela regra de L'Hôspital, mas são mais facilmente calculados por outros métodos". O autor adverte que quando calcular qualquer limite, considere outros métodos antes de usar a Regra de L'Hôpital. Na sequência, o autor apresenta outros dois tipos de indeterminações como produtos indeterminados, diferenças indeterminadas e potências indeterminadas. O autor descreve em linguagem natural uma situação interessante no que diz respeito ao produto indeterminado $\lim_{x\to a} f(x).g(x)$ quando $\lim_{x\to a} f(x) = o$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ Há uma disputa entre *f* e *g*: "Se *f* vencer, a resposta será 0; se *g* vencer a resposta será ∞(ou -∞) ou pode haver um equilíbrio e, então, a resposta é um número finito diferente de zero" (STEWART, 2009, p. 282). No nosso entendimento, a representação de registros gráficos das funções *f* e *g* analisadas separadamente tornaria mais compreensível a afirmação. Na sequência é solicitado que se calcule o limite $\lim_{x\to 0^+} x.\ln x$. O autor comenta que o limite é indeterminado, pois (x) tende a 0 e $\ln(x)$ tende a $-\infty$ quando $x \to 0^+$ e a partir daí é calculado algebricamente o limite $\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$. No entanto, a nosso ver, a representação gráfica separadamente das funções x e $\ln(x)$, omitida pelo autor, nos forneceria uma melhor informação no sentido de "quem ganharia a disputa". Então, de acordo com o gráfico da figura 29, observa-se que a função $f(x) = x$ a partir de certo valor se aproxima mais rapidamente de 0 do que a função $g(x) = \ln(x)$ que tende a $-\infty$. Então por esta razão o limite é zero.

Figura 29 - Gráfico mostrando a relação da rapidez da aproximação de zero *g* em relação



Fonte: Elaboração nossa

Para diferenças indeterminadas $\lim_{x\to a} [\, f(x) - g(x)]$ com $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, o autor afirma que novamente há uma disputa entre *f* e *g*. "Será a resposta $+\infty$ (se f ganhar)" (STEWART, 2009, p. 283).

Na seção exercícios, apesar de observarmos uma pequena quantidade de registros gráficos, o autor manifesta a preocupação com a visualização do leitor, os gráficos da forma como são apresentados não apresentam grande relevância na análise do conteúdo. Concordamos quando o autor afirma que "cada grupo de exercícios progride com complexidade, partindo da verificação de conceitos básicos e problemas para treinar técnicas, até problemas mais desafiadores, envolvendo demonstrações e aplicações" (STEWART, 2009, p. vii).

Em algumas questões do exercício o autor solicita que seja utilizado o registro gráfico juntamente com a regra de L'Hôpital para estimar o valor do limite (página 285 exercício 65-66). Enfatizamos que o modo com que a visualização é utilizada pelo autor para exemplificar alguns registros algébricos, a nosso ver, não apresenta toda a potencialidade que o tema exige.

3.5.2 O livro do Leithold (1994)

O livro do Leithold (1994) faz parte do acervo da biblioteca do IFCE campus cedro e foi escolhido como uma das disciplinas básicas para o estudo da disciplina de Cálculo I. Iniciaremos apresentando a visão do autor sobre a sua obra:

> O Cálculo com Geometria Analítica foi planejado para os futuros matemáticos e para os estudantes cujo interesse primário seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não técnicas. As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes do livro nesta edição. Uma vez que o livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação. Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadoras e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimento das secções que as precedem. Se um teorema está enunciado sem demonstração, a sua discussão foi ampliada com figuras e exemplos e, em tais casos, sempre ressaltei que se trata de uma ilustração do conteúdo do teorema, e não de uma demonstração. Nas secções complementares do final dos capítulos aparecem algumas discussões teóricas as quais, se o estudante desejar, poderão ser omitidas sem prejuízo da sequência do texto (LEITHOLD, 1994, p. ix).

O capítulo 1 intitulado “Números Reais, Funções e Gráficos”, traz uma breve revisão sobre os aspectos básicos do Sistema de Números Reais sucedida por uma abordagem a respeito da noção de Geometria Analítica Plana sobre retas e circunferências. É apresentado um estudo superficial das principais funções que são frequentemente usadas em estudo de cálculo, como funções trigonométricas.

Leithold (1994) inicia com uma abordagem da forma indeterminada 0/0 por meio de dois exemplos. No primeiro, mostrado na figura 30, é utilizada a fatoração para mostrar a indeterminação, no entanto, não deixa claro visualmente, com o auxílio de figuras, o que ocorre com as funções numerador e denominador no ponto $x = 4$.

Figura 30 - Resolução algébrica do limite apresentada por Leithold

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** **Queremos encontrar**

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$$

Aqui, $\lim_{x \to 4} (x^2 - x - 12) = 0$ **e** $\lim_{x \to 4} (x^2 - 3x - 4) = 0$**. Entretanto, o numerador e o denominador podem ser fatorados, resultando**

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 4)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x + 3}{x + 1}$$

$$= \tfrac{7}{5}$$

◀

Fonte: Leithold, (1994, p. 652)

Nesta introdução, a utilização de imagens gráficas poderia explorar melhor a compreensão conceitual fornecendo ao leitor um suporte para uma compreensão mais sólida a respeito do tema.

Machado (2008) comenta em sua tese de doutorado sobre a importância da utilização da ferramenta computacional no ensino e aprendizagem de Matemática, tornando possível a realização de "experiências matemáticas" que facilitam o surgimento de conjecturas que promovem a integração de aspectos geométricos e analíticos valorizando o pensamento matemático.

Na sequência é apresentada a Regra de L'Hôpital (figura 31) seguida de uma série de problemas resolvidos, os quais o autor denomina de ilustração, explorando a aplicação da rega para a forma 0/0.

Figura 31 - Definição da Regra de L'Hôpital

11.1.2 TEOREMA Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a em I. Suponha que, para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e se

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita ou à esquerda.

Fonte: Leithold (1994, p. 652)

Os exemplos realmente são explicados passo a passo como se propõe o autor, no entanto percebemos a falta de interesse do autor em "ilustrações" com gráficos dos exemplos para uma melhor compreensão. Destacamos um dos exemplos resolvidos na figura 32. Neste exemplo, a Regra foi aplicada duas vezes em virtude da persistência da indeterminação. No entanto, percebemos que a utilização de uma representação gráfica das funções $1-x+ln(x)$ e x^3-3x+2 levaria o leitor a entender visualmente o porquê da indeterminação 0/0, como também perceber de imediato a existência de outra indeterminação, neste caso $+\infty/-\infty$ quando $x \to +\infty$. Outra questão que podemos levantar a respeito do benefício da utilização da visualização está na necessidade da aplicação da segunda derivada, considerando que as retas tangentes às funções $1/x-1$ e $3x^2-3$ em $x=1$ são horizontais.

Figura 32 - Resolução pelo viés algébrico do limite de uma indeterminação 0/0

EXEMPLO 2 **Calcule o limite, se existir:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$$

Solução

$$\lim_{x\to 1}(1-x+\ln x) = 1-1+0 = 0 \qquad \lim_{x\to 1}(x^3-3x+2) = 1-3+2 = 0$$

Logo, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{3x^2-3}$$

Agora, como $\lim_{x\to 1}(-1+1/x) = 0$ **e** $\lim_{x\to 1}(3x^2-3) = 0$, **aplicamos a regra de L'Hôpital novamente, obtendo**

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{3x^2-3} = \lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{6x} = -\frac{1}{6}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} = -\frac{1}{6}$$

Fonte: Leithold (1994, p. 653)

Assim, consideramos que o exemplo da figura 32 como os demais exemplos que seguem a mesma metodologia e não exploram o problema com toda a potencialidade que ele oferece.

Leithold (1994) ressalta que, para demonstrar a regra de L'Hôpital temos que usar o Teorema do Valor Médio de Cauchy , que estende para as duas funções o teorema do valor médio para uma única função. Aqui o autor usa o teorema citado acima para dar uma prova da regra, no entanto uma representação Geométrica do teorema é descrita apenas no volume 2 da obra, sob o argumento de que seria necessário o conhecimento de equações paramétricas. Segue abaixo o enunciado do teorema e na figura 33 sua representação gráfica.

"Se f e g são funções tais que:

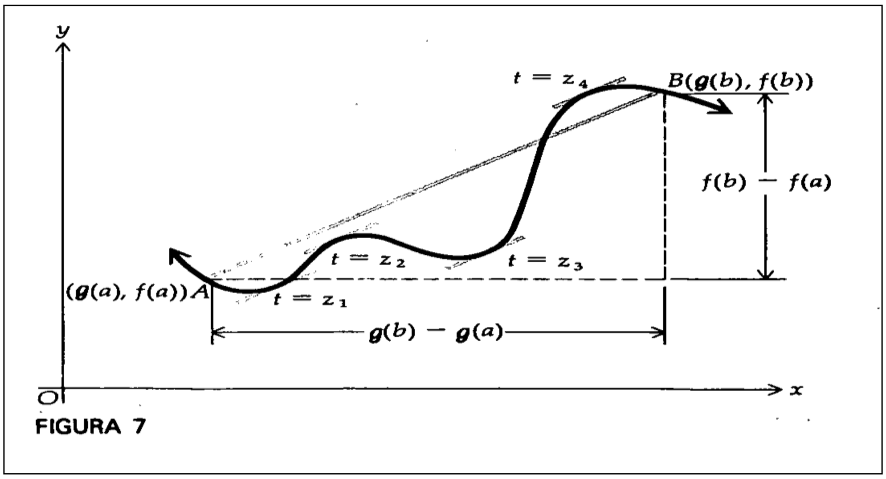
(i) F e g são contínuas no intervalo fechado [a, b]

(ii) F e g são diferenciáveis o intervalo aberto (a, b)

(iii) Para todo x no intervalo (a, b), $g(x)\neq 0$,

então existirá um número z no intervalo aberto (a, b) tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$

Figura 33 - Representação geométrica do teorema do valor Médio de Cauchy.



Fonte: Leithold (1994, p. 807).

A figura 33 mostra uma curva cuja inclinação num certo ponto t é dado pela $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ e a inclinação da reta AB, com os conhecimento da geometria analítica, sabemos que é dada pela expressão $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. O teorema de cauchy diz que "as inclinações são iguais em pelo menos um valor de t entre *a* e *b*" (LEITHOLD, 1994, p. 808). No caso da figura 33 existem quatro pontos entre *a* e *b* em que as retas tangentes são paralelas.

Mais adiante, Leithold (1994) apresenta as formas indeterminadas 0/0, ∞/∞, $\infty-\infty, 0.\infty$, 0^0, 1^∞ e ∞^0 cada uma delas com um exemplo ilustrativo, no entanto observamos que, para a apresentação dessas formas o autor usa uma linguagem predominantemente algébrica desprovida de qualquer significado geométrico. O autor lembra que no caso das indeterminações 0^0, 1^∞ e ∞^0, precisamos transformá-las na forma 0/0 ou ∞/∞ para obter seu limite.

Em relação aos exercícios propostos percebemos duas sequências de exercícios totalizando 83 questões das quais 5 questões estão relacionadas ao *Teorema do Valor Médio de Cauchy,* 2 aplicações, e em 6 questões é solicitada a prova de algum teorema relacionado a Regra de Regra de L'Hôpital. Notamos também que o grau de complexidade das questões dos exercícios aumenta o grau de complexidade gradativamente, porém nenhum registro gráfico é explorado.

Outra observação que julgamos relevante salientar nessa obra diz respeito à ausência de problematização, na introdução dos conceitos – Não aparece na introdução do texto nem em seu escopo nenhuma situação motivadora que instigue a construção do conceito.

O uso da linguagem natural é mínimo, e linguagem por meio de registros gráficos praticamente não existe, prevalecendo a linguagem algébrica. Concordamos que a ausência dos registros gráficos nos conceitos, exemplos resolvidos e exercícios não contribuem para um bom entendimento do tema. Em boa parte dos exemplos resolvidos não fica claro o tipo de indeterminação, uma vez que, por exemplo, não está claro que $\lim_{x\to\pi/2^-}\sec^2 x = +\infty$.

3.5.3 O livro do Guidorizzi (2001)

Iniciaremos a análise dessa obra com a apresentação feita pelo próprio autor (GUIDORIZZI, 2001, p. vii):

> Este livro baseia-se nos cursos de Cálculo ministrados aos alunos da Escola Politécnica da USP, do Instituto de Matemática e Estatística da USP e do Instituto de ensino de Engenharia Paulista – IEEP. Os assuntos abordados neste volume são os de limite, derivada e integral de funções de uma variável real. O curso é desenvolvido de forma que os conceitos e teoremas apresentados venham, sempre que possível, acompanhados de uma motivação ou interpretação geométrica ou física. As demonstrações de alguns teoremas ou foram deixadas para o final da seção ou colocada em apêndice, o que significa que o leitor, numa primeira leitura, omita-las, se assim o desejar. Quanto aos exemplos e exercícios, pensamos tê-los colocados em um número suficientes para a compreensão da matéria [...]

Guidorizzi (2001), assim como os autores que já comentamos como Stewart (2009), e Leithold (1994), inicia a abordagem definindo a regra de L'Hôpital não utilizando nenhum problema ou situação que leve a construção da ideia das Formas Indeterminadas.

A seguir, apresentamos uma definição informal da Regra de L'Hôpital para os casos 0/0 e ∞/∞ (GUIDORIZZI, 2001, p. 244):

"1ª REGRA DE L'HÔSPITAL. Sejam f e g deriváveis em $]p-r,p[$ e $]p,p+r[$ $(r>0)$, com $g'(x)\neq 0$ para $0<|x-p|<r$. Nestas condições, se $\lim_{x\to p} f(x)=0$, $\lim_{x\to p} g(x)=0$ e se $\lim_{x\to ap}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$".

"2ª REGRA DE L'HÔSPITAL. Sejam f e g deriváveis em $]m,p[$ com $g'(x)\neq 0$ em $]m,p[$. Nessas condições, se $\lim_{x\to p^-} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to p^-} g(x)=+\infty$ e se $\lim_{x\to p^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito) então $\lim\limits_{x \to p^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existirá e $\lim\limits_{x \to p^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to p^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ” (GUIDORIZZI, 2001, P. 244).

Na primeira definição é colocado como hipótese o fato das funções *f* e g serem deriváveis em $]p-r,p[$ e $]p,p+r[$, o que fica subentendido que as funções não são deriváveis em *p,* fato esse que não apresenta relevância nenhuma na condição da aplicação da regra. Alguns autores como Simmons (1987) omitem essa condição. O autor chama atenção para o fato de que o teorema continua sendo válido se substituirmos $x \to p$ por $x \to p^-$ ou por $x \to p^+$ ou por $x \to \pm\infty$. *“*Observamos que a segunda regra continua válida se substituirmos $x \to p^+$ por $x \to p^-$ ou por $x \to p$ ou por $x \to \pm\infty$ *” (*GUIDORIZZI, 2001, p.244). O autor define a Regra de L’Hôpitalde maneira formal e algébrica destituído de qualquer significado geométrico.

Embora o autor não exponha, antecipadamente, as formas de indeterminação 0^0, 1^∞ *e* ∞^0, é apresentada uma série de problemas resolvidos onde o autor mostra como essas formas podem ser reduzidas às formas 0/0 ou ∞/∞. Esses exemplos são explicados passo a passo, porém é notório a ausência do uso da visualização por meio de figuras e gráficos.

Destacamos na figura 34 exemplo 5 resolvido:

Figura 34 - Mecanismo algébrico na resolução do limite indeterminado

EXEMPLO 5. Calcule

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}} = [\infty^0].$$

$$(x+1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x+1)}.$$

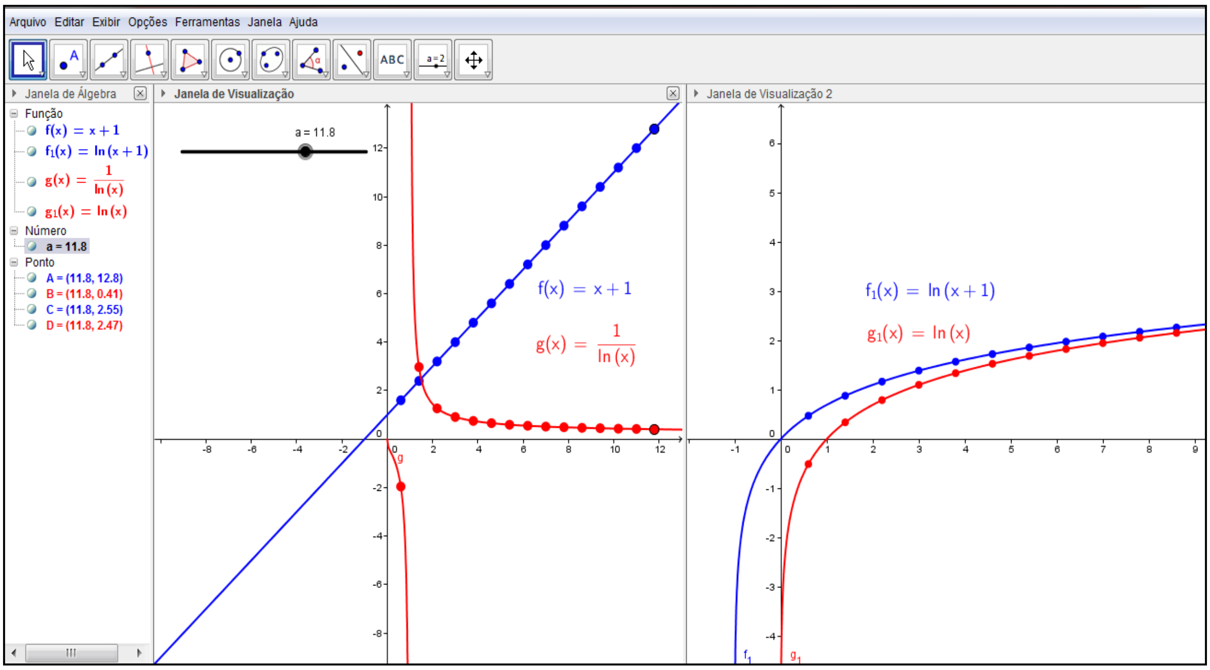
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x+1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = 1. \text{ Assim}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln(x+1)}{\ln x}} = e$$

Fonte: Guidorizzi, 2001, p. 251

Neste exemplo, o autor usa um mecanismo algébrico relacionado a logaritmo *neperiano* para reduzir ∞^0 à forma ∞/∞. *P*ercebemos que a ausência de ilustração gráfica relacionando com procedimento algébrico causa certo prejuízo no desenvolvimento do problema considerando que, além de não proporcionar ao leitor um significado geométrico do problema, não está claro para o leitor que o limite $\lim_{x \to \infty} (x+1)^{\frac{1}{ln(x)}}$ está associado à forma ∞^0. Na figura 35, lado esquerdo, apresentamos o comportamento geométrico das funções $f(x) = x+1$ e $g(x) = \frac{1}{ln(x)}$ dando um significado geométrico à forma de indeterminação ∞^0. Observe que, quando $x \to +\infty$, a imagem da função *f* cresce indefinidamente enquanto a imagem de *g* se aproxima de zero. Do lado direito da figura 35 apresentamos as funções $ln(x+1)$ e $ln(x)$, numerador e denominador, respectivamente da função $\frac{ln(x+1)}{ln(x)}$ obtida a partir de $(x+1)^{\frac{1}{ln(x)}}$ representando a redução da forma ∞^0 para a forma ∞ / ∞. Vemos, do lado direito da figura 35 que tanto a função $ln(x+1)$ quanto a função $ln(x)$ crescem indefinidamente quando $x \to +\infty$.

