UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CRISTINA ALVES BEZERRA

PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA AS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

FORTALEZA

2015

CRISTINA ALVES BEZERRA

PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA AS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências e Matemática.
Eixo Temático: Matemática
Linha de Pesquisa: Tecnologias no Ensino de Ciências e Matemática
Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

B469p Bezerra, Cristina Alves
Proposta de abordagem para as técnicas de integração usando o software Geogebra / Cristina Alves Bezerra. – 2015.
86 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Fedathi, sequencia. 2. Sessões didáticas. 3. Padrões gráfico-geométricos. I. Título.

CDD 510

CRISTINA ALVES BEZERRA

PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA AS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aprovada em: 23/03/2015

BANCA EXAMINADORA

Francisco Regis Vieira Alves
____
Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal do Ceará – IFCE

Maria José Costa dos Santos
____
Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará – UFC

____
Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, por ter me dado determinação, força, saúde, fé e paciência em todos os âmbitos da minha vida e, principalmente, na realização deste trabalho.

Aos companheiros do ENCIMA da Turma 2012.2 e, em especial, ao parceiro Marcos Antonio, por tantos obstáculos vencidos juntos.

Ao ENCIMA, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, pela oportunidade de conviver com tanta gente capacitada e disposta a auxiliar no crescimento intelectual – tenho muito orgulho de ter feito parte dessa família.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, que me deu suporte e mostrou-me o caminho para que o trabalho fosse realizado.

A Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira, pela contribuição, gentileza e credibilidade que depositou em mim no momento da qualificação.

A Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos, pelas contribuições e por fazer parte da Banca Examinadora.

Ao Prof. Dr. Othon Lopes, pela paciência e disponibilidade para auxiliar-me durante o período das disciplinas.

Aos meus colegas e alunos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – Campus Juazeiro do Norte, pela compreensão nos meus momentos de angústia.

A minha mãe, companheira que sempre esteve ao meu lado com muito apoio e compreensão.

Aos meus irmãos, Edivania Alves e Bosco Alves, aos meus sobrinhos Lara, Gabriel, João, Nicolas e Heitor, e aos meus cunhados, Jania Brito e Fredson Dias, que entenderam o motivo pelo qual não me fiz presente em tantos momentos familiares nesses últimos meses.

A minha afilhada Lara, que pelo simples fato de existir torna minha vida mais iluminada.

As minhas primas, Luana Kamila e Larissa Bezerra, que apesar da pouca idade, possuem muita sabedoria e me presenteiam com seus ensinamentos.

A minha eterna amiga Waltinara, minha confidente que tanto estimo.

As minhas irmãs do coração, Juliana Cantalino, Luciana Jatobá e Nadjane Granja, que Deus me deu no período em que servi ao Instituto Federal do Sertão Pernambucano – Campus Ouricuri.

Ao meu pai, Cícero Bezerra da Silva, já falecido, mas que me deixou a maior riqueza que possuo: meus valores éticos e morais.

“O Cálculo é uma matéria fascinante e, com justiça, é considerado uma das maiores realizações da inteligência humana”.

James Stewart

RESUMO

Este trabalho propõe uma forma de abordagem para as Técnicas de Integração – que serve como um complemento para aquelas que são trabalhadas por parte dos autores dos livros de Cálculo Diferencial e Integral (C.D.I). Seu objetivo geral é estruturar e propor situações de ensino apoiadas na Tecnologia Digital, mais precisamente no software Geogebra, relativa às Técnicas de Integração, onde sejam explorados os padrões gráfico-geométricos relacionados com as funções integrandas e suas primitivas. A organização da pesquisa seguiu as duas fases iniciais da Engenharia Didática (E.D) – Análises Preliminares e Análise a Priori. A estruturação das sessões didáticas, envolvendo situações-problema diferenciadas, respeitou as fases da Sequência Fedathi – Tomada de posição, Maturação, Solução e Prova. Iniciamos o trabalho com o levantamento da problemática – identificamos que o conteúdo, Técnicas de Integração, é, nos livros didáticos da disciplina de C.D.I, citados no Programa de Unidade Didática (PUD) do Curso Licenciatura em Matemática do IFCE – Juazeiro do Norte, trabalhado unicamente por meio do caráter algébrico. Com a intenção de registrarmos essa observação, fizemos comentários sobre as formas de abordagens dos autores Stewart (2010), Guidorizzi (2011) e Leithold (1994), em que pudemos deixar registrado que, de fato, há uma limitação sobre a exploração dos padrões gráfico-geométricos relativos às Técnicas: Substituição de Variáveis, Por Partes, Frações Parciais e Substituição Trigonométrica. Como produto educacional, foi desenvolvido um "site" em que disponibilizamos as videoaulas e as respectivas sessões didáticas.

Palavras-Chave: Técnicas de Integração. Sequência Fedathi. Geogebra. Sessões Didáticas. Padrões gráfico-geométricos.

ABSTRACT

This paper proposes an approach for the integration techniques - which serves as a supplement for those who are worked by the authors of differential calculus books and Integral (CDI). Its overall objective is to structure and propose teaching situations supported in Digital Technology, more precisely in the Geogebra software on the integration techniques, where the graphic-geometric patterns related to integrandas and their primitive functions are explored. The organization's research followed the two initial stages of Didactic Engineering (ED) - Preliminary Analysis and Analysis the Priori. The structuring of educational sessions involving different situations-problems, respected the stages of Fedathi Sequence - Taking position, maturation, Solution and Proof. We started working with the lifting of the issue - identify the content, integration techniques, is in the textbooks of CDI discipline, cited in Teaching Unit Program (PUD) Course Degree in Mathematics from IFCE - Juazeiro, worked only through algebraic character. With the intention of we record this observation, we made comments on ways to approach the authors Stewart (2010), Guidorizzi (2011) and Leithold (1994), where we could go on record that, in fact, there is a limitation on holding patterns graphic-geometric relating to Techniques: Variable Substitution, For Parties, Partial Fraction and Replacement Trigonometric. As an educational product, it developed a "site" where we provide the video classes and their teaching sessions.

Key words: Techniques of Integration. Fedathi Sequence. Geogebra. Didactic Sections. Graphic-geometric patterns.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 PROBLEMÁTICA

Desde o tempo da graduação, no papel de aluna, interessei-me pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral – *C.D.I* [1], principalmente pelos tópicos envolvidos no Cálculo Integral. A mesma era ofertada no segundo semestre do curso Licenciatura em Matemática e, já no primeiro período, ouviam-se muitos comentários a respeito das dificuldades que os colegas sentiam em entender os conceitos que são apresentados no decorrer da disciplina. Quanto ao número de reprovações, dentro do curso Licenciatura em Matemática ou em qualquer outro curso oferecido pela instituição em que fiz minha graduação, despertava-me uma preocupação. Entretanto, somente ao iniciar os estudos da disciplina, no segundo semestre, foi que comecei a enxergar que, por apresentar definições e teoremas mais sofisticados, se tratava de uma disciplina diferenciada daquelas que são trabalhadas na Matemática do Ensino Médio.

Um dos primeiros tópicos que estudamos dentro do Cálculo é a definição de Limites, que desafia o aluno a despertar um raciocínio diferenciado daquele que estava habituado. O C.D.I trata-se de uma disciplina dinâmica e, com toda tecnologia digital que hoje temos ao nosso dispor, enxergamos nesta uma forte aliada no processo tanto de transmissão quanto de assimilação dos assuntos estudados dentro dessa disciplina.

Nesse trabalho discutiremos sobre a forma de abordagem das Técnicas de Integração, conteúdo do Cálculo Integral. Na nossa discussão, detectamos que o assunto citado acima é abordado, pelos autores Stewart (2010), Leithold (1994) e Guidorizzi (2011), mediante procedimentos puramente algébricos – adiante faremos comentários sobre estes livros.

Buscando sanar os entraves que ainda existem no processo de ensino das Técnicas de Integração e recorrendo às Tecnologias Digitais, compartilhamos da visão a seguir:

> Reconhecidamente, o ensino de Cálculo detém o interesse de inúmeros especialistas em todo mundo. Por outro lado, apesar das críticas atinentes ao método de abordagem de certos conceitos e, dentre eles, a noção de integração, os entraves persistem. Por outro lado, a tecnologia proporciona, se não uma melhor forma de abordagem, todavia, outras possibilidades de exploração e transmissão didática (ALVES, 2013, p.1).

Ao falar sobre "tecnologia" Alves (2013) está, conforme o desenvolvimento do seu trabalho, se dirigindo à Tecnologia Digital, em que faz uso do software Geogebra e, ainda

---

[1] Tomaremos a liberdade de, quando fizermos referência ao Cálculo Diferencial e Integral, abreviarmos como C.D.I.

no mesmo trabalho, apresenta como resultado a mobilização de um saber diferenciado daquele que se limita ao técnico-manipulativo.

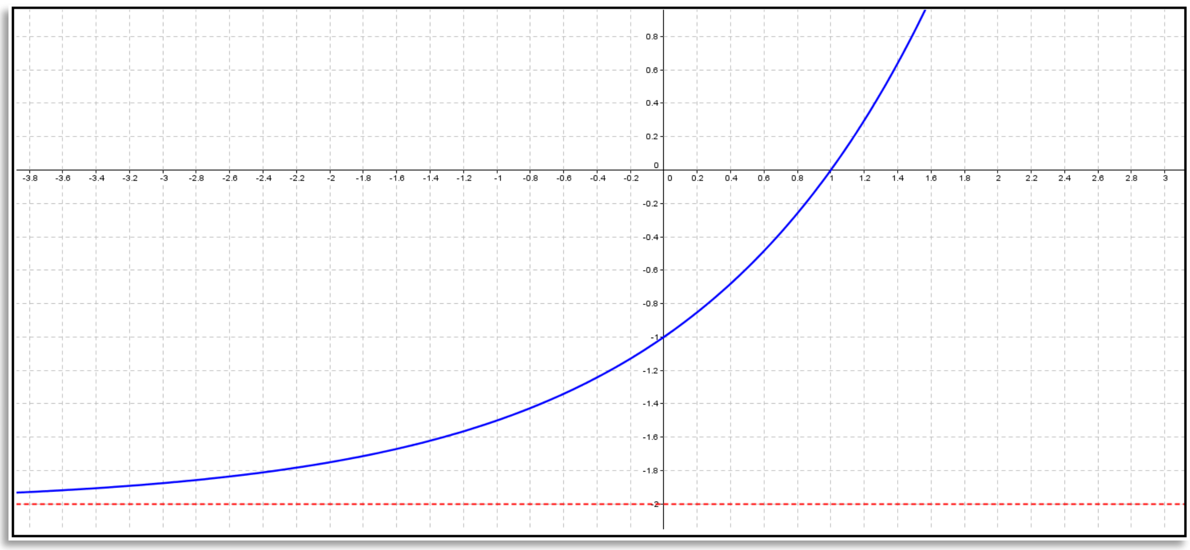
Quando estudamos funções, ainda no Ensino Médio, recorremos ao plano cartesiano para estudar o comportamento do gráfico daquela função específica – tratamos, inicialmente, de um ponto de vista mais geral, depois são apresentadas as funções: afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, trigonométricas, dentre outras.

Explorar os padrões gráfico-geométricos de uma função significa observar seu comportamento, ou seja, se esta é crescente/decrescente, contínua/descontínua, ímpar/par, ponto de interseção com o eixo das ordenadas, a existência de raízes reais, se há assíntota vertical e/ou horizontal, dentre outros aspectos.

Cada tipo de função possui características próprias, e são essas características que nós queremos apresentar na exploração dos padrões gráfico-geométricos. Ilustraremos, na sequência, o caso de uma função do tipo exponencial e de uma função seno.

- $f(x) = 2^x - 3$

Figura 1 – Gráfico da função do tipo exponencial



Fonte: Elaboração própria

Com base no gráfico, nós extraímos as seguintes informações:

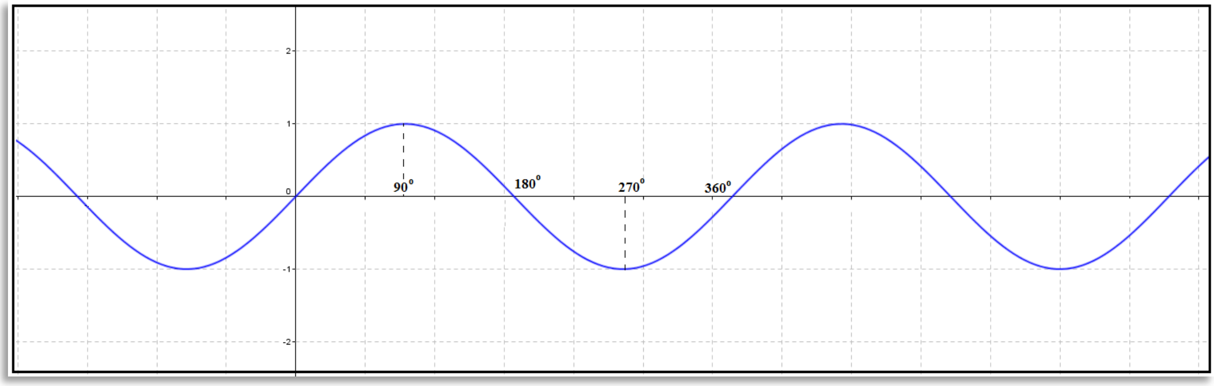
- ✓ A função é crescente;
- ✓ Para valores menores que 1, a função é negativa;
- ✓ Para valores maiores que 1, a função é positiva;
- ✓ A raiz é 1, ou seja, o gráfico intersecta o eixo das abscissas em 1;
- ✓ Trata-se de uma curva exponencial;

- ✓ Possui uma assíntota horizontal, dada por $y = -2$;
- ✓ Não possui assíntota vertical.

Como a função f é do tipo exponencial, seu comportamento é análogo. Na verdade o que aconteceu foi uma translação do gráfico da função $F(x) = 2^x$ em duas unidades para baixo.

- $g(x) = \text{sen}(x)$

Figura 2 – Gráfico da função seno



Fonte: Elaboração própria

Nesse caso, conseguimos, por intermédio do gráfico, extrair as seguintes informações sobre a função:

- ✓ A função g é periódica;
- ✓ Seu período é 2π;
- ✓ Há intervalos em que a função é crescente;
- ✓ Há intervalos em que a função é decrescente;
- ✓ Seu conjunto imagem é $[-1, 1]$;

Estes cinco pontos relacionados com o segundo exemplo, trata-se dos padrões gráfico-geométricos da função seno, cujo gráfico recebe o nome de senoide.

O que estamos propondo, com esse trabalho, é que nos procedimentos de resoluções de problemas que envolvam o Cálculo Integral, sejam explorados o comportamento das funções que induzem o sujeito a recorrer a uma Técnica de Integração específica.

Para analisarmos os padrões gráfico-geométricos relacionados com os teoremas contemplados nas Técnicas de Integração, Substituição de Variáveis, Integração por Partes, Frações Parciais e Substituição Trigonométrica, sugerimos recorrer às Tecnologias Digitais, mais especificamente ao *Geogebra*[2].

Segundo Santos e Menezes (2014), o Geogebra permite que as aulas tornem-se mais dinâmicas e interativas, estimulando no aluno a busca pelo conhecimento à medida que vivencia cada conteúdo, levando-o a tornar-se sujeito ativo no processo da aprendizagem.

Com o surgimento e sistematização do Cálculo, foi possível solucionar diversos problemas, das mais diversas áreas, com bem menos esforços – isso quando comparados aos procedimentos que eram adotados quando não se havia a estruturação que utilizamos na atualidade. A seguir, apresentamos o registro de um renomado autor de Cálculo reconhecendo os avanços que tivemos com a sistematização feita por Newton e Leibniz.

> O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do cálculo e realmente é um dos grandes feitos da mente humana. Antes da sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimento de curva eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram a partir do Teorema Fundamental, veremos que esses problemas desafiadores são acessíveis para todos nós (STEWART, 2010, p. 364).

A sistematização citada permite que nós conheçamos os procedimentos algébricos que ocorrem para encontrar a primitiva de uma função, por exemplo. Porém, nosso foco neste trabalho é apresentar o comportamento gráfico-geométrico do que ocorre por trás deste processo.

Justificamos a escolha pelo conteúdo Técnicas de Integração por meio da importância do Cálculo Integral e sua vasta aplicação, não apenas dentro da Matemática, como podemos observar a seguir:

> De modo geral, o Cálculo Integral é uma ferramenta que proporciona a resolução de inúmeros problemas do mundo moderno e possui aplicações em muitas áreas do conhecimento, como na Matemática, na Física, na Química, nas Engenharias, nas Ciências Sociais, dentre outras (SCHNEIDER, 2010, p.12).

Ao reconhecermos o valor desta ferramenta, Cálculo Integral, nos propomos a investigar como, possivelmente, podemos contribuir para tornarmos mais dinâmico o processo de ensino do conteúdo Técnicas de Integração.

[2] Criado por Markus Hohenwarter, o Geogebra é um software gratuito de matemática dinâmica que combina Geometria e Álgebra num só recurso. Usaremos a versão 5.0.

O presente trabalho traz a proposta de inserirmos a Tecnologia Digital como uma forma de abordagem para as Técnicas de Integração, com essa visão nós pretendemos dar um significado gráfico-geométrico para o que estava sendo tratado apenas pelo caráter algébrico.

Buscar outras formas de abordagens para ensinar conteúdos Matemáticos, tendo em vista os avanços tecnológicos, faz parte de um processo que visa a uma mudança nos alunos – não uma mudança repentina, mas sim a abertura de novos espaços para proporcionarmos experiências diferenciadas daquelas que eles já estão habituados. Vejamos:

> Mesmo que o uso das tecnologias não seja a solução para os problemas de ensino e de aprendizagem da Matemática, há indícios de que ela se converterá lentamente em um agente catalisador do processo de mudança na educação matemática. Graças às possibilidades que oferece para manejar dinamicamente os objetos matemáticos em múltiplos sistemas de representação dentro de esquemas interativos, a tecnologia abre espaço para que os estudantes possam viver novas experiências matemáticas (difíceis de conseguir com recursos tradicionais como o lápis e o papel), visto que pode manipular diretamente os objetos matemáticos dentro de um ambiente de exploração (GÓMEZ, 1997, p. 93).

Para atingirmos essas experiências, ou seja, para que, além do lápis e papel utilizados para integrar algebricamente as funções, faz-se necessário organizarmos, por meio de sessões didáticas, o que queremos propor – abordagem para as Técnicas de Integração usando o software Geogebra.

Na sequência iremos listar nossos objetivos, geral e específicos. Salientamos que nosso desenvolvimento será em concordância com eles, onde, para obtermos êxito, faremos uso da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, da metodologia de ensino da Sequência Fedathi e da ferramenta Geogebra.

1.1 Objetivos

1.1.1 *Geral*

- Estruturar e propor situações de ensino apoiadas na Tecnologia Digital, mais precisamente no software Geogebra, relativa às Técnicas de Integração.

1.1.2 *Específicos*

- Elaborar sessões didáticas amparadas pela Sequência Fedathi tendo como *locus* o Curso de Licenciatura em Matemática do IFCE-Juazeiro do Norte;

- Descrição dos padrões gráfico-geométricos atinentes às Técnicas de Integração com o apoio do software Geogebra;
- Estruturar um blog para apresentação das videoaulas.

Visando ao alcance dos nossos objetivos, pretendemos identificar e expor, na próxima seção, os problemas que giram em torno do processo de ensino do C.D.I, mais precisamente do assunto Técnicas de Integração.

1.2 Identificação do problema

O nosso interesse e preocupação por esse tema ocorreu após percebermos, de acordo com nossa experiência, que os alunos da disciplina de C.D.I, em especial os alunos do Curso Licenciatura em Matemática, tratam as Técnicas de Integração mediante procedimentos puramente algébricos.

Na busca de oportunizarmos as possibilidades de entendimento das Técnicas de Integração – Substituição de Variáveis, Por Partes, Frações Parciais e Substituição Trigonométrica, sugerimos que os professores recorram às Tecnologias Digitais, buscando apresentar a visualização gráfico-geométrica de algumas funções integrandas e de suas primitivas.

> O ensino de Cálculo com TICEM tem se revelado um promissor campo de pesquisa, por vários motivos e também pelo especial fato dessa disciplina apresentar em sua problemática fundamental, o estudo de funções e, consequentemente, a exploração de suas representações gráficas que, em diversos casos, apresentam um elevado grau de complexidade. Nesse sentido, o computador e os novos *softwares* de geometria dinâmica podem contribuir de forma excepcional na construção e interpretação de gráficos, auxiliando na resolução de problemas (RICALDONI, 2014, p.7).

Nosso trabalho busca no software Geogebra a exploração dos padrões gráfico-geométricos das funções envolvidas no procedimento de integração. Dessa forma, pretendemos oportunizar que os sujeitos desafiados a resolver um problema que envolva o Cálculo Integral, reconheçam alguns fatos como, por exemplo:

- Enxergar a Técnica de Integração mais adequada, observando apenas o gráfico da função;
- Analisar se há, ou não, alguma restrição na integral definida, ou seja, no limite de integração;

- Observar e analisar, em paralelo, o comportamento das funções (integranda e primitiva).

Acima comentamos sobre a identificação do nosso problema e, assim, na sequência, faremos uma breve revisão da literatura, objetivando encontrar fontes que nos auxilie na busca de sanarmos a problemática mencionada anteriormente.

1.2.1 Revisão de literatura

Para realizarmos esta etapa da pesquisa, faremos um levantamento de trabalhos acadêmicos nas categorias de artigos, dissertações e teses, que se preocupam com:

- O ensino de Cálculo Diferencial e Integral;
- O processo de ensino e/ou aprendizagem das Técnicas de Integração;
- O uso de algum software no ensino de Matemática;
- O software Geogebra como ferramenta facilitadora no processo de transmissão e/ou assimilação de conteúdos matemáticos.

O ensino de C.D.I, até aproximadamente 1960, seguia os moldes dos livros europeus, incorporando Cálculo e Análise no mesmo curso – que hoje são disciplinas trabalhadas separadamente. O curso não incluía nenhuma menção a tópicos como trigonometria, logaritmos e exponenciais, ou qualquer outro assunto visto no Ensino Médio.

Após 1960, os livros americanos começaram a ser adotados, separando assim as disciplinas de Cálculo e Análise, porém algumas escolas do Rio de Janeiro e de São Paulo insistiram em continuar seguindo o modelo europeu, afirma Ávila (2002):

> [...] essa insistência persistiu por algum tempo, e persiste até os dias de hoje, em certas escolas, como se vê em alguns livros de Cálculo de autores brasileiros. A marca mais visível disso é a introdução, logo no início do curso, da definição de limites em termos de ε e δ, e consequentemente dedução das propriedades de limite. Um livro assim "rigoroso", que usamos logo no começo da Universidade de Brasília no início dos anos sessenta, foi o texto de Johnson e Kiokemeister.

