

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Dinâmica de solitons em superfluidos holográficos

Fortaleza – CE
Julho de 2010

Victor Pereira do Nascimento Santos

Dinâmica de solitons em superfluidos holográficos

Dissertação submetida à coordenação do curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

À minha família e à Dani, com carinho.

Agradecimentos

Agradecer a todos que ajudaram, diretamente ou indiretamente a construção deste trabalho, é uma tarefa difícil.

Primeiramente agradeço à minha família, que me apoiou durante toda a vida, especialmente durante o tempo que me manteve distante.

À Dani, pelo apoio também sempre constante.

Ao professor Carlos Alberto, pela orientação e amizade.

Aos demais professores do departamento, pelas disciplinas cursadas.

Aos amigos do LASSCO (colocados em ordem alfabética): Alex, Davi, Diego (Uhuu), Ivan (Brother), Luciana (Angélica), Luis José, Wagner (Pikachu) e Wilami.

Aos funcionários do departamento, pela ajuda disponibilizada durante o curso.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os meus amigos, os quais não vou citar nomes, para não incorrer no erro de esquecer de alguém.

Resumo

Neste trabalho, estudamos numericamente a formação e a dinâmica de defeitos topológicos do tipo parede de domínio em superfluidos em um modelo (3+1)-dimensional do tipo Maxwell-Higgs abeliano, no contexto da correspondência AdS/CFT. Obtemos os propagadores *bulk*-fronteira, assim como as funções de correlação na fronteira, para um campo escalar nos casos massivo e não-massivo. Se impusermos que os campos dependem apenas da coordenada radial no *bulk* e de uma coordenada na fronteira, conseguimos obter na teoria dual as soluções do tipo parede de domínio encontradas na literatura. A partir dessas soluções, estudamos suas propriedades, verificando que o superfluido é caracterizado por duas escalas de comprimento, uma para o parâmetro de ordem e outra para a densidade de carga. Estudamos também a variação da densidade de carga na região próxima à interface do defeito, e por fim, investigamos as modificações necessárias na teoria para se estudar a dinâmica dessas soluções.

Abstract

We numerically study the formation and dynamics of domain-wall-like topological defects in superfluids, using a (3+1)-dimensional abelian Maxwell-Higgs model, under the AdS/CFT correspondence. We obtain the bulk-boundary propagators, as well as the correlation functions on the boundary for a scalar field, both in massive and non-massive cases. If we impose that the fields depends only on a boundary coordinate and the bulk radial coordinate, we obtain in the dual theory the domain wall solutions found in literature. From these solutions we found that the superfluid is characterized by two length scales, one for the order parameter and other for the charge density. We also study the change of charge density in the region near the interface of the defect, and finally we investigate the modifications needed in theory to study the dynamics of these solutions.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Introdução	1
1 Geometria do espaço Anti-de Sitter	4
1.1 AdS como espaço de Einstein	4
1.2 AdS através de uma imersão	5
1.2.1 Analogia: espaços de curvatura constante	5
1.2.2 Sistemas de coordenadas globais e AdS compactificado	7
1.2.3 Coordenadas estereográficas	10
1.2.4 Coordenadas de Poincaré	11
1.2.5 Fronteira do espaço AdS	12
2 Supercondutividade e superfluidez	14
2.1 Revisão histórica	14
2.2 Teorias clássicas	17
2.2.1 Teoria de London	17
2.2.2 Teoria de Ginzburg-Landau	19
2.3 Teorias quânticas	24
2.3.1 Teoria BCS e o <i>gap</i> de energia	24
2.3.2 Simetria de calibre, quebras de simetria e supercondutividade	27
3 A Correspondência AdS/CFT	30
3.1 Introdução	30
3.2 Campo escalar não-massivo	32
3.3 Campo escalar massivo	35
4 Supercondutividade Holográfica e defeitos tipo parede de domínio	38
5 Dinâmica de Defeitos Topológicos	44
5.1 Grupo de isometrias	44
5.2 Métodos Numéricos: Diferenças finitas	47
5.2.1 Método de Jacobi e Gauss-Seidel	49
6 Conclusões e perspectivas	51
Referências Bibliográficas	53

Lista de Figuras

1.1	Modelo esférico para o espaço.	6
1.2	Representação gráfica do espaço AdS_{1+1}	7
1.3	Diagrama de Penrose para o espaço AdS.	9
1.4	Espaço AdS em coordenadas de Poincaré.	13
2.1	Comportamento clássico para os condutores	14
2.2	Resultados dos experimentos de Onnes	15
2.3	Efeito Meissner-Ochsenfeld.	17
2.4	Interface supercondutora	21
4.1	Solução para os campos na teoria \mathcal{O}_1	42
4.2	Solução para os campos na teoria \mathcal{O}_2	42
4.3	Perfil na superfície $z = 0$ para os campos na teoria \mathcal{O}_1	43
4.4	Perfil na superfície $z = 0$ para os campos na teoria \mathcal{O}_2	43
5.1	Discretização do intervalo unitário para solução numérica	48

Introdução

A supercondutividade, ou condensação de Bose-Einstein (BEC), é um dos fenômenos mais estudados em física da matéria condensada, e que tem muita importância quando se quer estudar o diagrama de fase da Cromodinâmica Quântica (QCD)[1]. Embora existam teorias como Ginzburg-Landau (GL) e a teoria de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) que expliquem de forma satisfatória várias propriedades dos supercondutores, como a condutividade infinita e o efeito Meissner-Ochsenfeld, existem certos aspectos que ainda não são compreendidos. O exemplo mais recente é a descoberta dos supercondutores a altas temperaturas ou cupratos, onde a dinâmica para a transição da fase normal para a supercondutora é diferente da que ocorre nos supercondutores descritos pela teoria BCS.

Supercondutividade holográfica é o nome dado a uma classe de teorias de campos no regime de acoplamento forte (altas constantes de acoplamento), que abaixo de uma temperatura crítica passam para um estado supercondutor (ocorrência de uma quebra espontânea na simetria global $U(1)$), e que podem ser descritos por uma teoria gravitacional (chamada de teoria dual) através da correspondência AdS/CFT [2, 3, 4, 5]. Sua existência foi sugerida pelos trabalhos de Gubser[6], ao estudar perturbações em buracos-negros do tipo AdS-Schwarzschild por um campo escalar.

Ele verificou que quando o buraco-negro tinha uma temperatura Hawking próxima a uma certa temperatura $T = T_c$, havia uma quebra espontânea de simetria quando o campo escalar adquiria um valor esperado de vácuo não-nulo: o buraco-negro passava então para um estado que ele denominou supercondutor, pela analogia com a quebra que ocorre nos supercondutores reais.

A correspondência AdS/CFT relaciona a dinâmica dos campos presentes em uma teoria gravitacional com a dinâmica quântica de seus respectivos operadores em uma

teoria conforme de dimensão menor; assim, tem-se uma ferramenta valiosa para estudar as funções de correlação em uma teoria de campos fortemente acoplada através de cálculos perturbativos em uma teoria gravitacional, onde o acoplamento é fraco.

No entanto, como esse tipo de tratamento é relativamente novo, não é óbvio quais os tipos de sistema que podem ser tratados utilizando uma teoria dual. O primeiro modelo gravitacional para a supercondutividade foi proposto em [7], baseado no estudo de Gubser[6]; a discussão da modelagem de supercondutores descritos pela teoria BCS é feita em [7, 8], e para o caso de superfluidos que sofrem uma quebra espontânea da simetria de calibre $U(1)$ [9]. Em [10], esse tipo de modelo é estendido para estudar propriedades de um fluido Hall quântico.

Para o caso dos superfluidos, foram estudadas suas propriedades hidrodinâmicas [11, 12], onde se calculam modos acústicos e as massas das quasipartículas associadas a esses modos[13], na região próxima a temperatura crítica.

Um aspecto interessante no caso dos superfluidos, tanto teórico quanto experimental[14], é que eles admitem uma classe de defeitos topológicos (análogo às paredes de domínio) denominados *dark solitons*, que funcionam como uma interface para a densidade de carga entre regiões de fases diferentes (uma normal e a outra supercondutora).

O modelo dual para esse tipo de defeito foi proposto em [15], onde se verifica que, ao contrário do modelo padrão para os superfluidos (equação de Gross-Pitaevskii), esses sólitons exibem uma escala de comprimento adicional, tanto para a densidade de carga quanto para o parâmetro de ordem, comparando com as massas microscópicas de suas quasipartículas; mais ainda, o cálculo da variação da densidade de carga mostra que são possíveis duas escolhas para o parâmetro de ordem. Como os modelos duais podem exibir excitações bosônicas ou fermiônicas, espera-se que seja possível modelar a supercondutividade(superfluidez) tanto para BEC's quanto para os supercondutores que são descritos pela teoria BCS; mais ainda, que seja possível estudar sistemas que exibem comportamento misto e os mais recentes supercondutores de altas temperaturas[16].

A dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 1, faremos uma breve revisão da geometria do espaço anti-de Sitter, introduzindo alguns sistemas de coordena-

das e estudando a sua fronteira, que será importante para a descrição da teoria de campos dual. No capítulo 2 faremos um apanhado histórico e uma revisão sobre a teoria de supercondutividade, focando principalmente na teoria de Ginzburg-Landau, que nos servirá de base para interpretarmos os dados obtidos pela correspondência AdS/CFT. No capítulo 3 estudaremos a ferramenta principal para a nossa investigação, que é a correspondência AdS/CFT. Calcularemos os propagadores entre o *bulk* e a fronteira, e pela correspondência obtemos as funções de correlação na teoria dual, mostrando que os campos no *bulk* agem como fontes para operadores na fronteira. No capítulo 4 faremos a ponte entre a correspondência AdS/CFT e a supercondutividade, obtendo soluções do tipo parede de domínio para os campos dentro de um ambiente do tipo buraco-negro de Schwarzschild, e através do comportamento assintótico, obter as grandezas de interesse para a supercondutividade. Isso é conseguido pela comparação com a teoria de Ginzburg-Landau, na forma da equação de Gross-Pitaevskii. Por fim, no capítulo 5 discutimos sobre a dinâmica das soluções obtidas, verificando que é necessária uma modificação na métrica de fundo para que seja possível utilizarmos os *boosts* de Lorentz.

Capítulo 1

Geometria do espaço Anti-de Sitter

1.1 AdS como espaço de Einstein

Considere a ação de Einstein-Hilbert [17, 4] em um espaço D -dimensional, com a inclusão de uma constante cosmológica Λ :

$$S = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{|g|} (R + \Lambda). \quad (1.1)$$

Se aplicarmos o princípio variacional para esta ação (tomando a métrica como variável dinâmica) obtemos as equações de campo de Einstein para o espaço vazio:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{2} g_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Fazendo a contração com a métrica inversa $g^{\mu\nu}$, encontramos a relação

$$R = \frac{D}{2-D} \Lambda, \quad (1.3)$$

que substituindo novamente em (1.2) nos dá

$$R_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{2-D} g_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Assim, os espaços descritos pela ação (1.1) tem o tensor de curvatura proporcional ao tensor métrico: esses espaços são conhecidos como espaços de Einstein. Essa classe de

espaços é um tanto geral; nosso interesse maior reside nos que satisfazem

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{D(D-1)} (g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}), \quad (1.5)$$

que é chamada de condição de simetria maximal. Tal condição expressa o fato de que espaços desse tipo são homogêneos e isotrópicos em todos os pontos.

A curvatura escalar nula corresponde ao espaço chato de Minkowski. Quando ela não o é, podemos ter esferas (\mathbb{S}^D), espaços de-Sitter (dS_D) e espaços Anti-de Sitter (AdS_D). Vamos considerar aqui apenas o espaço Anti-de Sitter, que corresponde a uma constante cosmológica positiva.

1.2 AdS através de uma imersão

1.2.1 Analogia: espaços de curvatura constante

Em Geometria Diferencial, os espaços de Sitter (dS) e Anti-de Sitter (AdS) são bastante conhecidos no estudo de espaços de curvatura constante: seus grupos de simetria (isometria) possuem um número de geradores igual ao do espaço de Minkowski, e assim eles funcionam como a sua generalização mais simples para espaços curvos.

Uma forma intuitiva de investigarmos propriedades de espaços curvos é através de *geometria extrínseca*, quando estudamos um espaço como se estivesse imerso em um espaço ambiente, da mesma forma que fazemos no estudo introdutório de quádricas, como esferas e hiperbolóides (que são superfícies bidimensionais), em um espaço tridimensional.

Por exemplo, se quisermos fazer um pouco de geometria curva no espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 podemos ir para um espaço quadridimensional fictício \mathbb{R}^4 , e lá estudarmos a geometria de superfícies tridimensionais:

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2\}. \quad (1.6)$$

A esfera \mathbb{S}^3 é um espaço homogêneo, isotrópico e de curvatura constante $6/R^2$. Sua homogeneidade e isotropia podem ser expressas dizendo que seu grupo de invariância é o grupo $SO(4)$, o grupo de rotações do espaço ambiente (nesse caso, o \mathbb{R}^4).