Figura 35 - Significado geométrico da forma indeterminada ∞^0



Fonte: produção nossa

Os demais exemplos seguem a mesma linha metodológica de não exploração do problema com recurso tecnológico ou com a utilização da representação gráfica.

Em relação aos exercícios propostos o autor apresenta uma lista de 20 questões praticamente do mesmo nível em que não é explorado nenhum registro gráfico.

Percebemos também que nessa obra, no que diz respeito às formas indeterminadas e Regra de L’Hôpital, ausência de problematização, na introdução dos conceitos.

O uso da linguagem por meio de registros gráficos não existe, prevalecendo a linguagem algébrica. Notamos que a ausência dos registros gráficos nos conceitos, exemplos resolvidos, exercícios e definições, privam o leitor de uma análise mais rica e detalhada sobre o tema. Conceitos como derivadas, continuidade e limites são mais bem explorados quando optamos pela utilização de recursos tecnológicos (no caso os softwares). Assim como em outros autores já analisados, em boa parte dos exemplos resolvidos não se tem uma visão geométrica do tipo de indeterminação promovendo um aprendizado menos efetivo.

3.5.4 O livro do Simmons (1987)

Iniciaremos com uma consideração do autor sobre a obra:

> Este livro pretende ser um texto de Cálculo que possa ser utilizado em toda espécie de curso superior em qualquer nível. Foi projetado especialmente para o curso-padrão de três semestres para estudantes de Ciência, Engenharia ou Matemática. O prerrequisito requerido é Álgebra e Geometria do 2º grau. Não se supõe nenhum conhecimento especializado de Ciência dos estudantes de Filosofia, História ou Economia podem ler e compreender as aplicações tão facilmente como qualquer outro estudante. [...] (SIMMON, 1987, p. xv)

O conceito de Regra de L’Hôpital é apresentada no Capítulo 12, cujo título é Formas indeterminadas e Integrais Impróprias dividida nas seguintes seções: O Teorema do Valor Médio; A forma Indeterminada 0/0 e Regra de L’Hôspital; Outras formas Indeterminadas e Integrais Impróprias.

Diferentemente das obras apresentadas anteriormente, o livro do Simmons ao introduzir a ideia da Regra de L’Hôpital, embora não utilize nenhum registro gráfico para uma melhor compreensão do conceito, utiliza o teorema (1) para motivar a introdução da Regra.

Segue o enunciado e demonstração (SIMMON, 1987, p.563):

“Se $f(x)$ e $g(x)$ são ambas iguais a zero em $x=a$ e tem derivadas nesse ponto, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]_{x=a} \tag{1}$$

sendo que $g'(a)\neq 0$”. Abaixo vemos a justifica da fórmula apresenta pelo autor:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{[f(x)-f(a)]/(x-a)}{[g(x)-g(a)]/(x-a)}\rightarrow\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Podemos notar que é exigida a existência das derivadas das funções *f* e *g* apenas no ponto $x=a$ deixando claro a não necessidade da diferenciabilidade e a continuidade na vizinhança do *a*. O autor realiza uma segunda demonstração do teorema na condição das funções serem deriváveis em alguma vizinhança de *a* e continua nesse ponto. Tais condições provêm do Teorema do Valor Médio (página 562) dessa obra. De acordo com Simonns (1987, p, 564):

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_1)(x-a)}{g'(c_2)(x-a)}=\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}\rightarrow\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Considerando o valor Médio, notamos que quando $x\rightarrow a,\ c_1\rightarrow a\ e\ c_2\rightarrow a$.

O autor argumenta a necessidade de uma segunda prova do teorema:

“a fórmula (1) é um bom instrumento para se ter, mas é ainda somente de valor limitado, porque acontece com frequência nos problemas em que consideramos que $f'(a)=g'(a)=0$ e, nesse caso, o segundo membro de (1) não tem significado” (SIMMONS, 1987, p. 564). Ainda comenta que podemos usar a segunda prova para superar a deficiência da primeira equação, ressaltando que $f(a)=g(a)=0$, que *x* tende ao número *a* de um lado ou do outro e que nesse lado as funções *f* e *g* satisfazem as condições: (i) ambas são contínuas em algum intervalo fechado I cujo número *a* é extremidade; (ii) ambas são deriváveis no interior e I; e (iii) $g'(x)\neq 0$ em I.

O autor justifica a Regra de L’Hôpital sob o argumento de que, quando $x\rightarrow a$ permitimo-nos substituir o quociente $f(x)/g(x)$ por $f'(x)/g'(x)$ e assim podemos ter

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supondo que os limites do numerador e denominador existam. Destacamos dois exemplos abaixo em que o autor expõe a importância e eficiência da Regra:

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{sen(x)}{x}=\left.\frac{\cos(x)}{1}\right]_{x=0}=\cos(0)=1$$

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{1-\cos(\mathrm{x})}{\mathrm{x}^2}=\left.\frac{sen(x)}{2x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}$$

A fórmula (1) mostra as limitações no exemplo (ii) como constatamos a partir da impossibilidade da realização do cálculo considerando que a condição $g'(a) \neq 0$ não é cumprida como ocorre no exemplo (i). Neste caso a equação (2) mostra sua eficiência considerando que $\frac{sen(x)}{2x}$ para $x = 0$ não tem significado enquanto que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x)}{2x}$ existe e vale um. O autor ressalta que a Regra de L'Hôpital pode ser aplicada rotineiramente continuando a derivar o numerador e o denominador até que a forma 0/0 seja eliminada.

No exemplo 3 da página 566, o autor mostra que uma tentativa descuidada do uso da Regra pode conduzir a um erro:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(4x)}{2x+3} = \lim_{x \to 0} \frac{4\cos(4x)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

De fato, nesse caso os limites do numerador e denominador são diferentes de zero em $x = 0$ o que ocasiona o uso indevido da Regra.

Simmons (1987) introduz a forma indeterminada ∞ / ∞ por intermédio da expressão $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$. Aqui, embora o limite possa ser facilmente encontrado tendo em vista que a equação (2) e considerando que, quando x cresce indefinidamente e $1/x$ tende a zero. O autor chama a atenção para o fato de que $ln(x)$ cresce mais lentamente do que qualquer potência positiva de *x*, por menor que seja, embora o autor não apresente por meio de gráficos nenhum significado geométrico desse crescimento.

No que diz respeito às outras formas indeterminadas, Simmons (1987) comenta que as expressões $\infty - \infty, 0.\infty,\ 0^0,\ 1^\infty e\ \infty^0$ podem ser reduzidas à forma 0/0 ou ∞ / ∞ em que uma potência $y = f(x)^{g(x)}$ que produz uma forma indeterminada é melhor tratada tomando-se os logaritmos $ln(y) = ln\ f(x)^{g(x)} = g(x) ln\ f(x)$.

No exemplo 3 abaixo Simmons (1987) explora a forma indeterminada $0.\infty$ com o limite $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, ln(x)$. O autor comenta nesse exemplo que o valor desse limite não é óbvio considerando que, quando $x \to 0^+$ não podemos dizer se produto $x\, ln(x)$ é mais influenciado pelos valores pequenos de *x* ou pelos valores altos de $ln(x)$. Nesse exemplo, o autor usa a expressão $ln(y) = ln\ f(x)^{g(x)} = g(x) ln\ f(x)$ para reduzir a forma ∞ / ∞ no intuito de aplicar a Regra cujo resultado é zero. "Como vemos, a pequenez de x domina o comportamento do produto $x\, ln(x)$ perto de $x = 0$ " (SIMMON, 2007, p. 571).

Na sequência o autor argumenta que “a regra de L’Hôspital deve ser usada inteligentemente e não de modo puramente mecânico” e orienta que se deve limitar o uso da regra a qualquer problema, de maneira automática. São apresentadas as expressões $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2-2}{2x^5+3x^2+4}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{sen^3 x}{x^3}$ e recomendado que o primeiro limite, que está associado à forma ∞/∞, é bem mais fácil dividir o numerador e o denominador por x^5 obtendo 3, tendo em vista que $\frac{-2}{x^5}$, $\frac{3}{x^3}$ e $\frac{4}{x^5}$ tendem a zero quando $x \to \infty$. No caso do segundo limite, o autor orienta que, embora a Regra funcione, é muito mais prático utilizar o Limite Fundamental Trigonométrico escrevendo $\lim_{x\to 0} \frac{sen^3 x}{x^3} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\right)^3 = 1$. Para concluir nossa análise do livro do Simmon (1987), frisamos:

O uso da linguagem por meio de registros gráficos não existe, prevalecendo a linguagem algébrica: As demonstrações realizadas, definições e resolução de problemas são todas do ponto de vista algébrico, não fazendo referência a nenhum registro gráfico ou à utilização de recursos tecnológicos. Diferentemente de autores como, Leithold (1994), Stewart (2009) e Guidorizzi (2001), Simmons (1987) usa uma situação, como a introdução de um teorema para motivar a construção do conceito de Regra de L’Hôpital. Em relação aos exercícios propostos, o autor apresenta uma lista de 65 questões das quais, 4 questões são exigidas a prova de algum teorema e registramos uma questão em que o autor solicita esboço do gráfico de um limite.

4 ANÁLISE A PRIORI

Ressaltamos que nossa pesquisa contempla apenas as duas primeiras etapas da Engenharia Didática, considerando que o objetivo aqui é, como base nos resultados da análise de livros apresentada na seção anterior, propormos situações de ensino. O papel do professor, segundo Brum (2014), é oferecer um conjunto de boas situações de ensino, de modo a aperfeiçoar a ação autônoma do estudante e essas sequências de atividades devem permitir que o estudante atue sobre a situação com a mínima interferência explícita ou condução do professor. Segundo esse autor, os estudantes vivenciarão um clima de debate em sala de aula e cabe ao professor estimular os aprendizes à formulação de conjecturas por meio de intervenções. Vale ressaltar que em nossa pesquisa encontramos alguns trabalhos que propuseram situações de ensino na sua dissertação.

Desse modo, nesta seção, que representa à análise *a priori* da Engenharia Didática, iremos apresentar a descrição de sessões didáticas usando a sequência Fedathi como metodologia de ensino e o software Geogebra como ferramenta facilitadora que por sua vez promove um dinamismo por meio da visualização no processo de ensino considerando sua função dinâmica.

Nessa fase, a partir das variáveis descritas na fase anterior, foram estruturadas sequências didáticas com base nos pressupostos da sequência Fedathi como *proposta de ensino*[7] aos professores de cálculo um conjunto de situações de ensino fundamentadas teoricamente e voltadas para o ensino.

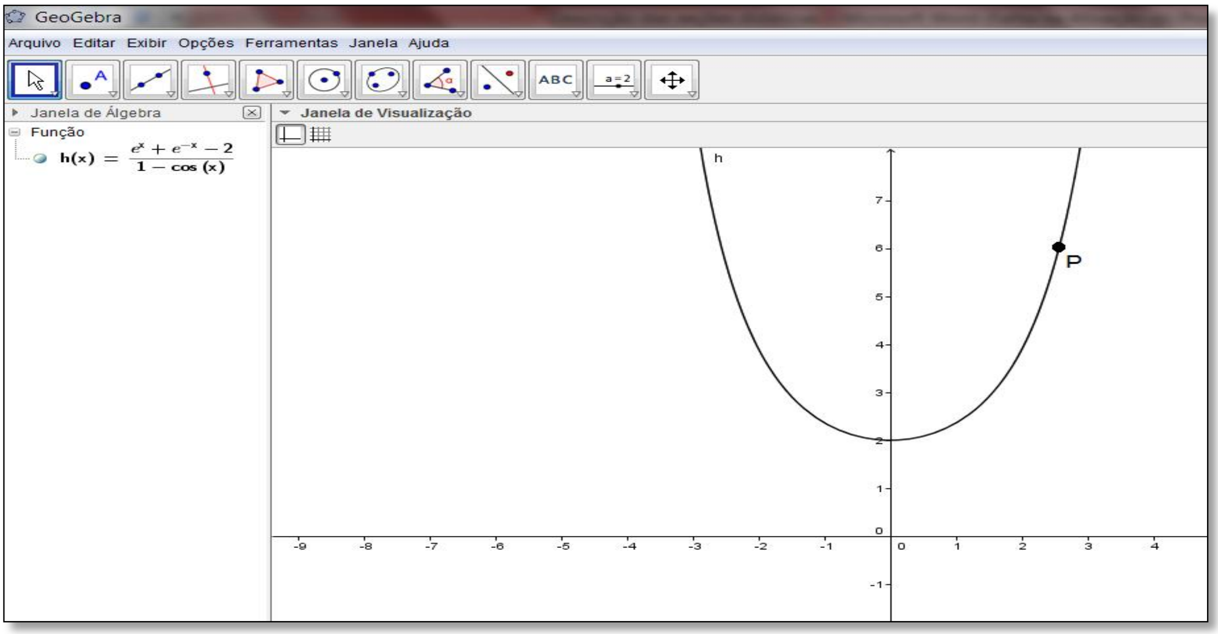
4.1 Primeira sequência didática

Tomada de Posição: Verifique se há pontos de indeterminação na função $h(x) = \dfrac{(e^{x} + e^{-x} - 2)}{1 - \cos x}$ e, em seguida, analise seu comportamento nesse ponto. A figura 36 mostra o gráfico da função *h.*

- Objetivos:
  - Identificar, por meio do software GeoGebra a indeterminação 0/0;
  - Conhecer o comportamento da função no possível ponto de indeterminação com a utilização da Regra de L'Hôpital.

[7] A escolha acima indicada tem como referência o Documento de Área 2013- CAPES (2013, p. 27)

Figura 36 - Gráfico da função h (tomada de posição)



Fonte: Produção nossa

Comentário: Reparemos que nos caso da função em questão, quando restrito ao ambiente lápis/papel a indeterminação 0/0 é facilmente identificada, uma vez que para $x = 0$ temos $e^{x} + e^{-x} - 2 = 0$ e $1 - \cos(x) = 0$

Maturação: Nesta etapa buscaremos o máximo de informações possíveis no intuito de chegar à solução. Alves (2013) explica que a fase da maturação é evidenciada tendo em vista que se consegue prever o valor do limite geometricamente, contudo, analiticamente, o aluno deve perceber a necessidade do uso da referida Regra.

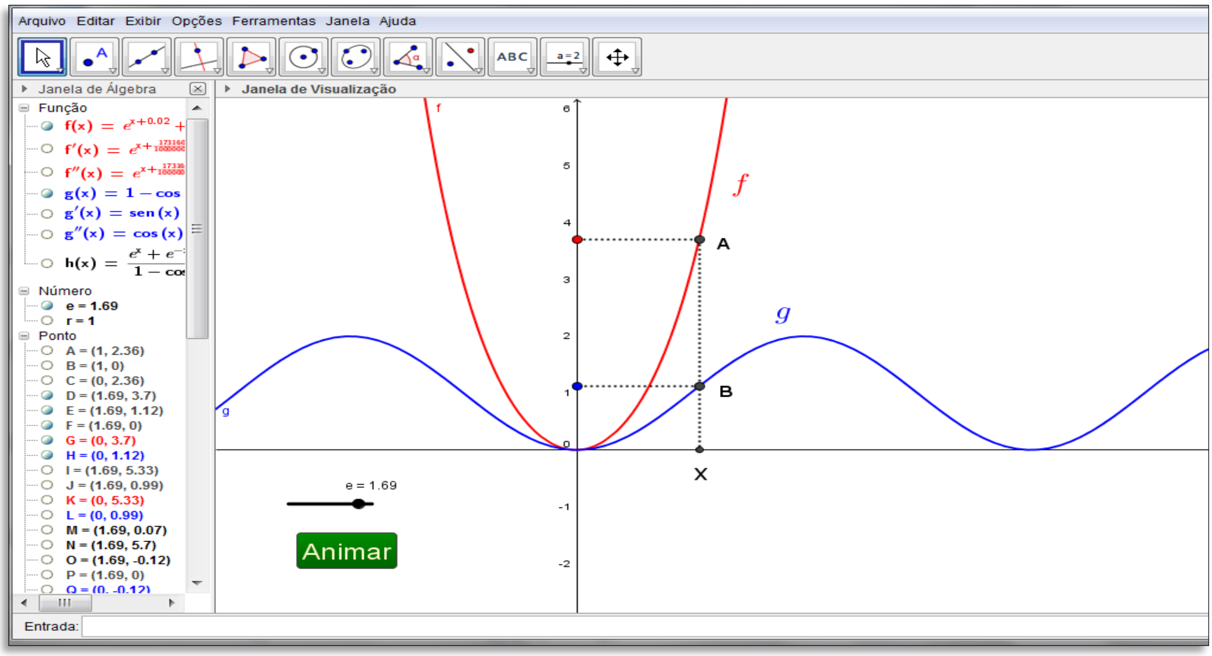
Comentário: Para um melhor entendimento, as funções $f(x) = e^{x} + e^{-x} - 2$ e $g(x) = 1 - \cos(x)$ que representam o numerador e o denominador de h serão analisados separadamente. Vejamos as informações que podem ser extraídas. Utilizando-se do recurso dinâmico do software Geogebra, por meio da ferramenta "controle" deslizante percebe-se que:

(i) A função h é descontínua no ponto $x=0$

(ii) À medida que os valores de x se aproximam de zero, as respectivas imagens nas funções f e g se aproximam de zero, ou seja, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

(iii) A imagem de *f* se aproxima mais rapidamente de zero do que a imagem de g

Figura 37 - Funções *f* e *g* se aproximando zero quando x tende a zero

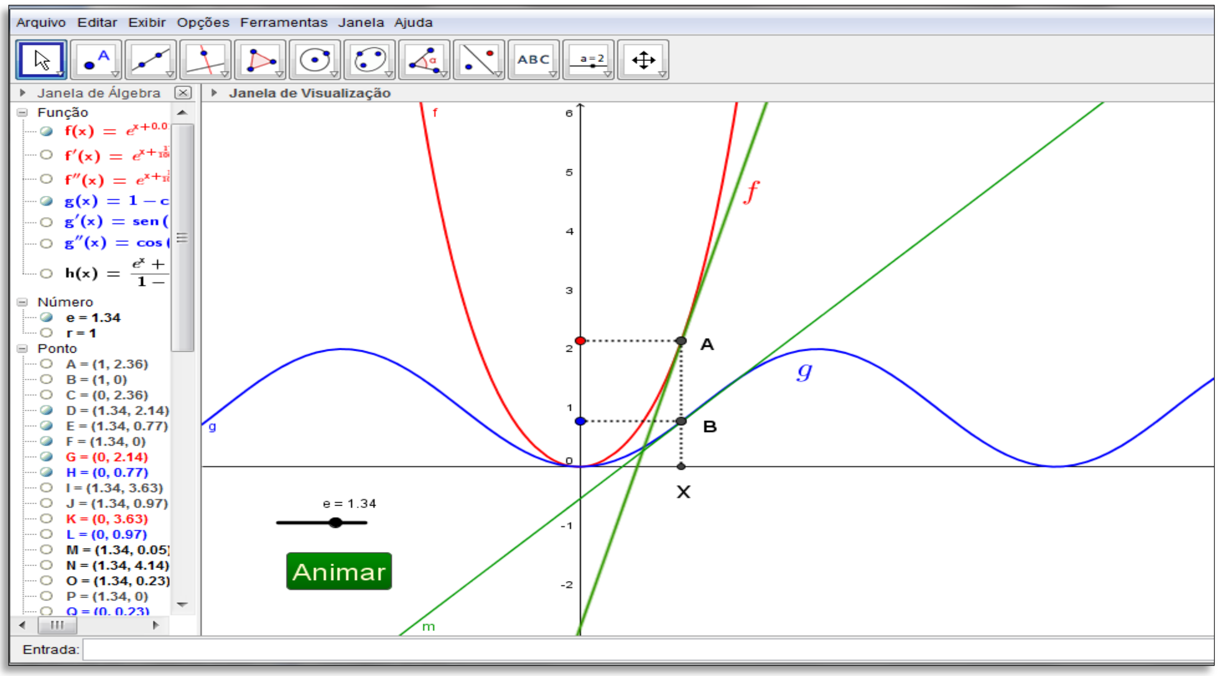


Fonte: Elaboração nossa

Solução:

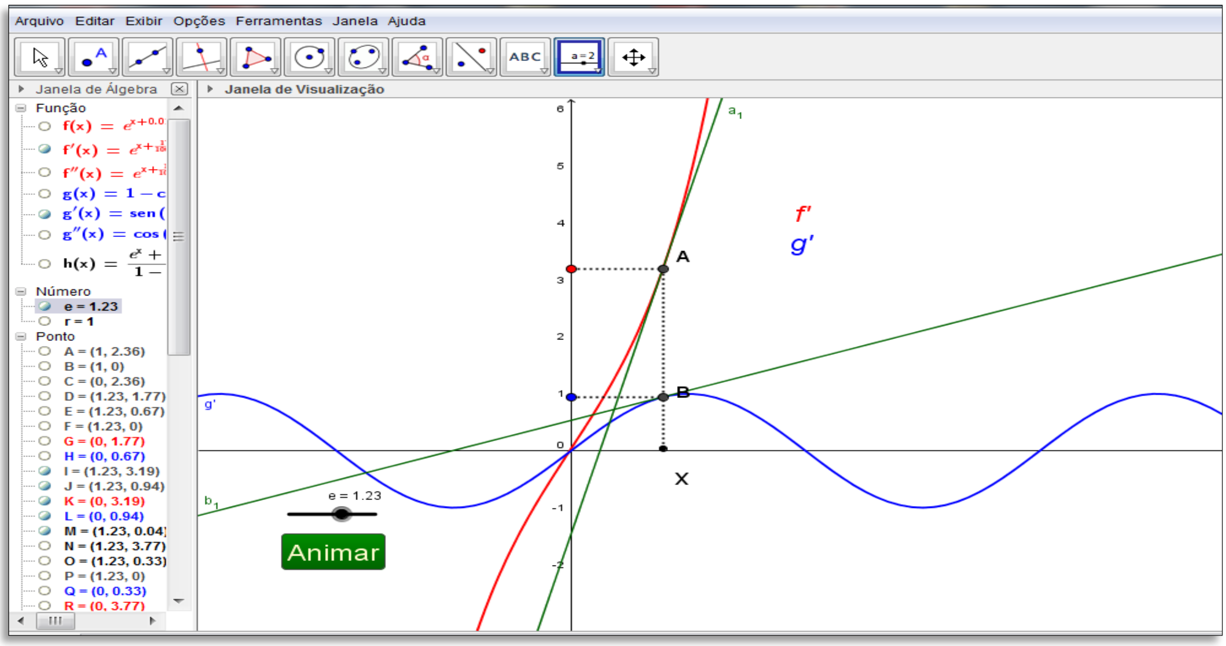
Tendo em vista as observações acima, constata-se que estamos diante do caso de indeterminação 0/0. De posse do conhecimento da Relação de L'Hôpital, o aluno usará os comandos de derivabilidade no GeoGebra para construir o gráfico das funções derivada de $f(x)=e^{x}+e^{-x}-2$ e $g(x)=1-\cos(x)$. A condição para que seja aplicada a Regra reside no fato de que as funções *f* e *g* precisam ser deriváveis com g'≠0, como vimos em sessões anteriores, condição essa que não é cumprida pela função *g*. Repare na figura 38 que as tangentes aos gráficos de *f* e g nos pontos A e B se aproximam da horizontal quando x "tende" a zero. Esse fato é facilmente constatado ao construirmos a funções *f'* e g' representadas na figura 39, quando vemos que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)=0$, condição esta que impede a aplicação da regra. Após a construção do gráfico da derivada nas funções *f* e *g* o aluno constatará a necessidade de uma segunda aplicação da derivada considerando que, por inspeção do gráfico da figura 39, as funções *f'* e *g'* ainda interceptam-se simultaneamente no ponto $x=0$, caracterizando ainda uma indeterminação 0/0. As tangentes aos gráficos de *f'* e *g'*, na figura 39, aproximam-se de direções diferentes e não horizontais quando *x* se aproxima de zero. Essa situação aponta a não nulidade das derivadas *f''* e *g''* no ponto *x=0*, ocorrência essa que nos garante a aplicação da regra.

Figura 38 - Retas tangentes às funções *f* e *g* representando suas respectivas derivadas



Fonte: Elaboração nossa

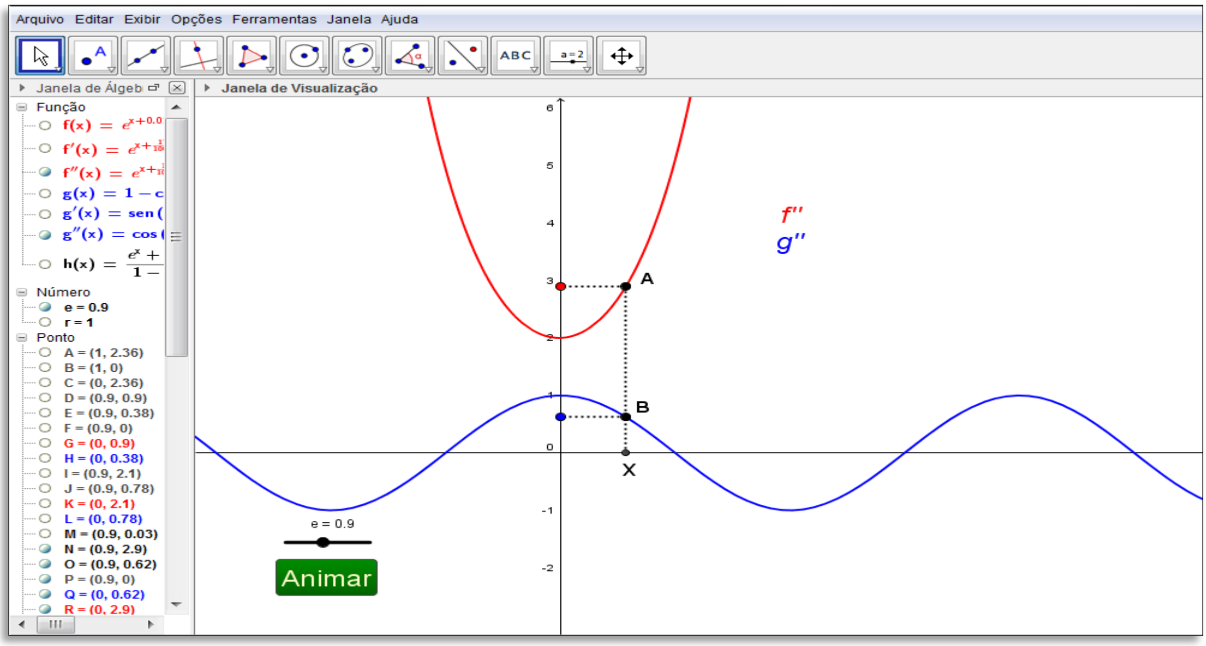
Figura 39 - Representação geométrica da derivada primeira das funções f e g



Fonte: Elaboração nossa

Esse fato pode ser verificado mediante a construção das funções *f''* e *g''*, *o*bservando-se que quando os valores de x se aproximam de zero as imagens das funções *f''* e *g''* convergem para 2 e 1, respectivamente. Concluímos que a função *h* se aproxima do número 2 quando *x* se aproxima de zero (figura 40).

Figura 40 - Representação gráfica da derivada segunda das funções *f* e *g*



Fonte: produção nossa

Nesta fase, é importante que o professor solicite que os alunos apresentem e justifiquem suas soluções por meio do GeoGebra explicando os caminhos pelos quais chegaram a tal resultado.

Prova: Nesta etapa, será realizada uma verificação da solução encontrada por meios algébricos. Neste caso, devemos aplicar a Regra de L'Hôpital algebricamente a partir do ponto identificado pelo aluno como indeterminado. A indeterminação do tipo 0/0 identificada pelo aluno ocorrem em $x = 0$, portanto deve-se calcular $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \ (e^{x} + e^{-x} - 2)'}{\lim\limits_{x\to 0} \ (1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{(-x)}}{sen(x)}$$

Mas, $\lim\limits_{x \to 0} \ e^{x} - e^{(-x)} = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \ sen(x) = 0$

Aplicamos novamente a Relação de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \ h(x) == \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{(-x)}}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x} - e^{(-x)}\right)'}{(sen(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} + e^{(-x)}}{cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

comentário: Após a fase de maturação em que o aluno, por meio da manipulação e da inspeção do gráfico, conclui que a forma indeterminada 0/0 ocorre no ponto em que as funções *f* e *g* interceptam o eixo 0x no mesmo ponto e isso se explica pelo fato de que, nos pontos em que as curvas interceptam o eixo 0x a função tem raiz nula.

4.2 Segunda sequência didática

Ressaltamos que para um bom entendimento, o aprendiz deve dispor de um conhecimento razoável de temas como Diferenciabilidade, continuidade, limites, formas indeterminadas e Regra de L'Hôpital.

Tomada de posição: Considerando a função $h(x) = \frac{ln(x)}{x-1}$, cujo gráfico está na figura 41, avalie o limite de *h* quando $x = 0$, quando $x = 1$ e quando x tender a infinito positivo.

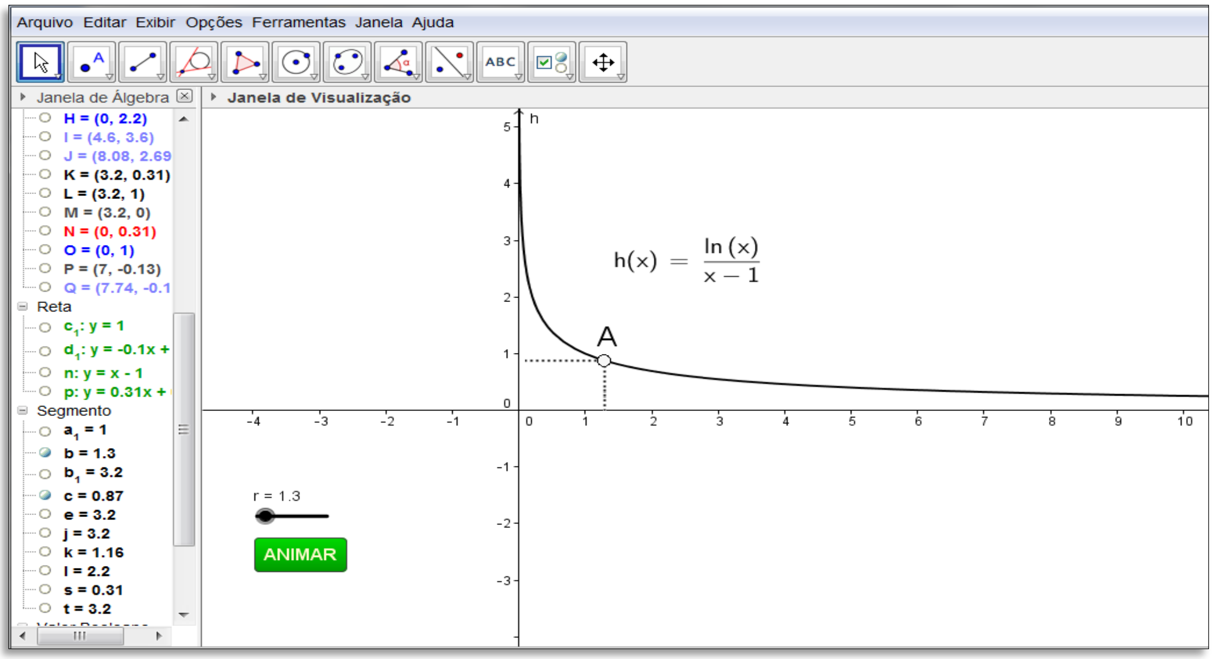
Objetivo:

- Perceber, por meio do gráfico e da manipulação no software Geogebra as descontinuidades nos pontos citados acima, identificar qual delas representa uma forma indeterminando, identificando o tipo de indeterminação e, em seguida, avaliar os limites nesses pontos.

Comentário: Reparemos que neste caso o aprendiz deve identificar as descontinuidades em $x = 0$, $x = 1$ e quando x "tende" a mais infinito uma vez que, embora no ponto 0 não haja indeterminação considerando que o denominador de *h* não se anula, mas o quociente $\frac{ln(x)}{x-1}$ cresce indefinidamente quando $x \to 0$. No ponto $x = 1$ o aprendiz deve identificar a indeterminação 0/0 tendo em vista que $\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = \frac{ln(1)}{1-1}$ e as funções que representam o numerador e o denominador são contínuas no ponto $x = 1$. Tal indeterminação pode ser evitada pela aplicação da Regra. No caso em que x cresce, indefinidamente, concluímos algebricamente que $\lim_{x \to \infty} ln(x) = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} x - 1 = \infty$ concluindo-se dessa forma que se trata do caso de indeterminação ∞ / ∞.

Maturação: Nesta etapa, o aprendiz é estimulado à identificação de todas as variáveis envolvidas no problema com a exploração do software. O professor, por meio de perguntas esclarecedores, deve instigar o aluno a buscar o máximo de informações possíveis no intuito de utilizá-las na busca da solução do problema.

Figura 41 - Representação gráfica da tomada de posição da segunda situação didática



Fonte: Elaboração nossa

Objetivo: Extrair, com base nos conhecimentos prévios e com o auxílio do software informações que serão úteis para se chegar a solução do problema. Tais informações podem ser observadas:

(i) As funções *f* e *g* que representam o numerador e o denominador de *h* se aproximam de zero na medida em que $x \to 1$

(ii) A função *g* se aproxima mais rapidamente de *0* do que a função f

(iii) f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em $x = 1$

(iv) As retas tangentes às funções f e g no ponto $x = 1$ possuem a mesma inclinação

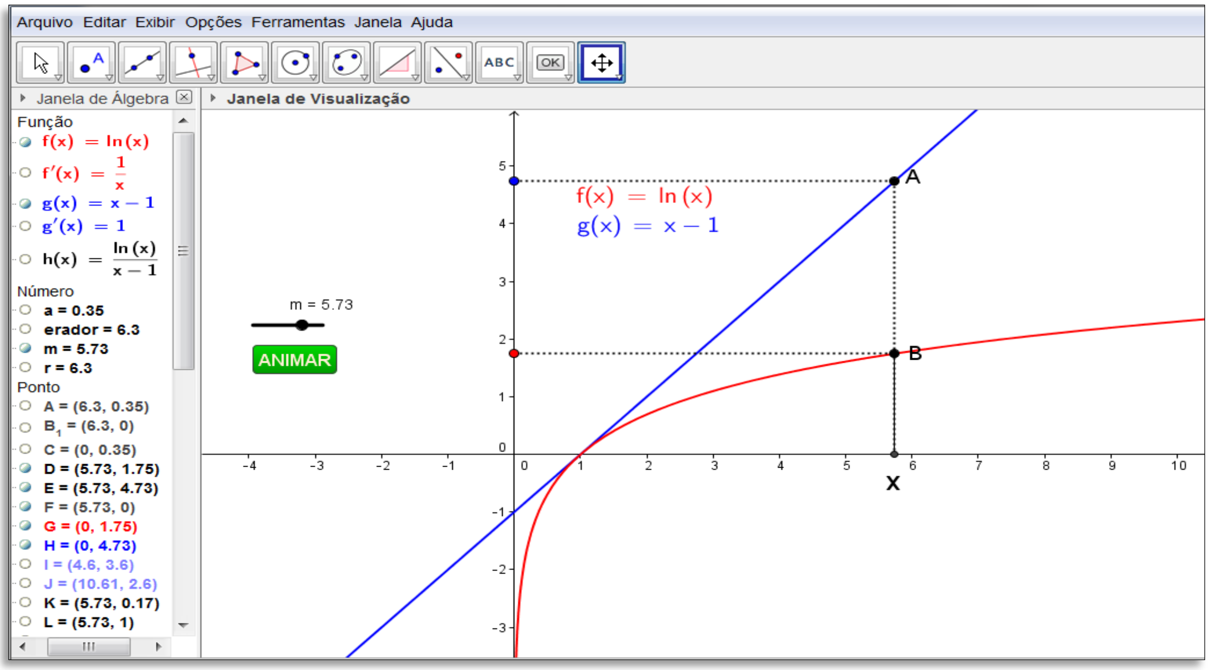
(v) Em $x = 1$ $f' = g' \neq 0$.

(vi) Quando $x \to 0$ a função f decresce (cresce em valor absoluto) mais rapidamente do que o decrescimento (crescimento em valor absoluto) linear da função *g*.

(vii) Quando x cresce indefinidamente, as funções *f* e *g* também apresentam um crescimento indefinido, no entanto o crescimento linear da função g ocorre com maior velocidade do que o crescimento da função *f*.

Comentários: Com a utilização do controle deslizante no gráfico da função *h*, na figura 41, podemos verificar que quando tomamos valores de x cada vez mais próximos de zero a imagem de h cresce indefinidamente. Neste ponto, não há indeterminação porque embora $ln(x)$ cresça indefinidamente em valor absoluto "tendendo" ao infinito, a função $x-1$ se aproxima de uma constante tornando o quociente "muito grande". Já no ponto $x=1$ com a utilização do controle deslizante, animando os pontos A e B nos gráficos das funções f e g (figura 48) percebe-se que, quando x se aproxima de 1, tanto a função f quanto a função g se aproximam de zero, induzindo o aluno a deduzir que se trata do caso de indeterminação 0/0 e que na fase seguinte a Regra de L'Hôpital poderá ser aplicada se as condições impostas na definição forem atendidas.

