



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

VICTOR PEREIRA DO NASCIMENTO SANTOS

ASPECTOS DA QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ E DA NÃO-COMUTATIVIDADE EM MODELOS COM GRAVITAÇÃO

FORTALEZA
2014

VICTOR PEREIRA DO NASCIMENTO SANTOS

Aspectos da quebra da simetria de Lorentz e da não-comutatividade em modelos com gravitação

Tese apresentada ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Fortaleza

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- S239a Santos, Victor Pereira do Nascimento
Aspectos da quebra da simetria de Lorentz e da não-comutatividade em modelos com gravitação / Victor Pereira do Nascimento Santos. – Fortaleza, 2014.
136 f.: il. algumas color. enc.; 30 cm.
- Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2014.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
Área de concentração: Física da Matéria Condensada.
1. Gravitação quântica. 2. Simetria de Lorentz. 3. Geometria não-comutativa.
4. Cosmologia. 5. Física de partículas. I. Almeida, Carlos Alberto Santos de. II. Título.

VICTOR PEREIRA DO NASCIMENTO SANTOS

**ASPECTOS DA QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ E
NÃO-COMUTATIVIDADE EM MODELOS DE GRAVITAÇÃO**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 14 / 08 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Dionísio Bazeia Filho
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho
Instituto Federal do Maranhão (IFMA)

Dr. Wilami Teixeira da Cruz
Instituto Federal do Ceará (IFCE/ Juazeiro do Norte)

RESUMO

Neste trabalho iremos apresentar alguns aspectos de gravitação quântica. Introduzimos o problema da gravitação e algumas propostas para atacá-lo. Em particular, nossas investigações tocam três temáticas gerais: geometria não-comutativa, violação da simetria de Lorentz e cosmologia inflacionária. Em geometria comutativa fizemos duas propostas distintas para possíveis limitações experimentais: em uma calculamos a luminosidade de um buraco-negro modelando o seu horizonte de eventos por um espaço não-comutativo; e na outra calculamos as propriedades termodinâmicas do grafeno na presença de um campo magnético, verificando a influência da não-comutatividade. No que toca a quebra da simetria de Lorentz, mostramos a viabilidade física de cenários de dimensões extras, através do cálculo da massa do gráviton na teoria efetiva quadridimensional. Também calculamos a influência da quebra de simetria no setor gravitacional em quatro dimensões, através de correções quânticas ao potencial gravitacional. Finalmente, em cosmologia apresentamos um estudo preliminar sobre o problema da medida, que se relaciona com a probabilidade de que se tenha o processo de inflação independente das condições iniciais do sistema. Propusemos usar a formulação Hamiltoniana para o cálculo dessa probabilidade em um sistema onde o campo escalar é acoplado não-minimamente ao campo gravitacional, e assim verificar a viabilidade do modelo quando confrontado com dados observacionais.

ABSTRACT

In this work we will present some aspects from quantum gravity. We introduce the problem of quantum gravity and some proposals to tackle it. In particular, our investigations touch upon three general subjects: noncommutative geometry, violations of Lorentz symmetry and inflationary cosmology. In noncommutative geometry we made two proposals for possible experimental verifications: in the former we calculate the luminosity of spherically symmetric black-hole where its event horizon was modelled by a noncommutative space; in the latter we investigate the thermodynamical properties of the graphene in the presence of a magnetic field, verifying the influence of the noncommutativity. Regarding the Lorentz symmetry violation we showed its physical viability of extra-dimensional scenarios, by calculating the graviton mass in the four-dimensional effective theory. We also calculate the influence of the Lorentz symmetry breaking in the gravitational sector in four dimensions, by means of quantum corrections to the Newtonian potential. Finally, in cosmology we present a preliminar study on the measure problem, which is related to how natural the inflationary process is. We propose using the Hamiltonian formulation for evaluating the probability of inflation in a scenario where the scalar field describing the inflation is non-minimally coupled to the gravitational field, finding the the viability of this particular model when compared to observed data.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e aos meus amigos de fora do departamento, pela compreensão quando precisei me ausentar das saídas para “fazer contas”.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, pela paciência e apoio constante, assim como pela confiança depositada desde a graduação até o doutorado. Fica aqui meu agradecimento sincero.

Aos membros da banca examinadora, por terem aceitado o convite e disporem do seu tempo para analisar o trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes, pela amizade e presença constante: Samuel, Júlio, Davi, Diego (Uhuu!), Euclides, Wagner (Pikachu), Brother (Ivan), Roberto Maluf e Luciana Angélica.

Ao Corpo Docente e funcionários do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

A Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Federal do Ceará, nos nomes do Pró-Reitor Prof. Dr. Gil de Aquino Farias e da Diretora da Divisão de Capacitação de Recursos Humanos Rosângela Maria Alves Viana, pela celeridade no processo da bolsa PDSE.

A *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (CAPES) pela bolsa de Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (PDSE).

Ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) pelo auxílio financeiro durante o doutorado.

À Janaína Sobreira, por todo apoio e incentivo, e sua paciência infinita em mostrar carinho mesmo nos momento de más disposições e ausência da minha parte, principalmente durante o período que estive fora. Minha gratidão não pode ser expressa em palavras.

As an addendum, I would like to express my gratitude to people who were involved in this work but do not speak Portuguese:

First I would like to thank professor Abhay Ashtekar for accepting me in his group during my stay at the Pennsylvania State University. His courses and discussions were undoubtedly fundamental for my learning.

To Randi Neshteruk and Jackie Chapin for helping me with all the paperwork within the University and the visa, before and after my arrival in U.S.

To my colleagues, friends and aggregates from the Institute for Gravitation and Cosmos, for the lessons about Physics and for making my stay more pleasant outside the department: Aruna Kesavan, Suddho Brahma, Ashik & Amanda Idrisy, Béatrice Bonga, Nicholas Senno (Nick), Thomas Cailleateau, Marc Geiller, Wolfgang Wieland, Gabriel Lemos, Rada & Yasha Neiman, Sohyun Park, Eugenio Bianchi & Carina Faßbauer, Fabio D’Ambrosio, Anne Sylvie-Deutsch, Ra Inta & Beth Koehn.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Da antiguidade à modernidade	1
1.2	Quando os mundos colidem - Quantizar é preciso?	2
1.2.1	Unificação	3
1.2.2	O problema do tempo	5
1.3	Propostas para gravitação quântica	6
1.3.1	Gravitação Semiclássica	6
1.3.2	Quantização covariante	8
1.3.3	Supercordas	10
1.3.4	Gravitação em Laços	13
1.3.5	Geometria Não-Comutativa	16
1.3.6	Outras abordagens	17
1.4	Fenomenologia e pegadas experimentais	19
1.4.1	Violação da Simetria de Lorentz e Raios-gama ultra energéticos	19
1.4.2	Física de partículas e dimensões extras	20
1.4.3	Universo primordial e modelos inflacionários	24
1.4.4	Sistemas de matéria condensada	26
1.5	Organização da Tese	28
2	Geometria não-comutativa	29
2.1	Introdução	29
2.2	Buracos negros e a natureza quântica do espaço-tempo	31
2.2.1	Equação de calor	32
2.2.2	Expansão assintótica do núcleo de calor e quantidades geométricas	34
2.2.3	A esfera <i>fuzzy</i>	34
2.3	Propriedades termodinâmicas do Grafeno em um espaço de fase não comutativo	45
2.3.1	Grafeno	45
2.4	O modelo <i>tight binding</i>	46
2.4.1	Grafeno no espaço de fase não-comutativo	49
2.4.2	Propriedades termodinâmicas	52
3	Violação da simetria de Lorentz & Gravitação Massiva	59
3.1	Sobre a violação da simetria de Lorentz	59
3.2	Localização de campos em cenários curvos	61
3.2.1	Campos localizados	61
3.2.2	Modelo de Randall-Sundrum com violação da simetria de Lorentz	66
3.2.3	Gravidade em um defeito tipo corda com violação da simetria de Lorentz	68
3.2.4	Escala efetiva em quatro dimensões	72
3.3	Espalhamento bóson-gráviton & correções ao potencial gravitacional	73
3.3.1	Modelo teórico	73

4	Cosmologia & modelo Inflacionário	84
4.1	Modelo Padrão da Cosmologia	84
4.1.1	Densidade crítica	86
4.1.2	Forma adimensional	86
4.1.3	Dinâmica do universo: o <i>Big Bang</i>	87
4.1.4	Problemas com o <i>Big Bang</i>	88
4.1.5	Modelo inflacionário	92
4.2	Probabilidade de inflação e acoplamento não-mínimo	94
4.2.1	Formulação no espaço fase e probabilidade de inflação	94
4.2.2	Função Densidade de probabilidade sob acoplamento não-mínimo	97
5	Conclusões e Perspectivas	101
5.1	Sobre a esfera <i>fuzzy</i>	101
5.2	Grafeno em um espaço de fase não-comutativo	101
5.3	Quebra da invariância de Lorentz em cenários curvos	102
5.4	Correções do potencial gravitacional devido à quebra da invariância de Lorentz	102
5.5	Inflação e acoplamento não-mínimo	103
	Apêndice A Sistema de Unidades Naturais	120
A.1	Física de Partículas	121
A.2	Unidades de Planck	124
A.3	Observações	127

Lista de Figuras

1.1	Trajatórias de Regge para cinco famílias de bárions Δ , com ajuste linear para cada família. (dados obtidos em [32])	11
1.2	Curva γ cruzando uma superfície f . O número de vezes que a curva corta a superfície é denotado por $n(\gamma, f)$. No caso mostrado na figura temos $n(\gamma, f) = 3$.	14
1.3	Representação pictórica de uma rede de <i>spin</i> . Em gravitação em laços, uma rede de spin está associada a um estado quântico do campo gravitacional.	15
1.4	Rede de spin cruzando uma superfície esférica. Cada uma das ligações j_1, \dots, j_n contribui para o espectro de área com um fator proporcional a $\sqrt{j_i(j_i + 1)}$	16
1.5	<i>screening</i> do campo elétrico em um meio dielétrico. O campo elétrico gerado pela carga elétrica induz a polarização das cargas em sua vizinhança, causando a formação de dipolos elétricos.	21
1.6	Variação das constantes de acoplamento do Modelo Padrão de acordo com a escala de energia, segundo a expansão perturbativa a um laço.	22
1.7	Modos de polarização da Radiação Cós mica de Fundo de uma parte do céu. Os modos B são chamados assim porque eles se apresentam como o campo vetorial magnético, que apresenta rotacional mas seu divergente é nulo. Isso é visualizado pela formação de pequenos “vórtices” no campo vetorial. (fonte: referência [92])	24
1.8	Anisotropias da Radiação Cós mica de Fundo como vistas pelo satélite Planck. Elas mostram pequenas variações de temperatura que correspondem à diferentes densidades da matéria que hoje constitui as galáxias e estrelas. (copyright: European Space Agency, Planck Collaboration)	25
1.9	Diagrama representando o processo de inflação cósmica. Durante uma pequena fração de tempo o universo se expandiu aceleradamente, possibilitando a formação da estrutura em grandes escalas observada para o universo.	26
2.1	Espectro de área normalizado (2.47) como uma função da dimensão n da esfera não-comutativa, para uma escala de energia ϵ fixa. Note o efeito do corte na significância da não-comutatividade, onde correções quânticas contribuem de forma crescente.	42
2.2	Radiação Hawking. O forte campo gravitacional na vizinhança do horizonte de eventos do buraco negro causa uma instabilidade no vácuo, resultando na produção de um par partícula-antipartícula. O tempo de vida desse par é geralmente muito pequeno, de tal forma que eles rapidamente se aniquilam mutuamente. Contudo, próximo ao horizonte de eventos é possível que uma das partículas do par entre antes de ser aniquilada, e nesse caso a outra partícula escapa como radiação.	43
2.3	Luminosidade normalizada como função de n , para uma escala de energia fixa ϵ .	44
2.4	Estrutura de rede e célula unitária da folha de grafeno. A constante de rede é $a \approx 0.246$ nm. Os vetores de rede \vec{a}_1 e \vec{a}_2 geram a célula unitária que contém um átomo da rede A e um da rede B.	46

2.5	Representação tridimensional da estrutura eletrônica de bandas do grafeno. Note que na região de baixas energias as duas superfícies se aproximam de uma forma linear, se assemelhando a um cone (mostrado no <i>zoom</i>). Esses cones são chamados <i>cones de Dirac</i>	50
2.6	Comportamento do resto R_k da soma para o caso comutativo $\bar{\eta} = 0$	54
2.7	Comportamento do resto R_k da soma para o caso comutativo $\bar{\eta} = 0.1$	55
2.8	Energia livre para a partícula de Dirac como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\bar{\eta}$	57
2.9	Energia média como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\bar{\eta}$	57
2.10	Entropia como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\bar{\eta}$	58
2.11	Calor específico como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\bar{\eta}$	58
3.1	<i>Orbifold</i> $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$, obtido através da identificação dos pontos antípodas da circunferência. Observe que o ponto $w = 0$ é identificado com ele próprio, sendo portanto um <i>ponto fixo</i>	62
3.2	Configuração do modelo Randall-Sundrum. A brana localizada em $w = L$ é chamada de <i>brana visível</i> ou <i>brana TeV</i> , e é representa o universo observável de quatro dimensões.	63
3.3	Fator de <i>warp</i> para a geometria tipo corda, para alguns valores de $\tilde{\lambda}$ e $c = 1$. Note como o comportamento linear é recuperado quando o parâmetro que introduz a quebra de Lorentz vai a zero.	71
3.4	Componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica para alguns valores de $\tilde{\lambda}$ e $c = 1$	72
3.5	Diagrama a nível de árvore para duas partículas escalares interagindo através da troca de um gráviton.	80
3.6	Sistema de coordenadas inercial adotado para o cálculo do limite não-relativístico.	82
4.1	Diagrama de espaço-tempo para um espaço-tempo de $(1 + 1)$ dimensões. O evento Q , fora do cone de luz do evento P , não é influenciado por eventos no passado ou futuro de P	89
4.2	Representação esquemática da estrutura causal da solução FLRW. O evento P pode receber sinais dos A e B , mas não de C . Isso cria no universo regiões sem relação de causa-efeito, e portanto inacessíveis.	90
4.3	Histórico do universo de acordo com a dinâmica do fator de escala no modelo padrão cosmológico.	91
4.4	Retrato de fase para o inflaton para o espaço de fase reduzido $(\phi, \dot{\phi})$. Os círculos mostram as superfícies onde o parâmetro de Hubble H é constante. Note como as trajetórias iniciadas nos pontos vermelhos naturalmente evoluem para a origem, que é o atrator.	96
4.5	Logaritmo da função densidade de probabilidade $f(\phi)$ induzida em superfícies de H constante. A massa do inflaton aqui foi tomada como $m = 1$ e a superfície final foi tomada como sendo $H = 2/3$. A curva em vermelho representa a função na superfície inicial $H = 1$ e a curva verde $H = 5/6$	97
4.6	Retrato de fase para o inflaton na presença do acoplamento não-mínimo. As superfícies onde o parâmetro de Hubble H é constante são mostradas pelas elipses coloridas.	99
4.7	Logaritmo da função densidade de probabilidade $f(\phi)$ induzida em superfícies de H constante na presença do acoplamento mínimo. A massa do inflaton aqui foi tomada como $m = 1$	100

LISTA DE TRABALHOS PUBLICADOS

Para uma melhor compreensão da estrutura da tese e do texto, segue a lista de trabalhos publicados durante o doutorado:

- SILVA, J. E. G.; SANTOS, V.; ALMEIDA, C. A. S. *Gravity localization in a string-cigar brane-world*. **Classical and Quantum Gravity**, 30, 025005 (2013).
[DOI: [10.1088/0264-9381/30/2/025005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/2/025005)]
- SANTOS, V.; ALMEIDA, C. A. S. *On gravity localization under Lorentz violation in warped scenario*. **Physics Letters B**, 78 1114-1118 (2013).
[DOI: [10.1016/j.physletb.2012.11.045](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.11.045)]
- MALUF, R. V.; SANTOS, V.; CRUZ, W. T.; ALMEIDA, C. A. S. *Matter-gravity scattering in the presence of spontaneous Lorentz violation*. **Physical Review D**, 88, 025005 (2013).
[DOI: [10.1103/PhysRevD.88.025005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.025005)]
- SANTOS, V.; MALUF, R. V.; ALMEIDA, C. A. S. *Thermodynamical properties of graphene in noncommutative phase space*. **Annals of Physics**, In Press (2014). preprint: [arXiv:1401.8051](https://arxiv.org/abs/1401.8051).
[DOI: [10.1016/j.aop.2014.07.005](https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.07.005)]

e em preparação para submissão:

- SANTOS, V.; SILVA, C. A. S.; ALMEIDA, C. A. S. *A note on the fuzzy area spectrum, black hole luminosity, and the quantum nature of spacetime*.
- SANTOS, V.; CAILLETEAU, T. *Inflationary attractors and their measures with nonminimal coupling*.

Capítulo 1

Introdução

“Begin at the beginning,” the King said, very gravely, “and go on till you come to the end: then stop.”

– Lewis Carroll, Alice in Wonderland

A Gravitação Quântica (GQ) é, até a presente data, um dos grandes problemas a serem resolvidos em Física de altas energias. Neste capítulo irá se colocar o problema da gravitação quântica, expor algumas teorias propostas para atacá-la (e alguns dos problemas que elas apresentam) e as ideias gerais por trás do trabalho realizado nesta tese.

1.1 Da antiguidade à modernidade

Durante a história da humanidade, todas as civilizações tem se fascinado pelas noções de *espaço* (os Céus), tempo (o Início e o Fim) e matéria (Substância, Forma). Desde os primórdios, grandes pensadores como [Aristóteles](#), [Lao-Tzu](#) e [Demócrito](#) discorreram sobre o assunto, e ao longo dos séculos suas ideias foram sedimentadas na nossa mente, alicerçando o nosso pensamento científico.

A ciência tem como objetivo uma profunda compreensão da natureza, de se obter a mais completa descrição possível do que podemos observar e experimentar. Colocando à parte a relevância prática/tecnológica na nossa vida cotidiana, uma qualidade extremamente relevante do progresso científico é que algumas áreas de pesquisa tangenciaram questões que normalmente seriam delegadas à filosofia. O pensamento Aristotélico requer uma compreensão geral das causas dos fenômenos, em uma única estrutura bela e consistente. A filosofia por sua vez pergunta

a razão fundamental de tudo que existe. Portanto, a mistura de ideias oriundas tanto da física quanto da filosofia pode ser usada como um “termômetro” para o progresso científico.

Questões como essa, que mesclaram ciência e filosofia, fizeram parte do pensamento de vários cientistas ao longo do tempo, e no início do século XX os físicos alemães [Max Planck](#) (1858-1947) e [Albert Einstein](#) (1879-1955) revolucionaram a física, ao colocar as pedras fundamentais do que hoje conhecemos como [Mecânica Quântica](#) (MQ) e [Relatividade Geral](#) (RG). Essas teorias constituem dois dos grandes pilares conceituais a partir do qual construímos a nossa descrição da natureza e boa parte do desenvolvimento tecnológico. As duas teorias modificaram profundamente a forma como compreendemos o universo, ao abolir a natureza determinística das leis físicas e o caráter absoluto do espaço e do tempo, e elas tem sido extraordinariamente resistentes aos testes experimentais até agora [1–3].

Contudo, da mesma forma como essas teorias têm resistido aos testes experimentais, elas também têm resistido à uma coexistência pacífica: as premissas básicas de uma teoria contradizem com a da outra, e vice-versa. Isso nos leva à pergunta: é possível trazer a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral em uma única, e coerente, teoria? Em caso afirmativo, à teoria que responde a essa pergunta se dá o nome de teoria de [Gravitação Quântica](#).

1.2 Quando os mundos colidem - Quantizar é preciso?

É natural se perguntar se realmente há necessidade de se ter uma teoria de Gravitação Quântica, e até o momento não existe um consenso sobre isso. Assim, existem várias respostas a essa pergunta.

Até o momento não existem evidências experimentais conclusivas acerca de sistemas nos quais não se pode ignorar efeitos quânticos e gravitacionais simultaneamente. Fenômenos em escalas astronômicas em astrofísica e cosmologia são bem descritos pela Relatividade Geral enquanto a Mecânica Quântica explica perfeitamente as propriedades das partículas, átomos e moléculas. Raramente esses mundos se encontram. O regime em que se espera que tanto a teoria quântica e a relatividade geral se tornem importantes, e que não se possa ignorar uma em detrimento da outra, é quando a escala de comprimento característica do fenômeno é pequeníssima, da ordem do comprimento de Planck:

$$l_p \sim 1.62 \times 10^{-35} \text{ m.}$$

Para se ter uma ideia do quão pequena é essa escala de comprimento, façamos uma comparação: o tamanho de um átomo é cerca de um milionésimo da espessura de um fio de cabelo, e esse comprimento ainda será 10^{28} vezes maior do que o comprimento de Planck.

Podemos ver assim que a escala de Planck é uma longa extrapolação, tanto da nossa vivência e intuição como dos nossos experimentos mais avançados (experimentos do LHC alcançam energias suficientes para testar escalas de comprimento da ordem de 1×10^{-19} m). Sem conhecimento direto que nos guie no desenvolvimento de uma teoria unificada, e mais ainda, com pouquíssimas restrições sobre como tal teoria deva ser, há uma miríade de teorias almejando ser uma teoria de gravitação quântica.

Apesar da falta de experimentos, existem ainda razões que motivam e compõem à investigação de teorias quânticas para a gravidade. Vamos discutir brevemente algumas.

1.2.1 Unificação

Grandes conquistas na física teórica foram alcançadas com a unificação de conceitos que pareciam em princípio desconexos.

A primeira grande unificação provavelmente se deu com o cientista italiano [Galileu Galilei](#) (1564-1642) ao propor a equivalência entre movimento e repouso (lei da inércia). Essa unificação foi posteriormente codificada por [Isaac Newton](#) (1643-1727) na primeira das leis que hoje levam o seu nome:

um corpo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme permanece no seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme a menos que seja perturbado por uma força externa.

Isso significa que não podemos detectar (apenas por experimentos mecânicos) um estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme.

A segunda unificação se deu com o próprio Newton por volta de 1680 quando, baseado na lei de inércia de Galileu e na mecânica celestial de [Johannes Kepler](#) (1571-1630), notou que a mesma força que o Sol exerce sobre os planetas é a que nos mantém na Terra; isto unificou a física dos astros com a física terrestre.

Já no século XIX, o físico inglês [James Clerk Maxwell](#) (1831-1879) promoveu uma unificação que tem sido tomada como modelo para a física teórica nas últimas décadas: a unificação dos fenômenos óticos, elétricos e magnéticos como manifestações de uma única força, a [força eletromagnética](#). Para tanto, Maxwell recorreu a uma ideia antiga introduzida por [Michael Fa-](#)

[raday](#) (1791-1867): o conceito de *campo*. O campo é uma quantidade (um número ou conjunto de números) cujo valor modifica ponto-a-ponto ao longo do espaço, e também com o passar do tempo. Com isso Maxwell conseguiu escrever um conjunto de equações, hoje chamadas de *equações de Maxwell*, que relacionam os campos elétrico e magnético de tal forma que um pode se transformar no outro. Por exemplo, uma corrente elétrica fluindo num fio induz um campo magnético, enquanto um ímã em movimento induz uma corrente elétrica em um fio. A teoria eletromagnética de Maxwell pode ser considerada a primeira teoria (clássica) de campos. Dada a natureza mecanicista dos físicos na época, muito trabalho foi feito para se encontrar um mecanismo fundamental por trás das equações de Maxwell, uma vez que as ondas eletromagnéticas resultantes dela se propagam pelo *vácuo*. Essa busca culminou na criação do *éter*, um meio material que acomoda a propagação de ondas eletromagnéticas, da mesma forma que o ar acomoda as ondas sonoras. O éter foi o ponto de partida para a próxima unificação, por Einstein e outros.

A ideia do éter, embora palatável aos cientistas da época, era conflitante com a primeira unificação de Galileu, sobre a distinção entre movimento e repouso. O que Einstein propôs em 1905 é incorporar o legado de Galileu à teoria de Maxwell, de tal forma que a distinção entre fenômenos elétricos e magnéticos também passa a ser dependente do observador. Nasce assim a *Teoria da Relatividade Restrita*, que contém ainda um outra unificação implícita: a unificação entre espaço e tempo em uma única entidade física, o *espaço-tempo*. Posteriormente, a teoria seria generalizada para descrever a interação gravitacional, resultando na Teoria da Relatividade Geral.

A teoria eletromagnética também se mostrou frutífera no mundo subatômico. Uma vez que a Mecânica Quântica havia sido desenvolvida no final da década de 20, um dos seus primeiros grandes triunfos foi a *Eletrodinâmica Quântica*, a primeira teoria quântica de campos desenvolvida, formulada independentemente por [Sin-Itiro Tomonaga](#) (1906-1979), [Richard P. Feynman](#) (1918-1988) e [Julian Schwinger](#) (1918-1994) por volta de 1948. A teoria descreve a interação entre luz e matéria, e contém também em seu arcabouço a Relatividade Restrita de Einstein. A Eletrodinâmica Quântica permitiu a identificação de conceitos fundamentais que possibilitaram a construção do atual Modelo Padrão: a *quebra espontânea de simetria* e a *simetria de calibre*. A partir da quebra espontânea de simetria desenvolveu-se o chamado *mecanismo de Higgs*, que possibilitou a unificação do eletromagnetismo com a força nuclear fraca no modelo de [Weinberg-Glashow-Salam](#) da força eletrofraca, que em conjunto com a *Cromodinâmica Quântica*, que descreve a força forte, compreende o atual modelo padrão das partículas elementares.

1.2.2 O problema do tempo

Uma das consequências mais notáveis do princípio da relatividade de Einstein é a unificação entre espaço e tempo, agora tratados em pé de igualdade na Relatividade Restrita. Mais ainda, na Relatividade Geral o espaço-tempo passa a ser uma grandeza dinâmica e mutável. Entretanto isso parece conflitar com a formulação básica da Mecânica Quântica. Relembremos brevemente os axiomas fundamentais da Mecânica Quântica¹:

MQ1 Os estados de um sistema quântico são descritos por vetores $|\psi\rangle$, chamados de *função de onda*, em um espaço de Hilbert separável \mathcal{H} .

MQ2 Os observáveis são representados por operadores lineares auto-adjuntos \widehat{O} atuando em \mathcal{H} .

MQ3 Os resultados possíveis para a medida do observável \widehat{O} são dados pelos seus autovalores.

MQ4 Existe um observável \widehat{H} , chamado *Hamiltoniano*, que dita a evolução da função de onda $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ através da *equação de Schrödinger*:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}|\psi(t)\rangle.$$

Observe que o parâmetro t que aparece na equação de Schrödinger é externo ao sistema, tal como o tempo absoluto da mecânica clássica. Esse problema foi discutido por [Wolfgang Pauli](#) (1900-1958) [4], ao propor a promoção do tempo a um operador quântico, da seguinte forma: o operador \widehat{T} é conjugado à energia da mesma forma que o operador posição é conjugado ao operador momentum; portanto satisfaz

$$[\widehat{H}, \widehat{T}] = -i\hbar;$$

dessa forma tem-se

$$[\widehat{H}, f(\widehat{T})] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial t}(\widehat{T}). \quad (1.1)$$

Seja $|\psi_E\rangle$ um autovetor do operador \widehat{H} com autovalor E . Assim temos

$$\widehat{H}e^{i\frac{\alpha}{\hbar}\widehat{T}}|\psi_E\rangle = (E + \alpha)e^{i\frac{\alpha}{\hbar}\widehat{T}}|\psi_E\rangle \quad (1.2)$$

¹para um número finito de graus de liberdade bosônicos

para uma constante arbitrária α . Isto significa que $e^{i\frac{\alpha}{\hbar}\widehat{T}}|\psi_E\rangle$ é também um autovetor do operador hamiltoniano com autovalor $E + \alpha$. Como α é arbitrário, isso implica que o espectro do Hamiltoniano não necessariamente é positivo definido.² Por fim, ele conclui:

Conclui-se, portanto, que a introdução de um operador \widehat{T} deve ser renunciada por uma questão de princípio, e que o tempo t necessariamente deve ser considerado como um número ordinário (“c-number”) na mecânica ondulatória.

Parte desse problema é resolvido pela [Teoria Quântica de Campos](#) (TQC), quando se compatibiliza a Mecânica Quântica com a Relatividade Especial: ao invés de promover o tempo a um operador quântico, o que se faz é reduzir os operadores posição da mecânica quântica a variáveis clássicas, e assim espaço e tempo podem ser tratados igualmente pois o parâmetro temporal é agora o tempo coordenado da relatividade restrita.

Contudo, embora a TQC tenha conseguido abolir a diferença absoluta entre espaço e tempo, o próprio espaço-tempo ainda é um elemento externo, que não interage com os campos físicos. Logo, o espaço-tempo continua sendo uma arena de fundo, sobre o qual se descreve a dinâmica quântica dos campos. Isso nos dá uma estrutura causal fixa que é essencial para a TQC, uma vez que as relações de comutação entre os campos e a decomposição de Fourier (que separa o campo em uma parte com frequência positiva e outra com frequência negativa) dependem disso.

1.3 Propostas para gravitação quântica

Vamos aqui discutir brevemente algumas propostas para teorias de gravitação quântica. As principais diferenças entre as propostas reside na importância dada à Relatividade Geral e a Mecânica Quântica; isto é, qual delas é considerada ou não como uma teoria fundamental.

1.3.1 Gravitação Semiclássica

Técnicas semiclássicas são de grande importância para aumentar a compreensão de uma teoria quântica, pois possibilita uma interface entre os mundos clássico e quântico, seja incorporando flutuações quânticas a descrições puramente clássicas ou na análise do limite clássico de descrições inerentemente quânticas [5]. Por exemplo, antes do advento da Mecânica Quântica (na

²Vale mencionar que existem pesquisas que tratam de hamiltonianos não hermiteanos

chamada [antiga teoria quântica](#)), a fórmula de quantização de [Bohr-Sommerfeld](#)

$$\oint p dq = nh, \quad n = 1, 2, \dots$$

onde q e p são respectivamente a coordenada e momentum generalizado para um sistema com um grau de liberdade e h é a constante de Planck, era tomada como uma suposição *ad hoc*, deduzida a partir da mecânica clássica, para explicar o espectro atômico. Hoje tal regra é deduzida a partir da Mecânica Quântica através de um cálculo semiclássico chamado [aproximação WKB](#) ³ aplicado à equação de Schrödinger.

Não havendo uma teoria completa para gravitação quântica, a formulação semiclássica é extremamente importante para antecipar algo concreto, identificando características que devam ser comuns a quaisquer teoria candidata. Um dos primeiros trabalhos nessa linha é do próprio Schrödinger [6], ao estudar os efeitos do potencial gravitacional na equação que leva o seu nome. Na década de 60 se iniciou um estudo mais sistemático com os trabalhos de [André Lichnerowicz](#) (1915-1998) [7, 8], que formulou a teoria quântica de campos livres em espaços curvos, [Leonard Parker](#) (1938-) [9-11], [Stephen Fulling](#) (1945-) [12], [Paul Davies](#) (1946-) [13] pelo desenvolvimento da teoria quântica de campos em espaços curvos com interação. Nessas abordagens, os campos físicos são tratados como objeto quânticos que se propagam sobre um espaço-tempo puramente clássico. Tal abordagem nos deu resultados importantes como a descoberta de [Stephen Hawking](#) (1942-) sobre a emissão de radiação térmica de buracos-negros [14, 15], efeito Unruh [16], e a criação de partículas em cenários cosmológicos [9-11].

Um campo quântico se propagando em um espaço-tempo clássico naturalmente nos leva à equação de Einstein semiclássica,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} = 8\pi \langle \psi | \widehat{T}_{ab} | \psi \rangle, \quad (1.3)$$

que apresenta correções quânticas na geometria através da modificação no lado direito da equação, ao substituir o tensor momentum-energia T_{ab} correspondente à matéria pelo valor esperado de algum tipo de operador momentum-energia \widehat{T}_{ab} em um estado quântico $|\psi\rangle$. Porém, geralmente tal valor esperado leva a quantidades infinitas. Um dos trabalhos mais importantes nessa linha é de [Robert Wald](#) (1947-) [17], que descreve um conjunto de axiomas a serem satisfeitos

³acrônimo para [Wentzel-Kramers-Brillouin](#)

pelo tensor momentum-energia para que os valores esperados sejam grandezas finitas.

Um dos principais problemas da abordagem semiclássica é sua autorecorrência: os estados dos campos de matéria dependem da geometria sobre a qual se propagam, que por sua vez é determinada pelos próprios estados através da equação de Einstein semiclássica (1.3). Isso nos deixa com a falta de um mecanismo consistente para encontrar-se soluções da equação, bem como um método para a escolha de um estado $|\psi\rangle$ particular para o cálculo do valor esperado.

1.3.2 Quantização covariante

Uma predição da Relatividade Geral é a existência de ondas gravitacionais. Se a amplitude dessas ondas for pequena, ela pode ser tratada como uma entidade externa à geometria do espaço-tempo, uma entidade física por si, que se propaga por um espaço-tempo fixo. Isso é descrito matematicamente escrevendo a geometria do espaço-tempo, codificada por uma métrica g_{ab} como sendo a soma de uma geometria fixa η_{ab} e uma pequena perturbação h_{ab} ,

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \sqrt{16\pi G} h_{ab},$$

onde η_{ab} representa o espaço-tempo sobre o qual a onda h_{ab} se propaga, e a constante gravitacional G denota a intensidade da interação gravitacional.

Nessa aproximação trata-se então a perturbação da métrica como um campo físico, e assim consegue-se adaptar a linguagem da Teoria Quântica de Campos à gravidade. Como resultado, as ondas gravitacionais livres tratadas quanticamente podem ser vistas como uma partícula, o gráviton, que é o análogo do fóton do campo eletromagnético. Seguindo a analogia com o caso eletromagnético, interação com outros tipos matéria é feita através apenas da onda h_{ab} .

Os trabalhos nessa linha foram iniciados por [Léon Rosenfeld](#) (1904-1974) [18], [Markus Fierz](#) (1912-2006) e [Wolfgang Pauli](#) [19] da década de 30, enquanto as regras de quantização foram deduzidas principalmente por [Bryce DeWitt](#) (1923-2004) [20–23] e [Richard Feynman](#) [24], da seguinte forma: o lagrangiano para a Relatividade Geral é o lagrangiano de Einstein-Hilbert:

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R_g, \quad (1.4)$$

onde g é o determinante da métrica g_{ab} , R_g é o escalar de curvatura e G a constante gravitacional de Newton. Considerando perturbações h_{ab} em torno do espaço de Minkowski, e expandindo-se

as grandezas geométricas como uma série de potências da perturbação h_{ab} , o lagrangiano (1.4) pode ser reescrito como

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{1}{4} \partial_a h \partial^a h - \frac{1}{2} \partial_a h^{ac} \partial_c h + \frac{1}{2} \partial_c h^{ac} \partial^b h_{ab} - \frac{1}{4} \partial^c h^{ab} \partial_c h_{ab} + \mathcal{O}(h^3). \quad (1.5)$$

que é o lagrangiano para o gráviton na teoria. O Lagrangiano (1.5) é chamado de *lagrangiano de Fierz-Pauli*, e é o lagrangiano para um campo não massivo de spin 2. A partir de (1.5) se derivam o propagador e as regras de quantização da teoria, da mesma forma que se faz na eletrodinâmica quântica.

O principal problema dessa abordagem é que a teoria de perturbação falha, pois a expansão perturbativa é não-renormalizável. Isso foi mostrado na década de 70 por Gerard 't Hooft (1946-) e Martinus Veltman (1932-) [25] para gravidade pura⁴ e por Stanley Deser (1931-) e Peter van Nieuwenhuizen (1938-) [26–31] para gravidade acoplada com matéria. Este resultado também pode ser visto de uma forma mais “ingênua” através de análise dimensional. Em um espaço-tempo de d dimensões a ação de Einstein-Hilbert pode ser escrita esquematicamente na forma

$$S_{\text{EH}} \sim G^{-1} \int d^d x \sqrt{-g} R_g. \quad (1.6)$$

O elemento de integração $d^d x$ tem dimensão $-d$ e o escalar de curvatura, escrito esquematicamente como $R \sim \partial^2 g + (\partial g)^2$ tem dimensão 2. Logo, a constante gravitacional tem dimensão $2 - d$. A grosso modo, temos:

$d < 2$ A constante de acoplamento *diminui* em grandes escalas de energias, e dizemos que a teoria é *superrenormalizável*. Nesse limite a teoria se assemelha mais e mais a uma teoria livre, e uma vez que nesse limite a interação é extremamente fraca, conseguimos bons resultados aproximando a teoria como uma teoria livre mais uma pequena perturbação.

$d > 2$ A constante de acoplamento *aumenta* em grandes escalas de energias, e dizemos que a teoria é *não-renormalizável*. A aproximação perturbativa falha, uma vez que a interação não pode ser ignorada.

$d = 2$ O caso intermediário entre os dois mencionados acima. Nesse caso dizemos que a teoria

⁴Mais precisamente, eles mostraram que a gravidade é renormalizável a um laço sem a presença de campos de matéria, e não-renormalizável ao se acoplar com um campo escalar.

é renormalizável⁵.

Assim, concluímos que a Relatividade Geral em espaços-tempo de 4-dimensões é não-renormalizável.

Uma vez mostrada que quantização covariante não funciona como uma teoria fundamental, sendo assim uma teoria efetiva, iniciou-se a busca por uma extensão da Relatividade Geral que pudesse fornecer uma teoria quântica renormalizável. Por exemplo, extensões envolvendo dimensões extras e supersimetria resultaram na teoria de cordas no final da década de 80.

1.3.3 Supercordas

A teoria de cordas teve início na década de 60, quando aceleradores de partículas tomaram o lugar dos detectores de raios cósmicos como método principal de descobrir novas partículas. De fato, isso resultou em uma infinidade de novas partículas e a Teoria Quântica de Campos, consagrada até então pelo sucesso da Eletrodinâmica Quântica, não conseguia explicar os resultados obtidos. Os dados obtidos exibiam certas regularidades: a relação entre a massa M e o *spin* J das partículas se encaixava numa relação linear,

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} J + b, \quad (1.7)$$

onde α' é denominada *inclinação de Regge*.

As linhas retas no plano $M^2 - J$, como mostrado na figura 1.1, chamam-se *trajetórias de Regge*. Baseado em regularidades como essa nos dados, [Gabriele Veneziano](#) (1942-) propôs que a *função beta de Euler*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

onde Γ é a função gamma, podia ser utilizada para para construir uma amplitude de probabilidade

$$A(s, t) = B(-\alpha(s), -\alpha(t)), \quad \alpha(s) = \alpha's + \alpha_0 \quad (1.8)$$

(escrita nas *variáveis de Mandelstam* (s, t, u)) que explicava as trajetórias de Regge observadas [33]. Posteriormente foi sugerido que os resultados (1.7) e (1.8) poderiam ser reproduzidos pela quantização de uma corda [34, 35] que se move pelo espaço-tempo, através de uma ação que descreve uma superfície mínima de duas dimensões espaço-temporais, chamada de *folha*

⁵Nesse caso a teoria pode ainda não ser renormalizável, devendo-se portanto calcular os diagramas de mais alta ordem.

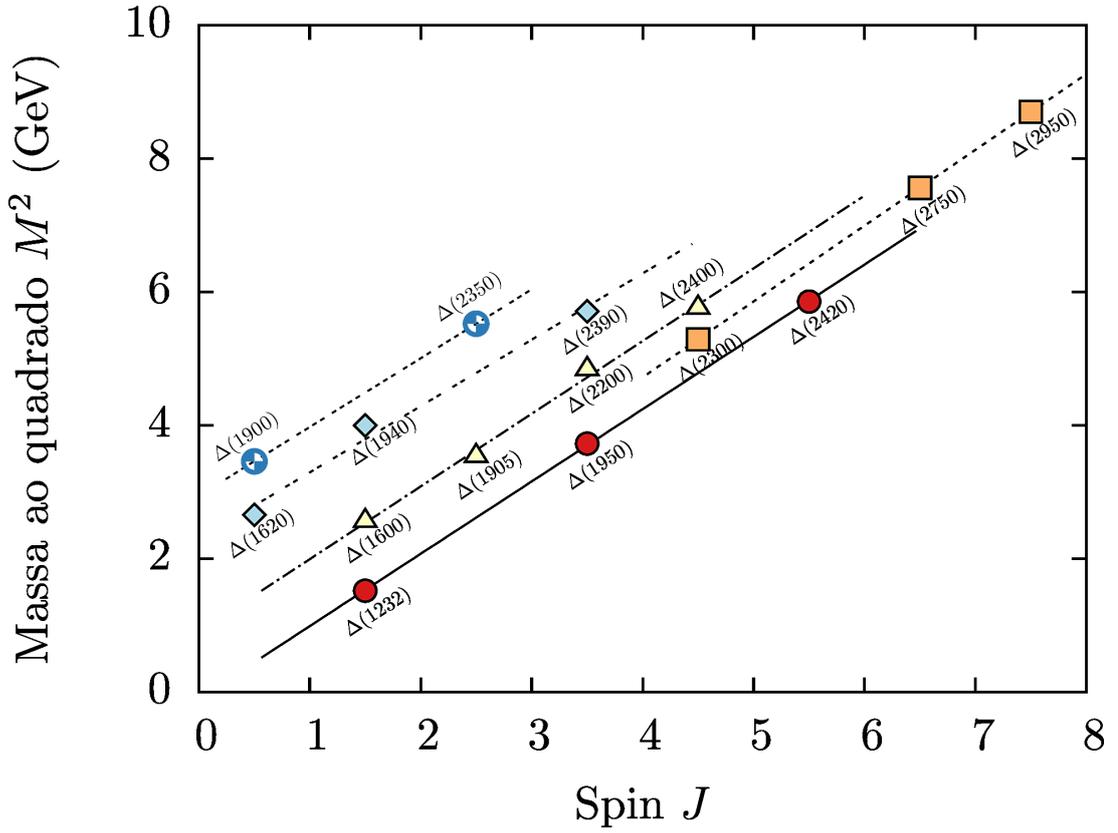


Figura 1.1: Trajetórias de Regge para cinco famílias de bárions Δ , com ajuste linear para cada família. (dados obtidos em [32])

mundo:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad g = \det g_{ab}, \quad (1.9)$$

onde X_μ são as coordenadas da corda sobre o espaço-tempo, σ e τ são as coordenadas sobre a folha mundo. A inclinação de Regge α' está relacionada agora à tensão na corda. A ação (1.9) é chamada *ação de Nambu-Goto*.