Parte dos livros de C.D.I que têm sido escritos foi influenciada pelo texto do autor Serge Lang, que em seu primeiro livro, apresentado pela primeira vez por volta dos anos sessenta, mudou significativamente o modo de ensinar Cálculo. Tanto o referido autor, como o Bob Seeley, reconheciam que tratar rigorosamente o conceito de Limite logo no início do curso de Cálculo fugia da realidade dos alunos.

Duclos (1992, p. 26), ao comentar sobre o ensino de Cálculo no 2º grau, refere-se bastante a sua experiência como estudante e como professor comissionado pela UNICAMP, onde ministrou aulas de Matemática nos três primeiros anos de alguns cursos técnicos. Baseado nessa sua experiência, o autor entra em concordância com o que disse o Professor Morris Kline, da Universidade de Nova York:

> O estilo lógico e formal é uma das influências mais desvitalizadoras no ensino da Matemática. A apresentação lógica e ordenada da Matemática pode ter uma atração estética para o matemático, mas serve como anestésico para o estudante. O rigor pode salvar a Matemática, mas seguramente perderá alunos (DUCLOS 1992, p. 26).

Cientes de estarmos direcionando nossa atenção aos alunos do Curso de Matemática, enxergamos a necessidade de transmitir o estilo formal dos conteúdos. Entretanto, visando a que brevemente esses alunos serão também Professores de Matemática, percebemos a necessidade de oportunizar, mediante estilos diferenciados de abordagem, que eles não sejam meros reprodutores de estilo lógico e formal, pois podem vir a atuar em diversos outros cursos e, se agir com excesso de rigor, conforme Duclos (1992), poderá perder alunos.

Lachini (2001) diz que é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo, saiba analisar e avaliar dados, explique o significado de suas respostas.

Seguindo essa linha de pensamento, pretendemos unir o conhecimento algébrico, que já é tradicionalmente transmitido aos alunos, à interpretação gráfico-geométrica – relativa às Técnicas de Integração.

> Compreender o significado de uma integral exige mais do que calcular o seu valor. O aluno poderá resolver uma lista de integrais definidas, por exemplo, sem, todavia, ter compreendido o Teorema Fundamental do Cálculo, limitando-se seguir um conjunto de procedimentos (SOUZA, 2013, p. 39).

Os elementos desse conjunto de procedimentos são as Técnicas de Integração. O autor cita que, munido dos procedimentos para integrar uma função, o aluno pode seguir o passo-a-passo e encontrar sua primitiva, mesmo sem entender o que de fato está a fazer.

A atual forma de ensino do Cálculo Integral desperta certa preocupação, pois sendo este um conteúdo com vasta aplicação, quando transmitido apenas por meios algébricos, provoca um enorme sentimento de abstração. (Borges, Alves 2013) comentam “no contexto do ensino de Cálculo, os conteúdos conhecidos como técnicas de integração são um exemplo standard. Por outro lado, quando exploramos em nossa mediação elementos de natureza tecnológica, propiciamos outras vias de apropriação do conhecimento”.

Quando mencionado elementos de natureza tecnológica, os autores recorrem ao software Geogebra. Mediante essa ferramenta, conseguem levantar dados concretos de que o apelo à visualização do comportamento de gráficos das funções, primitivas e integrandas, desperta nos alunos um saber diferenciado daquele adquirido por meio, apenas, do procedimento algébrico-manipulatório.

Por sua formalidade, Alves e Lopes (2013) apresentam, de acordo com suas pesquisas e experiências, que o ensino de Cálculo tem recebido críticas há décadas.

> [...] pertinentes ao seu caráter excessivamente formalista e predominantemente técnico, o ensino que compreende as técnicas de integração, preserva o caráter indefectível dos rituais de ensino escolar, que habituam os estudantes na manipulação/aplicação irrefletida dos conceitos e que tendem a se repetir no ambiente acadêmico.

A organização e sistematização do Cálculo Diferencial e Integral, que se deu mediante contribuição de diversos matemáticos, ainda é trabalhada pelos autores dos principais livros didáticos, como Stewart (2010), Guidorizzi (2011), Leithold (1994), dentre outros. Veremos adiante que essa sistematização não faz, na sua grande maioria, menção ao comportamento gráfico-geométrico das funções envolvidas no processo de integração.

> De modo particular, na história da evolução do conceito de integral, figuras emblemáticas como Newton, Leibniz, Barrow, Cavalieri, Fermat, Cauchy, etc, que contribuíram com seus esforços diretamente com a evolução para a noção, não dispunham em seu tempo, de instrumentos que os possibilitassem a produção de uma descrição do comportamento geométrico de funções e determinados conceitos (ALVES, LOPES 2013, p. 6).

Dessa forma, com o interesse em estudarem os padrões gráfico-geométricos de operações realizadas dentro da disciplina de Cálculo, Alves e Lopes (2013) recorrem ao software Geogebra para analisarem a ponte existente entre os conceitos trabalhados no estudo das Técnicas de Integração e a visualização do comportamento gráfico das funções integrandas. Conseguem apresentar, no final de suas análises, uma tabela que relaciona os padrões algébricos e geométricos relativos às Técnicas: Integração por Partes, Substituição Trigonométrica, Integração de Funções Racionais por Frações Parciais e Integração de Funções Algébricas.

Rocha (2010) traz em seu trabalho o seguinte questionamento: Que contribuições uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação proporcionada pelo ambiente informatizado pode trazer para a compreensão dos conceitos de limite, derivada e integral em uma disciplina de Cálculo?

Ao final da sua pesquisa, Rocha (2010) detectou que a mídia informática, computador munido do software Geogebra, propiciou um ambiente favorável para a negociação de significados, uma vez que potencializou a característica de visibilidade, além de perceber que professor e alunos conseguem outras formas de produzir conhecimento matemático.

Na sua pesquisa de dissertação, Silva (2014) utiliza o Geogebra 3D para resolver problemas de volume no Cálculo Integral. Por meio da sua experiência enquanto aluna, tem a intenção de sugerir uma forma de abordagem em que os estudantes sejam mais estimulados, vejamos:

> A mudança nas necessidades socioculturais levou pesquisadores a buscar um incentivo para que os estudantes sintam mais prazer pela Matemática, desta maneira encontraram na contextualização dos conteúdos uma melhor forma de aumentar a compreensão sobre determinados assuntos, bem como tornar a aprendizagem mais eficaz (SILVA, 2014, p. 1).

Constatou que, infelizmente, a metodologia de ensino adotada no Ensino Superior, na Universidade Estadual da Paraíba, ainda estava se limitando à forma tradicional, ou seja, puramente expositiva, mostrando definições já prontas, incontáveis demonstrações e raras aplicações.

> Tendo em vista a frustração e o terror que a disciplina desenvolve nos alunos, durante o seu curso, devido à utilização de uma metodologia fechada a discussões, percebemos a importância de buscar práticas auxiliares que possibilitem instigar uma nova visão para disciplina de Cálculo (SILVA, 2014, p. 3).

Quando estimulado por meio da Tecnologia Digital, o aluno passa a conhecer novas possibilidades de assimilação, em que ele não ficará restrito à resolução de algoritmos, tão frequentes na disciplina de C.D.I. Conforme Borges e Alves (2013), os livros didáticos de Cálculo perdem a oportunidade de explorar propriedades qualitativas, tal como a periodicidade, relacionadas às funções presentes na integral, como condições existentes para suas primitivas.

> Perceber a Matemática como ciência dinâmica, aberta à incorporação de novos conhecimentos requer disposição para romper com o tradicionalismo que continua sendo frequentemente utilizado no ensino, no qual o conteúdo é apresentado oralmente pelo professor, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguido de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupões que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem (SOUZA, 2013, p. 26).

É necessário que haja, por parte dos professores, uma reflexão quanto à forma de se ensinar Matemática, pois pelo método tradicional, segundo Silva (2013), pode-se cometer o equívoco de achar que houve aprendizado quando, na verdade, o que aconteceu foi apenas uma mera reprodução de passos preestabelecidos.

Comentaremos na próxima seção sobre os aspectos históricos referentes ao Cálculo Integral. Pretendemos registrar os principais autores e suas contribuições, desde os primeiros indícios das descobertas até as aplicações da atualidade, desta forma, estaremos percebendo sua evolução.

1.2.2 *Aspectos Históricos Relativos ao Cálculo Integral*

A Matemática vem, desde o início da humanidade, em um processo de evolução, passando a contribuir na resolução de inúmeros problemas nas mais diversas áreas, como por exemplo, na Engenharia, Economia, Física e Medicina, dentre tantos outros.

Para que a sua contribuição fosse mais eficaz, houve a necessidade de uma organização, desenvolvendo várias ramificações, como o Cálculo Integral – em que muitas situações problemas podem ser solucionadas com base nos seus conceitos. Isso justifica a introdução desta ramificação da Matemática em tantos cursos de graduação.

Até chegarmos à forma sistematizada que temos hoje, em relação ao conteúdo Cálculo Integral, vários matemáticos deram sua contribuição. Foi mediante problemas de quadraturas que surgiram os primeiros vestígios da história do Cálculo. Eram nesses problemas que os antigos geômetras buscavam encontrar a medição de áreas de figuras planas relacionando-as com a área de um quadrado – sendo esta uma figura mais simples de se trabalhar. Por volta de 430 a.C., tentando encontrar a quadratura de um círculo, Antífon usou uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos – iniciando com um quadrado, mas partindo para octógono, hexadecágono (...), originando, assim, o Método da Exaustão. Tal método foi creditado à Eudoxo (c. 370 a.C.), porém também ficou conhecido como método de Arquimedes.

> Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem fortaleceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método da exaustão, o equivalente grego de cálculo integral. [...] Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira prova satisfatória de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura, o que parece que o método da Exaustão vem de Eudoxo (BOYER, 2003, p. 61).

Uma cópia feita no século IX, achada em Constantinopla, permitiu que os trabalhos de Arquimedes chegassem por volta do ano de 1540 à Europa Ocidental. Com a descoberta desta tradução e a contribuição de Matemáticos, dentre eles, os que citamos no início deste tópico, aconteceu todo o desenvolvimento do Cálculo Integral.

Destacamos Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) que, por serem contemporâneos e terem desenvolvido, em relação ao Cálculo, pensamentos e descobertas tão parecidas, falaremos das suas contribuições em paralelo.

> Parece ser essa a primeira vez na história que uma área foi achada pelo inverso do que chamamos de diferenciação. [...] Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita (BOYER, 2004, p. 273).
>
> Leibniz publicou uma explicação do cálculo integral em que mostra que as quadraturas são casos especiais do método inverso do das tangentes. Leibniz deu ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo (BOYER, 2004, p. 278).

Segundo BOYER (2004), quando Newton reconheceu que Leibniz estava de posse de um método semelhante, após amarga disputa entre os aderentes dos dois homens quanto à independência e prioridade da descoberta do Cálculo, Newton omitiu as referências ao cálculo de Leibniz. Deixando claro que a descoberta de Newton antedata a de Leibniz em cerca de dez anos, porém a descoberta de Leibniz foi independente da de Newton.

Contando com a contribuição de renomados estudiosos da Matemática, temos hoje como solucionador de tantos problemas e, com vasta aplicabilidade, o Cálculo Integral – cujo nome foi criado por Johann Bernoulli.

Na próxima seção, iremos direcionar nossa atenção à principal proposta do corrente trabalho, que é o papel da visualização no contexto do ensino de Matemática, mais precisamente no ensino das Técnicas de Integração.

1.2.3 O papel da visualização no contexto do ensino das Técnicas de Integração

Trazemos em nosso trabalho uma proposta que visa abordar o assunto Técnicas de Integração por meio da visualização dos gráficos das funções integrandas. Desta forma, pensando em ressaltar o papel da visualização nesse contexto, procuramos nos apropriar de pesquisas que já comprovaram sua eficácia. BORGES e ALVES, por meio de um estudo de caso realizado no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – Campus Fortaleza, realizado no ano de 2012, detectaram, por meio da produção de cinco alunos, que o método de integração adequado pode ser percebido mediante visualização dos padrões gráfico-geométricos. O resultado foi exposto no XI Encontro Nacional de Educação Matemática em um artigo intitulado SOBRE O ENSINO DAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO COM O APOIO NA VISUALIZAÇÃO: UM ESTUDO DE CASO.

> [...] os conteúdos conhecidos como "técnicas de integração" são um exemplo *standard*. Por outro lado, quando exploramos em nossa mediação elementos de natureza tecnológica, propiciamos outras vias de apropriação de conhecimento (BORGES, ALVES, 2013, p.).

Tendo em vista que o principal objeto do C.D.I são as funções e que, para estudarmos o comportamento de uma função necessitamos recorrer ao seu gráfico, ficamos preocupados quando nos deparamos com um caso em que o estudante da disciplina não saiba trabalhar dessa forma. Sabemos que existe um leque de possibilidades girando em torno de um caso como esse, porém, independente de qual seja o motivo, nós, no papel de professor, temos a obrigação de apresentar meios em que a situação seja sanada.

Abaixo estão apresentados alguns exercícios explorados nos livros da disciplina de C.D.I:

a) Calcule a integral $\int \cos(3x)\, dx$ fazendo a substituição $u = 3x$.

b) Calcule a integral definida: $\int_0^{\pi} sec^2(t/4)\, dt$.

c) Use integração por partes para calcular a integral: $\int x\, tg^{-1}x\, dx$.

d) Efetue a antidiferenciação: $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\ \ dx$.

Analisando as formas que os autores Stewart (2010), Guidorizzi (2011) e Leithold (1994) abordam as Técnicas de Integração, percebemos por meio dos exemplos resolvidos e dos exercícios propostos que os alunos são induzidos a recorrer apenas ao procedimento algébrico. Pela experiência quando aluna e, agora como professora, não explorar a visualização do comportamento das funções integrandas e das suas primitivas, acaba acarretando entraves quando posto o aluno diante de situações gráficas e geométricas.

A Tecnologia Digital, que hoje temos a nosso favor, possibilita outras maneiras de exploração e transmissão didática. Contando com tipos diferenciados de abordagem, teremos mais chances de promover um ensino de qualidade e proporcionar, aos nossos alunos, uma aprendizagem significativa.

Ensinando com apelo às Tecnologias Digitais, no nosso caso, com apelo ao Geogebra, o comportamento gráfico das Técnicas de Integração mobiliza um saber diferenciado daquele que é adquirido com base apenas na manipulação de fórmulas e procedimentos algébricos.

> Entende que, a partir de manipulação e visualização de objetos ou de atividades práticas envolvendo medições, contagens, levantamento e comparações de dados, etc., a aprendizagem da Matemática pode ser obtida mediante generalizações ou abstrações de forma indutiva e intuitiva (FIORENTINI, 1995).

Em busca do real significado da palavra visualização, recorremos ao dicionário Michaelis onde encontramos: “Transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis; Conversão de números ou dados para um formato gráfico, que pode ser mais facilmente entendido”. Esses significados são totalmente pertinentes ao nosso propósito, pois o que estamos propondo é dar um significado geométrico para o que é, muitas vezes, tido como abstrato.

> Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador comum nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores (VILLARREAL, 1999, p.43).

Conscientes da importância do papel da visualização no ensino de Matemática, buscaremos, nos próximos capítulos, direcionar nossa atenção para o conteúdo Técnicas de Integração. Para conseguirmos promover a visualização dos padrões gráfico-geométricos atinentes ao nosso conteúdo em foco, iremos recorrer ao software Geogebra.

Buscaremos, no próximo Capítulo, uma Metodologia que nos seja útil no processo de pesquisa voltada para a Educação Matemática. Estaremos inicialmente procurando evidenciar tópicos importantes para que possamos atingir nossos objetivos geral e específicos.

2 METODOLOGIA DE PESQUISA

Ao identificarmos nossa problemática, seguindo o raciocínio de Pádua (2004), necessitamos recorrer a uma metodologia de pesquisa que nos auxilie a detectarmos os entraves existentes no processo de ensino do conteúdo Técnicas de Integração. Assim, por ser uma Metodologia voltada para trabalhos em Educação Matemática, iremos adotar a Engenharia Didática.

> Tomada num sentido amplo, pesquisa é toda atividade voltada para a solução de problemas; como atividade de busca, indagação, investigação, inquirição da realidade, é a atividade que vai nos permitir, no âmbito da ciência, elaborar um conhecimento, ou um conjunto de conhecimentos, que nos auxilie na compreensão desta realidade e nos oriente em nossas ações (PÁDUA, 2004, p.31).

Conforme metodologia de pesquisa adotada, do ponto de vista do design de investigação, assumimos a sistemática prevista pela Engenharia Didática. Na concepção dessa metodologia, o trabalho didático do Professor pode ser comparado com a forma de trabalho do engenheiro que, para realizar projetos, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio (ARTIGUE, 1996, p. 243).

Elaborada no início da década de 1980, a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa para trabalhos em Educação Matemática, que se caracteriza por uma série de experimentos baseados em sessões didáticas. Ela pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito, no nosso caso, as Técnicas de Integração. Vários autores usam a referida Metodologia de Pesquisa, destacamos: Alves (2011), Machado (1999), Almouloud (2008), Santos (2010) e Douady (2008).

> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer) (ALMOULOUD, 2008, p.66).

Reconhecidamente, quando consideramos as inúmeras aplicações do Cálculo, em especial ao problema de área e volume, evidenciamos a relevância das Técnicas de Integração. Visando a sua importância, faremos, nesse trabalho, a interpretação gráfico-geométrica atinente a tais Técnicas. Desse modo, à medida que indicarmos um problema ou obstáculo, efetuaremos o passo inicial para uma Engenharia Didática.

> “A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em realizações didáticas em

> sala de aula, isto é, a construção, realização e análise de sessões de ensino". (DOUADY, 2008, p. 2).

Suas indicações nos apontam quatro fases, que são:

- Análises Preliminares: processo que corresponde à análise geral dos aspectos envolvidos no ensino do conteúdo que se pretende ensinar;
- Análise a priori: consiste na elaboração das sessões didáticas, considerando os dados coletados na análise preliminar e os objetivos do pesquisador.
- Experimentação: aplicação das sequências didáticas em cursos de formação, momento da validação ou invalidação das hipóteses didáticas.
- Análise a Posteriori: verificação das hipóteses definidas na análise a priori podendo comparar as sequências didáticas com os resultados de experimentação.

Ao tratar sobre o Teorema da Função Explícita, buscando desenvolver sessões de ensino que visem a uma abordagem diferenciada daquelas trazidas pelos livros didáticos, Alves (2014) se restringe às duas primeiras fases previstas pela Engenharia Didática, Análises Preliminares e Análise a Priori. Adotamos, assim, um raciocínio semelhante – visto que as duas fases iniciais nos permitirão elaborar sessões didáticas apoiadas numa Metodologia de Ensino, que abordaremos mais adiante.

Em harmonia com a sistematização prevista pela Engenharia Didática e, em considerações sobre essa metodologia de pesquisa, apresentamos, a seguir, uma análise da organização matemática condicionada pelo nosso objeto teórico de interesse e estudo.

2.1 Análises Preliminares

Nessa fase, faremos um levantamento de todos os elementos que julgamos importantes para a realização das nossas sessões de ensino. De acordo com Santos (2011, p. 2):

> A fase das Análises Preliminares é a etapa onde vamos pesquisar o que precisamos para desenvolver a sequência didática, sobre análise epistemológica dos conteúdos contemplados; conhecimentos prévios dos sujeitos investigados, dificuldades e obstáculos; análise do *locus* onde ocorrerá a realização didática.

Como assinalado anteriormente, iremos nos restringir aos dois primeiros momentos previstos por Artigue (1996). Sendo assim, no âmbito das Análises Preliminares, buscamos identificar problemas de ensino e de aprendizagem vinculados às Técnicas de

Integração. Seguindo, na análise didática do objeto matemático, iremos apresentar comentários sobre as formas de abordagem de alguns autores.

Antes de propormos a inserção dos padrões gráfico-geométricos referentes às Técnicas de Integração, faremos uma abordagem semelhante àquelas trabalhadas nos livros didáticos adotados no Curso Licenciatura em Matemática do IFCE-Juazeiro do Norte. Logo após, apresentaremos nossos comentários a respeito dessas abordagens – destacando se há ou não exploração visual ao referido conteúdo.

Partiremos do primeiro nível desta organização para a Análise a Priori, segunda fase da Engenharia Didática, contudo, cientes de que, se necessário, poderemos retomar uma das vertentes que compõem as Análises Preliminares, pois:

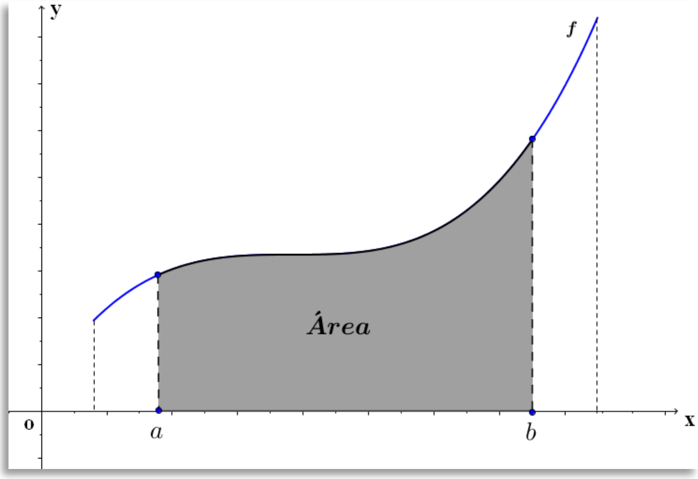
> A expressão “análises preliminares” não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização. Na realidade, deve ser um trabalho concomitante com as demais fases da pesquisa. Estas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem: a análise a priori e construção da sequência de ensino (ALMOULOUD, 2008, p. 66).

Desta forma, apresentaremos, a seguir, tópicos que compõem nossa pesquisa e que estão condizentes com a primeira fase da E.D, Análises Preliminares. Trataremos do assunto Cálculo Integral, porém estaremos direcionando nossa atenção às Técnicas de Integração: Substituição de Variáveis, Integração por Partes, Integração de Funções Racionais por Frações Parciais e Substituição Trigonométrica.

2.2 Sobre o Cálculo Integral

Com o propósito de apresentarmos uma proposta de abordagem para as Regras de Integração, faremos aqui uma breve revisão sobre o estudo das Integrais, que é tópico essencial para solucionarmos inúmeros problemas, como por exemplo, o cálculo da área da Figura 1. Antes, porém, lembramos que o cálculo da área de um polígono não requer tanto esforço, comparado ao de uma região com lados curvos. Para uma melhor compreensão, iniciaremos tentando encontrar a área da região sob o gráfico da função f, representada na figura abaixo.