Figura 42 - Manifestação da forma indeterminada no ponto $x=1$

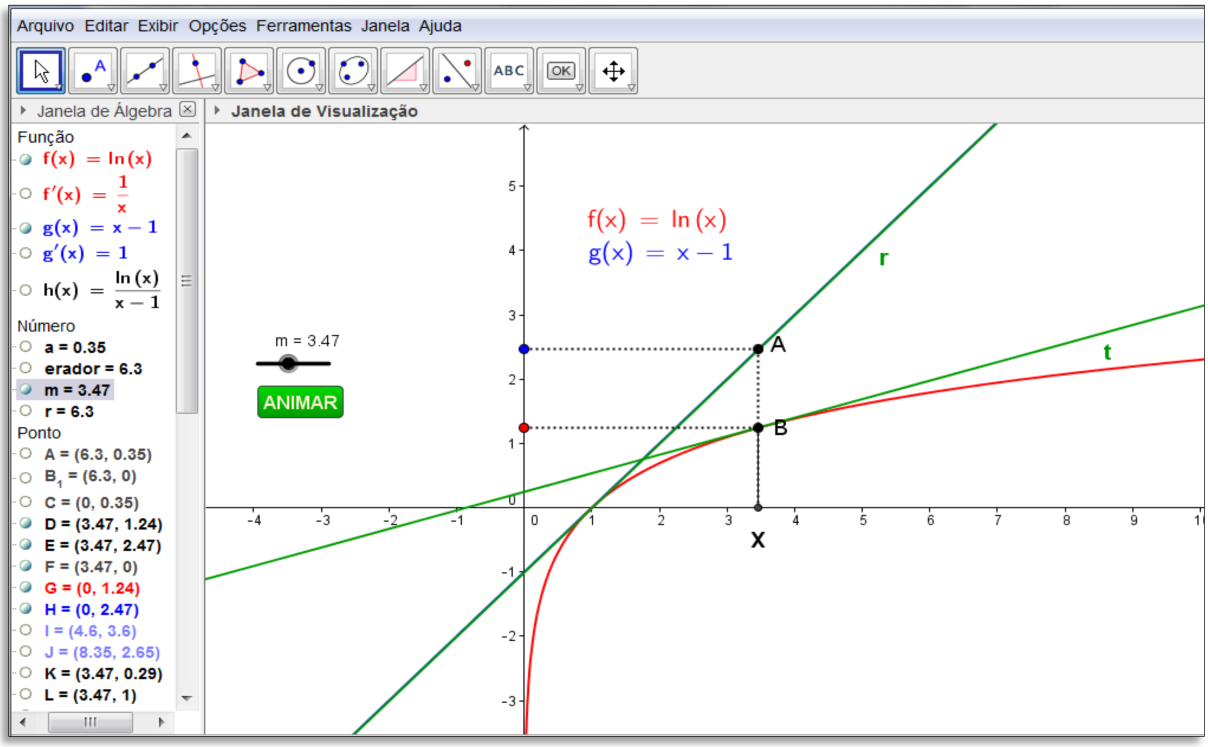


Fonte: Elaboração nossa

A construção das tangentes r e s figura 43 é importante no sentido de fazer uma análise prévia a respeito da condição para a aplicação da regra, considerando que a partir das retas r e s é possível saber, antecipadamente, a configuração do gráfico de f' e g'. No caso de x tender ao infinito, novamente com o auxílio do controle deslizante observa-se que tanto a função f quanto a função g crescem indefinidamente quando tomamos valores de x cada vez maiores fazendo com que o aluno deduza que se trata do caso de indeterminação ∞/∞.

Solução: Nesta fase, com base em todas as informações levantadas na etapa anterior os aprendizes vão apresentar as suas possíveis soluções, no entanto o professor deve analisar e dar contraexemplos fundamentados além de utilizar o Geogebra apresentando passo a passo e analisando-os junto com os alunos para eles verificarem as soluções.

Figura 43 - Retas tangentes às funções *f* e *g*

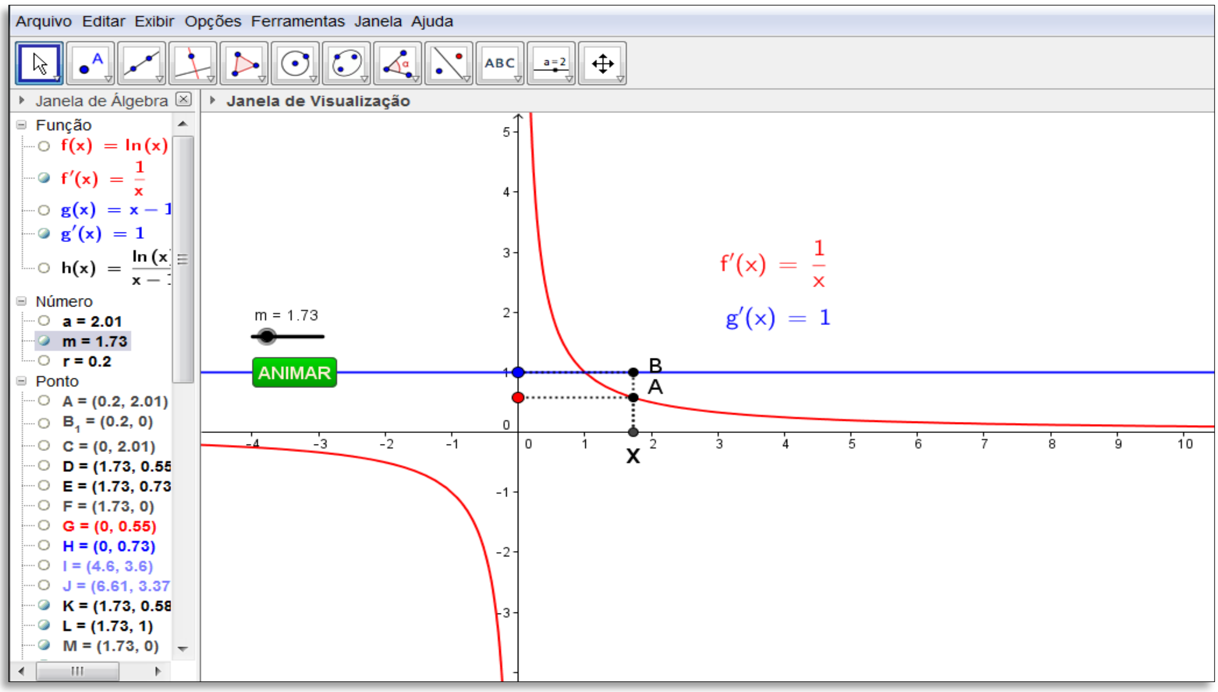


Fonte: Elaboração nossa

No caso do nosso problema, e com as informações listadas na fase anterior, podemos concluir que: No caso da indeterminação 0/0 na fase anterior no ponto $x = 1$ a existência do limite deve ser verificada analisando a condição $g'(x) \neq 0$ que é constatada facilmente pela construção da reta *t* tangente a *f* no ponto A (figura 43). Podemos ver, com o auxílio do controle deslizante, que as retas tangentes *r* e *s* possuem a mesma inclinação no ponto $x = 1$ indicando, dessa forma, que nesse ponto as derivadas são iguais e diferente de zero, não havendo a necessidade de uma segunda derivada. De fato, ao construirmos as funções derivadas (figura 44) observamos que $\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} g'(x) = 1$ e pela continuidade das funções *f* e *g* dividimos $f'(1)$ por $g'(1)$ obtendo o valor 1 como sugere a Regra de L'Hôpital. Na etapa anterior constatamos também que quando x cresce indefinidamente, as funções *f* e *g* também apresentam crescimentos indefinidos, caracterizando um caso de indeterminação ∞/∞, sendo que *g* cresce mais rapidamente que *f* o que nos leva a concluir que o quociente $\dfrac{f}{g}$ se aproxima de zero à medida que tomamos valores cada vez maiores de x.

Prova: Nesta fase da Sequência Fedathi, resolvemos, algebricamente, a situação didática proposta. Segue abaixo a resolução:

Figura 44 - Representação gráfica da derivada segunda das funções f e g



Fonte: produção nossa.

No caso do limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vimos que não há indeterminação, visto que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1 \neq 0$, assim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)} = (-1).(-\infty) = \infty$$

No caso do limite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ temos o caso de indeterminação 0/0. Considerando que $g'(x) = -1 \neq 0$ podemos aplicar a Regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{[\ln(x)]'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

No caso do limite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ temos um caso de indeterminação ∞/∞ uma vez que $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} x-1 = \infty$. Assim, pela Regra de L'Hôpital:

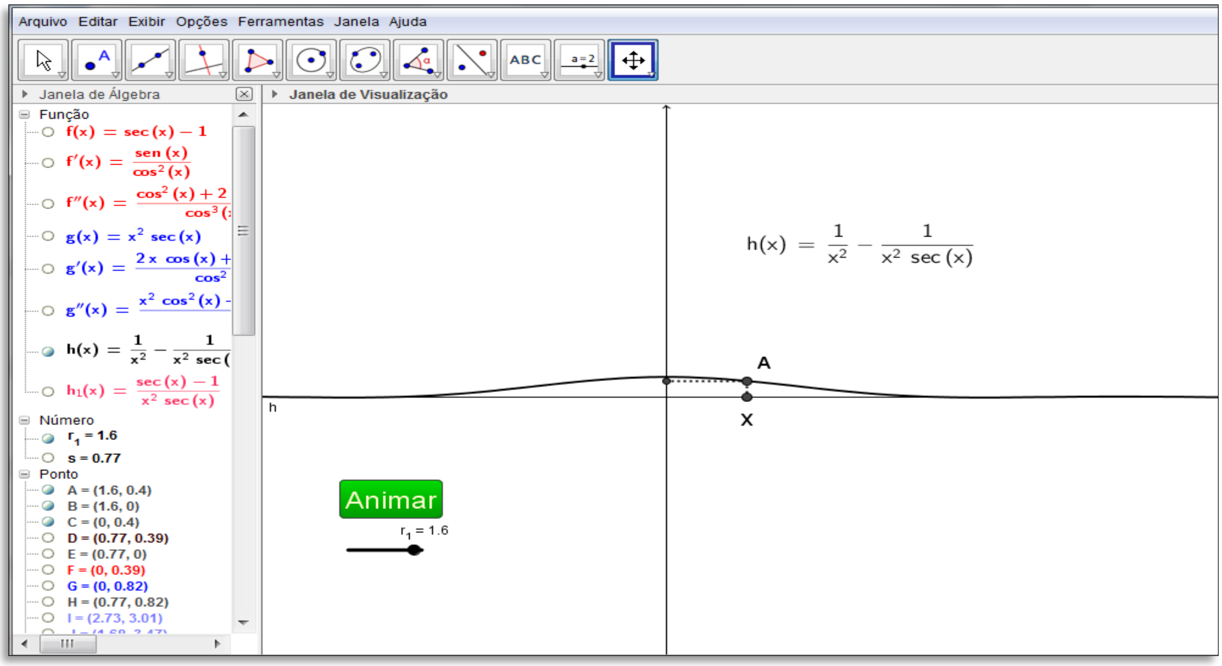
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(x)]'}{(x-1)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

4.3 Terceira sequência didática

Atentamos para a necessidade dos conhecimentos prévios de formas indeterminadas, limites, derivadas e continuidade.

Tomada de posição: Considerando a função $h(x)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)$, cujo gráfico está na figura 45, verifique se há indeterminação e, caso haja, avalie o comportamento de *h* na vizinhança desse ponto.

Figura 45 - Representação gráfica da tomada de posição da terceira situação didática



Fonte: Elaboração nossa

Objetivo: Identificar a indeterminação por meio da visualização com o auxílio do GeoGebra e analisar o comportamento da função nesse ponto.

Maturação: Nesta etapa, o aluno é estimulado à identificação de todas as variáveis envolvidas no problema. Com base na função h e com ajuda do software podemos extrair as seguintes informações:

(i) Com a utilização do controle deslizante na vizinhança do zero vemos que há uma descontinuidade nesse ponto uma vez que percebemos um "salto" do ponto ***A*** no valor $x=0$;

(ii) Ao tomar valores de x cada vez mais próximos de zero podemos observar que as parcelas $\dfrac{1}{x^2}$ e $\dfrac{1}{x^2 \sec x}$ crescem indefinidamente “tendendo” ao infinito;

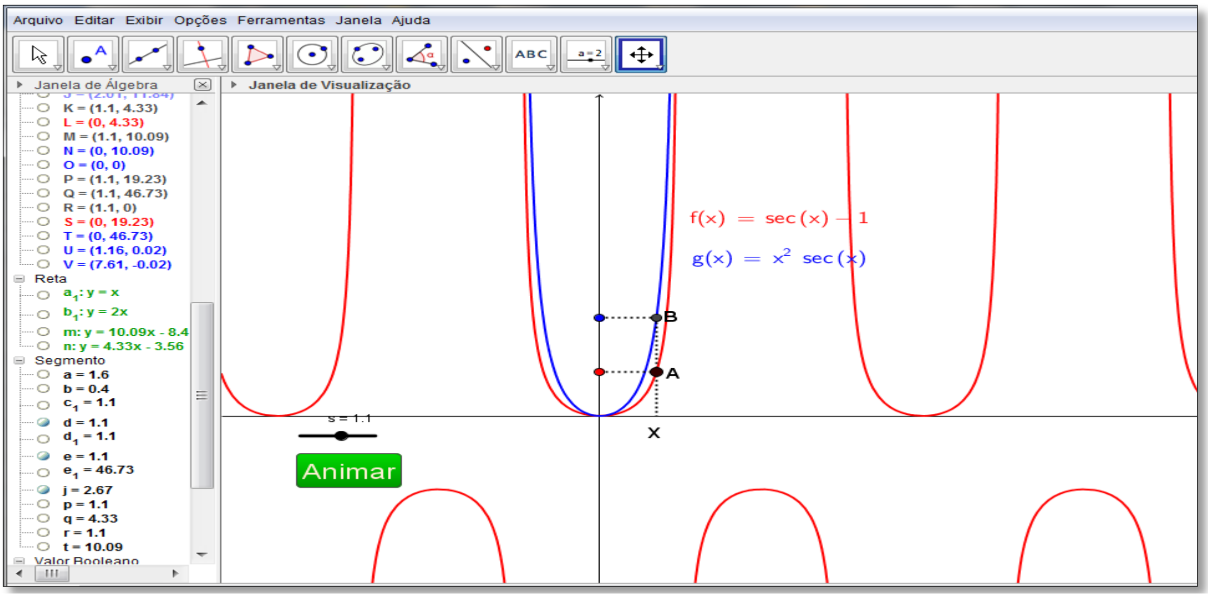
(iii) As funções f e g, numerador e denominador de h, respectivamente, se aproximam de zero quando movemos o ponto x na direção de (0,0);

(iv) f e g são deriváveis em $x = 0$ e $g'(x) = 0$ neste ponto;

(v) f' e g' são deriváveis em $x = 0$ e $g''(x) \neq 0$ neste ponto.

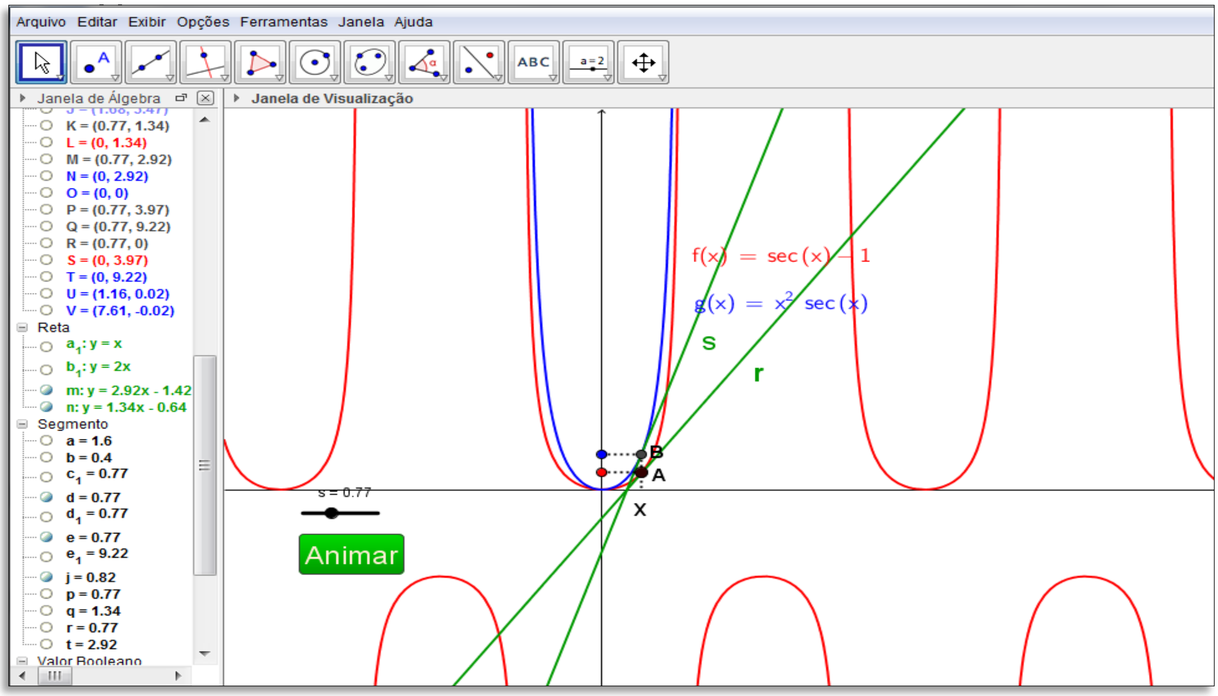
Comentários: A descontinuidade no ponto do ponto A em $x = 0$ indica um caso de indeterminação do tipo $\infty - \infty$ tendo em vista que $\dfrac{1}{x^2}$ e $\dfrac{1}{x^2 \sec x}$ crescem indefinidamente tendendo ao infinito, quando tomamos valores de x próximos de zero. Para uma melhor compreensão e análise por meio da visualização a expressão $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 \sec x}$ pode ser escrita como $\dfrac{\sec x - 1}{x^2 \sec x}$ passando da forma indeterminada $\infty - \infty$ para a forma 0/0, considerando que as funções $f(x) = \sec x - 1$ e $g(x) = x^2 \sec x$, que representam o numerador e denominador da função h, respectivamente, são contínuas em $x = 0$ e com o auxílio do controle deslizante vemos que $\lim\limits_{x \to 0} \sec x - 1 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \sec x = 0$ como mostra a figura 46.