Apesar do sucesso em descrever as trajetórias de Regge, a teoria trouxe algumas surpresas, como o aparecimento de uma anomalia conforme, sanada apenas ao se impor um espaço-tempo de 26 dimensões. Também, o espectro quantizado da corda continha um estado de massa imaginária chamado *táquion*, e um estado não massivo de spin 2, que não possui análogo no espectro dos hádrons. Assim a teoria (hoje conhecida como teoria da *corda bosônica*) foi sendo deixada de lado, sendo superada pela *Cromodinâmica Quântica* para descrição da interação forte.

Embora o advento da Cromodinâmica Quântica tenha feito o interesse pela teoria diminuir, as investigações continuaram na tentativa de sanar as inconsistências encontradas. Como a teoria continha apenas estados bosônicos (daí o nome de corda bosônica), um dos primeiros passos tomados foi a introdução de graus de liberdade fermiônicos. A adição desses graus de liberdade

reduziu o número de dimensões necessárias para a consistência da teoria de 26 para 11, mas por outro lado viu-se a necessidade da existência de uma simetria adicional na natureza, a *supersimetria*, que relaciona bósons e férmions. A supersimetria implica, para cada partícula, a existência de um *parceiro supersimétrico* de natureza oposta (se a partícula é um bóson o seu parceiro supersimétrico é um férmion, e vice-versa). Até o presente momento não foi observado nenhum tipo de partícula que corrobore essa simetria. A adição da supersimetria como ingrediente fundamental à teoria de cordas rendeu-lhe o nome de teoria das supercordas.

Tabela 1.1: Tabela de partículas e seus parceiros supersimétricos, de acordo com a extensão supersimétrica do Modelo Padrão (Minimal Supersymmetric Standard Model)

Partícula	Spin	Descrição	Parceiro supersimétrico	Spin	Massa (GeV) (MSSM)
e, μ, τ	1/2	léptons com carga	sléptons $\tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}$	0	157-491
ν_e, ν_μ, ν_τ	1/2	neutrinos	sneutrinos $\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau$	0	230-486
u, c, t	1/2	quarks <i>up, charm e top</i>	squarks $\tilde{u}, \tilde{c}, \tilde{t}$	0	312-960
d, s, b	1/2	quarks <i>down, strange e bottom</i>	squarks $\tilde{d}, \tilde{s}, \tilde{b}$	0	281-964
G	2	gráviton	gravitino \tilde{G}	3/2	?
W^\pm	1	bósons fracos	Wino \tilde{W}^\pm	1/2	97-741
Z	1	bóson fraco	Zino \tilde{Z}	1/2	45-744
γ	1	fóton	fotino $\tilde{\gamma}$	1/2	45-744
g	1	glúon	gluino \tilde{g}	1/2	300-1009
H	0	bóson de Higgs	higgsino \tilde{H}	1/2	68-1024

A teoria de supercordas tem como premissa fundamental que as partículas são vibrações de uma corda fundamental, cada partícula correspondendo a um dos vários modos de vibração. Um desses modos representa um estado correspondente a uma partícula de spin 2, que é identificado com o gráviton, que é a partícula mediadora da interação gravitacional; assim, a teoria contém (de certa forma) uma teoria quântica para a gravitação, e a partir daí passou-se a tomar a teoria não só como uma teoria para as interações fortes, mas como uma teoria que unificava todas as interações fundamentais.

Atualmente, existem cinco teorias de cordas:

- Tipo I (cordas abertas, fermiônicas),
- Tipo IIa (cordas fechadas, bosônicas),
- Tipo IIb (cordas fechadas com orientação),
- heterótica SO(32) e

- heterótica $E_8 \times E_8$,

definidas sobre um espaço-tempo de onze dimensões. Contudo, foi descoberto que as cinco teorias mencionadas são relacionadas por dualidades (chamadas de dualidades S e T), e assim elas podem ser vistas como diferentes aspectos de uma única teoria, chamada de *teoria M*.

A área teve interesse renovado em 1997, com os trabalhos de [Juan Maldacena](#) (1968-), ao conjecturar a equivalência entre teorias de campo conformes e teorias de supercordas em espaços Anti-de Sitter [36]. Uma grande coleção de *branas* empilhadas produz uma geometria semelhante a de um buraco-negro, cujo horizonte de eventos é aproximadamente um produto $AdS \times S$ entre um espaço anti-de Sitter e uma esfera. Esse tipo de dualidade é conhecido hoje como *dualidade AdS-CFT*.

A despeito da unificação de todas as interações conhecidas, a exigência da teoria para a existência de fenômenos não observados como dimensões extras e supersimetria e o fato das cordas se propagarem sobre um espaço-tempo fixo compele a busca por outras teorias alternativas. Dentre elas se destaca a Gravitação Quântica em Laços, discutida na próxima seção.

1.3.4 Gravitação em Laços

A gravitação quântica em laços (do inglês *Loop Quantum Gravity*) é uma das abordagens que faz parte do que é conhecido como *gravitação quântica canônica*, que se propõe a compatibilizar a Relatividade Geral com a Mecânica Quântica. Esse paradigma difere da abordagem de supercordas, da seguinte forma: na teoria de cordas, formula-se a teoria quântica de campos *sobre* o espaço-tempo, enquanto aqui é feita a teoria quântica de campos *do* espaço-tempo. A teoria também não pretende substituir o Modelo Padrão, sendo uma proposta apenas para a gravidade. Também, seguindo uma linha diferente das supercordas, que segue o legado da Teoria Quântica de Campos ao se trabalhar principalmente com expansões perturbativas, a gravitação *via* laços tem como ponto de partida a Relatividade Geral, tentando manter a invariância por difeomorfismo e independência da métrica ambiente mesmo a nível quântico. Suas equações centrais são derivadas a partir da formulação de valor inicial da RG [37], onde a invariância por difeomorfismo rende um caráter de teoria de campos com vínculos, que devem ser preservados quanticamente.

A teoria teve seu início na década de 80, com a formulação espinorial da Relatividade Geral de Amitaba Sen [38] e posteriormente com [Abhay Ashtekar](#) (1949-) ao mostrar que era possível

reescrever as equações da Relatividade Geral em termos de variáveis canônicas (hoje conhecidas como *variáveis de Ashtekar*) que lembravam as usadas em teorias de Yang-Mills [39, 40]. Isso trouxe a esperança de que as técnicas de quantização de teorias de calibre, já bem sucedidas com o Modelo Padrão, pudessem ser aplicadas no caso da Relatividade Geral.

De fato, algumas ideias foram transportadas de uma teoria para a outra; em particular, o uso de *holonomias*, proposto por [Kenneth Wilson](#) (1936-2013) para descrição não-perturbativa da Cromodinâmica Quântica [41]. Pode-se dizer que a gravitação em laços é a teoria quântica das holonomias e suas variáveis canonicamente conjugadas, os *fluxos*. A holonomia é uma medida local da curvatura do espaço-tempo, quando acumulada ao longo de uma curva γ ; ela é dada pela expressão

$$h_\gamma[A] := \exp\left(i \int_\gamma A_a dx^a\right), \quad (1.10)$$

onde A_a é a conexão associada ao grupo de calibre da teoria. O fluxo, denotado por E , é definido sobre uma superfície f ao invés de uma linha⁶, e denota-se por $E[f]$. Assim, a estrutura da teoria é ditada pelas relações canônicas de comutação

$$\{E[f], h_\gamma[A]\} = in(\gamma, f)h_\gamma,$$

onde $n(\gamma, f)$ é o número de vezes que a curva γ intercepta a superfície f (figura 1.2). A quantiza-

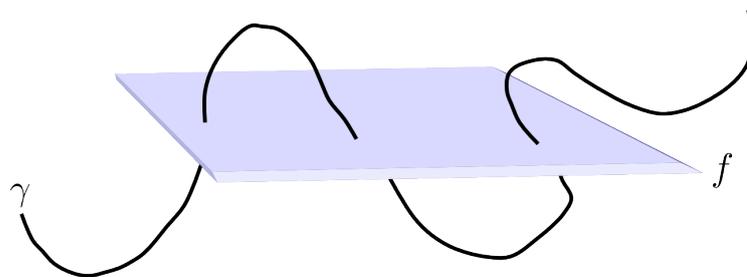


Figura 1.2: Curva γ cruzando uma superfície f . O número de vezes que a curva corta a superfície é denotado por $n(\gamma, f)$. No caso mostrado na figura temos $n(\gamma, f) = 3$.

ção se segue de forma análoga à TQC, através da construção do espaço de Fock, que representa o espaço de Hilbert correspondente à sistemas com número arbitrário de partículas. Nesse caso, ao invés de partículas, o constituinte fundamental é o laço determinado pela holonomia. Esse espaço de Fock pode ser escrito em termos de uma base ortogonal particular chamada *redes de spin* (figuras 1.3 e 1.4), através da qual escreve-se os operadores quânticos [42].

⁶Em três dimensões espaciais, se a variável de configuração é uma p -forma, seu *momentum* conjugado é uma $(3 - p)$ -forma.

Em particular, grandezas geométricas como área e volume passam a ter operadores associados, e mais ainda, têm o espectro quantizado. Por exemplo, os autovalores do operador área são

$$\hat{A}[S] = 8\pi\gamma\hbar G \sum_k \sqrt{j_k(j_k + 1)}, \quad (1.11)$$

onde γ é chamado *parâmetro de Barbero-Immirzi*, e a soma é feita sobre todos as ligações da rede que cruzam a superfície S .

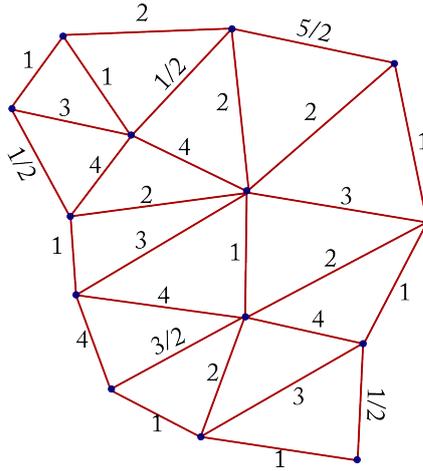


Figura 1.3: Representação pictórica de uma rede de *spin*. Em gravitação em laços, uma rede de spin está associada a um estado quântico do campo gravitacional.

Avanços recentes foram feitos principalmente no contexto cosmológico, através de uma simplificação da teoria completa pela imposição de simetrias ao sistema, resultando em uma subteoria denominada Cosmologia Quântica em Laços [43, 44]. Isso permite mostrar explicitamente como é resolvido o problema da singularidade do big-bang, onde flutuações quânticas na própria geometria do espaço-tempo guiam sua evolução a um *bounce*, evitando assim a singularidade clássica [45]. Apesar do *bounce* ser uma característica independente do modelo, sua investigação em modelos mais complicados (como os modelos de Bianchi, com anisotropia) exige a utilização de métodos numéricos [46, 47].

A teoria também provê uma descrição microscópica para a entropia dos buracos negros [48–50], através da descrição de seus estados por uma teoria de Chern-Simmons [51, 52]. Tal descrição é consistente com a entropia de Bekenstein-Hawking, apresentando uma correção logarítmica em altas energias.

Como as outras abordagens, o sucesso da gravitação em Laços não mascara alguns problemas que ela apresenta. Um deles é o limite clássico, uma vez que não se sabe ao certo se ela recupera a Relatividade Geral como (único) limite de baixas energias. Outro problema está relacionado ao

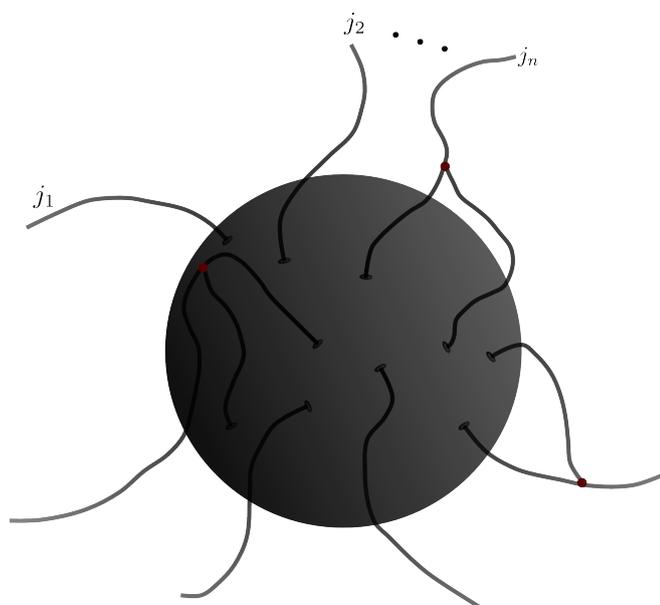


Figura 1.4: Rede de spin cruzando uma superfície esférica. Cada uma das ligações j_1, \dots, j_n contribui para o espectro de área com um fator proporcional a $\sqrt{j_i(j_i + 1)}$.

caráter dinâmico do tempo na Relatividade Geral: não é sabido que espaço de Hilbert deve ser escolhido para descrever os graus de liberdade físicos da teoria, uma vez que o grupo de difeomorfismo introduz várias redundâncias adicionais na forma de graus de liberdade. Tentativas de resolver esses problemas são relacionadas à quantização por integral de trajetória, que são mais conhecidos por *espumas de spin* (*spinfoam methods*).

1.3.5 Geometria Não-Comutativa

Na tentativa de domar os infinitos que povoavam a Eletrodinâmica Quântica, Heisenberg foi o primeiro a propor, em suas cartas para Ehrenfest [53] and Peierls [54], que a estrutura de *continuum* do espaço-tempo deveria ser trocada por uma estrutura de rede. Contudo, uma imposição ingênua de tal estrutura quebra a invariância de Lorentz, uma vez que introduz um comprimento mínimo fundamental, incompatível com o princípio da Relatividade Especial.

Hartland Snyder (1913-1962) foi o primeiro que conseguiu implementar a estrutura de rede para o espaço-tempo, preservando a invariância de Lorentz [55, 56]. A ideia não ganhou muita atenção na época, uma vez que as técnicas de renormalização se mostraram muito efetivas para a TQC. Contudo, nas últimas décadas a ideia ganhou atenção novamente com os trabalhos de Alain Connes (1947-) [57] e Stanisław Woronowicz (1941-) [58, 59], ao encontrar aplicação em supercordas, através de uma versão modificada da teoria de Kaluza-Klein de dimensões extras [60, 61], e em formulações do próprio Modelo Padrão [62].

Para ter-se uma ideia de como a geometria não-comutativa pode ser de interesse para a Física, vamos considerar um exemplo simples do espaço Euclidiano. Nele podemos introduzir as coordenadas usuais x, y e z , que denotaremos por x_1, x_2 e x_3 respectivamente. Intuitivamente, a prescrição usual da Mecânica Quântica associa para cada observável clássico um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert; assim, quanticamente temos os operadores \hat{X}_1, \hat{X}_2 e \hat{X}_3 , e eles satisfazem as relações de comutação

$$[\hat{X}_m, \hat{X}_n] = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (1.12)$$

agora, considere que modifiquemos (1.12) para

$$[\hat{X}_m, \hat{X}_n] = i\theta_{mn}, \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (1.13)$$

onde os coeficientes θ_{mn} representam os parâmetros de não-comutatividade. De fato, (1.13) introduz uma relação de incerteza [63]

$$\Delta\hat{X}_m \cdot \Delta\hat{X}_n \geq \frac{1}{2}|\theta_{mn}|, \quad (1.14)$$

que compromete a medição simultânea de duas coordenadas distintas quando se atinge distâncias da ordem de $\sqrt{|\theta_{mn}|}$. Assim, uma vez que tal medição passa a ser impossível, perdemos a noção clássica de ponto. Isso introduz um corte UV natural, removendo os infinitos da teoria. Uma discussão mais detalhada sobre essa abordagem será feita no capítulo 2, onde propomos um modelo simplificado de espaço não-comutativo (chamado esfera *fuzzy*) para modelar o horizonte de eventos de um buraco-negro esféricamente simétrico.

1.3.6 Outras abordagens

Uma vez mencionadas as propostas mais conhecidas para se abordar o problema da Gravitação Quântica, vale listar também outros programas, que contém um número menor de pesquisadores:

Conjuntos Causais Proposto por [Rafael Sorkin](#) (1945-), pode ser visto como um desenvolvimento da abordagem de soma sobre históricos (integral de trajetória). Nessa abordagem o espaço-tempo como conhecemos é uma aproximação de um conceito fundamental, o *con-*

junto causal: Um conjunto de elementos que apresenta uma relação de ordem entre si. Essa ordem é o que define a estrutura causal do espaço-tempo. As amplitudes de probabilidade das trajetórias do sistema são então atribuídas de acordo com essas relações de ordem [64]. Um dos sucessos da proposta foi proporcionar uma explicação para o pequeníssimo valor – mas não-nulo – da constante cosmológica [65, 66] ⁷:

$$\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2}\Omega_\Lambda \approx 1.074 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2},$$

onde H_0 denota a constante de Hubble, c a velocidade da luz no vácuo e Ω_Λ a densidade de matéria escura dividida pela densidade crítica atual.

Triangulações dinâmicas Proposto por Jan Ambjørn, Renate Loll e Jerzy Jurkiewicz [67], é uma continuação do chamado *Cálculo Regge* [68], que é uma forma de se encontrar soluções das equações de Einstein através de triangulações do espaço-tempo⁸. A teoria pode ser vista também como uma discretização da integral de trajetória para o campo gravitacional, representada formalmente por

$$Z = \int_{\text{todos os espaços-tempos}} \mathcal{D}g_{ab} e^{iS_{\text{EH}}(g_{ab})},$$

onde S_{EH} denota a ação de Einstein-Hilbert. Nesse caso, os “tijolos” da triangulação funcionam como “átomos” do espaço-tempo.

Teoria Quântica de Grupos Proposto por Daniele Oriti [69], ela apareceu como uma generalização de modelos matriciais para gravitação quântica bidimensional, e é intimamente relacionada à Gravitação em Laços e Triangulações Dinâmicas. Matematicamente ela é construída da mesma forma que a teoria quântica de campos usual, exceto que o espaço-tempo ambiente não é um espaço físico, mas sim o espaço de triangulações de geometrias.

⁷Dados extraídos de [Planck Collaboration. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. arXiv preprint: arXiv:1303.5076 \(2013\).](#)

⁸Essas triangulações são também conhecidas por *simplexos*.

1.4 Fenomenologia e pegadas experimentais

1.4.1 Violação da Simetria de Lorentz e Raios-gama ultra energéticos

Uma das questões recorrentes sobre gravitação quântica é o estado da invariância de Lorentz em pequenas escalas de comprimento: seria a simetria de Lorentz uma simetria fundamental, exata, ou uma simetria presente apenas na nossa escala de energia? Caso a simetria de Lorentz seja quebrada, a independência de observador seria quebrada, e seria possível extrair um referencial preferencial na natureza.

Apesar de ser uma especulação sem base conclusiva (mesmo teoricamente), existem modelos incorporando a violação de Lorentz nos diversos sabores de gravitação quântica, seja em supercordas [70–73] ou gravitação em laços [74], embora neste último caso é argumentado que os cálculos foram feitos baseados em hipóteses não-físicas (de fato, nas referências [75] e [76] esse problema foi discutido, argumentando como a discretização de observáveis geométricos não implica na quebra de simetria, da mesma forma que a quantização do momentum angular não implica em uma quebra da simetria rotacional). A anisotropia também está presente na geometria não-comutativa [77] e em teorias efetivas que apresentam bósons de calibre emergentes [78, 79].

Como as escalas de energias nas quais se espera encontrar efeitos quânticos na gravitação são enormes, parece impossível verificar quaisquer teoria de gravitação quântica experimentalmente, uma vez que seus efeitos são desprezíveis. Apesar de isso ser verdade para qualquer experimento imaginado no nosso planeta, existe um terreno que nos dá uma certa esperança: a Cosmologia e a Astrofísica.

Cosmologia é o estudo das propriedades do universo como um todo, sua origem e evolução, enquanto a astrofísica estuda as galáxias, estrelas e planetas. Nos dois casos as escalas características de suas observações ultrapassam por muito os experimentos realizados na terra. Nesse caso, é possível que alguns efeitos antes desprezíveis, sejam “amplificados” de tal forma que possamos tentar observar. Por exemplo, em [80] é discutido como a escala de Planck pode modificar as relações de dispersão de partículas com alta energia, enquanto em [81] os autores apresentam limites experimentais analisando a radiação eletromagnética da Nebulosa de Câncer (*Crab Nebula*).

Outra forma de se limitar experimentalmente as buscas pela violação da simetria de Lorentz

é através de explosões de raios gama (γ -ray bursts), que são emissões extremamente energéticas observadas em galáxias distantes. Nessas escalas de comprimento, a Simetria de Lorentz implica um limite superior para a energia das partículas constituintes desses raios: o limite de Greisen-Zatsepin-Kuz'min [82, 83]. Contudo, foi confirmado que algumas fontes de raios gama em distâncias cosmológicas [84] emitem partículas com energias acima desse limite [85].

A possibilidade da violação da simetria de Lorentz será discutida no capítulo 3, onde propomos dois estudos distintos: em um, construímos uma geometria curva em seis dimensões que se assemelha a um defeito topológico do tipo corda, onde mostramos como a geometria e a quebra da simetria de Lorentz afeta a interação gravitacional através da massa do gráviton na teoria efetiva em quatro dimensões; no outro, realizamos um cálculo perturbativo para investigar possíveis correções quânticas devido à quebra da simetria no potencial gravitacional.

1.4.2 Física de partículas e dimensões extras

Uma das questões fundamentais em Física de altas energias – e para a qual não se tem uma resposta conclusiva – é por que a gravidade é tão fraca quando comparada com as outras interações fundamentais?

Para entender melhor o problema, é importante falar sobre uma característica geral da Teoria Quântica de Campos: a variação das constantes de acoplamento. Considere por exemplo uma carga elétrica em um meio material dielétrico. Ao se colocar uma carga q em um material dielétrico, os átomos do material são induzidos a formarem um campo de dipolos (figura 1.5) que *reduz* o campo elétrico da carga:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{u}_r \implies \frac{q/\epsilon_r}{4\pi\epsilon_0} \vec{u}_r \quad (1.15)$$

de tal forma que a carga medida será q/ϵ_r . Assim, a carga efetiva *aumenta* conforme nos aproximamos da carga, isto é, em pequenas distâncias. Um argumento semelhante pode ser aplicado na teoria quântica de campos: o meio material aqui é o próprio vácuo, visto como um mar de partículas virtuais, criadas e aniquiladas de acordo com as flutuações quânticas. As cargas são assim cercadas por essas partículas virtuais, reduzindo seu valor.

Isso nos diz que a força da interação muda de acordo com a escala de comprimento (energia). Como a força da interação é dada pela constante de acoplamento, dizemos que as constantes de

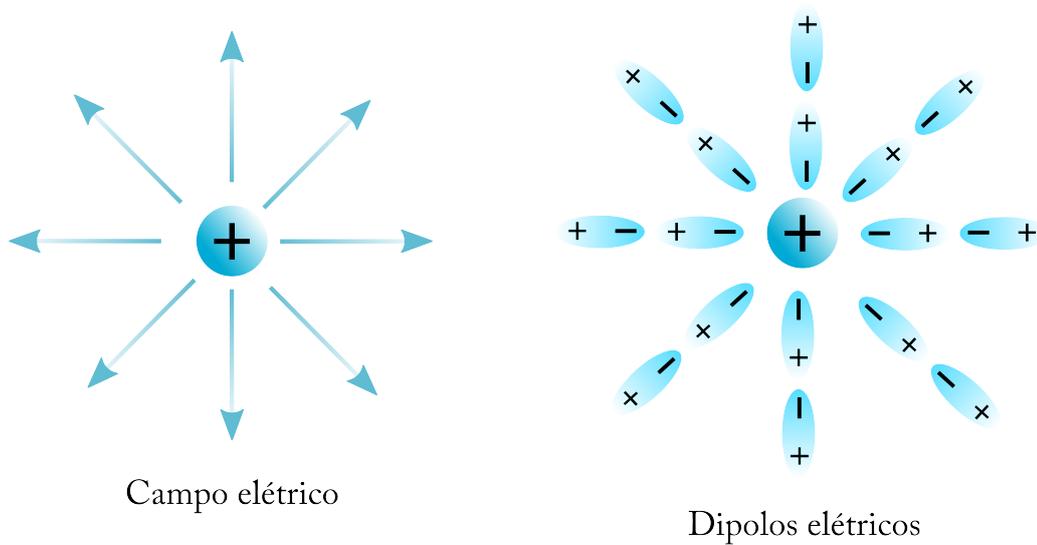


Figura 1.5: *screening* do campo elétrico em um meio dielétrico. O campo elétrico gerado pela carga elétrica induz a polarização das cargas em sua vizinhança, causando a formação de dipolos elétricos.

acoplamento – denotadas por g_i – dependem da distância, ou da escala de energia:

$$\alpha_i = \alpha_i \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right), \quad \alpha_i = \frac{g_i}{4\pi} \quad (1.16)$$

essa dependência com a escala de energia é descrita pela *função beta*, introduzida por [Curtis Callan](#) (1942-) e [Kurt Symanzik](#) (1923-1983):

$$\beta(g_i) = \frac{\partial g_i}{\partial \log \mu}, \quad (1.17)$$

onde μ é a escala de energia.

Expansões perturbativas a um laço mostram que as constantes de acoplamento para as inte-

rações do Modelo Padrão são dadas por [86]

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} \approx 59.1 - \frac{41}{20\pi} \log\left(\frac{\mu}{M_Z}\right), \quad (1.18a)$$

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} \approx 29.6 - \frac{19}{12\pi} \log\left(\frac{\mu}{M_Z}\right), \quad (1.18b)$$

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)} \approx 8.44 - \frac{7}{2\pi} \log\left(\frac{\mu}{M_Z}\right), \quad (1.18c)$$

onde $M_Z \sim 100 \text{ GeV}$ é a massa do bóson Z^0 que media a interação fraca.

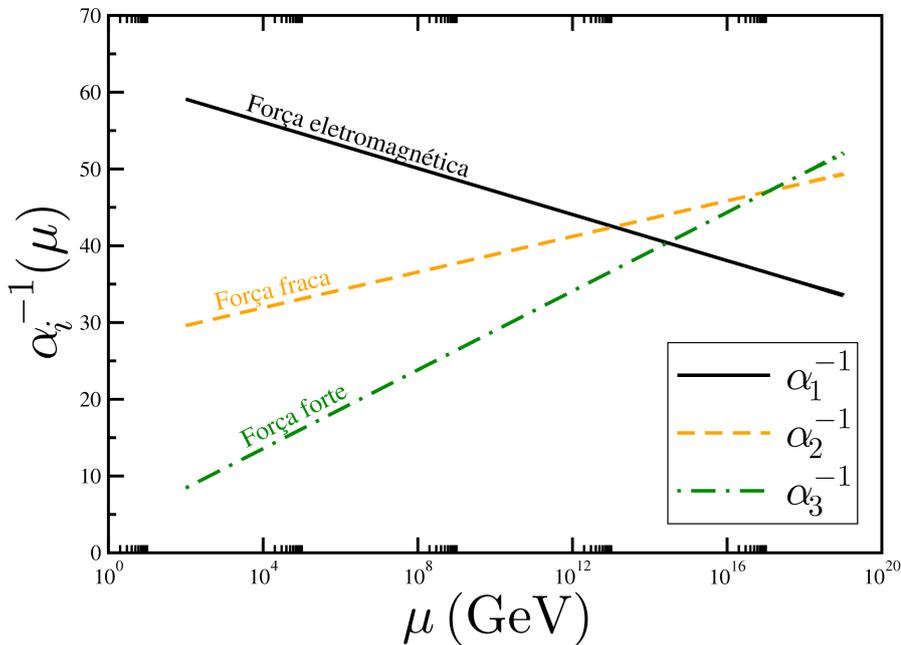


Figura 1.6: Variação das constantes de acoplamento do Modelo Padrão de acordo com a escala de energia, segundo a expansão perturbativa a um laço.

O gráfico das constantes de acoplamento em (1.18a), (1.18b) e (1.18c) é mostrado na figura 1.6. Podemos ver que as curvas tendem a convergir em altas energias; assim, é natural pensar que cálculos/experimento mais precisos mostrem que as interações tenham a mesma intensidade em alguma escala de energia extremamente alta. Espera-se que essa escala seja a escala de planck, $M_P \approx 1 \times 10^{19} \text{ GeV}$. Na escala da força eletrofraca ($M_{EF} \approx 1 \text{ TeV}$), as interações têm diferentes intensidades, e assumem os valores experimentais atuais.

Caso as quatro interações sejam unificadas, o grupo de simetria G na escala de unificação

deve ser quebrado tanto na escala de Planck como na escala eletrofraca:

$$M_P : G \rightarrow L \times K \quad (1.19)$$

$$M_{\text{EF}} : K \rightarrow \text{SU}_c(3) \times \text{SU}_L(2) \times \text{U}_Y(1). \quad (1.20)$$

a essa discrepante diferença entre as escalas de quebra de simetria dá se o nome de *problema da hierarquia de calibre*, uma vez que essa diferença gera problemas no mecanismo de Higgs, da seguinte forma: pelo mecanismo de Higgs, cada simetria é quebrada por um campo escalar com valor esperado de vácuo não-nulo,

$$\langle 0|\phi|0\rangle = V \sim M_P, \quad \langle 0|\xi|0\rangle = v \sim M_{\text{EF}}; \quad (1.21)$$

para uma teoria consistindo apenas desses dois campos escalares a massa do bóson de Higgs deve ter a forma

$$m_H = \alpha v^2 - \beta V^2; \quad (1.22)$$

uma vez que devemos ter $m_H \sim 100 \text{ GeV}$ para obtermos os valores experimentais para as massas dos bósons W^\pm e Z^0 , é necessário um ajuste muito fino no termo V^2 , em todas as ordens da teoria de perturbação.

Dentre as propostas para resolver o problema da hierarquia, tem-se a supersimetria e *technicolor* (sua premissa é um bóson de Higgs como partícula composta de outras partículas, ligadas através de uma nova força chamada technor). No entanto, em 1998 [Nima Arkani-Hamed](#) (1972-), [Savas Dimopoulos](#) (1952-) e [Giorgi Dvali](#) (1964-) propuseram um modelo baseado em dimensões extras [87]. Nesse modelo, o nosso espaço-tempo de $(3 + 1)$ dimensões apresenta D dimensões adicionais, compactificadas em circunferências de raio R ; em grandes distâncias, o universo $(4 + D)$ -dimensional apresenta uma escala de Planck \bar{M}_P modificada, de acordo com o raio de compactificação e o número de dimensões, e o que nós observamos é uma escala de Planck efetiva

$$M_P^2 \sim \bar{M}_P^{2+D} R^D \quad (1.23)$$

Assim, assumindo-se que a escala de Planck fundamental é da ordem da escala de energia da quebra de simetria eletrofraca, $\bar{M}_P \sim M_{\text{EF}}$, o número de dimensões extras pode ser ajustado para obter-se escalas de energia da ordem de TeV. Isso abriu a possibilidade de trazer a física de altas

energias a regiões acessíveis a experimentos (ver por exemplo [88] para testes experimentais com força de Casimir limitando o caso $D = 2$). Em particular, em 2001 foi proposto que o grande colisor de hádrons (Large Hadron Collider – LHC) poderia funcionar como uma “fábrica” de buracos-negros e assim determinar o número de dimensões extras e o valor exato da escala de energia fundamental [89–91].

1.4.3 Universo primordial e modelos inflacionários

Apesar de ainda debatidos, os resultados preliminares do experimento BICEP2 [92] (veja <http://bicepkeck.org/> para os dados), sobre a observação de modos B (figura 1.7) na radiação cósmica de fundo (figura 1.8), abrem uma discussão fundamental sobre a origem do universo. O padrão encontrado pelo BICEP2 supostamente se deve à emissão de ondas gravitacionais, perturbações do próprio espaço-tempo, no período primordial do universo.

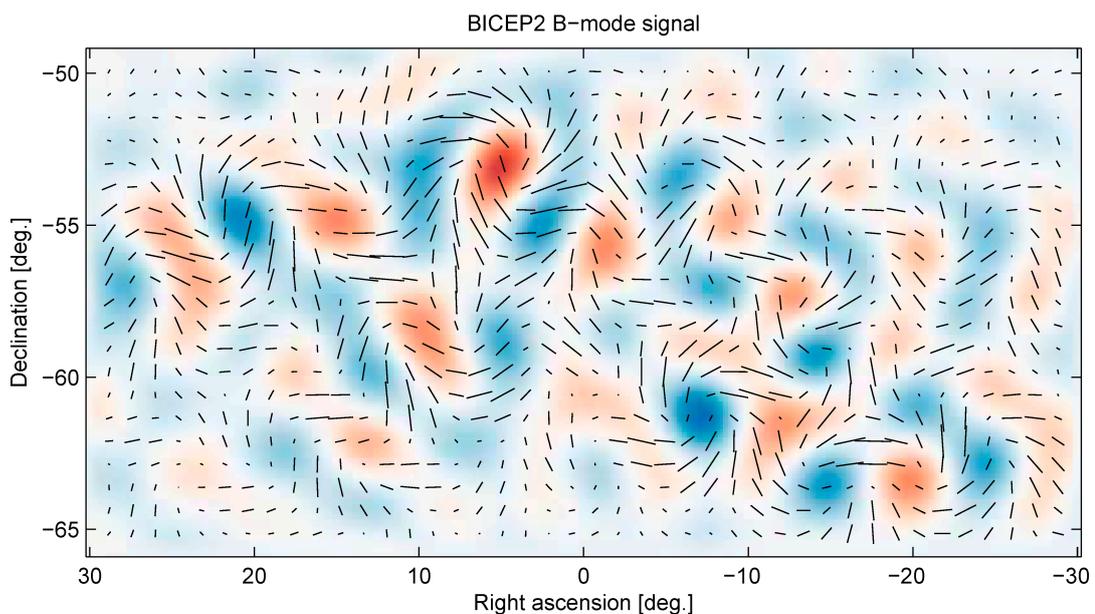


Figura 1.7: Modos de polarização da Radiação Cósmica de Fundo de uma parte do céu. Os modos B são chamados assim porque eles se apresentam como o campo vetorial magnético, que apresenta rotacional mas seu divergente é nulo. Isso é visualizado pela formação de pequenos “vórtices” no campo vetorial. (fonte: referência [92])

Quando se fala em universo primordial, o arcabouço teórico aceito para sua descrição é chamado de *Modelo Padrão da Cosmologia*. O modelo é uma particularização da Relatividade Geral para acomodar observações de que o nosso universo é, em largas escalas de comprimento, isotrópico e homogêneo. Dessa forma, a geometria do espaço-tempo pode ser descrita pela solução de Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker (FLRW) das equações de Einstein. Esse tipo de solu-

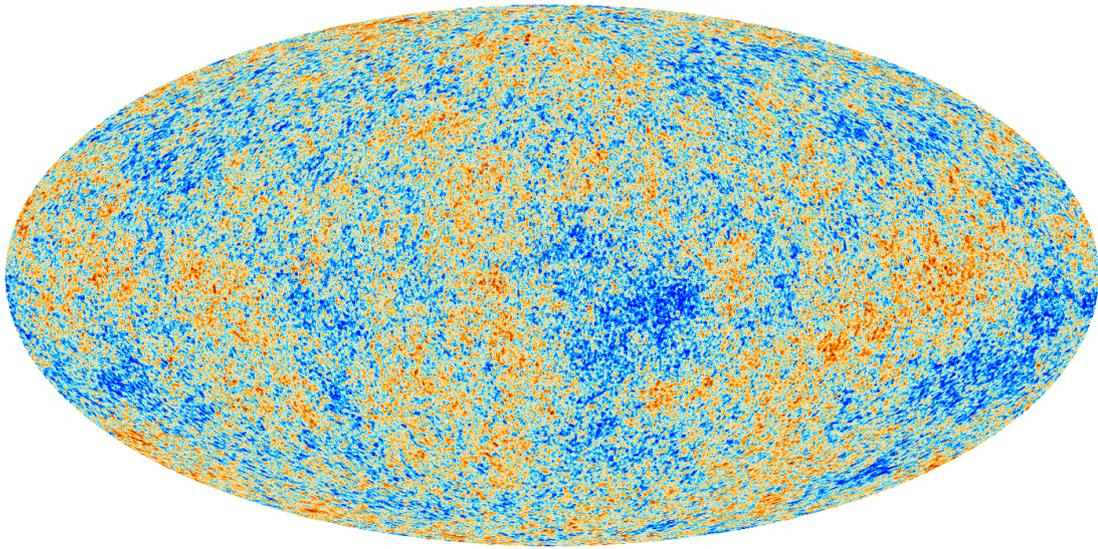


Figura 1.8: Anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo como vistas pelo satélite Planck. Elas mostram pequenas variações de temperatura que correspondem à diferentes densidades da matéria que hoje constitui as galáxias e estrelas. (copyright: European Space Agency, Planck Collaboration)

ção implica que, em algum tempo finito atrás, o universo assumiu um estado altamente singular, chamado de *big bang*. Os teoremas de singularidade asseguram que não é possível evitar essa singularidade classicamente. Tal singularidade por sua vez gera uma série de problemas conceituais em cosmologia, dentre os quais se destaca a *problema do horizonte*. Uma vez que a informação se propaga com uma velocidade máxima finita (a velocidade da luz), durante a evolução do universo formaram-se regiões causalmente desconectadas (isto é, regiões que não afetam uma a outra), e portanto não interagem entre si. Essa interação entretanto é fundamental (ao menos na maioria dos sistemas físicos encontrados, como um gás confinado em uma caixa) para que se atinja um estado homogêneo e isotrópico, pois uma vez que o sistema se inicie em um estado inhomogêneo, a interação permite a troca de energia interna, resultando na homogeneização.

O paradigma aceito atualmente para a solução desses e outros problemas (que serão discutidos no capítulo 4) da Cosmologia clássica é o da *inflação cósmica* [93–95]. A hipótese fundamental aqui é que durante uma pequena fração de tempo após o *Big Bang*, o universo passou por uma fase de rápida expansão acelerada (figura 1.9). O mecanismo padrão para essa fase é normalmente a introdução de um campo escalar, chamado *ínflaton*, com um potencial de auto-interação. O tratamento quântico nesse caso também explica as pequenas flutuações na densidade de matéria observada atualmente.

Apesar dos sucessos, podemos dizer que a inflação resolve os problemas conceituais da cosmologia apenas se suas características principais forem independentes das condições iniciais do

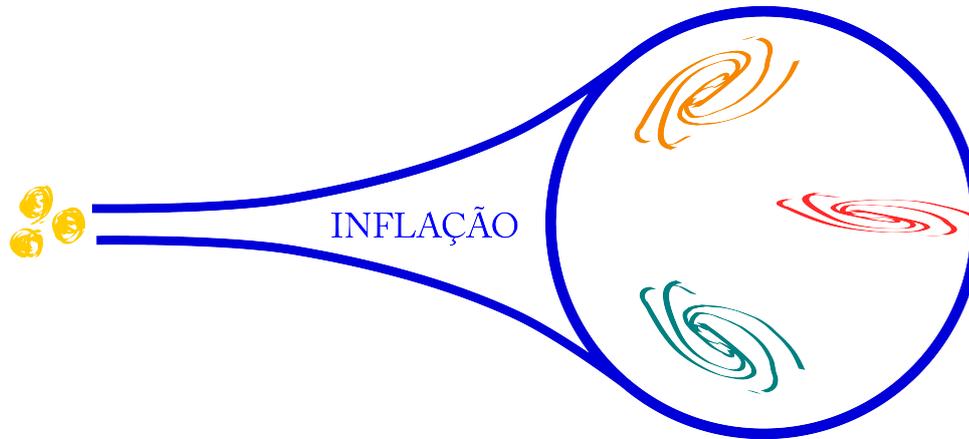


Figura 1.9: Diagrama representando o processo de inflação cósmica. Durante uma pequena fração de tempo o universo se expandiu aceleradamente, possibilitando a formação da estrutura em grandes escalas observada para o universo.

sistema. Isso traz à tona a questão da *naturalidade* dos modelos inflacionários, que discutiremos em detalhes no capítulo 4. Em particular, propomos um modelo inflacionário com acoplamento não-mínimo, a partir do qual calculamos a probabilidade de se obter estágios inflacionários.