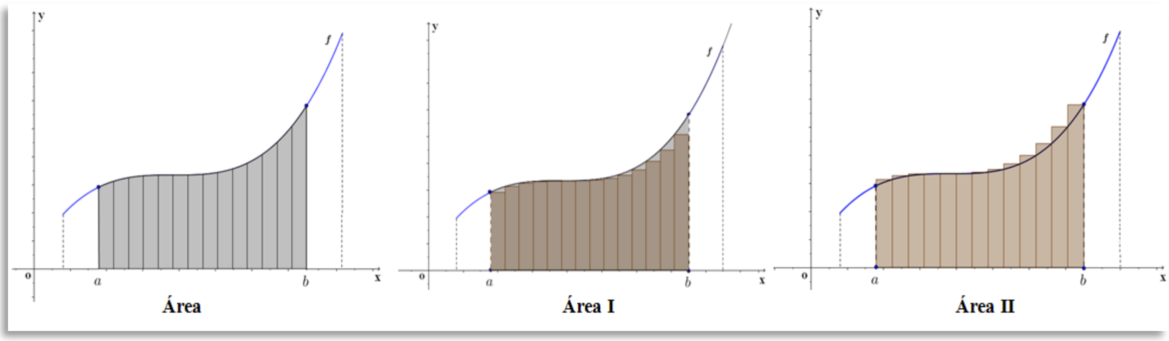
Figura 3 – Área sob uma região curva



Fonte: Elaboração própria

Na intenção de estimar tal área, subdividiremos a região em faixas e, em seguida, usaremos retângulos – usando as extremidades esquerdas e direitas, como mostram as figuras a seguir.

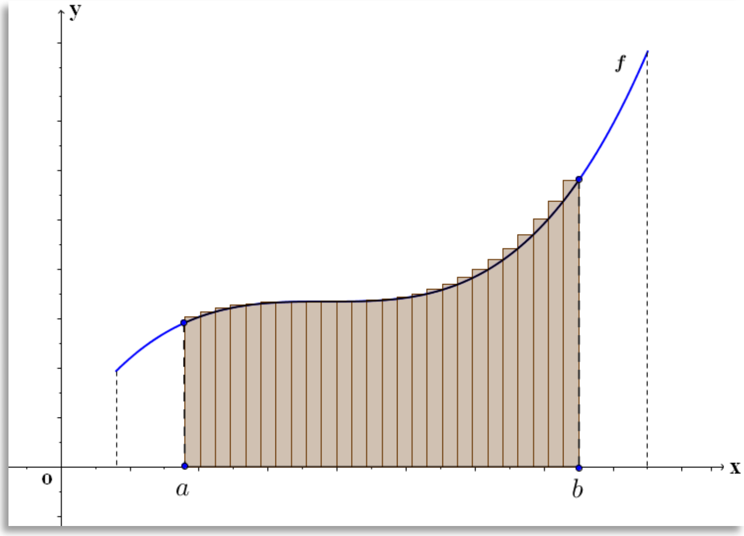
Figura 4 – Região subdividida em faixas; Retângulos aproximantes



Fonte: Elaboração própria

Tal procedimento nos permite estimar que a área procurada esteja entre as áreas I e II, ou seja, $\text{Área I} < \text{Área} < \text{Área II}$. Entretanto, podemos pensar em aumentar o número de retângulos de forma que possamos nos aproximar cada vez mais do valor que representa a área da região.

Figura 5 – Aumento no número de retângulos



Fonte: Elaboração própria

Seguindo o raciocínio acima, podemos dizer que a área da região procurada é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes, a qual se denomina Soma de Reimann. Essa estratégia contribuiu bastante, mas de forma muito exaustiva.

O Teorema Fundamental do Cálculo, que apresentaremos a seguir, nos fornece uma importante relação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, na verdade, veremos que a derivação e a integração são procedimentos inversos.

Suponhamos que f seja uma função contínua em $[a, b]$, assim:

Parte I: Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.

Parte II: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, quando F for qualquer primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$.

Analisando as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), percebemos que as Primitivas e as Integrais Definidas estão interligadas, assim, faz-se necessário apresentarmos uma notação para a Primitiva de uma função, denotada por $\int f(x)\,dx = F(x) \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x)$, chamada de Integral Indefinida. Quando o domínio da função f não for mencionado, estaremos cientes de que se trata de um intervalo. De acordo com as Regras de Derivação, ainda sobre as Primitivas, GUIDORIZZI, 2011 P. 291, define:

Sendo F uma primitiva de f em I, então, para toda constante k, F(x) + k é, também, primitiva de f. Por outro lado, se duas funções têm derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante. Diz-se, então, que $y = F(x) = k$, k constante, é a família das primitivas de f: $\int f(x)\,dx = F(x) + k$.

Mediante o exposto, verificamos que o conhecimento da Primitiva da função é essencial. Para alguns casos, elas são imediatas, uma vez que conheçamos as Derivadas, outras, porém, exigem algumas Técnicas específicas – serão esclarecidas mais adiante. Vejamos alguns exemplos:

i) $\int e^x\,dx = e^x + k$

ii) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

iii) $\int (\,\mathrm{sen}\;x)\,dx = -(\,\cos x) + k$

iv) $\int x^2\,\sqrt{1+x^3}\;dx = \frac{2}{9}.\sqrt{(x^3+1)^3} + k$

v) $\int x.(\cos 5x)\,dx = \frac{1}{5}x.(\mathrm{sen}\,5x) + \frac{1}{25}(\cos 5x) + k$

vi) $\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}.\ln|\,x\,| - \ln|\,x+1\,| + \frac{1}{2}.\ \ln|\,x+2\,| + k$

vii) $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx = \frac{-\ln\left|-\sqrt{5}\,x + \sqrt{5x^2-4}\right|}{\sqrt{5}} + k$

Os exemplos i), ii) e iii) são resolvidos de forma imediata, entretanto, os exemplos iv), v), vi) e vii) exigem, respectivamente, as Técnicas: Substituição, Por Partes, Frações Parciais e Substituição Trigonométrica.

Faremos, a seguir, uma revisão sobre alguns métodos analíticos de resolução para casos em que as Integrais não são imediatas. Mesmo recorrendo às Técnicas específicas para Integração, veremos que em algumas situações podemos recair em procedimentos exaustivos. Como a Diferenciação e a Integração são procedimentos inversos, conforme mencionamos anteriormente, teremos para cada regra da Diferenciação, uma Técnica de Integração correspondente.

2.2.1 *Sobre a Regra da Substituição*

Do Cálculo Diferencial, para a derivação de funções compostas, usamos a Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}\left[F\left(g(x)\right)\right] = F'g\left((x)\right).g'(x)$$

Assim, se $F'(x) = f(x)$, temos:

$$\int F'g\left((x)\right).g'(x)\,dx = F\left(g(x)\right) + k$$

É conveniente fazermos uma substituição de variável: $u = g(x)$.

$$\int F'g\left((x)\right).g'(x)\,dx = F\left(g(x)\right) + k = F(u) + k = \int F'(u)\,du$$

Ou seja: $\int f\left(g(x)\right).g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

Para ilustrar o procedimento acima, iremos recorrer ao exemplo (iv):

Em $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ fazendo a substituição $u = x^3 + 1$, teremos:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad du = 3x^2\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{3} = x^2\,dx$$

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{x^3+1}\,x^2\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

$$\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + k$$

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{9}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+1\right)^3} + k$$

A Técnica acima citada nos desafia a descobrir a substituição mais apropriada. Pelo procedimento, é fácil percebemos que o caminho é escolher u como uma função do integrando em que sua derivada também ocorra. Até nos familiarizarmos com a Técnica de Substituição de variável, é comum errarmos a primeira escolha, pois conforme STEWART, p. 377, achar a substituição correta é algo artístico.

2.2.2 *Sobre a Integração por Partes*

Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido no caso da Técnica de Substituição, na Integração por Partes, a Regra de Derivação correspondente é a do Produto. Vejamos:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Ao integrarmos os dois membros, obtemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]dx = \int \left[f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\right]dx$$

$$f(x).g(x) = \int \left[f'(x).g(x)\right]dx + \int \left[f(x).g'(x)\right]dx$$

Reorganizando a equação acima, chegamos em:

$$\int \left[f(x).g'(x)\right]dx = f(x).g(x) - \int \left[f'(x).g(x)\right]dx$$

Na intenção de facilitar a memorização da fórmula usada nesta Técnica, são feitas as seguintes substituições:

$$u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = f'(x) \quad \text{e} \quad v = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = g'(x)$$

Ou seja:

$$\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow \quad du = f'(x)\,dx \\ v = g(x) & \Rightarrow \quad dv = g'(x)\,dx \end{cases}$$

Dessa forma, resumimos à $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$.

Ilustraremos a Técnica acima mediante a Integral citada no exemplo (v) $\int x.(\cos 5x)\,dx$.

Considerando $\begin{cases} u = x \quad \Rightarrow \quad du = 1 \\ dv = \cos(5x) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{5}\,\text{sen}(5x) \end{cases}$

Observamos que para encontrarmos v, usa-se à Técnica de Integração por Substituição.

Assim sendo, temos:

$$\int x.\cos(5x)\,dx = x.\frac{1}{5}\text{sen}(5x) - \frac{1}{5}\int \text{sen}(5x)\,dx$$

$$\int x.\cos(5x)\,dx = x.\frac{1}{5}\text{sen}(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + k$$

Percebemos, por meio dessa Técnica, que podemos tornar determinadas Integrais mais simples de serem solucionadas. Um raciocínio semelhante precisa ser desenvolvido, como na Técnica de Substituição, pois precisamos escolher da forma mais conveniente qual função chamaremos de “u” e qual será chamada de “dv”.

2.2.3 Sobre Integração por Frações Racionais

Seja a função $f(x) = P(x)/Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios na variável x. A referida Técnica nos permite escrever $f(x)$ como soma de frações mais simples de serem integradas, mesmo precisando recorrer às Técnicas de Substituição de Variáveis e/ou a Integração por Partes.

Quando o grau do polinômio $P(x)$ for maior, ou igual, ao grau do polinômio $Q(x)$ – Função Racional Imprópria – é possível efetuar a divisão, porém quando não for, ou seja, quando o grau de $P(x)$ for menor que o grau de $Q(x)$ – Função Racional Própria – é possível expressar $f(x)$ como soma de frações mais simples.

Ilustraremos a Técnica de Integração por Frações Parciais recorrendo ao exemplo (vi). Vejamos:

$$\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\,dx$$

Como a função integranda é Racional Própria, o que se pretende é reescrevê-la como uma soma de frações mais simples.

1) Fatoramos o denominador:

   $x^3+3x^2+2x = x.(x+1).(x+2)$

2) Observando que o denominador pôde ser fatorado como produto de três fatores lineares distintos, a decomposição em Frações Parciais terá o formato:

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1}{x.(x+1).(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

3) Determinar os valores de A, B e C:

$$\frac{1}{x.(x+1).(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+2)} \Rightarrow$$

$$\frac{x.(x+1).(x+2)}{x.(x+1).(x+2)}=\frac{Ax.(x+1).(x+2)}{x}+\frac{Bx.(x+1).(x+2)}{(x+1)}+\frac{Cx.(x+1).(x+2)}{(x+2)} \Rightarrow$$

$$1=A(x+1).(x+2)+Bx.(x+2)+Cx.(x+1) \Rightarrow$$

$$1=A(x^2+3x+2)+B(x^2+2x)+C(x^2+x) \Rightarrow$$

$$1=Ax^2+3Ax+2A+Bx^2+2Bx+Cx^2+Cx \Rightarrow$$

$$1=x^2(A+B+C)+x(3A+2B+C)+2A \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}; \quad B = -1; \quad C = \frac{1}{2}.$$

4) Integrar:

$$\int \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x}\,dx = \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{(-1)}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)} \right] dx$$

$$\int \left[\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{(-1)}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)} \right] dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x}\,dx + \int \frac{(-1)}{(x+1)}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)}\,dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{x}\,dx + \int \frac{(-1)}{(x+1)}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)}\,dx = \frac{1}{2}.\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}.\ln|x+2| + k$$

Salientamos que a Técnica de Integração por Frações Parciais possui diversos casos – que podem ser estudados de forma individual – por se tratar de estratégias diferentes. Na intenção de fazermos uma breve revisão, como estão sendo feitas nas outras Técnicas, apresentamos apenas um deles.

2.2.4 *Sobre Substituição Trigonométrica*

Em casos de integrais que envolvam expressões, como $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ e $\sqrt{a^2 - x^2}$, onde $a > 0$, recorre-se, na busca de eliminar os radicais, às seguintes substituições:

i. Para $\sqrt{x^2 + a^2}$, $x = a.tg(\theta)$, onde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;

ii. Para $\sqrt{x^2 - a^2}$, $x = a.sec(\theta)$, onde $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$;

iii. Para $\sqrt{a^2 - x^2}$, $x = a.sen(\theta)$, onde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;

Onde se recorre às identidades:

i) $1 + tg^2(\theta) = sec^2(\theta)$

ii) $sec^2(\theta) - 1 = tg^2(\theta)$

iii) $1 - sen^2(\theta) = cos^2(\theta)$

Desenvolveremos, como exemplo para a Substituição Trigonométrica, a seguinte integral: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$. (Iremos utilizar a substituição sugerida em (iii).

$$x = 3.\sec(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = 3.\sec(\theta).tg(\theta)\,d\theta$$

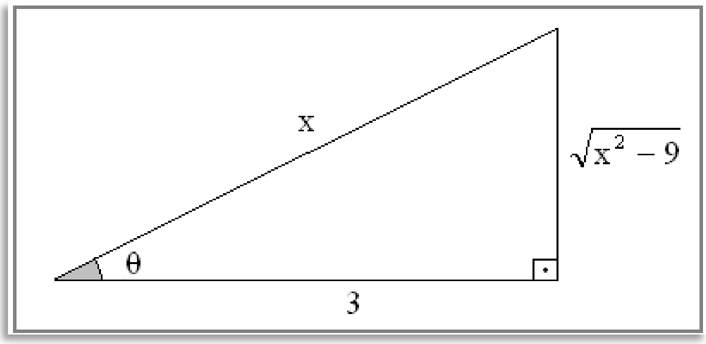
$$\sqrt{x^2-9} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9\sec^2(\theta)-9} \;=\; 3\sqrt{\sec^2(\theta)-1} \;=\; 3\sqrt{tg^2(\theta)} \;=\; 3.\,|\,tg(\theta)\,|$$

Mas $3.|tg(\theta)| = 3.tg(\theta)$, pois $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int \frac{3\sec(\theta).tg(\theta)}{[3\sec(\theta)]^2.\,3tg(\theta)}\,d\theta = \int \frac{1}{9\sec(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{9}\int \cos(\theta)\,d\theta \;=\; \frac{1}{9}.\mathrm{sen}(\theta) + k$$

Para retornarmos a variável x, podemos recorrer ao triângulo da Figura 4 (considerando que $\sec(\theta) = \frac{x}{3}$):

Figura 6 – Triângulo Retângulo auxiliar para retornar a variável x



Fonte: Elaboração própria

A seção acima foi apresentada conforme o assunto é costumeiramente repassado para os alunos. Iniciaremos, a seguir, nossos comentários sobre os livros didáticos – relacionados com as Técnicas de Integração Substituição de Variáveis, Por Partes, Frações Parciais e Substituição Trigonométrica.

2.3 Comentários Sobre os Livros Didáticos

Por meio dos comentários abaixo, nós pretendemos adquirir base para elaborarmos nossas sessões didáticas e, posteriormente, a gravação das nossas videoaulas.

Nessa etapa iremos apresentar comentários dos livros didáticos sobre as Técnicas de Integração. Utilizamos os seguintes livros: Stewart (2010), Guidorizzi (2011) e Leithold (1999) – que fazem parte do Programa de Unidade Didática (PUD) da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do Curso Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Pretendemos comentar sobre como as Técnicas de Integração estão sendo abordadas por esses autores – enfatizamos que iremos nos restringir às Técnicas: Substituição de Variáveis, Por Partes, Frações Parciais e Substituição Trigonométrica. Sendo que nosso maior intuito é analisar se há, ou não, algum tipo de abordagem gráfico-geométrica.

2.3.1 *O Livro do Stewart (2010)*

Quando apresenta o Teorema Fundamental do Cálculo, em que é percebido que a derivação e a integração são processos inversos, Stewart (2010) diz que cada um desfaz o que o outro faz. Pela Parte II desse Teorema, tem-se: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, quando F for qualquer primitiva de f, isto é, F'= f.

O autor ressalta a importância de encontrarmos essas primitivas, que nem sempre são imediatas. Sendo assim, mostra uma preocupação em apresentar Técnicas que sejam capazes de integrar funções como: $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (citada no tópico Regra de Substituição, e que chamamos de Substituição de Variáveis).

De forma coerente, ele justifica o procedimento adotado na Técnica, mediante a Regra da Cadeia – Regra que permite encontrar a derivada de uma função composta.

REGRA DA SUBSTITUIÇÃO: Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo *I* e *f* for contínua em *I*, então $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$.

Para exemplificar a Regra acima, Stewart (2010) fornece o desenvolvimento das Integrais:

I) $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$

II) $\int \sqrt{2x+1}\,dx$

III) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

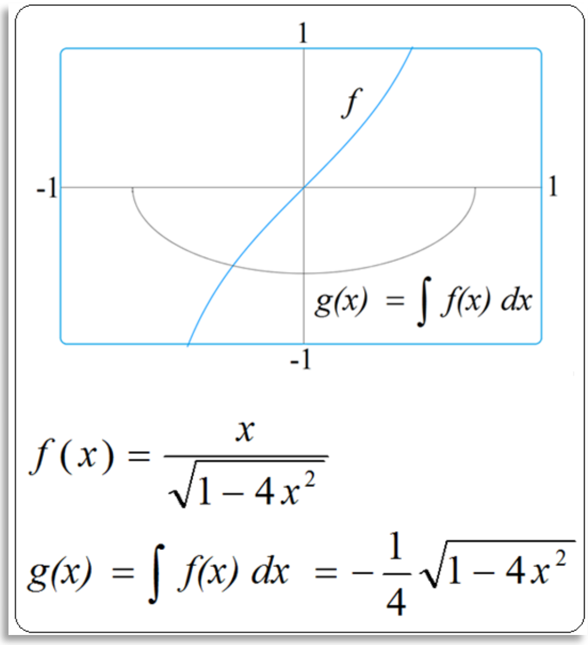
IV) $\int e^{5x}\,dx$

V) $\int \sqrt{1+x^2}\;x^5\,dx$

VI) $\int tg(x)\,dx$

Entretanto, somente no exemplo III ele sugere verificar a igualdade $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$, por meio da Figura 7 e, em seguida, faz comentários à respeito do comportamento das duas funções.

Figura 7 – Gráfico referente ao exemplo III



Fonte: Construção própria

A Técnica de Integração por Partes é apresentada como correspondente à Regra do Produto para a Derivação e, para facilitar a fórmula, o autor sugere enxergar:

$$\boxed{\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx \quad \text{como} \quad \int u\,dv = u.v - \int v\,du}$$

Ou seja, $f(x)=u$, $g(x)=v$, $f'(x)\,dx = du$ e $g'(x)\,dx = dv$.

Assim como na Regra Substituição de Variáveis, são apresentados alguns exemplos, mais precisamente:

1. $\int x.\text{sen}(x)\,dx$

2. $\int \ln x\ dx$

3. $\int t^2.e^t\ dt$

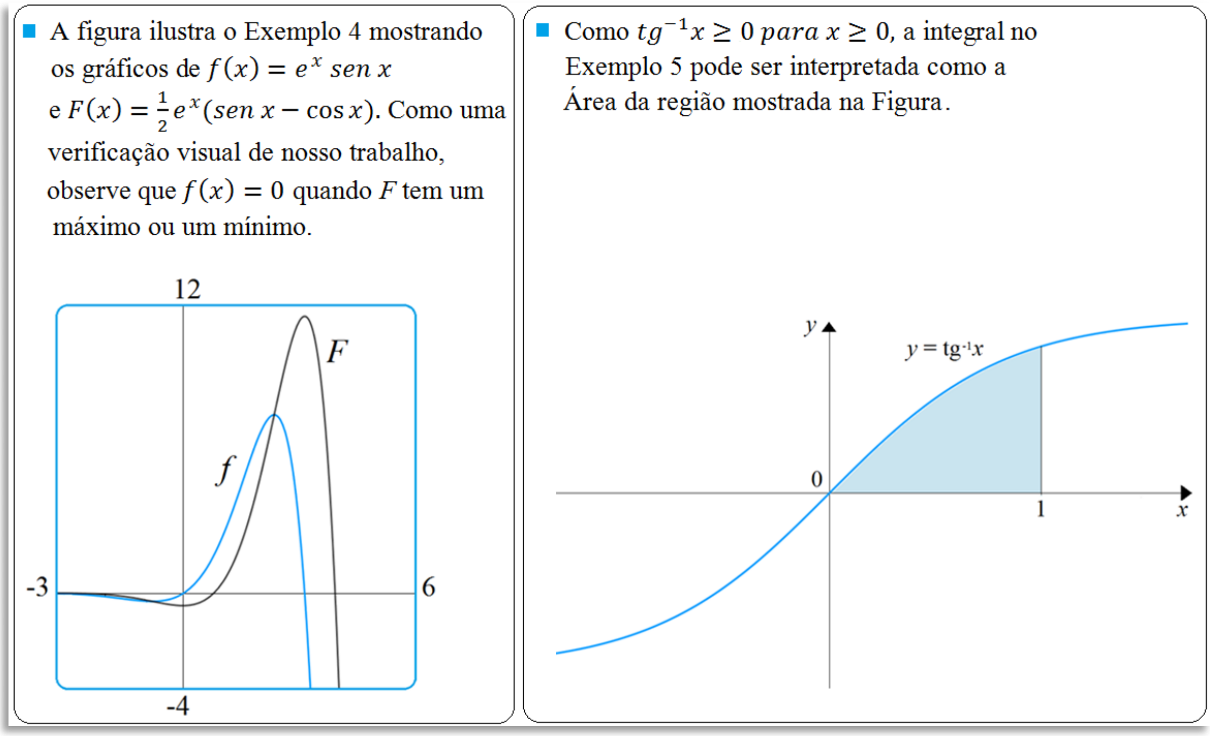
4. $\int e^x.\text{sen}(x)\,dx$

5. $\int_0^1 \text{tg}^{-1}(x)\,dx$

6. Demonstração da fórmula de Redução: $\int \text{sen}^n(x)\,dx$

Apenas nos exemplos 4. e 5. são apresentados gráficos, porém com breves comentários – sem muita exploração. Vejamos:

Figura 8 – Gráficos com comentários relacionados aos exemplos 4 e 5, respectivamente



Fonte: Construção própria

No caso da Técnica Substituição Trigonométrica, antes de apresentar uma Tabela semelhante (ver abaixo), com base na integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$, o autor comenta a importância de mudarmos a variável x por $a.\text{sen}\theta$, justificando que só assim será permitido se livrar da raiz quadrada – ressalta que para retornar a variável x, podem-se usar identidades trigonométricas.