Figura 46 - Manifestação geométrica da forma indeterminada 0/0



Fonte: Elaboração nossa

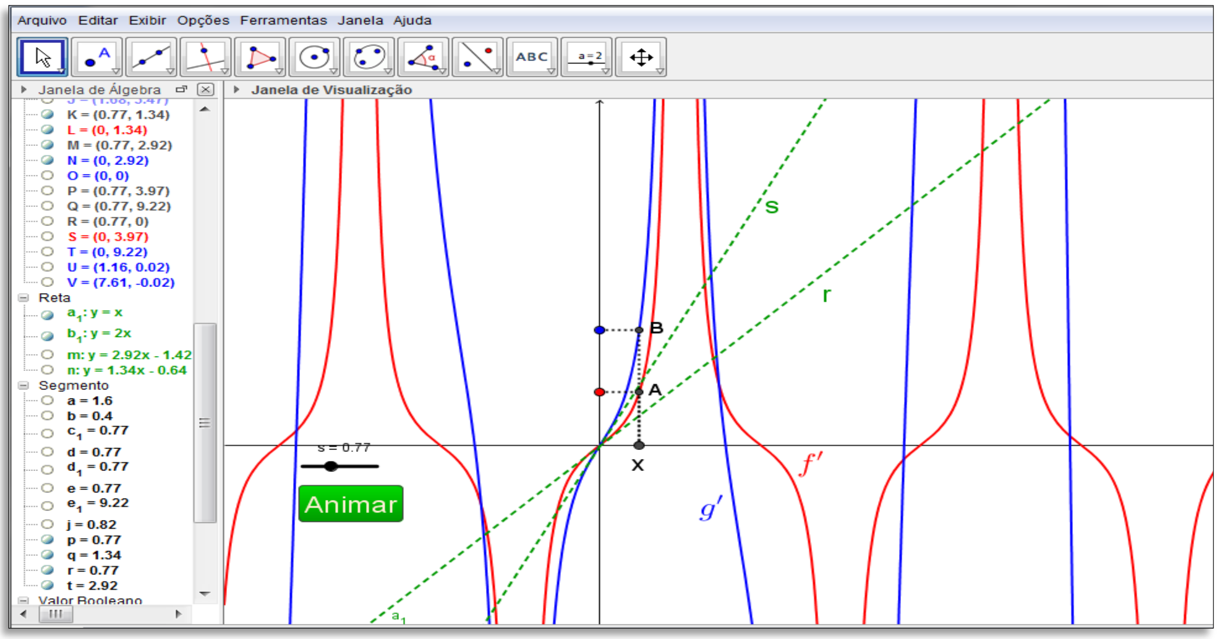
Figura 47 - Derivada das funções representadas pelas retas tangentes



Fonte: Elaboração nossa

O caso da indeterminação 0/0 sugere que na próxima fase (solução) da SF dividamos a derivada *f'(x)* por *g'(x)* desde que esta última seja diferente de zero em $x = 0$. Para que essa condição seja verificada, o professor deve sugerir que o aluno verifique tal condição por meio da reta tangente ***s.***

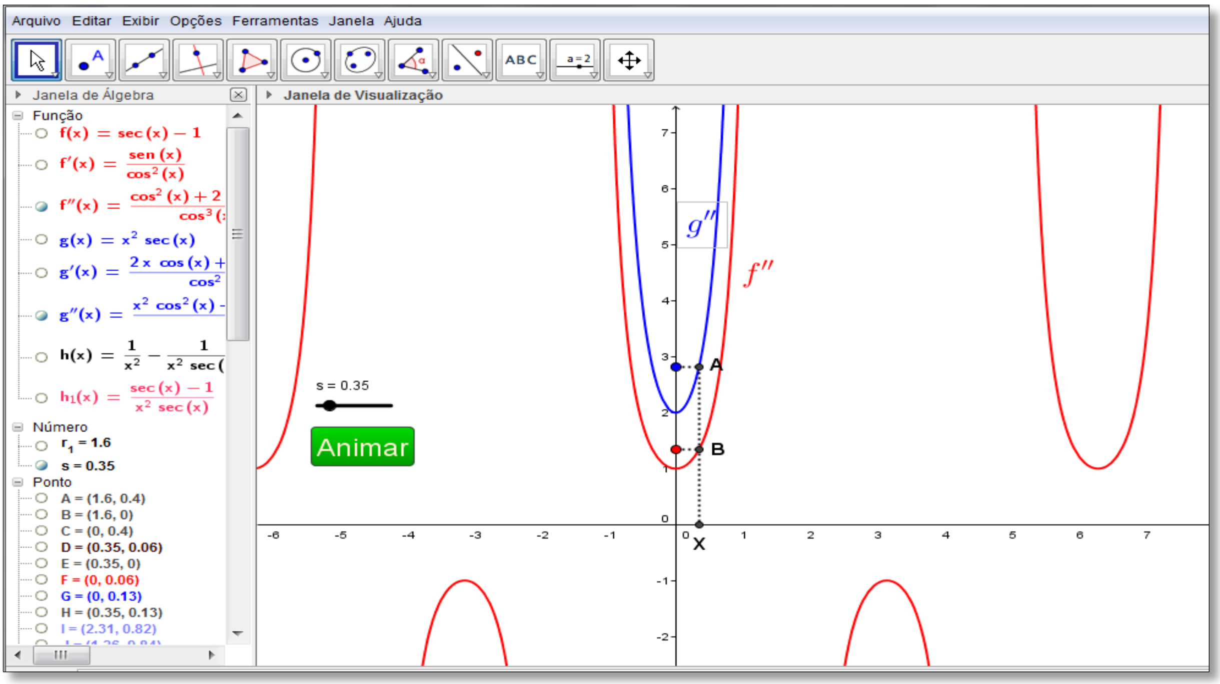
Figura 48 - Representação de *f'* e *g'* por meio das retas tangentes



Fonte: Elaboração nossa

No entanto, com base na reta tangente ***s*** nos deparamos com o não cumprimento da condição $g'(x) \neq 0$, uma vez que a reta tangente s é horizontal no ponto (0,0) como mostra a figura 47. De fato, na construção das funções derivadas *f'* e *g'*, como mostra a figura 48, percebemos que tais funções se aproximam de zero quando $x \to 0$. Com a animação dos pontos A e B vemos que as funções *f'* e *g'* são deriváveis e se aproximam de zero quando $x \to 0$, no entanto suas tangentes no ponto (0,0) (figura 48) possuem direções diferentes da horizontal, garantindo a aplicação da regra. Tal fato pode ser verificado pelas funções *f''* e *g''* na figura 49.

Figura 49 - Representação gráfica das funções *f''* e *g''*



Fonte: Elaboração nossa

Prova: Nesta fase, da SF o professor pode fazer a formalização algébrica da resposta, usando as discussões adquiridas pelos alunos por meio da exploração do gráfico na fase anterior. Com base nessas discussões e utilizando o enunciado da regra de L'Hôpital e os conhecimentos adquiridos pelos alunos no processo de construção da solução do problema, o professor apresentará a solução algébrica com todo o rigor matemático. Segue na figura 50 desenvolvimento algébrico da solução.

Figura 50 - Resolução algébrica da terceira situação didática

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right)$$

Solução Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 \sec x} = +\infty$$

temos a forma indeterminada $+\infty - (+\infty)$. Reescrevendo a expressão, temos

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x}$$

$\lim\limits_{x \to 0} (\sec x - 1) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \sec x) = 0$; aplicamos então a regra de L'Hôpital e obtemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2x \sec x + x^2 \sec x \operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x + x^2 \operatorname{tg} x}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} (2x + x^2 \operatorname{tg} x) = 0$

Assim, aplicamos novamente a regra obtendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x + x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{2 + 2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \frac{1}{2}$$

Fonte: Leithold (1994, p. 663)

Comentário: Podemos observar que o valor do limite encontrado $\lim\limits_{x \to o} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \frac{1}{2}$ corresponde ao quociente entre as imagens do ponto B e do ponto A das funções *f''* e *g''*, respectivamente, no ponto $x = 0$ na figura 49.

4.4 Quarta sequência didática

Tomada de Posição: Verifique se há indeterminação na função $h(x) = arcsen(x).\cos ec(x)$. Caso haja, avalie o limite neste(s) ponto(s).

Objetivo: Localizar ponto(s) de indeterminação na função *h* e, em seguida, obter o comportamento da função nesse(s) ponto(s) por meio da visualização.

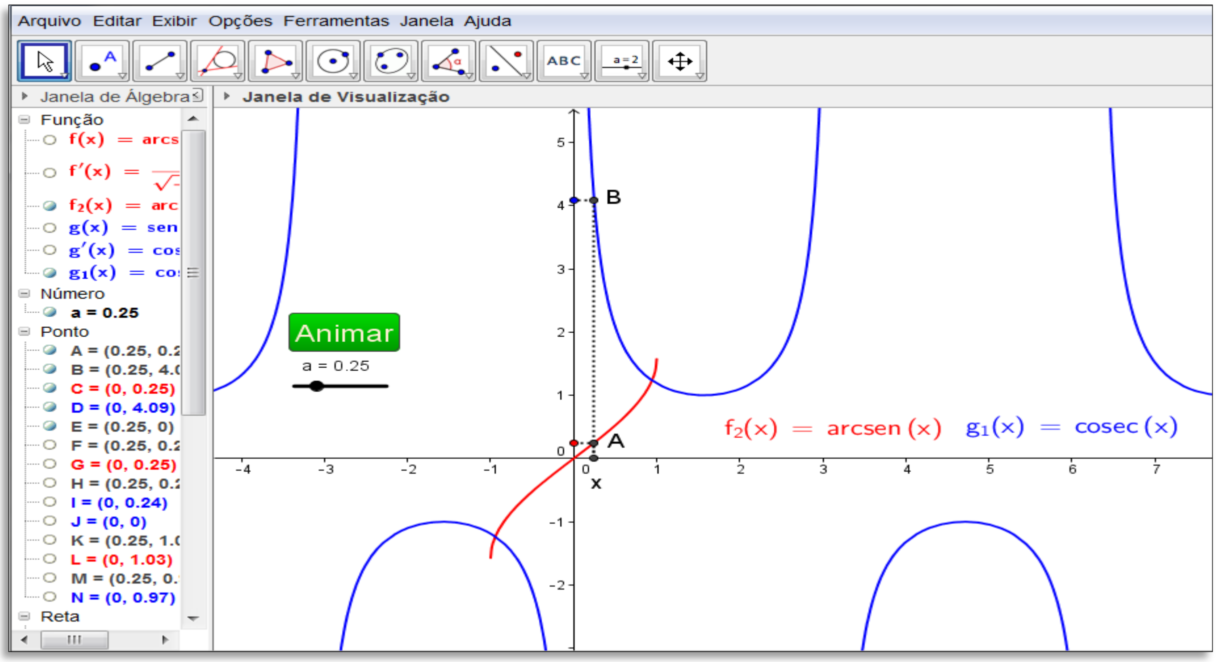
Comentário: Nesta situação didática, iniciaremos analisando, separadamente, as funções $arcsen(x)$ e $cos\,sec(x)$ e no final será apresentado o gráfico de *h* para que seja feita a comparação. Assim, será sugerido ao aluno que inicie analisando as funções $f_1(x) = arcsen(x)$ e $g_1(x) = cos\,sec(x)$ no Geogebra, separadamente.

Maturação: Com base nas funções f_1 e g_1 (Figura 51) e com auxílio do controle deslizante no Geogebra, o aluno deve ser instigado pelo professor a fazer as seguintes observações:

(i) A função f_1 é definida em $-1 \le x \le 1$ enquanto que a função g_1 é definida para todos os reais com exceção dos pontos em que passam assíntotas verticais (de 0 a 2π pode-se observar assíntotas em $x = 0$, $x = 3$ e $x = 6$ que correspondem aos arcos 0 , π e 2π);

(ii) Quando *x* estiver próximo de 0 (de qualquer lado do zero), $f_1(x)$ tenderá a zero enquanto os valores de g_1(x) aumenta indefinidamente.

Figura 51 - Manifestação da forma indeterminada $0.\infty$ na quinta sequência didática



Fonte: Elaboração nossa

Comentário: Uma das condições para que seja aplicada regra de L'Hôpital, no intuito de conhecer o comportamento da função no possível ponto de indeterminação, é que essa indeterminação seja caracterizada por 0/0 ou ∞/∞ (considere $-\infty\, ou +\infty$). Deste modo faz--se necessário a manipulação algébrica da função *h* da forma indeterminada "$0.\infty$" para a forma 0/0 ou ∞/∞. Leithold (1994) nos mostra que $arcsen(x).cos\,ec(x)$ na forma $0.\infty$

corresponde a $\frac{arcsen(x)}{sen(x)}$ na forma 0/0. Vamos considerar $f(x) = arcsen(x)$ e $g(x) = sen(x)$.

(iii) As funções *f* e *g* se aproximam de zero quando x tende a zero;

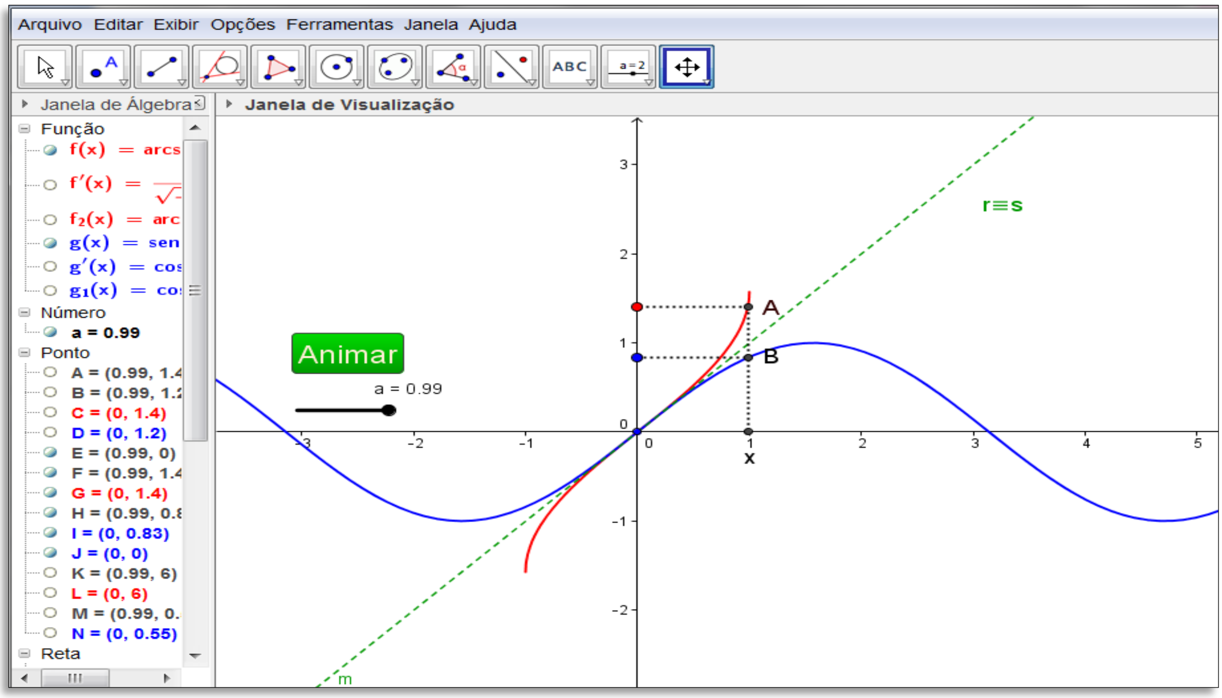
(iv) *f* e *g* são deriváveis na vizinhança do ponto (0,0) e suas tangentes nesse ponto possuem a mesma direção, diferente da direção horizontal;

(v) *g'(x)* no ponto (0,0) é diferente de zero.

Solução: Com base nas informações extraídas dos gráficos das funções *f*, *f'*, *g* e *g'* inicia-se o processo de construção da solução. Ao final desta fase, os alunos apresentarão suas possíveis soluções. A partir daí o professor, com o auxílio do GeoGebra dará início ao processo de solução mostrando cada etapa do desenvolvimento passo a passo com os alunos para que eles verifiquem suas soluções. Vejamos:

Comentário: Com base nas informações levantadas nos itens (i) e (ii) na fase anterior, embora a função *g* esteja definida para todos os reais com exceção nos pontos em que ocorrem as assíntotas verticais, devemos procurar a indeterminação, caso haja, no intervalo $-1 \leq x \leq 1$, considerando que *f* é restrita a esse intervalo. Ainda considerando os itens (i) e (ii) vemos que, quando movemos o controle deslizante para esquerda fazendo com que *x* se aproxime de zero, a imagem de *x* pela função *f* se aproxima de zero enquanto que, para o mesmo ponto *x*, a imagem de *g* cresce indefinidamente caracterizando o caso de indeterminação $0.\infty$, como mostra a figura 52. Por meio da manipulação algébrica, vemos que a função $arcsen(x).cosec(x)$ é equivalente a $\frac{arcsen(x)}{sen(x)}$, porém com esta última na forma 0/0, tendo em vista que *f* e *g* tendem a zero quando $x \to 0$. A condição para que a regra de L'Hôpital seja aplicada reside no fato de que as funções *f* e *g* precisam ser deriváveis na vizinhança do zero e que $g'(x) \neq 0$ em $x = 0$. Tal condição é satisfeita tendo em vista que a reta tangente à função *g* em (0,0) possui direção não horizontal (derivada não nula) (Figura52), verificada no item (iv) da fase anterior. De fato, a construção das funções derivadas de *f* e *g* nos permite observar que, quando $x \to 0$ as funções derivadas *f'* e *g'* tendem a 1.

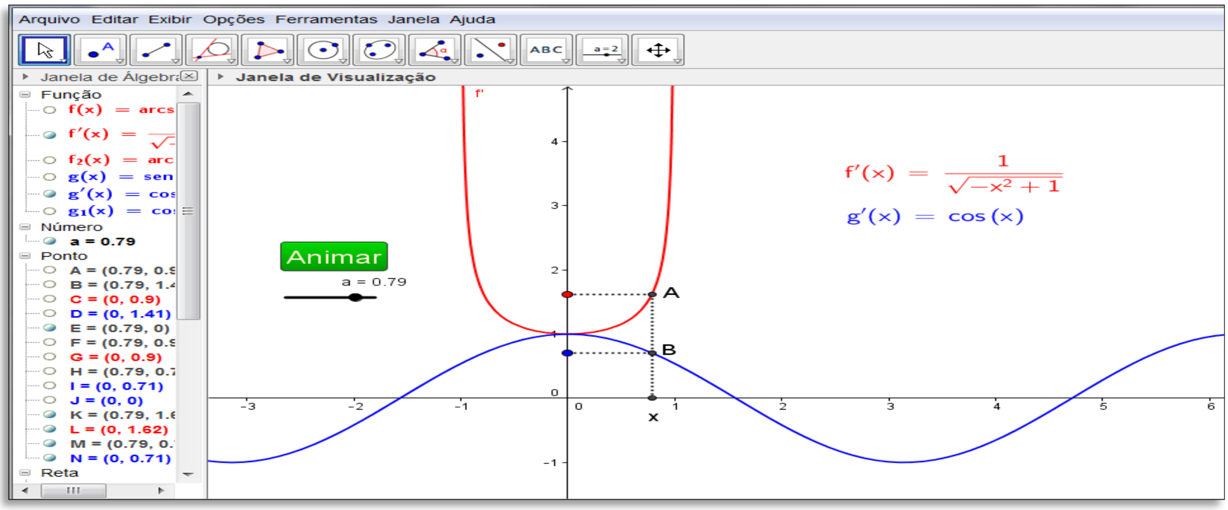
Figura 52 - Reta tangente às funções, representando as derivadas no ponto (0,0)



Fonte: Elaboração nossa

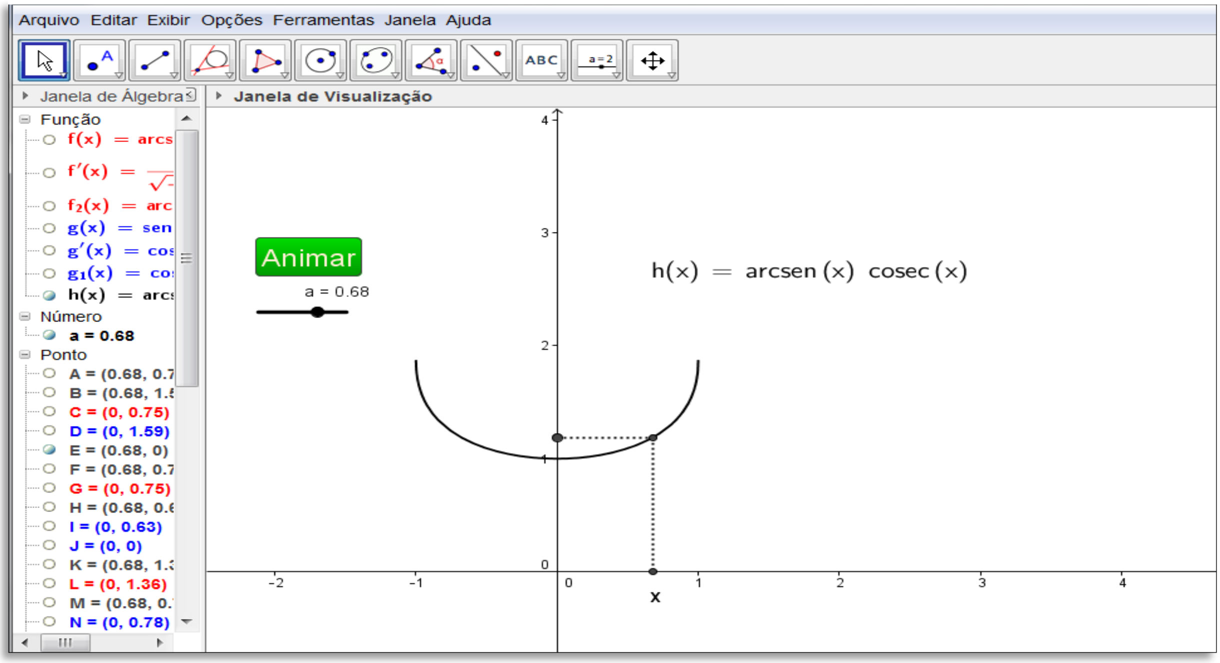
Assim $\lim\limits_{x\to 0} f_1.g_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'}{g'} = 1$ como mostra a figura 53. A figura 54 traz o gráfico da função $h(x) = arcsen(x).cos\,ec(x)$ com a descontinuidade no ponto $x = 0$, considerando que $arcsen(0) = 0$ e a função $\cos ec(x)$ cresce indefinidamente tendendo ao infinito quando próximos de zero, caracterizando a forma de indeterminação $0.\infty$ como já havíamos mencionado.