1.4.4 Sistemas de matéria condensada

Analogias têm um papel muito importante na Física, fornecendo maneiras diferentes de se pensar e atacar os problemas. Quando bem feitas, permitem extrair as características essenciais do problema, removendo hipóteses e suposições acessórias. Pesquisas em Física teórica de altas energias hoje em dia seguem três linhas principais:

- Abandonar a realidade, se perdendo no reino da matemática pura;
- Usar o aparato matemático como uma ferramenta para descrever problemas reais em Física, como física da matéria condensada;
- Usar fenômenos reais, observados experimentalmente como guia para testar Física de altas energias.

Na terceira linha, o seu representante principal são os modelos de *gravidade análoga*, que se utilizam de ondas sonoras se propagando por um fluido para mimetizar ondas eletromagnéticas se propagando pelo espaço-tempo. Um fluxo supersônico no fluido pode criar regiões de onde as ondas sonoras (fônons) são incapazes de escapar [96, 97]: essas regiões são chamadas de *buracos-negros acústicos*, devido à sua similaridade com as suas versões gravitacionais. Em particular, espera-se encontrar uma versão análoga da radiação de Hawking.

Contudo, existe um outro candidato no mundo “real” que apresenta potencial para auxiliar a Física de altas energias: o *grafeno*.

O grafeno é uma forma alotrópica do carbono, formada por uma “superfície” de um átomo de espessura; o empilhamento dessas superfícies constitui um alótropo mais conhecido, a *grafite*. A física do grafeno passou a atrair a atenção da comunidade teórica quando experimentos indicavam que os elétrons, ao se propagar pela folha do grafeno, se comportavam como férmions de Dirac, isto é, poderiam ser descritos pela equação de Dirac [98–103],

$$(i\hbar\partial - m)\psi = 0 \tag{1.24}$$

para o caso não-massivo ($m = 0$).

Assim, o grafeno pode ser uma realização muito interessante de uma teoria quântica de campos em espaços curvos, podendo apresentar o efeito Unruh-Hawking [104].

O grafeno pode ser também um bom laboratório para testar alguns aspectos de gravitação quântica. Recentemente, Bastos *et al.* [105] investigaram o espectro de energia no grafeno no contexto da geometria não comutativa, mostrando que os estados dos elétrons na vizinhança dos pontos de Dirac \mathbf{K} e \mathbf{K}' em um espaço não-comutativo com campo magnético podem ser descritos como férmions não-massivos com não-comutatividade transferida para o espaço dos momenta. Caso contrário, o grafeno deveria exibir uma quebra de simetria de calibre que atualmente não é observada [106].

Os resultados experimentais presentes atualmente para o grafeno podem ser usados para investigar o possível papel da não-comutatividade em um sistema de matéria condensada, bem como impor limites experimentais para os parâmetros de não-comutatividade. Nessa linha, a proposta desta tese é, como veremos mais adiante no capítulo 2, a investigação de pegadas experimentais da não-comutatividade nas propriedades termodinâmicas do grafeno.

1.5 Organização da Tese

O presente trabalho está organizado como se segue.

No capítulo 2 apresentamos conceitos de geometria não-comutativa, discutindo acerca da não-comutatividade no espaço-tempo e no espaço de fase. Dentro desse contexto apresentamos dois modelos específicos: o da esfera fuzzy, que na nossa pesquisa é usado para introduzir correções quânticas na vizinhança do horizonte de eventos de um buraco negro, e o grafeno, onde a não-comutatividade pode ser interpretada como a presença de um campo magnético de fundo.

No capítulo 3 apresentamos nossa proposta envolvendo a violação da simetria de Lorentz. Primeiramente discutimos mais precisamente o que queremos dizer por violação da simetria de Lorentz, revisando o conceito de transformações ativas e passivas e apresentado as diferenças entre as quebras de simetria explícita e espontânea. Então mostramos nossos resultados envolvendo física das dimensões extras e possíveis correções no potencial gravitacional Newtoniano.

No capítulo 4 apresentamos resultados preliminares na área de cosmologia. Discutimos sobre o problema da naturalidade em cosmologia e como ele se relaciona com o teorema de Liouville, e como a aparente violação desse teorema pode ser reinterpretada com o aparecimento de uma densidade de probabilidade não-uniforme. Mostraremos como isso acontece mais explicitamente considerando um modelo inflacionário específico, onde o ínflaton é acoplado não-minimamente com o campo gravitacional.

Por fim, no capítulo 5 apresentamos um sumário dos resultados obtidos, apresentando perspectivas para a continuidade da pesquisa desenvolvida.

Capítulo 2

Geometria não-comutativa

Vamos apresentar uma revisão dos conceitos necessários para a compreensão das investigações realizadas na tese no campo da geometria não-comutativa. Primeiramente discutiremos sobre a não-comutatividade no espaço-tempo, de onde construiremos a chamada *esfera fuzzy* para modelar o horizonte de eventos de um buraco-negro esféricamente simétrico, e então calcularemos as correções quânticas no seu espectro de área. Depois vamos expor brevemente a não-comutatividade no espaço de fase, a partir do qual estudaremos a propriedades termodinâmicas do grafeno, discutindo sobre os possíveis limites experimentais.

2.1 Introdução

Olhando novamente as mudanças conceituais introduzidas pela Relatividade Geral e a Mecânica Quântica, é possível notar o seguinte: a Relatividade Geral, sendo uma teoria clássica, pode ser descrita em termos da geometria do espaço de fase, estudado pela *geometria simplética* ou *geometria de Poisson*. A Mecânica Quântica por outro lado é descrita por álgebras não comutativas geradas por operadores hermitianos \hat{q}_i, \hat{p}_i , satisfazendo às relações de comutação

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}.$$

A formulação da Relatividade Geral é baseada na geometria pseudo-Riemanniana, que por sua vez é uma subárea da *Geometria Diferencial*. O sujeito principal da geometria Diferencial é a *variedade (manifold)*, que é a generalização do conceito de curvas e superfícies. Uma variedade M com estrutura diferenciável (isto é, uma variedade que possibilita o estudo de suas propriedades

geométricas através do *Cálculo*) pode ser vista através de três pontos de vista diferentes:

Teoria da Medida M é visto como um espaço mensurável, cuja classe de medida (falando de forma grosseira, o *elemento de volume*) é fixa (*varifold*) [107],

Topologia M é visto como um espaço topológico localmente compacto,

Geometria diferencial M é visto como uma variedade diferenciável.

Cada uma das estruturas mencionadas acima pode ser completamente determinada por uma álgebra de funções:

- Álgebra $L^\infty(M, dV)$ de von Neumann das funções limitadas e integráveis sob o elemento de volume dV ,
- C^* -álgebra $C_0(M)$ das funções contínuas sobre M que se anulam no infinito,
- álgebra $C^\infty(M, \mathbb{R})$ de funções diferenciáveis com suporte compacto.

Assim, temos uma relação interessante



que nos permite investigar propriedades geométricas através da álgebra. No caso da geometria diferencial, podemos considerar por exemplo as coordenadas sobre M como geradores da álgebra, e os campos vetoriais são definidos como derivações sobre essa álgebra. Uma vez que a álgebra de funções nesse caso é comutativa, é natural se perguntar que tipo de propriedades geométricas (físicas) podemos encontrar ao substituir a álgebra de funções $C^\infty(M, \mathbb{R})$ por uma álgebra abstrata \mathcal{A} que não é necessariamente comutativa.

Essa extensão encontrou numerosas aplicações em Física, sendo investigada na década de 80 como uma extensão do Modelo Padrão, na tentativa de prover uma versão livre de divergências [77]. Na física da matéria condensada por outro lado, a não-comutatividade emerge de uma forma bastante natural. Um exemplo é o *efeito Hall quântico*, em que a não-comutatividade descreve os elétrons sob a influência de um campo magnético intenso [108, 109]. Também foi explorado como a mecânica quântica na presença da não comutatividade é equivalente ao problema de Landau [110, 111].

Um caso semelhante – mas não exatamente igual – é o da não-comutatividade no espaço dos *momenta* [112, 113]. Uma vez que a modificação agora também é imposta para os operadores *momentum* ao invés dos operadores posição

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\eta_{ij},$$

espera-se encontrar efeitos diferentes da não-comutatividade no espaço-tempo [114–118]. Naturalmente, podemos ainda considerar o caso em que todas as relações de comutação são modificadas:

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\eta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.1)$$

Iremos estudar com mais detalhes esses casos da não-comutatividade na seção 2.4.1.

Uma classe de espaços não-comutativos muito importantes são os *espaços fuzzy*, que são espaços não-comutativos baseados em álgebra de matrizes. Eles foram introduzidos no contexto da teoria de cordas, através de uma ação para uma pilha de D0-branas em um campo magnético [119, 120]. Para o nosso trabalho iremos estudar um dos casos mais simples de espaço fuzzy, que é o da esfera [121].

2.2 Buracos negros e a natureza quântica do espaço-tempo

Dada à possibilidade – ainda que remota – da formação de micro-buracos negros no Grande Colisor de hádrons, é interessante investigar como efeitos de gravidade quântica podem aparecer em sua radiação. Seguindo a ideia de que um espaço-tempo não-comutativo pode incorporar naturalmente efeitos quânticos, nós iremos analisar as correções quânticas na luminosidade de um buraco-negro descrito através de uma esfera *fuzzy*.

Um dos pontos principais é identificar quais são as grandezas geométricas por trás das propriedades do buraco negro. Para isso é interessante considerar primeiro o caso mais simples, que é o de um buraco negro com simetria esférica (também conhecido como *buraco negro de Schwarzschild*). Nesse caso algumas propostas para a descrição da sua geometria são discutidas nas referências [122–126].

Como veremos nas seções seguintes, a luminosidade do buraco negro é relacionada à área superficial do seu horizonte de eventos. A nossa proposta então é, a partir da descrição não-comutativa, calcular a área do horizonte usando uma técnica conhecida como *heat kernel trace*.

A intuição por trás disso vem da equação de calor. Uma das formas mais convenientes de se encontrar a distribuição de calor sobre uma superfície é imaginar que, ao invés de se ter o calor distribuído pela superfície, ele se encontra concentrado em uma série de fontes puntiformes, chamadas de núcleos de calor.

Considerando o horizonte de eventos do buraco negro como a superfície em questão, o que as fontes puntiformes concentram nesse caso é a própria *curvatura* do próprio espaço-tempo. Cada fonte sente o espaço-tempo plano, e a partir de sua evolução com um parâmetro interno podemos extrair as pequenas flutuações quânticas para a geometria.

2.2.1 Equação de calor

Considere uma variedade Riemanniana diferenciável M de dimensão n . A *equação de calor* em M é definida como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta_2 u = 0, \quad u : [0, \infty) \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

onde t denota um parâmetro externo à variedade (tempo), Δ_2 é o operador de Laplace-Beltrami com respeito à segunda variável (as coordenadas sobre a variedade, denominadas *coordenadas espaciais*). A função $u(t, x)$ pode representar então a distribuição de temperaturas no ponto $x \in M$ no instante $t \in \mathbb{R}$.

Dada uma distribuição inicial $u(t = 0, x) = u_0(x)$ sobre a variedade M e uma condição de contorno de Dirichlet sobre a fronteira ∂M de M ,

$$u(t, x) = 0, \text{ se } x \in \partial M, \quad (2.3)$$

existe uma solução especial para (2.2),

$$K : (0, \infty) \times M \times M \longrightarrow M \quad (2.4)$$

chamada *núcleo de calor*, que satisfaz as seguintes condições:

- $K(t, x, y)$ é diferenciável na variável temporal t e duplamente diferenciável nas variáveis espaciais x e y ;

- K é solução da equação de calor (2.2):

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \Delta_2 K = 0; \quad (2.5)$$

- K satisfaz a condição de contorno $K(t, x, y) = 0 \iff x \in \partial M$;
- A igualdade

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_M \text{vol}_y(M) K(t, x, y) f(y) = f(x),$$

onde o subscrito em vol_y denota a variável de integração, é válida uniformemente para toda função f contínua em M e que se anula em ∂M .

Traço do núcleo de calor

Uma propriedade muito importante das membranas é que é possível extrair informação geométrica relacionada à sua forma a partir de seus modos de vibração, em um problema célebre que ficou conhecido como “ouvir a forma de um tambor” [127]. Mais ainda, parte dessa informação geométrica é codificada na equação de calor.

Em termos matemáticos, o tambor é representado por um domínio D no plano, e os modos de vibração são dados pela equação de autovalores

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)\phi = 0 & \text{em } D \\ \phi|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Uma vez definido o operador de Laplace Δ sobre a variedade M e encontrado o seu espectro $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para um conjunto arbitrário de índices I ,

$$\Delta f_\alpha = \lambda_\alpha f_\alpha, \quad (2.7)$$

podemos determinar unicamente o núcleo de calor (2.4) através da expansão em autofunções

$$K(t, x, y) = \sum_{\alpha \in I} e^{-\lambda_\alpha t} f_\alpha(x) f_\alpha(y), \quad (2.8)$$

que converge absolutamente e uniformemente para $t > 0$.

Ao traço do núcleo de calor denominamos a seguinte quantidade:

$$\theta(t) = \int_M \text{vol}_x(M) K(t, x, x), \quad (2.9)$$

que pode ser escrita em uma forma bastante conveniente:

$$\theta(t) = \sum_{\alpha \in I} e^{-\lambda_\alpha t}, \quad (2.10)$$

onde a soma é feita sobre todos os autovalores, levando em consideração sua multiplicidade.

2.2.2 Expansão assintótica do núcleo de calor e quantidades geométricas

O traço do núcleo de calor (2.10) tem uma expansão assintótica para $t \rightarrow 0^+$, como mostrado em [128]:

$$\theta(t) = (4\pi t)^{-n/2} \sum_{i=0}^N c_i t^{i/2} + \mathcal{O}(t^{(N+1)/2}), \quad (2.11)$$

onde \mathcal{O} representa a condição

$$f(t) = \mathcal{O}(g(t)) \iff \exists k \in \mathbb{R} : \left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| < k \text{ when } t \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

e os coeficientes c_i são chamados de *coeficientes de Seeley-de Witt*. Cada coeficiente depende da geometria da variedade; em particular, se a variedade M é compacta com fronteira $\mathcal{B} = \partial M$, os primeiros coeficientes de (2.11) são dados explicitamente por [129]:

$$c_0 = \text{vol}(M), \quad c_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{vol}(\mathcal{B}), \quad c_2 = \frac{1}{3} \int_M S - \frac{1}{6} \int_{\mathcal{B}} J, \quad (2.13)$$

onde S é a curvatura escalar de M e J a curvatura média da fronteira ∂M .

2.2.3 A esfera fuzzy

A arena Teoria Quântica de Campos é o espaço de Minkowski, uma variedade Lorentziana (3+1)-dimensional que admite um vetor de Killing global, o que nos dá um sistema de coorde-

nadas global. Denotando o espaço de Minkowski por \mathbb{M} , temos

$$\begin{aligned}\varphi: M &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ p &\mapsto (x^0, x^1, x^2, x^3).\end{aligned}$$

Contudo mencionamos que uma variedade diferenciável admite também uma formulação algébrica. De fato, considere a álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ de funções complexas sobre \mathcal{M} . O teorema de Stone-Weierstrass garante que podemos aproximar f por uma série de funções polinomiais,

$$f(x) = f_0 + f_\mu x^\mu + \frac{1}{2} f_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + \frac{1}{6} f_{\mu\nu\lambda} x^\mu x^\nu x^\lambda + \dots \quad (2.14)$$

dessa forma podemos dizer que, algebricamente, o espaço de Minkowski é uma álgebra comutativa gerada pelas coordenadas $\{x^\mu\}$ através das relações de comutação $[x^\mu, x^\nu] = 0$. Em resumo, a álgebra nesse caso é a álgebra polinomial $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x^0, x^1, x^2, x^3]$.

A deformação da álgebra polinomial \mathcal{A} através da modificação das relações de comutação,

$$[x^\mu, x^\nu] = 0 \longrightarrow [x^\mu, x^\nu] = i\kappa\theta^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

onde $\theta^{\mu\nu}$ representam as componentes de uma matriz *antisimétrica*. Isso leva a uma família de álgebras \mathcal{A}_κ , parametrizada pelo parâmetro κ . Essa álgebra gera o chamado *espaço-tempo de Groenewold-Moyal* [130, 131]. Outra deformação é a que leva ao chamado espaço-tempo κ -Minkowski:

$$[x^0, x^j] = \frac{i}{\kappa} x^j, \quad [x^i, x^j] = 0. \quad (2.16)$$

Observe que o no limite $\kappa \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow \infty$ no último caso) recuperamos o caso comutativo.

Podemos ver que em geral podemos obter uma série de álgebras não-comutativas a partir desse procedimento de deformação. A deformação que vamos considerar para o nosso trabalho é chamada de *deformação de Lie*, uma vez que ela depende da álgebra das simetrias do espaço-tempo.

Para isso vamos a partir de agora nos restringir ao caso de uma esfera bidimensional de raio R , denotada por \mathbb{S}^2 . Ela pode ser vista como uma superfície imersa em um espaço Euclidiano

tridimensional \mathbb{R}^3 , como o subconjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3; \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2\}. \quad (2.17)$$

Para cada elemento f na álgebra $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{C})$ de funções complexas sobre a esfera \mathbb{S}^2 , podemos escrever a série de potências

$$f(x^1, x^2, x^3) = f_0 + f_i x^i + \frac{1}{2} f_{ij} x^i x^j + \frac{1}{6} f_{ijk} x^i x^j x^k + \dots \quad (2.18)$$

Como mostrado na referência [121], essa álgebra pode ser truncada em uma álgebra de matrizes. Considere uma série de aproximações \mathcal{A}_n para \mathcal{A} , obtidas ao se truncar a expansão (2.18) em um número finito de termos. A álgebra \mathcal{A}_1 por exemplo corresponde aos elementos

$$f(x^1, x^2, x^3) = f_0 \in \mathbb{C}$$

de tal forma que temos simplesmente $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}$, a álgebra de funções definida apenas em um ponto da esfera. Mantendo agora termos lineares,

$$f(x^1, x^2, x^3) = f_0 + f_1 x^1 + f_2 x^2 + f_3 x^3$$

temos que os coeficientes f_μ geram um espaço vetorial quadri-dimensional. Nesse espaço vetorial podemos embutir uma estrutura de álgebra definindo o produto

$$(f \cdot g)(x^1, x^2, x^3) = f_0 g_0 + f_1 g_1 x^1 + f_2 g_2 x^2 + f_3 g_3 x^3,$$

uma vez que o produto usual de funções $(f \cdot g)(x^1, x^2, x^3) = f(x^1, x^2, x^3) \cdot g(x^1, x^2, x^3)$ resultaria em um polinômio de grau maior do que a ordem de truncamento.

Essa álgebra corresponde a álgebra de funções em quatro pontos; assim, aumentando a ordem de truncamento, aumentamos o número de pontos para a descrição da esfera. Contudo, nesse caso uma informação foi perdida: a simetria rotacional da esfera, traduzida pela relação (2.17).

Para isso podemos usar truque: ao invés de considerar as funções coordenadas (x^1, x^2, x^3) ,

considere as matrizes

$$\bar{x}^1 = \kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^2 = \kappa \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^3 = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

onde κ é um parâmetro indeterminado. Essas matrizes, chamadas *matrizes de Pauli*, geram uma álgebra $M_2(\mathbb{C})$ de matrizes 2×2 com entradas complexas.

A simetria rotacional da esfera é expressa através do seu grupo de simetria. A um vetor $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ corresponde a matriz

$$X = \vec{\sigma} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

e à sua norma

$$|\vec{x}|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \det X \quad (2.21)$$

Podemos facilmente verificar que as transformações de simetria, isto é, as transformações que preservam (2.21) são dadas pelo grupo de rotações, ou $SU(2)$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C}, \quad |w|^2 + |z|^2 = 1 \right\} \quad (2.22)$$

da seguinte forma: para qualquer $U \in SU(2)$,

$$X' = U X U^\dagger \implies \det X = \det X' \quad (2.23)$$

Assim, o grupo de rotações tem uma ação natural sobre a álgebra $M_2(\mathbb{C})$, e mais ainda, temos

$$(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^3)^2 = 3\kappa^2 \quad (2.24)$$

de onde podemos relacionar $\kappa^2 = R^2/3$ pela equação da esfera (2.17).

Pode-se verificar também que os geradores \bar{x}^i satisfazem a álgebra do momento angular, descrita pelas relações de comutação

$$[\bar{x}^i, \bar{x}^j] = 2\kappa i \epsilon^{ij}_k x^k = i\hbar C^{ij}_k x^k, \quad (2.25)$$

onde

$$\lambda = 2\kappa R, \quad C_k^{ij} = \frac{1}{R} \epsilon_k^{ij} \quad (2.26)$$

e ϵ_k^{ij} denota o símbolo de Levi-civita

$$\epsilon_3^{12} = -\epsilon_3^{21} = 1 \quad (2.27)$$

$$\epsilon_2^{31} = -\epsilon_2^{13} = -1 \quad (2.28)$$

$$\epsilon_1^{23} = -\epsilon_1^{32} = -1 \quad (2.29)$$

$$\epsilon_2^{23} = -\epsilon_2^{32} = 0. \quad (2.30)$$

Como as matrizes \bar{x}^i não comutam entre si, podemos ver como a noção de ponto é perdida aqui; de fato, cada gerador da álgebra $M_2(\mathbb{C})$ possui apenas dois autovalores, a saber ± 1 . Logo, os únicos pontos distinguíveis são os pólos Norte e Sul.

Prosseguindo com o truncamento de (2.18) em potências acima de 1, podemos verificar que

$$\mathcal{A}_n = M_n(\mathbb{C})$$

e que as matrizes \bar{x}^i são substituídas pelos geradores de representações irredutíveis da álgebra $\mathfrak{su}(2)$: $\bar{x}^i = \kappa J^i$. Em particular, truncando a série (2.18) nos termos quadráticos resulta em

$$\bar{x}^1 = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^2 = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^3 = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

a constante κ também depende da representação considerada: para uma representação $n = 2, 3, 4, \dots$ tem-se

$$\kappa^2 = \frac{R^2}{n^2 - 1} \quad (2.32)$$

O parâmetro κ tem dimensão de comprimento ao quadrado, e tem um papel análogo à constante de Planck na Mecânica Quântica, como parâmetro de quantização. Note que no limite $\kappa \rightarrow 0$ os geradores \bar{x}^i se tornam comutantes e assim recuperamos a esfera comutativa.

Espectro do operador de Laplace não-comutativo

Um campo vetorial diferenciável sobre \mathbb{S}^2 é definido algebricamente como uma derivação sobre a sua álgebra de funções \mathcal{A} . Considerando então a sua versão não-comutativa, um campo vetorial é uma derivação sobre a álgebra \mathcal{A}_n . Uma vez que a álgebra \mathcal{A}_n é simples, qualquer derivação $X : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ é da forma $X = \text{ad}(Y)$, onde ad denota a representação adjunta da álgebra,

$$\begin{aligned} \text{ad}(Y) : M_n(\mathbb{C}) &\rightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto [Y, X] \end{aligned}$$

para algum $Y \in \mathcal{A}_n$.

A simetria rotacional na esfera comutativa implica a existência de três vetores de Killing L^1 , L^2 e L^3 . Da mesma forma, podemos definir seus análogos não-comutativos:

$$e^i = \frac{1}{i\lambda} \text{ad}(\bar{x}^i) \quad (2.33)$$

Isso nos dá o operador de Laplace

$$\Delta\Phi = -[(e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2] \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} [\bar{x}^1, [\bar{x}^1, \Phi]] + \frac{1}{\lambda^2} [\bar{x}^2, [\bar{x}^2, \Phi]] + \frac{1}{\lambda^2} [\bar{x}^3, [\bar{x}^3, \Phi]] \quad (2.35)$$

que coincide com o Laplaciano comutativo no limite $\lambda \rightarrow 0$ [121, 132].

A equação de autovalores (2.7) para o caso não-comutativo resulta no espectro

$$\lambda_\ell = \frac{\ell(\ell + 1)}{R^2}, \quad \ell = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2.36)$$

que é exatamente igual ao espectro no caso usual, exceto pela presença de um corte devido ao truncamento da álgebra de funções. Da mesma forma que o análogo comutativo, cada autovalor λ_ℓ tem multiplicidade $2\ell + 1$.

Área do buraco negro

Vamos mostrar agora como o traço do núcleo de calor pode ser usado para calcular a área da esfera não-comutativa, através de uma extrapolação dos resultados clássicos. Essa extrapolação

será usada como artefato físico para encontrar assinaturas da não-comutatividade no âmbito clássico, revelando algumas pistas sobre o regime quântico do espaço-tempo, descritos por uma teoria completa de gravitação quântica.

O ingrediente principal aqui é o espectro do operador Laplaciano. Ele é dado por (2.36). Assim, o traço do núcleo de calor (2.10) para a esfera *fuzzy* pode ser escrito como uma soma finita

$$\theta(t) = \sum_{0 \leq \ell < N} (2\ell + 1)e^{-\lambda_\ell t}, \quad (2.37)$$

onde o fator $(2\ell + 1)$ é a multiplicidade de cada autovalor λ_ℓ .

Como ℓ é número dimensional, os autovalores (2.36) têm dimensão [comprimento]⁻²; logo, o parâmetro t tem dimensão de [energia]⁻² em unidades naturais; definindo-se

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.38)$$

nós temos que Λ tem dimensão de energia. Podemos interpretar esse parâmetro como a escala de energia característica para observar efeitos da não-comutatividade na geometria do espaço-tempo.

Com tal interpretação, podemos imaginar que o corte para Λ seja da ordem da escala de Planck:

$$\Lambda = \Lambda_* = M_{\text{P}} \sim 1 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (2.39)$$

Assim, ao contrário do caso comutativo, a expansão assintótica (2.11) deve ser tomada não no limite $t \rightarrow 0$ mas sim $t \rightarrow t_* = M_{\text{P}}^{-2}$. Assim, definindo-se

$$\alpha(s) = 4\pi t \theta(t) = 4\pi t \sum_{0 \leq k < N} (2k + 1)e^{-\lambda_k t}. \quad (2.40)$$

a extrapolação do comportamento clássico exibido pelas equações (2.11) e (2.13) relacionam a área A da esfera com o coeficiente da potência $(t - t_*)^0$ da expansão de (2.40). Para determinar esse coeficiente, empregamos a fórmula de soma de Euler-Mclaurin:

$$\sum_{a \leq k < b} f(k) = \int_a^b dx f(x) + \sum_{1 \leq k \leq M} \frac{b_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_a^b + R_M, \quad (2.41)$$

onde $a, b \in \mathbb{Z}$ são tais que $a \leq b$, b_k denotam os *números de Bernoulli*

$$b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, \dots \quad (2.42)$$

e R_M denota o resto do truncamento da série, ao somar termos até $M \geq 1$:

$$R_M = \frac{(-1)^{M+1}}{M!} \int_a^b dx B_M(\{x\}) f^{(M)}(x), \quad (2.43)$$

onde $B_M(\{x\})$ é o polinômio de Bernoulli e $\{x\}$ é uma abreviação para a parte fracionária

$$\{x\} = x - [x] \quad ([x] \text{ é o maior inteiro que é menor ou igual a } x). \quad (2.44)$$

Assim, tomando

$$f(x) = 4\pi t (2x + 1) \exp\left(-\frac{x(x+1)}{R^2}t\right), \quad (2.45)$$

podemos verificar que, devido ao fator $4\pi t$, todas as derivadas $f^{(i)}(x)$ irão contribuir a termos envolvendo potências positivas de t , e assim o único termo que irá contribuir para a potência t^0 da expansão em série é a integral do lado direito de (2.41); logo, o espectro de área A_N^F para a esfera *fuzzy* é apenas o primeiro termo de (2.41):

$$A_N^F = 4\pi R^2 \left(1 - e^{-\frac{N(N+1)}{\Lambda_*^2 R^2}}\right). \quad (2.46)$$

Para termos uma intuição melhor dessa fórmula, definimos um espectro de área normalizado, dividindo (2.46) pela área da esfera comutativa:

$$\bar{A}_n = \frac{A_n^F}{4\pi R^2} = 1 - e^{-\frac{n(n+1)}{\epsilon^2}}, \quad \epsilon = \Lambda_* R \quad (2.47)$$

O comportamento do espectro de área é mostrado na figura 2.1.

A partir da equação (2.46) nós podemos notar que a correção exponencial se anula rapidamente no limite comutativo $n \rightarrow \infty$, e também no limite $\Lambda_* \rightarrow 0$, onde a escala fundamental vai a zero, em concordância com a expansão clássica $t \rightarrow 0$ para o traço do núcleo de calor.

Devemos enfatizar a ordem de magnitude para a observação dos efeitos da não-comutatividade;

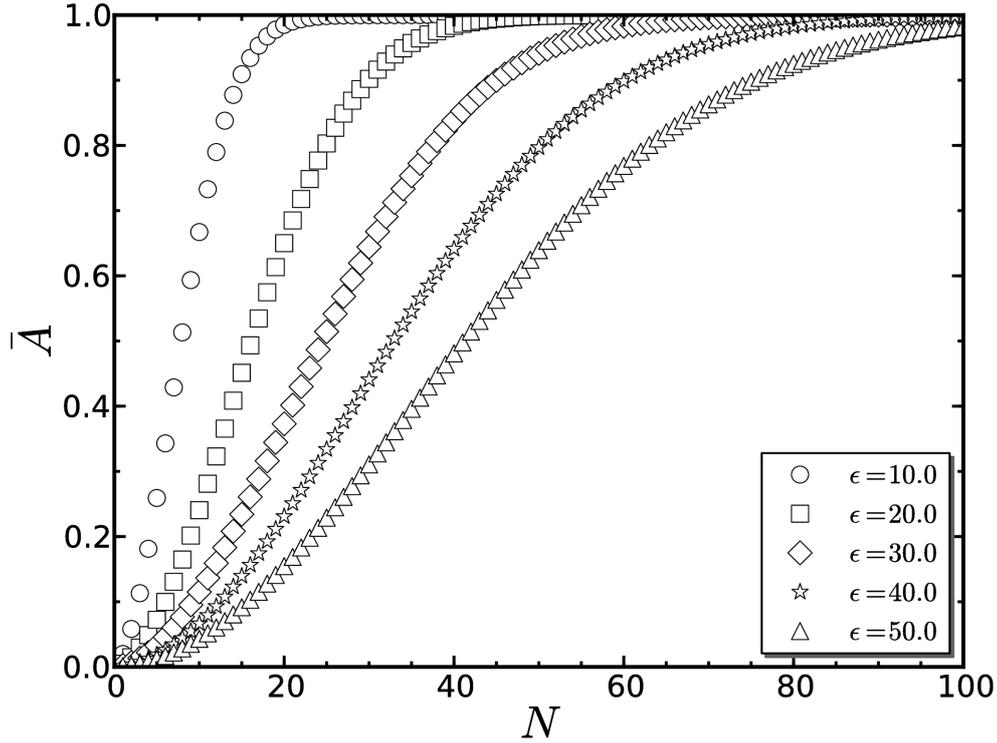


Figura 2.1: Espectro de área normalizado (2.47) como uma função da dimensão n da esfera não-comutativa, para uma escala de energia ϵ fixa. Note o efeito do corte na significância da não-comutatividade, onde correções quânticas contribuem de forma crescente.

sendo $M_p \sim 1.22 \times 10^{19} GeV$, para observarmos uma discrepância de 1% na área devemos ter

$$\frac{N(N+1)}{R^2} \sim 6.87 \times 10^{56} eV^2, \quad (2.48)$$

Usando o raio de Schwarzschild estimado para o buraco negro M87, $R \sim 10^{20} eV^{-1}$ [133], concluímos que $n = 10^{50}$ ainda corresponde a um regime quântico. Isso concorda com a interpretação de n como o número de *quanta* de área em gravidade entrópica [134].

Efeitos na luminosidade do buraco-negro

Vamos agora considerar as implicações do espectro de área (2.46) na luminosidade do buraco negro. Os resultados apresentados nas referências [135–137] apontam uma dependência do tipo $1/M^2$. Tal dependência também é encontrada no espectro de área equidistante apresentado por Bekestein [138]. Contudo iremos ver que (2.46) implica em uma modificação em tais efeitos.

Seguindo [138], vamos assumir que transições onde $\delta\omega$ – a energia da partícula emitida – é pequeno são preferíveis. Isso se deve ao fato que a irradiação de um buraco negro envolve a

criação de pares de partículas virtuais (figura 2.2). Quanto maior a energia $\delta\omega$ da partícula do par virtual, menor será a probabilidade do par ter tempo de vida suficiente para que uma das partículas adentre o horizonte de eventos do buraco negro. Dessa forma, em termos da energia mínima $\delta\omega_0^F$, a luminosidade do buraco negro será dada por

$$L^F \sim \frac{\delta\omega_0^F}{\tau^F} = (\delta\omega_0^F)^2. \quad (2.49)$$

onde usamos a relação de incerteza

$$\tau^F \sim \frac{1}{\delta\omega_0^F} \quad (2.50)$$

e o sobrescrito 'F' indica que as quantidades devem apresentar correções quânticas. Para encon-

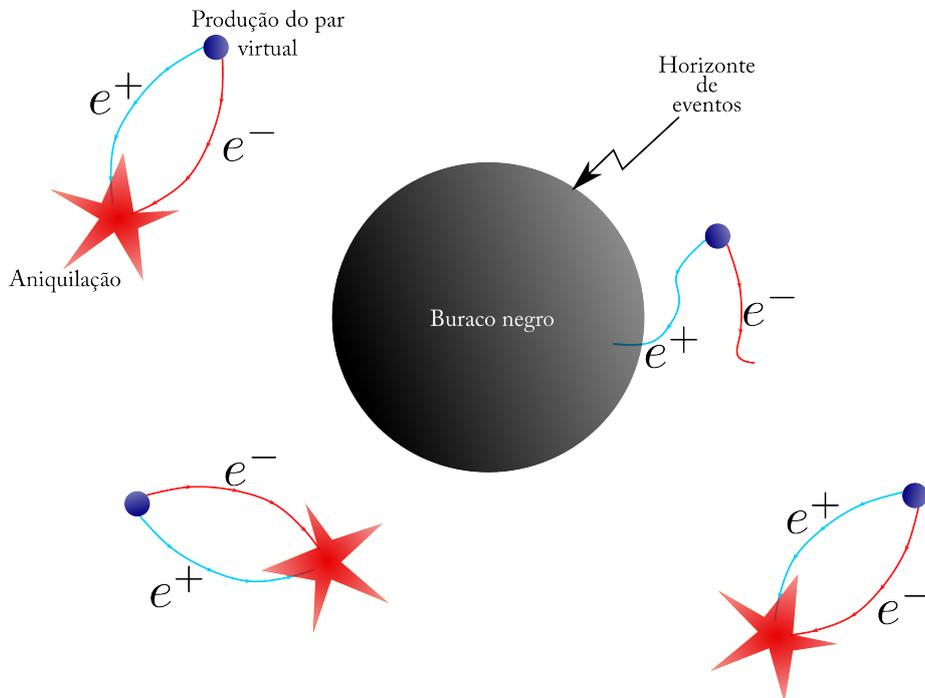


Figura 2.2: Radiação Hawking. O forte campo gravitacional na vizinhança do horizonte de eventos do buraco negro causa uma instabilidade no vácuo, resultando na produção de um par partícula-antipartícula. O tempo de vida desse par é geralmente muito pequeno, de tal forma que eles rapidamente se aniquilam mutuamente. Contudo, próximo ao horizonte de eventos é possível que uma das partículas do par entre antes de ser aniquilada, e nesse caso a outra partícula escapa como radiação.

trar o valor da energia $\delta\omega_0^F$ de uma partícula emitida por um buraco negro de Schwarzschild nós temos

$$A_{\text{BH}}^F = 16\pi(M^F)^2; \quad (2.51)$$

dessa forma,

$$\delta M^F = \frac{\delta A^F}{32\pi M^F} \quad (2.52)$$

e

$$\delta\omega_0^F = \frac{(A_N - A_{N-1})}{8\sqrt{\pi A_N}}. \quad (2.53)$$

Assim, a luminosidade do buraco negro será dada por $L \sim \omega_{NN}$:

$$L^F \sim (\delta\omega_0^2)^F = \frac{(A_N - A_{N-1})^2}{64\pi A_N}, \quad (2.54)$$

e nós definimos a luminosidade normalizada de uma maneira análoga à área:

$$\bar{L} = \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{(\bar{A}_N - \bar{A}_{N-1})^2}{64\pi \bar{A}_N}. \quad (2.55)$$

O comportamento de (2.55) é mostrado na figura 2.3.

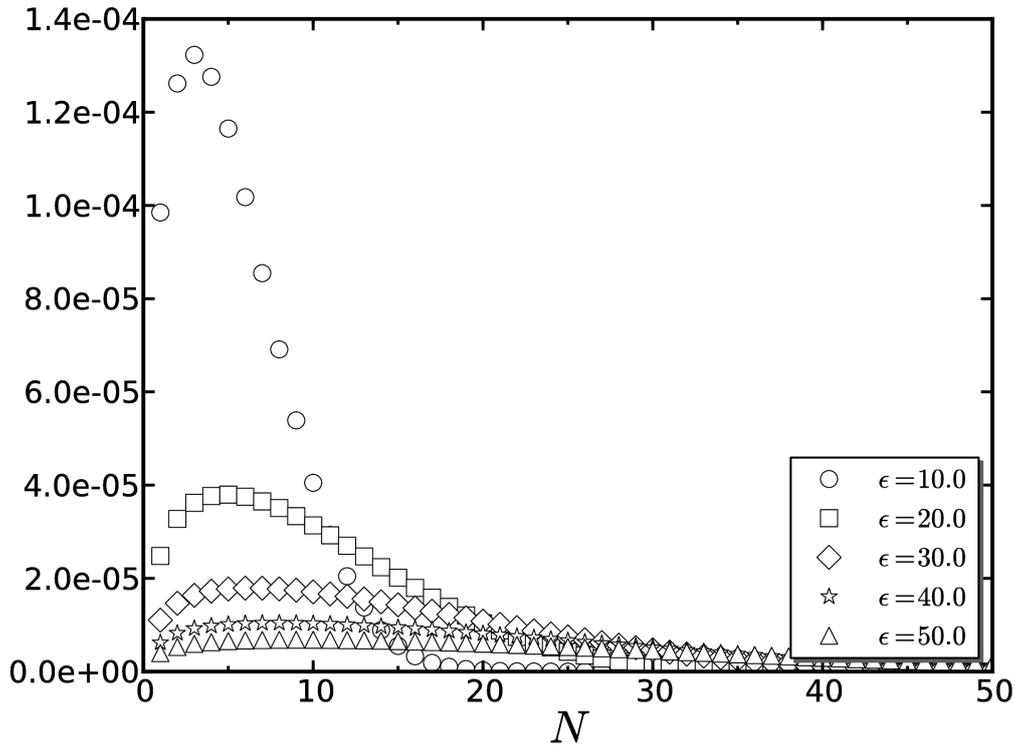


Figura 2.3: Luminosidade normalizada como função de n , para uma escala de energia fixa ϵ .

É interessante escrever a luminosidade em termos da massa clássica do buraco negro, M :

$$L \sim \delta\omega_0^2 = \frac{1}{1024\pi^2 M^2} \gamma, \quad (2.56)$$

onde

$$\gamma = (4\pi R^2)^2 (\bar{A}_N - \bar{A}_{N-1})^2. \quad (2.57)$$

Como podemos ver, a medida que o buraco negro evapora o fator γ devia crescentemente de um valor constante, desviando do comportamento M^{-2} previsto pelo resultado semiclássico em [135–137]. O fator γ é importante então no regime quântico. Como esse comportamento é observado quando a escala de energia ϵ aumenta, correções não-comutativas poderiam, em princípio, ser observadas se a escala fundamental estivesse no regime dos atuais experimentos e observações, como na formação de micro-buracos negros no LHC em cenários de dimensões extras [89, 139].

2.3 Propriedades termodinâmicas do Grafeno em um espaço de fase não comutativo

2.3.1 Grafeno

Nesta seção iremos introduzir as ideias básicas por trás da física do grafeno. Para uma discussão mais detalhada, veja a referência [140].

Estrutura de bandas e modelo *tight binding*

O grafeno é formado por átomos de Carbono disposto em uma rede chamada *favo de mel*, devido ao seu arranjo hexagonal (figura 2.4a). A rede cristalina, também chamada *rede de Bravais*, é uma rede triangular, onde os vetores-base que geram a célula unitária são

$$\vec{a}_1 = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

onde $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a \approx 0.246 \text{ nm}$ é chamada *constante de rede*. A posição de um átomo qualquer na rede cristalina pode então ser escrito como $\vec{R} = m\vec{a}_1 + n\vec{a}_2$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. A *rede recíproca* é a rede gerada pela base dual aos vetores da rede de Bravais. Denotando a base dual de \vec{a}_i por \vec{b}_i , eles satisfazem a relação

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi \delta_{ij}, \quad (2.59)$$

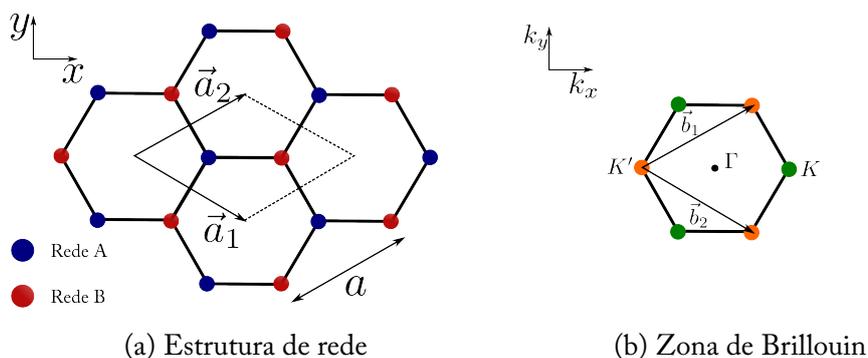


Figura 2.4: Estrutura de rede e célula unitária da folha de grafeno. A constante de rede é $a \approx 0.246$ nm. Os vetores de rede \vec{a}_1 e \vec{a}_2 geram a célula unitária que contém um átomo da rede A e um da rede B.

de onde podemos encontrar

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Nesse caso podemos ver que a primeira zona de Brillouin é um hexágono, de lado $K = 4\pi/3a$. Como os vetores \vec{b}_1, \vec{b}_2 geram a rede recíproca, apenas dois pontos do hexágono são independentes, e a eles denominamos pontos K (figura 2.4b).