Tabela 1 – Substituições Trigonométricas

Expressão	***Substituição***	***Identidade***
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a.sen(\theta), \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sen^2\theta = cos^2\theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a.tg(\theta), \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tg^2\theta = sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a.\sec(\theta), 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$1 - sen^2\theta = cos^2\theta$

Fonte: Construção própria

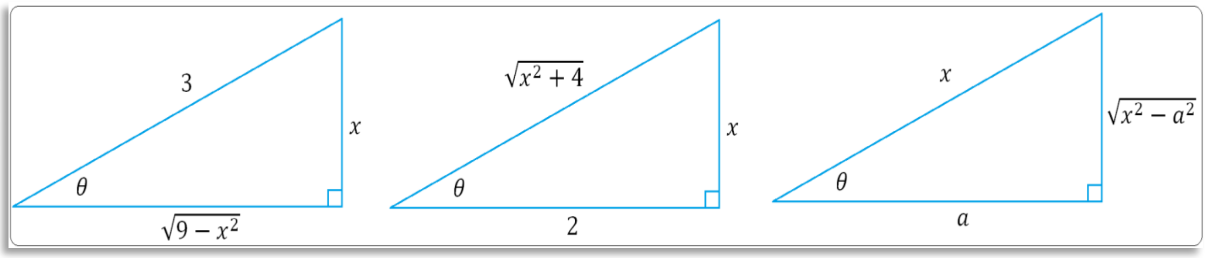
Essas identidades são, em grande maioria, apresentadas nos exemplos abordados por meio de triângulos retângulos. O papel da visualização aqui, se restringe apenas ao procedimento da volta para a variável x, com exceção do exemplo 7 – que deixa para o leitor uma figura contento o gráfico do integrando e de uma integral indefinida, com k = 0. A figura abaixo está relacionada com o procedimento de volta das substituições citadas nos exemplos I, III e V, que são:

I) Calcule $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$;

III) Encontre $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} dx$;

V) Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, para $a > 0$.

Figura 9 – Ilustrações apresentadas para voltar a variável x



Fonte: Construção própria

Em Integração de Funções Racionais por Frações Parciais são apresentados alguns casos específicos, como:

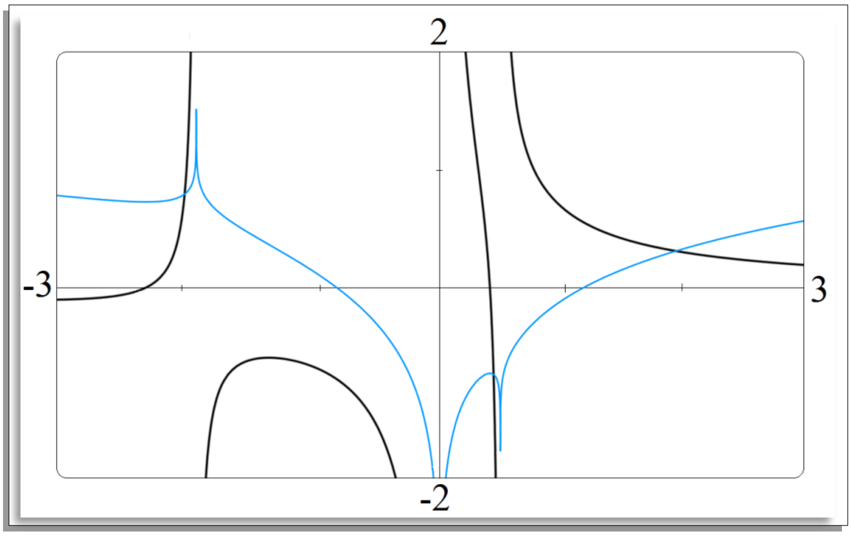
Caso I – O denominador Q(x) é um produto de fatores lineares distintos.

Caso II – Q(x) é um produto de fatores lineares, e alguns fatores são repetidos. Caso III – Q(x) contém os fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.
Caso IV – Q(x) contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

No Caso I, como exemplo, é citada a integral $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$, em que é apresentado os gráficos do integrando e de sua integral (tomando k = 0).

Não é dito quem é gráfico da função integrando e quem é da integral, sugerindo que o leitor faça essa reflexão.
Vejamos:

Figura 10 – Gráfico do integrando e de sua integral



Fonte: Construção própria

Nos casos II, III e IV não são apresentados nenhum tipo de visualização, contudo, no caso IV, é ressaltada a importância de recorrer a algum sistema de computação, uma vez que o procedimento algébrico seria tedioso.

Após discutir as diferentes Técnicas de Integração, é apresentada uma espécie de resumo, intitulado: ESRATÉGIAS DE INTEGRAÇÃO, em que se fornece uma tabela contendo as fórmulas e, em seguida, sugere dicas – para o caso de não se enxergar imediatamente como resolver uma dada integral.

Percebemos, no livro do Stewart (2010), que o conteúdo Técnicas de Integração é tratado, quase sempre, apenas de forma algébrica. Assim queremos, e temos como objetivo por meio deste trabalho, que seja apresentada outra forma de abordagem, visando a um melhor entendimento do que acontece geometricamente no processo de integração.

2.3.2 *O Livro do Guidorizzi (2011)*

No livro do Guidorizzi (2011) o que chamamos de Técnicas de Integração são chamadas de Técnicas de Primitivação – uma vez que as Integrais são nomeadas como Primitivas, ou seja, são as funções antes do processo de derivação.

Partindo das fórmulas de derivação, o capítulo é iniciado com a apresentação de várias primitivas e, logo em seguida, são solucionados alguns exemplos. Percebemos claramente que a abordagem é exclusivamente algébrica no decorrer de todo capítulo.

O autor sugere como exercício várias questões, contendo diversos itens, entretanto, com base em sua forma de abordagem, induz o leitor a encará-los sob o ponto de vista estritamente analítico. Observando a especificidade de cada Técnica de Integração (Primitivação), faremos, a seguir, alguns comentários – de forma que os confrontemos com nosso principal objetivo neste trabalho.

Ao citar a Técnica de Substituição de Variáveis, diz que $F'(g(x))$é uma primitiva de $f(g(x)).g'(x)$, mas não menciona explicitamente que se trata da Regra da Cadeia – o que seria interessante, pois iria ressaltar que Derivada e Integral são procedimentos inversos. Adiante, antes de listar os exercícios, são apresentadas as resoluções de exemplos.

A Técnica de Integração por Partes e as demais Técnicas são trabalhadas de forma semelhante à Substituição de Variáveis. São elencados casos de Primitivas de Funções Racionais por Frações Parciais por meio de Teoremas, alguns demonstrados, outros deixados a cargo do leitor. A única imagem que pode ser encontrada em todo o capítulo, está no exemplo 8, p. 368, em que é solicitado para calcular a área do círculo de raio r (ver Figura 10) – que foi calculada com Integral Definida por meio da Substituição Trigonométrica.

Ao confrontarmos as formas de abordagens do corrente autor com o Stewart (2010), a que mais se distancia do que propomos é esta, por não explorar, em sua totalidade, o raciocínio voltado para a visualização – significar geometricamente o que ocorre por trás dos cálculos em cada procedimento.

2.3.3 *O Livro do Leithold (1994)*

Estamos fazendo uso da 3ª Edição do livro "O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA", de 1994, pois esse faz parte dos acervos da Biblioteca do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Campus Juazeiro do Norte.

No livro do Leithold (1994), o termo integral é substituído pelo termo antiderivada, justificando que, assim como adição e subtração, multiplicação e divisão, são operações inversas, diferenciação e antidiferenciação agem como tal.

A definição abaixo (ver figura 9) é ilustrada mediante o exemplo que diz: Se F for definida por $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$, então $F'(x) = 12x^2 + 2x$. Assim, se f for a função definida por $f(x) = 12x^2 + 2x$, logo afirmamos que f é derivada de F e que F é uma antiderivada de f.

Figura 11 – Definição para antiderivação

> Uma função F será chamada de **antiderivada** de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Fonte: GUIDORIZZI, 2011

Tomando como partida o exemplo acima, é introduzida a ideia da constante real C, conforme Teorema da Figura 10, onde, para o autor, Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função.

Figura 12 – Teorema que insere a constante arbitrária

> **Se F for uma antiderivada particular de f em um intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por**
>
> $$F(x) + C \qquad (1)$$
>
> **onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas de (1), atribuindo-se certos valores a C.**

Fonte: GUIDORIZZI, 2011

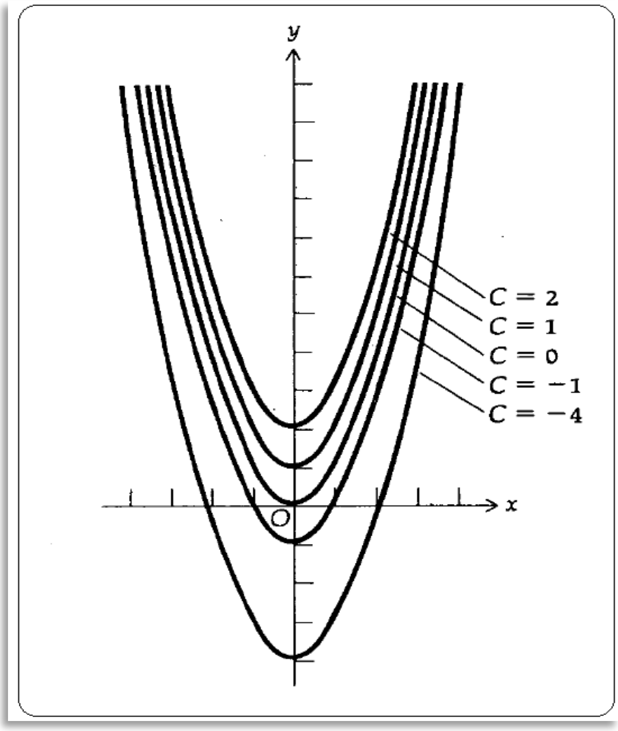
As integrais imediatas são apresentadas por meio de Teoremas, sendo que em toda seção não são encontradas nenhuma exploração visual. No caso das Técnicas de Antidiferenciação, novamente são citados Teoremas, seguidos de exemplos e exercícios.

No decorrer do capítulo, p. 303, é inserido um tópico intitulado "EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MOVIMENTO RETILÍNEO" que aborda o problema: Queremos encontrar uma solução completa da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$

A solução da equação, $y = x^2 + C$ é, considerada pelo autor, uma família dependente de um parâmetro – ilustrada pela imagem abaixo.

A visualização do gráfico, aliado ao procedimento analítico, que também é contemplado, favorece a aprendizagem significativa do leitor. Porém, em toda a parte do livro que nos é interessante – Técnicas de Antidiferenciação, esta é a única imagem que encontramos.

Figura 13 – Solução geral da equação diferencial



Fonte: GUIDORIZZI, 2011

Percebemos que os livros comentados acima compartilham uma forma de abordagem muito semelhante, em que detectamos os seguintes aspectos:

- De acordo com um padrão analítico específico de cada Técnica de Integração, é empregado um conjunto de regras, em que, em seguida, como resposta, chega- -se a uma expressão correspondente a uma família de primitivas da função integranda;

- Como o sujeito é instigado a buscar integral indefinida mediante as regras estabelecidas nas Técnicas de Integração, quase sempre não se preocupa com o caráter de não integrabilidade das funções integrandas – por exemplo, analisar se existe, ou não, a integral $\int_a^b f(x)$, $\forall$ [a, b] $\subset \mathbb{R}$. Esse tipo de despreocupação faz com que o aluno perca a oportunidade de explorar padrões qualitativos, como o caráter de continuidade das funções envolvidas na integral e de periodicidade, dentre outros.

2.4 Análises a Priori

Análise a Priori trata-se da segunda fase prevista pela Metodologia de Pesquisa da Engenharia Didática. Para Almouloud (2008, p. 67), é nesta fase que devemos:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida;

- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;

- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento a que a aprendizagem visa.

Com a finalidade de apresentarmos uma estratégia que vise explorar os padrões gráfico-geométricos relativos às Técnicas de Integração, iremos elaborar uma sequência de situações problemas – selecionaremos questões pertinentes ao nosso assunto em foco. Pretendemos fazer uso do Software Geogebra como ferramenta que nos dará suporte no processo, por exemplo, da construção dos gráficos das funções integrandas e primitivas.

Por meio das resoluções das questões que serão apresentadas nas Sessões Didáticas em 3.2, esperamos que os Professores percebam nossa proposta: inserir, no ensino das Técnicas de Integração, os padrões gráficos relativos, especificamente, às Regras: Substituição de variáveis, Por Partes, Integração de Funções Racionais por Frações Parciais e Substituição Trigonométrica. Salientamos que também é nossa intenção adotarmos uma metodologia de ensino, que será a Sequência Fedathi.

Na construção das Sessões Didáticas levaremos em consideração as seguintes características:

- Os alunos possuem conhecimento dos pré-requisitos e do assunto Técnicas de Integração – pelo menos do ponto de vista algébrico.
- Os problemas podem envolver outros assuntos como: Geometria, Álgebra e Derivadas, dentre outros.
- O aluno conhece o software Geogebra – caso não o conheça, o Professor deverá apresentá-lo junto aos seus principais comandos.

Em relação às competências e habilidades, objetivamos essencialmente:

- Despertar o raciocínio dedutivo voltado para análises gráficas.
- Usar o Geogebra para auxiliar na construção dos gráficos.
- Sugerir, com base na visualização do seu gráfico, qual Técnica de Integração melhor se adequa para encontrar, pelo procedimento algébrico, sua primitiva.

Nossas Sessões Didáticas serão elaboradas de tal forma que permitirá ao aluno, ao encarar o problema, fazer um levantamento de dados, refletir, interagir e evoluir, adquirindo novos conhecimentos. A figura do Professor será fundamental, porém no papel de mediador – para não prejudicar o raciocínio do aluno, ele deverá ter cuidado com suas intervenções.
Como situações problemas selecionamos:

I. Discutir, por meio da visualização do seu gráfico, a integral da função f.

II. Segundo a integral definida $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx$, discutir a região de integração.

III. Descrever uma comparação dos aspectos algébricos e geométricos envolvidos na Técnica de Integração por Partes – tomando como exemplo o caso da integral $\int \mathrm{x}.\cos(5\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$.

IV. Estudar os padrões gráfico-geométricos relativos à Técnica de Integração Substituição Trigonométrica.

I. Calcular a integral indefinida $\int x(x^2-1)^3dx$. Em seguida, ilustrar e verificar se a resposta é razoável fazendo o gráfico da função e da sua primitiva (tome $C=0$).

Comentaremos, no próximo capítulo, sobre a metodologia de ensino que vamos adotar para desenvolvermos nossas sessões didáticas – visando aos nossos principais objetivos, ressaltamos sua importância neste trabalho.

3 METODOLOGIA DE ENSINO

Em concordância com nossa temática – Proposta de abordagem para as Técnicas de Integração usando o *Software* Geogebra, percebemos a necessidade de recorrermos a uma metodologia de ensino, pois nosso principal foco é sugerir aos professores da disciplina de C.D.I que o assunto Técnicas de Integração seja ensinado, também, mediante o viés gráfico-geométrico.

Sendo, nós, conhecedores dos entraves existentes no processo de ensino de Matemática e visando a uma metodologia que atenda à nossa necessidade, optamos usufruir da Sequência Fedathi, a qual apresentaremos a seguir.

3.1 Sequência Fedathi

A Seqüência Fedathi constitui uma proposta metodológica desenvolvida por professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. Essas pessoas constituem o Grupo Fedathi, formado no início dos anos 1990 para tratar de questões relativas à didática da matemática.

A proposta mencionada acima se refere à possibilidade do Professor criar condições para que os estudantes tenham uma experiência significativa na aprendizagem, colocando-o em posição de matemático, por meio do processo de investigação e resolução de problemas.

> [...] a Sequência Fedathi busca minimizar os obstáculos epistemológicos e didáticos da ação docente por meio de uma prática com base em quatro fases: tomada de posição, maturação, solução e prova, em que o professor de matemática ensina cada vez menos e o aluno aprende cada vez mais, mobilizados pelas situações a-didáticas (BORGES, LIMA, SANTOS, 2013).

Dentro dessa metodologia, o aluno, ao se deparar com um novo problema, sugerido pelo Professor, deve seguir os passos que um matemático costuma realizar nos seus estudos e/ou descobertas: seleciona os dados do problema, busca caminhos que o leve a uma solução e, desses caminhos, analisa quais estão corretos e lhe será útil. Pensando em uma organização no percurso desses caminhos, a S.F. é organizada em quatro etapas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

Os conceitos que atuam em conexão com a Sequência Fedathi são: Situações Didáticas, Contrato Didático, Transposição Didática e a Engenharia Didática. Salientamos que fizemos uso desta última: Engenharia Didática. Entretanto, para a aplicação da Sequência Fedathi, recorreremos a uma sessão de estudos que está dividida em etapas, que listaremos e abordaremos abaixo:

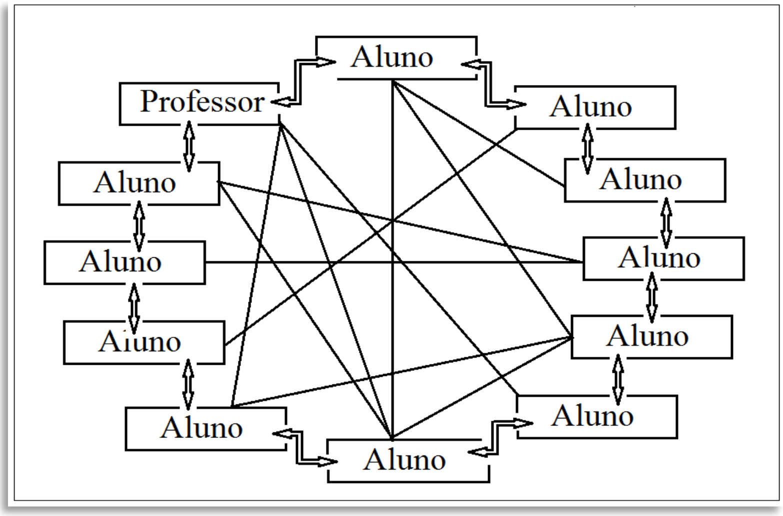
Tomada de Posição

Essa é a primeira etapa da S.F., é nela onde o Professor apresenta o problema – que é pertinente ao contexto do assunto da sua aula. É importante que, antes da apresentação da situação-problema, haja uma explanação dos prerrequisitos básicos e necessários que permitirão solucioná-lo, pois com essa espécie de nivelamento, todos os alunos terão as mesmas chances de contribuir no sucesso da solução.

Por se tratar de uma metodologia com que, possivelmente, o Professor não esteja habituado a trabalhar, será necessário estabelecer algumas regras para que as interações entre os colegas tomem um rumo satisfatório.

A metodologia de ensino da S.F. é, na verdade, inicialmente, um desafio para todos: Professores e alunos. Para alunos, porque estarão sendo colocados em uma situação de inquietação, até conseguir despertar seus próprios raciocínios. Já para os Professores, porque, em grande maioria, terão a sensação de certa perda de tempo – uma vez que, nessa etapa, os alunos debaterão sobre diversas possibilidades para seguir o caminho correto (podendo estar certos, mas também podendo tender para o lado errado). Alunos e Professor estarão se relacionando de forma multilateral, em que cada membro do grupo passa a possuir a mesma importância, conforme ilustração abaixo:

Figura 14 – Interação entre Professor e alunos

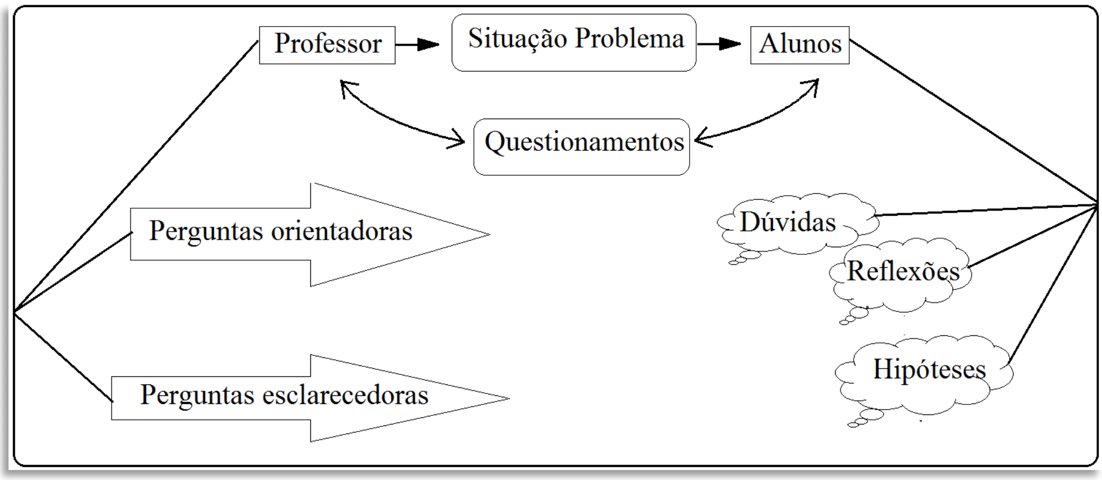


Fonte: Construção própria

Maturação

Nesta segunda fase, será o momento quando os alunos irão compreender e identificar os dados envolvidos no problema. São os questionamentos e as inquietações que irão proporcionar as maiores conquistas de todo o processo da S.F. A maioria desses questionamentos são apresentados pelos alunos, porém poderão partir, também, do Professor – cujas perguntas deverão ser de caráter esclarecedoras e orientadoras. É na Maturação que são despertadas as reflexões e hipóteses que os conduzirão ao caminho correto. Ver ilustração a seguir:

Figura 15 – Relação entre Professor e alunos no momento da Maturação



Fonte: Construção própria

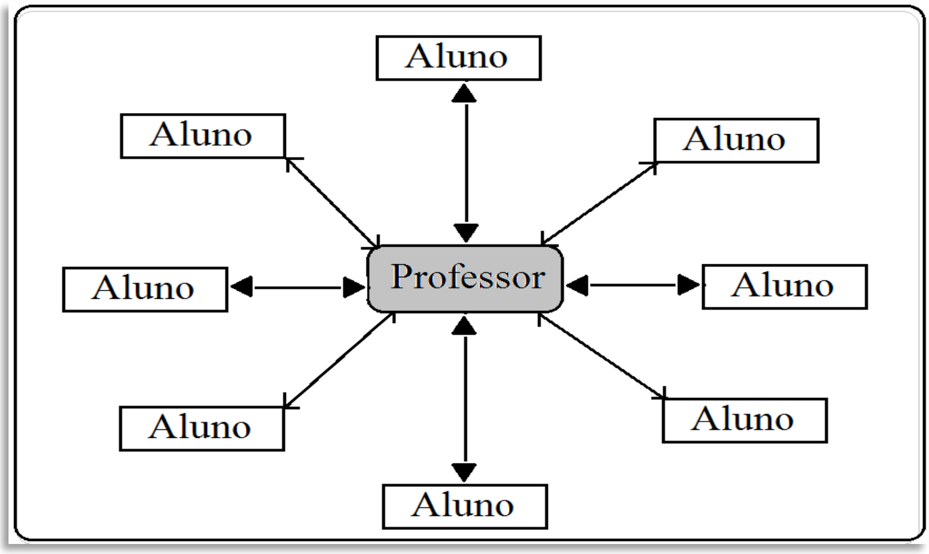
Ao participar do processo de maturação, o aluno absorve informações duradouras, oportunizando assim uma aprendizagem significativa.