As propriedades geométricas de \mathbb{S}^3 podem ser inferidas a partir da restrição da geometria do espaço ambiente. As geodésicas, que são os análogos na geometria curva das linhas retas, são obtidas ao tomarmos a interseção $\mathbb{S}^3 \cap \Pi$ entre a esfera e um plano Π que passe pelo seu centro geométrico (figura 1.1). É claro que ao tomarmos a restrição da geometria do espaço ambiente, podemos perder algumas simetrias: enquanto no \mathbb{R}^4 podemos adicionar o grupo de translações ao $\text{SO}(4)$, resultando no grupo mais geral $\text{O}(4)$, na esfera isso não é possível, pois as translações nesse caso não são comutativas.

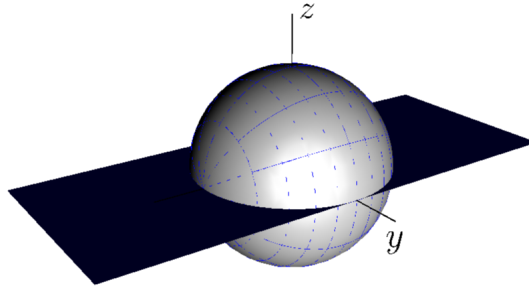


Figura 1.1: Modelo esférico para o espaço. As geodésicas são círculos máximos obtidos pela interseção da esfera com o plano que passa pelo seu centro no espaço ambiente.

Assim, vamos utilizar as idéias discutidas anteriormente e nos mover agora para um espaço chato de $D + 2$ dimensões \mathbb{R}^{D+2} , de coordenadas (x^0, \dots, x^{D+1}) e munido da métrica¹

$$\tilde{g} = -dx^0 \otimes dx^0 - dx^{D+1} \otimes dx^{D+1} + \sum_{i=1}^D dx^i \otimes dx^i, \quad (1.7)$$

que possui assinatura $\text{diag}(-, +, \dots, +, -)$. Utilizando a norma induzida por essa métrica, definimos o espaço Anti-de Sitter $(D + 1)$ -dimensional como

$$\text{AdS}_{D+1} = \{X \in \mathbb{R}^{D+2}, |X| = -K^2\}, \quad (1.8)$$

onde K é uma constante real arbitrária. De forma mais explícita, temos a quádrica

$$-(x^0)^2 - (x^{D+1})^2 + \sum_{i=1}^D (x^i)^2 = -K^2. \quad (1.9)$$

Embora o espaço ambiente não seja um espaço-tempo (no sentido de conter apenas

¹Na verdade, *pseudo-métrica*. A métrica é uma forma quadrática positiva definida, e isso não ocorre necessariamente quando adicionamos dimensões temporais (sinal negativo) no espaço.

uma coordenada temporal), o espaço AdS_{D+1} é e sua representação pictórica é mostrada na figura 1.2. Sua métrica é determinada pela restrição $g = \tilde{g}|_{\text{AdS}_{D+1}}$, e possui assinatura

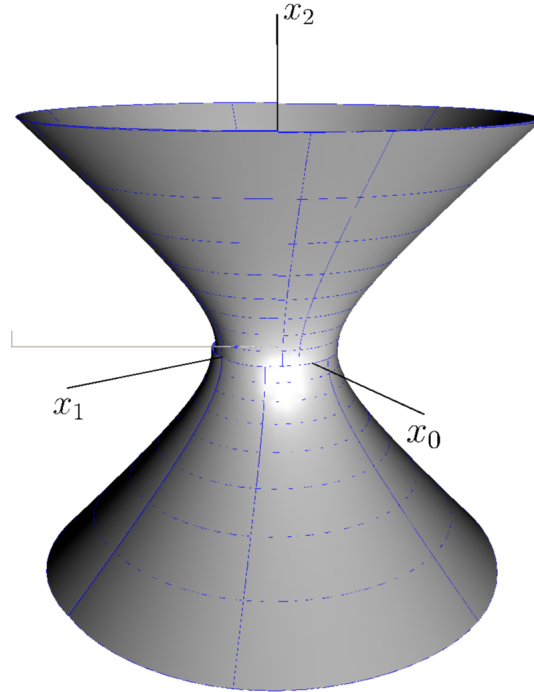


Figura 1.2: Representação gráfica do espaço AdS_{1+1} , visto como um hiperbolóide imerso em um espaço euclidiano.

de Lorentz $\text{diag}(+, +, \dots, +, -)$. Observe que, sendo \tilde{g} invariante sob transformações do grupo $\text{SO}(2, D)$, a métrica induzida g também o é; assim, dados dois vetores $X, Y \in \text{AdS}_{D+1}$, teremos

$$g(\Lambda(X), \Lambda(Y)) = g(X, Y) \quad (1.10)$$

para qualquer $\Lambda \in \text{SO}(2, D)$.

1.2.2 Sistemas de coordenadas globais e AdS compactificado

Baseados nas coordenadas de imersão, vamos definir outros sistemas de coordenadas, que permitam evidenciar outras propriedades interessantes do espaço AdS. Um sistema de coordenadas que cobre todo o espaço é chamado de sistema de coordenadas globais,

composto pelas coordenadas $\{\tau, \rho, \omega^1, \dots, \omega^D\}$, e definido por

$$\begin{aligned}x^0 &= K \cosh \rho \cos \tau, \\x^{D+1} &= K \cosh \rho \sin \tau, \\x^i &= K \sinh \rho \omega^i,\end{aligned}$$

onde o índice i corre de 1 a D , e as coordenadas ω_i se encontram sobre a esfera unitária

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \dots + (\omega^D)^2 = 1.$$

O domínio de definição é $\rho \geq 0$ e $0 \leq \tau \leq 2\pi$. Pode-se verificar facilmente que com essa definição a relação (1.9) é satisfeita e que a métrica toma a seguinte forma:

$$\tilde{g} = K^2 \left(-\cosh^2 \rho d\tau \otimes d\tau + d\rho \otimes d\rho + \sinh^2 \rho d\Omega_{D-1}^2 \right), \quad (1.11)$$

onde $d\Omega_{D-1}^2$ é a métrica da esfera unitária $(D-1)$ -dimensional.

Observe que a coordenada tipo tempo (τ) é periódica, e então a métrica (1.11) induz a topologia \mathbb{S}^1 (tempo) $\times \mathbb{R}^{n-1}$. Isso significa que as curvas do tipo tempo podem ser fechadas, violando causalidade. Para evitar esse tipo de problema, nós simplesmente “estendemos” o círculo \mathbb{S}^1 , considerando agora toda a reta $-\infty < \tau < \infty$. Com isso obtemos o chamado *recobrimento universal* do espaço AdS, que agora tem a topologia \mathbb{R}^{D+1} .

A métrica (1.11) tem uma forma bastante sugestiva, já que a métrica de uma esfera de raio K em $D+1$ dimensões tem uma forma semelhante:

$$g_{\mathbb{S}^{D+1}} = K^2 \left(\cos^2 \rho dw \otimes dw + d\rho \otimes d\rho + \sin^2 \theta d\Omega_{D-1}^2 \right). \quad (1.12)$$

Se fizermos a mudança de variável $\tan \theta = \sinh \rho$ em (1.11) teremos

$$\tilde{g} = \frac{K^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau \otimes d\tau + d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\Omega_{D-1}^2), \quad (1.13)$$

onde $\theta \in [0, \pi/2]$ para todas as dimensões exceto 2, quando tem-se $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$.

Essa métrica é então conformalmente equivalente ² a

$$\tilde{g}' = -d\tau \otimes d\tau + d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\Omega \otimes d\Omega_{n-1}, \quad (1.14)$$

e o fator conforme é dado por $\alpha = K^2 / \cos^2 \theta$. A métrica (1.14) representa a região $0 \leq \theta < \pi/2$ do universo estático de Einstein que possui a topologia \mathbb{R} (tempo) $\times \mathbb{S}^D$ (espaço). Então a fronteira do espaço, que se localiza em $\theta = \frac{\pi}{2}$, tem a topologia $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{D-1}$. Como os pontos no infinito espacial foram mapeados em uma região compacta (o intervalo $[0, \pi/2]$), dizemos que (1.14) é uma compactificação conforme do espaço AdS.

A estrutura causal é apresentada na figura 1.2.2 através do diagrama de Penrose.

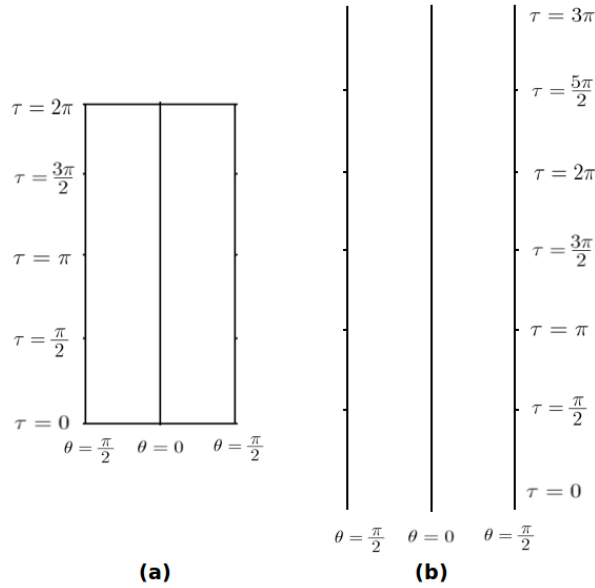


Figura 1.3: Diagrama de Penrose para o espaço AdS (a), onde identifica-se $\tau = 0$ com $\tau = 2\pi$, e para o recobrimento universal (b), onde não há identificações

²duas métricas $g(x)$ e $g'(x)$ são conformalmente equivalentes por um fator conforme $\Omega(x)$ se $g'(x) = \Omega(x)g(x)$, onde Ω é uma função positiva.

1.2.3 Coordenadas estereográficas

Considere agora o seguinte sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} x^0 &= \rho \frac{1 + |Y|^2}{1 - |Y|^2}, \\ x^{\mu+1} &= \rho \frac{2y^\mu}{1 - |Y|^2}, \quad \mu = 0, \dots, D \end{aligned}$$

e $|Y|^2 = (y^0)^2 + \dots + (y^{n-2})^2 - (y^{n-1})^2$. Calculando as diferenciais de cada uma das coordenadas, obtemos

$$dx_0 = d\rho \frac{1 + |Y|^2}{1 - |Y|^2} + 4\rho \frac{y_\mu dy^\mu}{(1 - |Y|^2)^2}, \quad (1.15)$$

$$dx_\mu = \frac{2y_\mu}{(1 - |Y|^2)^2} d\rho + \frac{2\rho}{(1 - |Y|^2)^2}; \quad (1.16)$$

e através do cálculo dos seus quadrados

$$dx^0 \otimes dx^0 = d\rho \otimes d\rho \frac{(1 + |Y|^2)^2}{(1 - |Y|^2)^2} + 16\rho^2 \frac{(y_\mu dy^\mu)^2}{(1 - |Y|^2)^4} + 8\rho y_\mu d\rho \otimes dy^\mu \frac{(1 + |Y|^2)}{(1 - |Y|^2)^3}, \quad (1.17)$$

$$dx_\mu \otimes dx^\mu = d\rho \otimes d\rho \frac{4|Y|^2}{(1 - |Y|^2)^2} + \frac{4\rho^2}{(1 - |Y|^2)^2} + 16\rho^2 \frac{(y_\mu dy^\mu)^2}{(1 - |Y|^2)^4} \quad (1.18)$$

$$+ 8\rho y_\mu d\rho \otimes dy^\mu \frac{(1 + |Y|^2)}{(1 - |Y|^2)^3}, \quad (1.19)$$

substituímos essas expressões em (1.7) para obter

$$\tilde{g} = -d\rho \otimes d\rho + \frac{4\rho^2}{(1 - |Y|^2)^2} dy_\mu \otimes dy^\mu. \quad (1.20)$$

Basicamente, fizemos a decomposição da métrica em uma parte radial e outra angular. Nesse sistema de coordenadas, o espaço AdS corresponde à superfície $\rho = K$; isso nos permite concluir que a métrica induzida g é simplesmente

$$g = \frac{4K^2}{(1 - |Y|^2)^2} \eta, \quad (1.21)$$

onde η é a métrica do espaço de Minkowski $D + 1$ dimensional. Assim, (1.21) é conformal-

mente plana, e se a escrevermos na forma $g = e^{w(Y)}\eta$, onde $w(Y) = \log(4K^2) - 2\log(1 - |Y|^2)$, podemos chegar à relação (1.4), para uma constante cosmológica dada por

$$\Lambda = \frac{(D-1)(D-2)}{K^2}, \quad (1.22)$$

que é positiva como havíamos mencionado.