Figura 53 - Representação gráfica do limite de h quando x tende a zero



Fonte: Elaboração nossa

Figura 54 - Representação gráfica da função que representa a tomada de posição



Fonte: Elaboração nossa

Prova: Nesta fase, o professor apresentará uma solução formal algébrica para o problema proposto considerando todo o rigor matemático. Vejamos a solução apresentada por Leithold (1994, p. 663) na figura 55:

Figura 55 - Aplicação analítica da Regra de L'Hôpital da quarta situação didática

Solução Como $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty$, a função definida por $\operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{cosec} x$ tem uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot (+\infty)$ em 0. Para podermos aplicar a regra de L'Hôpital, reescrevemos $\operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{cosec} x$ como $\operatorname{sen}^{-1} x/\operatorname{sen} x$ e consideramos $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}^{-1} x/\operatorname{sen} x)$. Agora $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$; temos assim a forma indeterminada 0/0. Logo, pela regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{1}$$

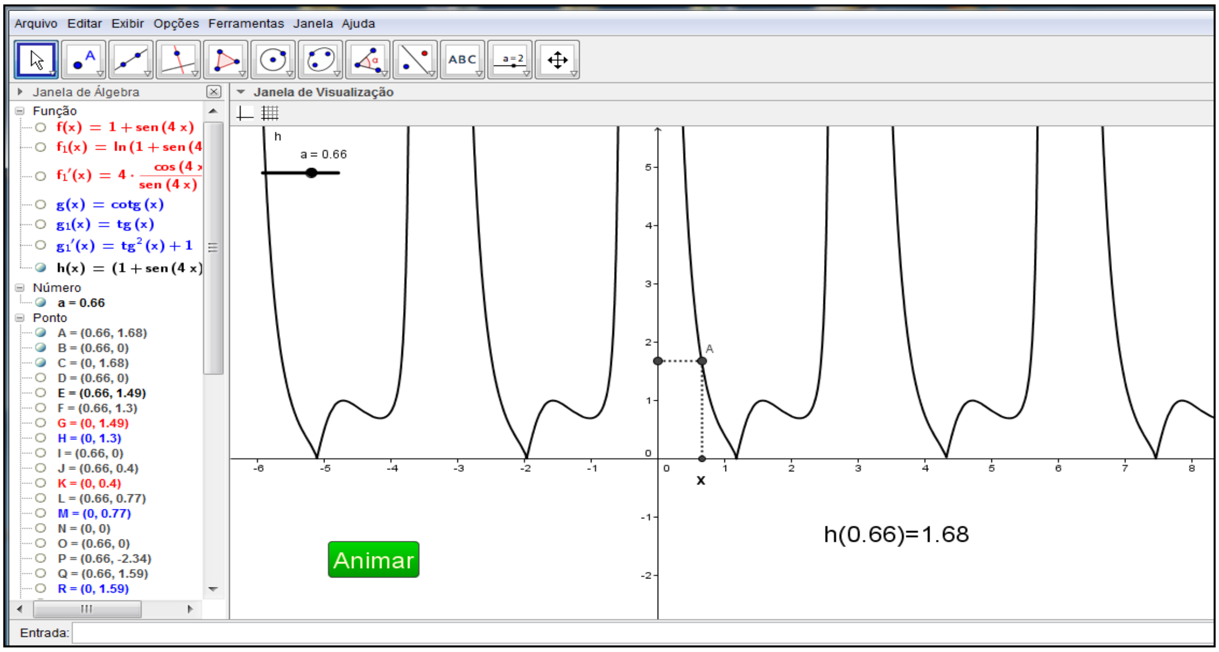
$$= 1$$

Fonte: Leithold (1994, p. 663)

4.5 Quinta situação didática

Tomada de posição: Analise o comportamento da função $h(x) = (1 + sen\,4x)^{cotg\,(x)}$, na vizinhança "do lado direito de *x*" usando o software Geogebra. A figura 56 mostra a representação gráfica da situação problema.

Figura 56 - Representação geométrica da função h



Fonte: Elaboração nossa

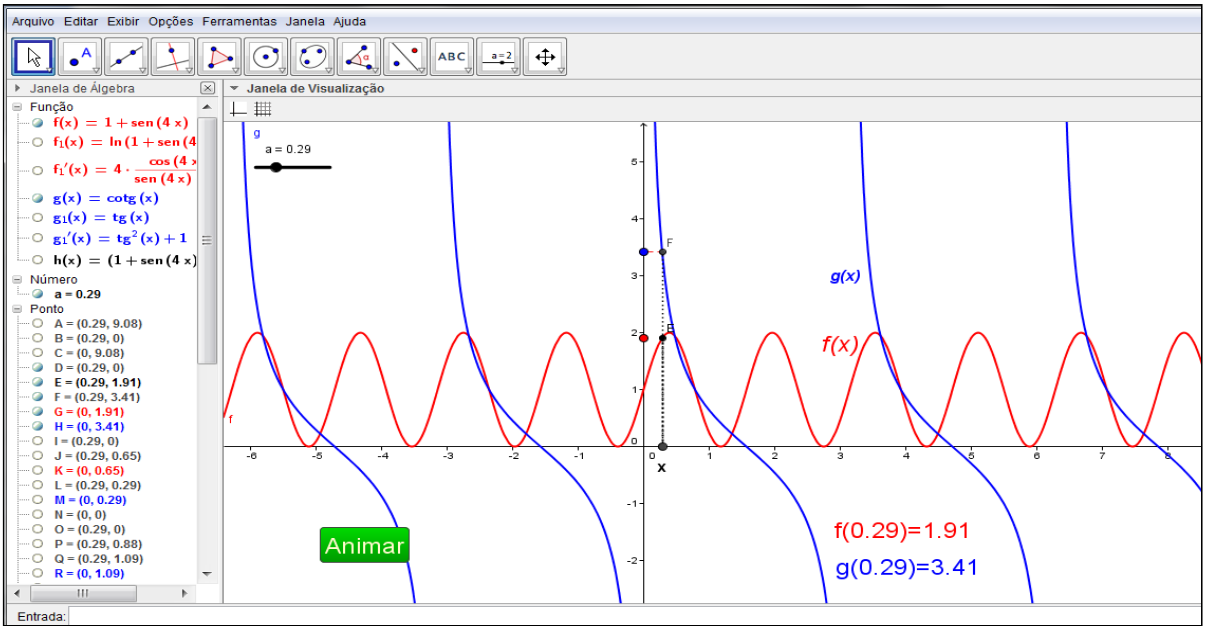
Objetivo: Identificar o tipo e onde ocorre a indeterminação por meio da visualização com o auxílio do GeoGebra e analisar o comportamento da função nesse ponto.

Maturação: A partir da situação proposta, o professor deve levar seus alunos a identificar as informações relevantes do problema a fim de iniciar a construção da solução.

Comentários: Considerando que se trata de uma função representada por um quociente de funções e tendo em vista a propriedade de limites (quociente de limite), o professor deve sugerir para o aluno que ele analise as funções numerador e denominador separadamente. Com base na figura 56 e com a utilização do controle deslizante tais informações devem ser identificadas:

(i) Na vizinhança do zero (considerando valores maiores que zero) vemos que ao aproximarmos x do ponto (0,0) a imagem da função g (curva azul) aumenta indefinidamente enquanto que a imagem de *f* (curva vermelha) se aproxima de 1. Fato esse que leva o aluno a concluir que se trata do caso de indeterminação $f(x)^{g(x)}$, mais precisamente do tipo 1^{∞}. No entanto o aluno deve ser instruído, antecipadamente, que todos os casos de indeterminação devem estar associados ao caso 0/0 ou ∞/∞. Neste caso, por meio de uma manipulação algébrica utilizando logaritmos verifica-se que $ln(h(x)) = \dfrac{ln(1+sen\,4x)}{tg\ x}$ como mostra a figura 57.

Figura 57 - Análise gráfica das funções que representam a potência $f(x)^{g(x)}$



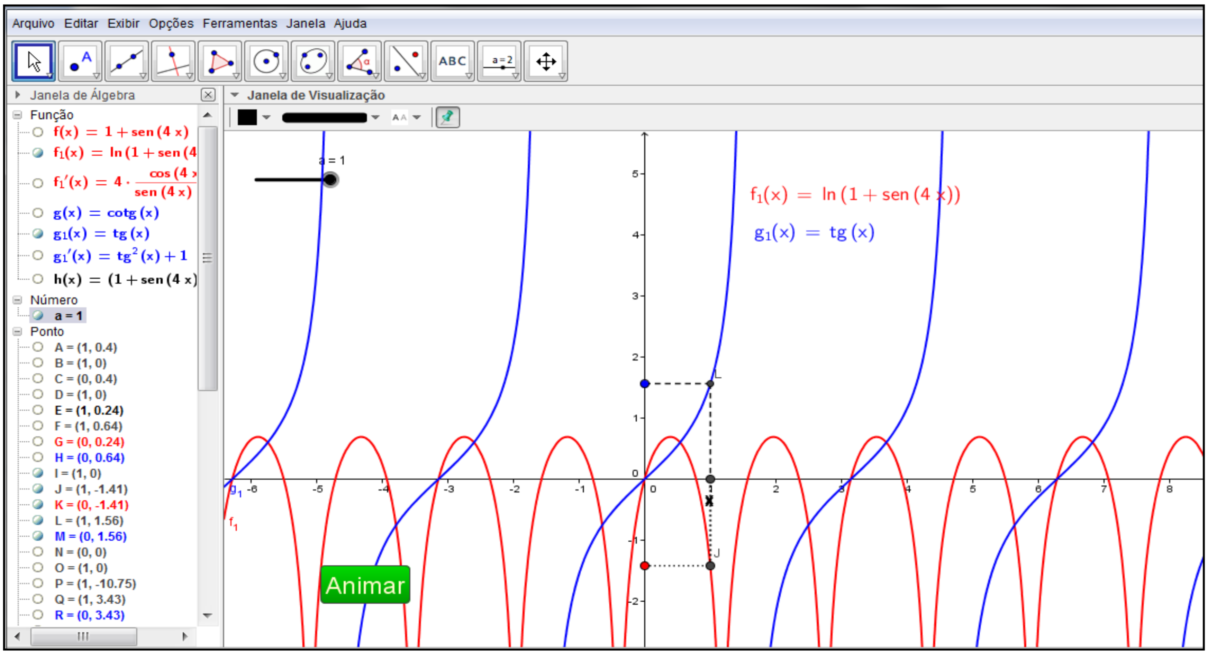
Fonte: Elaboração nossa

(ii) Analisando as funções $f_1(x) = ln(1+sen\,4x)$ e $g_1(x) = tg(x)$ separadamente concluímos por meio do Geogebra que, quando x tende a (0,0) as imagens de f_1 e g_1 também tendem a zero, configurando um novo caso de indeterminação 0/0.

Comentário: Neste momento, caso o aluno não perceba a necessidade da verificação da condição para a aplicação da regra de L'Hôpital, o professor, para facilitar o processo de mediação, deve fazer perguntas como: Qual a condição para que a regra seja aplicada? Qual o papel da reta tangente nesse processo? A reta tangente representa a derivada naquele ponto? A partir daí o aluno deve concluir que:

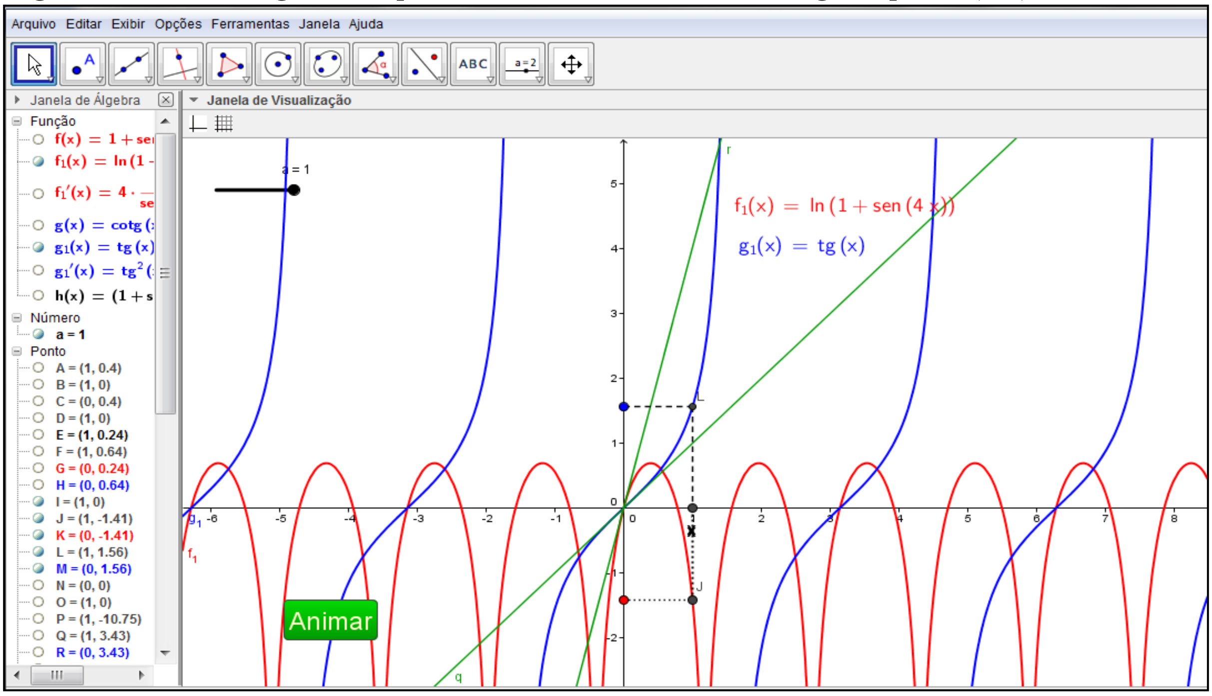
(iii) As retas tangentes a função g_1 no ponto (0,0) possui inclinação diferente da horizontal, ou seja, nesse ponto temos $g_1(x) \neq 0$ como mostra a figura 58.

Figura 58 - Representação gráfica das funções f_1 e g_1



Fonte: produção nossa

Figura 59 - Retas tangentes representando as derivadas de f_1 e g_1 no ponto (0,0)



Fonte: Elaboração nossa

comentário: A partir da construção das derivadas de f_1 e g_1, concluímos que o limite de $ln(h(x)$ quando x$\rightarrow 0^+$ é obtido dividindo $f_1'(0)$ por $g_1'(0)$ resultando em 4. No entanto, o professor deve informar ao aluno que ainda não temos o resultado do limite solicitado, tendo em vista que o número encontrado se trata do limite da função $ln(h(x) = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Solução: A partir dos dados obtidos na etapa anterior o aluno utilizando-se dos conhecimentos de logaritmos e levando em conta que $h(x) = e^{ln\, h(x)}$ ou ainda que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{ln\, h(x)}$, conclui-se que $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + sen\, 4x)^{cotg\,(x)} = e^4$.

Comentário: A motivação para a apresentação de soluções por meio das construções e anotações das estratégias utilizadas pelos alunos para chegar à solução, deve ser oportunizada para que se tenha noção das dificuldades encontradas por eles.

Prova: Para concluir, partindo das soluções apresentadas anteriormente, os resultados poderão ser formalizados pelo professor. Abaixo está a solução dada algebricamente, extraída do Stewart (2014, p. 277):

Observe primeiro que quando $\rightarrow 0^+$, temos $1 + sen\, 4x \rightarrow$ e $cot\, g(x) \rightarrow \infty$, assim o limite dado é indeterminado. Considere:

$$y = (1 + sen\, 4x)^{cotg\,(x)} \Rightarrow ln\, y = ln\left[(1 + sen\, 4x)^{cotg\,(x)}\right] = cot(x).ln\,(1 + sen\, 4x)$$

e logo a Regra de L'Hôpital nos fornece:

$$\lim_{x\to 0^+} ln(y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(1 + sen(4x))}{tg(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos(4x)}{1 + sen(4x)}}{sec^2 x} = 4$$

Até agora calculamos o limite de $ln(x)$, mas o que realmente queremos é o limite de *y*. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{ln\, y}$

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + sen\, 4x)^{cot(x)} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{ln(y)} = e^4$$

Para concluirmos a apresentação das nossas sequências didáticas, deixaremos nossas considerações a respeito da relação entre a forma com que abordamos o nosso objeto de pesquisa e o modelo apresentado pelos livros de cálculo consultados.

Na exposição do nosso objeto de pesquisa por meio das sequências didáticas, diferentemente da abordagem predominantemente analítica trazida pelos livros de Cálculo consultados, produzimos situações de ensino/aprendizagem que apresentou o potencial de instigar o aluno a promover deduções por intermédio da visualização dinâmica promovida pelo *software* Geogebra, além de proporcionar ao aluno uma percepção geométrica das propriedades relacionadas ao conceito de Regra de L`Hôpital. O próximo capítulo será dedicado à apresentação do nosso Produto Educacional, elemento imprescindível em um mestrado profissional, cujo objetivo é contribuir para a atividade do professor na prática docente.

5 PRODUTO EDUCACIONAL

Segundo Gomes (2013), o mestrado profissional tem o foco na realização de pesquisas para o desenvolvimento e aperfeiçoamento profissional, priorizando as ações relacionadas às intervenções nas práticas de sala de aula.

Por se tratar de um mestrado profissional, a pesquisa deve gerar, obrigatoriamente, um produto educacional que contribua para a melhoria do ensino de Ciência e Matemática e que possa ser consumido pela comunidade. Gomes (2013) afirma que ao final do curso o mestrando deve apresentar um Produto Educacional, que represente alguma ferramenta que venha a contribuir para ação do professor em sua prática profissional. Nardi (2009), em seu artigo elaborado a partir dos documentos utilizados nos últimos anos pela comissão e coordenação da área de Ensino de Ciências e Matemática da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), esclarece que o produto de natureza educacional deve focar a melhoria do ensino em uma área específica de Ciências ou Matemática representando uma nova estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino, um aplicativo ou ambiente virtual realizados em espaços formais ou informais de ensino, relatando o resultado dessa experiência e que possa ser consumido pela comunidade.