Em [141], P. W. Anderson (1923-) afirma que os princípios fundamentais para a compreensão das propriedades dos materiais são a *continuidade adiabática* e a *quebra espontânea de simetria*. A ideia da continuidade adiabática é que é possível descrever sistemas complexos através de sistemas mais simples, no sentido de que é possível *deformar* continuamente os estados de uma teoria para a outra. Já a quebra espontânea de simetria diz respeito ao fato de que, tipicamente, transições de fase entre estados com características distintas são caracterizados por alguma simetria quebrada. Um exemplo é a quebra de simetria rotacional em estados magneticamente ordenados.

2.4 O modelo *tight binding*

O modelo *tight binding* se baseia no primeiro princípio, onde um sistema atômico extremamente complexo como o grafeno é substituído pelo modelo de elétrons fracamente interagentes se propagando por uma estrutura rígida composta pelos átomos de carbono. As duas hipóteses básicas para justificar as aproximações que se seguem são as seguintes:

- A folha de grafeno tem tamanho *infinito*.
- Os elétrons se propagando pela folha de grafeno são *fracamente interagentes* ou não interação entre si (continuidade adiabática);

Se considerarmos o Hamiltoniano do sistema completo, podemos escrevê-lo como a soma de duas partes,

$$H = H_e + H_I \quad (2.61)$$

onde H_e denota o hamiltoniano dos elétrons (termo cinético e interações eletrônicas) e H_I o termo de interação entre os elétrons e a rede (os íons de carbono). A primeira hipótese tem naturalmente implícita a presença de uma simetria: a *simetria de translação*. Isso significa que o operador de translação $T_{\vec{a}}$ (\vec{a} é o vetor de rede) comuta com o hamiltoniano: $[T_{\vec{a}}, H] = 0$. A segunda hipótese por sua vez implica que a parte eletrônica do hamiltoniano é desprezível em comparação com o termo de interação; dessa forma, o hamiltoniano completo é escrito simplesmente como o hamiltoniano de um único elétron:

$$H = H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} + V(\vec{x}), \quad V(\vec{x}) = \sum_{\text{sítios } i} V_{\text{ion}}(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (2.62)$$

onde $V(\vec{x})$ é o potencial que representa a interação entre o elétron e os átomos de carbono. Sendo os íons de carbono nesse caso rígidos nos sítios da rede cristalina, o potencial de interação também é simétrico por translação: $V(\vec{x} + \vec{a}) = V(\vec{x})$. Logo, temos $[T_{\vec{a}}, H_0] = 0$ e os dois operadores têm os mesmos autoestados. Assim, a solução da equação de Schrödinger

$$H\Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = E_{\vec{k}}\Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) \quad (2.63)$$

pode ser encontrada por meio do *teorema de Bloch*, que assegura soluções da forma

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = c_{\vec{k}}^A \Psi_{\vec{k}}^{(A)}(\vec{x}) + c_{\vec{k}}^B \Psi_{\vec{k}}^{(B)}(\vec{x}), \quad (2.64)$$

onde

$$\Psi_{\vec{k}}^I(\vec{x}) = A_N \sum_{X^{(l)}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{X}^{(l)}} \Phi(\vec{x} - \vec{X}^{(l)}), \quad I = A, B \quad (2.65)$$

são chamadas de *funções de Bloch*, N é o número de sítios da rede e A_N uma constante de normalização. Os vetores

$$\vec{X}^{(A)} = \vec{R} + \frac{1}{3}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \quad \vec{X}^{(B)} = \vec{R} + \frac{2}{3}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \quad (2.66)$$

são os vetores indicando as posições dos átomos de carbono nas redes A e B respectivamente.

A equação de autovalores (2.63) leva à equação secular

$$\begin{vmatrix} H_{AA} - E_{\vec{k}} S_{AA} & H_{AB} - E_{\vec{k}} S_{AB} \\ H_{AB}^* - E_{\vec{k}} S_{AB}^* & H_{BB} - E_{\vec{k}} S_{AA} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.67)$$

onde

$$H_{IJ} = |A_N|^2 \sum_{\vec{X}^{(I)}} \sum_{\vec{X}^{(J)}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{X}^{(I)} - \vec{X}^{(J)})} \langle \Phi(\vec{x} - \vec{X}^{(I)}), H \Phi(\vec{x} - \vec{X}^{(J)}) \rangle$$

$$S_{IJ} = |A_N|^2 \sum_{\vec{X}^{(I)}} \sum_{\vec{X}^{(J)}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{X}^{(I)} - \vec{X}^{(J)})} \langle \Phi(\vec{x} - \vec{X}^{(I)}), \Phi(\vec{x} - \vec{X}^{(J)}) \rangle$$

Na aproximação de primeiros vizinhos, é possível mostrar que (2.67) se torna [140]

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_0 - E_{\vec{k}} & -(t + sE_{\vec{k}})f_{\vec{k}} \\ -(t + sE_{\vec{k}})f_{\vec{k}}^* & \varepsilon_0 - E_{\vec{k}} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.68)$$

onde ε_0 é a energia por sítio, s é chamado de *parâmetro de overlap*, t de *parâmetro de hopping* de primeiros vizinhos e

$$f_{\vec{k}} = 1 + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_2} \quad (2.69)$$

resolvendo a equação (2.68) podemos encontrar facilmente

$$E_{\vec{k}} = \frac{\varepsilon_0 \pm t|f_{\vec{k}}|}{1 \mp s|f_{\vec{k}}|} \quad (2.70)$$

O comportamento da relação de dispersão (2.70) é apresentado na figura 2.5.

Hamiltoniano efetivo

Olhando-se para a estrutura de bandas do grafeno, mostrada na figura 2.5, podemos ver como os máximos e mínimos das bandas de valência e condução são próximos um do outro; também,

tais pontos são próximos dos pontos K , e por isso também denominamos *vales*. Isso nos leva a introdução da base

$$K_\tau = K \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \pm 1 \quad (2.71)$$

onde τ é chamado *índice de vale*. Assim temos $K = K_+$ e $K' = K_-$. Levando em consideração a estrutura cônica na região próxima aos pontos de Dirac K, K' no limite de baixas energias, temos uma relação de dispersão aproximadamente linear:

$$\vec{p} = \hbar(\vec{k} - \vec{K}_\tau). \quad (2.72)$$

Utilizando-se essa aproximação no Hamiltoniano de Schrödinger, através do modelo *tight binding*, podemos encontrar a equação

$$v_F \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} \Psi_\tau = E \Psi_\tau, \quad (2.73)$$

onde $v_F \approx 1 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ é chamada *velocidade de Fermi*. Os coeficientes

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} -\psi'_B \\ \psi'_A \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

são relacionados às transformadas de Fourier dos coeficientes de Bloch $c_k^{(A,B)}$. A equação (2.73), que também pode ser escrita como $v_F \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Psi_\tau = E \Psi_\tau$, tem a forma de uma equação de Dirac não-massiva, como observado em [142, 143]. A diferença é que, além da “velocidade da luz” ser a velocidade de Fermi, os espinores representam as redes A e B do grafeno, e não os spins da partícula.

2.4.1 Grafeno no espaço de fase não-comutativo

Um forma bastante útil de se estudar os efeitos da não-comutatividade na Teoria Quântica de Campos é através da Mecânica Quântica de partículas, onde os cálculos são simplificados e pode-se ter uma ideia da física fundamental por trás do fenômenos. Esses modelos constituem a chamada *Mecânica Quântica não-comutativa* [144–146]. Nesse contexto, vários modelos foram propostos [112, 147–149]. Em particular, o modelo que iremos estudar aqui é o da *não-*

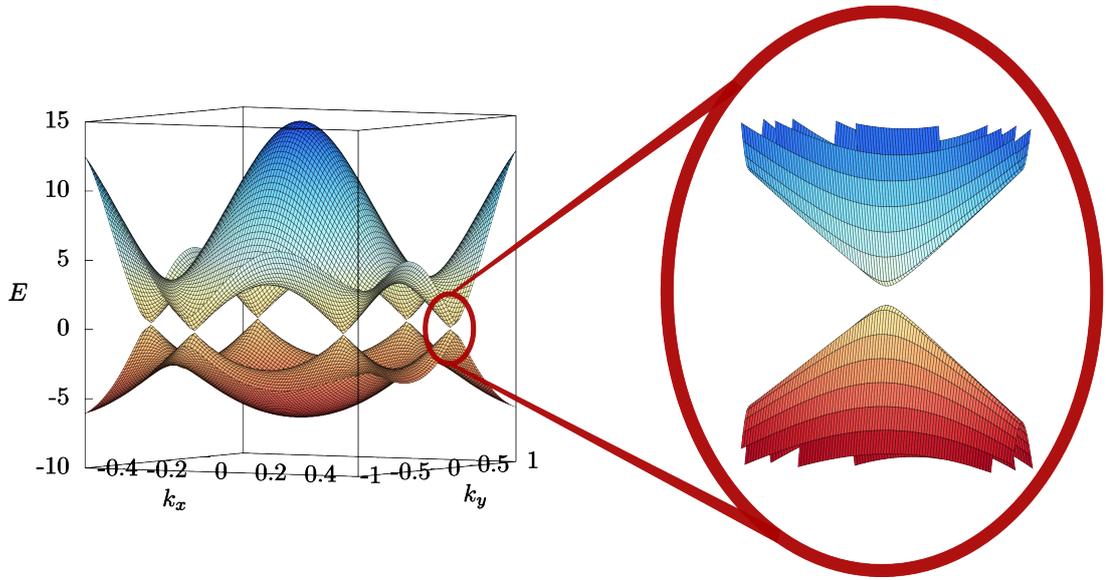


Figura 2.5: Representação tridimensional da estrutura eletrônica de bandas do grafeno. Note que na região de baixas energias as duas superfícies se aproximam de uma forma linear, se assemelhando a um cone (mostrado no *zoom*). Esses cones são chamados *cones de Dirac*.

comutatividade no espaço de fase, que foi estudada por exemplo na formulação não-comutativa da estatística de Bose-Einstein [112, 149].

A não-comutatividade no espaço de fase se baseia nas relações de comutação

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\eta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{\theta_{ik}\eta_{jk}}{4\hbar^2} \right), \quad \text{with } i, j, k = 1, \dots, d, \quad (2.75)$$

onde os parâmetros de deformação $\theta_{ij} = \theta\epsilon_{ij}$ e $\eta_{ij} = \eta\epsilon_{ij}$ são matrizes antisimétricas de entradas em \mathbb{R} . Essas relações de comutação podem ser implementadas explicitamente pelas transformações de coordenadas [106]

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} p_j, \quad \hat{p}_i = p_i + \frac{\eta_{ij}}{2\hbar} x_j, \quad (2.76)$$

onde x_i and p_i são variáveis comutativas que satisfazem as relações de comutação de Heisenberg,

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.77)$$

A equação básica para a teoria é a equação de Dirac para uma partícula não massiva:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi, \quad (2.78)$$

onde H_D representa as duas cópias do Hamiltoniano, correspondentes às duas redes inequivalentes no grafeno, em torno dos pontos K e K' , os cantos da primeira zona de Brillouin.

Assim podemos escrever explicitamente

$$H_D = \begin{pmatrix} H_K & 0 \\ 0 & H_{K'} \end{pmatrix} = v_F \begin{pmatrix} \sigma \cdot p & 0 \\ 0 & \sigma^* \cdot p \end{pmatrix}, \text{ e } \psi = \begin{pmatrix} \psi_K \exp(-\frac{i}{\hbar} E_K t) \\ \psi_{K'} \exp(-\frac{i}{\hbar} E_{K'} t) \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

onde $v_F \simeq 10^6 \text{m/s}$ é a velocidade de Fermi, $p = -i\hbar(\partial_x, \partial_y, 0)$ é o operador *momentum* em duas dimensões, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ corresponde as matrizes de Pauli e $\psi_{K(K')}$ são biespinores representando a função de onda próxima aos pontos K e K' . Além disso, o espectro de energia associado às bandas de energia é dado por $E_{K(K')} = \pm\hbar v_F |k|$.

Se considerarmos a presença de um campo magnético homogêneo $B = B_0 \hat{z}$, o Hamiltoniano deve ser modificado de acordo com a substituição mínima $p \rightarrow p - eA$; assim temos

$$H_K = v_F \sigma_i (p_i + \frac{eB_0}{2} \epsilon_{ij} x_j), \quad i, j = 1, 2, \quad (2.80)$$

onde o potencial vetor foi escrito no calibre simétrico $A = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0)$. Uma equação análoga pode ser escrita para o ponto de Dirac K'

O hamiltoniano (2.80) pode ser diagonalizado usando-se um conjunto apropriado de operadores de criação e aniquilação, e assim podemos obter os seus autovalores [105]:

$$E_K = \pm \frac{\sqrt{2}\hbar v_F}{l_B} \sqrt{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.81)$$

onde $l_B = \sqrt{\hbar/eB_0}$ é chamado de *comprimento magnético*.

A formulação de espaço de fase não-comutativo para o hamiltoniano de Dirac pode ser obtido através da transformação de coordenadas (2.76). Contudo, a fim de preservarmos a invariância de calibre na folha de grafeno, devemos impor que a não comutatividade se restrinja apenas aos *momenta* [106]. Logo, o hamiltoniano em (2.80) se torna

$$H_{KNC} = v_F \sigma_i (p_i + \frac{eB_0}{2} \mu \epsilon_{ij} x_j), \quad i, j = 1, 2, \quad (2.82)$$

onde

$$\mu = \left(1 + \frac{\eta}{eB_0 \hbar}\right). \quad (2.83)$$

Por fim, é possível mostrar que o espectro de energia nesse caso toma a forma

$$E_K = \pm \frac{\sqrt{2}\hbar v_F}{l_B} \sqrt{(1 + \bar{\eta})n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.84)$$

onde $\bar{\eta}$ é uma constante adimensional relacionada ao parâmetro de não-comutatividade η através da relação

$$\bar{\eta} = (l_B^2/\hbar^2)\eta. \quad (2.85)$$

2.4.2 Propriedades termodinâmicas

Grandezas termodinâmicas

Para calcularmos as propriedades térmicas de um sistema físico, utilizamos uma grandeza fundamental na mecânica estatística, que é a *função de partição*. a função de partição é dada pela soma

$$Z = \sum_s \exp(-\beta E_s), \quad (2.86)$$

sobre todos os estados s do sistema, cada um com energia E_s . O parâmetro β é relacionado à temperatura de equilíbrio do sistema por $\beta = \frac{1}{k_B T}$, onde k_B é a *constante de Boltzmann* e T a temperatura de equilíbrio.

As propriedades termodinâmicas do sistema são determinadas pela função de partição; em particular, estamos interessados nas seguintes grandezas:

Energia livre de Helmholtz $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$

Energia média do sistema $U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$

Entropia $S = k_B \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$

Calor específico $C = -k_B \beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta}$

Antes de prosseguir com os cálculos para o grafeno, é conveniente introduzir as variáveis adimensionais

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\tau}, \quad \tau = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar v_F} \frac{1}{\beta}; \quad (2.87)$$

com isso as grandezas termodinâmicas podem ser reescritas como as grandezas adimensionais

$$\begin{aligned}
F &\rightarrow \bar{F} = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar v_F}} F = -\frac{1}{\bar{\beta}} \log Z \\
U &\rightarrow \bar{U} = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar v_F}} U = -\frac{\partial}{\partial \bar{\beta}} \log Z \\
S &\rightarrow \bar{S} = \frac{S}{k_B} = \bar{\beta}^2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\beta}} \\
C &\rightarrow \bar{C} = \frac{C}{k_B} = -\bar{\beta}^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\beta}}
\end{aligned}$$

O cálculo que iremos descrever aqui segue os descritos nas referências [150, 151].

O espectro de energias em (2.84) nos dá a função de partição

$$Z = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{\beta}\sqrt{an+a}}, \quad (2.88)$$

onde $a = 1 + \bar{\eta}$. Note que a definição do parâmetro a engloba tanto o caso comutativo como o não-comutativo (onde $\bar{\eta} = 0$). O teste da integral assegura a convergência da série, já que a integral

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\bar{\beta}\sqrt{ax+a}} = \frac{2}{a\bar{\beta}^2} e^{-\bar{\beta}\sqrt{a}} \left(1 + \bar{\beta}\sqrt{a}\right), \quad (2.89)$$

é finita.

Fórmula de Euler-Mclaurin

Para calcular a soma em (2.88) e termos uma ideia do comportamento do sistema no regime de altas temperaturas, iremos empregar a fórmula de soma de Euler-Mclaurin:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^b f(n) &= \int_a^b dt f(t) + \frac{1}{2} [f(b) + f(a)] + \sum_{i=2}^k \frac{b_i}{i!} [f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)] \\
&\quad - \int_a^b dt \frac{B_k(\{1-t\})}{k!} f^{(k)}(t),
\end{aligned} \quad (2.90)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são números tais que $(b-a) \in \mathbb{Z}$, B_k e b_k são respectivamente os polinômios e números de Bernoulli, k é um inteiro positivo arbitrário que determina a ordem de truncamento da série. O símbolo $\{x\}$ denota a parte fracionária do número x [152].

Tomando as relações (2.88) e (2.90) e considerando $f(n) = \exp[-\bar{\beta}\sqrt{an+a}]$, a função de

partição Z pode ser escrita explicitamente como

$$Z = 1 + \frac{1}{2}e^{-\bar{\beta}\sqrt{a}} + \frac{2}{a\bar{\beta}^2}e^{-\bar{\beta}\sqrt{a}}\left(1 + \bar{\beta}\sqrt{a}\right) - \sum_{i=2}^k \frac{b_i}{i!}f^{(i-1)}(0) + R_k, \quad (2.91)$$

onde

$$R_k = \int_0^\infty dt \frac{B_k(\{1-t\})}{k!} f^{(k)}(t), \quad (2.92)$$

é chamado *resto da soma*. O resto da soma expressa a precisão do cálculo da soma (2.91) ao truncar-se a série. Para termos uma ideia do quão rápida é a convergência da série, é interessante sabermos qual o comportamento assintótico (quando $k \rightarrow \infty$) do resto da soma. Como não possível calcular a integral analiticamente, recorreremos à métodos numéricos. O resultado é mostrados nas figuras 2.6 e 2.7 para $k \leq 25$, uma vez que mesmo numericamente, o cálculo dos polinômios de Bernoulli e dos fatoriais é computacionalmente dispendioso. Ainda assim, é possível notar que o resto da soma decresce rapidamente: a soma de dez termos rende uma precisão da ordem de 10^{-5} . Logo, para uma compreensão qualitativa do sistema em questão é suficiente considerar $k = 50$ na fórmula de Euler-Mclaurin.

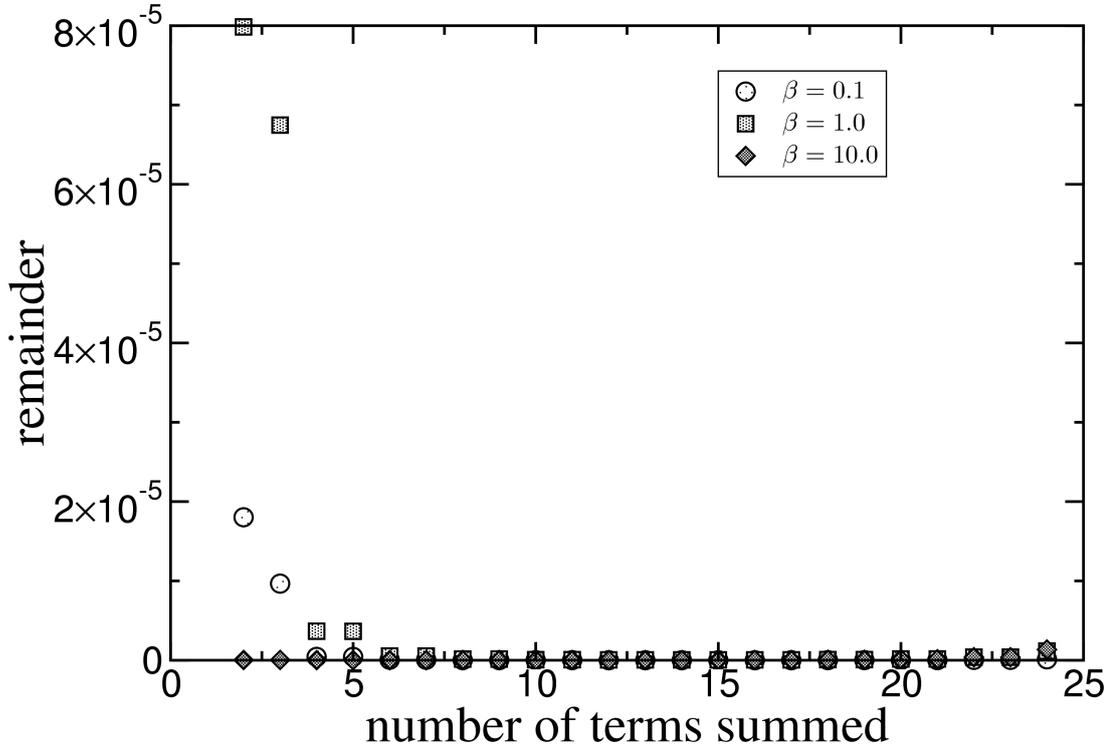


Figura 2.6: Comportamento do resto R_k da soma para o caso comutativo $\bar{\eta} = 0$.

No limite de altas temperaturas, o parâmetro $\bar{\beta}$ satisfaz $\bar{\beta} \ll 1$, de tal forma que podemos

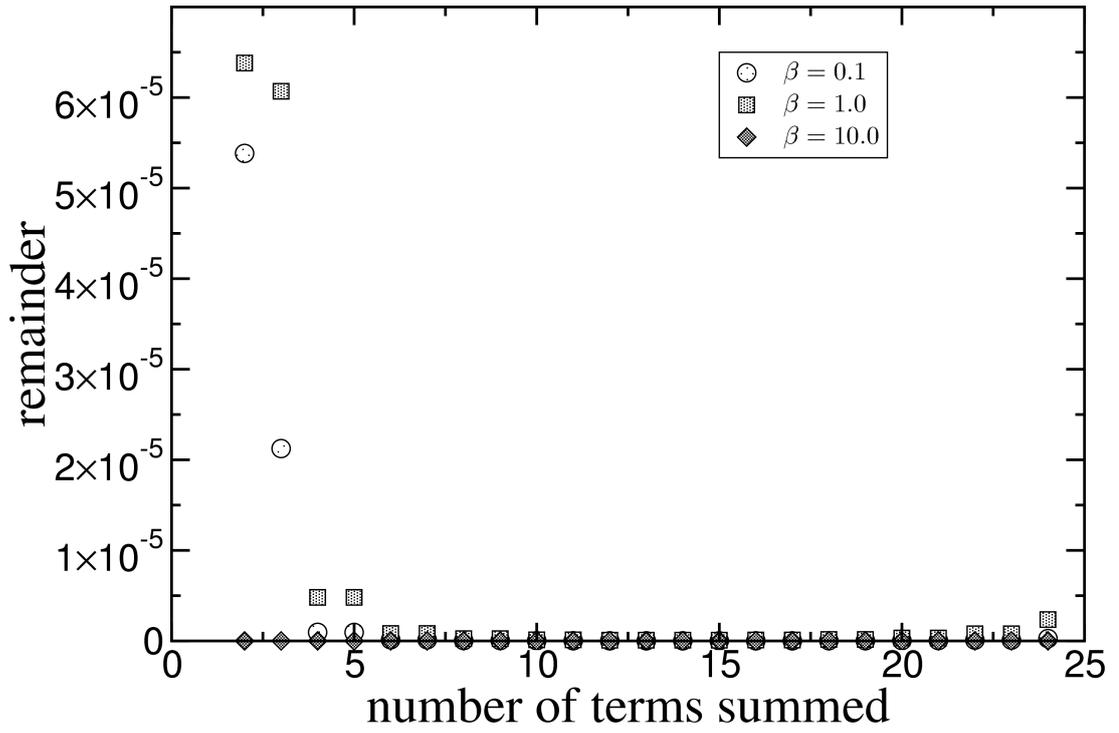


Figura 2.7: Comportamento do resto R_k da soma para o caso comutativo $\bar{\eta} = 0.1$.

aproximar a função de partição por

$$Z \approx \frac{2}{a\bar{\beta}^2}, \quad (2.93)$$

o que nos leva aos limites assintóticos (limite de altas temperaturas)

$$\bar{U} \approx \frac{2}{\bar{\beta}}, \quad (2.94)$$

$$\bar{C} \approx 2, \quad (2.95)$$

Note que nesse caso não temos a dependência do parâmetro de não-comutatividade $\bar{\eta}$, e os limites concordam com a lei de Dulong-Petit para um gás ideal ultrarelativístico [153], onde a energia média e o calor específico são o dobro dos seus análogos não-relativísticos. Resultados semelhantes foram também encontrados para os osciladores de Dirac e Kemmer [150, 151].

Resultados

Todas as quantidades foram calculadas como funções de uma temperatura adimensional, definida por

$$\tau = (l_B/\sqrt{2}\hbar v_F)k_B T \quad (2.96)$$

O único parâmetro que não é fixado é $\bar{\eta}$, que é relacionado ao parâmetro de não-comutatividade por $\bar{\eta} = (l_B^2/\hbar^2)\eta$.

Na literatura existem vários limites para a magnitude do parâmetro de não-comutatividade. Por exemplo, em [106] é apresentado o limite

$$\sqrt{\bar{\eta}} \lesssim 2.26 \times 10^{-6} \text{ eV} \quad (2.97)$$

obtido através da análise da estrutura fina do átomo de hidrogênio. Experimentos de espectroscopia infravermelha no próprio grafeno também foram utilizados para impor um limite experimental, onde se encontrou $\bar{\eta} < 0.069$, o que implica que a magnitude de η deve satisfazer $\sqrt{\bar{\eta}} < 8.6 \text{ eV}$ [105]. Tal limite é menos restritivo e dentro das escalas de energia típicas para os experimentos com grafeno. Vamos então assumir que $0 < \bar{\eta} < 0.1$. Para mostrarmos o comportamento das grandezas termodinâmicas com a variação do parâmetro de não-comutatividade, vamos considerar os seguintes valores para $\bar{\eta}$: 0.00 (caso comutativo), 0.01, 0.04 e 0.07.

A energia livre de Helmholtz \bar{F} para os casos comutativo (linha sólida) e não-comutativo (linha tracejada) é mostrada na figura 2.8. Em todos os casos as curvas decrescem com a temperatura, como esperado. Podemos observar que as curvas coincidem no regime de baixas temperaturas, embora haja uma pequena separação com aumento do parâmetro de não-comutatividade. Na figura 2.9 podemos ver o comportamento da energia média do sistema: ele não é influenciado fortemente pela não comutatividade, e todas as curvas respeitam o limite assintótico linear.

Na figura 2.10 podemos ver as curvas de entropia. Como no caso da energia livre, as curvas coincidem no regime de baixas temperaturas, e a separação entre elas aumenta com o aumento na magnitude do parâmetro de não-comutatividade; contudo, ao contrário do caso da energia livre, o aumento de $\bar{\eta}$ desvia a entropia para valores mais baixos. De fato, esse efeito é esperado, uma vez que a não-comutatividade leva a um decréscimo na degenerescência do sistema [154, 155].

O calor específico é mostrado na figura 2.11. O caráter não-comutativo nesse caso se apresenta no limite entre os regimes de baixas e altas temperaturas, $\tau \approx 0.95$. Também, o limite de altas temperaturas coincide com o limite obtido em (2.95).

Observe que, como esperado, os efeitos da não comutatividade são pequenos e no limite $\bar{\eta} \rightarrow 0$ todas as curvas concordam com o caso comutativo.

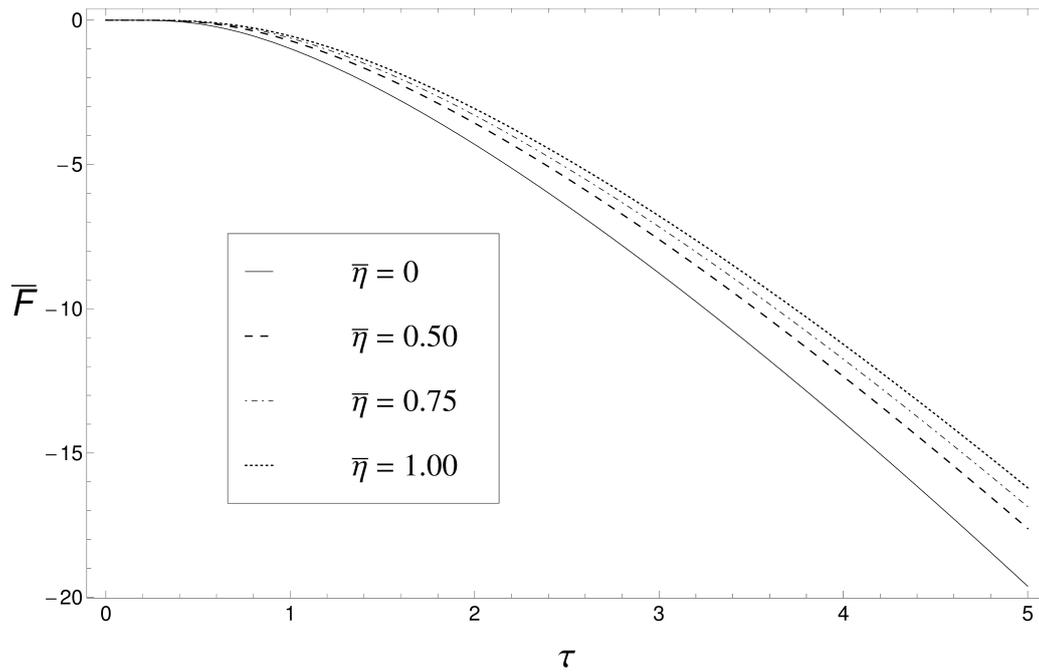


Figura 2.8: Energia livre para a partícula de Dirac como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\bar{\eta}$.

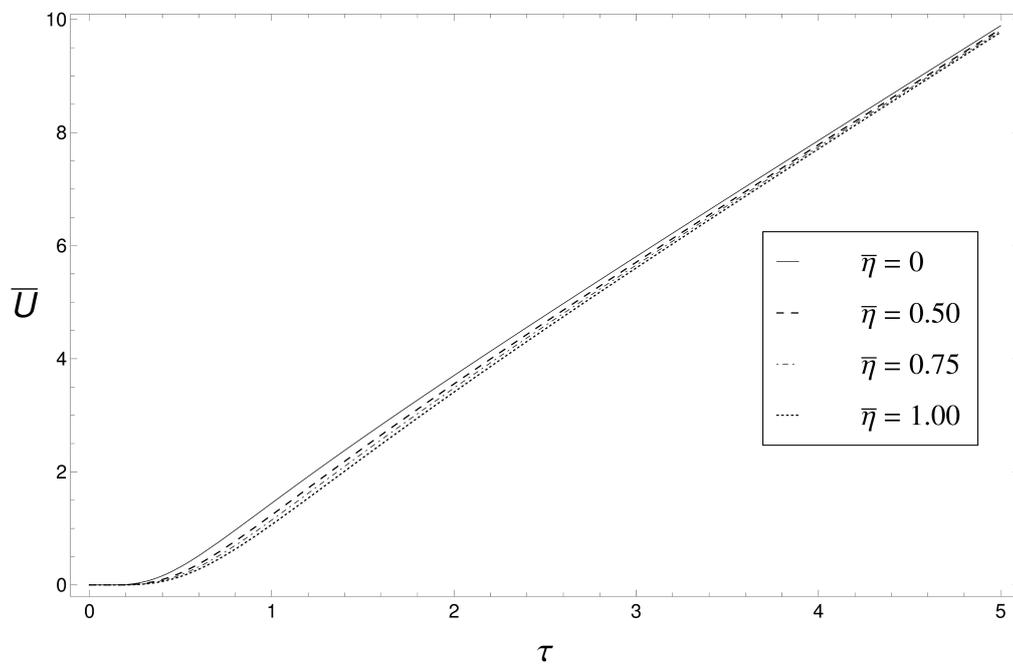


Figura 2.9: Energia média como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\bar{\eta}$.

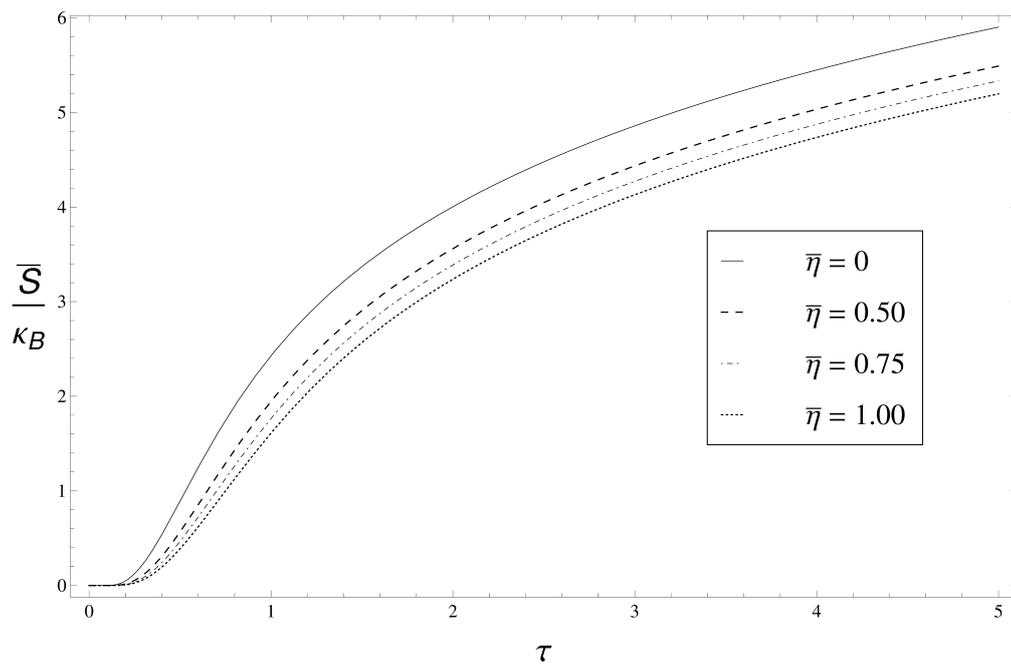


Figura 2.10: Entropia como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\overline{\eta}$.

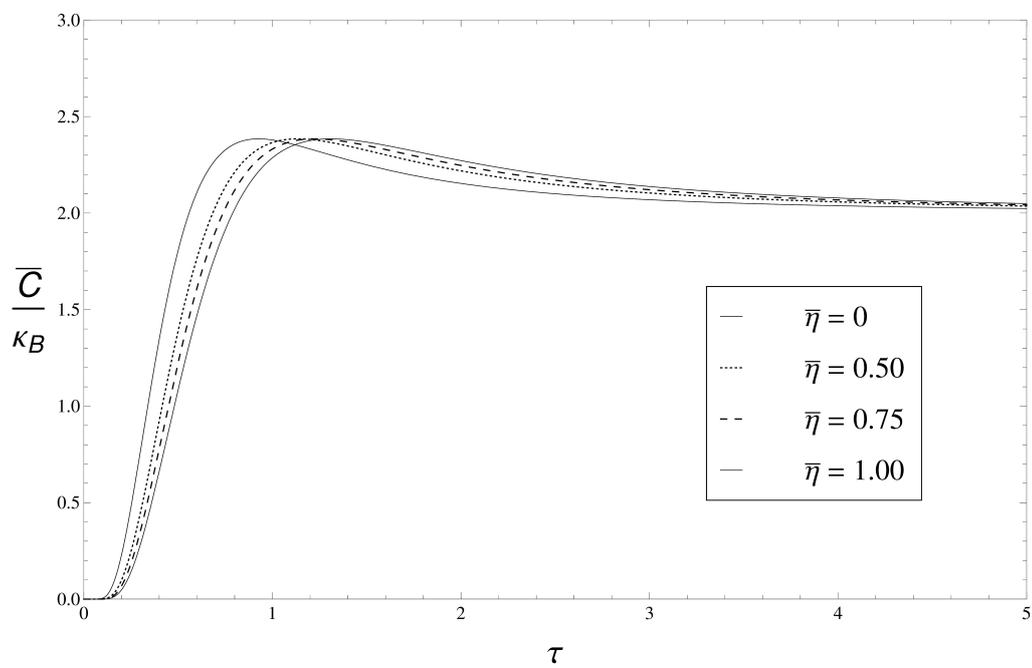


Figura 2.11: Calor específico como uma função da temperatura adimensional τ , para diferentes valores do parâmetro de não-comutatividade $\overline{\eta}$.

Capítulo 3

Violação da simetria de Lorentz & Gravitação Massiva

Neste capítulo será abordada a pesquisa desenvolvida relacionada à violação da simetria de Lorentz. Após uma breve descrição sobre o que se quer dizer por quebra da simetria de Lorentz, serão discutidos duas linhas de pesquisa realizadas: na primeira investigamos a quebra da simetria de Lorentz em um cenário extra-dimensional de mundo-brana (que rendeu o trabalho publicado [156]), onde mostramos como a geometria da brana influencia a massa do gráviton na teoria efetiva em quatro dimensões, e na segunda discutimos a influência da quebra espontânea da simetria no setor gravitacional, através de correções quânticas no potencial Newtoniano (trabalho publicado [157]).

3.1 Sobre a violação da simetria de Lorentz

A simetria de Lorentz é a simetria fundamental por trás do princípio da relatividade especial proposto por Einstein, e é até agora experimentalmente comprovada. Quando falamos sobre a *quebra* dessa simetria, convém deixar claro o que isso significa. Primeiramente, as transformações de Lorentz podem ser de dois tipos:

- Transformações de observador (transformações passivas): são as transformações usuais da Relatividade especial (rotações e *boosts*), que relacionam as coordenadas entre dois referenciais.
- Transformações da partícula (transformações ativas): São as transformações que relacio-

nam as propriedades de duas partículas (ou campos) distintas com diferentes momenta e orientações de spin.

Para o caso de partículas livres, as transformações de partícula são simplesmente as inversas das transformações de observador; porém, se as partículas interagem com campos de fundo, essa equivalência não é mais verdadeira. Para ver isso, considere o problema de um elétron imerso em um campo elétrico de fundo, gerado por um capacitor de placas paralelas. Tomando o vetor posição inicial para o elétron como sendo perpendicular ao campo elétrico gerado pelas placas, uma rotação sobre o elétron de um ângulo de $\pi/2$ será representado segundo as transformações discutidas acima da seguinte maneira:

- Passiva: Relaciona o observador inicial com o observador rotacionado, nesse caso ambos concordando que o vetor posição inicial é perpendicular ao campo elétrico de fundo.
- Ativa: Nesse caso o referencial é mantido e é feita uma rotação de um ângulo $-\pi/2$ no elétron, de tal forma que agora o vetor posição inicial será paralelo ao campo elétrico de fundo.

Como apontado na referência [158], a simetria do observador é mais fundamental, e portanto deve ser preservada. Assim, quando falarmos sobre violações da simetria de Lorentz, ficará subtendido que a violação se dá apenas nas transformações ativas.

O primeiro arcabouço teórico que acomoda a violação da simetria de Lorentz no Modelo Padrão foi proposto por Colladay and Kostelecký [158, 159], baseado na ideia da quebra espontânea de simetria no contexto da teoria de cordas [70], conhecido hoje como Modelo Padrão Extendido (MPE). O modelo Padrão estendido provê um conjunto de operadores invariantes de calibre que quebram a simetria de Lorentz, de uma forma compatível como a invariância por difeomorfismos [160]. Várias investigações tem sido feitas em diferentes setores do MPE. O setor CPT-par de teorias de calibre foi examinado por Kostelecký e Mewes [161–163] com a obtenção de um limite superior de uma parte em 10^{37} (com os dados de birefringência). Este setor foi também abordado em conexão com soluções clássicas [164, 165], aspectos de consistência [166–168] e interação férmion-fóton [169–172]. Um acoplamento não-mínimo para férmions no setor CPT-ímpar também foi investigado na referência [173, 174], e com alguns desenvolvimentos recentes em [175, 176].