1.2.4 Coordenadas de Poincaré

Por fim, vamos discutir as chamadas *coordenadas de Poincaré*. Este sistema vai ser útil ao construirmos as métricas de fundo para a descrição das fases no supercondutor holográfico. Para isso, introduzimos as coordenadas no cone de luz $\{t, u, v, y^1, \dots, y^{D-1}\}$ em termos das coordenadas de imersão:

$$u = \frac{1}{K^2}(x^0 - x^{D-1}), \quad (1.23)$$

$$v = \frac{1}{K^2}(x^0 + x^{D-1}), \quad (1.24)$$

$$t = \frac{x^D}{Kv}, \quad (1.25)$$

$$y^i = \frac{x^i}{Ku}. \quad (1.26)$$

agora, vamos calcular as coordenadas de imersão em termos destas novas coordenadas, para podemos calcular a métrica nesse novo sistema. A partir das duas primeira relações, podemos obter

$$x^0 = \frac{K^2}{2}(v + u), \quad (1.27)$$

$$x^{D-1} = \frac{K^2}{2}(v - u), \quad (1.28)$$

que substituindo em (1.9) nos dá

$$|X|^2 = -K^4 uv - x_D^2 + \sum_{i=1}^{D-2} (x_i^2) = -K^2.$$

Substituindo as relações para t e y^i na equação anterior temos

$$-K^4 uv - x_D^2 + \sum_{i=1}^{D-2} (x_i^2) = -K^4 uv - K^2 u^2 \left(t^2 - \sum_{i=1}^{D-2} (x_i^2) \right) = -K^2. \quad (1.29)$$

Daí, podemos extrair a coordenada v como

$$v = \frac{1 - u^2 \left(t^2 - \sum_{i=1}^{D-2} (x_i^2) \right)}{K^2 u},$$

e por fim, as coordenadas x_0 e x_{D-1} :

$$x_0 = \frac{1}{2u} \left(1 + u^2 \left(K^2 + |X|^2 - t^2 \right) \right), \quad (1.30)$$

$$x_{D-1} = \frac{1}{2u} \left(1 + u^2 \left(-K^2 + |X|^2 - t^2 \right) \right), \quad (1.31)$$

onde $|X|^2 = \sum_{i=1}^{D-2} (x_i^2)$. Com isto, podemos encontrar a métrica nesse sistema como sendo [17]

$$g = K^2 \left(\frac{du \otimes du}{u^2} + u^2 \left(-dt \otimes dt + dX^2 \right) \right), \quad (1.32)$$

onde dX^2 é a métrica para um espaço Euclidiano de $D - 2$ dimensões.

Ao conjunto de coordenadas $\{t, u, x_1, \dots, x_{D-2}\}$ damos o nome de coordenadas de Poincaré. Observe que a menos de um fator conforme, ela é essencialmente como o espaço de Minkowski (embora não cubra todo o espaço). De fato, nesse sistema de coordenadas podemos interpretar o espaço AdS como um espaço de Minkowski em $(D - 1)$ dimensões com um fator de *warp* que depende exclusivamente da coordenada extra u .

1.2.5 Fronteira do espaço AdS

Considere a transformação $z = 1/u$ nas coordenadas de Poincaré; a métrica (1.32) se torna

$$g = \frac{K^2}{z^2} \left(dz \otimes dz - dt \otimes dt + dX^2 \right).$$

A fronteira do espaço AdS é definida como sendo a superfície $z = 0$, mais o ponto no infinito $z = \infty$. Após uma rotação euclidiana, a superfície $z = 0$ representa um espaço Euclidiano de $D - 1$ dimensões: a adição do ponto no infinito torna o espaço automa-

ticamente compactificado, fazendo sua topologia equivalente ao de uma esfera \mathbb{S}^{D-1} . Na figura 1.2.5 tem-se uma representação esquemática do espaço AdS e de sua fronteira nas coordenadas de Poincaré.

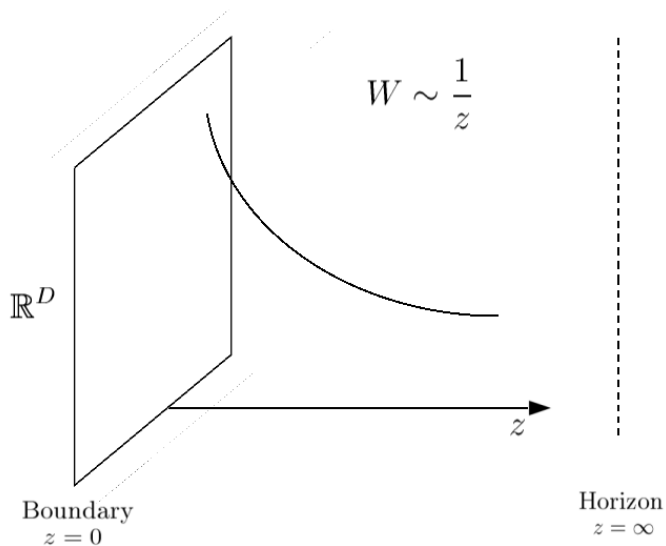


Figura 1.4: Espaço AdS em coordenadas de Poincaré. W representa o fator de warp.

As definições anteriores para o espaço AdS implicam que o seu grupo de simetria ($SO(2, D - 1)$) atua sobre a fronteira, e sendo um grupo conforme, concluímos que esse grupo de isometria atua como um grupo conforme na fronteira, agindo sobre o espaço de Minkowski ou o espaço euclidiano, dependendo da assinatura.

Capítulo 2

Supercondutividade e superfluidez

2.1 Revisão histórica

O fenômeno da supercondutividade foi descoberto em 1911, por H. Kamerling Onnes ¹. Embora o fato de que a resistência elétrica de um metal decresce com a temperatura fosse conhecido há bastante tempo, apenas após a liquefação do Hélio (feita pelo próprio Onnes) foi possível estudar a variação da resistência em baixas temperaturas (abaixo de 4,2K).

Até então as teorias correntes sobre a condutividade de materiais admitiam três comportamentos possíveis, mostrados esquematicamente na figura 2.1.

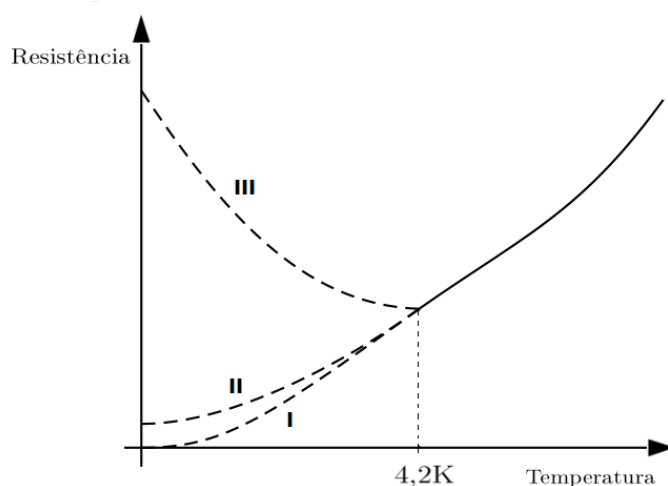


Figura 2.1: *Comportamento clássico para os condutores*

O comportamento I ocorreria se a resistência do material se devesse inteiramente à

¹H. Kamerling Onnes, *Leiden Comm.* 120b 122b 124c(1911)

obstrução das trajetórias dos elétrons pelas vibrações térmicas: cessadas essas vibrações à temperatura zero, a resistência se anularia. O comportamento II ocorre caso as impurezas do material e sua geometria sejam dominantes, e o comportamento III acontece caso haja uma diminuição no número de elétrons de condução, por algum mecanismo de condensação.

No entanto, ao realizar medidas de resistência em platina de alta pureza, Onnes verificou que a resistência se tornava constante, ao invés de passar por um mínimo ou de anular-se no zero absoluto. Os resultados mostraram também que essa resistência-limite dependia fortemente das impurezas presentes nas amostras; isto o levou a realizar experimentos com mercúrio, que era o material mais puro que se podia obter. Os resultados encontrados foram ainda mais surpreendentes: abaixo de uma certa temperatura diferente de zero (denominada *temperatura crítica*) a resistência era quase nula; como o material apresentava propriedades elétricas extraordinárias, Onnes chamou esse novo estado de *estado supercondutor*.

Um esquema dos resultados encontrados por Onnes para esses dois experimentos estão sumarizados na figura 2.1. Assim, temos como primeiro marco na história da supercondutividade: a *condutividade perfeita*.

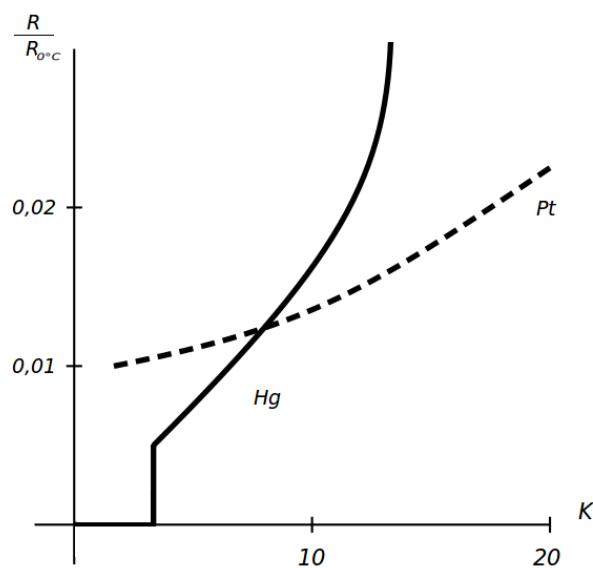


Figura 2.2: Resultados dos experimentos de Onnes

Sendo um material de resistência elétrica nula, imaginava-se que um supercondutor

tinha todas as propriedades de um condutor perfeito, como o que estudamos na eletrodinâmica clássica. Esse paradigma veio a ser quebrado em 1933, com os experimentos de Meissner e Ochsenfeld², que verificaram um efeito hoje conhecido como *efeito Meissner-Ochsenfeld*.

O efeito reside no fato de que um supercondutor expulsa de seu interior um campo magnético fraco, quando este passa do estado normal para o supercondutor. Suponha inicialmente que temos uma amostra esférica de um material supercondutor, no estado normal ($T > T_c$) e sem a presença de campo magnético externo (figura 2.1, canto superior esquerdo). Se resfriarmos a amostra abaixo da temperatura crítica mantendo o campo nulo, e então torná-lo diferente de zero, o campo no interior da amostra continuará nulo (figura 2.1, canto inferior esquerdo). Isto é perfeitamente explicado fazendo-se uso da relação constitutiva $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ para o condutor perfeito³, combinada com a equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0,$$

para nos dar $\partial_t \mathbf{B} = 0$ no interior da amostra. Portanto, uma vez que o campo externo seja inicialmente nulo, assim o permanecerá.

A situação muda quando consideramos os passos na ordem reversa: agora, colocamos o campo magnético externo enquanto a amostra se encontra no estado normal (figura 2.1, canto superior direito). Nessa etapa, o campo permeia completamente o interior da amostra, mas ao resfriarmos a amostra abaixo da temperatura crítica, o efeito observado é que o campo é expulso do interior da amostra (figura 2.1, canto inferior direito). Usando o mesmo argumento para a situação anterior, concluiríamos que o campo magnético no interior deveria ser constante (não necessariamente nulo); portanto, o modelo para condutores perfeitos não se aplica nesse caso, e devemos tratar a supercondutividade como outro fenômeno distinto do mero condutor perfeito. De fato, para a maior parte dos propósitos, se define um supercondutor como um sistema que exhibe o efeito Meissner-Ochsenfeld, por

²W. Meissner e R. Ochsenfeld, *Naturwissenschaften* **21**, 787 (1933)

³Num condutor perfeito a resistividade ρ do material vai a zero, enquanto a condutividade $\sigma = 1/\rho$ tende a infinito; para que a equação fique consistente, o campo elétrico \mathbf{E} deve ser sempre nulo nos pontos interiores ao material: $\mathbf{E} = 0$.

ser mais prático de se demonstrar experimentalmente e pelo fato de ser uma propriedade de equilíbrio térmico (a resistividade é um efeito de transporte fora do equilíbrio[18]).