Solução

Após o período de Maturação, este é o momento quando os alunos devem organizar e sistematizar modelos que visam solucionar o problema. Nas regras impostas pelo Professor, ele há de ter deixado claro como seriam essas apresentações – se escritas, comentadas ou até mesmo mediante gráficos. A Solução é outra fase de bastante interação, em que o Professor irá estimular seus alunos a mostrar e justificar a escolha do caminho trilhado na etapa anterior. Na ocasião, como mediador, o Professor analisa com os alunos todos os modelos apresentados e, juntos, terão oportunidade de concluir qual a resolução mais adequada.

Na Tomada de Posição, conforme apresentamos anteriormente, ocorre uma interação multilateral, em que todos possuem o mesmo papel, já na Solução, a interação é bilateral, ou seja, o Professor assume seu papel de líder, uma vez que é ele o detentor do conhecimento.

Figura 16 – Relação entre Professor e alunos no momento da Solução



Fonte: Construção própria

Reconhecemos que nessa fase os alunos podem cometer erros, contudo, cabe ao Professor torná-los conscientes do fato e, assim, além de entender o motivo do seu erro, o aluno tomará conhecimento do caminho correto.

Prova

Somente na última fase da S.F., nomeada como Prova, é que o Professor formaliza o modelo matemático correspondente à situação problema citada inicialmente e ensina aos seus alunos.

Ao compararmos a postura que o Professor adota seguindo as etapas da S.F. com o ensino tradicional, percebemos que, em geral, os Professores passam apenas pelas fases: Tomada de Posição e Prova. Assim, muitas vezes, poupando os alunos de desenvolverem seus próprios raciocínios.

Em sua pesquisa de mestrado, Santos (2007) trabalhou com a S.F, em que fez uma relação com a Teoria de Piaget, conforme ilustração abaixo:

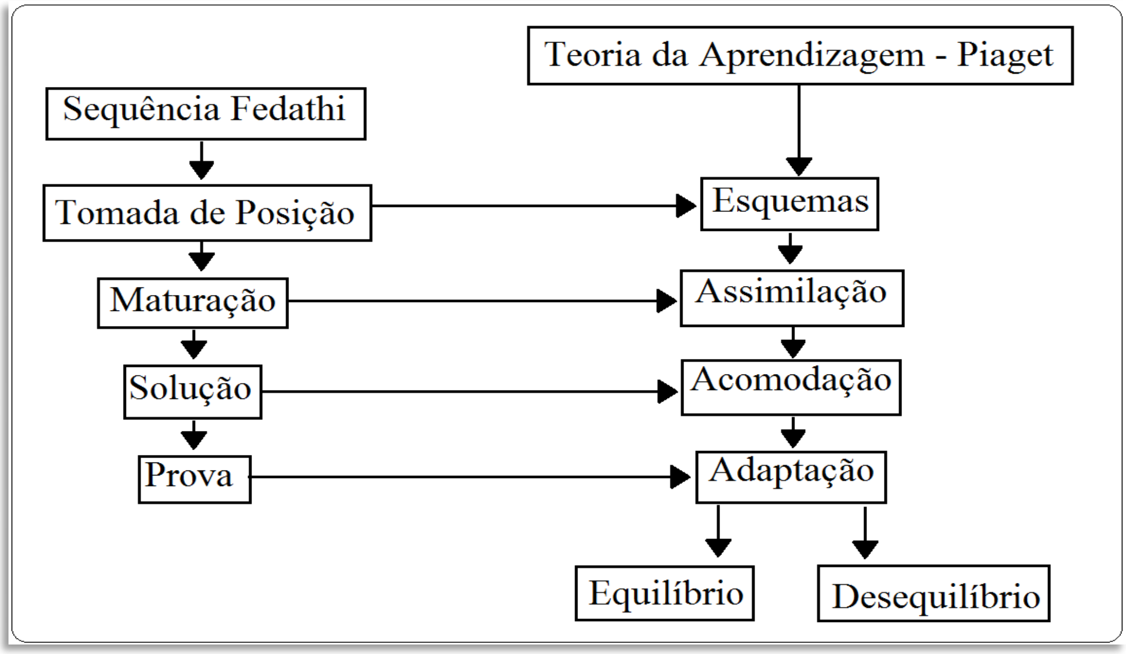


Figura 17 – Sequência Fedthi x Teoria de Piaget – Santos, 2007
Fonte: Construção própria

Figura 18 – Relação Fedathi x Piaget.

Fedathi x Piaget

Percepção de aprendizagem	Construtivista	Construtivista
Pesquisadores	Piaget (Psicologia Cognitiva e Epistemologia Genética)	Fedathi (mais técnico, porém não despreza o psicológico)
Conhecimentos	O conhecimento é construído individualmente considerando esquemas anteriores.	O conhecimento se constrói mediado pelo professor e pelo meio(ferramentas).
Aprendizagem	Construção ativa, que se dá por meio de reestruturação de conhecimentos já elaborados.	Construção cooperativa, construída com a ajuda dos colegas, do professor e do meio.
Ensino	Descobertas e interação do sujeito com o objeto extraído da realidade	Construção coletiva, ou individual.(Intuicionismo)
Papel do professor	Facilitador / observador	Mediador/ co-participante
Papel dos outros indivíduos	Não necessários, mas podem estimular o raciocínio.	Importante, pois podem suscitar questionamentos que facilitarão os desequilíbrios/equilíbrios.

Fonte: Santos (2007, p.56)

Sendo uma das participantes do grupo Fedathi, a autora, que tem um vasto domínio sobre essa metodologia, evidencia as reflexões da S.F, ainda em comparação com a Teoria de Piaget, na figura 18.

Diante do exposto, propomos uma abordagem, embasada pela S.F., que visa imprimir ênfase na visualização e reconhecimento/distinção de padrões gráfico-geométricos relativos às Técnicas de Integração. Desta maneira, recorrendo ao software Geogebra pretendemos apresentar, sobretudo, seus aspectos visuais e qualitativos em foco.

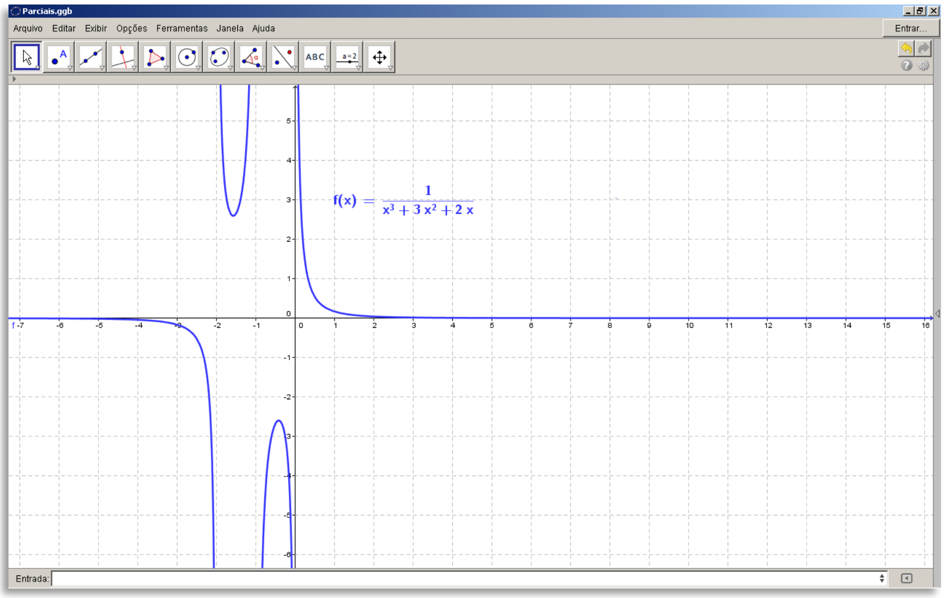
3.2 Sessões didáticas

Com base na Sequência Fedathi e com a preocupação de explorarmos os padrões gráfico-geométricos relativos às Técnicas de Integração, apresentaremos algumas sessões didáticas que servirão como propostas de abordagens para trabalhar a visualização do comportamento do gráfico das funções integrandas – permitindo sugerir uma Técnica de Integração baseada, também, na visualização do seu gráfico.

Para compreensão da nossa forma de abordagem, o professor precisa deixar claro que o aluno deverá ter domínio de conteúdos, tais como: Função, Gráficos, Limites, Continuidade, Assíntotas e Técnicas de Integração.

SESSÃO DIDÁTICA I

Figura 19 – Gráfico da função citada na sessão didática I



Fonte: Elaboração própria

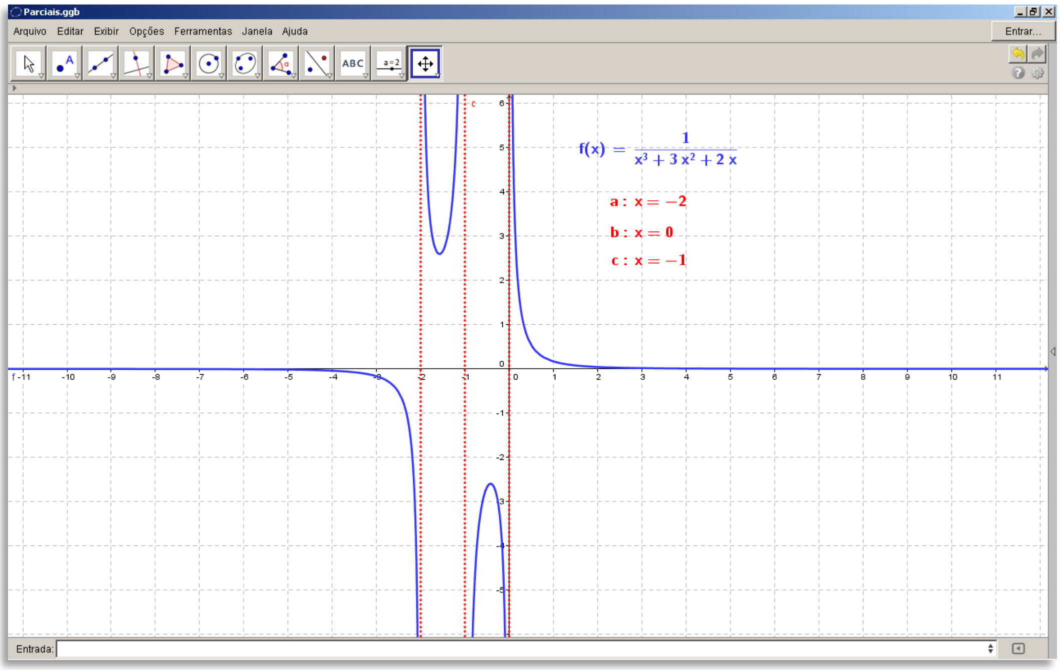
Tomada de Posição: Discutir, por meio da visualização do seu gráfico, figura 19, a integral da função f.

Objetivo:

- Perceber, por meio do comportamento do gráfico da função, qual Técnica de Integração será mais conveniente no procedimento algébrico.

Maturação: Analisar o comportamento do gráfico.

Figura 20 – Assíntotas ao gráfico da função citada na sessão didática I



Fonte: Elaboração própria

Objetivo:

- Extrair o máximo de informações possíveis para em seguida verificar quais serão úteis. Ressaltamos que nesta fase, todas as análises são importantes, pois permitem uma constatação dos conhecimentos prévios e encaminha para nosso foco principal. Vejamos:

- Existem três assíntotas verticais ao gráfico;
- Não há interseção com os eixos coordenados;
- A função apresenta imagem positiva quando: $-2 < x < -1$ ou $x > 0$;
- A função apresenta imagem negativa quando: $x < -2$ ou $-1 < x < 0$;
- A função não está definida para: $x = -2,\ x = -1$ ou $x = 0$.

Solução: Apresentar quais aspectos geométricos indica a Técnica Integração de Funções Racionais por Frações Parciais.

Objetivo:

- De todas as análises feitas na fase anterior, Maturação, o professor deverá explicitar os aspectos geométricos que induz à utilização da Técnica de Integração de Funções Racionais por Frações Parciais.

- A função é descontínua nos pontos em que ocorrem assíntotas verticais;
- Existe apenas uma quantidade finita de assíntotas verticais;
- Nem sempre é verificada a condição: F'(a) = f(a), para todo a real.

Prova: Discutir a integral $\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}dx$.

Objetivo:

- Após ser induzido a recorrer à Técnica de Integração de Funções Racionais por Frações Parciais, a integral deverá ser desenvolvida mediante o procedimento algébrico.

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}dx = ?}$$

Chamando a função integranda de f, temos: $f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2+2x}$.

Fatorando o denominador, podemos reescrevê-la como:

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

Para encontrarmos os valores das constantes A, B e C ∈ ℝ, vamos utilizar Limites (conteúdo estudado antes das Integrais).

Buscando o valor de A:

$$\frac{x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{Ax}{x} + \frac{Bx}{(x+1)} + \frac{Cx}{(x+2)}$$

Aplicando o limite quando x tende a zero nos dois membros, obtemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{Ax}{x} + \frac{Bx}{(x+1)} + \frac{Cx}{(x+2)}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{Ax}{x} + \frac{Bx}{(x+1)} + \frac{Cx}{(x+2)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{Ax}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{Bx}{(x+1)} + \lim_{x\to 0}\frac{Cx}{(x+2)} = A$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Buscando o valor de B:

$$\frac{(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+1)}{x} + \frac{B(x+1)}{(x+1)} + \frac{C(x+1)}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \left[\frac{A(x+1)}{x} + \frac{B(x+1)}{(x+1)} + \frac{C(x+1)}{(x+2)} \right]$$

$$\lim_{x\to -1} \left[\frac{A(x+1)}{x} + \frac{B(x+1)}{(x+1)} + \frac{C(x+1)}{(x+2)} \right] = \lim_{x\to -1} \frac{A(x+1)}{x} + \lim_{x\to -1} \frac{B(x+1)}{(x+1)} + \lim_{x\to -1} \frac{C(x+1)}{(x+2)} = B$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = -1$$

$$B = -1$$

E, de forma análoga, buscando o valor de C:

$$\frac{(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{x} + \frac{B(x+2)}{(x+1)} + \frac{C(x+2)}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \left[\frac{A(x+2)}{x} + \frac{B(x+2)}{(x+1)} + \frac{C(x+2)}{(x+2)} \right]$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{A(x+2)}{x} + \lim_{x\to -2} \frac{B(x+2)}{(x+1)} + \lim_{x\to -2} \frac{C(x+2)}{(x+2)} = C$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{2}$$

Encontrados os valores das constantes, podemos enxergar a função f como:

$$\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{(-1)}{(x+1)} + \frac{1/2}{(x+2)}$$

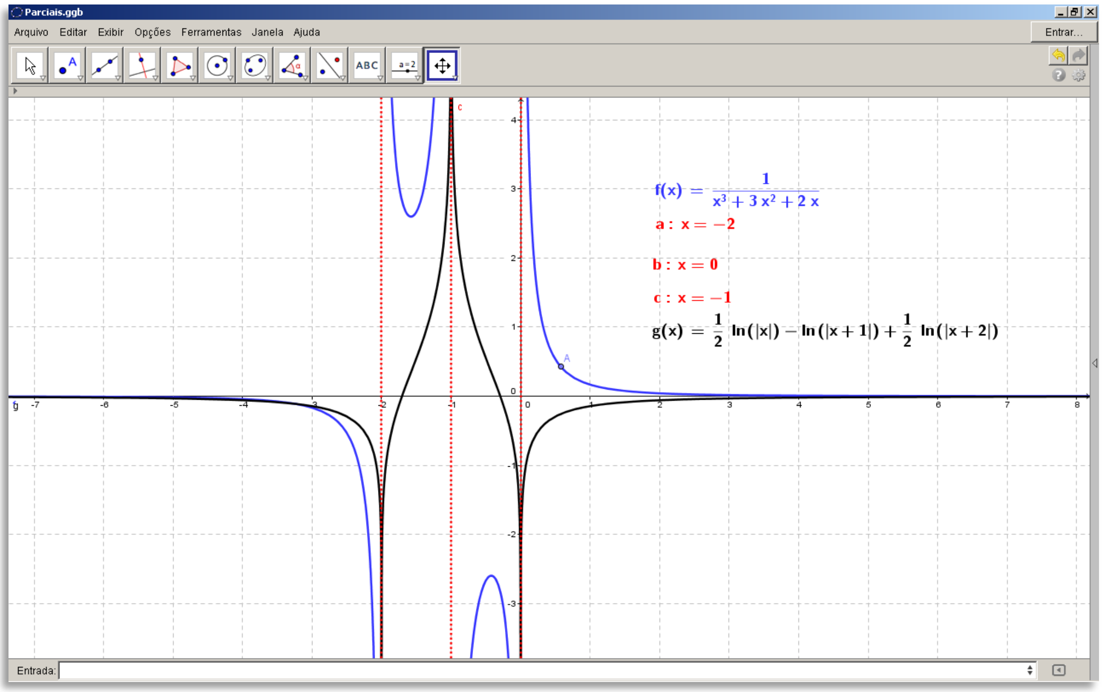
Assim:

$$\int \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx = \int \frac{1/2}{x} + \frac{(-1)}{(x+1)} + \frac{1/2}{(x+2)} dx = \int \frac{1/2}{x} dx + \int \frac{(-1)}{(x+1)} dx + \int \frac{1/2}{(x+2)} dx$$

$$\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + k$$

Visualização da função $f(x) = \dfrac{1}{x^3+3x^2+2x}$ e da sua primitiva $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \dfrac{1}{2}\ln|x+2| + k$:

Figura 21 – Gráfico das funções trabalhadas na sessão didática I



Fonte: Elaboração própria

Para encontrar a primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^3+3x^2+2x}$ adotamos um procedimento diferenciado daqueles apresentados nos livros didáticos. No nosso caso, utilizamos os conceitos de Limites e Derivadas, uma vez que esses assuntos antecedem o conteúdo de Integração.

Tabela 2 – Aspectos algébricos e geométricos da Integração de funções racionais por frações parciais

Técnica de Integração	***Aspectos Algébricos***	***Aspectos Geométricos***
Integração de funções	Identificação das	As funções são descontínuas nos

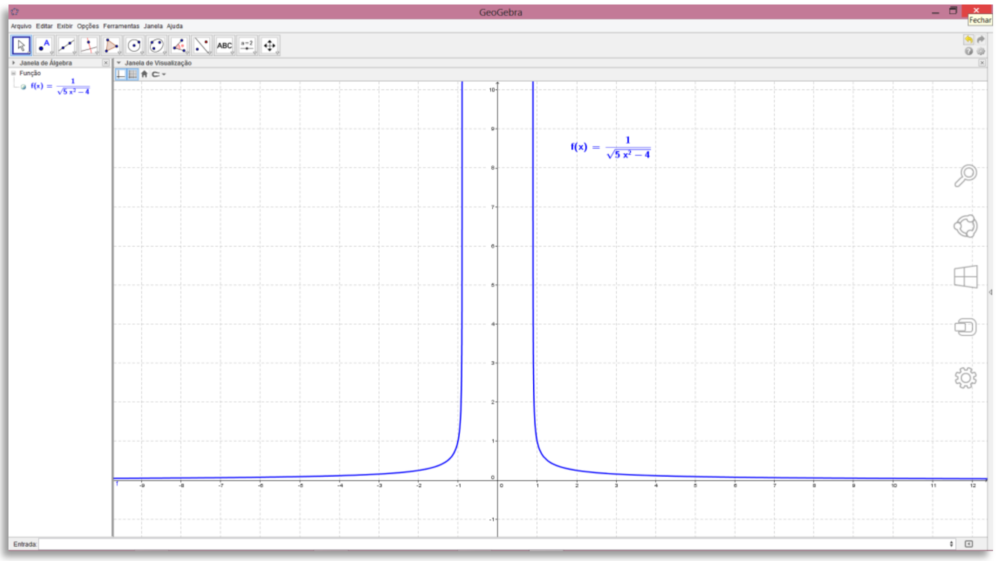
racionais por frações parciais	raízes da função do denominador e, assim, a divisão das funções polinomiais.	pontos em que ocorrem as assíntotas verticais (que são finitas). Nem sempre verificamos a condição $F'(a) = f(a), \forall\, a \in \mathbb{R}$ (nessas regiões o método não pode ser empregado).

Fonte: Elaboração própria

SESSÃO DIDÁTICA II

Tomada de Posição: Segundo a integral definida $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx$, discutir a região de integração.

Figura 22 – Gráfico da função citada na sessão didática II



Fonte: Elaboração própria

Objetivos:

i) Encontrar, por meio algébrico, a integral indefinida;

ii) Recorrer a visualização do gráfico da integral indefinida, para discutir a região de integração.

Maturação: Explorar os padrões gráficos-geométricos em busca da integral indefinida.

Objetivo:

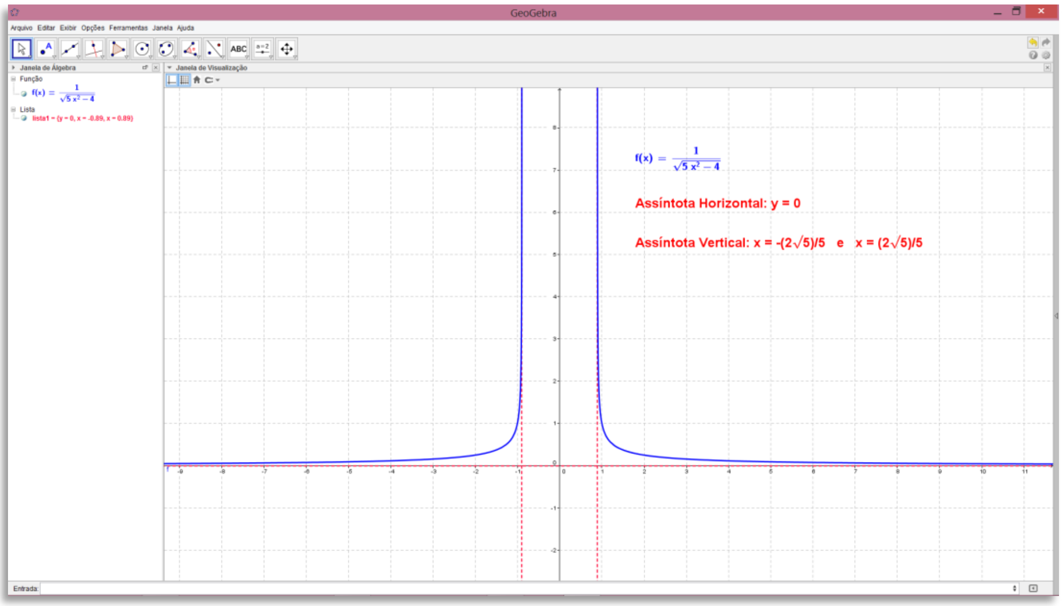
- Identificar qual Técnica de Integração será mais adequada para encontrar a integral definida;

Solução: Constatar que o método mais conveniente para encontrar a integral $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 4}}\,dx$ é: Substituição Trigonométrica.