> O trabalho de conclusão deve, necessariamente, gerar um produto educacional que possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores [...] Este produto pode ter a forma de um texto sobre uma sequência didática, um aplicativo, um CD, um DVD, um equipamento; enfim, algo identificável e independente da dissertação [...] Este produto é considerado como uma produção técnica indispensável para a conclusão do mestrado profissional em ensino (NARDI, 2009, p. 4).

Desse modo elaboramos e estruturamos um blog composto por videoaulas de formas Indeterminadas e Regra de L'Hôpital, teses, dissertações, artigos cujos temas estão relacionados ao ensino de cálculo, sobretudo associado ao uso das tecnologias de visualização nessa disciplina. Dispomos também, uma sessão com a apresentação da Sequência Fedathi - metodologia de ensino utilizada em nossa pesquisa - além de registros da utilização das nossas sessões didáticas pelos professores de Cálculo do IFCE campus Cedro. Ressaltamos que o nosso produto está sendo utilizado pelos professores de Cálculo I do IFCE campus Cedro e que outros professores estão adequando e aplicando esse modelo de ensino, com o uso do software, a outros temas relacionados ao cálculo.

As nossas sessões didáticas proposta por videoaulas, como componente do produto educacional, não visa somente à melhoria do ensino do nosso objeto, mas também tem o caráter de propor reflexões acerca dos problemas educacionais enfrentado pelos professores.

Cury (2012), em sua pesquisa analisa os objetivos de 59 dissertações da área de Ensino de Ciências e Matemática e constata que os pesquisadores empregam testes, questionários, entrevistas, aplicados, em geral, às turmas das quais são professores ou então a amostras selecionadas em um determinado universo de estudantes ou professores de um determinado nível de ensino. No entanto, "Ainda são poucos os trabalhos que, efetivamente, testam algum produto educacional ou alguma estratégia de ensino elaborada especificamente para a pesquisa" (CURY, 2012, p. 248).

Para elaborarmos as atividades propostas nas videoaulas, analisamos antecipadamente a natureza dos exercícios sobre Formas Indeterminadas propostos pelos autores Stewar (2009), Leithold (1994), Simmons (1987), Guidorizzi (2001) além de problemas propostos por pesquisadores em seus trabalhos de investigação, como por exemplo, Alves (2012). A partir dessa análise, selecionamos cinco exercícios que julgamos serem adequados para o nosso propósito e inserimos algumas adequações para a utilização do software Geogebra no intuito de tornar tais exercícios atividades investigativas dentro da nossa metodologia de ensino, no caso a Sequência Fedathi.

Para que nosso produto seja amplamente utilizado por outros professores de cálculo, consideramos de fundamental importância a qualidade do material produzido e sua divulgação. Desse modo, nas nossas sessões didáticas, procuramos situações que privilegie a relação entre objetos matemáticos tendo como característica a descoberta e a exploração proporcionadas pela sequência Fedathi. Assim, por exemplo, na primeira situação quando o aluno é instigado a verificar a derivada da função *g* para a averiguação da condição para que a regra seja aplicada, se depara como uma curva (função derivada de g) não tangente a função g, diferentemente da ideia equivocada que esse aluno tinha sobre a representação geométrica de derivadas, quando se achava que a derivada num ponto é "uma reta tangente a curva nesse ponto". Consideramos que essa noção equivocada de derivadas seja consequência da forma, muitas vezes não tão claras e objetivas, dos conceitos apresentados pelos livros.

Como já frisamos anteriormente, optamos pelo software Geogebra por se tratar de um *software* gratuito com uma interface fácil de se trabalhar apresentando simultaneamente as construções sob o ponto de vista algébrico e geométrico além de possuir recursos que permite simular um movimento, recurso esse que julgamos fundamental para o nosso propósito. Em relação à metodologia de ensino utilizada, optamos pela Sequência Fedathi considerando sua principal característica em que o aluno é responsável pela construção do seu próprio conhecimento e o professor apenas mediador do processo.

> [...] a Sequência Fedathi é um o processo de mediação, enquanto ação docente, que têm por objetivo favorecer a imersão do discente à prática do pesquisador que desenvolve o conteúdo que se pretende ensinar, sendo assim, o papel do professor consiste em criar condições e possibilidades para que o aluno seja colocado na posição de pesquisador, e tal fator somente ocorre quando o professor, ao preparar sua sequência de ensino, se coloca na posição do aluno respeitando-o como um sujeito construtor de conhecimentos, bem como, reconhecendo a si mesmo, como um agente ativo na construção do saber que pretende ensinar (SANTANA; BORGES NETO; ROCHA, 2004, p. 10).

Esperamos que esse material possa contribuir, de forma significativa, para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I em especial nas Formas Indeterminadas de funções e Regra de L'Hôpital bem como instigar a reflexão sobre nossa postura como professores de matemática.

5.1 Descrição do blog

Nesta seção, faremos uma descrição do blog *cálculo com visualização* que já se encontra no ar desde novembro de 2014. O blog foi construído tendo em vista os objetivos de nossa pesquisa e sobre o qual foi desenvolvida nossa dissertação. Apresentamos, na figura 60, a interface da página inicial da nossa *home page.*

Figura 60 - Interface da página inicial do blog cálculo com visualização

Fonte: blog: www.calculocomvisualizacao.com.br

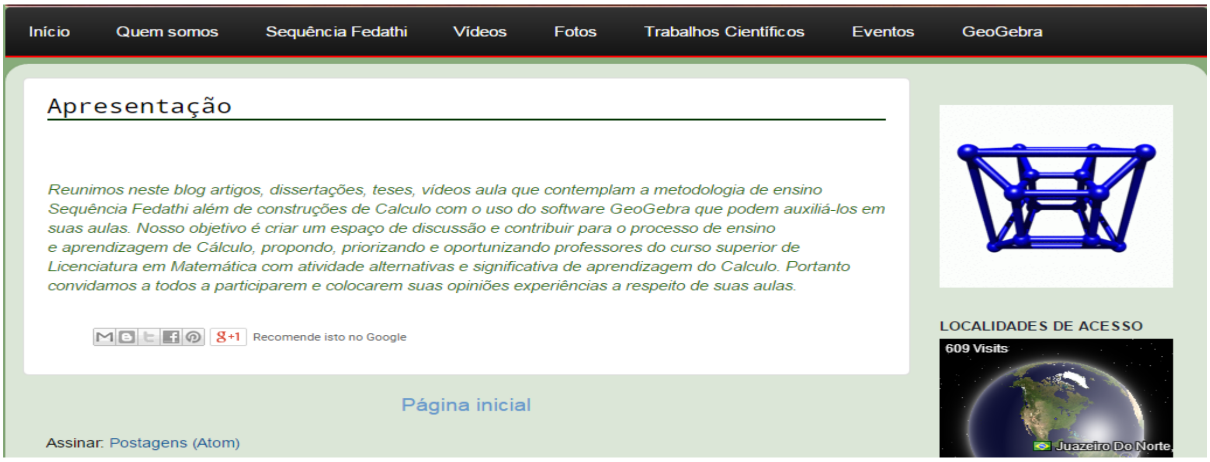
O blog “Cálculo com Visualização” é uma ferramenta interativa em que propomos uma discussão a respeito do ensino de Cálculo, mais especificamente sobre a Formas Indeterminadas e Regra de L’Hôpital, com o uso da tecnologia, contribuindo dessa forma, para o processo de ensino e aprendizagem da disciplina, priorizando e oportunizando professores do curso superior de Licenciatura em Matemática com atividade alternativa e significativa de Cálculo Diferencial e Integral. Ao realizarmos uma navegação mediante o menu inicial, podemos encontrar artigos, dissertações, teses, vídeos aula que contemplam a metodologia de ensino Sequência Fedathi além de construções de Cálculo com o uso do software GeoGebra que podem auxiliá-los nas aulas de Cálculo.

Nosso blog está constituído também de situações didáticas dinâmicas em que o usuário, por meio da manipulação do gráfico irá solucionar alguns propostos relacionados às formas indeterminadas e Regra de L’Hôpital. Ideal para professores utilizarem como suporte em suas aulas de Cálculo sobre o tema. Tal interatividade pode ser utilizada clicando na aba “construções” do menu principal.

Na aba “Sequência Fedathi” dispusemos a apresentação e a descrição das etapas da sequência Fedathi que representa a Metodologia de ensino tomada como referência na elaboração das sessões didáticas propostas para os professores.

Na secção “vídeos”, encontramos videoaulas de sequências de ensino das Formas Indeterminadas e Regra de L’Hôpital onde estão apresentados sete videoaulas sobre o nosso objeto.

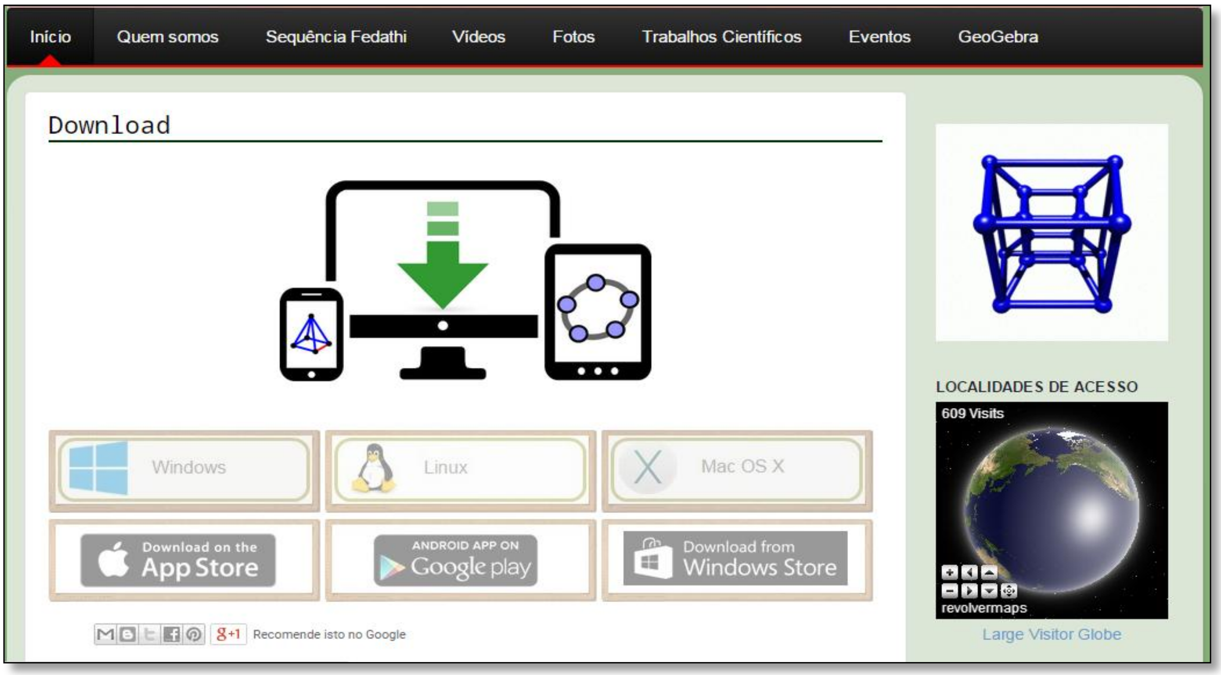
Figura 61 - Interface da página inicial com o objetivo do blog



Fonte: blog: www.calculocomvisualizacao.com.br

Enfatizamos que nossa pesquisa foi contemplada apenas com as duas primeiras etapas da engenharia didática – metodologia de pesquisa aplicada – considerando que nosso objetivo é apenas propor situações didáticas. Assim, na aba "fotos" dispusemos registros, por meio de fotos, da utilização em sala de aula das nossas sequências de ensino pelos professores da disciplina de Cálculo I do IFCE, campus Cedro.

Figura 62 - Interface da aba GeoGebra no blog Cálculo com Visualização



Fonte: blog: www.calculocomvisualizacao.com.br

Na nossa *home page* também podemos encontrar artigos, monografias, dissertações, teses relacionadas ao ensino de Cálculo com uso da tecnologia e sequência Fedathi bem como um link para o download do software Geogebra.

Na secção "seguidores" encontramos um grupo composto por estudantes e professores registrados ao blog que contribuem com suas considerações em relação ao conteúdo exposto, promovendo desse modo um espaço de discussão, cuja finalidade é contribuir para o ensino aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

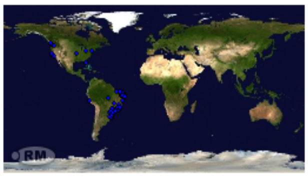
Registramos até a data 21 de Fevereiro de 2015 um quantitativo de 1961 visitas disseminados entre os pontos de acessos apresentados na figura 66 compostos pelo Brasil, Estados Unidos, Peru e Canadá (figura 62).

Consideramos que tanto nosso blog como as videoaulas que comentaremos a seguir, se caracterizam como produto educacional de acordo com Nardi (2009) quando afirma que o trabalho de conclusão, tendo em vista a orientação da CAPES, deve, necessariamente, gerar um produto educacional que possa ser difundido, analisado e utilizado por outros professores e ter a forma de um texto sobre uma sequência didática, um aplicativo, um CD, um ambiente virtual, enfim, “ algo identificável e independente da dissertação” (NARDI, 2009, p. 4).

Figura 63 - Localidades em que o blog foi acessado

2D Map | 3D Globe | Locations | 24 Hours | Settings

609 visits since Dec 12, 2014



Global Statistics

Visits from 4 countries registered.

up

No.	Country	Date of Last Visit	Percent & Number of Visits	
1	Brazil	Feb 21, 2015	95.89%	584
2	United States	Feb 19, 2015	3.61%	22
3	Peru	Dec 28, 2014	0.33%	2
4	Canada	Jan 25, 2015	0.16%	1

Fonte: blog: www.calculocomvisualizacao.com.br

5.2 As videoaulas

Entendemos que os recursos com base em videoaulas potencializam o acréscimo do conhecimento e permitem múltiplas articulações no âmbito educacional. “[...] a utilização do vídeo induz a novas formas de interação e interatividade frente à constituição do conhecimento” (SILVA; OLIVEIRA, 2010, p. 2).

Os recursos audiovisuais podem promover uma aprendizagem eficiente como escreve Cinelli (2003, p. 16) quando cita Moran (1991, p. 11): “Utilização do audiovisual para introdução de novos assuntos, desperta a curiosidade e a motivação para novos temas”.

Concordamos com o ponto de vista de Silva e Oliveira (2010) ao destacar que o uso das tecnologias na escola deve proporcionar uma expansão de aprendizagens, destacando que os recursos midiáticos devem ser compreendidos como uma ferramenta pedagógica de cunho formativo, visto que esses produzem aprendizados de forma significativa, motivadora e dinâmica.

Em concordância com os autores citados acima, optamos pela produção de video-aulas como produto educacional. Desse modo, nossas videoaulas foram elaboradas enfatizando a visualização por meio do software Geogebra, segundo as etapas da Sequência Fedathi e utilizando sequências didáticas a partir das Formas Indeterminadas de funções e Regra de L’Hôpital.

Para produção das videoaulas seguimos os seguintes passos: Em primeiro lugar selecionamos os problemas a serem abordados, com a utilização do software Geogebra, a partir dos livros do Stewart (2009), Alves (2013), Guidorizzi (2001) e Simmons (1987). Em segundo lugar realizamos a gravação em dois momentos utilizando o software de captura Camtasia. No primeiro momento, utilizamos slides para apresentação das aulas cumprindo as fases da Sequência Fedathi e no segundo momento, optamos pela mesma apresentação, desta feita com a utilização da manipulação do software, sendo que na última fase da (SF) optamos por usar uma mesa digitalizadora associada ao software mypaint.

As videoaulas foram disponibilizadas no nosso blog “Cálculo com Visualização” por meio de um link diretamente do site do *You Tube*.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa investigação teve como base os pressupostos teóricos da metodologia de pesquisa Engenharia Didática contemplando apenas as duas primeiras fases (fase preliminar, fase *a posteriori).* Desta forma, ainda que nosso trabalho não represente uma pretensão de expor aspectos conclusivos, ressaltamos que as considerações dessa pesquisa tem a pretensão de, além de propor situações didáticas apoiadas na visualização, contribuir na estruturação de outros trabalhos a serem desenvolvidos relacionados ao ensino de Cálculo mediado pela Sequência Fedathi e com o uso de ferramentas tecnológicas.

A elaboração das sequências didáticas desenvolvidas nesta pesquisa teve como finalidade propor uma maneira de abordagem das formas indeterminadas e Regra de L'Hôpital, de maneira diferente daquelas encontradas nos livros de Cálculo dos autores Stewart (2010), Leithold (1994), Guidorizzi (2001) e Simmons (1987) em que constatamos por meio de uma análise nos livros, um tratamento predominantemente algébrico e algoritmizado no tratamento dos temas. Entendemos que tais aspectos promovam uma distância considerável no modo como esses conceitos foram construídos ao longo do tempo, considerando que as ideias iniciais do Cálculo são de origem geométrica, mas o que presenciamos hoje é a predominância nos aspectos algébricos, como relata Richit (2013).

Deste modo, acreditamos que a proposta de sessões de ensino possa instigar os alunos à autonomia no seu processo de construção do conhecimento proporcionada por uma melhor postura pedagógica do professor em sala, contribuindo para que eles possam superar os obstáculos didáticos que ocorrem na abordagem dos conceitos de Cálculo e, consequentemente, promover uma melhoria no processo de ensino aprendizagem. Acreditamos que tais melhorias no processo de ensino são possíveis graças ao uso da metodologia de ensino Sequência Fedathi utilizada na elaboração das atividades bem como pela visualização gráfica promovida pela tecnologia por meio do software Geogebra. Segundo Richit (2013), a vasta literatura em Educação Matemática recomenda que a inclusão, como o Geogebra, na abordagem de conceitos de Cálculo permite que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada, e que seja menos enfatizada a abordagem algébrica.

A Sequência Fedathi foi fundamental no processo de elaboração das sequências de ensino tendo em vista que nessa teoria o aluno representa um elemento agente no processo de aprendizagem sendo instigado a pensar, a apresentar e a discutir suas ideias. Nesse processo, o professor exerce um papel, embora mediador, fundamental, uma vez que é de responsabilidade dele a incumbência de atender aos questionamentos e dificuldades dos alunos, colocando-os, sempre que necessário, na direção correta em busca do aprendizado. Concordamos com Santos (2011) quando afirma que Sequência Fedathi, é caracterizada por permitir que o aluno vivencie a experiência Matemática, e por exigir do professor uma atitude diferente da qual estamos acostumados a ver nas salas de aula, ou seja, ela espera que o professor tenha o hábito de estudar em grupo, pesquisar, observar, ouvir, motivar e intermediar o trabalho do aluno e intervir, pedagogicamente, quando necessário.

A proposta de ensino contemplou atividades em que articularmos ações de visualização e manipulação com software Geogebra no intuito de obter a compreensão dos conceitos relacionados às formas indeterminadas de funções. Tais formas indeterminadas, nosso objeto de estudo, que representa uma situação imprevisível quando se pretende encontrar o limite de algumas funções, proporcionou certo destaque às nossas sequências de ensino visto que tal tema, assim como a Regra de L'Hôpital, são abordadas pelos livros de Cálculo de forma predominantemente algébrica e desprovida de qualquer significado.