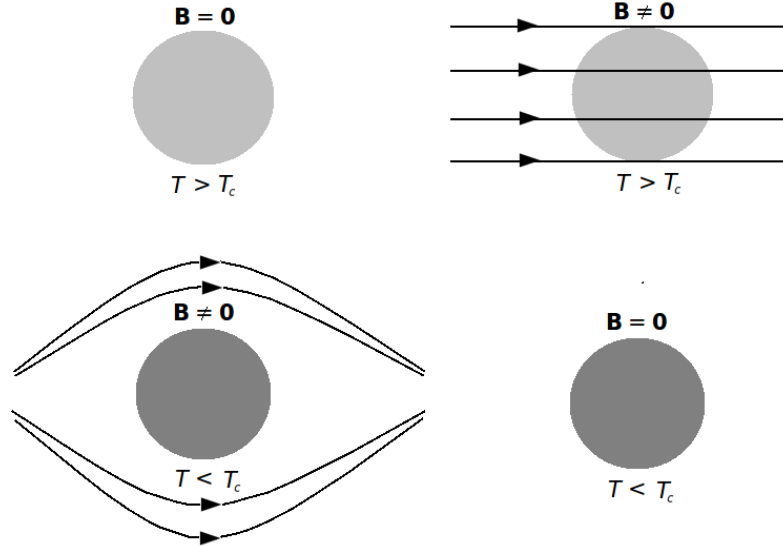


Figura 2.3: Efeito Meissner-Ochsenfeld.

2.2 Teorias clássicas

2.2.1 Teoria de London

A primeira teoria que conseguiu descrever o efeito Meissner-Ochsenfeld apresentado pelos materiais supercondutores foi desenvolvida pelos irmãos London⁴ em 1935, motivados pelo modelo de dois fluidos para o superfluido ^4He . No modelo proposto pelos irmãos London, é assumido que uma parte dos elétrons de condução se comporta como um superfluido enquanto o outro permanece no estado normal. Enquanto os elétrons supercondutores se movem sem dissipação (como num condutor perfeito), os elétrons na fase normal continuam se comportando como se tivessem uma resistividade finita, de tal forma que a resistividade coletiva é nula.

Neste caso, a densidade de corrente supercondutora é dada por $\mathbf{j} = n_s e \mathbf{v}$, onde n_s é o número de elétrons supercondutores por unidade de volume e e a carga de um dos elétrons. A ação de um campo elétrico $\boldsymbol{\varepsilon}$ sobre um dos elétrons supercondutores causa

⁴F. London e H. London, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A149**, 71 (1935).

uma aceleração constante dada pela relação $m_e \dot{\mathbf{v}} = e\boldsymbol{\varepsilon}$; assim podemos escrever

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Lambda \partial_t \mathbf{j}, \text{ onde } \Lambda = \frac{m_e}{n_s e^2}.$$

Utilizando esta equação em conjunto com a equação de Maxwell

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{h} \text{ (} c \text{ é a velocidade da luz)}$$

obtemos

$$\Lambda \partial_t (\nabla \times \mathbf{j}) = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{h}. \quad (2.1)$$

Se tomarmos o rotacional da equação anterior e utilizarmos a Lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

teremos

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{h}} = -\frac{4\pi}{\Lambda c^2} \dot{\mathbf{h}}.$$

Definindo-se

$$\lambda^2 = \frac{m_e c^2}{4\pi n_s e^2},$$

a equação se torna

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{h}} = -\frac{1}{\lambda^2} \dot{\mathbf{h}}.$$

O parâmetro λ tem dimensões de comprimento, e é chamado de comprimento de penetração do supercondutor.

Se integrarmos no tempo, iremos obter

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) = -\frac{1}{\lambda^2} (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0),$$

onde \mathbf{h}_0 é independente do tempo. Com isso podemos ver porquê assumir somente a condutividade perfeita não dá conta do efeito Meissner no supercondutor: como já foi discutido na seção 2.1, o campo magnético no interior não é necessariamente nulo.

Por isso, eles impuseram que em um material supercondutor vale a relação

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c}\nabla \times \mathbf{j} + \mathbf{h} = 0, \quad (2.2)$$

que é a *equação de London*. Em uma forma mais moderna, a equação é escrita em termos do potencial-vetor do campo magnético; se escrevermos

$$\mathbf{h} = \text{rot}(\mathbf{a}), \quad (2.3)$$

(2.2) fica

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c}\nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times \left(\frac{4\pi\lambda^2}{c}\mathbf{j} + \mathbf{a} \right) = 0;$$

se o rotacional de um campo vetorial é nulo, significa que ele pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar φ :

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c}\mathbf{j} + \mathbf{a} = \nabla\varphi \implies \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi\lambda^2}(\mathbf{a} + \nabla\varphi); \quad (2.4)$$

e sem perda de generalidade podemos escrever simplesmente

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi\lambda^2} \mathbf{a}. \quad (2.5)$$

A consequência mais importante desta equação é a explicação para o efeito de Meissner-Ochsenfeld: pode-se mostrar que um campo magnético externo é repellido de seu interior exponencialmente,

$$h = h_0 e^{-x/\lambda}, \quad (2.6)$$

e penetra em sua superfície apenas uma pequena distância λ , deixando o interior com um campo nulo.

2.2.2 Teoria de Ginzburg-Landau

A teoria de supercondutividade de Ginzburg-Landau descreve a transição para a fase supercondutora sob o ponto de vista da Termodinâmica. Introduzido inicialmente de

forma fenomenológica, foi posteriormente demonstrado que na verdade a teoria pode ser completamente derivada da teoria microscópica BCS; também, ela conseguiu agregar em seu tratamento clássico aspectos puramente quânticos dos supercondutores, como a quantização do fluxo de campo magnético e a predição dos vórtices de Abrikosov, que se formam nos chamados supercondutores tipo II.

Ela é essencialmente uma adaptação da teoria de transições de fase de segunda ordem de Landau, desenvolvida em por volta de 1930, para este sistema em particular. Nessa teoria é postulado que o parâmetro de ordem da teoria, ψ , deveria ser um número complexo, fazendo com que este funcionasse como uma função de onda macroscópica para o sistema, de forma análoga ao modelo para o superfluido ^4He . Na próxima seção veremos que na derivação da teoria de Ginzburg-Landau pela teoria BCS o módulo-quadrado desse parâmetro de ordem está associado, a menos de fatores multiplicativos, à densidade de pares de Cooper presentes na amostra. Vamos estudar inicialmente o caso de uma teoria sem a presença de campos magnéticos.

Equação de Ginzburg-Landau na ausência de campo magnético

Neste caso, Ginzburg e Landau propuseram que a energia livre do sistema é dada por

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{x})|^2 + a(T) |\psi(\mathbf{x})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\mathbf{x})|^4, \quad (2.7)$$

onde o parâmetro m^* , que tem dimensões de massa, contém o custo energético associado ao gradiente do parâmetro de ordem. Utilizando o princípio variacional para a energia livre do sistema,

$$\mathcal{F}_s(T) = \mathcal{F}_n(T) + \int d^3x \left(\frac{\hbar}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{x})|^2 + a(T) |\psi(\mathbf{x})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\mathbf{x})|^4 \right), \quad (2.8)$$

encontramos a equação a ser satisfeita pelo parâmetro de ordem:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta\psi + a\psi + b\psi |\psi|^2 = 0. \quad (2.9)$$

Assim, ao minimizar-se a energia livre do sistema, somos levados a concluir que o

parâmetro de ordem satisfaz uma equação de Schrödinger não-linear: isso nos dá a interpretação para a constante m^* , que agora representa a massa da partícula associada ao parâmetro de ordem⁵.

A equação (2.9) é bastante útil quando se quer por exemplo estudar o comportamento do sistema sob perturbações externas, como propriedades de interfaces supercondutoras.

Vamos tomar um caso em que temos uma interface entre um metal normal e um supercondutor. Considere uma interface localizada no plano xz (figura 2.2.2). O metal normal consiste na região $x < 0$, enquanto o material supercondutor fica na região $x > 0$. O parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{x})$ é nulo na região do metal normal; se assumirmos que ψ é contínuo, ele deve satisfazer a equação não linear de Schrödinger

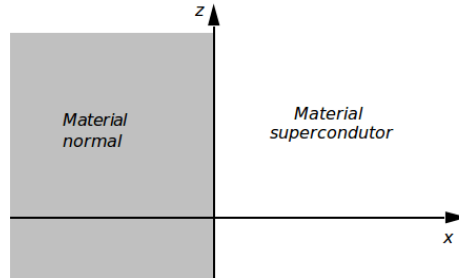


Figura 2.4: Interface supercondutora

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\psi''(x) + a\psi(x) + b\psi(x)^3 = 0, \quad (2.10)$$

com a condição de contorno $\psi(0) = 0$ (continuidade). Multiplicando os membros da equação por $\psi'(x)$, podemos escrevê-la na forma

$$\psi'(x)\psi''(x) = \psi'(x)U(\psi), \quad (2.11)$$

onde $U(\psi) = \frac{2m^*}{\hbar^2}\psi(a + b\psi^2)$. Integrando os dois membros da equação, obtemos

$$\int dx \psi'(x)\psi''(x) = \int dx \psi'(x)U(\psi); \quad (2.12)$$

se observamos a forma dos integrandos, vemos que é possível escrevê-los como uma deri-

⁵De forma geral, o termo representa uma massa efetiva do sistema.

vada total; para a integração no lado direito, basta escolher $U(\psi) = \frac{dV(\psi)}{d\psi}$:

$$\begin{aligned}\psi'(x)\psi''(x)dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi'(x)^2dx = \frac{1}{2}d\psi'(x)^2 \\ \psi'(x)U(\psi)dx &= \psi'(x)\frac{dV(\psi)}{d\psi}dx = \psi'(x)\frac{dV(\psi)}{\psi'(x)} = dV(\psi)\end{aligned}$$

Com isto, a equação (2.12) fica

$$\frac{1}{2}\int d\psi'(x)^2 = \int dV(\psi),$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}\psi'(x)^2 &= 2V(\psi) = \frac{4m^*}{\hbar^2}\int d\psi \psi (a + b\psi^2), \\ &= \frac{2m^*}{\hbar^2}\psi^2 \left(a + \frac{b}{2}\psi^2\right).\end{aligned}$$

Resolvendo essa equação diferencial, encontramos

$$x - x_0 = \int \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(a + \frac{b}{2}\psi^2\right)}}, \quad (2.13)$$

e assim temos a solução

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\xi\sqrt{2}}\right), \quad \xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|a(T)|}}, \quad (2.14)$$

onde o parâmetro ξ é chamado *comprimento de coerência de Ginzburg-Landau*, muito importante na caracterização do supercondutor (tipo I, tipo II).

A equação (2.9) pode ser comparada à equação de Gross-Pitaevskii

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\psi''(x) + (V(x) - \mu)\psi(x) + g\psi(x)^3 = 0, \quad (2.15)$$

que descreve o estado fundamental de um sistema quântico de bósons idênticos, através

da aproximação de Hartree-Fock. Em (2.15), V é um potencial e μ representa o potencial químico do sistema. A solução (2.14), que nesse jargão é denominado *dark soliton*, representaria a partícula associada à formação de um defeito topológico no condensado de bósons, e a constante ψ_0 está relacionada com o potencial químico por

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{V - \mu}{b}}.$$

Por fim, vale mencionar que nessa interpretação a densidade de carga do condensado é nula na região próxima à interface do material (denominada *core* do sóliton), pois ela é relacionada ao parâmetro de ordem por $\rho = \psi^2$; isso significa que essa descrição é apropriada para tratar sistemas de partículas neutras como superfluidos, ou situações onde não há supercorrentes.

Ginzburg-Landau na presença de campo magnético

Embora a discussão anterior mostre a importância da teoria de Ginzburg-Landau, o seu real potencial na descrição da supercondutividade se torna apreciável quando se trabalham com as equações na presença de um campo magnético externo. Dessa forma, é possível englobar a teoria de London e assim conseguir descrever o efeito de Meissner-Ochsenfeld.

Os efeitos do campo magnético podem ser incluídos de forma relativamente simples na teoria, através da substituição não-mínima

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - Q\mathbf{A} \quad (2.16)$$

em (2.7). O parâmetro Q representa a carga da partícula, e potencial vetor para o campo magnético é representado por \mathbf{A} .

Experimentalmente, se sabe que o valor apropriado para a carga Q é $-2e$; isso foi explicado por Gorkov, ao fazer a ponte entre a teoria BCS e Ginzburg-Landau. Para isso, ele mostrou que a interpretação correta do parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{x})$ é que ele representa a função de onda quântica para o centro de massa dos pares de elétrons, os *pares de Cooper*; logo, a carga líquida é de $-2e$.

Com a modificação (2.16), a densidade de energia livre se torna

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar}{2m^*} |(-i\hbar\nabla + 2eA)\psi(\mathbf{x})|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{x})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\mathbf{x})|^4. \quad (2.17)$$

A energia livre é obtida pela integração dessa densidade no espaço, com a inclusão do termo

$$\frac{1}{2\mu_0} \int d^3x B(\mathbf{x})^2, \quad (2.18)$$

que corresponde à energia do campo magnético. Utilizando novamente o princípio variacional para a energia livre, pode-se obter a equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{x}) + \left(a(T) + b(T) |\psi(\mathbf{x})|^2 \right) \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.19)$$

que é novamente uma equação de Schrodinger não linear, mas agora com a adição de um termo contendo o potencial vetor.