O Modelo Padrão Extendido acomoda tanto a quebra explícita da simetria de Lorentz quanto a espontânea. Contudo, quando se leva em consideração o setor gravitacional, deve ser enfati-

zado que a quebra explícita é incompatível com algumas identidades geométricas, como a identidade de Bianchi; por isso, ao se abordar o setor gravitacional deve-se trabalhar com a quebra espontânea [177]. Um tratamento geral para a violação das simetrias locais de Lorentz e difeomorfismo no MPE foi abordado nas referências [178, 179]. Nestes trabalhos foi assumido que os campos tensoriais adquirem um valor esperado de vácuo não-nulo, quebrando essas simetrias espontaneamente. Foi então mostrado que as equações efetivas na forma linearizada poderiam ser usadas para se estudar efeitos pós-Newtonianos em uma série de sistemas gravitacionais. Vale mencionar que uma discussão sobre maneiras alternativas de se introduzir a quebra da simetria de Lorentz na gravidade foi considerada na referência [180, 181]. Outra linha abordada é a introdução da quebra da simetria em cenários de dimensões extras. A saber o caso 5-dimensional com uma dimensão (plana) extra foi estudado na referência [182]. Na referência [183], Rizzo mostrou que a quebra da simetria em um modelo de Randall-Sundrum induz uma massa não-nula para o gráviton 4-dimensional, resultante tanto da curvatura do espaço (Anti de-Sitter) quanto pela perda da invariância coordenada. Isto levou à conclusão de que modelos em cinco dimensões com a quebra da simetria de Lorentz não são fenomenologicamente viáveis.

3.2 Localização de campos em cenários curvos

Foi argumentado na referência [183] que modelos em cinco dimensões envolvendo a quebra da simetria de Lorentz e dimensões extras não são fenomenologicamente viáveis; isso não impede entretanto a quebra da simetria em dimensões mais altas. Assim, neste trabalho mostramos que de fato isso é possível, exibindo uma geometria em seis dimensões que provê um gráviton em 4 dimensões não massivo, se permitirmos que a constante cosmológica varie ao longo do *bulk*.

3.2.1 Campos localizados

A ideia de campos localizados teve sua origem com o trabalho de D. W. Joseph [184], ao propor um esquema para deduzir o espectro das partículas elementares em espaços curvos: de que o nosso espaço-tempo quadridimensional estaria *mergulhado* em um espaço-tempo de dimensão maior. Assim, as partículas seriam descritas através de representações irredutíveis do grupo de transformações de coordenadas no espaço-tempo maior. A interação entre as partículas nesse hiperespaço levaria à criação de um potencial efetivo que as deixaria *localizadas* na folha quadridimensional, levando às partículas observadas. Nessa linha, iremos estudar dois modelos que

realizam essa ideia: o modelo de *Randall-Sundrum* e o modelo de *Gherghetta-Shaposhnikov*.

Modelo de Randall-Sundrum

O modelo de Randall-Sundrum [185] assume a existência de um espaço-tempo de cinco dimensões, onde a quinta dimensão adicional é enrolada, compactificada em um círculo. Introduzindo um sistema de coordenadas (x^μ, w) , onde x^μ representam coordenadas sobre uma hipersuperfície $(3 + 1)$ -dimensional e w representa a coordenada na dimensão extra, a compactificação na dimensão extra é implementada dizendo-se que w vive sobre o orbifold $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ (ver figura 3.1). Nos dois pontos fixos, $w = 0$ e $w = L$, jazem hipersuperfícies quadridimensionais (branas, ver figura 3.2), das quais uma delas representa o nosso universo quadridimensional.

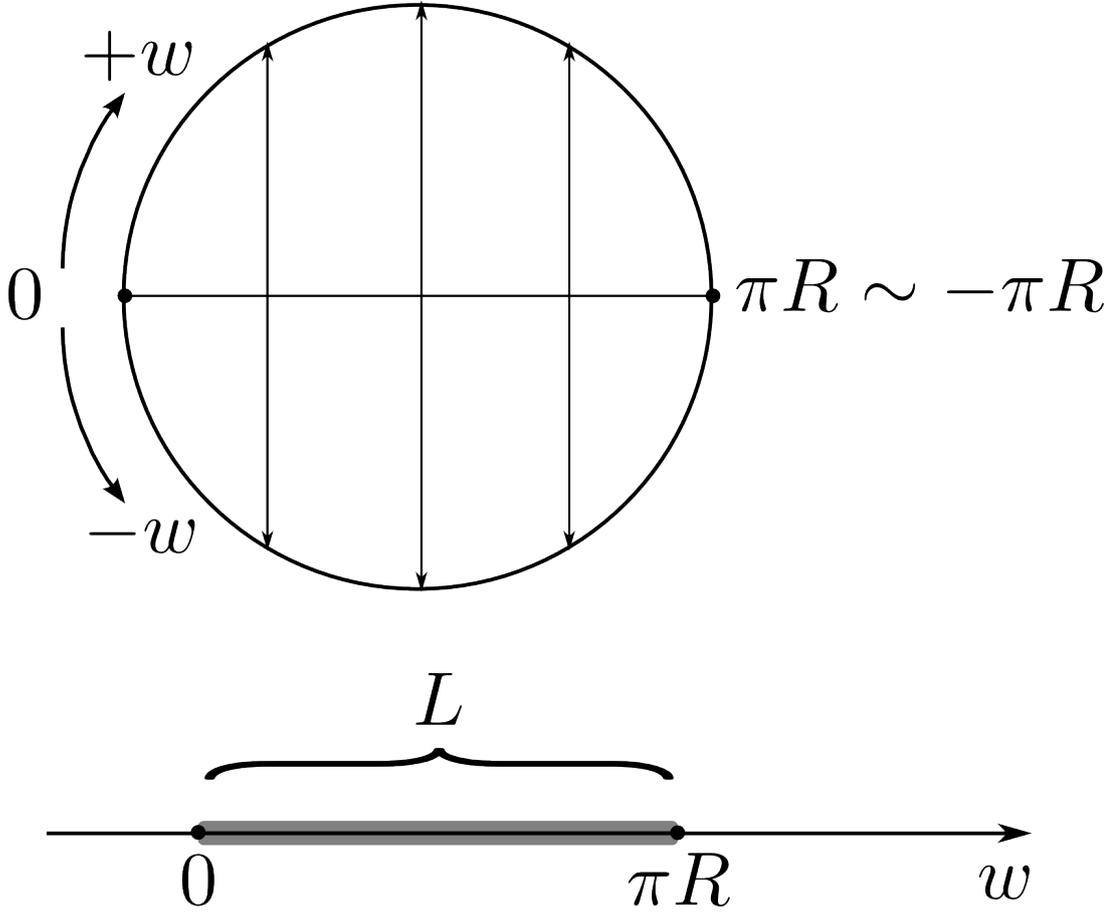


Figura 3.1: Orbifold $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$, obtido através da identificação dos pontos antípodas da circunferência. Observe que o ponto $w = 0$ é identificado com ele próprio, sendo portanto um *ponto fixo*.

A ação para o modelo é a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica, levando-se em conta a dimensão extra:

$$S = S_H + S_m = -\frac{M_5^3}{2} \int d^4x \int_{-L}^{+L} dw \sqrt{-g} (R_g + 2\Lambda_5), \quad (3.1)$$

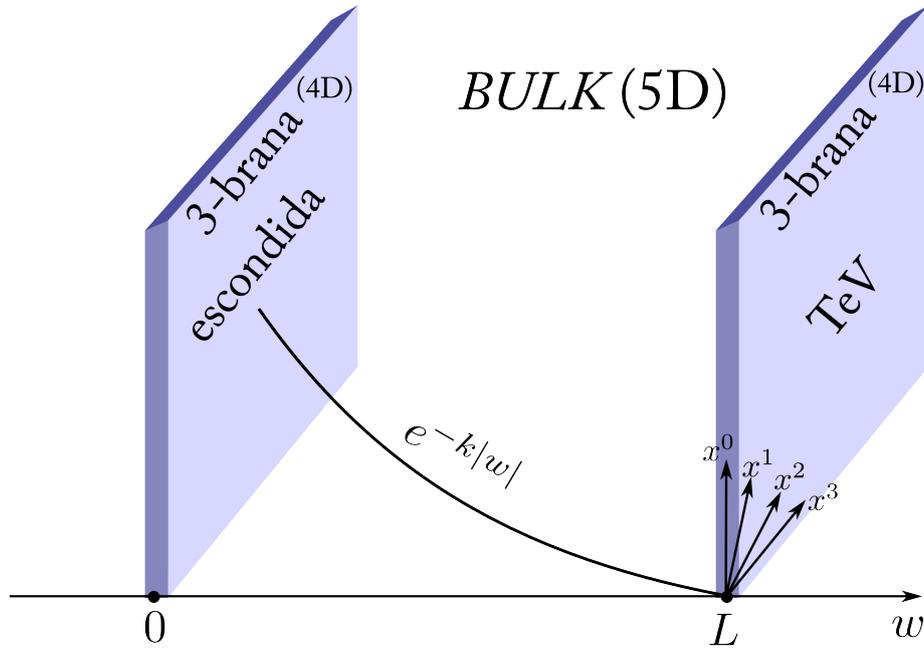


Figura 3.2: Configuração do modelo Randall-Sundrum. A brana localizada em $w = L$ é chamada de *brana visível* ou *brana TeV*, e é representada o universo observável de quatro dimensões.

onde M_5 é a escala de Planck (nesse caso chamada *escala fundamental*), R_g o escalar de curvatura da métrica g_{ab} e $g = \det g_{ab}$.

As equações de campo são

$$G_{AB} = \frac{1}{M_5^3} T_{AB}, \quad T_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{AB}}. \quad (3.2)$$

Apesar das equações de Einstein serem extremamente difíceis de se resolver, um detalhe as simplifica e mostra a riqueza do modelo Randall-Sundrum: como procuramos soluções que descrevam o nosso universo, a métrica deve preservar a invariância de Poincaré, resultando em um universo quadridimensional plano e estático. Assim, temos um *ansatz* para a solução:

$$ds^2 = e^{-2A(w)} \eta_{AB} dx^A dx^B + dw^2, \quad (3.3)$$

onde $\eta_{AB} = \text{diag}(-1 +1 +1 +1)$ é a métrica de Minkowski quadridimensional. O fator $A(w)$ é chamado *fator de warp*. a componente ww da equação (3.2) nos dá [186]

$$G_{ww} = -6(A')^2 = \frac{\Lambda_5}{M^3}. \quad (3.4)$$

Podemos ver que uma solução com A real existe somente se $\Lambda_5 < 0$, implicando que a geometria

que interpola as branas é do tipo anti-de Sitter. Isso nos dá a solução

$$(A')^2 = k^2, \quad k^2 = -\frac{\Lambda_5}{6M^3}, \quad (3.5)$$

isto é, A' é constante. Logo, a solução que contém a simetria \mathbb{Z}^2 é

$$A(w) = k|w|, \quad (3.6)$$

o que nos dá a métrica ambiente do modelo Randall-Sundrum:

$$ds^2 = e^{-2k|w|} \eta_{AB} dx^A dx^B + dw^2. \quad (3.7)$$

Modelo de Gherghetta-Shaposhnikov

Os modelos ADD e Randall-Sundrum abriram as possibilidades para se investigar a localização dos campos em diversos cenários de dimensões extras. Modelos bastante interessantes surgem quando a geometria ambiente é um defeito topológico, análogo aos estudados em cosmologia e teoria clássica de campos. Em seis dimensões por exemplo, é possível impor uma simetria azimutal nas coordenadas extras (em analogia com a simetria \mathbb{Z}_2 do modelo Randall-Sundrum), o que confere à brana uma geometria análoga a uma corda: essa brana é chamada *brana tipo corda*, em alusão às cordas cósmicas.

O que se segue aqui é uma breve revisão da construção geométrica de [187], seguindo as lições do modelo Randall-Sundrum. Em seis dimensões, comecemos com as equações de campo

$$G_{ab} = \Lambda_6 g_{ab} + \frac{1}{M_6^4} T_{ab}, \quad (3.8)$$

onde Λ_6 é a constante cosmológica no bulk, T_{ab} é o tensor momentum-energia e M_6 é a escala de Planck reduzida; também assumimos a existência de uma geometria 6-dimensional que respeita a invariância da simetria de Poincaré na brana quadridimensional, a saber

$$ds^2 = A(\rho) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + R_0^2 B(\rho) d\theta^2, \quad (3.9)$$

onde escolhemos as duas dimensões extras escritas em coordenadas polares $\rho \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

As componentes não-nulas para o tensor momentum-energia são tomados como

$$T^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tau_0, \quad T^r_r = \tau_r, \quad T^{\theta}_{\theta} = \tau_{\theta}, \quad (3.10)$$

onde as funções-fonte τ_0 , τ_r e τ_{θ} são todas radialmente dependentes. Assim, usando (3.9) e (3.10) as equações de movimento são

$$\frac{3}{2} \frac{A''}{A} + \frac{3}{4} \frac{A' B'}{A B} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{B''}{B} = - \left(\Lambda + \frac{\tau_0}{M_6^4} \right), \quad (3.11)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{A' B'}{A B} = - \left(\Lambda + \frac{\tau_r}{M_6^4} \right), \quad (3.12)$$

$$2 \frac{A''}{A} + \frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 = - \left(\Lambda + \frac{\tau_{\theta}}{M_6^4} \right), \quad (3.13)$$

onde o linha (\prime) denota a diferenciação com respeito à variável radial ρ . As fontes são relacionadas com a geometria através da equação de continuidade

$$\tau'_r - 2 \frac{A'}{A} (\tau_0 - \tau_r) + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} (\tau_r - \tau_{\theta}) = 0. \quad (3.14)$$

Pode-se pensar que existe um defeito (local) tipo corda que é uma 3-brana em $\rho = 0$, possuindo um tensor momentum-energia (3.10) não-nulo, de forma análoga a solução de corda de Nielsen-Olesen para o modelo de Higgs abeliano em seis dimensões. As funções-fonte descrevem nesse caso uma distribuição de matéria que é nula exceto dentro de um núcleo de raio ϵ . Para que a geometria ambiente induza a geometria da brana, deve-se impor as condições

$$A'(0) = 0, \quad (\sqrt{B})'(0) = 1, \quad B(0) = 0. \quad (3.15)$$

Podemos também definir as componentes da tensão na corda por unidade de comprimento como sendo

$$\mu_i = \int_0^{\epsilon} d\rho A^2 \sqrt{B} \tau_i(\rho), \quad (3.16)$$

onde $i = 0, \rho, \theta$.

A métrica do modelo é obtida ao procurar soluções do tipo $A(\rho) = e^{-c\rho}$, de onde pode-se

encontrar a solução

$$ds^2 = e^{-c\rho} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + R_0^2 e^{-c\rho} d\theta^2, \quad c = \sqrt{\frac{2-\Lambda_6}{5} \frac{M_6^4}{M_5^4}} \quad (3.17)$$

onde R_0 é fixado a partir das condições de contorno.

O ansatz (3.9) para a métrica nos fornece a seguinte expressão para a escala de massa em quatro dimensões:

$$M_{\text{p}}^2 = 2\pi M_6^4 \int_0^\infty d\rho A \sqrt{B}. \quad (3.18)$$

3.2.2 Modelo de Randall-Sundrum com violação da simetria de Lorentz

Nesta subsecção iremos fazer uma revisão da referência [183], nos restringindo a parte do espectro de Kaluza-Klein para o campo gravitacional.

Lembrando da construção do modelo Randall-Sundrum, A ação que estende (3.1) e envolve a quebra da simetria de Lorentz segue das referências [159, 188]

$$S = -\frac{M_5^3}{2} \int d^4x dy \sqrt{-g} (R + 2\Lambda - \lambda s^{ab} R_{ab}), \quad (3.19)$$

onde λ é uma constante adimensional da ordem da unidade que mede a intensidade da quebra da simetria de Lorentz e $s^{ab} = u^a u^b$ é um tensor constante definido a partir do valor esperado de vácuo de um 5-vetor $u^a = (0, 0, 0, 0, 1)$. As equações de movimento que seguem da ação (3.19) são

$$G_{ab} = \Lambda g_{ab} + \lambda \mathcal{F}_{ab}, \quad (3.20)$$

onde G_{ab} é o tensor de Einstein e

$$\mathcal{F}_{ab} = -\frac{1}{2} R_{cd} s^{cd} g_{ab} + 2g_{d(a} R_{b)c} s^{cd} + \frac{1}{2} \nabla_c \nabla_d s^{cd} g_{ab} + \frac{1}{2} \Delta s_{ab} - g_{d(a} \nabla_{|c|} \nabla_{|b)} s^{cd}$$

é um tensor que surge do termo de quebra de simetria em (3.19). Os parêntesis enclausurando os índices denotam simetrização, e Δ denota o operador de Laplace-Beltrami $\Delta = \nabla^a \nabla_a$.

Para investigar as implicações que o termo de quebra causa na teoria efetiva em quatro dimensões, nós precisamos primeiramente identificar as flutuações não-massivas em torno da métrica de fundo. Como neste caso a métrica ambiente é dada por (3.7), tomamos flutuações tensoriais

da forma

$$ds^2 = e^{-2ky}(\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (3.21)$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$ representa o gráviton na teoria 4-dimensional. Assim, as flutuações gravitacionais sem massa são identificadas pela linearização das equações de movimento (3.20).

No caso de uma solução plana (sem curvatura) em cinco dimensões, o cálculo foi feito em [182], e foi encontrada a equação de movimento

$$\square\gamma_{\mu\nu} = \lambda \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial y^2}. \quad (3.22)$$

Isto nos dá um espectro de Kaluza-Klein $m_n^2 = n^2(1 + \lambda)/R^2$, e funções de onda na forma trigonométrica. Este resultado está de acordo com os resultados encontrados para os campos escalar e fermiônico, já discutidos em [183]. Vale ressaltar que o parâmetro de quebra λ nesse caso não leva a nenhuma inconsistência com a teoria efetiva 4-dimensional, pois não há um termo de massa extra no bulk.

Em um espaço-tempo curvo entretanto a situação muda. A equação de movimento para a componente yy é não dinâmica e simplesmente relaciona a constante cosmológica com o parâmetro de quebra λ :

$$\Lambda = -6k^2\left(1 + \frac{\lambda}{3}\right).$$

O resultado para o modelo de Randall-Sundrum é obtido no limite $\lambda \rightarrow 0$. A diferença é que, como o valor de λ varia, o seu decréscimo para valores infinitamente negativos causa uma mudança de topologia $AdS_5 \rightarrow dS_5$. Assim, por questão de consistência em evitar a transição de um espaço de curvatura negativa para outro de curvatura positiva, deve ser imposta a condição $\lambda > -3$. Mais ainda, neste caso não há tensões na brana a serem ajustadas, e assim as outras equações de movimento são automaticamente satisfeitas.

As equações de movimento linearizadas para as flutuações tensoriais $\gamma_{\mu\nu}$ são dadas por

$$-\square\gamma_{\mu\nu} + e^{-2ky}(1 + \lambda)\partial_y^2\gamma_{\mu\nu} - 4ke^{-2ky}(1 + \lambda)\partial_y\gamma_{\mu\nu} - 8k^2\lambda e^{-2ky}\gamma_{\mu\nu} = 0 \quad (3.23)$$

e sob a decomposição de Kaluza-Klein

$$\gamma_{\mu\nu}(x^\rho, y) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\mu\nu}^{(n)}(x^\rho)\phi_n(y), \quad (3.24)$$

onde impusemos $\square M_{\mu\nu}^{(n)} = -m_n^2 M_{\mu\nu}^{(n)}$, nós podemos encontrar as equações de movimento para o gráviton, a saber

$$-\partial_y(e^{-4ky} \partial_y \phi_n) + m^2 e^{-4ky} \phi_n = \tilde{m}_n^2 e^{-2ky} \phi_n, \quad (3.25)$$

onde $\tilde{m}_n^2 = m_n^2/(1 + \lambda)$ e

$$m^2 = 8k^2 \frac{\lambda}{1 + \lambda}. \quad (3.26)$$

A partir da equação (3.25) nós podemos ver que, ao contrário do caso plano, a curvatura do espaço AdS₅ (codificada pela constante k) juntamente com a violação da simetria de Lorentz levam a um termo de massa no bulk (3.26) que é nulo apenas quando $\lambda = 0$, isto é, quando não há a quebra da simetria. Portanto, a presença da quebra da simetria de Lorentz impede a existência de um modo zero (segundo a terminologia da decomposição de Kaluza-klein) não-massivo, levando a uma inconsistência fenomenológica pois o modo zero é associado ao gráviton quadridimensional; como a massa do gráviton no bulk depende da natureza da métrica de fundo, na próxima seção iremos construir um exemplo de espaço-tempo curvo que produz um gráviton sem massa.

3.2.3 Gravidade em um defeito tipo corda com violação da simetria de Lorentz

Agora iremos ver como a gravidade se comporta em uma brana com outra estrutura, diferente do modelo de Randall-Sundrum. Como nossa métrica de fundo, escolhemos um defeito tipo corda local, como o estudado na referência [187].

A fim de investigarmos a quebra da simetria de Lorentz em um cenário 6-dimensional, seguiremos a abordagem “conservativa” usada por Rizzo em [183], escolhendo assim a mesma ação (3.19), estendida para seis dimensões:

$$S = -\frac{M_6^2}{2} \int d^4x dr d\theta \sqrt{-g} (R + 2\Lambda - \lambda s^{ab} R_{ab}), \quad (3.27)$$

onde $u^A = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ e λ são as mesmas grandezas discutidas na seção 3.2.2. Esta ação funciona da mesma forma que o caso 5-dimensional, onde a invariância de Lorentz é quebrada apenas na dimensão extra. Embora pudéssemos ter escolhido um conjunto mais amplo de operadores de quebra (como por exemplo $u^A = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$), as implicações físicas de tais termos

vão além do escopo desse texto, e iremos nos restringir ao caso mais simples.

A ação apresentada na equação (3.19) nos dá as equações de movimento

$$\frac{3}{2} \frac{A''}{A} + \frac{3}{4} \frac{A' B'}{A B} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{B''}{B} = -\frac{1}{1+\lambda} \left(\Lambda + \frac{\tau_0}{M_6^4} \right), \quad (3.28)$$

$$-2\lambda \frac{A''}{A} + (1+\lambda) \frac{A' B'}{A B} + \left(\frac{3}{2} + \frac{5\lambda}{2} \right) \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 = -\left(\Lambda + \frac{\tau_r}{M_6^4} \right), \quad (3.29)$$

$$2 \frac{A''}{A} + \frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 = -\frac{1}{1+\lambda} \left(\Lambda + \frac{\tau_\theta}{M_6^4} \right) \quad (3.30)$$

e a equação de continuidade

$$6\tau_r' - 2 \frac{A'}{A} (\tau_0 - \tau_r) + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} (\tau_r - \tau_\theta) = -M_6^4 (\Lambda' + \lambda \mathcal{F}), \quad (3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho) = & -25 \left(\frac{A'}{A} \right)^3 - \frac{9}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 \frac{B'}{B} + \frac{11}{4} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - \frac{23}{8} \left(\frac{B'}{B} \right)^3 \\ & + 35 \frac{A' A''}{A A} + 4 \frac{A'' B'}{A B} - 3 \frac{B''}{B} \left(1 - \frac{B'}{B} \right) \\ & - \frac{A'}{A} \left[\frac{B'}{B} + \frac{9}{2} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - 5 \frac{B''}{B} \right] - 12 \frac{A'''}{A}. \end{aligned}$$

Note que agora nós permitimos uma dependência radial $\Lambda = \Lambda(\rho)$ para a constante cosmológica; isso pode ser interpretado como um fluido de densidade variável ao longo do bulk, devido a uma distribuição de matéria dentro do núcleo da corda.

Para simplificar a nossa construção iremos procurar por uma solução que satisfaz $A(\rho) = B(\rho)$. Neste caso, após uma álgebra um tanto tediosa podemos encontrar as equações linearizadas

$$\begin{aligned} (1+\lambda) \partial_r^2 \gamma + \frac{(5+7\lambda)}{2} \frac{A'}{A} \partial_r \gamma - \left[2\Lambda + \left(\frac{3}{2} + 5\lambda \right) \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + 4 \left(1 + \frac{3\lambda}{2} \right) \frac{A''}{A} \right] \gamma \\ = \frac{1}{A} \square \gamma - \frac{1}{R_0^2 A} \partial_\theta^2 \gamma. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Simplificando um pouco mais, ajustamos $\tau_\theta = 0$, que é equivalente a ajustarmos uma das tensões na brana,

$$\mu_\theta = \int_0^\epsilon d\rho A^{3/2} \tau_\theta(\rho)$$

para zero. Dessa forma, a escolha $\tau_\theta = 0$ a equação (3.13) é simplesmente uma definição para a

“constante” cosmológica em termos dos fatores métricos:

$$-\frac{\Lambda}{1+\lambda} = 2\frac{A''}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2. \quad (3.33)$$

Assim, fazendo a decomposição de Kaluza-Klein $\gamma_{\mu\nu}(x^\lambda, r, \theta) = M_{\mu\nu}(x^\lambda)\psi(\rho)e^{i\ell\theta}$, onde impomos $(\square + m_0^2)M_{\mu\nu} = 0$, nós obtemos da equação (3.32) as equações para as funções de onda do gráviton

$$\psi_m'' + \frac{(5+7\lambda)}{2(1+\lambda)}\frac{A'}{A}\psi_m' - \left[\frac{4+11\lambda}{2+2\lambda}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 - \frac{4+8\lambda}{2+2\lambda}\frac{A''}{A} \right]\psi_m = -\frac{1}{A}\frac{m^2}{1+\lambda}\psi_m, \quad (3.34)$$

onde $m^2 = m_0^2 - \ell^2/R_0^2$.

Desta última equação nós podemos ver que uma massa nula para o gráviton pode ser obtida somente se

$$\frac{A''}{A} - \frac{4+11\lambda}{4+8\lambda}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 = 0. \quad (3.35)$$

Note que no caso em que não há violação da simetria de Lorentz ($\lambda = 0$) esta igualdade é automaticamente satisfeita pela solução exponencial $A(\rho) = e^{-k\rho}$, onde

$$k = \sqrt{\frac{2(-\Lambda)}{5M_6^4}} \quad (3.36)$$

que foi encontrada na referência [187]. Também, nesse caso Λ é simplesmente uma constante, não dependendo da posição ao longo do bulk.

Em termos do fator de warp $w(\rho)$, definido por $A(\rho) = e^{w(\rho)}$, a equação (3.35) se torna

$$w'' - \tilde{\lambda}(w')^2 = 0, \quad \tilde{\lambda} = \frac{3\lambda}{4+8\lambda}.$$

Esta é uma equação de Riccati para w' , e sua solução é

$$w(\rho) = w_0 - \frac{1}{\tilde{\lambda}} \log(1 + c\rho\tilde{\lambda}), \quad (3.37)$$

onde w_0 e c são as constantes de integração, escolhidas a partir das condições de contorno impostas aos coeficientes da métrica. A partir desta solução podemos ver que uma solução matematicamente consistente pode ser encontrada simplesmente tomando-se $\lambda > 0$.

A despeito da aparência um tanto exótica do fator de warp, uma expansão em série de potências em torno da origem,

$$w(\rho) = w_0 - c\rho + \frac{c^2\tilde{\lambda}}{2}\rho^2 + \frac{c^3\tilde{\lambda}^2}{3}\rho^3,$$

revela que de fato esta solução recupera o resultado usual encontrado em [187] para um defeito tipo corda, seja tomando $\lambda \rightarrow 0$ ou $\rho \rightarrow 0$, quando identificamos $c \rightarrow k$. O comportamento da expressão (3.37) pode ser observado na figura 3.3.

O fator métrico é dado por

$$A(\rho) = A_0(1 + c\rho\tilde{\lambda})^{-1/\tilde{\lambda}}, \quad (3.38)$$

onde $A_0 = A(0)$. Seu comportamento é mostrado na figura 3.4.

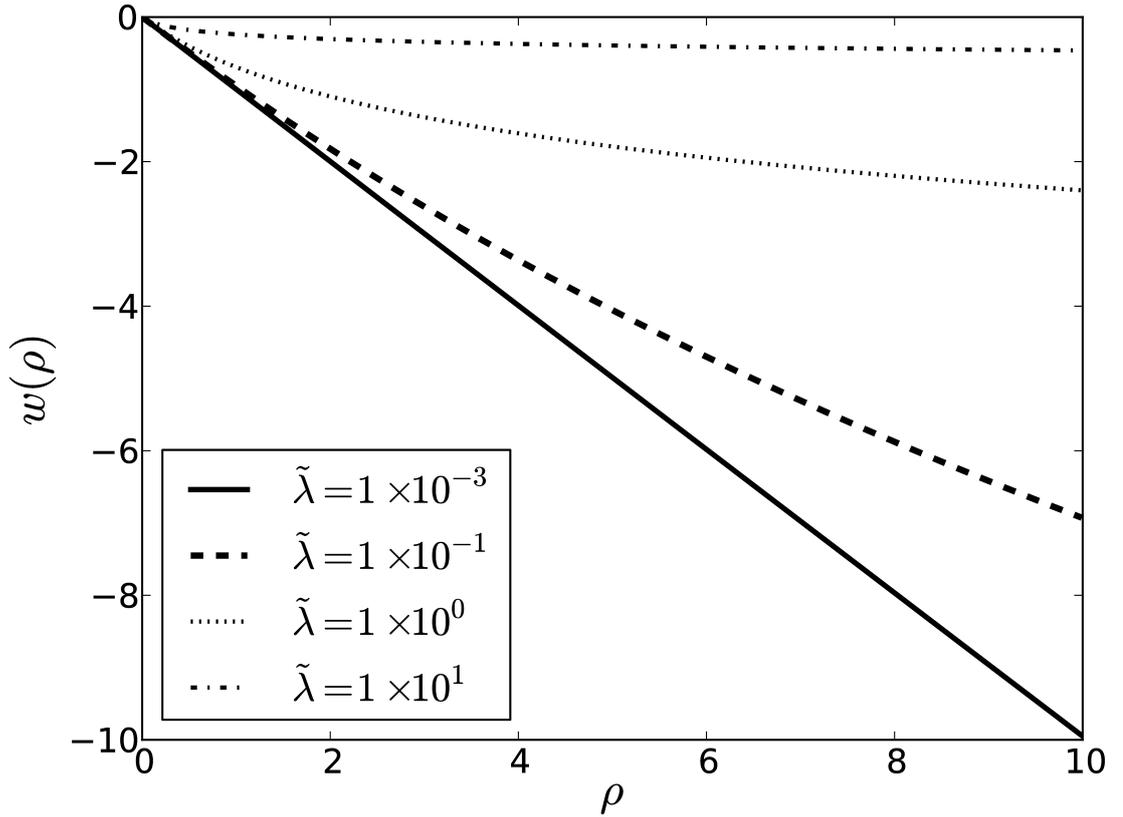


Figura 3.3: Fator de *warp* para a geometria tipo corda, para alguns valores de $\tilde{\lambda}$ e $c = 1$. Note como o comportamento linear é recuperado quando o parâmetro que introduz a quebra de Lorentz vai a zero.

A constante cosmológica no nosso caso é dada por

$$-\Lambda(\rho) = \frac{8c^2(26\lambda^3 + 49\lambda^2 + 28\lambda + 5)}{16[4\lambda(\lambda + 1) + 1] + [3(3c + 16)\lambda^2 + 24\lambda]c\rho'}, \quad (3.39)$$

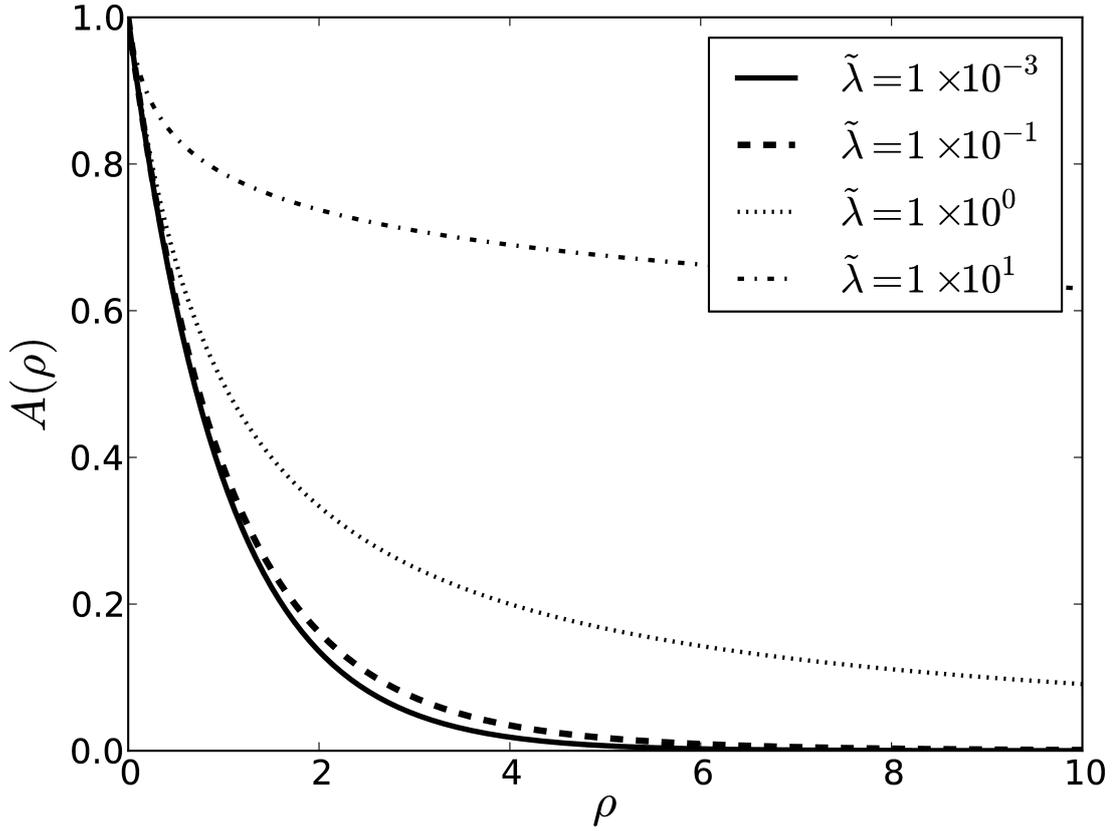


Figura 3.4: Componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica para alguns valores de $\tilde{\lambda}$ e $c = 1$.

que se reduz a uma constante $(-\Lambda) = 5c^2/2$ no caso invariante de Lorentz, como era de se esperar.

Um argumento geométrico que favorece essa geometria ao invés da geometria do espaço AdS é que nesse caso a curvatura não é constante,

$$R(\rho) = \frac{5c^2}{2} \frac{3 + 2\tilde{\lambda}}{(1 + c\rho\tilde{\lambda})^2} \quad (3.40)$$

o que é uma hipótese razoável: a curvatura variável contribui para anular os efeitos da quebra da invariância de Lorentz, rendendo uma massa nula para o gráviton.

3.2.4 Escala efetiva em quatro dimensões

Vamos ver agora como a quebra da invariância de Lorentz nessa geometria de seis dimensões afeta a relação entre as escalas de massa no *bulk* e na brana.

As componentes da métrica são funções limitadas, o que nos dá um volume finito para a brana. Isso possibilita um ajuste entre as escalas de energia. Para isso tomamos a ação (3.27) sob

perturbações tensoriais da forma (3.21), o que nos dá um termo dominante

$$S_{\text{eff}} \propto \int d^4x \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty d\rho A(\rho) \sqrt{B(\rho)} \sqrt{-g^{(0)} R^{(0)}} \quad (3.41)$$

onde $R^{(0)}$ denota o escalar de curvatura da métrica ambiente $g_{ab}^{(0)}$ e $g^{(0)} = \det g_{ab}^{(0)}$. A partir desta ação podemos encontrar

$$M_{\text{p}}^2 = 2\pi R_0 M_6^4 \int_0^\infty d\rho A^{3/2}. \quad (3.42)$$

como a função métrica A é dada por (3.38) temos

$$M_{\text{p}}^2 = \frac{8\pi R_0 A_0^{3/2}}{3c} \left(\frac{2\lambda + 1}{3\lambda + 2} \right) M_6^4. \quad (3.43)$$

3.3 Espalhamento bóson-gráviton & correções ao potencial gravitacional

Nesta seção iremos investigar, no limite de baixas energias, os efeitos da violação da simetria de Lorentz no setor gravitacional do MPE. Mais precisamente, escolhemos um modelo particular que implementa a simetria de Lorentz de forma espontânea através da dinâmica de um campo vetorial B_μ , chamado modelo de *bumblebee*¹ [177, 179], para calcular correções quânticas ao potencial gravitacional Newtoniano. Através de uma aproximação de campo fraco nesse modelo, mostramos que a introdução de um campo escalar neutro acoplado com o campo gravitacional leva à correções ao potencial, entre as quais se inclui um termo de Darwin. As modificações encontradas são usadas para obter limites experimentais para a magnitude do parâmetro de quebra. Neste capítulo usaremos a assinatura (+ - - -) para o espaço-tempo. Todas as quantidades estarão expressas em unidades naturais ($\hbar = c = \epsilon_0 = 1$) (ver apêndice A).

3.3.1 Modelo teórico

O modelo mais simples para a gravidade que envolve a quebra de Lorentz em um espaço-tempo (3+1)-dimensional é dado pela ação

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{LV}} + S_{\text{m}}. \quad (3.44)$$

¹Um tipo de abelha, chamada *Mamangaba* no Brasil

O primeiro termo na equação acima representa a ação usual de Einstein-Hilbert,

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2}{\kappa^2} (R - 2\Lambda), \quad (3.45)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de curvatura, Λ é a constante cosmológica e $\kappa^2 = 32\pi G_{\text{N}}$ é a constante de acoplamento gravitacional. Como queremos examinar os efeitos da quebra de Lorentz no potencial gravitacional não-relativístico, iremos ignorar a constante cosmológica, tomando-a como nula daqui em diante.

O segundo termo em (3.44) representa o setor gravitacional para o MPE mínimo e contém os coeficientes para quebra de Lorentz acoplados com os tensores de Riemann e Ricci e o escalar de curvatura, da seguinte forma:

$$S_{\text{LV}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2}{\kappa^2} (uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}), \quad (3.46)$$

onde u , $s^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ são campos tensoriais com dimensão de massa zero e possuindo as mesmas simetrias das quantidades geométricas às quais estão associadas.

Por fim, o último termo do lado direito da equação (3.44) leva em consideração os acoplamentos com a matéria, que em princípio podem envolver todos os tipos de campos do Modelo Padrão, bem como suas interações com os coeficientes descritos anteriormente. Contudo, iremos focar apenas no seu acoplamento com o campo gravitacional. Os efeitos da quebra de Lorentz no setor de matéria do MPE pode ser visto na referência [189].

Agora vamos considerar o caso particular onde $t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. Os coeficientes u e $s^{\mu\nu}$ têm dez graus de liberdade (o traço de $s^{\mu\nu}$ pode ser absorvido no coeficiente escalar u) que podem ser descritos por uma teoria efetiva envolvendo um único campo vetorial B_μ , cuja dinâmica é determinada pela ação

$$S_{\text{B}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \mp b^2) \right], \quad (3.47)$$

com $B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} B_{\nu]}$, σ uma constante de acoplamento adimensional e b^2 uma constante positiva que ajusta o valor esperado de vácuo para B_μ . O potencial V é o gatilho para a quebra espontânea das simetrias de Lorentz e difeomorfismo, no valor de mínimo $g^{\mu\nu} B_\mu B_\nu \pm b^2 = 0$, isto é, quando B_μ e $g_{\mu\nu}$ adquirem um valor esperado de vácuo não-nulo. Este é um caso particular do modelo de *bumblebee*. Note também que para $\sigma = 0$ a ação do modelo se torna invariante do grupo $U(1)$,

cuja simetria também é quebrada pelo potencial V .

A correspondência entre a ação (3.46) e o modelo (3.47) é obtida através das relações

$$u = \frac{1}{4} \xi B^\alpha B_\alpha, \quad (3.48)$$

$$s^{\mu\nu} = \xi B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} \xi g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha, \quad (3.49)$$

$$t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad (3.50)$$

onde, por conveniência, escrevemos $\sigma = (2\xi/\kappa^2)$, de modo que as dimensões de massa do campo de *bumblebee* e da constante de acoplamento são $[B^\mu] = 1$, $[\xi] = -2$.

Propagador do gráviton e aproximação de campo fraco

Para investigarmos os efeitos do acoplamento gravidade-bumblebee na dinâmica do gráviton, separamos as grandezas dinâmicas em duas partes: o valor esperado de vácuo e suas flutuações, da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

$$B_\mu = b_\mu + \tilde{B}_\mu, \quad (3.52)$$

$$B^\mu = b^\mu + \tilde{B}^\mu - \kappa b_\nu h^{\mu\nu}, \quad (3.53)$$

onde $h_{\mu\nu}$ e \tilde{B}_μ representam respectivamente pequenas perturbações em torno do espaço de Minkowski e de um valor de vácuo constante para b_μ . O vetor b_μ é o coeficiente para a quebra local da simetria de Lorentz, associada ao campo bumblebee.

Variando a ação (3.47) com respeito ao campo bumblebee, nós obtemos a sua equação de movimento:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu \left(\sqrt{-g} B_{\mu\nu} \right) - 2V' B_\nu + 2\sigma B^\mu R_{\mu\nu} = 0, \quad (3.54)$$

onde a linha ' significa que a derivada é tomada em relação ao argumento.