Para elaboração das sequências de ensino, realizamos, em alguns livros de Cálculo, uma análise para escolha de cinco questões sobre as formas indeterminadas e Regra de L'Hôpital que julgamos apropriadas para o nosso objetivo e fizemos algumas adaptações para utilização do software Geogebra. Nosso intuito com essas adaptações foi tornar as atividades mais investigativas proporcionadas pela metodologia de ensino adotada e que valorizasse o uso da ferramenta dinâmica, no caso do *software*.

Uma das contribuições dessa proposta foi promover um ambiente adequado para que o professor pudesse, por meio da mediação, incentivar o aluno à construção do seu próprio conhecimento sobre os conceitos abordados e com isso tornar o aprendizado mais significativo. A base teórica apresentada ao longo do nosso trabalho foi fundamental para todas as etapas de realização dessa pesquisa, destacam-se as contribuições dos trabalhos de Alves e Borges Neto (2011; 2012; 2013).

O produto educacional[8] dessa pesquisa, apresentado por meio de um blog estruturado com videoaulas foi resultado da elaboração das sessões didáticas propostas. Esperamos que professores interessados a trabalhar com tecnologia possam encontrar em nossa proposta sugestões que possam adaptar-se a sua realidade. No entanto, entendemos que não é fácil introduzir novos meios e estratégias de ensino, sobretudo, quando já temos

[8] No documento de Área CAPES, encontramos a designação de produto educacional como [...] propostas de ensino, sugestões de experimento e outras atividades práticas, sequências didáticas, propostas de intervenção, roteiros de oficina, etc. (BRASIL, 2013

formada uma didática e metodologia própria, contudo aqueles que estiverem apreensivos poderão encontrar em nossa sugestão uma alternativa.

Concluímos este trabalho de maneira a satisfazer nossos objetivos, considerando que estamos deixando como produto educacional videoaulas e um blog que servirão como motivação e embasamento para outros trabalhos que, possivelmente, poderão ser desenvolvidos. Esperamos que esse material possa contribuir, de maneira significativa, para o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo, em especial das Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôpital bem como propiciar reflexões a respeito de nossa postura como professores matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Paraná: Editora UFPR. 2007, 216p.

ALVES. F. R. V & Borges Neto (2012). **Uma sequência didática para explorar a regra de L´Hospital com o uso da tecnologia**. In: Educação Matemática Pesquisa, v; 15, nº 2, 1-31. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/.

ALVES, F. R. V; BORGES NETO, H. & Alves Dias. M.. (2012). **Implicações e aplicações da teoria das representações semióticas no ensino do Cálculo**. In: Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. v. 5

ALVES, F. R. V. **Exploring the L´Hospital rule using Geogebra**. Geogebra International Journal of Romania, v. 3, p. 15-20, 2013.

ALVES, F. R. V . **Interpretação Geométrica para a Regra de L'Hôpital com auxílio do Geogebra**. In: Conferência Latinoamericana de Geogebra, 2012, Montevideo. Conferência Latinoamericana de Geogebra. Montevideo: Editora Universitária, 2012. v. 1. p. 1-8.

ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011. 397p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Fortaleza, Fortaleza, 2011

AMORIM, F. V.; SOUSA, G. C. ; Salazar, Jesus Victoria Flores . **Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo**. 2011.XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática

ANDRADE, V.S. **A sequência Fedathi e o Ambiente virtual de ensino telemeios na determinação da equação de uma reta**. 2011.186p.Dissertação Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011

ANTON, H.; BIVENS I.; DAVIS S. **Cálculo. vol.1**, 8ª ed., Porto Alegre: Bookman, 2007

ARTIGUE, M. (1988): **"Ingénierie Didactique". Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

ARTIGUE, Michelle. **Ingénierie didactique**, *In:* BRUN, J. Didactiques des Mathématiques, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996.

ASSUMPÇÃO, P. G. S. ; FERREIRA, I. F. . **Atividade com o GeoGebra: introdução ao conceito de derivada**. In: 3ª Escola de Inverno de Educação Matemática, 2012, Santa Maria. Atividade com o GeoGebra: introdução ao conceito de derivada, 2012.

BARBOSA. E. F. (2008). **A regra de L´Hopital: análise histórica da regra de L´Hospital** (dissertação)– Pós graduação em Matemática. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 90p.

BARROS, Rodolfo Miranda de; MELONI, L. G. P. . **O Processo de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por Meio de Metáforas e Recursos**

Multimídia. In: COBENGE 2006. Ensino de Engenharia: Empreender e Preservar, 2006, Passo Fundo. Anais do XXXIV COBENGE. Passo Fundo, RS: Universidade de Passo Fundo, 2006. v. 1. p. 1733-1746.

BARUFFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 267p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999

BITTAR, M. et al. **Integração da tecnologia nas aulas de matemática:** Contribuições de um grupo de pesquisa-ação na formação continuada de professores, 2009. 14 f. Artigo (IV Seminário internacional de pesquisa em educação matemática, SIPEM)-Universidade federal do Mato Grasso do Sul, UFMS, Mato Grosso do Sul, 2009.

BORGES NETO, Hermínio. et al. (2001). **A Sequência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**, In: XV EPENN – Encontro de Pesquisa Edcacional do Nordeste. São Luís, p. 590-609. Disponível em: http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/fedathi/fedathi-a-sequencia-de-fedathi-como-proposta.pdf. Acessado em: 12 de Março de 2015.

BOYER, C.B., ***História da Matemática***. São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1996.

BRUM- **Contribuições da Engenharia Didática no Ensino de Matemática: Análise e Reflexões de uma experiência didática para o estudo de Geometria Esférica.** In: IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2014

CINELLI, Nair Pereira Figueiredo. **A Influência do vídeo no processo de aprendizagem**. 2003. 72 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

CURY, H. N. **Pesquisas em ensino de ciências e matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos**. Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 14, p. 237-256, 2012

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR. **Documento de Área** – **Ensino: triênio** 2010-2012. Disponível em: http://www.avaliacaotrienal2013.capes.gov.br/documento-de-area-e-comissao.
Acesso em: 12 mar. 2015

FIORENTINI, Dario. **Alguns Modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. In: Zetetiké, ano 3, nº. 4, 1995, p.1-37

FRESCKI-KESTRING, F. B. ; PIGATTO, P. . **Dificuldades na aprendizagem de cálculo diferencial e integral na educação tecnológica: proposta de um curso de nivelamento**. In: I SINECT - Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2009, Ponta Grossa. Anais do I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia 2009, 2009. p. 910-917.

GOMES, Severino Carlos. **História da matemática em um mestrado profissional: uma possibilidade**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13., 2011, Recife. Anais da XIII CIAEM. Recife: Ciaem, 2011. p. 2 - 4.

GONÇALVES, D. C. ; REIS, F. S. . **Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas utilizando o GeoGebra**. 1. ed. Ouro Preto: Editora UFOP, 2013. v. 1. 55p .

GOUVEIA, C.A.A. **Processos de Visualização e Representação de Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com um Software Tridimensional**. 2010.213p.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.2010.

GRATTAN-GUINNESS. **Del cálculo a La teoría de conjuntos**, 1630 – 1910: Uma introducción histórica. Versão espanhola de Mariano Martinez Pérez. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1 e 2. Rio de Janeiro. LTC, 2001.

GUIMARÃES, Oswaldo Luiz Cobra et al. **Cálculo Diferencial e Integral uma proposta de curso online utilizando dokeos e applets-java criados no geogebra**. In: COBENGE- Congresso Brahariasileiro de Educação em Engenharia, 37., 2009, Recife. Anais... . Recife: Cobenge, 2009. p. 1 - 10.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios e equações.** Vol. 6. São Paulo: Atual, 1998.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v. 1, 3ª edição, Editora: Harbra, 1994

LIMA, Elon. L. **Análise Real. v. 1**, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon. L. **Análise Real. v. 1**, Rio de Janeiro: SBM, 1997.

MARIN, D. ; PENTEADO, M. G. **Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo**. Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 13, p. 509-526, 2011.

MATHIAS, Ingrid da Rosa; BORCHARDT, Thiago Tavares; CORRêA, Marcelo Martins. O Geogebra como ferramenta de ensino para o professor. In: XI ENEM, 11., 2013, Curitiba. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: Sbem, 2013. p. 1 - 6.

MELO, José Manuel Ribeiro de. **Conceito de Integral: Uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem.** 2002. 180 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002

MENEZES, D. B. **Análise de uma formação de Professores à luz da Sequência Fedathi: O uso do Software Geogebra no Ensino da Matemática** / Fórum Internacional de Pedagogia – Santa Maria – Rio Grande do Sul, 2014.

MOLON, J**. Cálculo no Ensino Médio: Uma abordagem possível e necessária como auxílio do software Geogebra**. Dissertação (Matemática)- Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria-RS, 2013

MUMEN, Mustafá A.; FOULIS, David J.. **Cálculo.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982

MOREIRA, M. A. & NARDI, R. **O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos**, 2009.

NASSERALA, A. M. **Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na Sequência Fedathi: o caso da integral imprópria.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-Ce, 2014.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos**. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (orgs.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 43-58, 2009.

POMMER, W. A**. Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. 1. ed. , 2013. v. único. 72p

RAMALHO, L. V. . **O uso do GeoGebra no Ensino de Matemática**. 2013. (Apresentação de Trabalho/Comunicação).

REZENDE, W.M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

RICHIT, A. ; FARIAS, M. M. R. **. Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Perspectivas de Exploração no Software GeoGebra**. 2013

RICHIT, A. ; BENITES, V. C. ; ESCHER, M. A. ; Miskulin, R.G.S . **Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia**. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 1, p. 90-99, 2012.

ROCHA, M. D. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral i: Estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.** 2010.172p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática)- Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

SANTANA, José Rogério; BORGES NETO, Hermínio; ROCHA, Elizabeth Matos. **A sequência Fedathi: Uma proposta de mediação pedagógica no ensino da matemática**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., 2004, Recife. Anais do VIII ENEM. Recife: Enem, 2004. p. 2 - 11.

SANTOS, M. J. C. dos**. As Metodologias - Engenharia Didática e Sequência Fedathi Aliadas àB Teoria de Piaget**. 2011. (Apresentação de Trabalho/Conferência ou palestra).

SANTOS M. J. C dos ; LIMA, I. P. de ; BORGES NETO, H . **A Sequência Fedathi: concepções e princípios para uso no ensino de matemática**. In: VII Congresso Iberroamericano de Educación Matemátiica, 2013, Montevídeo - Uruguai. VII Congresso Iberroamericano de Educación Matemátiica. Montevideo, Uruguay: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2013. p. 1-6.

SIGUENÃS, L.E.B **Utilização do software Geogebra no ensino da Derivada**. 2009. 35p. Monografia (Trabalho de graduação) - Centro Universitário Franciscano. Santa Maria. 2009

SILVA, Rosilma Ventura da; OLIVEIRA, Elisangela Mercado de. As Possibilidades do uso do vídeo como recurso de aprendizagem em sala de aula do 5º ano. In: Encontro de Pesquisa em Educação de Alagoas, 5., 2010, Alagoas. Anais do V EPEAL. Alagoas: Epeal, 2010. p. 1 – 10

SIMMONS, George F. ***Cálculo com Geometria Analítica***. Tradução: Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987

SOUZA, R. N. S. ; CORDEIRO, M. H. . **A Contribuição da Engenharia didática para a prática docente de Matemática na Educação Básica.** In: V Educere-III Congresso Nacional da Área de Educação, 2005, Curitiba. Anais do] V EDUCERE [recurso eletrônico] ; [Anais do] III Congresso Nacional de Educação. Curitiba, 2005. v. 1.

SOUZA, Fábio Silva de et al. **Análise de livros-textos de Cálculo quanto à utilização dos registros de representação semiótica**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática- CIAEM, 13., 2011, Recife. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática- CIAEM. Recife: Gterp, 2011. p. 02 - 13.

SOUZA, M. J. A Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. *In:* SOUSA, F. E. E. *et al.* (Org.). **Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática.** Fortaleza: Edições UFC, 2013.

STEWART, J. **Cálculo: Volume** I e II, 6ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

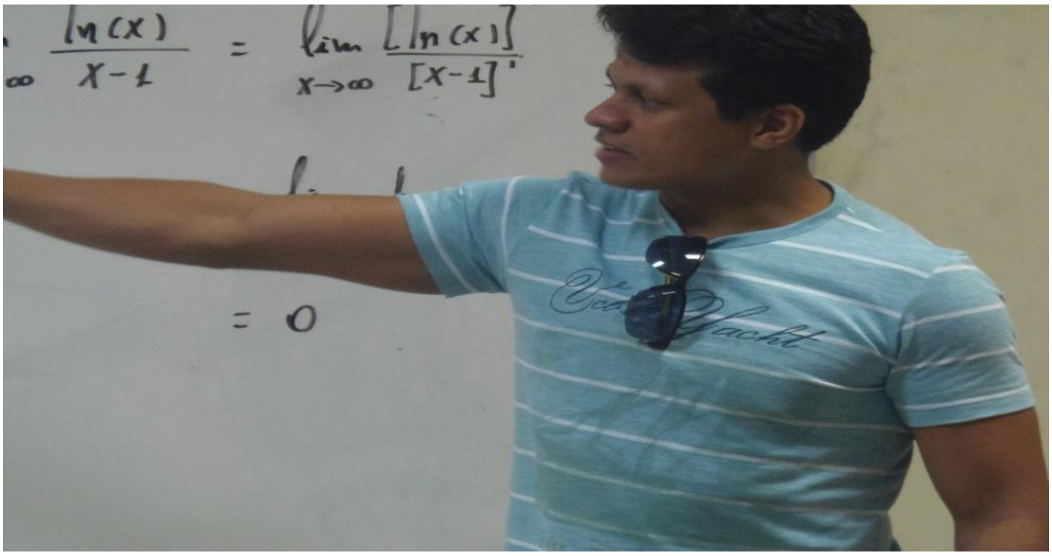
VAN HIELE. **Structure and Insight** – **A theory of Mathematics**. Education, Orlando: Academic Press. 1986.

ANEXOS

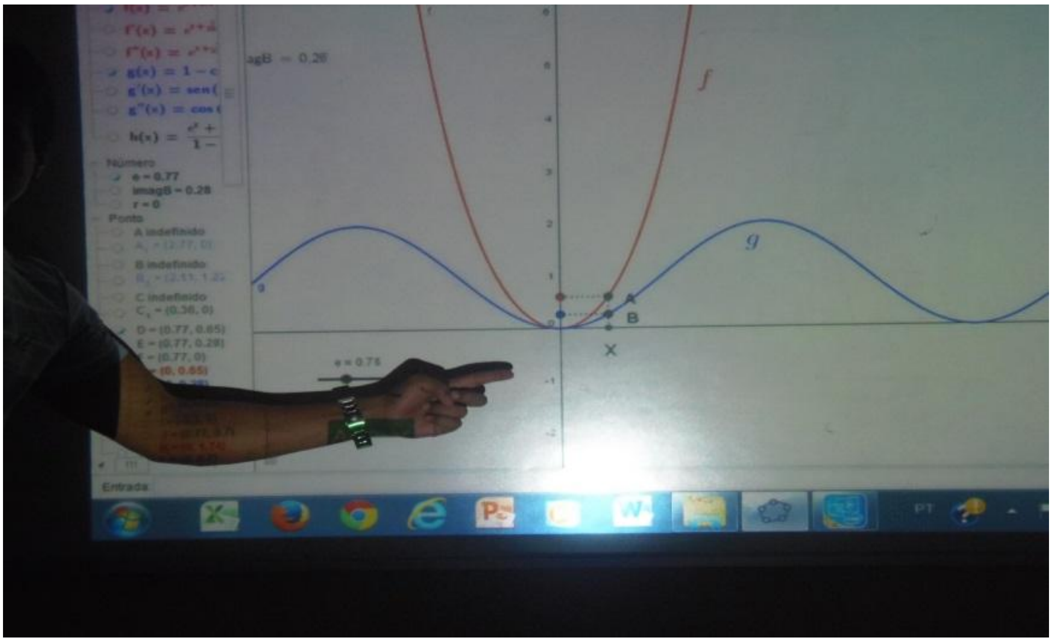
ANEXO A - REGISTROS DA APLICAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PELOS PROFESSORES DE CÁLCULO DO IFCE CAMPUS CEDRO

Nesta parte do trabalho apresentamos algumas fotos e registros do consumo do nosso produto educacional por professores do IFCE campus Cedro.

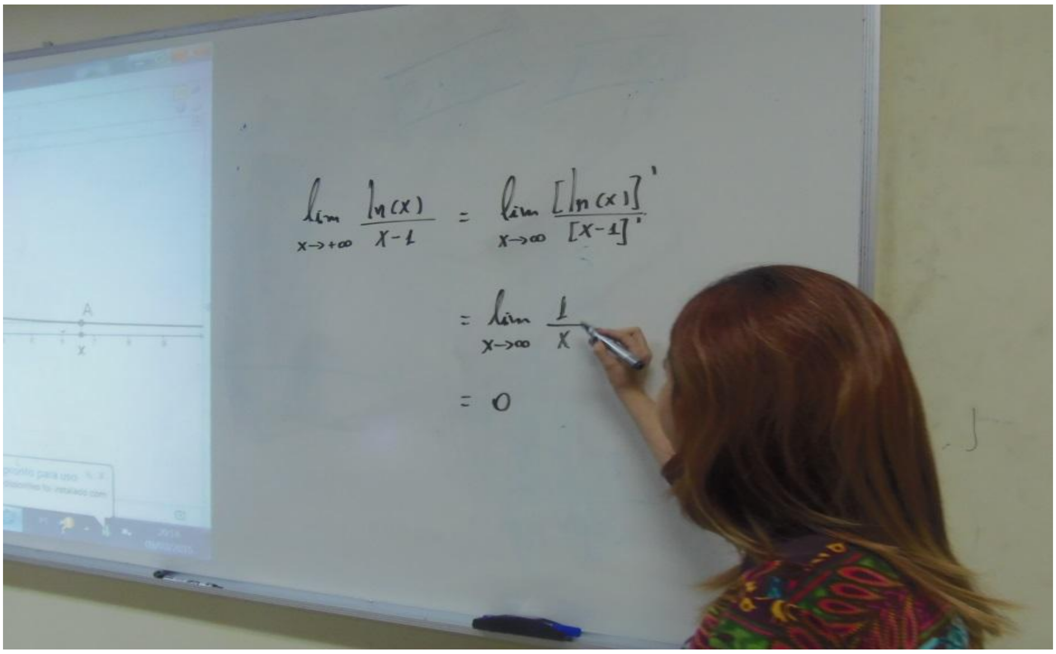
Apresentação do blog *Cálculo com Visualização* pelo professor de Cálculo.



Aqui o professor resolve algebricamente um problema caracterizando a fase Prova da sequência Fedathi.



O professor utilizando-se do seu papel de mediador do processo, na fase *maturação*, instiga os alunos a extraírem as informações relevantes na busca da solução.



O aluno apresenta para os demais alunos a sua solução.

O professor realiza uma comparação entre os resultados encontrados pelos alunos e a solução do problema, evidenciando dessa forma, a última etapa da Sequência Fedathi, no caso a *prova.*