A presença do campo magnético induz uma supercorrente, que é dada pela derivada funcional

$$\mathbf{j}_s = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})}. \quad (2.20)$$

Calculando esta derivada para todas as componentes A_μ somos levados a

$$\mathbf{j}_s = -\frac{ie\hbar}{m^*} \left(\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi} \right) - \frac{4e^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (2.21)$$

que é a mesma expressão quântica para a densidade de corrente de probabilidade de partículas de massa m^* e carga $-2e$.

2.3 Teorias quânticas

2.3.1 Teoria BCS e o *gap* de energia

Outra característica importante dos supercondutores é o chamado *gap* de energia entre o estado fundamental e a excitações das quasi-partículas do sistema, que é denotado por Δ e é da ordem de $k_B T_c$. As primeiras evidências experimentais surgiram em medidas de

calor específico para supercondutores reais⁶, quando os resultados mostraram que o calor específico dos elétrons, bem abaixo da temperatura crítica, tinha crescimento exponencial do tipo

$$C \sim \gamma T_c a e^{-bT_c/T},$$

onde o calor específico no estado normal é $C = \gamma T$, e a, b são constantes. Sendo b encontrado com o valor aproximado de 1,5, temos um mínimo para a energia de excitação por partícula de $1,5k_B T_c$.

Nesse ponto entra a teoria BCS. Ela é assim denominada em homenagem a Bardeen, Cooper e Schieffer⁷, seus desenvolvedores, e foi a primeira teoria microscópica a conseguir explicar satisfatoriamente as propriedades dos materiais supercondutores. Isso permitiu calcular de forma mais precisa parâmetros da teoria como o comprimento de penetração, comprimento de coerência ou o campo magnético crítico, assim como predizer o gap de energia, o que era impossível trabalhando com as teorias clássicas.

O pilar principal da teoria reside no fato de que num sólido, a força efetiva entre os elétrons pode ser atrativa ao invés de repulsiva: isso é explicado pelo acoplamento entre os elétrons e os fônons⁸ da rede cristalina. Dessa forma, embora os elétrons tenham uma interação repulsiva entre si, quando se movem pelo sólido o que se vê não são os elétrons “puros”, mas sim uma quasipartícula que consiste no elétron com a chamada *interação de troca*. É essa interação de troca que “amortece” a interação de Coulomb e permite a interação atrativa entre os elétrons.

A partir daí, Leon Cooper⁹ verificou que a interação entre os elétrons poderia ser atrativa, na região próxima à superfície de Fermi, e então mostrou que nessa região um par de elétrons pode formar um estado ligado (pares de Cooper). Isto significa que a superfície de Fermi nesse caso é estável mesmo para interação (efetiva) atrativa entre as partículas.

Tendo mostrado isso apenas para um par de partículas, deve-se esperar então que no

⁶W. S. Corak, B. B. Goodman, C. B. Satterthwaite, and A. Wexler, *Phys. Rev.* **96**, 1442(1954); **102**, 656(1956)

⁷J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schieffer. *Phys. Rev.***108**, 1175 (1957).

⁸Quasipartículas associadas às propagação do som ao longo da rede.

⁹L. N. Cooper. *Phys. Rev.***104**, 1189 (1956).

caso de muitas partículas ocorra a formação de pares até um ponto de equilíbrio seja alcançado. No entanto, resta o problema de escrever uma função de onda para tal estado, onde todo elétron na região próxima à superfícies de Fermi se encontra pareado.

Havendo trabalhado inicialmente em uma função de onda no espaço de Fock, onde a função de onda do sistema é construída pelo produto de funções de onda de uma única partícula,

$$|k_1 k_2 \dots k_N\rangle = |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes \dots \otimes |k_N\rangle, \quad (2.22)$$

o tratamento se mostrou inconveniente, e ao invés disso, Schieffer deu um tratamento de estados coerentes ao problema. Construindo operadores de criação e aniquilação como $c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger$, que cria um elétron de momentum \mathbf{k} e spin *up*. Com esta notação, definiu-se o operador $P_{\mathbf{k}}^\dagger$ que cria os pares de Cooper:

$$P_{\mathbf{k}}^\dagger = c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger. \quad (2.23)$$

Observe que o momentum total do par de elétrons é nulo, e os spins opostos. Em termos desse operador, Schieffer propôs o seguinte estado

$$|\psi\rangle = C e^{\sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}}^\dagger} |0\rangle. \quad (2.24)$$

Os números $\alpha_{\mathbf{k}}$ são escolhidos de forma a minimizar a energia total do sistema. É possível mostrar que

$$[P_{\mathbf{k}}^\dagger, P_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad (2.25)$$

e assim, temos a função de onda para o conjunto de pares de Cooper (2.24) escrita como um produto de exponenciais:

$$|\psi\rangle = C \prod_{\mathbf{k}} e^{\alpha_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}}^\dagger} |0\rangle. \quad (2.26)$$

Dessa forma, partimos de um estado de vácuo e então vamos adicionando os pares de elétrons: podemos ver então um estado na teoria BCS como um condensado de pares de elétrons acima de um já preenchido mar de Fermi (também de elétrons).

Para finalizar, vale lembrar que a teoria BCS falha na descrição de materiais que

são chamados de “high- T_c ” supercondutores, onde alguns exemplos como as cerâmicas baseadas em óxido de cobre (cupretos), podem se tornar supercondutores a temperaturas acima de 100K. Ela também falha (embora seja possível fazer uma extensão) no regime de acoplamento forte, já que toda teoria foi desenvolvida com a hipótese de acoplamento fraco entre os elétrons, quando se pode desprezar o seu efeito sobre os fônons da rede.

2.3.2 Simetria de calibre, quebras de simetria e supercondutividade

Embora pareça um tanto incomum cogitar supercondutividade em teorias de campos e partículas, na verdade o fenômeno proveu um dos primeiros exemplos reais da quebra espontânea de simetria. Com isso se abriram novas possibilidades no estudo da supercondutividade, onde todo aparato de teoria de campos pode ser utilizado para tentar entender com maior profundidade quais mecanismos a governam.

Dentro desse contexto, pode-se dizer que um supercondutor é qualquer material que exiba uma quebra espontânea da simetria de calibre eletromagnética. Isto significa que um dos campos presentes na teoria adquire um valor esperado não nulo que não é invariante de calibre.

Considere um modelo envolvendo um campo de calibre $A_\mu(x)$ e um campo escalar complexo $\psi(x)$; isto é, sob transformações de calibre

$$\psi(x) \rightarrow e^{iQ\lambda(x)}\psi(x), \quad (2.27)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda(x), \quad (2.28)$$

para um $\lambda(x)$ arbitrário, as equações de movimento para os campos não se alteram. Sendo a carga Q múltiplo da carga elementar e , as fases θ e $\theta + \frac{2\pi}{e}$ são equivalentes. Este é o grupo de simetria que se assume ser espontaneamente quebrado na supercondutividade, pelo campo escalar, ao adquirir valor esperado que quebra a sua invariância¹⁰.

A quebra de simetria que ocorre quando o material passa do estado normal para o estado supercondutor é uma quebra *global* de simetria; isso condiz com o fato de que no interior do material supercondutor, o parâmetro de ordem é tal que no estado fundamental

¹⁰O grupo de simetria comentado é um subgrupo do grupo \mathbb{Z}_2 , que consiste das transformações de calibre $\lambda = 0$ e $\lambda = \pi/e$.

ele é constante[18]. Caso não fosse assim, e considerássemos uma quebra *local* de simetria, haveria um custo na energia livre maior do que no caso global, violando o princípio variacional para energia mínima.

Para vislumbrarmos como o formalismo de teoria de campos pode ser usado para mostrar as propriedades notáveis dos supercondutores, vamos estudar uma teoria de um campo escalar real acoplado ao campo de calibre, dado pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \psi \bar{D}^\mu \bar{\psi} + V(|\psi|) \right), \quad (2.29)$$

onde $F_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de campo eletromagnético e $D_\mu = \partial_\mu - iQA_\mu$ são as componentes da derivada covariante.

O sistema (2.29) é estável na ausência de campos externos[17]: isto significa que a energia do sistema alcança um mínimo quando o campo de calibre é dado por um gradiente de uma função escalar:

$$A_\mu = \partial_\mu \theta.$$

Nesse caso, A é dito ser de *calibre puro*. Daí podemos deduzir o efeito Meissner: na região interior do supercondutor (*bulk*), onde se pode ignorar os efeitos de borda, tem-se a ausência de campos externos, e portanto o campo eletromagnético é de calibre puro, tornando assim o campo magnético nulo nessa região.

Para discutir a condutividade infinita presente nos supercondutores, encontramos a quadricorrente J , que é dada pela derivada funcional da Lagrangiana com respeito às componentes do campo de calibre A ; enquanto a componente temporal desse vetor nos dá a densidade de carga ρ , as três componentes espaciais nos dão a corrente elétrica \mathbf{J} :

$$\mathbf{J}(x) = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{A}(x)} \quad (2.30)$$

$$\rho(x) = J^0(x) = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^0(x)} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}(x)} \quad (2.31)$$

A última equação nos diz que $\rho(x)$ é o momentum canonicamente conjugado ao campo escalar. Assim, tomando agora uma formulação Hamiltoniana onde o par canonicamente

conjugado é dado por $\{\phi(x), \rho(x)\}$, a dinâmica do campo escalar será dada pela equação

$$\dot{\phi}(x) = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho(x)}. \quad (2.32)$$

O lado direito da equação é essencialmente a variação da densidade de energia pela densidade de carga: é uma diferença de potencial entre os pontos no supercondutor. A dinâmica do campo fica então determinada por

$$\dot{\phi}(x) = -U(x). \quad (2.33)$$

Daí segue que um fio supercondutor é percorrido por uma corrente estacionária e não há dependência temporal nos campos, a diferença de potencial entre as extremidades deve ser nula. Para que tenhamos simultaneamente uma corrente finita e uma diferença de potencial nula, a condutividade deve ser infinita.

Capítulo 3

A Correspondência AdS/CFT

3.1 Introdução

A idéia de que pudesse existir uma equivalência entre teorias de calibre e teorias de cordas não é nova: a teoria de cordas foi inicialmente desenvolvida como uma teoria efetiva para as interações fortes, e foi muito bem sucedida na modelagem do espectro de *hádrons*. Contudo, foi descoberto que uma teoria de cordas quântica só era matematicamente consistente em um certo número de dimensões, e com o advento da Cromodinâmica Quântica, que explicava as mesmas propriedades e sem a necessidade de dimensões adicionais, o intento inicial foi abandonado. Porém, com a posterior inclusão da supersimetria na teoria de cordas, houveram evidências de que ela podia ser descrita por uma de supergravidade, tornando-a uma candidata à teoria quântica para a gravidade.

O regime perturbativo das teorias de calibre se ajusta muito bem no limite de altas energias; no entanto, quando se passa para o limite de acoplamento forte, acaba se tornando difícil fazer o tratamento de baixas energias.

Agora, o fato de que uma teoria de cordas pudesse descrever o limite de baixas energias de uma teoria de calibre com confinamento veio da QCD onde existe um fluxo que conecta os pares *quark-antiquark*, encerrado em um tubo. A idéia é que a dinâmica desse tubo de fluxo seja descrita em baixas energias pela dinâmica de uma corda, em cujas extremidades se localizam os quarks. Com isso, se tornaria possível tratar a dinâmica do sistema tanto no limite de altas energias (quando se utilizaria uma teoria de calibre) quanto no limite de baixas energias, quando a teoria de cordas dual se tornaria mais adequada (nesse limite

o acoplamento é fraco).

A conjectura de Maldacena [2] diz que há uma equivalência entre teorias de cordas em espaços $\text{AdS}_n \times M_{D-n}$ (AdS_n é espaço Anti-de Sitter n -dimensional e M_{D-n} é uma variedade compacta em $D - n$ dimensões) e uma teoria quântica de campos que “vive” na fronteira conforme desse espaço. O regime onde umas das teorias é de acoplamento forte, na outra é perturbativo.

Posteriormente ao enunciado da conjectura, trabalhos de Gubser, Klebanov, Polyakov e Witten [3, 19] deram uma formulação mais precisa, estudando suas implicações. O fato de haver uma equivalência entre teorias quânticas em dimensões diferentes torna a conjectura de Maldacena uma realização do princípio Holográfico, um princípio bastante geral para teorias de gravitação quântica. Uma descrição detalhada do mecanismo utilizado na discussão da conjectura foge do escopo desse trabalho; portanto, iremos nos deter apenas ao “ingredientes” necessários para o estudo do problema principal.

No estudo típico da teoria quântica de campos, se quer determinar funções de correlação do tipo

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle \quad (3.1)$$

para todos os operadores que invariantes de calibre, como o tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$, correntes de Noether J_μ e operadores escalares $\mathcal{O}(x)$. Assim, o que queremos fazer é modelar a teoria de cordas de tal forma que nos dê os dados que desejamos para a nossa teoria de campos.