Objetivo:

- Explorar os padrões algébricos e geométricos que indicam recorrer à Substituição Trigonométrica.

Figura 23 – Assíntotas ao gráfico da função citada na sessão didática II



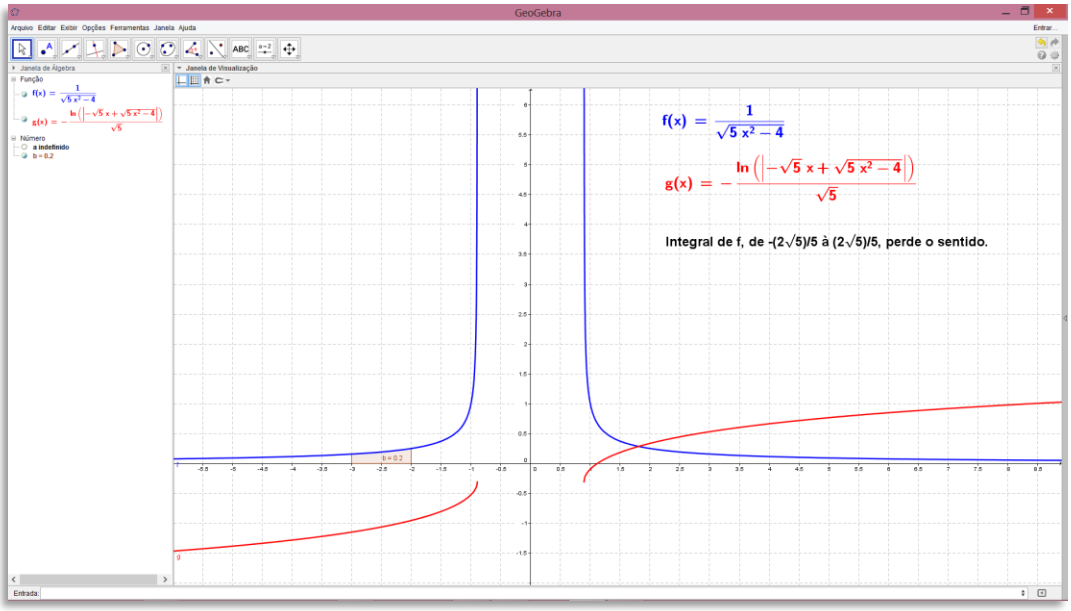
Fonte: Elaboração própria

Prova: Comentar a região de integração.

Objetivo:

- Apresentar o intervalo que a integral definida $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 4}}\,dx$ perde o sentido. Por meio da visualização do gráfico da integral indefinida e, no caso das nossas videoaulas, com a animação do controle deslizante que utilizamos no Geogebra, podemos observar que há um intervalo em que não é possível encontrar a integral definida, conforme figura 24.

Figura 24 – Região de integração relacionada com a sessão didática II



Fonte: Elaboração própria

SESSÃO DIDÁTICA III

Tomada de Posição: Descrever uma comparação dos aspectos algébricos e geométricos envolvidos na Técnica de Integração por Partes – tomando como exemplo o caso da integral $\int x.\cos(5x)\,dx$.

Objetivos:

i) Reconhecer quando a Técnica adequada é a de Integração por Partes;

ii) Verificar os padrões geométricos que sugerem recorrer à Integração por Partes.

Maturação: Recorrer às Técnicas de Integração em busca de identificar qual será a mais conveniente e observar o comportamento do gráfico da função integranda.

Objetivo:

- Despertar o raciocínio referente à identificação do procedimento eficaz.

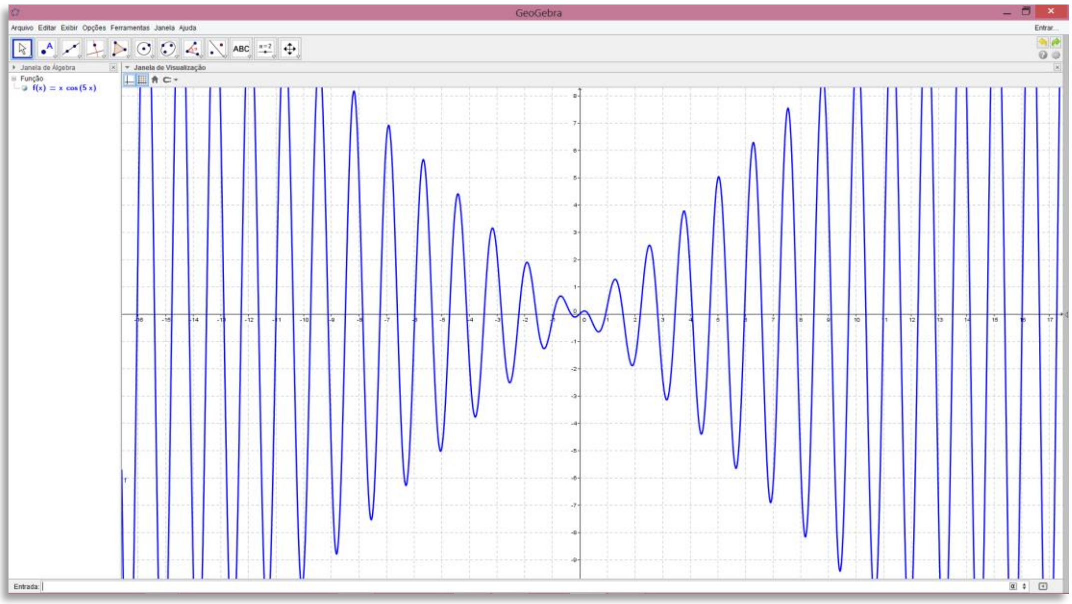
Solução: Apresentar as características algébricas e geométricas que sugerem a Técnica de Integração Por Partes.

Objetivos:

i) Resolver, por meio algébrico, a integral $\int x.\cos(5x)\ dx$.

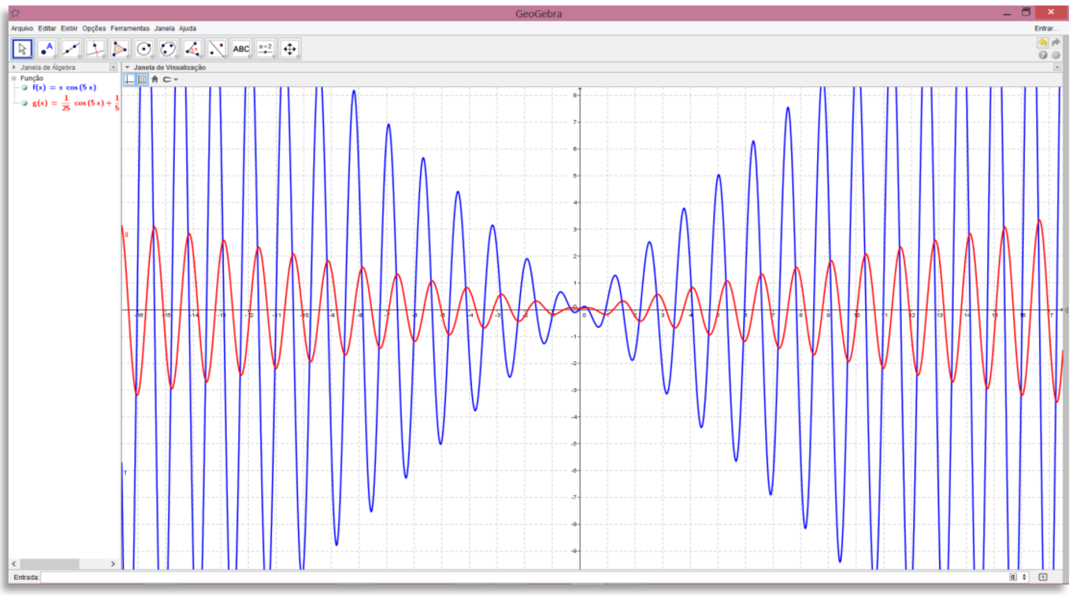
ii) Apresentar os gráficos da função $f(x) = x.\cos(5x)$ e da sua primitiva $g(x) = \frac{1}{5}x\,.\left(\operatorname{sen} 5x\right) + \frac{1}{25}\left(\cos 5x\right).$

Figura 25 – Gráfico da função integranda citada na sessão didática III



Fonte: Elaboração própria

Figura 26 – Gráficos explorados na sessão didática III



Fonte: Elaboração própria

Prova: Apresentar uma tabela comparativa dos aspectos algébricos e geométricos relativos à Técnica de Integração por Partes.

Tabela 3 – Aspectos algébricos e geométricos da Integração por Partes

Técnica de Integração	*Aspectos Algébricos*	*Aspectos Geométricos*
Integração por Partes $\int f(x).g(x)dx$ $\int u\,dv = uv - \int v\,du$	A escolha dos fatores u e dv são determinantes para a simplificação e solução da integral.	O caráter de continuidade e diferenciabilidade das funções f(x) e F(x) se sobressaem; Não há assíntotas verticais. Em cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sempre existe a integral definida; Há periodicidade no gráfico.

Fonte: Elaboração própria)

SESSÃO DIDÁTICA IV

Tomada de Posição: Estudar os padrões gráfico-geométricos relativos à Técnica de Integração Substituição Trigonométrica.

Objetivo:

- Partindo dos padrões algébricos que induzem a utilização da Técnica Substituição Trigonométrica, reconhecer quais são os padrões gráfico--geométricos das integrais abaixo:

i. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ ii. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

iii. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ iv. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx$

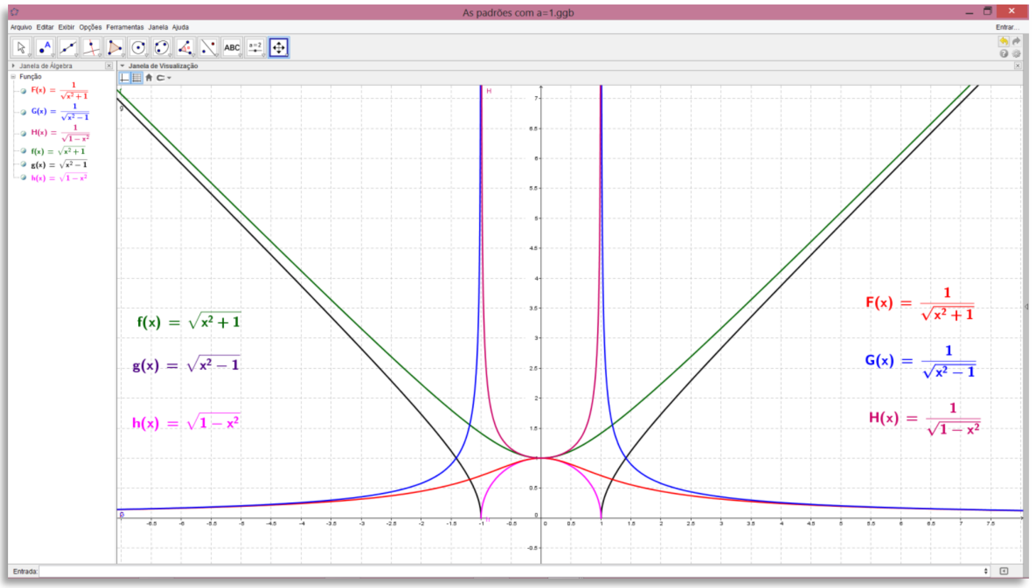
v. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$ vi. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$

Maturação: Recorrer ao Geogebra para estudar características dos gráficos dessas funções (para visualizarmos estes gráficos, tomaremos, por ora, a = 1).

Objetivo:

- Analisar o comportamento do gráfico de cada função citada em "Tomada de Posição".

Figura 27 – Padrões geométricos da Substituição Trigonométrica

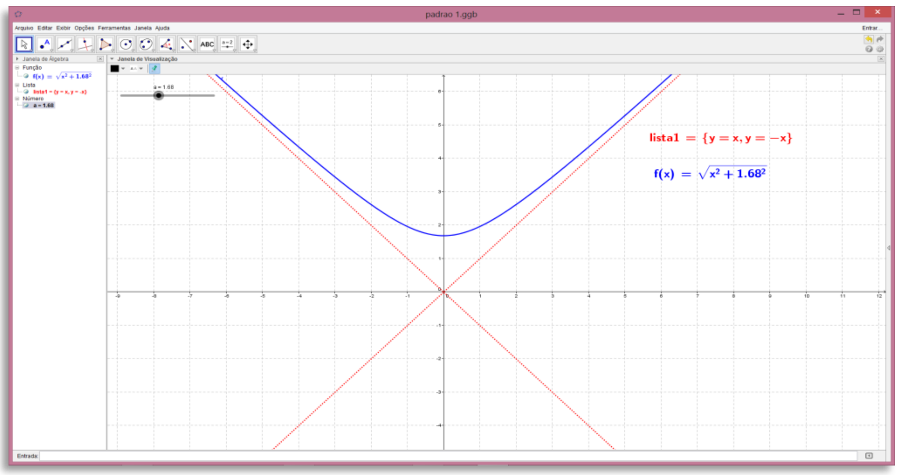


Fonte: Elaboração própria

Solução: Enumerar as características padrões que ocorrem nos casos abordados.

i. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$

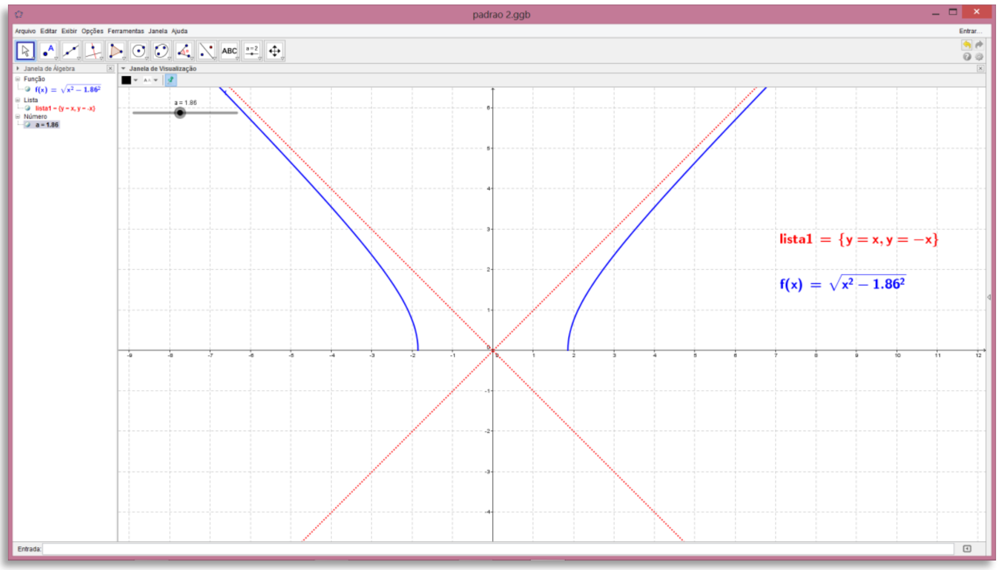
Figura 28 – Caso i. da Substituição Trigonométrica



Fonte: Elaboração própria

ii. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

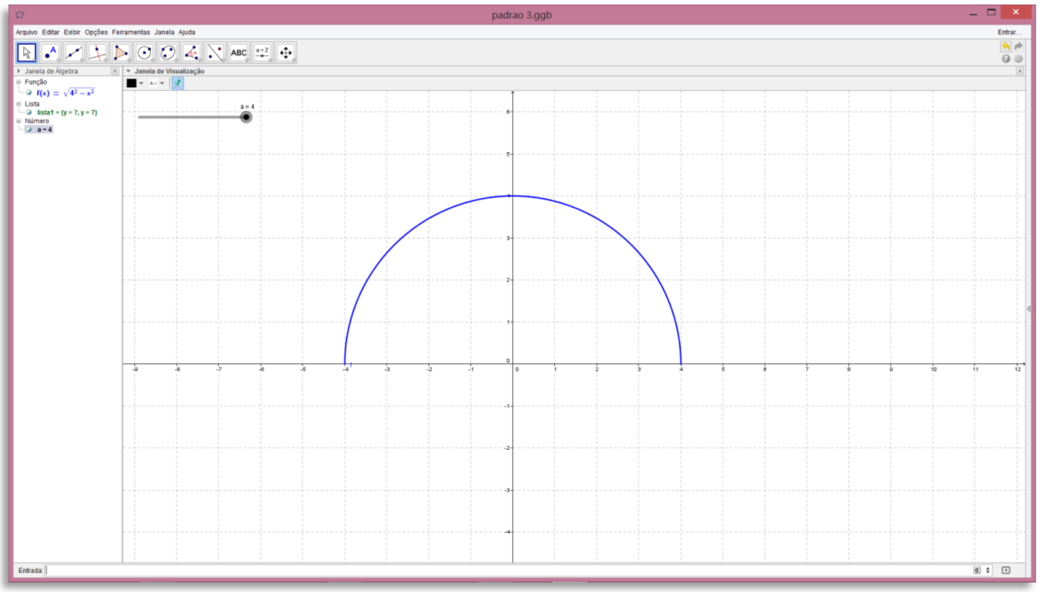
Figura 29 – Caso ii. da Substituição Trigonométrica



Fonte: Elaboração própria

iii. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

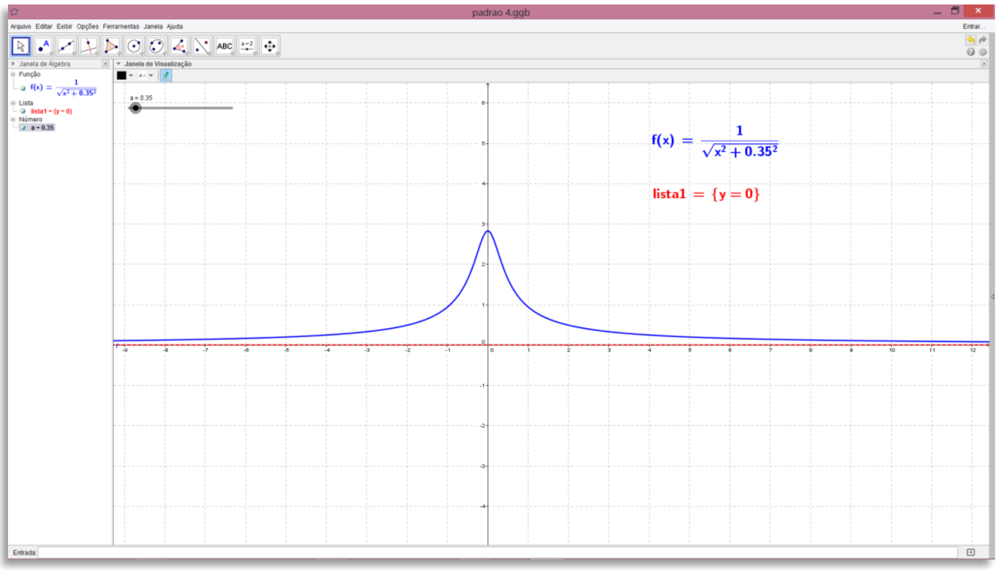
Figura 30 – Caso iii. da Substituição Trigonométrica



Fonte: Elaboração própria

iv. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx$

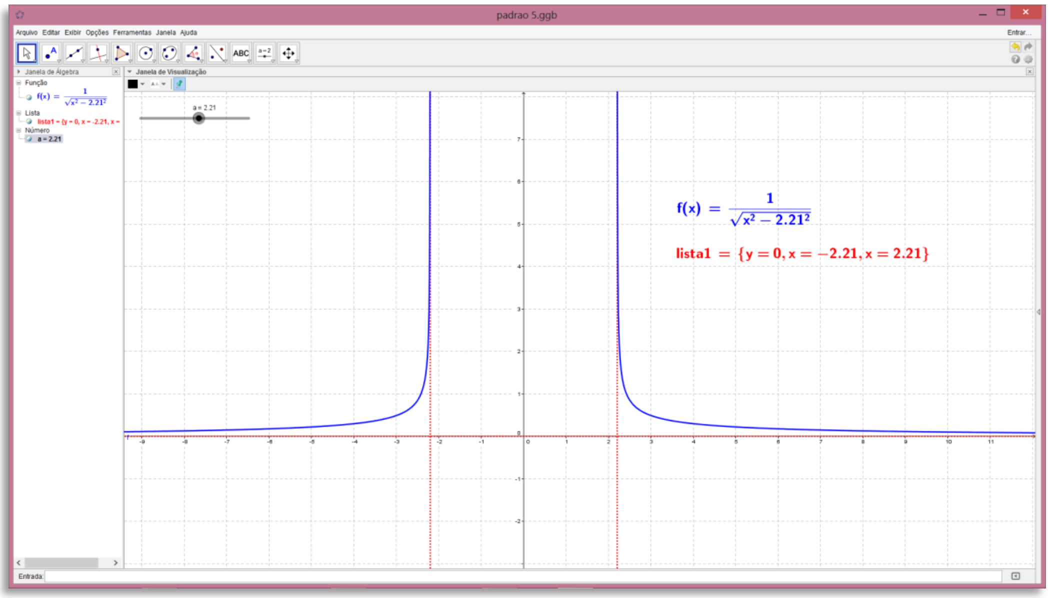
Figura 31 – Caso iv. da Substituição Trigonométrica



Fonte: Elaboração própria

v. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$

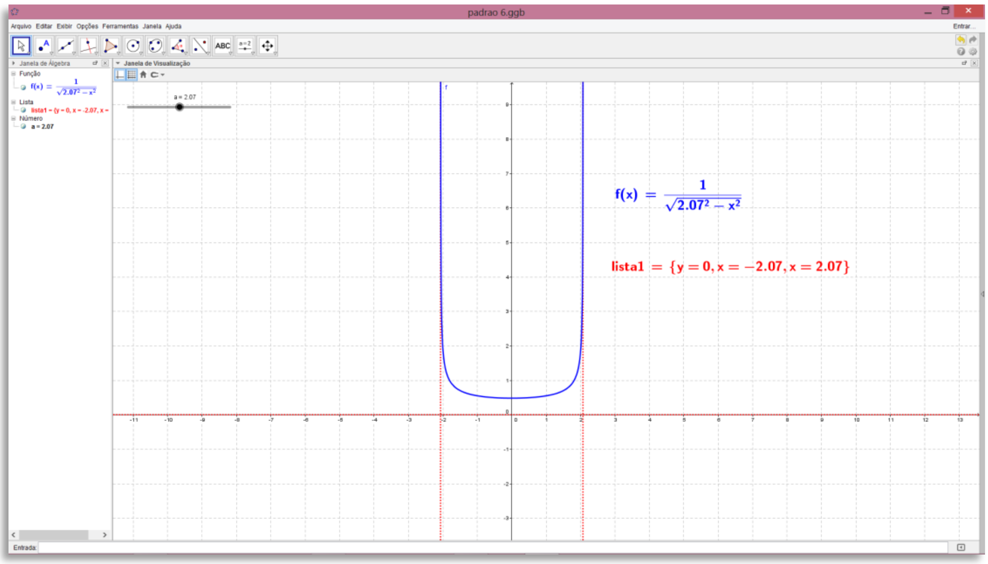
Figura 32 – Caso v. da Substituição Trigonométrica



Fonte: Elaboração própria

vi. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

Figura 33 – Caso vi. da Substituição Trigonométrica



Fonte: Elaboração própria

Prova: Elaborar uma tabela que contenha informações, referentes à visualização do gráfico, capazes de sugerir o uso da Técnica de Integração Substituição Trigonométrica.