Empregando as expansões (3.53) e assumindo a seguinte forma para o potencial,

$$V = V(B^\mu B_\mu \mp b^2) = \frac{\lambda}{2} (B^\mu B_\mu \mp b^2)^2, \quad (3.55)$$

a equação de movimento (3.54) na forma linearizada pode ser escrita como

$$\left(\square\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu - 4\lambda b_\mu b_\nu\right)\tilde{B}^\mu = -2\lambda\kappa b_\nu b_\alpha b_\beta h^{\alpha\beta} - 2\sigma b^\alpha R_{\alpha\nu}, \quad (3.56)$$

com \square sendo o operador d'Alembertiano (o operador de laplace em espaços Lorentzianos). Nesta expressão, $R_{\mu\nu}$ deve ser tomado na sua forma linearizada. Também, por simplicidade, b_μ é tomado como sendo um vetor do tipo tempo, tal que $b^\mu b_\mu = +b^2$. Aplicando o método da função de Green, a solução de (3.56) pode ser encontrada como sendo (no espaço dos momenta)

$$\tilde{B}^\mu = \frac{\kappa p^\mu b_\alpha b_\beta h^{\alpha\beta}}{2b \cdot p} + \frac{2\sigma b_\alpha R^{\alpha\mu}}{p^2} - \frac{2\sigma p^\mu b_\alpha b_\beta R^{\alpha\beta}}{p^2 b \cdot p} + \frac{\sigma p^\mu R}{4\lambda b \cdot p} - \frac{\sigma b^\mu R}{p^2} + \frac{\sigma p^\mu b^2 R}{p^2 b \cdot p}, \quad (3.57)$$

com $b \cdot p = b_\mu p^\mu$, $p^2 = p \cdot p = p_\mu p^\mu$.

Substituindo a solução encontrada na ação (3.46), com o auxílio das relações (3.50) e (3.53), podemos determinar as modificações ocasionadas pela não-nulidade do valor esperado de vácuo sobre os termos cinéticos do gráviton. Assim, é necessário expandir o termo de interação bumblebee-graviton \mathcal{L}_{LV} até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, obtendo então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LV} &= \sigma\sqrt{-g}B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} \\ &= \sigma \left[b_\mu b_\nu R^{\mu\nu}(h^2) + 2b_\mu \tilde{B}_\nu R^{\mu\nu}(h) + \frac{1}{2}\kappa h^\alpha_\alpha b_\mu b_\nu R^{\mu\nu}(h) \right] + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde a ordem da expansão é indicada explicitamente. Substituindo \tilde{B}^μ e agrupando os termos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LV} &= \xi \left[p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\nu} h^\alpha_\alpha + \frac{1}{2} (b \cdot p)^2 (h^\alpha_\alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (b \cdot p)^2 h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\alpha} h^\nu_\alpha - (b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta + b_{(\mu} p_{\nu)}) b_{(\alpha} p_{\beta)} h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \right] \\ &\quad + \frac{4\xi^2}{\kappa^2} \left[\left(-2p^2 b_\mu b_\nu - 2b^2 p_\mu p_\nu + 4b \cdot p b_{(\mu} p_{\nu)} - \frac{p^2 p_\mu p_\nu}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^\alpha_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \left(2b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta - b_{(\mu} p_{\nu)} b_{(\alpha} p_{\beta)} + \frac{b^2 p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{2b \cdot p p_\mu p_\nu b_{(\alpha} p_{\beta)}}{p^2} + \frac{p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \left(b^2 p^2 - (b \cdot p)^2 + \frac{p^4}{4\lambda} \right) (h^\alpha_\alpha)^2 + \left(p^2 b_\mu b_\nu - 2b \cdot p b_{(\mu} p_{\nu)} + \frac{(b \cdot p)^2 p_\mu p_\nu}{p^2} \right) h^{\mu\lambda} h^\nu_\lambda \right] + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned} \quad (3.59)$$

com $\sigma = (2\xi/\kappa^2)$. Note que os termos de primeira ordem em ξ são quadráticos em b^μ , e o

termos de segunda ordem em ξ apresentam contribuições independentes da geometria ambiente, provenientes exclusivamente da quebra da simetria. Tais contribuições introduzem correções não locais ∂^4 no termo cinético do gráviton. Essas modificações produzem correções distintas no potencial gravitacional.

A expressão acima pode ser escrita no espaço das posições e então combinada com expansão da ação de Einstein-Hilbert, resultando em

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \partial h^{\mu\nu} \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.60)$$

onde $h \equiv h^\lambda{}_\lambda$. Para garantir que o propagador seja não singular, adicionamos um termo de fixação de calibre (calibre transverso e sem traço),

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -(\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\nu h)^2, \quad (3.61)$$

que nos dá para o lagrangiano efetivo o seguinte termo cinético:

$$\mathcal{L}_{\text{k}} = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \widehat{\mathcal{O}}_{\mu\nu,\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (3.62)$$

onde o operador $\widehat{\mathcal{O}}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ é separado em duas partes,

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \widehat{\mathcal{V}}_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (3.63)$$

de tal forma que $\widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ é a forma quadrática usual, a saber,

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) (-\partial^2), \quad (3.64)$$

enquanto $\widehat{\mathcal{V}}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ encerra os termos da quebra de simetria.

O propagador para o gráviton é definido como

$$\langle 0 | T [h_{\mu\nu}(x) h_{\alpha\beta}(y)] | 0 \rangle = D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y), \quad (3.65)$$

onde $D_{\mu\nu,\alpha\beta}$ é o operador que satisfaz a equação de Green

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} D^{\lambda\sigma,\alpha\beta}(x-y) = i \mathcal{F}^{\mu\nu,\alpha\beta} \delta^4(x-y), \quad (3.66)$$

com $\mathcal{F}^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})$. Então, o propagador exato para o gráviton deve ser calculado invertendo-se (3.63), através da construção de uma álgebra fechada composta por um conjunto apropriado de operadores de projeção. Tal cálculo não foi o propósito principal deste trabalho, tendo sido feito em um trabalho posterior [190]. Assim, usamos o fato de que os parâmetros da quebra de simetria são pequenos, e empregamos a identidade matricial

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A}B\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A+B} = \dots \quad (3.67)$$

para obtermos uma aproximação do propagador.

Empregando a aproximação (3.67) o operador $\hat{\mathcal{K}}$ pode ser então facilmente invertido; tomando o operador usual para gráviton,

$$D_0^{\mu\nu,\alpha\beta}(q) = \frac{i}{2} \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{q^2 + i\epsilon}, \quad (3.68)$$

obtemos após bastante álgebra o propagador corrigido (até segunda ordem):

$$\begin{aligned} (D_{LV}^{\mu\nu,\alpha\beta})_{\xi} &= i\xi \left[b^2 \left(\frac{g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{q^{\alpha}q^{\beta}g^{\mu\nu}}{q^4} \right) \right. \\ &+ \frac{(b \cdot q)^2 (g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu})}{2q^4} \\ &+ \frac{b \cdot q (b^{\beta}q^{\alpha}g^{\mu\nu} + b^{\alpha}q^{\beta}g^{\mu\nu} + b^{\nu}q^{\mu}g^{\alpha\beta} + b^{\mu}q^{\nu}g^{\alpha\beta})}{2q^4} \\ &+ \left(\frac{b^{\alpha}b^{\mu}g^{\beta\nu} + b^{\beta}b^{\mu}g^{\alpha\nu} + b^{\alpha}b^{\nu}g^{\beta\mu} + b^{\beta}b^{\nu}g^{\alpha\mu} - 2b^{\alpha}b^{\beta}g^{\mu\nu} - 4b^{\mu}b^{\nu}g^{\alpha\beta}}{2q^2} \right. \\ &\left. - \frac{4b^{\mu}b^{\nu}q^{\alpha}q^{\beta} + b^{\beta}b^{\nu}q^{\alpha}q^{\mu} + b^{\alpha}b^{\nu}q^{\beta}q^{\mu} + b^{\beta}b^{\mu}q^{\alpha}q^{\nu} + b^{\alpha}b^{\mu}q^{\beta}q^{\nu}}{2q^4} \right) \Bigg], \quad (3.69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_{LV}{}^{\mu\nu,\alpha\beta})_{\xi^2} &= \frac{i\xi^2}{\kappa^2} \left[b^2 \left(\frac{12q^\mu q^\nu g^{\alpha\beta} - 12q^\alpha q^\beta g^{\mu\nu}}{q^4} + \frac{8q^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu}{q^6} \right) + \frac{g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}}{2\lambda} \right. \\
&+ \frac{2(b \cdot q)^2 (q^\alpha q^\mu g^{\beta\nu} + q^\beta q^\mu g^{\alpha\nu} + q^\alpha q^\nu g^{\beta\mu} + q^\beta q^\nu g^{\alpha\mu} + 2q^\mu q^\nu g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta g^{\mu\nu})}{q^6} \\
&+ b \cdot q \left\{ \frac{10(b^\beta q^\alpha g^{\mu\nu} + b^\alpha q^\beta g^{\mu\nu} - b^\nu q^\mu g^{\alpha\beta} - b^\mu q^\nu g^{\alpha\beta})}{q^4} + \frac{8(b^\beta q^\alpha q^\mu q^\nu + b^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu)}{q^6} \right. \\
&- \left. \frac{4(b^\mu q^\alpha g^{\beta\nu} - b^\mu q^\beta g^{\alpha\nu} - b^\nu q^\alpha g^{\beta\mu} - b^\nu q^\beta g^{\alpha\mu})}{q^4} \right\} - \frac{q^\alpha q^\beta g^{\mu\nu}}{q^2 \lambda} + \frac{3q^\mu q^\nu g^{\alpha\beta}}{q^2 \lambda} \\
&+ \left\{ \frac{2(b^\alpha b^\mu g^{\beta\nu} + b^\beta b^\mu g^{\alpha\nu} + b^\alpha b^\nu g^{\beta\mu} + b^\beta b^\nu g^{\alpha\mu} - 2b^\alpha b^\beta g^{\mu\nu} + 2b^\mu b^\nu g^{\alpha\beta})}{q^2} \right. \\
&+ \left. \frac{2(8b^\mu b^\nu q^\alpha q^\beta - b^\beta b^\nu q^\alpha q^\mu - b^\alpha b^\nu q^\beta q^\mu - b^\beta b^\mu q^\alpha q^\nu - b^\alpha b^\mu q^\beta q^\nu) + \frac{2q^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu}{\lambda}}{q^4} \right\} \quad (3.70)
\end{aligned}$$

onde $(D_{LV}{}^{\mu\nu,\alpha\beta})_{\xi}$ e $(D_{LV}{}^{\mu\nu,\alpha\beta})_{\xi^2}$ são as contribuições para $D_{LV}{}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ proporcionais a ξ e ξ^2 respectivamente.

Levando-se em consideração a expressão (3.50), os produtos b^2 , $(b \cdot q)^2$ e $(b \cdot q)b^\mu$ são termos de primeira ordem nos coeficientes u e $s^{\mu\nu}$. Assim, podemos notar que a correção $(D_{LV}{}^{\mu\nu,\alpha\beta})_{\xi}$ envolve apenas termos de primeira ordem em u e $s^{\mu\nu}$, e é independente da forma do potencial $V(x)$. Contudo em segunda ordem em ξ existem termos não associados com b_μ (termos proporcionais a λ^{-1}). Correções para o propagador do gráviton têm pólos em $q^2 = 0$, mostrando que (nessa aproximação) a teoria é livre de estados fantasmas e táquions. O termo $(D_{LV}{}^{\mu\nu,\alpha\beta})_{\xi^2}$ também possui um termo $g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}/2\lambda$ que pode estar relacionado à propagação de um modo massivo para o campo bumblebee.

Modificações na lei de Newton

Nesta seção vamos estudar os efeitos da quebra espontânea da simetria de Lorentz através da aproximação não relativística do propagador do gráviton a nível de árvore. Para isso iremos considerar a interação gravitacional entre duas partículas massivas *distinguíveis* e sem *spin*.

Considere a ação

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right], \quad (3.71)$$

para um campo escalar real ϕ em um espaço-tempo curvo. Essa ação pode ser expandida na

aproximação de campo fraco para o gráviton, que em primeira ordem para h rende o seguinte lagrangiano:

$$\mathcal{L}_m \approx \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \kappa h^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \right]. \quad (3.72)$$

Vamos agora considerar o processo de espalhamento envolvendo duas partículas escalares de massas m_1 e m_2 . O único diagrama que contribui para este processo, em ordem mais baixa, é mostrado na figura 3.5. A expressão para ele é

$$i\mathcal{M} = (-i\kappa)^2 V^{\mu\nu}(p_1, -k_1, m_1) D_{\mu\nu, \alpha\beta}(q) V^{\alpha\beta}(p_2, -k_2, m_2), \quad (3.73)$$

onde $q = p_2 - k_2 = -(p_1 - k_1)$ é o *momentum* transferido e o vértice $V^{\mu\nu}(p, k, m)$ corresponde à expressão

$$V^{\mu\nu}(p, k, m) = -\frac{1}{2} [p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - \eta^{\mu\nu} (p \cdot k + m^2)]. \quad (3.74)$$

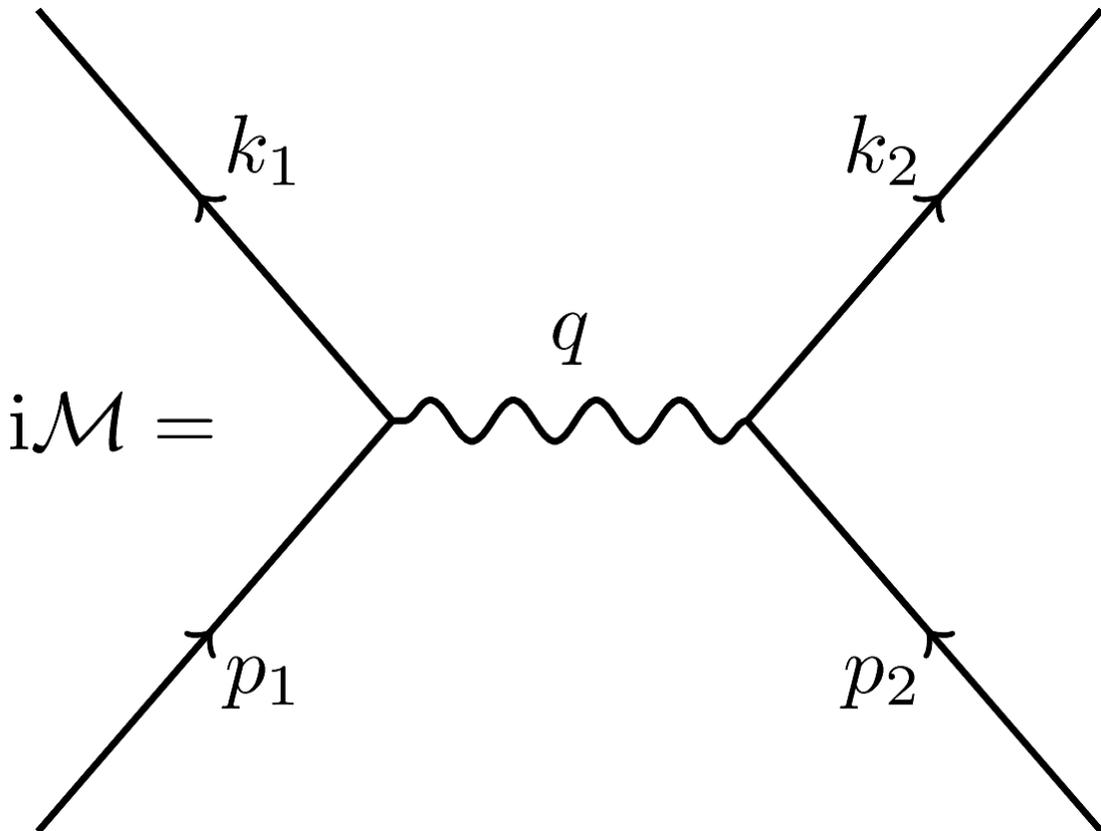


Figura 3.5: Diagrama a nível de árvore para duas partículas escalares interagindo através da troca de um gráviton.

Substituindo as expressões definidas em (3.65) e (3.74) na amplitude de espalhamento (3.73), nós podemos chegar à soma de duas partes,

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_0 + i\mathcal{M}_{LV}, \quad (3.75)$$

tal que o primeiro termo é apenas a amplitude dada por

$$i\mathcal{M}_0 = -\frac{i\kappa^2}{8q^2} \left[4 \left\{ (k_1 \cdot p_1) (m_2^2 - k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2) \right\} - 2m_1^2 \left\{ 4 (m_2^2 - k_2 \cdot p_2) + 2k_2 \cdot p_2 \right\} \right], \quad (3.76)$$

que é modificada por $i\mathcal{M}_{LV}$, consistindo de uma expressão um tanto imensa, que envolve todas as possíveis contrações de b^μ com os quadri-momenta das partículas espalhadas e do gráviton virtual.

Para obtermos o limite não-relativístico, tomamos a aproximação $p_{1,2} = (m_{1,2}, 0)$, $k_{1,2} = (m_{1,2}, 0)$ e $q = (0, \vec{q})$. Isso leva ao resultado

$$i\mathcal{M}_{NR} = \frac{i\kappa^2 m_1^2 m_2^2}{2\vec{q}^2} - \frac{i\xi \vec{b}^2 \kappa^2 m_1^2 m_2^2}{\vec{q}^2} + \frac{8i\xi^2 b_0^2 m_1^2 m_2^2}{\vec{q}^2} + \frac{i\xi^2 m_1^2 m_2^2}{2\lambda}, \quad (3.77)$$

onde os últimos três termos contém a matriz de correção que surge da quebra de simetria, e têm uma implicação física não trivial.

Para fazermos a conexão com o potencial gravitacional, seguimos o procedimento em [191] e definimos a transformada de Fourier do potencial no limite não-relativístico como

$$\begin{aligned} \langle f | iT | i \rangle &\equiv (2\pi)^4 \delta^4(p - k) i\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2) \\ &\approx -(2\pi) \delta(E_p - E_k) i\tilde{V}(\vec{q}), \end{aligned} \quad (3.78)$$

de tal forma que o potencial, no espaço dos *momenta* corresponde a

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2m_1} \frac{1}{2m_2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \tilde{V}(\vec{q}). \quad (3.79)$$

Para resolvermos (3.79) vamos assumir que as partículas m_1 e m_2 estão localizadas nos vetores x_1 e x_2 respectivamente em um sistema de coordenadas inercial cartesiano. Considerando $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$,

\vec{q} e \vec{b} como mostrados na figura 3.6, podemos definir as seguintes relações

$$\cos \theta = \frac{\vec{q} \cdot \vec{x}}{qr}, \quad \cos \theta_b = \frac{\vec{b} \cdot \vec{x}}{br}, \quad \cos \Psi = \frac{\vec{b} \cdot \vec{q}}{bq}, \quad (3.80)$$

com $\cos \Psi = \sin \theta \sin \theta_b \cos(\varphi - \varphi_b) + \cos \theta \cos \theta_b$, $q = |\vec{q}|$, $r = |\vec{x}|$ e $b = |\vec{b}|$. Assim o vetor \vec{b} define uma direção preferencial no espaço, dada pelos ângulos θ_b e φ_b . Integrando assim nas variáveis angulares, podemos obter o potencial

$$V(\vec{x}) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} \left[1 - \frac{3}{2} \xi \vec{b}^2 - \frac{1}{2} \xi (\vec{b} \cdot \hat{x})^2 \right] - G_N m_1 m_2 \left[\frac{\xi^2 b_0^2}{2\pi G_N} \frac{1}{r} - \frac{\xi^2}{8\lambda G_N} \delta^{(3)}(\vec{x}) \right], \quad (3.81)$$

onde $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$.

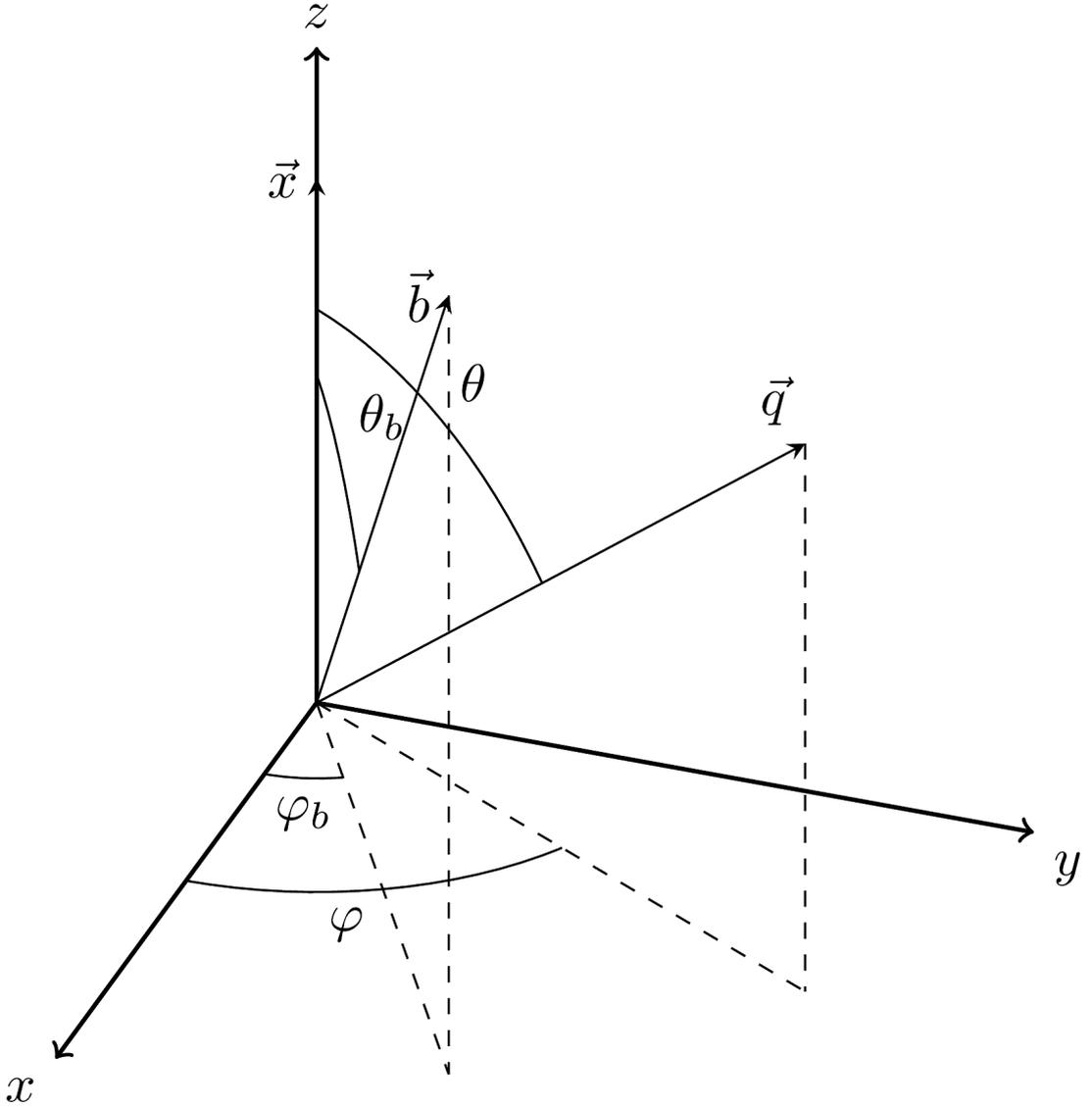


Figura 3.6: Sistema de coordenadas inercial adotado para o cálculo do limite não-relativístico.

Note o comportamento de V na expansão em ξ . Em ordem zero o potencial exibe o com-

portamento usual, e em primeira ordem temos uma dependência do ângulo θ_b . Dependendo do sinal de ξ podemos ter uma contribuição atrativa ou repulsiva: isso abre a possibilidade de que a intensidade da interação gravitacional seja modificada com a escala de energia.

Os termos de primeira ordem concordam com os resultados em [179, 189], obtidos através de aproximação pós-Newtoniana. De fato, se tomarmos $\vec{u} = \xi b_\alpha b^\alpha = 0$, de tal forma que $\vec{b}^2 = b_0^2$, mas com a transformação $\xi \rightarrow -\xi$, podemos escrever o potencial como

$$V(\vec{x}) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{3}{2} \bar{s}^{00} + \frac{1}{2} \bar{s}^{ij} \hat{x}^i \hat{x}^j \right] + \dots, \quad (3.82)$$

que é exatamente o potencial encontrado em [179].

Existe uma grande discussão sobre testes experimentais sensíveis à violações na simetria de Lorentz [192–194]. Um exemplo de teste é a medida do ângulo de deflexão de um raio de luz por um corpo massivo. Uma busca detalhada por desvios da Relatividade Geral devido à quebra da invariância de Lorentz foi realizada recentemente em [195], onde os autores calcularam o ângulo de deflexão na aproximação pós-newtoniana e o coeficiente de quebra foi estimado em $\bar{s}_{ij} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$. Isso permite a colocação de limites experimentais para o vetor \vec{b} responsável pela anisotropia do espaço.

O último termo em (3.81) contém uma contribuição de curto alcance do tipo delta de Dirac, chamado *termo de Darwin*. Ele é induzido pelos termos não locais do lagrangiano, e pode ser observado em um lagrangiano de gravidade pura com termos de altas ordens. De fato, considere o lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \alpha R^2 \right), \quad (3.83)$$

onde α é uma constante adimensional que deve ser determinada por experimentos. No limite de baixas energias, o efeito do termo R^2 é adicionar ao potencial gravitacional um termo do tipo Yukawa,

$$V(\vec{x}) = -G_N m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{e^{-r/\sqrt{\kappa^2 \alpha}}}{r} \right). \quad (3.84)$$

Contudo, limites experimentais para α são bastante grosseiros, a saber $\alpha < 10^{60}$ [196]. Quando $\sqrt{\kappa^2 \alpha} \ll 1$, o potencial de Yukawa funciona como uma representação da delta de Dirac, gerando assim o termo de Darwin.

Capítulo 4

Cosmologia & modelo Inflacionário

O modelo padrão cosmológico, ou modelo Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter) é o modelo mais simples que descreve observações atuais como a radiação cósmica de fundo e a estrutura do universo em grandes escalas (formação e distribuição de galáxias). Sua extensão mais frequente é a da cosmologia inflacionária, que assume um período de expansão acelerada para o universo, e assim tenta resolver alguns problemas apresentados pelo modelo Λ CDM. Neste capítulo discutiremos sobre a naturalidade do paradigma inflacionário através do chamado *problema da medida*; em particular, vamos apresentar alguns resultados preliminares acerca da probabilidade de uma fase inflacionária no universo quando o campo do ínflaton se acopla não-minimamente com o campo gravitacional, utilizando a formulação no espaço de fase.

4.1 Modelo Padrão da Cosmologia

O modelo padrão da cosmologia se baseia na descrição de um universo homogêneo e isotrópico (princípio cosmológico). Essas simetrias implicam na solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para as equações de Einstein,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (4.1)$$

escrita aqui em coordenadas esféricas. a coordenada t é chamada *tempo cosmológico* e r a *coordenada comóvel*. k é o *fator de curvatura*, assumindo os valores

- $k = +1$ para um espaço *elíptico*,
- $k = 0$ para um espaço *plano*,

- $k = -1$ para um espaço *hiperbólico*.

A função $a(t)$ é chamada *função de escala*, e determina a expansão do universo através da *distância física* $a(t)r$ e o raio de curvatura

$$R = \frac{a(t)}{\sqrt{|k|}} \quad (4.2)$$

O parâmetro de Hubble é um parâmetro essencial em cosmologia, uma vez que ele determina a taxa de variação da distância entre diferentes pontos do universo:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (4.3)$$

cujo valor atual é, de acordo com os últimos dados do experimento Planck [197]:

$$H_0 = 68.0 \pm 1.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (4.4)$$

Para completarmos a equação de Einstein, precisamos especificar o conteúdo de matéria. Isso é codificado no tensor momentum energia

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}}. \quad (4.5)$$

Observações cosmológicas são muito bem descritas pelo modelo de fluido, o que nos dá

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P g_{ab}, \quad (4.6)$$

onde u_a é a velocidade da partícula, $\rho = -T^0_0$ a densidade de energia e $P = T^i_i/3$ a pressão.

Nesse caso as equações de Einstein nos dão a *equação de Friedmann*

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (4.7)$$

a *equação de Raychaudhuri*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (4.8)$$

e a *equação de continuidade*, proveniente das identidades de Bianchi:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (4.9)$$

4.1.1 Densidade crítica

Uma quantidade fundamental em cosmologia é a chamada *densidade crítica*, que é o balanço de matéria para que se tenha um universo plano ($k = 0$). Definindo-se

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\kappa} \quad (4.10)$$

a equação de Friedmann pode ser colocada na forma

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}(\rho + \rho_{\Lambda}) - \frac{k^2}{a^2}, \quad (4.11)$$

de onde podemos escrever uma densidade total $\rho_t = \rho + \rho_{\Lambda}$ para o universo. Colocando $k = 0$ encontramos

$$\rho_{\text{crít}} = \frac{3H^2}{\kappa} \quad (4.12)$$

de onde podemos relacionar a quantidade de matéria com a expansão do universo.

4.1.2 Forma adimensional

Definindo-se as variáveis

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2}, \quad \Omega_m = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crít}}} \quad (4.13)$$

onde ρ_i representa as densidades de energia para os constituintes do universo, a equação de Friedmann pode escrita simplesmente por

$$\Omega_m + \Omega_k + \Omega_{\Lambda} = 1 \quad (4.14)$$

Os valores para os parâmetros Ω são medidos através de observações, a saber [197]

$$\Omega_k = 0 \pm 0.01, \quad \Omega_m = 0.314 \pm 0.020, \quad \Omega_{\Lambda} = 0.686 \pm 0.020. \quad (4.15)$$

daí temos que apenas 30% da matéria do universo é formada por matéria bariônica, enquanto os 70% restantes provêm de algum tipo de energia exótica, que é denominada *energia escura*. Também podemos ver que as observações levam a um universo aproximadamente plano.

A Pressão e a densidade energia não são independentes entre si: elas são relacionadas pela equação de estado

$$P = w\rho, \quad (4.16)$$

onde w é denominado *parâmetro de estado* que caracteriza o tipo de matéria.

4.1.3 Dinâmica do universo: o *Big Bang*

A evolução do universo ao longo do tempo no modelo FLRW é ditada basicamente pelo fator de escala a . Uma vez que a equação de Raychaudhuri nos mostra que $\ddot{a} < 0$, concluímos que o universo não é estático, estando em um estado de expansão (quando $\dot{a} > 0$) ou contração (quando $\dot{a} < 0$). Observações implicam na expansão do universo, e assim, uma extrapolação desse comportamento nos leva a um instante $T = a/\dot{a}$ no passado em que o universo atingiu um estado onde $a = 0$; isso implica que as distâncias físicas encolheram e todos os pontos do universo colimam em um único ponto, de densidade e curvatura infinitas. Tal estado é denominado *Big Bang*.

Ao levarmos em consideração a equação de estado (4.16), a equação de continuidade (4.9) se torna

$$\dot{\rho} + 3(w + 1)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (4.17)$$

de onde podemos encontrar a solução

$$\rho = A_0 a^{-3(w+1)} \quad (4.18)$$

para a densidade. Uma aproximação do tipo polinomial para o fator de escala, $a(t) = B_0 t^n$ nos leva à

$$a(t) = \left(\frac{3\kappa A_0}{4} (w + 1)^2 \right)^{1/[3(w+1)]} t^{2/[3(w+1)]} \quad (4.19)$$

$$\rho(t) = \frac{4}{3\kappa(w + 1)^2} t^{-2} \quad (4.20)$$

Os principais de constituintes no universo são:

Universo dominado por matéria

Como a matéria não exerce pressão significativa no universo (a matéria visível é parte ínfima na

constituição do universo), temos $w = 0$; isso nos dá uma evolução do tipo

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad \rho(t) \propto a^{-3}(t) \propto \frac{1}{t^2} \quad (4.21)$$

Universo dominado por radiação

A radiação satisfaz uma equação de estado com $w = 1/3$, levando a uma evolução para o fator de escala do tipo

$$a(t) \propto t^{1/2}, \quad \rho \propto \frac{1}{a^4(t)} \propto \frac{1}{t^2} \quad (4.22)$$

Universo dominado pela constante cosmológica

Nesse caso a equação de estado tem $w = -1$ e a densidade de energia é independente do fator de escala. Nesse caso diz-se que o universo passa pela chamada *expansão de de Sitter*, caracterizada por $a \propto e^{Ht}$ e H constante.

4.1.4 Problemas com o *Big Bang*

Como discutido em 1.4.3, a solução homogênea e isotrópica FLRW apresenta alguns problemas conceituais, até o momento sem uma justificativa fundamental. Entre eles destacamos:

Problema do horizonte

Um dos conceitos fundamentais em relatividade é a *causalidade*, que é a relação causa-efeito entre diferentes eventos no espaço-tempo (figura 4.1).

Levando-se em consideração a métrica (4.1), vamos reescrevê-la usando a mudança de coordenada

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a(t)} \quad (4.23)$$

onde η é chamado *tempo conforme*. Ele recebe tal denominação pois com essa transformação a métrica se torna

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (4.24)$$

ou, em coordenadas cartesianas,

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.25)$$

Isto significa que é *conformalmente plana*. A característica fundamental aqui é que métricas conformes preservam a estrutura causal do espaço-tempo. Assim, um observador localizado em um evento P (figura 4.2) será capaz de receber sinais de todos os outros pontos do espaço-tempo apenas se (4.23) divergir quando t se aproxima do instante da singularidade $t = 0$. Olhando para (4.19), vemos que o fator de escala tem a forma $a(t) \propto t^n$, assim temos que a integral

$$\eta(t) \propto \int_0^t dt' t'^{-n} \quad (4.26)$$

converge apenas para $n < 1$. como $n = 2/[3(w + 1)]$. η converge se

$$w > -\frac{1}{3} \quad (4.27)$$

Como essa condição é satisfeita para matéria ordinária e radiação, concluímos que no espaço-tempo FLRW existem regiões causalmente desconectadas, incapazes de receber sinais umas das outras. Isso impossibilita assim a sua interação e observação.

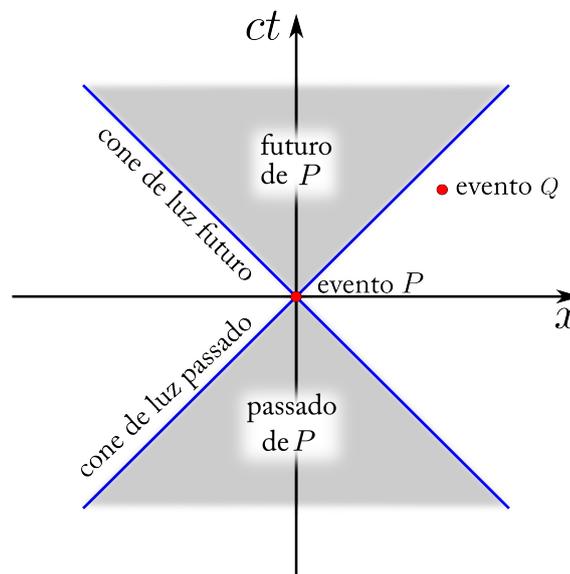


Figura 4.1: Diagrama de espaço-tempo para um espaço-tempo de $(1 + 1)$ dimensões. O evento Q , fora do cone de luz do evento P , não é influenciado por eventos no passado ou futuro de P .

Em sistemas termodinâmicos, como um gás dentro de uma caixa, partículas que inicialmente apresentavam energias completamente diferentes conseguem atingir o equilíbrio térmico em um tempo finito, através de interações que permitem a troca de energia e assim o sistema evolue para um estado homogêneo onde, em média, os constituintes apresentam a mesma temperatura.

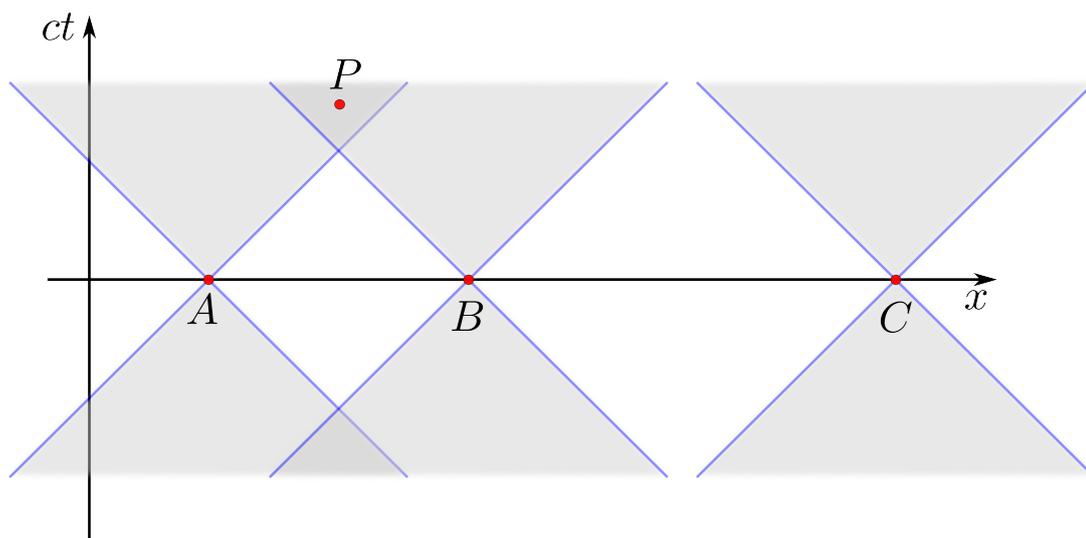


Figura 4.2: Representação esquemática da estrutura causal da solução FLRW. O evento P pode receber sinais dos A e B , mas não de C . Isso cria no universo regiões sem relação de causa-efeito, e portanto inacessíveis.

As observações atuais levam a uma anisotropia ínfima, da ordem de 10^{-5} , para a temperatura do universo. Isso implica que diferentes partes do universo deveriam interagir entre si em um processo semelhante ao do gás. Contudo, uma das características do modelo FLRW é que alguns observadores não conseguem receber (em tempo finito) sinais de outros observadores em diferentes pontos do espaço-tempo. Isso significa que diferentes partes do universo não conseguem interagir entre si, deixando a pergunta sobre como o universo termalizou para o estado que se encontra hoje.

Problema da planaridade

O nosso Universo é assumido seguir o seguinte histórico (figura 4.3):

- **Era de Planck:** em instantes anteriores ao tempo de Planck, $t < t_p$, acredita-se que sob temperaturas e densidades altíssimas as quatro interações eram unificadas. É o reino donde se espera extrair informação apenas com uma teoria de gravitação quântica.
- **Era da radiação:** após a escala de Planck o universo se expande e esfria, e sua dinâmica é ditada por radiação, como fótons e neutrinos.
- **Era da matéria:** Durante a era da radiação a temperatura do universo caiu a ponto de permitir a formação de núcleos estáveis, como Hidrogênio, Deutério e Hélio. Quando se atingiu um tempo a cerca de $t = t_{pr}$ a matéria bariônica começa a se formar.

- **Era da energia escura:** À medida que o universo expande, a densidade de matéria diminui mais e mais, e assim a matéria descrita pela constante cosmológica (energia escura) é dominante, ditando a evolução do universo.

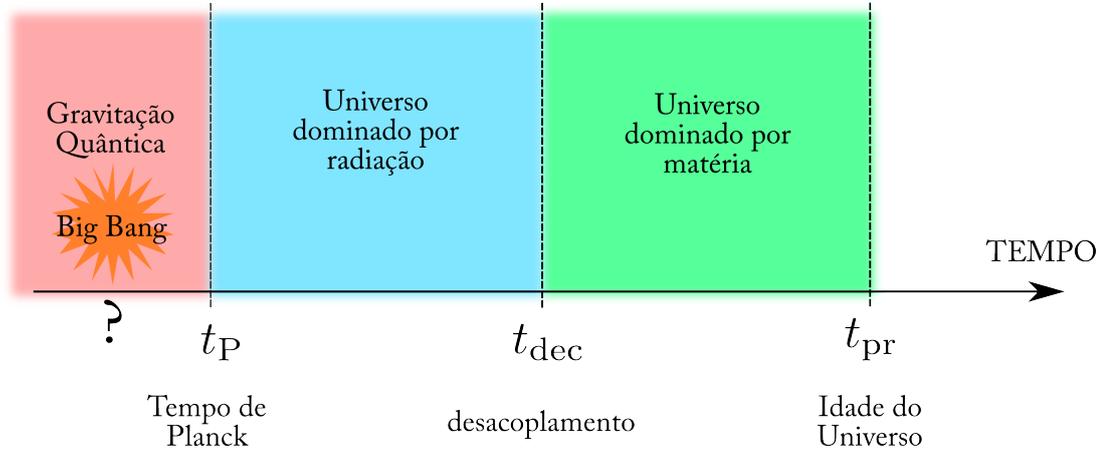


Figura 4.3: Histórico do universo de acordo com a dinâmica do fator de escala no modelo padrão cosmológico.