Witten [19] sugere a identificação

$$Z_S = Z_{CFT} \quad (3.2)$$

entre a função de partição Z_S da teoria de cordas e o funcional gerador da teoria conforme. Se a função de partição da teoria de cordas for aproximada por

$$Z_S = \exp(-I_S), \quad (3.3)$$

onde I_S é a ação clássica de supergravidade, podemos escrever o funcional gerador da

teoria conforme como

$$w_{CFT}(\phi_0) = -I_S(\phi_{cl}), \quad (3.4)$$

onde ϕ_0 representam os campos na fronteira e ϕ_{cl} são as soluções das equações de movimento. Assim, os campos que obtemos como solução na teoria de cordas quando se aproximam da fronteira funcionam como fontes de operadores na teoria conforme. Normalmente a solução das equações de movimento divergem à medida que se aproxima da fronteira $z = 0$ (em coordenadas de Poincaré $X = (z, \mathbf{x}, t)$); assim, definimos como condição de fronteira $\phi_\epsilon = \phi(z = \epsilon, \mathbf{x}, t)$, tomando então o limite $\epsilon \rightarrow 0$. A divergência de ϕ_ϵ é comparável a $\epsilon^{-\lambda}$, onde λ é um número real: definimos então o valor do campo na fronteira como

$$\phi_0(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\lambda \phi_\epsilon(\mathbf{x}, t).$$

Com isto, a dimensão conforme do campo é $-\lambda$, e ele dará origem a operadores com dimensão conforme $\Delta = D + \lambda$.

Seguindo o trabalho de Witten[19], vamos estudar casos de campos livres no espaço AdS (especificamente, campo escalar e campo de calibre abeliano), e tipo de implicações eles trazem para a teoria dual conforme.

3.2 Campo escalar não-massivo

Um campo escalar no espaço AdS_{D+1} é um campo invariante sob o seu grupo de simetria. Como ele não diverge quando nos aproximamos da fronteira do AdS, sua dimensão conforme é $\lambda = 0$, e portanto ele dará origem a um operador de dimensão conforme D . A ação para esse campo no espaço AdS_{D+1} é

$$I(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\text{AdS}_{D+1}} d^{D+1}x \sqrt{g} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi; \quad (3.5)$$

Utilizando as coordenadas de Poincaré após uma rotação euclidiana, teremos as coordenadas $X = (z, \mathbf{x}, it)$, com um elemento de linha dado por

$$ds^2 = \frac{1}{(x_0)^2} dx_\mu dx^\mu.$$

Nessas coordenadas, através de integração por partes podemos chegar a[20]

$$I(\phi) = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D x \epsilon^{1-D} \phi^\epsilon \partial_0 \phi^\epsilon - \frac{1}{2} \int d^{D+1} \sqrt{g} \delta\phi \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \phi) \right), \quad (3.6)$$

onde

$$\phi^\epsilon = \phi(X)|_{X_0=\epsilon}, \quad (3.7)$$

$$\partial_0 \phi^\epsilon = \frac{\partial \phi}{\partial x_0} |_{x_0=\epsilon}. \quad (3.8)$$

A variação dessa ação, além de nos dar a equação de movimento, nos dá uma condição de fronteira do tipo Dirichlet:

$$\delta\phi^\epsilon = 0. \quad (3.9)$$

Assim, devemos encontrar por um campo clássico que satisfaça a equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \phi) = 0, \quad (3.10)$$

que é a equação de Laplace dentro do espaço AdS, e que satisfaça também a condição de fronteira (3.9).

Para resolver esta equação, utilizamos o método da função de Green, onde procuramos um núcleo $K(x, x')$ para o operador de Laplace,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu K(x, x')) = \frac{\delta(x - x')}{\sqrt{g}}, \quad (3.11)$$

que também satisfaça as condições de fronteira.

Encontrada essa função, podemos escrever a solução clássica a partir do valor de fronteira:

$$\phi(x) = \int d^D x' K(x, x') \phi_\epsilon(x'). \quad (3.12)$$

O núcleo $K(x, x')$ é então o propagador entre o *bulk* e a fronteira; na assinatura euclídeana,

pode-se verificar que ele é explicitamente dado por

$$K(x, x') = C \left(\frac{x_0}{x_0^2 + |X - X'|^2} \right)^D, \quad (3.13)$$

para $x^0 \neq 0$ e $X \neq X'$. A solução clássica (3.12) fica então

$$\phi_{cl}(x_0, \mathbf{x}) = C \int d^D x \left(\frac{x_0}{x_0^2 + |X - X'|^2} \right)^D \phi_\epsilon(x') \quad (3.14)$$

De posse da expressão para o campo clássico, substituímos na ação (3.6) para obter

$$I(\phi_{cl}) = -\frac{CD}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D x d^D x' \frac{\phi_\epsilon(X) \phi_\epsilon(X')}{(X - X')^{2D}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.15)$$

$$= -\frac{CD}{2} \int d^D x d^D x' \frac{\phi_0(X) \phi_0(X')}{(X - X')^{2D}}, \quad (3.16)$$

e pela relação (3.4), temos o funcional gerador para a teoria conforme:

$$w_{CFT}(\phi_0) = \frac{CD}{2} \int d^D x d^D x' \frac{\phi_0(X) \phi_0(X')}{(X - X')^{2D}}. \quad (3.17)$$

Com isto, podemos calcular as funções de correlação da seguinte forma:

$$\langle \mathcal{O}(X_1) \mathcal{O}(X_2) \cdots \mathcal{O}(X_n) \rangle = \frac{\delta^n}{\delta \phi_0(X_1) \delta \phi_0(X_2) \cdots \delta \phi_0(X_n)} w_{CFT}(\phi_0), \quad (3.18)$$

onde as derivadas funcionais são tomadas em $\phi_0 = 0$. O exemplo mais simples é o da função de correlação de dois pontos, que é dada por

$$\langle \mathcal{O}(X) \mathcal{O}(X') \rangle = \frac{CD}{(X - X')^{2D}}, \quad (3.19)$$

e corresponde ao esperado para um teoria conforme num espaço euclidiano D -dimensional, para um campo de dimensão conforme D .

3.3 Campo escalar massivo

No caso de um campo escalar massivo, os operadores \mathcal{O}_Δ gerados pelo campo tem dimensão conforme Δ , dada pela maior raiz da equação[4]

$$\Delta(\Delta - D) = m^2. \quad (3.20)$$

Podemos observar que esta relação engloba o caso anterior para o campo não-massivo, pois quando a massa é igual a zero teremos a dimensão do operador conforme igual a D . A ação para o campo é

$$I(\phi) = \frac{1}{2} \int d^{D+1}x \sqrt{g} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 \right), \quad (3.21)$$

mas seguindo Witten[19], utilizamos coordenadas estereográficas com uma rotação euclidiana; assim, temos

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - X^2)^2} dx_\mu dx^\mu, \quad X^2 = x_\mu x^\mu = r^2 \quad (\mu = 0, \dots, D). \quad (3.22)$$

Fazendo a mudança de variável

$$r = \tanh\left(\frac{y}{2}\right) \quad (3.23)$$

conseguimos separar explicitamente a parte radial e a angular de (3.22):

$$ds^2 = dy^2 + \sinh^2 y d\Omega_n^2. \quad (3.24)$$

Nesse sistema de coordenadas, a equação de movimento para o campo se torna

$$\frac{1}{\sinh^D y} \frac{d}{dy} \left(\sinh^D y \frac{d}{dy} \phi \right) - \frac{L^2}{\sinh^2 y} = m^2 \phi, \quad (3.25)$$

onde L^2 representa a parte angular do operador. Para grandes valores de y , podemos ignorar a parte angular, e equação é aproximada por

$$e^{-Dy} \frac{d}{dy} \left(e^{Dy} \frac{d}{dy} \phi \right) = m^2 \phi, \quad (3.26)$$

que admite uma solução $e^{\Delta y}$ desde que

$$\Delta(\Delta + D) = m^2; \quad (3.27)$$

daí, temos duas soluções linearmente independentes para a equação (3.26), que se comportam assintoticamente como $e^{\Delta_+ y}$ e $e^{\Delta_- y}$, onde Δ_+ e Δ_- representam respectivamente a maior e menor raiz da equação (3.27). Como uma combinação linear dessas duas soluções divergem exponencialmente na fronteira, concluímos que não é possível encontrar uma solução para a equação de movimento (3.25) que tenda a uma constante próximo à fronteira.

Assim, o que se faz é escolher uma função f que tenha um zero simples na fronteira, e procurar por uma solução “amortecida” que tenha o comportamento

$$\phi \approx f^{-\Delta_+} \phi_0 \quad (3.28)$$

na fronteira do espaço AdS. Seguindo a discussão feita em [4], conclui-se ϕ_0 atua como uma densidade conforme com dimensão de massa $-\Delta_+$: portanto, o termo de massa age como um regulador da dimensão conforme. O campo escalar irá então gerar operadores \mathcal{O}_Δ de dimensão conforme $D + \Delta_+$ de tal forma que $\mathcal{O}_\Delta \phi_0$ seja uma densidade com peso Δ .

Como no caso não-massivo, queremos encontrar as funções de correlação, e portanto encontrar o propagador $K(X, X')$ correspondente à equação de movimento. Aqui, temos o vínculo adicional de precisarmos do comportamento (3.28). Nas coordenadas de Poincaré (também com rotação euclideana) (x_0, \mathbf{x}) , calcula-se primeiro o propagador na região

$x_0 \rightarrow \infty$, quando ele passará a ter apenas a dependência $K(x_0)$:

$$-(x^0)^{1+D} \frac{d}{dx^0} \left((x^0)^{1-D} \frac{d}{dx^0} K(x^0) \right) = -m^2 K(x^0). \quad (3.29)$$

Esta equação admite uma solução da forma $(x^0)^{\lambda+D}$ apenas se

$$\lambda(\lambda + D) = m^2, \quad (3.30)$$

cujas soluções λ_+, λ_- são

$$\lambda_+ = \frac{1}{2} \left(-D + \sqrt{4m^2 + D^2} \right), \quad (3.31)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2} \left(-D - \sqrt{4m^2 + D^2} \right); \quad (3.32)$$

como apenas a solução $(x^0)^{D+\lambda_+}$ se anula em $x_0 = 0$, pode-se chegar a seguinte expressão para o propagador [4, 19], através de uma transformação do grupo de isometria $SO(1, D+1)$:

$$K(x^0, X, X') = \frac{(x^0)^{n+\lambda_+}}{((x^0)^2 + (X - X')^2)^{D+\lambda_+}}. \quad (3.33)$$

Assim, temos a expressão para o campo clássico,

$$\phi(x^0, X) = c \int d^D x' \frac{(x^0)^{n+\lambda_+}}{((x^0)^2 + (X - X')^2)^{D+\lambda_+}} \phi_0(X'), \quad (3.34)$$

que ao realizar o mesmo procedimento que fizemos para o caso não-massivo (calcular a ação clássica), nos dá

$$I_{cl}(\phi) = \int d^D x d^D x' \frac{\phi(X)\phi(X')}{(X - X')^{2(D+\lambda_+)}}. \quad (3.35)$$

Como λ_+ é a maior raiz da equação (3.30), podemos calcular a dimensão conforme do operador como

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(D + \sqrt{D^2 + 4m^2} \right). \quad (3.36)$$

Capítulo 4

Supercondutividade Holográfica e defeitos tipo parede de domínio

Os exemplos mais compreendidos da correspondência AdS/CFT envolvem espaços de 10 ou 11 dimensões (teoria de cordas ou teoria M), onde os campos no limite de baixas energias são encontrados através de uma redução dimensional. Para o caso em que queremos descrever um fenômeno específico (supercondutividade ou Cromodinâmica Quântica), podemos simplesmente escolher os campos e suas interações no interior do espaço de tal forma que possamos modelar o fenômeno desejado da melhor forma possível.

Portanto, vamos escolher os campos que precisamos para descrever supercondutividade. O objeto básico para a nossa teoria gravitacional é a métrica $g_{\mu\nu}$. O seu valor de fronteira $g_{\mu\nu}^0$ é interpretado como a métrica da teoria dual[8].