Tabela 4 –Aspectos algébricos e geométricos da Integração por Substituição Trigonométrica

Técnica de Integração	***Aspectos Algébricos***	***Aspectos Geométricos***
Substituição Trigonométrica	Aplicação das identidades algébricas trigonométricas	Há periodicidade no gráfico nas regiões em que podemos definir a função inversa trigonométrica. Não ocorrem assíntotas verticais. Nem sempre verificamos a condição $F'(a) = f(a), \forall\, a \in \mathbb{R}$ (nessas regiões o método não pode ser empregado).

Fonte: Elaboração própria

SESSÃO DIDÁTICA V

Tomada de Posição: Calcular a integral indefinida $\int \mathrm{x}(\mathrm{x}^2 - 1)^3 \mathrm{dx}$. Em seguida, ilustrar e verificar se a resposta é razoável fazendo o gráfico da função e da sua primitiva (tome $\mathrm{C} = 0$).

Objetivos:

i) Verificar qual Técnica de Integração é a mais adequada;
ii) Estudar o comportamento dos gráficos das funções envolvidas;
iii) Analisar a região de integração (integral definida).

Maturação: Investigar qual Técnica de Integração será útil para encontrarmos a primitiva da função $f(x) = x\,(x^2 - 1)^3$, em seguida recorrer ao Geogebra para visualizarmos os gráficos das funções.

Partindo de Técnicas mais simples para as mais complexas, na tentativa de encontrarmos a primitiva da função *f*, analisemos:

a) A integral é imediata? Não, pois não conseguimos enxergar de imediato quem é a função, cuja derivada é igual à função f.

b) Não sendo imediata, partiremos para a Técnica de Substituição de Variáveis.

$\int x(x^2 - 1)^3\, dx$ = ?

Fazendo $x^2 = u \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{2} = xdx.$

Assim: $\int x(x^2 - 1)^3\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \int (x^2 - 1)^3\, xdx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int (u - 1)^3\, du.$

Fazendo, agora, $(u - 1) = v \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{du} = 1 \quad \Longrightarrow \quad du = dv$, temos:

$$\int x(x^2 - 1)^3\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int (u - 1)^3\, du \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int v^3\, dv \; = \; \frac{1}{2} \cdot \frac{v^4}{4}$$

Voltando à variável x, teremos:

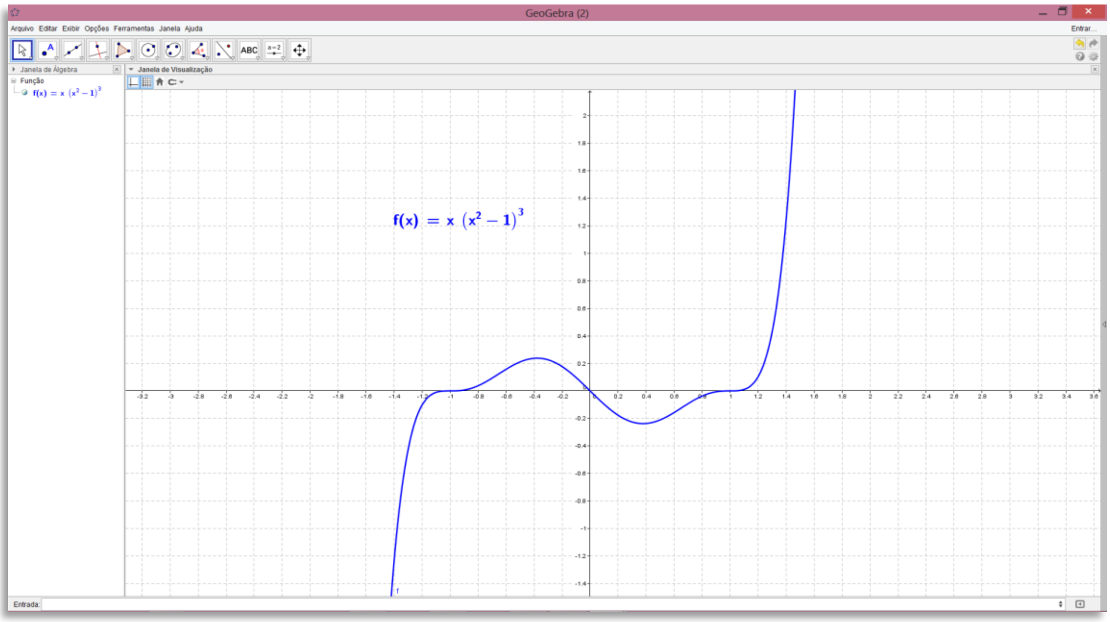
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v^4}{4} \; = \; \frac{1}{8} \cdot (u - 1)^4 \; = \; \frac{1}{8} \cdot (x^2 - 1)^{\,4}$$

Logo: $\int x(x^2 - 1)^3\, dx \; = \; \frac{1}{8} \cdot (x^2 - 1)^{\,4}$

(Estamos tomando C = 0).

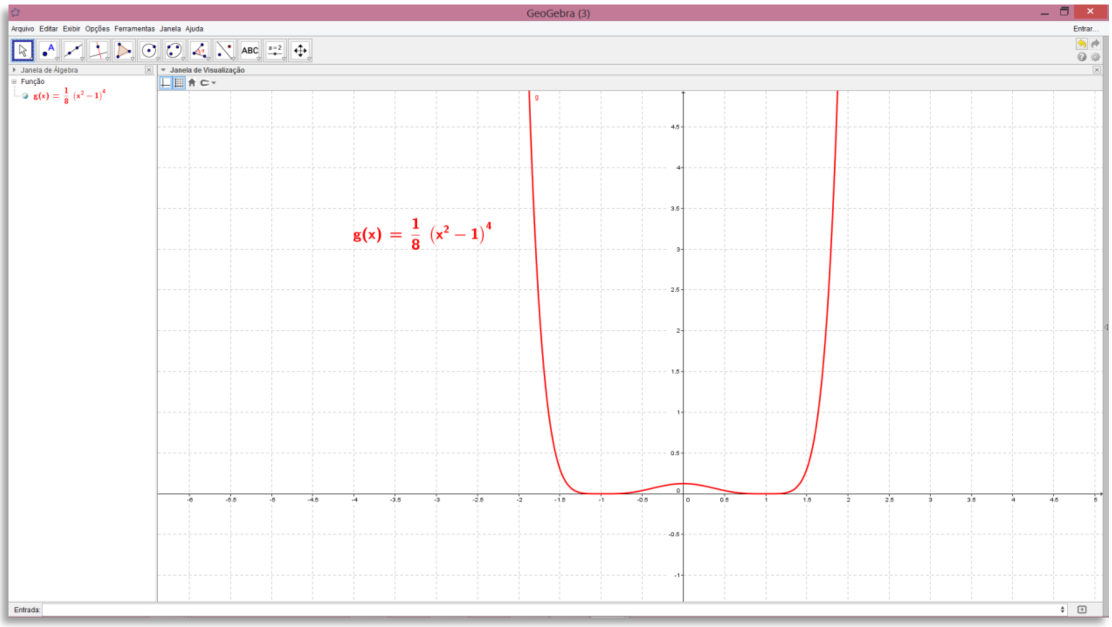
Chamaremos de g a função encontrada, ou seja, $g(x) = \frac{1}{8} . (x^2 - 1)^{\,4}$.

Figura 34 – Gráfico da função sugerida na sessão didática V



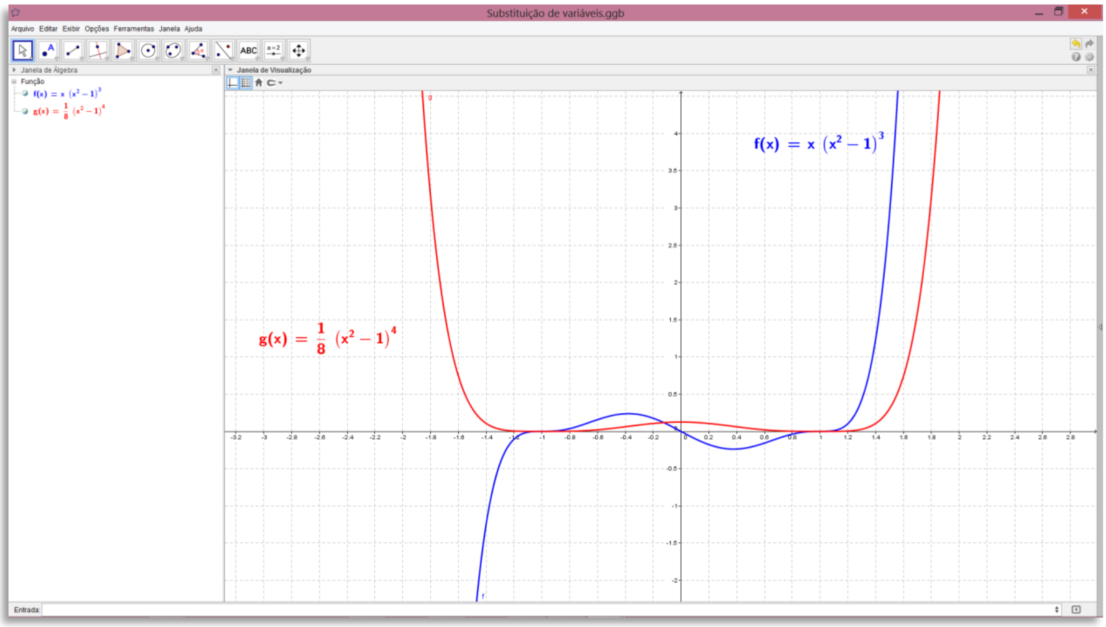
Fonte: Elaboração própria

Figura 35 – Gráfico da primitiva da função sugerida na sessão didática V



Fonte: Elaboração própria

Figura 36 – Gráfico das funções estudadas na sessão didática V



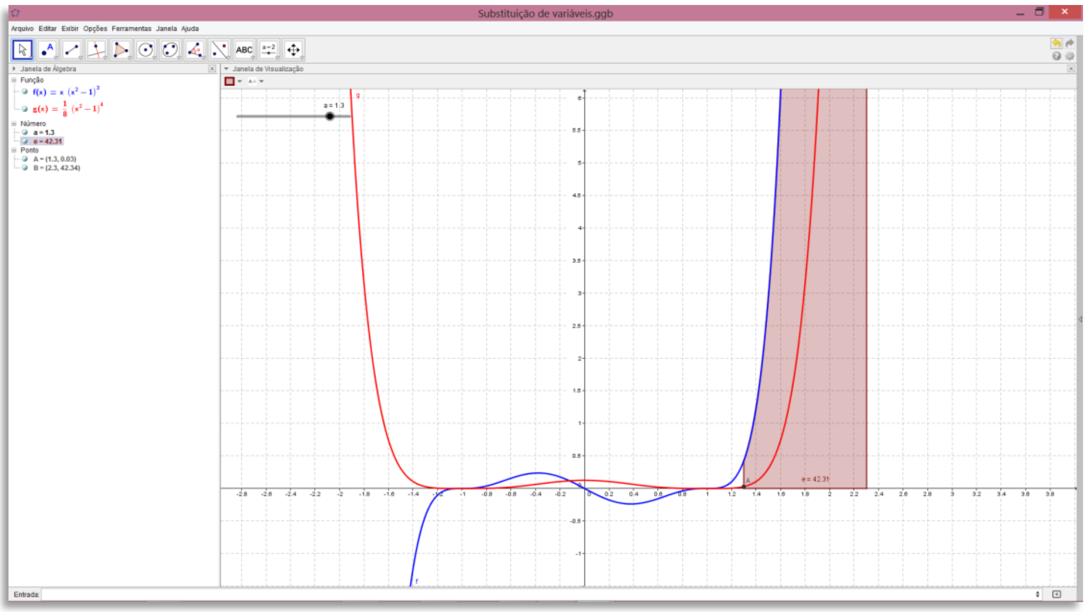
Fonte: Elaboração própria

Solução: Determinar um intervalo para o cálculo da integral definida.

Digamos $\int_{1,3}^{2,3} x\,(x^2-1)^3 dx$, ou seja $[1{,}3; 2{,}3] \subset \mathbb{R}$

Vejamos:

Figura 37 – Integral definida relacionada com a sessão didática V



Fonte: Elaboração própria

$$\int_{1,3}^{2,3} x\,(x^2-1)^3 dx \;=\; \left[\frac{1}{8}(x^2-1)^4\right]_{1,3}^{2,3} = \left[\frac{1}{8}(2{,}3^2-1)^4\right] - \left[\frac{1}{8}(1{,}3^2-1)^4\right]$$

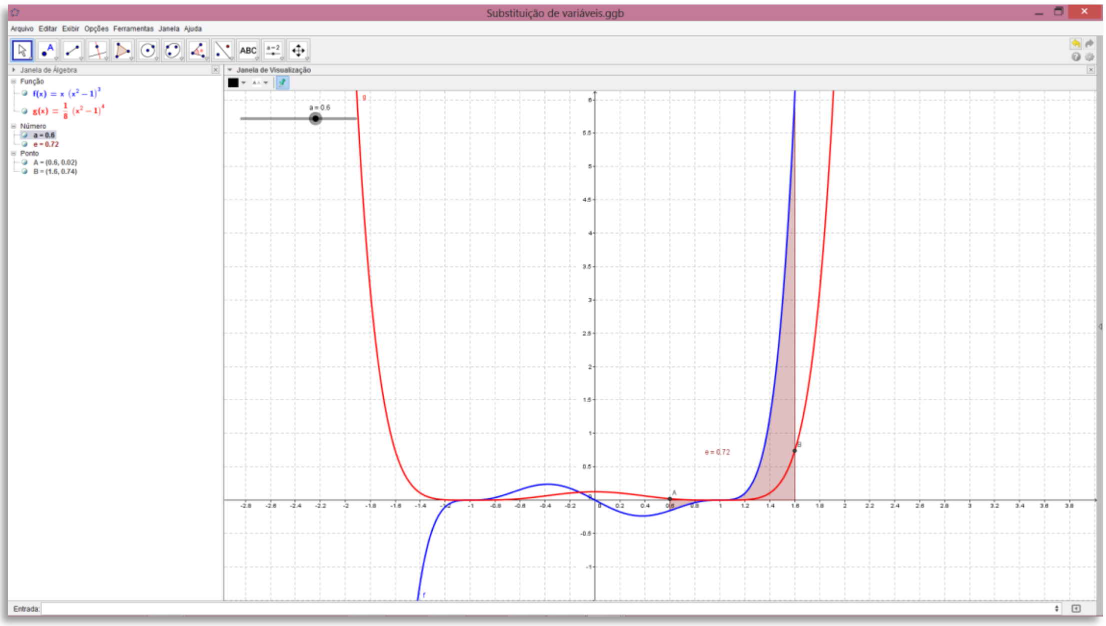
$$= \;42{,}31$$

Prova: Explorar a região de integração.

Existe a integral definida em todo intervalo real, pois a função g é sempre contínua.

Ver outro exemplo:

Figura 38 – Região de integração estudada na sessão didática V



Fonte: Elaboração própria

Todas as sessões didáticas desenvolvidas neste trabalho tratam-se de propostas para que o professor adapte às suas aulas. Para uma melhor compreensão, desenvolvemos videoaulas em que expomos detalhes de abordagem.

No próximo capítulo teremos a oportunidade de comentarmos sobre nosso produto educacional, gerado a partir da experiência, pesquisa e desenvolvimento de cada parte que compõe nossa dissertação.

4 PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional que apresentamos traz uma sugestão de abordagem para as Técnicas de Integração com a utilização do software Geogebra por meio da Sequência Fedathi. Esse é o resultado gerado a partir da nossa investigação acerca da metodologia adotada pelos autores Stewart, Guidorizzi, Leithold e do material de apoio trabalhado dentro da Disciplina de C.D.I do Curso Licenciatura em Matemática do IFCE-Juazeiro do Norte.

Nosso interesse é apresentar um material que complete e revitalize a forma de ensino do conteúdo Técnicas de Integração, a saber: Substituição de variável, Por Partes, Frações Parciais e substituição Trigonométrica.

Por se tratar de um Mestrado Profissional, os trabalhos de conclusão devem, obrigatoriamente, gerar um produto educacional que contribua para a melhoria do Ensino de Ciências e Matemática e possa ser usado por outros professores.

> O trabalho de conclusão e o produto educacional: ainda que se mantenha a nomenclatura de dissertação, a natureza do trabalho de conclusão do mestrado profissional é distinta da do acadêmico; trata-se do relato de uma implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino em uma área específica de Ciências ou Matemática. O mestrando deve desenvolver, por exemplo, alguma nova estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos, um aplicativo, um ambiente virtual, um texto; enfim, um processo ou produto de natureza educacional e implementá-lo em condições reais de sala de aula ou de espaços não formais ou informais de ensino (MOREIRA, NARDI, 2009, p. 4).

Procuramos repensar nossa postura a respeito da transmissão dos conteúdos. Restringimos, no corrente trabalho, o assunto Técnicas de Integração, a metodologia de ensino da Sequência Fedathi e a inserção do Geogebra – como ferramenta de apoio para explorar a visualização do comportamento dos gráficos de funções.

Nosso Produto Educacional trata de videoaulas, em que cada uma possui a respectiva sessão didática com o passo a passo da Sequência Fedathi. Elas foram disponibilizadas no “site” endereçado como www.calculocomvisualizacao.com.br. A seguir, iremos expor como agimos para a gravação dessas videoaulas.

4.1 Design de Elaboração das Videoaulas

O assunto Produção de Videoaulas de Matemática foi tratado no III Seminário de Extensão, Ensino, Pesquisa e Inovação do IFPR. Buscando avanços nas Tecnologias de Informação e Comunicação, em que um dos focos era a produção de videoaulas, tendo sido apontada pelos discentes como um meio de enfrentar as dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem. Conforme relatado pela comissão responsável por abordar o tema, a confecção destes materiais permitirá maior interação entre os participantes do processo educacional e maior relação entre teoria e prática. A confecção de videoaulas de matemática é uma opção para minimizar as dificuldades com relação à disciplina, buscando a maior interação entre professor e aluno, permitindo um ambiente escolar propício para a aprendizagem.

Antes de iniciarmos as gravações das aulas, planejamos cada detalhe visando sempre ao nosso principal objetivo – abordar as Técnicas de Integração explorando, além dos seus aspectos algébricos, seus padrões gráfico-geométricos. Seguimos o seguinte critério:

a) *Selecionar uma situação problema*

   Cada problema está relacionado com o assunto Técnicas de Integração. Por exemplo, resolver uma integral indefinida, analisar a região de integração, reconhecer os padrões gráficos que sugerem recorrer a uma determinada Técnica de Integração, dentre outros – sendo que nossa abordagem é sempre a exploração visual dos gráficos das funções relacionadas.

b) *Colocarmo-nos como aluno para fazer os possíveis levantamentos de dados que ajudariam a solucionar a questão*

   De acordo com nossa experiência com os alunos, e também na nossa experiência quando alunos, pensamos em quais seriam as possíveis maturações daquele que está sendo desafiado a solucionar a situação problema. Independente de algum levantamento ser (in)útil na solução, deixamos claro que tudo o que é percebido tem importância.

c) *Enfatizar os levantamentos que possibilitam chegar a uma conclusão*

   Daqueles levantamentos feitos, nosso papel é ressaltar aqueles que serão necessários para a resolução do problema. Munidos desses detalhes, até esta etapa nós já atingimos uma visão ampla, faltando apenas organizar a reposta final.

d) *Responder à situação-problema*

Após as análises feitas, apresentamos a solução do questionamento inicial. Na ocasião, também é sugerido que a experiência adquirida, seja aplicada em situações semelhantes.

e) *Construir os gráficos no Geogebra*

A versão do Geogebra utilizada nas construções é a 5.0. Como trabalhamos muito com a questão da visualização, na busca de tentarmos atrair a atenção dos expectadores, inserimos cores nos gráficos e, quando oportuno, animações mediante os controles deslizantes.

f) *Organizar os slides*

Nossas videoaulas seguiram todas com o mesmo padrão de slide. Usamos o Microsoft PowerPoint 2010. Essa padronização faz referencia à aparência do "site". Vejamos nas imagens abaixo:

- Primeiro slide:

Por se tratarem de videoaulas independentes, ou seja, não sequencial, no início de cada apresentação explicitamos o que será abordado no decorrer da aula.

Figura 39 – Slide de apresentação das videoaulas

Fonte: Elaboração própria

- Fundo de slide (padrão):

  Partindo do primeiro slide, os demais, com exceção do último, são elaborados considerando como imagem de fundo, a imagem a seguir:

  Figura 40 – Slide padrão das videoaulas

  Fonte: Elaboração própria

- Último slide:

  Sugerimos, ao final de cada videoaula, o acesso ao endereço eletrônico destacado.