Se considerarmos a diferença relativa entre a densidade atual ρ do universo e a densidade crítica $\rho_{\text{crít}}$, temos

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{crít}}} = \frac{k}{\dot{a}^2} \quad (4.28)$$

assim temos para um universo dominado por matéria

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{crít}}} \propto t^{2/3} \quad (4.29)$$

e

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{crít}}} \propto t \quad (4.30)$$

para um universo dominado por radiação. Essas relações nos dão [198]

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{crít}}}(t_P) = \left(\frac{t_P}{t_{\text{dec}}}\right)\left(\frac{t_{\text{dec}}}{t_{\text{pr}}}\right)^{2/3} \frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{crít}}}(t_{\text{pr}}) \approx \left(\frac{5 \times 10^{-44}}{10^{13}}\right)\left(\frac{10^{13}}{4 \times 10^{17}}\right) \sim 10^{-60} \quad (4.31)$$

o que implica que nos estágios primordiais o universo era aproximadamente plano.

Não existe nenhuma razão que explique porque o universo era tão plano. Essa falta de naturalidade (semelhante ao problema da hierarquia), é denominada problema da planaridade.

4.1.5 Modelo inflacionário

A proposta mais aceita atualmente que diz-se resolver os problemas mencionados na seção anterior é o de um *universo inflacionário*.

Tomando a equação de Friedmann, vamos considerar que o fator de escala a é grande o suficiente para ignorarmos o termo de curvatura:

$$H^2 = \frac{\kappa\rho}{3} \quad (4.32)$$

como $H = \dot{a}/a$, durante um período onde a densidade do universo é constante podemos encontrar

$$a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\kappa\rho}{3}}t\right) \quad (4.33)$$

Essa solução é de fato a solução para um universo dominado pela constante cosmológica, onde a densidade de energia se deve à constante cosmológica: $\rho \approx \rho_\Lambda$.

O crescimento exponencial do fator de escala resolve os problemas do modelo Big Bang. Contudo, esse crescimento é ilimitado, e caso fosse uma descrição confiável da natureza não teríamos em nenhuma época a criação de matéria bariônica.

Para isso Alan Guth propôs uma variação desse modelo (que é chamado de *velha inflação*), onde a expansão exponencial se dá durante um certo tempo e então é “desligada” [93]. Por simplicidade, assuma que o crescimento exponencial se dá a partir de um instante $t = t_i$ até $t = t_f$. Durante esse intervalo de tempo o universo teve sua dinâmica guiada por algum tipo de matéria exótica, e após isso se reverteu ao estado prévio de dominação por radiação. Dessa forma o fator de escala satisfaz

$$a(t) = \begin{cases} a_i(t/t_i)^{1/2} & \text{para } t \leq t_i \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} & \text{para } t_i < t < t_f \\ b_i(t/t_f)^{1/2} & \text{para } t \geq t_f \end{cases} \quad (4.34)$$

onde $a_i = a(t_i)$ e $b_i = a_i e^{H_i(t_f-t_i)}$.

A modelo proposto por Guth consegue resolver os problemas do Big Bang, tornando o universo plano e homogêneo em largas escalas, diminuindo a densidade de monopolos magnéticos a níveis tão baixos que não poderiam ser detectados hoje. Apesar de ser um cenário promissor,

resta uma questão: qual o mecanismo responsável por “ligar/desligar” o crescimento exponencial?

Para responder a essa pergunta foi proposto um modelo de inflação que hoje é denominada *inflação caótica*. Ela foi proposta por Andrei Linde [199]. Levando-se em consideração o papel importante dos campos escalares em física de partículas e sua simplicidade, o modelo assume que o universo era inicialmente permeado por um campo escalar massivo ϕ , chamado *inflaton*, com densidade de energia potencial V . Com esse cenário, o campo escalar faz o papel da constante cosmológica; a dinâmica do campo escalar guia o crescimento do fator de escala, possibilitando uma forma mais natural do que o modelo de Guth.

O lagrangiano para um campo escalar é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - V(\phi) \quad (4.35)$$

Sendo o universo tomado como um fluido ideal, as componentes do tensor momentum-energia são determinados apenas pela sua pressão e densidade de energia, que agora passam a ser determinados pelo campo escalar. No caso de um campo escalar *homogêneo* (independente da posição), temos

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (4.36)$$

assim, as equações de movimento são agora reduzidas a duas

$$H^2 = \frac{\kappa}{6} (\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)) - \frac{k}{a^2} \quad (4.37)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (4.38)$$

a expansão inflacionária é garantida através da equação de estado, que passa a ser dinâmica:

$$P = w\rho \implies w = \frac{P}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V} \quad (4.39)$$

Assim, ajustando o potencial e a condição inicial para o campo escalar, podemos gerar automaticamente uma evolução como a do modelo de Guth.

4.2 Probabilidade de inflação e acoplamento não-mínimo

Ainda é discutido se há sentido físico abordar quanticamente os modelos de inflação. Também, não se sabe se o ínflaton pode ser ou estar relacionado ao campo de Higgs do modelo padrão. Investigações nessa linha levam aos chamados modelos inflacionários de Higgs.

Uma outra pergunta fundamental é o quão natural é a inflação: se o processo de expansão acelerada se dá de uma forma natural, independente das condições iniciais do problema.

Uma generalização simples do modelo inflacionário é a adição de um termo da forma $8\pi G\xi\phi^2$, que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a magnitude do ínflaton, cuja intensidade é dada pela constante ξ . A esse tipo de acoplamento dá-se o nome de *acoplamento não-mínimo*. Esse termo é favorecido pelo fato de tornar a teoria renormalizável quanticamente em espaços curvos [200, 201].

4.2.1 Formulação no espaço fase e probabilidade de inflação

Nesta seção vamos revisar o trabalho de Corichi e Sloan [202], que discutem o problema da medida em cenários inflacionários através da formulação Hamiltoniana.

A ação para o campo gravitacional e o ínflaton é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla^a \phi - V(\phi) \right) \quad (4.40)$$

onde V é o potencial do ínflaton, em princípio indeterminado. No entanto, os autores se restringem ao caso do potencial quadrático $V(\phi) = m^2\phi^2/2$, onde m é a massa do ínflaton.

A ação (4.40) nos dá as equações de movimento (4.37) e (4.38), que podem ser reescritas no espaço de fase especificando-se um Hamiltoniano e uma forma simplética:

$$\mathcal{H} = -\frac{3vH^2}{8\pi} + \frac{vm^2\phi^2}{2} + \frac{P_\phi^2}{2v} \quad (4.41)$$

$$\omega = dv \wedge dH + d\phi \wedge dP_\phi \quad (4.42)$$

onde $v \propto a^3$ é o volume e $P = v\dot{\phi}$.

A formulação no espaço de fase leva em consideração todas as configurações possíveis para o universo. Em particular, o hamiltoniano, através das equações de Hamilton, leva a várias possibilidades para a evolução do universo, através de trajetórias ao longo do espaço de fase Γ .

O problema de comparar as diferentes trajetórias possíveis para o universo e atribuir a cada uma delas uma probabilidade é denominado *problema da medida*.

Em uma superfície onde o parâmetro de Hubble H é constante, a forma simplética toma uma forma mais simples:

$$\omega = d\phi \wedge dP_\phi \quad (4.43)$$

$$= \sqrt{\frac{3H^2}{4\pi} - m^2\phi^2} d\phi \wedge dv \quad (4.44)$$

A probabilidade mencionada anteriormente é então

$$P = \frac{\int_A \omega}{\int_\Gamma \omega} \quad (4.45)$$

onde $A \subset \Gamma$ é a região do espaço de fase que contém trajetórias compatíveis com as observações.

As equações de movimento na forma simplética apresentam uma simetria de calibre $(v, \mathcal{H}, \phi, P_\phi) \rightarrow (\alpha v, \mathcal{H}, \phi, \alpha P_\phi)$, que constitui um grupo de calibre \mathcal{G} ; isso significa que as integrais no cálculo da probabilidade são divergentes, uma vez que contamos infinitas vezes sobre todas as trajetórias. Para resolver esse problema, faz-se o cálculo sobre as trajetórias distintas, que são dadas pelo quociente S/\mathcal{G} . Logo, a probabilidade se torna

$$P = \frac{1}{N_H} \int_{A_H(\phi)} \sqrt{\frac{3H^2}{4\pi} - m^2\phi^2} d\phi, \quad (4.46)$$

onde $N_H = 3H^2/(8m)$ é o volume do espaço de fase desconsiderando-se a liberdade de calibre.

Essa construção leva ainda a um outro problema: A probabilidade varia de acordo com a superfície $H = \text{const.}$ escolhida, sendo maior a medida que aumentamos H . Isso contradiz o teorema de Liouville, que diz que o volume (e portanto a probabilidade) deve ser preservada sobre as trajetórias.

Na verdade, essa contradição é apenas aparente: o teorema de Liouville não é violado. As trajetórias se escasseiam na direção de ϕ (dando a impressão de que o volume diminui), mas se expandem na direção v . Isso gera o comportamento do tipo atrator, como mostrado na figura 4.4.

Sendo a probabilidade relacionada com o a proximidade entre as trajetórias no espaço de fase, o comportamento exibido na figura 4.4 nos permite reinterpretar o problema do cálculo

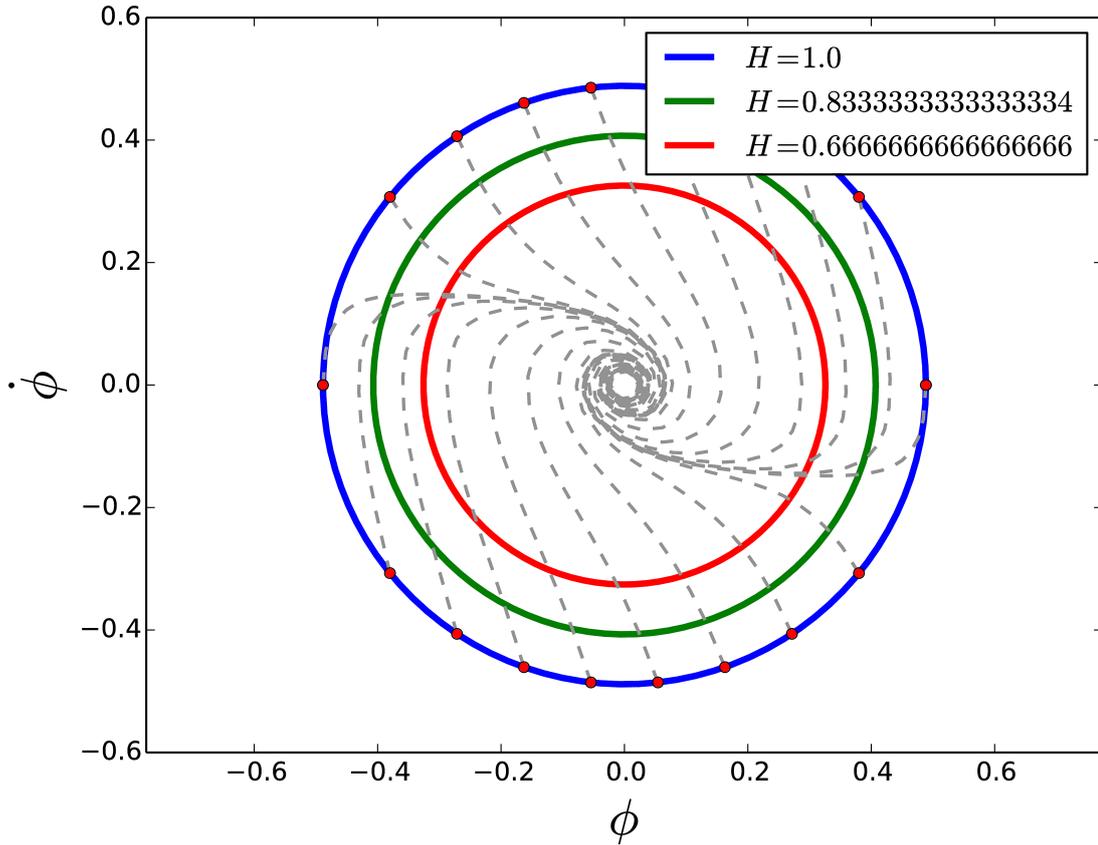


Figura 4.4: Retrato de fase para o ínflaton para o espaço de fase reduzido $(\phi, \dot{\phi})$. Os círculos mostram as superfícies onde o parâmetro de Hubble H é constante. Note como as trajetórias iniciadas nos pontos vermelhos naturalmente evoluem para a origem, que é o atrator.

da probabilidade através da densidade de probabilidade induzida entre diferentes superfícies de H constante. Nesse contexto, a medida de integração é dependente da trajetória, e pode ser codificada na integral

$$P = \frac{1}{N_H} \int_{A_H(\phi)} f(\phi) \sqrt{\frac{3H^2}{4\pi} - m^2\phi^2} d\phi, \quad (4.47)$$

onde a presença da função $f(\phi)$ leva em consideração as mesmas trajetórias em diferentes superfícies de H constante.

A função $f(\phi)$ é um corte na direção v , que aqui funciona como uma função de densidade de probabilidade. Como sua forma analítica depende das soluções exatas das equações de movimento, é conveniente calculá-la numericamente. Sua forma é apresentada na figura 4.5. Para encontrar-se as curvas, escolhe-se uma superfície $H = H_i$ constante como superfície inicial, e então escolhemos uma distribuição uniforme de condições iniciais sobre ela. A evolução do sistema determinará então a separação entre essas trajetórias ao se alcançar a superfície final $H = H_f$.

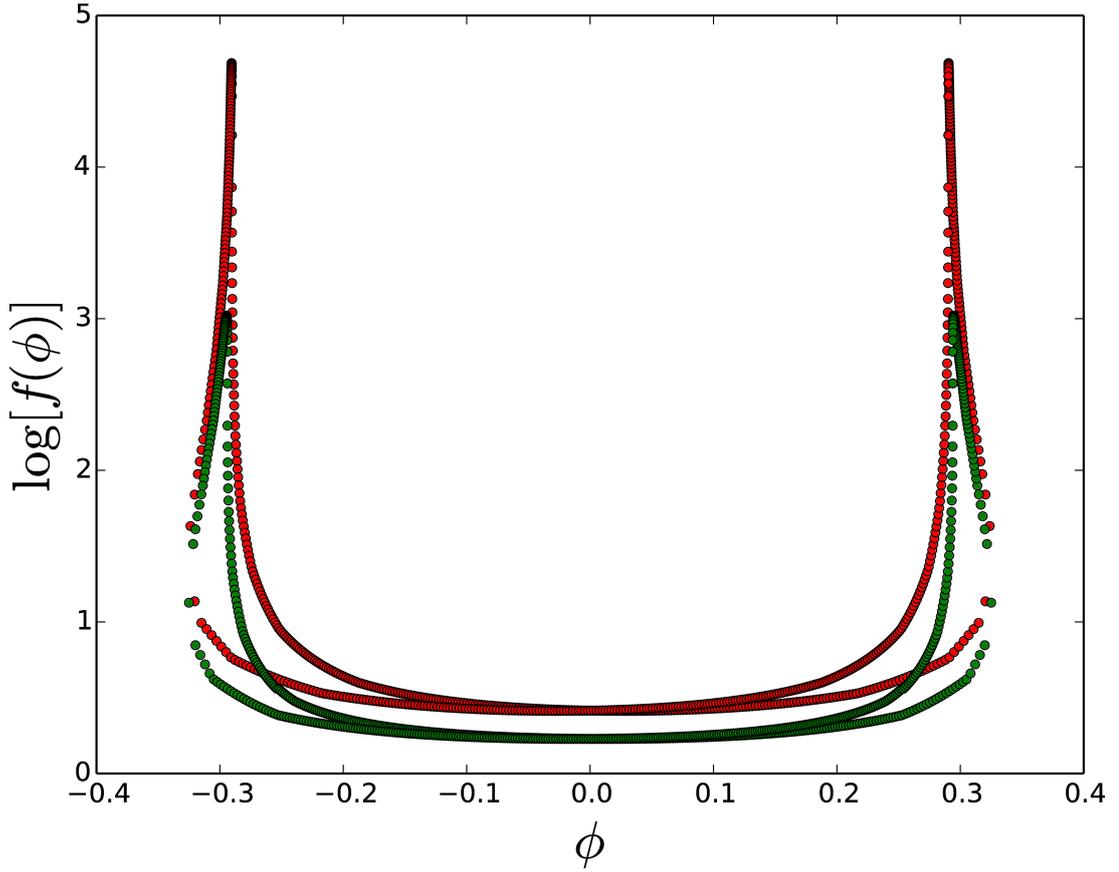


Figura 4.5: Logaritmo da função densidade de probabilidade $f(\phi)$ induzida em superfícies de H constante. A massa do ínflaton aqui foi tomada como $m = 1$ e a superfície final foi tomada como sendo $H = 2/3$. A curva em vermelho representa a função na superfície inicial $H = 1$ e a curva verde $H = 5/6$.

4.2.2 Função Densidade de probabilidade sob acoplamento não-mínimo

O modelo que iremos considerar em nosso trabalho é descrito pela ação (em unidades de Planck, ver apêndice A)

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{16\pi} \mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_\phi \right) \quad (4.48)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \sqrt{-g} F(\phi) R, \quad \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} [\nabla_a \phi \nabla^a \phi + 2V(\phi)] \quad (4.49)$$

para uma função indeterminada $F(\phi)$. Seguindo [202] iremos escolher o potencial harmônico, uma vez que não afeta a análise qualitativa do problema.

As equações de movimento nesse caso são

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = \frac{8\pi}{F} T_{ab}, \quad (4.50)$$

$$\nabla_a \nabla^a \phi - V_\phi + \frac{F_\phi}{16\pi} R = 0 \quad (4.51)$$

onde o $\dot{\phi}$ subscrito denota a derivada da função em relação à ϕ e o tensor momentum-energia é

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi + 2V). \quad (4.52)$$

Observe que para $F(\phi) = 1$ recuperamos o resultado usual.

Para uma cosmologia plana ($k = 0$) e um campo escalar homogêneo $\phi = \phi(\tau)$ temos

$$H^2 = \frac{4\pi}{3f} (\dot{\phi}^2 + 2V) \quad (4.53)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi + \frac{3F_\phi}{8\pi} (\dot{H} + 2H^2) = 0 \quad (4.54)$$

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{F} \dot{\phi}^2 \quad (4.55)$$

Introduzindo novamente o volume v dado por $\dot{v}/v = 3H$, o potencial harmônico $V(\phi) = m^2 \phi^2/2$, e agora as variáveis

$$x = m\phi, \quad y = \dot{\phi} \quad (4.56)$$

teremos o sistema de equações

$$H^2 = \frac{4\pi}{3F} (x^2 + y^2) \quad (4.57)$$

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{F} y^2 \quad (4.58)$$

$$\dot{y} + 3Hy + mx - \frac{3F_\phi}{2f} y^2 + \frac{3F_\phi}{4\pi} H^2 = 0 \quad (4.59)$$

finalmente, para facilitar a análise das soluções mudamos a variável temporal de acordo com a relação $t = m\tau$,

$$x' = y \quad (4.60)$$

$$y' = -x - 3hy + \frac{3}{2m} \frac{F_\phi}{F} y^2 + \frac{3m}{4\pi} F_\phi h^2 \quad (4.61)$$

$$v' = 3hv \quad (4.62)$$

$$h' = -\frac{4\pi}{m^2 F} y^2 \quad (4.63)$$

onde a linha (') denota as derivadas com respeito a t e $h = H/m$. A equação de Friedmann, que

é a equação de vínculo (que representam as superfícies onde H é constante) agora se torna

$$h^2 = \frac{4\pi}{3m^2F}(x^2 + y^2) \quad (4.64)$$

Para o acoplamento não-mínimo, tomamos $F(\phi) = 8\pi(1 + \xi\phi)$. Neste caso, as superfícies (4.64) para h constante são mostradas na figura 4.6. Note que a presença do acoplamento não mínimo deforma as superfícies de H constante, e quebram a estabilidade do sistema, que perde o ponto de atrator em $(0, 0)$.

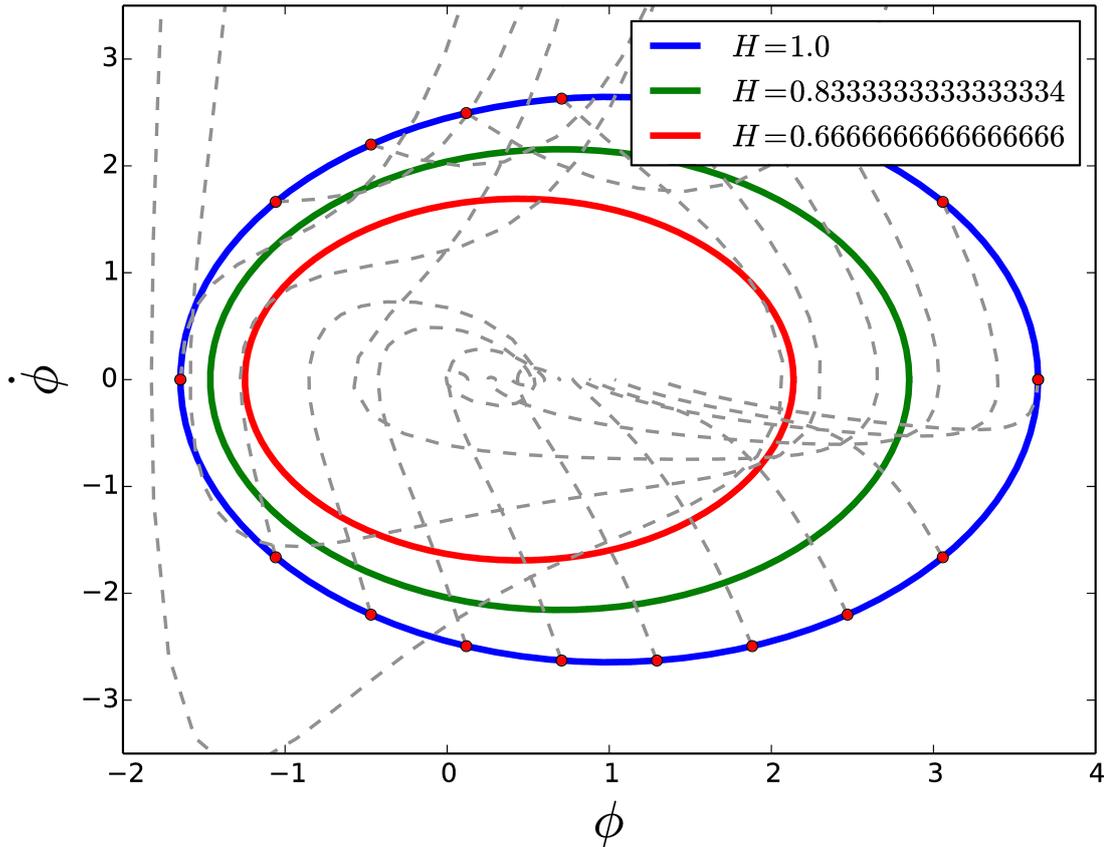


Figura 4.6: Retrato de fase para o inflaton na presença do acoplamento não-mínimo. As superfícies onde o parâmetro de Hubble H é constante são mostradas pelas elipses coloridas.

Para a função de densidade de probabilidade, procedemos da mesma forma que em [202]: uma vez escolhida uma superfície com H constante como ponto de partida para pontos uniformemente distribuídos, calculamos como as trajetórias, dadas pelas equações de movimento, se espalham até alcançarem uma outra superfície H_f num instante posterior. Apresentamos o resultado preliminar na figura 4.7. A característica mais marcante nesse caso é a falta de um dos ramos, como apresentados na figura 4.5. Isso se deve ao espalhamento das órbitas, dada a deformação das superfícies com parâmetro de Hubble constante. Até o momento é especulativo dizer que processos inflacionários com acoplamento não-mínimo não são favorecidos, uma vez

que sua probabilidade de ocorrência é menor. Para confirmar é necessário calcular precisamente a probabilidade e realizar uma investigação no espaço de parâmetros, onde possamos calcular a probabilidade também como função de ξ , o parâmetro de acoplamento.

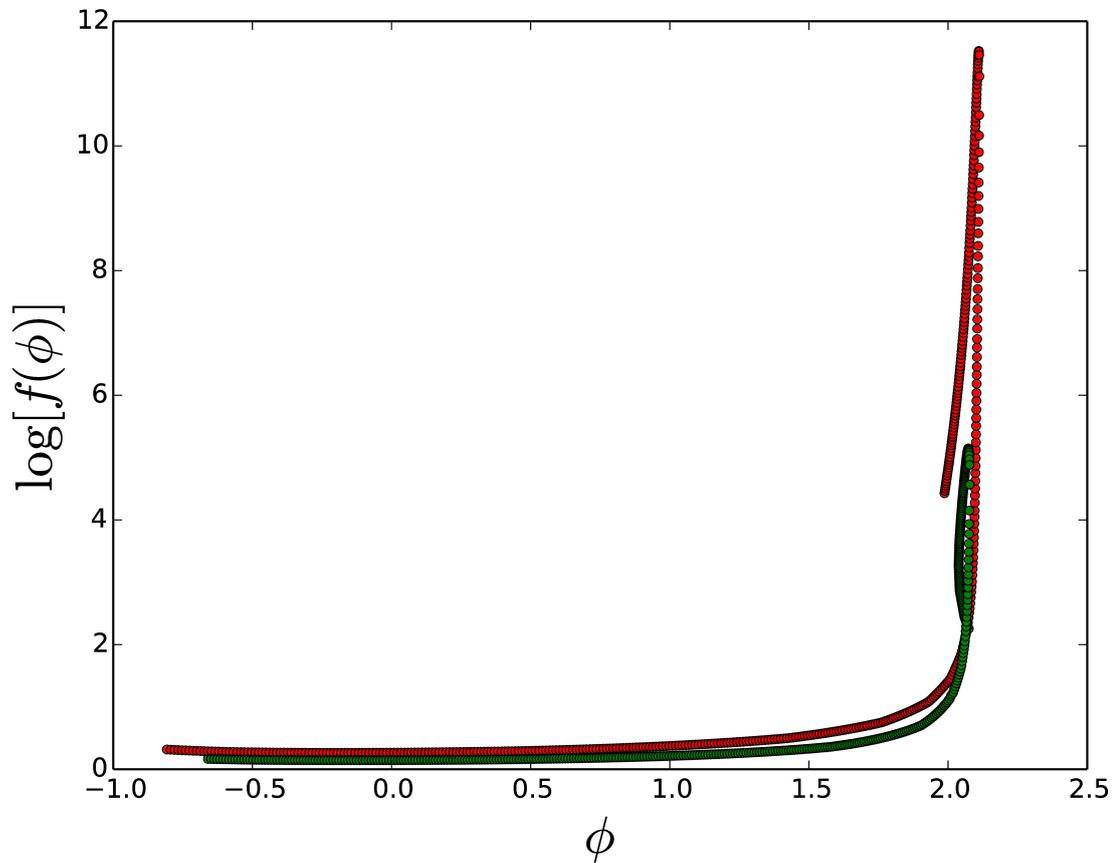


Figura 4.7: Logaritmo da função densidade de probabilidade $f(\phi)$ induzida em superfícies de H constante na presença do acoplamento mínimo. A massa do ínflaton aqui foi tomada como $m = 1$.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese analisamos as implicações de alguns modelos que tentam incorporar efeitos quânticos de gravitação. Vamos aqui sumarizar e discutir os principais resultados obtidos, e propor possíveis linhas a serem seguidas, em cada um dos temas trabalhados.

5.1 Sobre a esfera *fuzzy*

Apresentamos uma investigação do espectro de área de uma esfera bidimensional, sujeito à correções oriundas de flutuações quânticas do espaço-tempo. Calculamos o espectro de área a partir da expansão assintótica do núcleo da equação de calor.

Observamos nessa abordagem uma correção exponencial que decresce rapidamente no limite clássico (comutativo), e como o parâmetro que controla a não-comutatividade pode estar relacionado com o número de *quanta* de área em propostas de gravitação entrópica [134].

Esperamos que isso possa ajudar a esclarecer como podemos identificar efeitos quânticos gravitacionais através de observações de buracos-negros cosmológicos e pela possível criação de mini-buracos negros no grande colisor de hádrons, e estabelecer possíveis limites experimentais.

5.2 Grafeno em um espaço de fase não-comutativo

Aqui apresentamos um estudo das propriedades termodinâmicas do grafeno em um espaço de fase não-comutativo, na presença de um campo magnético estático e constante. Utilizamos as soluções apresentadas em [105] para o espectro de energia do operador Hamiltoniano para construir a função de partição canônica, usando a fórmula de Euler-Maclaurin para calculá-la

numericamente.

Determinamos então as funções termodinâmicas, como mostrado nas figuras 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11. Elas exibem um pequeno desvio do comportamento usual (sem a não-comutatividade), que se dissipa no limite de altas temperaturas.

Enfatizamos que uma vez que se tenha medidas precisas das propriedades térmicas do grafeno, podemos utilizá-las como uma forma de se impor limites experimentais para os parâmetros de não-comutatividade. Também, esperamos poder utilizar a não-comutatividade como um modelo efetivo para as propriedades térmicas do grafeno.

5.3 Quebra da invariância de Lorentz em cenários curvos

Construímos uma geometria de seis dimensões espaço-temporais que implementa a quebra da invariância de Lorentz, mantendo um gráviton não massivo na teoria efetiva quadridimensional. Isso viabiliza o estudo de teorias com quebra da simetria de Lorentz, uma vez que é possível recuperar a teoria efetiva esperada. O preço pago por isso é que a constante cosmológica no *bulk* passa a depender da dimensão extra.

Uma extensão imediata do trabalho é a inclusão de outros operadores implementado a quebra da simetria, como contrações $s^{abcd}R_{abcd}$ envolvendo o tensor de Riemann. Também, é interessante calcular o espectro de Kaluza-Klein nesse cenário, o que possibilita calcular a correção no potencial gravitacional e assim encontrar um limite experimental/fenomenológico para o parâmetro λ que controla a quebra da simetria de Lorentz. Uma outra questão é se é possível realizar uma solução como a nossa no contexto de supergravidade: isto é, se é possível “deduzir” esse cenário a partir de supergravidade.

5.4 Correções do potencial gravitacional devido à quebra da invariância de Lorentz

Apresentamos modificações induzidas pela quebra espontânea da simetria de Lorentz no potencial gravitacional. As modificações foram calculadas em um modelo particular do chamado Modelo Padrão Estendido (MPE), chamado modelo *bumblebee*, através da amplitude de espalhamento para uma interação simples entre duas partículas massivas e distinguíveis.

O cálculo da amplitude de espalhamento mostra correções já a nível de árvore, onde encontramos correções de primeira ordem no parâmetro de quebra ξ , que selecionam uma direção preferencial no espaço através de um vetor b_μ , em um efeito análogo à polarização. Esse resultado está de acordo com o cálculo realizado na aproximação pós-Newtoniana no setor gravitacional do MPE.

A correção de segunda ordem em ξ exibe um termo de correção do tipo delta que é independente do vetor b_μ . Esse termo deve se mostrar importante apenas em distâncias curtas, onde seria necessário considerar termos de alta ordem na curvatura. Um cálculo semelhante foi realizado em gravidade de Hořava–Lifshitz [203]. É interessante uma análise mais detalhada do modelo, como correções de mais alta ordem e/ou o cálculo exato para o propagador do gráviton nesse cenário.

5.5 Inflação e acoplamento não-mínimo

Vamos discutir o ponto principal da nossa investigação, uma vez que este é um estudo ainda em andamento. A estrutura simplética do espaço de fase do sistema (composto pelo campo escalar acoplado com o campo gravitacional) permite a construção de uma medida (elemento de volume) sobre ele. Essa medida permite o cálculo de probabilidades, e estamos interessados na probabilidade de uma dada condição inicial para o sistema evoluir para um estado que seja compatível com as observações. Essa probabilidade depende da escolha do parâmetro de Hubble. Assim, assumindo-se uma distribuição uniforme de condições iniciais para o sistema em uma superfície inicial $H = H_1$, a medida da separação entre essas trajetórias num instante posterior induz uma função de densidade de probabilidade, preservando assim o teorema de Liouville. Introduzindo um acoplamento não-mínimo entre o campo escalar e o campo gravitacional modificamos as superfícies de H constante, o que implica em uma variação na probabilidade dependente do parâmetro de acoplamento ξ . Uma vez que a função densidade de probabilidade tem o seu perfil modificado, vamos prosseguir com um cálculo mais preciso para a probabilidade, comparando com o caso de acoplamento mínimo e os limites observacionais, concluindo com o favorecimento experimental ou não de modelos inflacionários com acoplamento não-mínimo.

Bibliografia

- [1] TURYSHEV, SLAVA G. *Experimental Tests of General Relativity*. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**. v. 58, n. 1, 2008. p. 207–248.
- [2] CHEN, YANBEI. *Macroscopic Quantum Mechanics: Theory and Experimental Concepts of Optomechanics*, 2013.
- [3] SHADBOLT, PETER et al. *Testing foundations of quantum mechanics with photons*. **Nature Physics**. v. 10, n. 4, abr. de 2014. Review, p. 278–286.
- [4] PAULI, W. *General principles of quantum mechanics*. **Springer-Verlag**. 1980.
- [5] BOUCHER, WAYNE; TRASCHEN, JENNIE. *Semiclassical physics and quantum fluctuations*. **Physical Review D**. v. 37, 12 jun. de 1988. p. 3522–3532.
- [6] SCHRÖDINGER, ERWIN. *Diracsches Elektron im Schwerfeld I*. **Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse**. 1932. p. 105–128.
- [7] LICHNEROWICZ, ANDRÉ. *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*. French. **Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes études Scientifiques**. v. 10, n. 1, 1961. p. 5–56.
- [8] LICHNEROWICZ, ANDRÉ. *Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale*. fre. **Bulletin de la Société Mathématique de France**. v. 92, 1964. p. 11–100.
- [9] PARKER, L. *Particle Creation in Expanding Universes*. **Physical Review Letters**. v. 21, 8 ago. de 1968. p. 562–564.
- [10] PARKER, LEONARD. *Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. I*. **Physical Review**. v. 183, 5 jul. de 1969. p. 1057–1068.
- [11] PARKER, LEONARD. *Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. II*. **Physical Review D**. v. 3, 2 jan. de 1971. p. 346–356.

- [12] FULLING, STEPHEN A. *Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Space-Time*. **Physical Review D**. v. 7, 10 maio de 1973. p. 2850–2862.
- [13] DAVIES, P. C. W. *Scalar production in Schwarzschild and Rindler metrics*. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. v. 8, n. 4, 1975. p. 609.
- [14] HAWKING, S. W. *Black hole explosions?* **Nature**. v. 248, n. 5443, 1 de mar. de 1974. p. 30–31.
- [15] HAWKING, S. W. *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*. **Communications in Mathematical Physics**. v. 55, n. 2, 1977. p. 133–148.
- [16] UNRUH, W. G. *Notes on black-hole evaporation*. **Physical Review D**. v. 14, 4 ago. de 1976. p. 870–892.
- [17] WALD, ROBERT M. *The back reaction effect in particle creation in curved spacetime*. English. **Communications in Mathematical Physics**. v. 54, n. 1, 1977. p. 1–19.
- [18] ROSENFELD, L. *Über die Gravitationswirkungen des Lichtes*. German. **Zeitschrift für Physik**. v. 65, n. 9-10, 1930. p. 589–599.
- [19] FIERZ, M.; PAULI, W. *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**. v. 173, n. 953, 1939. p. 211–232.
- [20] DEWITT, BRYCE S. *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*. **Physical Review**. v. 160, 5 ago. de 1967. p. 1113–1148.
- [21] DEWITT, BRYCE S. *Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory*. **Physical Review**. v. 162, 5 out. de 1967. p. 1195–1239.
- [22] DEWITT, BRYCE S. *Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory*. **Physical Review**. v. 171, 5 jul. de 1968. p. 1834–1834.
- [23] DEWITT, BRYCE S. *Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory*. **Physical Review**. v. 162, 5 out. de 1967. p. 1239–1256.
- [24] FEYNMAN, R. P. *The quantum theory of gravitation*. **Acta Phys. Polon.** v. 24, 1963. p. 697–722.
- [25] 'T HOOFT, GERARD; VELTMAN, M.J.G. *One loop divergencies in the theory of gravitation*. **Annales Poincare Phys.Theor.** v. A20, 1974. p. 69–94.

- [26] DESER, S.; NIEUWENHUIZEN, P. VAN. *Nonrenormalizability of the Quantized Einstein–Maxwell System*. **Physical Review Letters**. v. 32, 5 fev. de 1974. p. 245–247.
- [27] DESER, S.; NIEUWENHUIZEN, P. VAN. *Nonrenormalizability of quantized fermion-gravitation interactions*. English. **Lettere al Nuovo Cimento**. v. 11, n. 3, 1974. p. 218–220.
- [28] DESER, S., TSAO, HUNG-SHENG; NIEUWENHUIZEN, P. VAN. *Nonrenormalizability of Einstein–Yang–Mills interactions at the one-loop level*. **Physics Letters B**. v. 50, n. 4, 1974. p. 491–493.
- [29] DESER, S.; NIEUWENHUIZEN, P. VAN. *One-loop divergences of quantized Einstein–Maxwell fields*. **Physical Review D**. v. 10, 2 jul. de 1974. p. 401–410.
- [30] DESER, S.; NIEUWENHUIZEN, P. VAN. *Nonrenormalizability of the Quantized Dirac–Einstein system*. **Physical Review D**. v. 10, 2 jul. de 1974. p. 411–420.
- [31] DESER, S., TSAO, HUNG-SHENG; NIEUWENHUIZEN, P. VAN. *One-loop divergences of the Einstein–Yang–Mills system*. **Physical Review D**. v. 10, 10 nov. de 1974. p. 3337–3342.
- [32] BERINGER, J. et al. *Review of Particle Physics*. **Physical Review D**. v. 86, 1 jul. de 2012. p. 010001.
- [33] VENEZIANO, G. *Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories*. English. **Il Nuovo Cimento A**. v. 57, n. 1, 1968. p. 190–197.
- [34] GREEN, M. B., SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring Theory. Vol 1: Introduction*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge; New York: **Cambridge University Press**. 1987.
- [35] POLCHINSKI, J. *String Theory. Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge; New York: **Cambridge University Press**. 1998.
- [36] MALDACENA, JUAN. *The Large- N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*. English. **International Journal of Theoretical Physics**. v. 38, n. 4, 1999. p. 1113–1133.
- [37] CHOQUET-BRUHAT, Y. *General Relativity and the Einstein Equations*. Oxford Mathematical Monographs. **OUP Oxford**. 2008.

- [38] SEN, AMITABHA. *Gravity as a spin system*. **Physics Letters B**. v. 119, n. 1–3, 1982. p. 89–91.
- [39] ASHTEKAR, ABHAY. *New Variables for Classical and Quantum Gravity*. **Physical Review Letters**. v. 57, 18 nov. de 1986. p. 2244–2247.
- [40] ASHTEKAR, ABHAY. *New Hamiltonian formulation of general relativity*. **Physical Review D**. v. 36, 6 set. de 1987. p. 1587–1602.
- [41] WILSON, KENNETH G. *Confinement of quarks*. **Physical Review D**. v. 10, 8 out. de 1974. p. 2445–2459.
- [42] ROVELLI, CARLO; SMOLIN, LEE. *Spin networks and quantum gravity*. **Physical Review D**. v. 52, 10 nov. de 1995. p. 5743–5759.
- [43] BOJOWALD, M. **Quantum Geometry and Symmetry**. Tese de doutorado. Aachen, Germany: RWTH Aachen, 2000.
- [44] ASHTEKAR, ABHAY; SINGH, PARAMPREET. *Loop quantum cosmology: a status report*. **Classical and Quantum Gravity**. v. 28, n. 21, 2011. p. 213001.
- [45] BOJOWALD, MARTIN. *Absence of a Singularity in Loop Quantum Cosmology*. **Phys. Rev. Lett.** v. 86, 23 jun. de 2001. p. 5227–5230.
- [46] DIENER, PETER, GUPT, BRAJESH; SINGH, PARAMPREET. *Chimera: a hybrid approach to numerical loop quantum cosmology*. **Classical and Quantum Gravity**. v. 31, n. 2, 2014. p. 025013.
- [47] BRIZUELA, DAVID, CARTIN, DANIEL; KHANNA, GAURAV. *Numerical techniques in loop quantum cosmology*. **SIGMA**. v. 8, 2012. p. 001.
- [48] ROVELLI, CARLO. *Black Hole Entropy from Loop Quantum Gravity*. **Physical Review Letters**. v. 77, 16 out. de 1996. p. 3288–3291.
- [49] ASHTEKAR, A. et al. *Quantum Geometry and Black Hole Entropy*. **Physical Review Letters**. v. 80, 5 fev. de 1998. p. 904–907.
- [50] DOMAGALA, MARCIN; LEWANDOWSKI, JERZY. *Black-hole entropy from quantum geometry*. **Classical and Quantum Gravity**. v. 21, n. 22, 2004. p. 5233.
- [51] KAUL, ROMESH K.; MAJUMDAR, PARTHASARATHI. *Quantum black hole entropy*. **Physics Letters B**. v. 439, n. 3–4, 1998. p. 267–270.