De forma análoga, um campo de calibre A_μ corresponde a uma corrente J^μ e um campo escalar complexo corresponde a um operador (também com carga) cuja natureza é desconhecida. O lagrangeano para um campo escalar complexo, na presença de gravidade, pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa_1^2}(R + \Lambda) - \frac{1}{\kappa_2^2} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \psi \bar{D}^\mu \bar{\psi} + V(|\phi|) \right), \quad (4.1)$$

onde κ_1, κ_2 são constantes de acoplamento. O primeiro termo entre parênteses representa o lagrangeano de Einstein-Hilbert, enquanto o segundo lembra o lagrangeano para o modelo de Higgs (abeliano), exceto pela escolha do potencial. A quebra espontânea de simetria

ocorreria ao escolher-se um potencial do tipo $V(\psi) = \frac{\lambda}{4} (|\psi| - a^2)^2$; no entanto, escolhe-se simplesmente $V(\psi) = -m^2 |\psi|^2$ para a modelagem dos supercondutores. Esse tipo de potencial não é limitado, e o campo seria portanto instável. Também, como argumenta Gubser[6] uma eventual carga de fundo pode trazer um deslocamento para o termo de massa, contribuindo ainda mais para a sua instabilidade. No entanto, dentro do espaço AdS existe uma certa escolha para a massa do campo escalar, chamado de limite de Breitenlohner-Freedman[21, 22] na qual este continua estável, mesmo na presença desses tipos de potenciais ilimitados. Então, como o potencial é arbitrário, escolhe-se um que não viole esse limite.

Para simularmos os efeitos da temperatura na teoria dual, considera-se que os campos vivem dentro uma espaço que seja apenas assintoticamente AdS, e que possua uma métrica da forma

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(\frac{dz^2}{f(z)} - f(z)dt^2 + dx^2 + dy^2 \right), \quad f(z) = 1 - z^3; \quad (4.2)$$

esta é uma métrica do tipo buraco-negro, e a sua temperatura Hawking $T_H = 3/4\pi$ determina a temperatura de equilíbrio da teoria dual.

As equações de movimento para os campos da lagrangeana (4.1) são

$$\frac{1}{\sqrt{g}} D_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \psi) = m^2 \psi, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu F^{\mu\nu}) = -i (\psi \partial^\nu \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial^\nu \psi) - 2A^\nu |\psi|^2. \quad (4.4)$$

Resta ainda escrever as equações de Einstein para o sistema gravitacional. No entanto, para simplificar o problema, recorre-se ao chamado *limite de prova*, onde os efeitos dos campos sobre a métrica é desconsiderado. Tal limite é feito fazendo-se $\kappa_1/\kappa_2 \rightarrow 0$, mas mantendo os campos finitos.

Para procurarmos soluções do tipo kink na teoria dual, vamos estudar inicialmente soluções estáticas para o sistema em questão. Também por simplicidade, vamos considerar que todos os campos tem dependência apenas na coordenada z no *bulk* e em uma coordenada na fronteira, x . Na teoria dual, isso implica uma invariância de translação de direção y .

Um ponto de partida para estudarmos soluções do tipo kink é considerar soluções que envolvem um parâmetro de ordem *real*, e uma simetria \mathbb{Z}_2 para substituir a simetria $U(1)$. Assim, se considerarmos a fase do campo escalar constante, duas das equações de Maxwell (a saber, $\nu = z$ e $\nu = x$) são satisfeitas trivialmente se tomarmos suas respectivas componentes do campo de calibre nulas: $A_z = A_x = 0$. Se assumirmos também invariância translacional, podemos ajustar $A_y = 0$, restando apenas a componente temporal do campo de calibre:

$$A = \phi(z, x)dt$$

Assim, se escrevermos o campo escalar como $\psi(z, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}zR$, podemos escrever as equações de movimento da seguinte forma:

$$fR_{zz} + R_{xx} + f'R_z + \left(\frac{\phi^2}{f} - z\right)\psi = 0 \quad (4.5)$$

$$f\phi_{zz} + \phi_{xx} - R^2\phi = 0. \quad (4.6)$$

Através de uma expansão para os campos do tipo Frobenius na direção z , pode-se chegar ao seguinte comportamento assintótico para os campos na região $z \rightarrow 0$:

$$R \approx R_1 + zR_2, \quad A \approx A_0 + A_1z. \quad (4.7)$$

pela correspondência, os coeficientes da expansão estão relacionados com as grandezas da teoria dual. Neste caso específico, podemos interpretar R_1 como sendo a fonte de um operador com carga \mathcal{O}_2 de dimensão conforme 2:

$$R_1 = J_2, \quad R_2 = \langle \mathcal{O}_2 \rangle, \quad A_0 = \mu, \quad A_1 = \rho, \quad (4.8)$$

onde μ é o potencial químico, ρ representa a densidade de carga e J_2 uma corrente.

Também é possível invertermos os papéis dos coeficientes R_1 e R_2 , tornando R_2 uma fonte para um operador de dimensão conforme 1:

$$R_1 = \langle \mathcal{O}_2 \rangle \quad R_2 = J^1, \quad A_0 = \mu, \quad A_1 = \rho, \quad (4.9)$$

dessa forma, a o sistema gravitacional dá origem à duas teorias de campos na fronteira.

Para podermos resolver as equações de movimento, precisamos ainda impor as condições de contorno, de tal forma que tornem única a solução do nosso problema. Assumindo que o campo escalar é regular em todo intervalo $z \in (0, 1)$, para manter a norma do campo de calibre também regular quando $z \rightarrow 1$ devemos ter

$$R_{xx} + f'R_z - zR = 0 \quad (4.10)$$

$$\phi = 0 \quad (4.11)$$

nessa região.

Como o sistema de equações diferenciais que constituem as equações de movimento é elíptico, basta agora fixarmos as condições de contorno na fronteira. Nessa região, vamos escolher condições que nos permitam obter apenas um dos coeficientes R_1 e R_2 separadamente; dessa forma, escolhemos

$$\mathcal{O}_1 : \quad \phi = \mu, \quad R_z = 0 \quad (4.12)$$

$$\mathcal{O}_2 : \quad \phi = \mu, \quad R = 0 \quad (4.13)$$

O sistema de equações (4.5), (4.6) é difícil de se tratar analiticamente (talvez impossível), e portanto, recorreremos a métodos numéricos para obter as soluções. O método utilizado foi o de diferenças finitas, que será explicado no próximo capítulo, ao estudarmos a dinâmica das paredes de domínio. Resolvemos as equações em uma região retangular $[0, 1] \times [-L/2, +L/2]$, nas direções z e x respectivamente, discretizada em uma rede de $n_z \times n_x$ pontos. Partindo de uma configuração inicial (chamada de *semente*) para as soluções, e iterando impondo as equações diferenciais (apropriadamente discretizadas) e as condições de contorno, ela converge para a solução do sistema. Abaixo, temos as soluções para os campos tanto para o operador \mathcal{O}_1 como para o operador \mathcal{O}_2 .

É interessante notar que a derivada dos campos em relação à coordenada espacial x parece se anular nos extremos do intervalo $[-L/2; L/2]$. Isso foi verificado em todos os tamanhos tomados para o sistema, e portanto, poderíamos também impor condições de

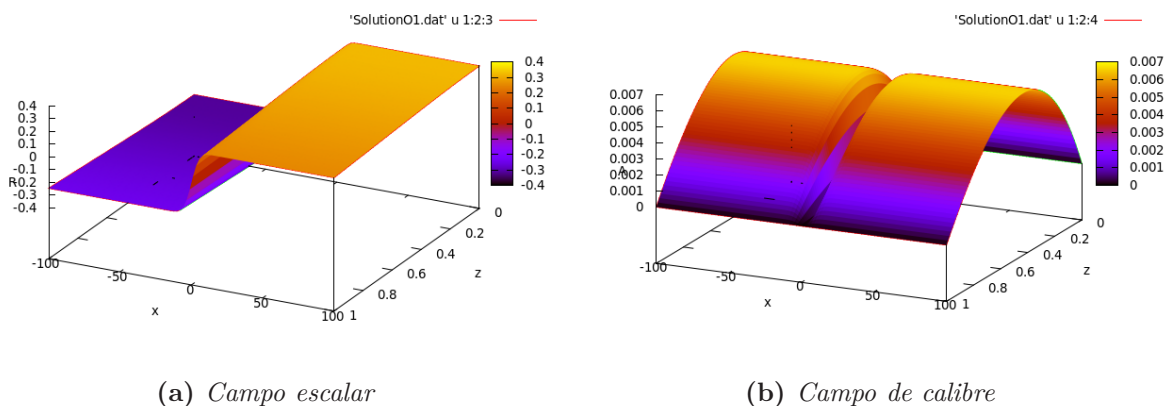


Figura 4.1: Solução para os campos na teoria \mathcal{O}_1

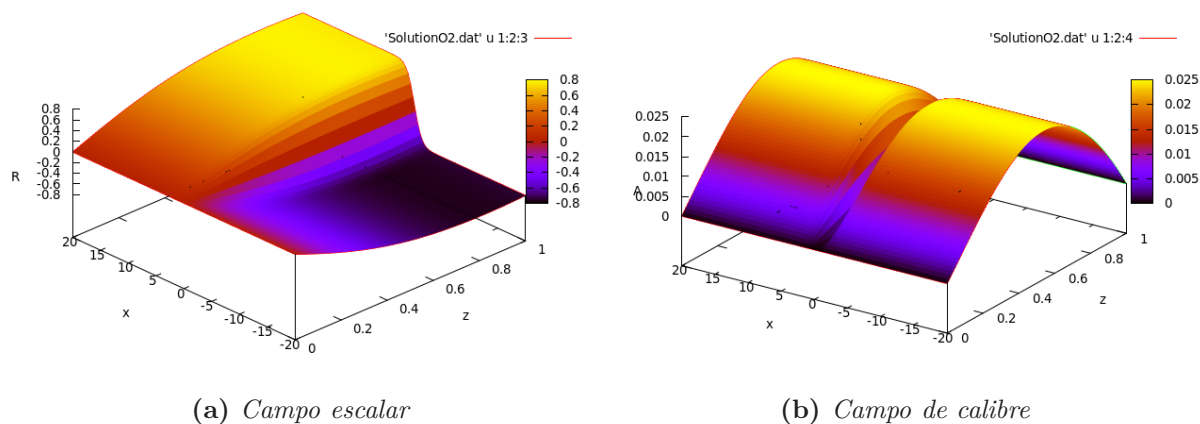


Figura 4.2: Solução para os campos na teoria \mathcal{O}_2

Neumann para os campos sem afetar o resultado final. Outro fato importante é que se perturbarmos essas soluções, elas voltam ao estado original rapidamente, sugerindo que são configurações estáveis para os campos.

A partir das soluções encontradas, extraímos os perfis na fronteira, que é o local onde desejamos estudar o comportamento dos campos. Na figuras 4 e 4 temos os perfis de fronteira para os campos nas duas teorias, em função da coordenada espacial x .

Esses perfis lembram as funções \tanh e sech^2 ; se fizermos um ajuste dos pontos utilizando essas funções e compararmos com equação de Gross-Pitaevskii, veremos que os coeficientes do ajuste estão relacionados com os comprimentos de coerência de Ginzburg-Landau.

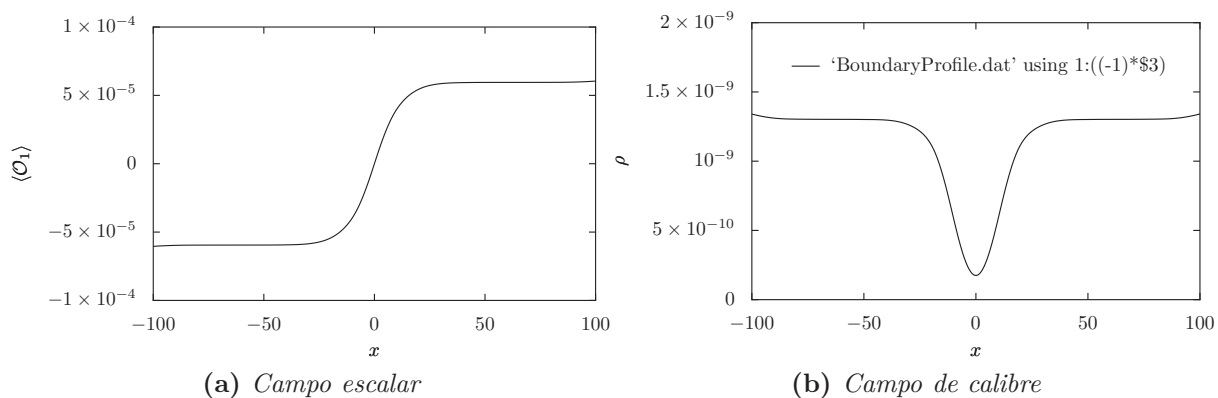


Figura 4.3: Perfil na superfície $z = 0$ para os campos na teoria \mathcal{O}_1

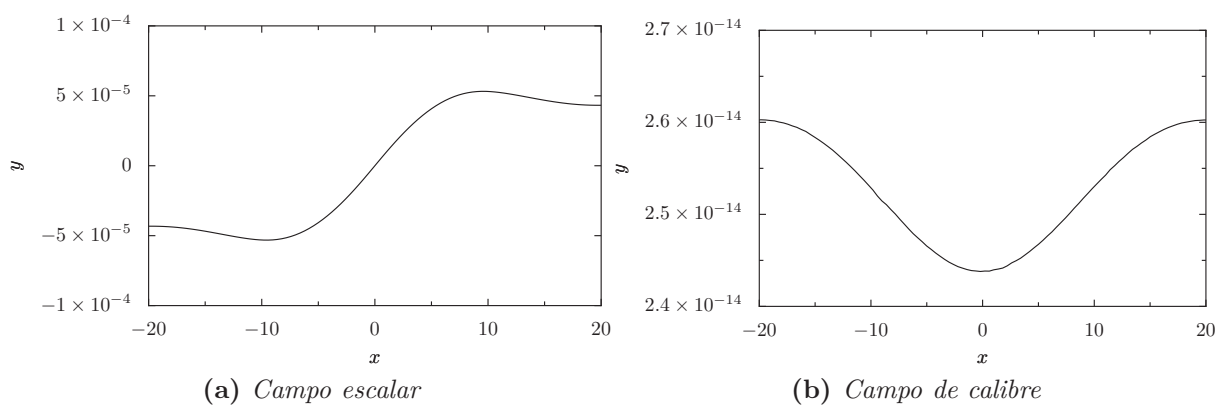


Figura 4.4: Perfil na superfície $z = 0$ para os campos na teoria \mathcal{O}_2

Capítulo 5

Dinâmica de Defeitos Topológicos

Neste capítulo vamos discutir a principal contribuição do nosso trabalho, que é o estudo cinemático de defeitos topológicos. Veremos como podemos obter soluções dinâmicas do problema a partir das soluções estáticas, através de transformações do grupo de isometrias da métrica utilizada: a partir do caso mais conhecido, que são as transformações de Lorentz[23], tentaremos estender a idéia para os supercondutores holográficos.