  Figura 41 – Último slide das videoaulas

Fonte: Elaboração própria

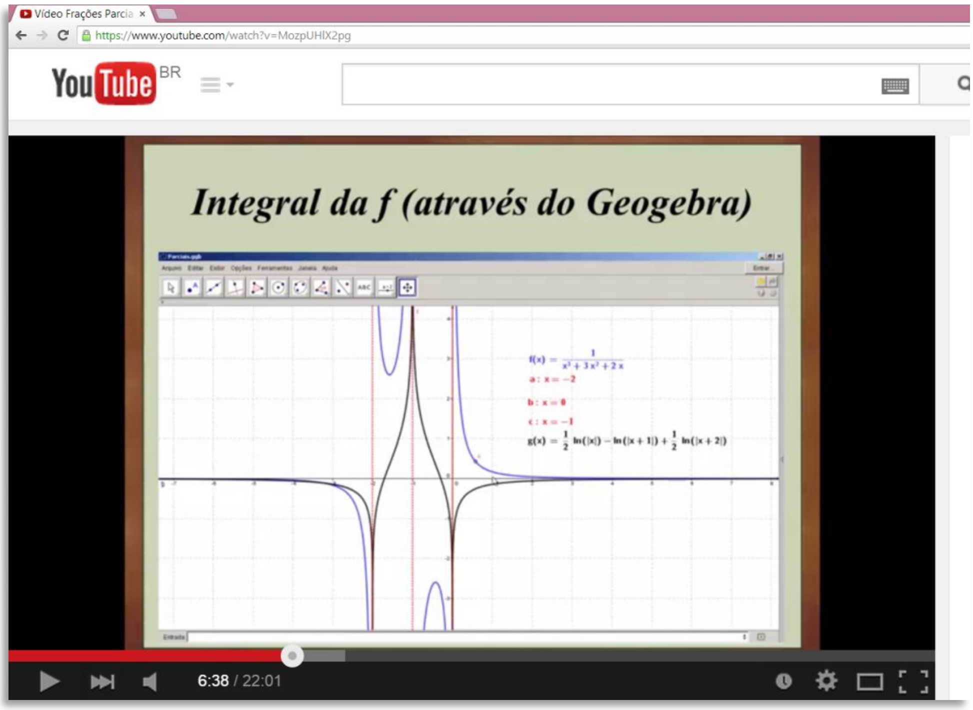
g) *Gravação da videoaula*

Quando cumpridas as etapas anteriores, a aula é gravada, editada e salva em formato adequado.

h) *Disponibilizar no YouTube e no "site"*.

Enfim, depositamos no YouTube, para poder ser disponibilizada no "site".

Figura 42 – Imagem da exibição de uma videoaula (YouTube).



Fonte: www.youtube.com/watch?v=MozpUHIX2pg, acesso em 07/01/2015

Seguindo a ordem das Sessões didáticas, os endereços de acessos das aulas no YouTube, são:

Tabela 5 – Endereços das vídeo-aulas no YouTube

SESSÃO DIDÁTICA	ENDEREÇO ON LINE
SESSÃO I:	https://www.youtube.com/watch?v=MozpUHlX2pg
SESSÃO II:	https://www.youtube.com/watch?v=Cj5YYQoCfew
SESSÃO III:	https://www.youtube.com/watch?v=OjBPdrYGAIE
SESSÃO IV:	https://www.youtube.com/watch?v=DjWVfHSUaiU
SESSÃO V:	https://www.youtube.com/watch?v=3BgCQDPLX8E

Fonte: Elaboração própria

4.2 Descrição do "Site"

Chamamos de "site", porém, na verdade, trata-se de uma conta criada no blogger em que foi comprado o domínio durante o período de um ano (após esse período será realizada uma nova compra) para ser usado como tal.

Foi nomeado como *Cálculo com Visualização* por ser um espaço que contará com outros materiais a respeito da disciplina de Cálculo – outro(s) Produto(s) Educacional(is) de colega(s) do mesmo Programa será disponibilizado nele.

Vejamos algumas imagens:

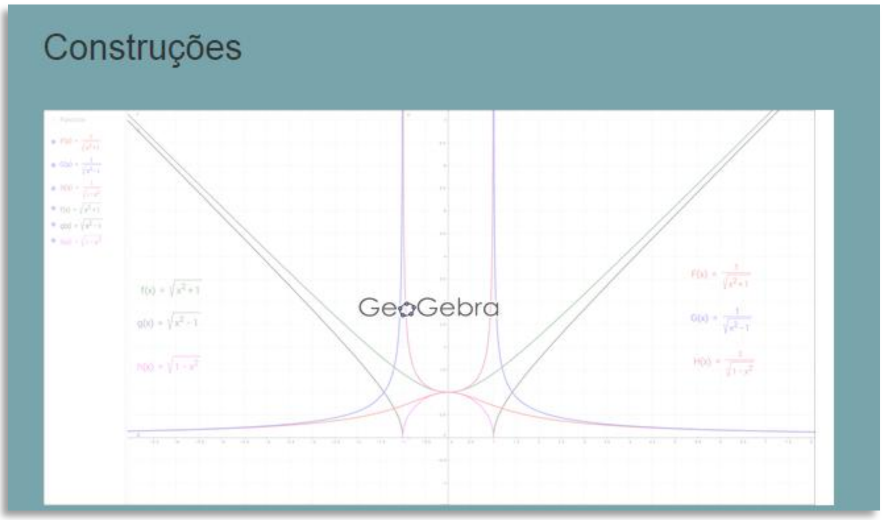
Figura 43 – Imagem do mural e do menu do "site"

Fonte: www.calculocomvisualizacao.com.br, acesso em 20/01/2015

Figura 44 – Imagem da exibição de uma videoaula ("site")

Fonte: www.calculocomvisualizacao.com.br, acesso em 20/01/2015

Figura 45 – Imagem da exibição de uma construção no Geogebra 5.0 (retirada do "site").



Fonte: www.calculocomvisualizacao.com.br, acesso em 20/01/2015

Essas são imagens que podemos encontrar ao acessarmos o “site” Cálculo com visualização. Tivemos a preocupação de anexarmos às construções feitas no Geogebra, as Sessões Didáticas, as videoaulas, dentre outras situações relacionadas com o C.D.I.

No próximo tópico, teremos a oportunidade de explicitar alguns resultados que alcançamos com o desenvolvimento deste trabalho. E ressaltamos, desde já, mencionamos que temos a intenção de levar adiante a divulgação e a prática da proposta que aqui fizemos.

4.3 Resultados Alcançados

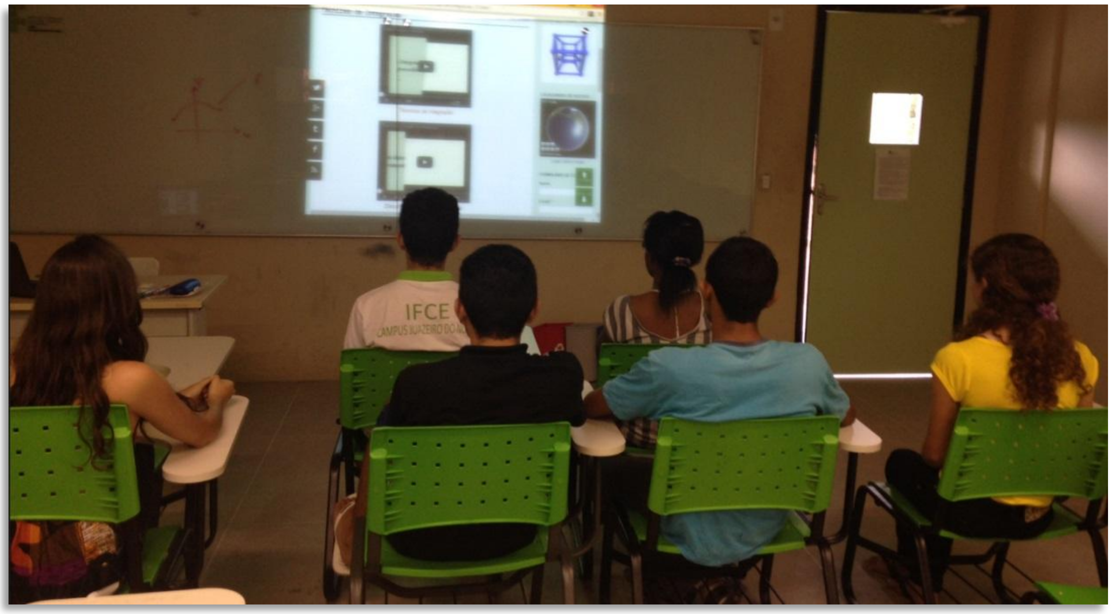
Quando pensamos na Problemática, optamos por nos preocupar com o ensino das Técnicas de Integração no Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, campus Juazeiro do Norte.

Nosso Produto Educacional está sendo apresentado para os professores da mesma Instituição, que trabalham com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Ambiental, aos seus alunos e para os professores/tutores que atuam na UAB-IFCE, as videoaulas, acessadas pelo “site”.

Tivemos a oportunidade de apresentar o “site” para os alunos que cursam a disciplina de Cálculo I do Curso Presencial de Licenciatura em Matemática e para um grupo de alunos do PIBID, do IFCE-Juazeiro, e para alguns professores tutores que atuam na UAB-IFCE, e que atualmente estão com a disciplina de Geometria Euclidiana.

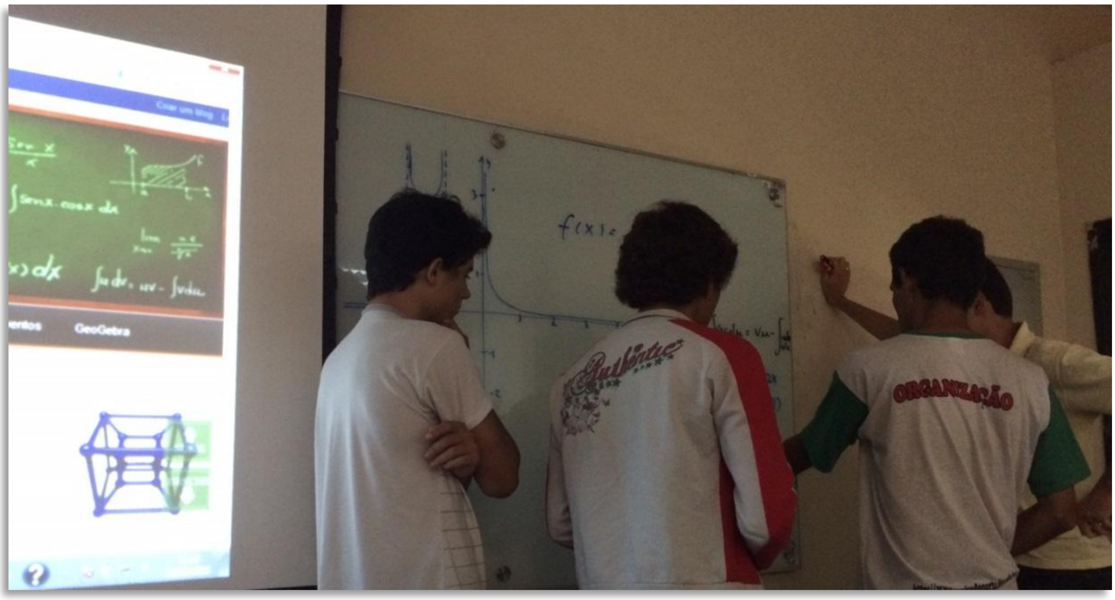
Abaixo temos algumas imagens da apresentação do Produto Educacional:

Figura 46 – Apresentação do “site” para os alunos de Cálculo Diferencial e Integral I.



Fonte: Própria (imagem capturada em 06/02/2015)

Figura 47 – Apresentação do “site” para alunos do PIBID (IFCE-Juazeiro do Norte)



Fonte: Própria (imagem capturada em 10/02/2015)

Na sequência, vamos apresentar outros dois momentos em que tivemos a oportunidade de apreciar o resultado que foi gerado mediante a nossa pesquisa. Vejamos:

Figura 48 – Apresentação de Pôster confeccionado a partir da proposta do nosso trabalho

Fonte: Própria (imagem capturada em 02/10/2014)

Figura 49 – Apresentação do site para os Tutores da UAB-IFCE na sala da webconference

Fonte: Própria (imagem capturada em 19/02/2015)

É possível visualizarmos a quantidade de internautas e sua localização por meio de um recurso disponível no www.calculocomvisualizacao.com.br. A seguir, apresentaremos alguns desses dados.

- Pontos de acessos no Brasil (até 07/01/2015):

Figura 50 – Pontos de acessos no Brasil

2D Map | 3D Globe | Locations | 24 Hours | Settings

National Statistics

Country: Brazil
Visits: 342

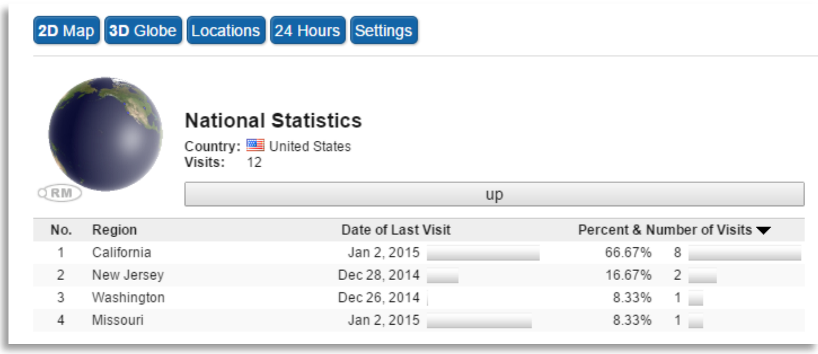
up

No.	Region	Date of Last Visit	Percent & Number of Visits	
1	Ceara	Jan 6, 2015	64.62%	221
2	-	Jan 7, 2015	12.87%	44
3	Rio de Janeiro	Jan 5, 2015	6.73%	23
4	Parana	Dec 30, 2014	3.80%	13
5	Sao Paulo	Dec 28, 2014	2.92%	10
6	Rio Grande do Sul	Dec 29, 2014	2.63%	9
7	Minas Gerais	Dec 28, 2014	2.05%	7
8	Pernambuco	Dec 28, 2014	1.17%	4
9	Espirito Santo	Dec 29, 2014	0.88%	3
10	Bahia	Dec 28, 2014	0.58%	2
11	Paraiba	Jan 4, 2015	0.58%	2
12	Distrito Federal	Dec 28, 2014	0.29%	1
13	Maranhao	Dec 28, 2014	0.29%	1
14	Santa Catarina	Dec 29, 2014	0.29%	1
15	Rio Grande do Norte	Dec 15, 2014	0.29%	1

Fonte: www.calculocomvisualizacao.com.br, acesso em 07/01/2015

- Pontos de acesso nos Estados Unidos (até 07/01/2015):

Figura 51 – Pontos de acessos nos Estados Unidos



2D Map | 3D Globe | Locations | 24 Hours | Settings

National Statistics

Country: United States
Visits: 12

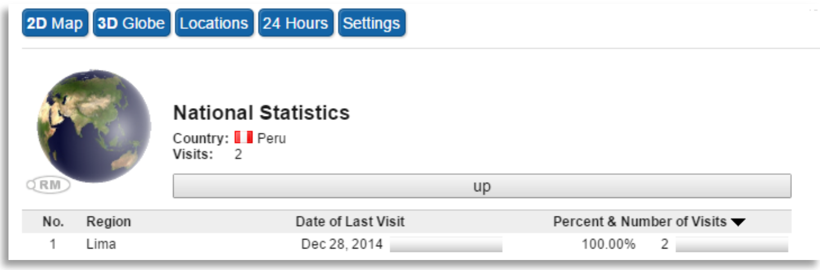
up

No.	Region	Date of Last Visit	Percent & Number of Visits	
1	California	Jan 2, 2015	66.67%	8
2	New Jersey	Dec 28, 2014	16.67%	2
3	Washington	Dec 26, 2014	8.33%	1
4	Missouri	Jan 2, 2015	8.33%	1

Fonte: www.calculocomvisualizacao.com.br, acesso em 07/01/2015

- Ponto de acesso no Peru (até 07/01/2015):

Figura 52 – Ponto de acesso no Peru



2D Map | 3D Globe | Locations | 24 Hours | Settings

National Statistics

Country: Peru
Visits: 2

up

No.	Region	Date of Last Visit	Percent & Number of Visits	
1	Lima	Dec 28, 2014	100.00%	2

Fonte: www.calculocomvisualizacao.com.br, acesso em 07/01/2015

Na próxima seção apresentaremos, por ora, nossas considerações finais. Entretanto, à medida em que vamos divulgando e apresentando nossa proposta, temos a certeza de que vamos dar continuidade às nossas pesquisas. Estaremos dispostos na busca para que mais oportunidades de aprendizado sejam dadas aos alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho teve a intenção de propor uma maneira, diferenciada daquelas contempladas nos livros didáticos dos autores STEWART (2010), LEITHOLD (1994) e GUIDORIZZI (2011) para abordar o assunto Técnicas de Integração de tal forma que seja trabalhada, além do procedimento algébrico, o procedimento geométrico – que permite uma aprendizagem significativa mediante análises dos gráficos das funções integrandas e das suas primitivas. Pretendemos, dessa forma, oportunizar o reconhecimento de uma Técnica de Integração por meio do comportamento do gráfico da função, assim como reconhecer qual região de integração perde o sentido – no caso da integral definida.

Partindo da problemática, em busca de caminhos que nos fizesse refletir sobre como poderíamos agir diante do assunto, estruturamos nossa pesquisa com base na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, metodologia de ensino da Sequência Fedathi e ferramenta facilitadora, o software Geogebra. Sendo que no decorrer dos quatro Capítulos, trazemos discussões que nos levaram a estruturar e propor nosso Produto Educacional.

Ressaltamos que, conforme NARDI (2009), o público alvo do Mestrado Profissional é prioritariamente professores em serviço, sendo que, como Trabalho de Conclusão de Curso, deverá ser gerado um Produto Educacional que possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores, visando à melhoria do ensino em uma área específica – a Dissertação é sobre esse Produto Educacional, sobre sua geração e implementação.

No Capítulo 1, intitulado PROBLEMÁTICA, fizemos um levantamento dos trabalhos científicos que estão relacionados com nossa linha de pesquisa. Por meio destes, percebemos que compartilhamos nossa preocupação com outros Professores que também trabalham com a disciplina de C.D.I. Para nos inteirarmos sobre como o conteúdo Técnicas de Integração surgiu, foi desenvolvido e estruturado, apresentamos seus aspectos históricos. Buscando inserir a questão da visualização dos gráficos das funções integranda e primitiva, assim como a região de integração, optamos por, em um tópico do referido Capítulo, comentar sobre o papel da visualização no contexto das Técnicas de Integração. Antes de partimos para o Capítulo 2, com vista nos levantamentos feitos anteriormente, apresentamos nossos objetivos, geral e específicos.

Apesar de, somente no Capítulo 2, apresentarmos a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, nós já estávamos utilizando-a no Capítulo anterior. Optamos por apresentar os principais detalhes e as fases desta metodologia para, em seguida, darmos continuidade revisando os tópicos essenciais do nosso objeto de estudo – Técnicas de Integração.

Reservamos o Capítulo 3, METODOLOGIA DE ENSINO, para comentarmos sobre a Sequência Fedathi, apresentar suas fases e, como base nelas, desenvolvermos nossas Sessões Didáticas. Contemplamos, neste trabalho, 5 Sessões, entretanto pretendemos adotar a postura da Sequência Fedathi durante nossa atuação como professor.

O Produto Educacional, videoaulas com suas respectivas Sessões Didáticas e estruturação do “site”, que serve como um ambiente de divulgação e interação do nosso trabalho, foi detalhado no Capítulo 4. Na ocasião, comentamos sobre o design de elaboração das videoaulas, a descrição do site e sobre o consumo do nosso material. Julgamos essa etapa muito importante, tendo em vista que tudo o que conseguimos fazer nela foi fruto de todo nossos esforços – desenvolvimento do trabalho, das ideias iniciais, das pesquisas e também da nossa experiência.

Recomendamos que, visando a um ensino atrativo e dinâmico, o Professor de Cálculo faça uso das Tecnologias Digitais. Sugerimos aqui o Software Geogebra - que cada vez mais vem facilitando o processo de ensino e de aprendizagem, pois permite que seja visto geometricamente o que muitas vezes estava sendo tratado apenas pelo caráter algébrico.

Finalizando nossa pesquisa, por um lado satisfeitos com o nosso amadurecimento, contudo, por outro lado, ficamos na ânsia de darmos continuidade ao processo de investigação acerca das atualizações tecnológicas e/ou metodológicas para estarmos sempre reciclando nossas formas de abordagens de conteúdos.

6 REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis.** 2011. 397p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Fortaleza, Fortaleza, 2011.

ARTIGUE, Michelle. **Didactical Design in Mathematics Education**. *In:* Proceedings of NORMA08 – Nordic Research in Mathematics Education, 2009.

ARTIGUE, Michelle. **Ingénierie didactique**, *In:* BRUN, J. Didactiques des Mathématiques, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996.

BORGES NETO, Hermínio. *et al*. **A Sequência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**, 15 EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste, São Luis, 2001.

BOYER, Carl B.. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York, Dover Publications, INC, 1949.

Cálculo I / Francisco Regis Vieira Alves; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. – Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.

FIORENTINI, Dário; Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, Ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo,** v. 1, Rio de Janeiro: LTC. 2011.

GUIMARAIS, Y. P. B. Q. **Exploração em tópicos de cálculo diferencial, integral e numérico**, usando os softwares VCN e *Geogebra*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, 2011.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica,** v. 1. HARBRA, 1994.

LUC AS, R. D. Geogebra e moodle no ensino de geometria analítica. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 2010.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Engenharia didática**. Educação Matemática: Uma introdução. São Paulo: Educa, 1999, P. 197-208.

MENEZES, D. B. Análise de uma formação de Professores à luz da Sequência Fedathi: O uso do Software Geogebra no Ensino da Matemática / Fórum Internacional de Pedagogia – Santa Maria – Rio Grande do Sul, 2014.

MOREIRA, M. A. & NARDI, R. **O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos**, 2009.

RICALDONI, M. A. G. **Atividades de construção e interpretação de gráficos com o uso do Geogebra** para o ensino de derivadas em cálculo I. Ouro Preto: Ed. UFOP, 2014.

RICHIT, Andriceli. Possibilidades didático-pedagógicas do Software Geogebra no estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral: Perspectivas na Formação Continuada de Professores de Matemática / I Conferência Latino-Americana do GeoGebra, 2011.

ROCHA, M. D. Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral I [manuscrito]: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre visualização e a experimentação. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

SANTOS, M. J. C. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas**: desafio para a formação inicial. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

SOUZA, C. R. Uma abordagem do ensino de cálculo, incentivando o desenvolvimento de estilos de aprendizagem e proporcionado o entendimento das técnicas de integração. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2013.

SOUZA, M. J. A. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais**. 2010. 231p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

SOUZA, M. J. A Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. *In:* SOUSA, F. E. E. *et al.* (Org.). **Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática.** Fortaleza: Edições UFC, 2013.

STEWART, James. **Cálculo,** v.1, São Paulo: CENGACE Learning, 2010.

VILLARREAL, M. E. O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências Humanas e Sociais, Franca, 1999.