- [52] ENGLE, JONATHAN, NOUI, KARIM; PEREZ, ALEJANDRO. *Black Hole Entropy and $SU(2)$ Chern–Simons Theory*. **Physical Review Letters**. v. 105, 3 jul. de 2010. p. 031302.
- [53] HEISENBERG, WERNER. *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. German. *Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten*. WALTER BLUM, HELMUT RECHENBERG; HANS-PETER DÜRR (eds.). v. A / 1, Werner Heisenberg Gesammelte Werke Collected Works. Springer Berlin Heidelberg, 1985. p. 382–396.
- [54] PAULI, W.; MEYENN, K. VON. *Wolfgang Pauli, wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a., scientific correspondence with Bohr, Einstein, Heisenberg a.o: 1950 - 1952 / hrsg. von Karl von Meyenn*. Sources in the history of mathematics and physical sciences. **Springer**. 1996.
- [55] SNYDER, HARTLAND S. *Quantized Space–Time*. **Physical Review**. v. 71, 1 jan. de 1947. p. 38–41.
- [56] SNYDER, HARTLAND S. *The Electromagnetic Field in Quantized Space–Time*. **Physical Review**. v. 72, 1 jul. de 1947. p. 68–71.
- [57] CONNES, ALAIN. *Non–commutative differential geometry*. eng. **Publications Mathématiques de l’IHÉS**. v. 62, 1985. p. 41–144.
- [58] WORONOWICZ, S. L. *Twisted $SU(2)$ Group. An Example of a Non–Commutative Differential Calculus*. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences**. v. 23, n. 1, 1987. p. 117–181.
- [59] WORONOWICZ, S. L. *Compact matrix pseudogroups*. **Communications in Mathematical Physics**. v. 111, n. 4, 1987. p. 613–665.
- [60] MADORE, J. *Modification of Kaluza–Klein theory*. **Physical Review D**. v. 41, 12 jun. de 1990. p. 3709–3719.
- [61] DUBOIS-VIOLETTE, M., MADORE, J.; KERNER, R. *Gauge bosons in a noncommutative geometry*. **Physics Letters B**. v. 217, n. 4, 1989. p. 485–488.
- [62] NAKA, SHIGEFUMI; UMEZAWA, EIZOU. *An Approach to Electroweak Interactions Based on Non–Commutative Geometry*. **Progress of Theoretical Physics**. v. 92, n. 1, 1994. p. 189–204.

- [63] ROBERTSON, HOWARD PERCY. *The Uncertainty Principle*. **Physical Review**. v. 34, 1 jul. de 1929. p. 163–164.
- [64] BOMBELLI, LUCA et al. *Space-time as a causal set*. **Physical Review Letters**. v. 59, 5 ago. de 1987. p. 521–524.
- [65] SORKIN, RAFAELD. *Forks in the road, on the way to quantum gravity*. English. **International Journal of Theoretical Physics**. v. 36, n. 12, 1997. p. 2759–2781.
- [66] AHMED, MAQBOOL et al. *Everpresent Λ* . **Physical Review D**. v. 69, 10 maio de 2004. p. 103523.
- [67] AMBJØRN, J., JURKIEWICZ, J.; LOLL, R. *Emergence of a 4D World from Causal Quantum Gravity*. **Physical Review Letters**. v. 93, 13 set. de 2004. p. 131301.
- [68] REGGE, T. *General relativity without coordinates*. English. **Il Nuovo Cimento Series 10**. v. 19, n. 3, 1961. p. 558–571.
- [69] ORITI, DANIELE. *Quantum gravity as a group field theory: a sketch*. **Journal of Physics: Conference Series**. v. 33, n. 1, 2006. p. 271.
- [70] KOSTELECKÝ, V. ALAN; SAMUEL, STUART. *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*. **Physical Review D**. v. 39, 2 jan. de 1989. p. 683–685.
- [71] ELLIS, JOHN R., MAVROMATOS, N.E.; NANOPOULOS, DIMITRI V. *Probing models of quantum space-time foam*, 1999. p. 299–334.
- [72] BURGESS, CLIFF P. et al. *Loop-generated bounds on changes to the graviton dispersion relation*. **Journal of High Energy Physics**. v. 2002, n. 03, 2002. p. 043.
- [73] MAVROMATOS, NIKOLAOS E. *Lorentz Invariance Violation from String Theory*. **Proceedings of Science**. v. QG-PH,, 2007. p. 027.
- [74] GAMBINI, RODOLFO; PULLIN, JORGE. *Nonstandard optics from quantum space-time*. **Physical Review D**. v. 59, 12 maio de 1999. p. 124021.
- [75] ROVELLI, CARLO; SPEZIALE, SIMONE. *Reconcile Planck-scale discreteness and the Lorentz-Fitzgerald contraction*. **Physical Review D**. v. 67, 6 mar. de 2003. p. 064019.
- [76] ROVELLI, CARLO; SPEZIALE, SIMONE. *Lorentz covariance of loop quantum gravity*. **Physical Review D**. v. 83, 10 maio de 2011. p. 104029.

- [77] DOUGLAS, MICHAEL R.; NEKRASOV, NIKITA A. *Noncommutative field theory*. **Reviews of Modern Physics**. v. 73, 4 nov. de 2001. p. 977–1029.
- [78] KRAUS, PER; TOMBOULIS, E. T. *Photons and gravitons as Goldstone bosons and the cosmological constant*. **Physical Review D**. v. 66, 4 ago. de 2002. p. 045015.
- [79] JENKINS, ALEJANDRO. *Spontaneous breaking of Lorentz invariance*. **Physical Review D**. v. 69, 10 maio de 2004. p. 105007.
- [80] MYERS, ROBERT C.; POSPELOV, MAXIM. *Ultraviolet Modifications of Dispersion Relations in Effective Field Theory*. **Physical Review Letters**. v. 90, 21 maio de 2003. p. 211601.
- [81] MACCIONE, LUCA et al. *New constraints on Planck-scale Lorentz violation in QED from the Crab Nebula*. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**. v. 2007, n. 10, 2007. p. 013.
- [82] ZATSEPIN, G.T.; KUZMIN, V.A. *Upper limit of the spectrum of cosmic rays*. **JETP Letters**. v. 4, 1966. p. 78–80.
- [83] GREISEN, KENNETH. *End to the Cosmic-Ray Spectrum?* **Physical Review Letters**. v. 16, 17 abr. de 1966. p. 748–750.
- [84] AMELINO-CAMELIA, G. et al. *Tests of quantum gravity from observations of [gamma]-ray bursts*. **Nature**. v. 393, n. 6687, 25 de jun. de 1998. p. 763–765.
- [85] BIRD, D. J. et al. *Detection of a cosmic ray with measured energy well beyond the expected spectral cutoff due to cosmic microwave radiation*. **The Astrophysical Journal**. v. 441, mar. de 1995. p. 144–150.
- [86] PESKIN, M.E.; SCHROEDER, D.V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Advanced book classics. **Addison-Wesley Publishing Company**. 1995.
- [87] ARKANI-HAMED, NIMA, DIMOPOULOS, SAVAS; DVALI, GIA. *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*. **Physics Letters B**. v. 429, n. 3–4, 1998. p. 263–272.
- [88] MASUDA, M.; SASAKI, M. *Limits on Nonstandard Forces in the Submicrometer Range*. **Physical Review Letters**. v. 102, 17 abr. de 2009. p. 171101.

- [89] DIMOPOULOS, SAVAS; LANDSBERG, GREG. *Black Holes at the Large Hadron Collider*. **Physical Review Letters**. v. 87, 16 set. de 2001. p. 161602.
- [90] GIDDINGS, STEVEN B.; THOMAS, SCOTT. *High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics*. **Physical Review D**. v. 65, 5 fev. de 2002. p. 056010.
- [91] PARK, SEONG CHAN. *Black holes and the LHC: A review*. **Progress in Particle and Nuclear Physics**. v. 67, n. 3, 2012. p. 617–650.
- [92] ADE, P. A. R. et al. *Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2*. **Physical Review Letters**. v. 112, 24 jun. de 2014. p. 241101.
- [93] GUTH, ALAN H. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. **Physical Review D**. v. 23, 2 jan. de 1981. p. 347–356.
- [94] LINDE, A.D. *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*. **Physics Letters B**. v. 108, n. 6, 1982. p. 389–393.
- [95] TUROK, NEIL. *A critical review of inflation*. **Classical and Quantum Gravity**. v. 19, n. 13, 2002. p. 3449.
- [96] UNRUH, W. G. *Experimental Black-Hole Evaporation?* **Physical Review Letters**. v. 46, 21 maio de 1981. p. 1351–1353.
- [97] VISSER, MATT. *Acoustic black holes: horizons, ergospheres and Hawking radiation*. **Classical and Quantum Gravity**. v. 15, n. 6, 1998. p. 1767.
- [98] NOVOSELOV, K. S. et al. *Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films*. **Science**. v. 306, n. 5696, 2004. p. 666–669.
- [99] NOVOSELOV, K. S. et al. *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene*. **Nature**. v. 438, n. 7065, 10 de nov. de 2005. p. 197–200.
- [100] ZHANG, YUANBO et al. *Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene*. **Nature**. v. 438, n. 7065, 10 de nov. de 2005. p. 201–204.
- [101] NOVOSELOV, K. S. et al. *Two-dimensional atomic crystals*. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**. v. 102, n. 30, 2005. p. 10451–10453.

- [102] CASTRO NETO, A. H. et al. *The electronic properties of graphene*. **Reviews of Modern Physics**. v. 81, 1 jan. de 2009. p. 109–162.
- [103] PERES, N. M. R. *Colloquium*. **Reviews of Modern Physics**. v. 82, 3 set. de 2010. p. 2673–2700.
- [104] IORIO, ALFREDO; LAMBIASE, GAETANO. *The Hawking–Unruh phenomenon on graphene*. **Physics Letters B**. v. 716, n. 2, 2012. p. 334–337.
- [105] BASTOS, CATARINA et al. *Noncommutative Graphene*. **International Journal of Modern Physics A**. v. 28, n. 16, 2013. p. 1350064.
- [106] BERTOLAMI, ORFEU; QUEIROZ, RAQUEL. *Phase-space noncommutativity and the Dirac equation*. **Physics Letters A**. v. 375, n. 46, 2011. p. 4116–4119.
- [107] ALMGREN, F.J., BRAKKE, K.A.; SULLIVAN, J.M. *Plateau’s Problem: An Invitation to Varifold Geometry*. Student mathematical library. **W.A. Benjamin**. 1966.
- [108] BELLISSARD, J., ELST, A. VAN; SCHULZ-BALDES, H. *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect*. **Journal of Mathematical Physics**. v. 35, n. 10, 1994. p. 5373–5451.
- [109] SERGEEV, A.G. *Magnetic Bloch theory and noncommutative geometry*. English. **Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics**. v. 279, n. 1, 2012. p. 181–193.
- [110] GAMBOA, J. et al. *The Landau Problem and Noncommutative Quantum Mechanics*. **Modern Physics Letters A**. v. 16, n. 32, 2001. p. 2075–2078.
- [111] HORVÁTHY, P.A. *The Non-commutative Landau Problem*. **Annals of Physics**. v. 299, n. 1, 2002. p. 128–140.
- [112] ZHANG, JIAN-ZU. *Fractional angular momentum in non-commutative spaces*. **Physics Letters B**. v. 584, n. 1–2, 2004. p. 204–209.
- [113] LI, KANG, WANG, JIANHUA; CHEN, CHIYI. *REPRESENTATION OF NON-COMMUTATIVE PHASE SPACE*. **Modern Physics Letters A**. v. 20, n. 28, 2005. p. 2165–2174.
- [114] BASTOS, CATARINA et al. *Weyl–Wigner formulation of noncommutative quantum mechanics*. **Journal of Mathematical Physics**. v. 49, n. 7, 072101, 2008.

- [115] BASTOS, CATARINA et al. *Phase-space noncommutative quantum cosmology*. **Physical Review D**. v. 78, 2 jul. de 2008. p. 023516.
- [116] BASTOS, CATARINA et al. *Black holes and phase-space noncommutativity*. **Physical Review D**. v. 80, 12 dez. de 2009. p. 124038.
- [117] BASTOS, CATARINA et al. *Singularity problem and phase-space noncanonical noncommutativity*. **Physical Review D**. v. 82, 4 ago. de 2010. p. 041502.
- [118] BURIC, MAJA; MADORE, JOHN. *Noncommutative geometry of phase space*. English. **General Relativity and Gravitation**. v. 43, n. 12, 2011. p. 3477–3495.
- [119] CHEUNG, YEUK-KWAN E.; KROGH, MORTEN. *Non-commutative geometry from 0-branes in a background B-field*. **Nuclear Physics B**. v. 528, n. 1–2, 1998. cited By (since 1996) 136, p. 185–196.
- [120] CHU, CHONG-SUN; HO, PEI-MING. *Non-commutative open string and D-brane*. **Nuclear Physics B**. v. 550, n. 1–2, 1999. p. 151–168.
- [121] MADORE, JOHN. *The fuzzy sphere*. **Classical and Quantum Gravity**. v. 9, n. 1, 1992. p. 69.
- [122] SILVA, CARLOS ALEX SOUZA. *Fuzzy spaces topology change as a possible solution to the black hole information loss paradox*. **Physics Letters B**. v. 677, n. 5, 2009. p. 318–321.
- [123] SILVA, CARLOS ALEX SOUZA; LANDIM, RICARDO RENAN. *A note on black-hole entropy, area spectrum, and evaporation*. **Europhysics Letters**. v. 96, n. 1, 2011. p. 10007.
- [124] HOD, SHAHAR. *Bohr's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes*. **Physical Review Letters**. v. 81, 1998. p. 4293.
- [125] BANERJEE, RABIN, MAJHI, BIBHAS RANJAN; VAGENAS, ELIAS C. *A Note on the Lower Bound of Black Hole Area Change in Tunneling Formalism*. **Europhysics Letters**. v. 92, 2010. p. 20001.
- [126] ROVELLI, CARLO; SMOLIN, LEE. *Discreteness of area and volume in quantum gravity*. **Nuclear Physics B**. v. 442, 1995. p. 593–622.
- [127] KAC, MARK. *Can One Hear the Shape of a Drum?* English. **The American Mathematical Monthly**. v. 73, n. 4, 1966. p. 1–23.

- [128] GILKEY, PETER BELDEN. *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*. Studies in Advanced Mathematics. **CRC Press**. 1994.
- [129] MCKEAN, HENRY P.; SINGER, ISADORE MANUEL. *Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian*. **Journal of Differential Geometry**. v. 1, n. 1–2, 1967. p. 43–69.
- [130] DOPLICHER, SERGIO, FREDENHAGEN, KLAUS; ROBERTS, JOHN E. *Spacetime quantization induced by classical gravity*. **Physics Letters B**. v. 331, n. 1–2, 1994. p. 39–44.
- [131] CHAICHIAN, M. et al. *On a Lorentz-invariant interpretation of noncommutative spacetime and its implications on noncommutative QFT*. **Physics Letters B**. v. 604, n. 1–2, 2004. p. 98–102.
- [132] O’CONNOR, DENJOE. *Field Theory on Low Dimensional Fuzzy Spaces*. **Modern Physics Letters A**. v. 18, n. 33n35, 2003. p. 2423–2430.
- [133] DOELEMAN, SHEPERD S. et al. *Jet-Launching Structure Resolved Near the Supermassive Black Hole in M87*. **Science**. v. 338, n. 6105, 2012. p. 355–358.
- [134] GREGORY, C.M.; PINZUL, A. *On Noncommutative Effects in Entropic Gravity*. **Phys. Rev. D**. v. 88, 2013. p. 064030.
- [135] PAGE, DON NELSON. *Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole*. **Physical Review D**. v. 13, 2 jan. de 1976. p. 198–206.
- [136] PAGE, DON NELSON. *Particle emission rates from a black hole. II. Massless particles from a rotating hole*. **Physical Review D**. v. 14, 12 dez. de 1976. p. 3260–3273.
- [137] PAGE, DON NELSON. *Particle emission rates from a black hole. III. Charged leptons from a nonrotating hole*. **Physical Review D**. v. 16, 8 out. de 1977. p. 2402–2411.
- [138] MÄKELÄ, JARMO. *Black hole spectrum: continuous or discrete?* **Physics Letters B**. v. 390, n. 1–4, 1997. p. 115–118.
- [139] CAVAGLIÀ, MARCO, DAS, SAURYA; MAARTENS, ROY. *Will we observe black holes at the LHC?* **Classical and Quantum Gravity**. v. 20, n. 15, 2003. p. L205.
- [140] SAITO, R., DRESSELHAUS, G.; DRESSELHAUS, M.S. *Physical Properties of Carbon Nanotubes*. **Imperial College Press**. 1998.

- [141] ANDERSON, P.W. *Basic Notions Of Condensed Matter Physics*. Advanced Books Classics Series. Westview Press. 2008.
- [142] DIVINCENZO, D. P.; MELE, E. J. *Self-consistent effective-mass theory for intralayer screening in graphite intercalation compounds*. **Physical Review B**. v. 29, 4 fev. de 1984. p. 1685–1694.
- [143] SEMENOFF, GORDON W. *Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly*. **Physical Review Letters**. v. 53, 26 dez. de 1984. p. 2449–2452.
- [144] DUVAL, C.; HORVÁTHY, P. A. *Exotic Galilean symmetry in the non-commutative plane and the Hall effect*. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. v. 34, n. 47, 2001. p. 10097.
- [145] GOMES, M., KUPRIYANOV, V. G.; SILVA, A. J. DA. *Noncommutativity due to spin*. **Physical Review D**. v. 81, 8 abr. de 2010. p. 085024.
- [146] MALUF, ROBERTO V. *Noncommutative Space Corrections on The Klein-Gordon and Dirac Oscillators Spectra*. **International Journal of Modern Physics A**. v. 26, n. 29, 2011. p. 4991–5003.
- [147] GOMES, M.; KUPRIYANOV, V. G. *Position-dependent noncommutativity in quantum mechanics*. **Physical Review D**. v. 79, 12 jun. de 2009. p. 125011.
- [148] FALOMIR, H. et al. *Magnetic-dipole spin effects in noncommutative quantum mechanics*. **Physics Letters B**. v. 680, n. 4, 2009. p. 384–386.
- [149] NAIR, V.P.; POLYCHRONAKOS, A.P. *Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere*. **Physics Letters B**. v. 505, n. 1–4, 2001. p. 267–274.
- [150] PACHECO, M. H., LANDIM, R. R.; ALMEIDA, C. A. S. *One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath*. **Physics Letters A**. v. 311, n. 2–3, 2003. p. 93–96.
- [151] BOUMALI, A. *One-dimensional thermal properties of the Kemmer oscillator*. **Physica Scripta**. v. 76, n. 6, 2007. p. 669.
- [152] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Applied mathematics series. **Dover Publications**. 1964.

- [153] LANDAU, L.D., E.M., LIFSHITZ; PITAEVSKII, L.P. *Statistical Physics*. Course of theoretical physics ptie. 2. **Butterworth-Heinemann**. 1980.
- [154] MUTHUKUMAR, B.; MITRA, P. *Noncommutative oscillators and the commutative limit*. **Physical Review D**. v. 66, 2 jul. de 2002. p. 027701.
- [155] NAJAFIZADEH, MOJTABA; SAADAT, MEHDI. *Thermodynamics of Classical Systems on Noncommutative Phase Space*. **Chinese Journal of Physics**. v. 51, n. 1, 2013. p. 94–102.
- [156] SANTOS, VICTOR; ALMEIDA, C. A. S. *On gravity localization under Lorentz violation in warped scenario*. **Physics Letters B**. v. 718, n. 3, 2013. p. 1114–1118.
- [157] MALUF, R. V. et al. *Matter-gravity scattering in the presence of spontaneous Lorentz violation*. **Physical Review D**. v. 88, 2 jul. de 2013. p. 025005.
- [158] COLLADAY, DON; KOSTELECKÝ, V. ALAN. *CPT violation and the standard model*. **Physical Review D**. v. 55, 11 jun. de 1997. p. 6760–6774.
- [159] COLLADAY, DON; KOSTELECKÝ, V. ALAN. *Lorentz-violating extension of the standard model*. **Physical Review D**. v. 58, 11 out. de 1998. p. 116002.
- [160] KOSTELECKÝ, V. ALAN; LEHNERT, RALF. *Stability, causality, and Lorentz and CPT violation*. **Physical Review D**. v. 63, 6 fev. de 2001. p. 065008.
- [161] KOSTELECKÝ, V. ALAN; MEWES, MATTHEW. *Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics*. **Physical Review Letters**. v. 87, 25 nov. de 2001. p. 251304.
- [162] KOSTELECKÝ, V. ALAN; MEWES, MATTHEW. *Signals for Lorentz violation in electrodynamics*. **Physical Review D**. v. 66, 5 set. de 2002. p. 056005.
- [163] KOSTELECKÝ, V. ALAN; MEWES, MATTHEW. *Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts*. **Physical Review Letters**. v. 97, 14 out. de 2006. p. 140401.
- [164] BAILEY, QUENTIN G.; KOSTELECKÝ, V. ALAN. *Lorentz-violating electrostatics and magnetostatics*. **Physical Review D**. v. 70, 7 out. de 2004. p. 076006.
- [165] CASANA, RODOLFO, FERREIRA, MANOEL M.; SANTOS, CARLOS E. H. *Classical solutions for the Lorentz-violating and CPT-even term of the standard model ex-*

- tension*. **Physical Review D**. v. 78, 10 nov. de 2008. p. 105014.
- [166] CASANA, RODOLFO et al. *Gauge propagator and physical consistency of the CPT-even part of the standard model extension*. **Physical Review D**. v. 80, 12 dez. de 2009. p. 125040.
- [167] CASANA, RODOLFO et al. *Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the standard model extension*. **Physical Review D**. v. 82, 12 dez. de 2010. p. 125006.
- [168] SCHRECK, M. *Analysis of the consistency of parity-odd nonbirefringent modified Maxwell theory*. **Physical Review D**. v. 86, 6 set. de 2012. p. 065038.
- [169] KLINKHAMER, F. R.; RISSE, M. *Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified Maxwell theory*. **Physical Review D**. v. 77, 1 jan. de 2008. p. 016002.
- [170] KLINKHAMER, F. R.; SCHRECK, M. *New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified Maxwell theory*. **Physical Review D**. v. 78, 8 out. de 2008. p. 085026.
- [171] CHARNESKI, B. et al. *Dynamical Lorentz symmetry breaking in 3D and charge fractionalization*. **Physical Review D**. v. 79, 6 mar. de 2009. p. 065007.
- [172] ALTSCHUL, BRETT. *Vacuum Čerenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation*. **Physical Review Letters**. v. 98, 4 jan. de 2007. p. 041603.
- [173] BELICH, H. et al. *Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and topological implications*. English. **The European Physical Journal C - Particles and Fields**. v. 41, n. 3, 2005. p. 421–426.
- [174] BELICH, H. et al. *A comment on the topological phase for anti-particles in a Lorentz-violating environment*. **Physics Letters B**. v. 639, n. 6, 2006. p. 675–678.
- [175] BELICH, H. et al. *Aharonov-Bohm-Casher problem with a nonminimal Lorentz-violating coupling*. **Physical Review D**. v. 83, 12 jun. de 2011. p. 125025.
- [176] CHARNESKI, B. et al. *Lorentz violation bounds on Bhabha scattering*. **Physical Review D**. v. 86, 4 ago. de 2012. p. 045003.
- [177] MOFFAT, J. W. *Spontaneous Violation of Lorentz Invariance and Ultra-high Energy Cosmic Rays*. **International Journal of Modern Physics D**. v. 12, n. 07, 2003. p. 1279–1287.

- [178] BLUHM, ROBERT; KOSTELECKÝ, V. ALAN. *Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity*. **Physical Review D**. v. 71, 6 mar. de 2005. p. 065008.
- [179] BAILEY, QUENTIN G.; KOSTELECKÝ, V. ALAN. *Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity*. **Physical Review D**. v. 74, 4 ago. de 2006. p. 045001.
- [180] BLUHM, ROBERT, FUNG, SHU-HONG; KOSTELECKÝ, V. ALAN. *Spontaneous Lorentz and diffeomorphism violation, massive modes, and gravity*. **Physical Review D**. v. 77, 6 mar. de 2008. p. 065020.
- [181] KOSTELECKÝ, V. ALAN; POTTING, ROBERTUS. *Gravity from spontaneous Lorentz violation*. **Physical Review D**. v. 79, 6 mar. de 2009. p. 065018.
- [182] CARROLL, SEAN M.; TAM, HEYWOOD. *Aether compactification*. **Physical Review D**. v. 78, 4 ago. de 2008. p. 044047.
- [183] RIZZO, THOMAS G. *Lorentz violation in warped extra dimensions*. English. **Journal of High Energy Physics**. v. 2010, n. 11, 156, 2010.
- [184] JOSEPH, D. W. *Coordinate Covariance and the Particle Spectrum*. **Physical Review**. v. 126, 1 abr. de 1962. p. 319–323.
- [185] RANDALL, LISA; SUNDRUM, RAMAN. *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*. **Physical Review Letters**. v. 83, 17 out. de 1999. p. 3370–3373.
- [186] MANNHEIM, P.D. *Brane-localized Gravity*. **World Scientific**. 2005.
- [187] GHERGHETTA, TONY; SHAPOSHNIKOV, MIKHAIL. *Localizing Gravity on a Stringlike Defect in Six Dimensions*. **Physical Review Letters**. v. 85, 2 jul. de 2000. p. 240–243.
- [188] KOSTELECKÝ, V. ALAN. *Gravity, Lorentz violation, and the standard model*. **Physical Review D**. v. 69, 10 maio de 2004. p. 105009.
- [189] KOSTELECKÝ, V. ALAN; TASSON, JAY D. *Matter-gravity couplings and Lorentz violation*. **Physical Review D**. v. 83, 1 jan. de 2011. p. 016013.
- [190] MALUF, R. V. et al. *Einstein-Hilbert graviton modes modified by the Lorentz-violating bumblebee field*. **Physical Review D**. v. 90, 2 jul. de 2014. p. 025007.

- [191] BJERRUM-BOHR, N. E. J., DONOGHUE, JOHN F.; HOLSTEIN, BARRY R. *Quantum gravitational corrections to the nonrelativistic scattering potential of two masses. Physical Review D.* v. 67, 8 abr. de 2003. p. 084033.
- [192] STECKER, FLOYD W. *A new limit on Planck scale Lorentz violation from γ -ray burst polarization. Astroparticle Physics.* v. 35, n. 2, 2011. p. 95–97.
- [193] KOSTELECKÝ, V. ALAN; RUSSELL, NEIL. *Data tables for Lorentz and CPT violation. Reviews of Modern Physics.* v. 83, 1 mar. de 2011. p. 11–31.
- [194] KOSTELECKÝ, V. ALAN, LEHNERT, RALF; PERRY, MALCOLM J. *Spacetime-varying couplings and Lorentz violation. Physical Review D.* v. 68, 12 dez. de 2003. p. 123511.
- [195] TSO, RHONDALE; BAILEY, QUENTIN G. *Light-bending tests of Lorentz invariance. Physical Review D.* v. 84, 8 out. de 2011. p. 085025.
- [196] ACCIOLY, A.; BLAS, H. *Metric-scalar gravity with torsion and the measurability of the non-minimal coupling. Modern Physics Letters A.* v. 22, n. 13, 2007. p. 961–969.
- [197] ADE, P.A.R. et al. *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, 2013.
- [198] ROOS, M. *Introduction to Cosmology.* Wiley. 2004.
- [199] LINDE, A.D. *Chaotic inflation. Physics Letters B.* v. 129, n. 3–4, 1983. p. 177–181.
- [200] ZEE, A. *Broken-Symmetric Theory of Gravity. Physical Review Letters.* v. 42, 7 fev. de 1979. p. 417–421.
- [201] SMOLIN, LEE. *Towards a theory of spacetime structure at very short distances. Nuclear Physics B.* v. 160, n. 2, 1979. p. 253–268.
- [202] CORICHI, ALEJANDRO; SLOAN, DAVID. *Inflationary attractors and their measures. Classical and Quantum Gravity.* v. 31, n. 6, 2014. p. 062001.
- [203] BEMFICA, F. S.; GOMES, M. *Fourth order spatial derivative gravity. Physical Review D.* v. 84, 8 out. de 2011. p. 084022.

Apêndice A

Sistema de Unidades Naturais

Valores numéricos para medidas são (na maioria) obtidos por comparação com algum valor de referência, tomado como padrão. Quando dizemos que algo tem dez metros de comprimento por exemplo, subentende-se que temos uma distância que é dez vezes maior o valor de referência para o metro, que é ¹

O *metro* é o comprimento do caminho viajado pela luz no vácuo durante o intervalo de tempo de 1/299 792 458 de um segundo.

De forma semelhante, existe um padrão adotado para o segundo, baseado nas oscilações de um isótopo de Césio. A lição aqui é que, uma vez que tenhamos uma unidade definida e reprodutível, as outras medidas sejam apenas múltiplas daquela quantidade.

O número de unidades fundamentais, assim como a dimensão de qualquer quantidade física descrita em termos dessas unidades, é completamente arbitrário: elas representam diferentes maneiras de representar os mesmos fatos. Assim, a escolha de um conjunto de unidades fundamentais é ditado pela sua conveniência, clareza e universalidade no seu campo de aplicação.

O **Sistema internacional de unidades** (SI) é bastante difundido pelo mundo, e é construído a partir de sete **unidades base**. Estas unidades são tomadas na nossa escala cotidiana, onde nossa intuição vive. Por exemplo, as unidades $[M]$, $[L]$ and $[T]$ de *massa*, *comprimento* and *tempo* (respectivamente *kilograma*, *metro* e *segundo*) são escolhidas como unidades base, enquanto outras unidades são derivadas, como

¹como descrito em <http://www.bipm.org/en/CGPM/db/17/1/>.

Quantidade	Dimensões	Unidades
Velocidade	$[L][T]^{-1}$	1 m s^{-1}
Momento angular	$[L]^2[M][T]^{-1}$	1 kg m s^{-1}
Energia	$[L]^2[M][T]^{-2}$	$1 \text{ kg m s}^{-2} = 1 \text{ J}$

da mesma forma, existem unidades-base para temperatura (Kelvin), intensidade luminosa (Candela), e assim sucessivamente

Acontece que as unidades do SI não são adequadas para lidarmos com quantidades que são ou ridiculamente pequenas ou ridiculamente grandes, pois as expressões que descrevem fenômenos nesses reinos acabam se tornando frequentemente muito complicadas e assim o excesso de parâmetros pode dificultar a identificação do conteúdo físico essencial. Por exemplor, escrever quantidades como

$$\text{Massa do próton } m_p = 1.672\,621\,58 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Raio do próton } r_p = 0.8775(51) \times 10^{-15} \text{ m}$$

todo tempo pode se tornar um pouco incômodo.

A.1 Física de Partículas

A Física de partículas é fundamentada na [Relatividade Especial](#) e na [Mecânica Quântica](#). A constante mais importante da Relatividade Especial é a [velocidade da luz no vácuo](#)²,

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}, \quad (\text{A.1})$$

ao passo que na Mecânica Quântica as constantes características são a [constante de Planck](#) h , usualmente apresentada em sua versão “normalizada” \hbar :³

$$\hbar = 1.054\,571\,726 \times 10^{-34} \text{ J s}, \quad (\text{A.2})$$

e a [constante de Boltzmann](#)⁴

$$k_B = 1.380\,648\,8 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

²Valor segundo CODATA em <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?c>

³Valor segundo CODATA em <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?hbar>

⁴Valor segundo CODATA em <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?k>

Assim, parece apropriado *definir* c , \hbar , e k_B como unidades fundamentais de velocidade, ação e entropia respectivamente. Isso significa que tomamos essas quantidades como unitárias e adimensionais,

$$c = 1, \quad \hbar = 1, \quad k_B = 1, \quad (\text{A.4})$$

de tal forma que elas não aparecem explicitamente como parâmetros. Por exemplo, o invariante de energia na Relatividade Especial, normalmente escrito como $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, se torna

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (\text{A.5})$$

na nossa nova escolha de unidades.

Note que a primeira escolha em (A.4) implica que as dimensões de tempo e comprimento estão relacionadas:

$$[c] = \frac{[L]}{[T]} = 1 \implies [L] = [T]. \quad (\text{A.6})$$

Logo, espaço e tempo estão em pé de igualdade, refletindo a característica principal do princípio da relatividade que é como espaço e tempo são entrelaçados um ao outro.

De uma forma semelhante, a segunda escolha em (A.4) implica na relação

$$[\hbar] = [E][T] = 1 \implies [T] = [E]^{-1} \quad (\text{A.7})$$

entre as unidades de energia e tempo, e por último, a escolha de uma constante de Boltzmann normalizada implica

$$[k_B] = [E][\Theta]^{-1} = 1 \implies [\Theta] = [E], \quad (\text{A.8})$$

onde $[\Theta]$ denota a unidade de temperatura.

Com essas escolhas, todas (pelo menos as quantidades de interesse para a teoria) as outras unidades são derivadas como alguma potência da unidade de energia, que é frequentemente escolhida como sendo o **elétron-volt**⁵:

$$1 \text{ eV} = \frac{1}{6.241\,509\,34 \times 10^{18}} \text{ J} \quad (\text{A.9a})$$

$$\approx 1.602\,176\,566 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (\text{A.9b})$$

⁵Fator de equivalência do CODATA em <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?jev>

Por exemplo, em unidades SI um próton⁶ tem uma energia de repouso

$$E_p = m_p c^2 \quad (\text{A.10a})$$

$$= (1.672\,621\,777 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})^2 \quad (\text{A.10b})$$

$$= \frac{6.241\,509\,34 \times 10^{18} \text{ eV}}{1 \text{ J}} \times (1.672\,621\,777 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})^2 \quad (\text{A.10c})$$

$$= 9.382\,720\,46 \times 10^8 \text{ eV} \quad (\text{A.10d})$$

$$= 0.938\,272\,046 \text{ GeV}; \quad (\text{A.10e})$$

enquanto que em unidades naturais escrevemos $m_p \approx 0.938 \text{ GeV}$ ou $m_p \approx 0.938 \text{ GeV}/c^2$, para mostrar explicitamente que a quantidade é uma medida de massa.

Assim, para converter uma quantidade para o sistema natural de unidades nós devemos multiplicá-la por uma combinação de potências de c , \hbar e k_B de tal forma que o resultado final tenha unidade de energia à alguma potência. Por exemplo, para a unidade de comprimento $[L]$ devemos ter

$$[\hbar^x c^y][L] = [E]^x [L]^{y+1} [T]^{x-y}, \quad (\text{A.11})$$

o que nos dá $x = y = -1$. Então, se tivermos uma régua de um metro, nós podemos dizer que ela mede

$$1 \text{ m} = \frac{1}{\hbar c} 1 \text{ m} \quad (\text{A.12a})$$

$$= \frac{1 \text{ m}}{(1.054\,571\,726 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})} \quad (\text{A.12b})$$

$$= \frac{1 \text{ m}}{6.241\,509\,34 \times 10^{18} \text{ eV} (1.054\,571\,726 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})} \quad (\text{A.12c})$$

$$= 5.067\,730\,94 \times 10^6 \text{ eV}^{-1} \quad (\text{A.12d})$$

ou $5.067\,730\,94 \text{ eV}^{-1} \hbar c$ para explicitar que se trata de uma medida de comprimento. Similarmente, para temperatura procuramos uma combinação

$$[k_B]^z [\Theta] = [E]^z [L]^{2z} [T]^{-2z} [\Theta]^{-z+1}, \quad (\text{A.13})$$

o que nos dá $z = 1$; logo, a temperatura do Sol, 5.778 K pode ser expressa no nosso novo sistema

⁶Valor CODATA para sua massa em <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mp>

de unidades como

$$5.778 \text{ K} = k_B 5.778 \text{ K} \quad (\text{A.14a})$$

$$= (1.380\,648\,8 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}) \times 5.778 \text{ K} \quad (\text{A.14b})$$

$$= \frac{6.241\,509\,34 \times 10^{18} \text{ eV}}{1 \text{ J}} \times (1.380\,648\,8 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}) \times 5.778 \text{ K} \quad (\text{A.14c})$$

$$= 0.4979 \text{ eV}. \quad (\text{A.14d})$$

A.2 Unidades de Planck

No estudo da Gravitação Quântica, um conjunto bastante importante de unidades são as **unidades de Planck**, que define não só $\hbar = 1$, $c = 1$ e $k_B = 1$, mas também *cinco* constantes físicas,

- **Constante gravitacional de Newton**⁷: $G = 6.673\,84 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- constante de Planck normalizada: $\hbar = 1.054\,571\,726 \times 10^{-34} \text{ J s}$
- velocidade da luz no vácuo: $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
- **Permissividade do vácuo**^{8, 9, 10}: $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$, where $\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann: $k_B = 1.380\,648\,8 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

como sendo adimensionais e iguais a um:

$$\hbar = 1, \quad c = 1, \quad G = 1, \quad (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 1, \quad k_B = 1. \quad (\text{A.15})$$

A partir desse conjunto de unidades, derivamos as outras através de combinações de potências dessas unidades fundamentais.

Como nós temos

⁷Valor CODATA em <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg>

⁸Valor CODATA em <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?ep0>

⁹Valor exato, pelas definições para as unidades ampère e metro

¹⁰ $1 \text{ F} = 1 \text{ s}^4 \text{ A}^2 \text{ m}^{-2} \text{ kg}^{-1}$

Símbolo	dimensão
G	$[L]^3 [M]^{-1} [T]^{-2}$
\hbar	$[L]^2 [M]^1 [T]^{-1}$
c	$[L]^1 [T]^{-1}$
ε_0	$[L]^{-3} [M]^{-1} [T]^2 [Q]^2$
k_B	$[L]^2 [M]^1 [T]^{-2} [\Theta]^{-1}$

para recuperar uma medida de comprimento, devemos ter a combinação

$$[L] = [c^x G^y \hbar^z] = [L]^{x+3y+2z} [M]^{-y+z} [T]^{-x-2y-z}, \quad (\text{A.16})$$

uma vez que as constantes de permissividade e de Boltzmann não contribuem. Resolvendo o sistema de equação acima encontramos

$$x = -3/2, \quad y = 1/2, \quad z = 1/2; \quad (\text{A.17})$$

assim, definindo-se a quantidade

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}, \quad (\text{A.18})$$

chamado *comprimento de Planck*, nós concluímos que qualquer medida de comprimento pode ser expressa como um múltiplo do comprimento de Planck. Prosseguindo da mesma forma para as unidades de massa e tempo, encontramos os sistemas de equações

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + z = 1 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

e

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 1 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

respectivamente, o que nos dá as soluções

$$x = 1/2, y = -1/2, z = 1/2 \quad \text{e} \quad x = -5/2, y = 1/2, z = 1/2 \quad (\text{A.21})$$

nos dando as seguintes quantidades:

Nome	Dimensão	Expressão	Valor em unidades SI
Comprimento de Planck	[L]	$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	$1.616\,199 \times 10^{-35}$ m
Massa de Planck	[M]	$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$2.176\,509 \times 10^{-8}$ kg
Tempo de Planck	[T]	$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$	$5.391\,060 \times 10^{-44}$ s

Semelhantemente para carga devemos ter

$$[Q] = [c^x \hbar^y (4\pi\epsilon_0)^z] = [L]^{x+2y-3z} [M]^{y-z} [T]^{-x-y+2z} [Q]^{2z} \implies x = 1/2, y = 1/2, z = 1/2, \quad (\text{A.22})$$

e para a temperatura

$$[\Theta] = [c^x G^y \hbar^z k_B^w] = [L]^{x+3y+2z+2w} [M]^{-y+z+w} [T]^{-x-2y-z-2w} [\Theta]^{-w} \quad (\text{A.23})$$

o que implica na solução

$$x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2, w = -1, \quad (\text{A.24})$$

resultando nas quantidades

Nome	Dimensão	Expressão	Valor em unidades SI
Carga de Planck	[Q]	$q_P = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$	$1.875\,545\,957 \times 10^{-18}$ C
Temperatura de Planck	[\Theta]	$T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$	$1.416\,833 \times 10^{32}$ K

Podemos ver como as unidades de Planck podem simplificar as equações observando alguns exemplos:

	Unidades SI	Unidades de Planck
Lei da gravitação de Newton	$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	$F = -\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Lei de Coulomb	$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = -\frac{q_1 q_2}{r^2}$
Equação de Einstein	$G_{ab} = 8\pi G T_{ab}$	$G_{ab} = 8\pi T_{ab}$
Invariante de Energia da Relatividade Especial	$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$	$E^2 = m^2 + p^2$
Entropia de Boltzmann	$S = k_B \log \Omega$	$S = \log \Omega$
Entropia de Bekenstein-Hawking	$S_{\text{BH}} = \frac{A_{\text{BH}} k_B c^3}{4\hbar G}$	$S_{\text{BH}} = \frac{A_{\text{BH}}}{4}$

A.3 Observações

É importante enfatizar dois fatos:

- A escolha de um sistema natural de unidades é a normalização de um pequeno conjunto de constantes (torná-las unitárias e adimensionais); contudo, não é possível normalizar *qualquer* conjunto de constantes simultaneamente. Por exemplo, não podemos normalizar simultaneamente a massa do elétron e a massa do próton, pois assim estaríamos afirmando que ambos possuem a mesma massa. Definindo-se a massa do elétron como sendo igual a um, a massa do próton deve ser ≈ 1836.153 ;
- Apesar do fato de que não é possível normalizar qualquer conjunto de constantes, ainda existem várias possibilidades de normalização: por exemplo,
 - Em [Relatividade Geral](#) é comum escolher simplesmente $c = 1$ e $G = 1$ quando não se lida com sistemas quânticos; este sistema é conhecido como *unidades geometrizadas*;
 - Em unidades de Planck, às vezes é conveniente escolher $8\pi G = 1$ ao invés de $G = 1$: o sistema de unidades resultante é conhecido como *unidades de Planck reduzidas*;
 - Em [Cromodinâmica Quântica \(QCD\)](#), a teoria das interações fortes, uma escolha bastante conveniente é $c = m_p = \hbar = k_B = 1$, onde m_p é a massa do próton.