5.1 Grupo de isometrias

Considere a equação de onda em (1+1)-dimensões,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi(t, x) - \partial_x^2 \phi(t, x) = 0; \quad (5.1)$$

uma característica dessa equação é que, dada uma função real diferenciável $f(y)$, podemos torná-la solução de (5.1) fazendo-se $\phi(t, x) = f(x \pm ct)$; teremos então uma solução que se propaga com velocidade $\pm c$ e que não apresenta mudança em sua forma.

Isso está relacionado com o fato da equação (5.1) ser invariante sob as transformações de Lorentz, em particular as do tipo

$$x = \gamma (x' + vt'), \quad (5.2)$$

$$t = \gamma (t' + vx'), \quad (5.3)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$. Transformações desse tipo são chamadas *boosts*, e podem ser ima-

ginadas como rotações envolvendo ângulos imaginários. As transformações de Lorentz representam as isometrias da métrica de Minkowski,

$$\eta = dx^2 - dt^2; \quad (5.4)$$

ou seja, a métrica é preservada sob essas transformações:

$$\begin{aligned} dx^2 - dt^2 &= \gamma^2 (dx' + vdt')^2 - \gamma^2 (dt' + vdx')^2 \\ &= \gamma^2 \left((dx')^2 + v^2(dt')^2 + 2vdx'dt' \right) - \gamma^2 \left((dt')^2 + v^2(dx')^2 + 2vdt'dx' \right) \\ &= \gamma^2(1 - v^2)(dx')^2 + \gamma^2(v^2 - 1)(dt')^2 \\ &= (dx')^2 - (dt')^2. \end{aligned}$$

Assim, em sistemas com invariância relativística como (5.1), uma vez que se conheça uma solução estática, pode-se obter uma solução dinâmica através de um *boost*. Isto pode ser extendido, desde que saibamos o grupo de isometria do espaço considerado.

Discutimos brevemente na seção 1.2.5 que o grupo de isometrias do AdS atua sobre a sua fronteira como uma transformação de Lorentz; então, o princípio discutido pode ser aplicado às equações de movimento dos campos.

Vamos então tomar a métrica de buraco negro apresentada no capítulo 4,

$$ds^2 = -\frac{f(z)}{z^2}dt^2 + \frac{1}{z^2 f(z)}dz^2 + \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2), \quad f(z) = 1 - z^3, \quad (5.5)$$

e fazer a transformação de coordenadas (5.2), (5.3), e mantendo as outras coordenadas

constantes:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{f(z)}{z^2}\gamma^2 (dt' + vdx')^2 + \frac{1}{z^2 f(z)} dz^2 + \frac{1}{z^2} \left((dx' + vdt')^2 + dy^2 \right) \\
&= -\frac{f(z)}{z^2}\gamma^2 \left((dt')^2 + v^2(dx')^2 + 2vdx'dt' \right) + \frac{1}{z^2 f(z)} dz^2 \\
&\quad + \frac{1}{z^2} \left((dx')^2 + v^2(dt')^2 + 2vdx'dt' \right) + dy^2 \\
&= -\gamma^2 \left(\frac{f(z) - v^2}{z^2} \right) (dt')^2 + \frac{1}{z^2 f(z)} dz^2 \\
&\quad + \frac{1}{z^2} \left(\gamma^2 (1 - v^2 f(z)) (dx')^2 + dy^2 \right) + \frac{2\gamma^2 v}{z^2} (1 - f(z)) dx'dt'
\end{aligned}$$

Percebe-se claramente que a métrica não foi preservada sob as transformações (5.2), (5.3), e portanto as equações de movimento para os campos não são preservadas pelos *boosts*.

A métrica resultante da mudança de coordenadas não é sequer assintoticamente AdS, e portanto não podemos esperar que haja uma correspondência na fronteira (caso esse espaço tenha); no entanto, se observarmos os coeficientes da métrica que foram modificados, todos contém termos de segunda ordem em v , exceto o termo cruzado $dx'dt'$. Assim, a estratégia que vamos adotar é fazer um estudo aproximado, válido em primeira ordem em v , ao fazermos uma perturbação na métrica do buraco-negro (5.5):

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + v h_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

de modo que teremos então

$$ds^2 = -\frac{f(z)}{z^2} dt^2 + \frac{1}{z^2 f(z)} dz^2 + \frac{1}{z^2} (dx^2 + dy^2) + 2vz dx dt \quad (v \ll 1); \quad (5.7)$$

nessa aproximação, a métrica volta a ser assintoticamente AdS, e ainda admite *boosts* na teoria dual.

Portanto, para estudarmos a dinâmica das paredes de domínio nesse novo cenário, resolvemos as novas equações de movimento, e nas soluções encontradas fazemos um *boost* de Lorentz.

As equações de movimento agora ficam

$$f\psi_{zz} + \psi_{xx} + f'\psi_z - \frac{4ivz^3\phi}{f}\psi_x + \left(\frac{\phi^2}{f} - z - \frac{2ivz^3\phi_x}{f}\right)\psi = 0 \quad (5.8)$$

$$f\phi_{zz} + \phi_{xx} - 2|\psi|^2\phi = 0 \quad (5.9)$$

$$f\phi_{zz} + \frac{3f\phi_z}{z} - 2|\psi|^2\phi = 0 \quad (5.10)$$

$$2vz^7\phi_{xz} = 0 \quad (5.11)$$

O caso perturbado recupera as soluções estáticas quando $v \rightarrow 0$; como ainda queremos encontrar soluções do tipo parede de domínio, mantemos as mesmas condições de contorno do caso estático nas bordas espaciais; a única condição de contorno a ser modificada é a do campo escalar na região $z \rightarrow 1$:

$$\psi_{xx} + f'\psi_z - \frac{4ivz^3}{f}\psi_x - z\psi = 0$$

5.2 Métodos Numéricos: Diferenças finitas

As equações de movimento (5.8) e (5.9) são muito complexas para serem tratadas analiticamente; iremos recorrer então a métodos numéricos para resolvê-las.

A forma mais simples de se procurar soluções numéricas para uma equação é através do método das diferenças finitas, quando substituimos as derivadas nas equações diferenciais por aproximações de diferenças, obtendo assim um sistema de equações algébricas cuja solução é uma aproximação da solução real.

Como exemplo, considere a equação de Poisson em uma dimensão

$$\phi''(x) = f(x), \quad (5.12)$$

a ser resolvida no intervalo unitário $[0, 1]$ sob condições de contorno de Dirichlet $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

O método consiste em transformar o domínio de solução em uma rede (figura 5.2), formada por um conjunto finito de $N + 1$ pontos dados $x_i = i\Delta x$ de tal forma que $x_0 = 0$

e $x_N = 1$, e então fazer a aproximação

$$\phi''(x) \approx \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (5.13)$$

para as derivadas. Nestas equações, os números ϕ_i representam os valores da função tomados nos pontos da rede: $\phi_i = \phi(x_i)$, e i é um número inteiro tal que $x_0 = 0$ e $x_N = 1$.

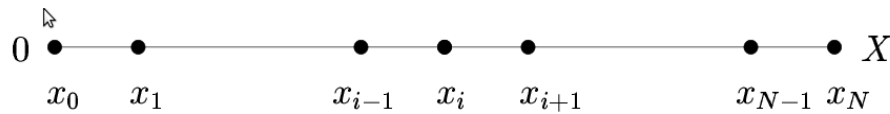


Figura 5.1: Discretização do intervalo unitário para solução numérica

Com isso, a equação (5.12) pode ser aproximada por

$$\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{h_x^2} = f_i. \quad (5.14)$$

Como essa equação deve ser satisfeita em todos os pontos interiores do domínio, temos um sistema de $M + 1$ equações algébricas a resolver: as condições de contorno aparecem quando escrevemos a equação para os sítios próximos à fronteira. Neste exemplo, as condições de contorno são expressas por $\phi_0 = \phi_M = 0$, e as equações para os sítios vizinhos (respectivamente $i = 1$ e $i = M - 1$) são

$$\begin{aligned} \frac{-2\phi_1 + \phi_2}{h_x^2} &= f_1 \\ \frac{\phi_{M-2} - 2\phi_{M-1}}{h_x^2} &= f_{M-1} \end{aligned}$$

Se escrevermos todas as equações, para os sítios $i = 2, 3, \dots, M - 2$, iremos observar

que as equações para todos os sítios podem ser sumarizadas pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{M-1} \end{pmatrix}.$$

Este sistema de equações pode ser resolvido por vários métodos, como por exemplo eliminação Gaussiana. A matriz dos coeficientes é denominada *matriz esparsa*, por ter a maior parte de seus elementos iguais a zero. Para um número muito grande de equações (o que significa que o espaçamento entre os pontos da rede é menor) e para outros tipos de equações mais gerais e complicadas que a mostrada aqui, o número de equações fica maior e a matriz pode deixar de ser tridiagonal; dado que o grau de esparsidade da matriz também aumenta e o padrão seus dos zeros pode ser difícil de se determinar, uma solução direta para o sistema de equações algébricas deixa de ser uma problema simples. Para isso, pode-se recorrer a uma solução iterativa, onde escolhemos uma solução inicial e utilizamos uma regra para determinarmos uma solução mais acurada. Existem vários tipos de métodos, como o método de Jacobi, Gauss-Seidel, Newton-Raphson e *successive over relaxation*(SOR); embora os dois primeiros forneçam uma convergência bastante lenta, serão os que utilizaremos por mais simples de ser explicados e implementados.

5.2.1 Método de Jacobi e Gauss-Seidel

Considere novamente o problema (5.12); observe que podemos reescrever as equações (5.14) como

$$\phi_i = \frac{1}{2} (\phi_{i-1} + \phi_{i+1} - h_x^2 f_i). \quad (5.15)$$

para o caso de uma equação de Laplace ($f_i = 0$) esta equação diz que o valor da função em cada ponto é uma média dos seus valores nos pontos vizinhos. Isto expressa a seguinte propriedade das funções harmônicas: o valor da função em cada ponto é igual ao valor médio da função em torno de uma superfície fechada contendo o ponto, no limite que a

superfície colima no ponto. No contexto da condução de calor, diz-se que haverá um fluxo de calor no ponto até que a condição (5.15) seja satisfeita.

A equação (5.15) sugere o seguinte esquema iterativo para se determinar uma estimativa $\phi_i^{(k+1)}$ a partir de uma $\phi_i^{(k)}$:

$$\phi_i^{(k+1)} = \frac{1}{2} (\phi_{i-1}^{(k)} + \phi_{i+1}^{(k)} - h_x^2 f_i). \quad (5.16)$$

Este esquema é chamado de método iterativo de Jacobi, e para alguns tipos de problema (especialmente no caso de equações elípticas) é possível mostrar que a partir de uma configuração inicial $\phi_i^{(0)}$ a solução converge.

Observe que no método de Jacobi os valores da função no passo $k + 1$ depende unicamente dos valores da função no passo anterior k . Se escrevermos os valores da função como dependentes da iteração k e da iteração $k + 1$, teremos o esquema

$$\phi_i^{(k+1)} = \frac{1}{2} (\phi_{i-1}^{(k+1)} + \phi_{i+1}^{(k)} - h_x^2 f_i), \quad (5.17)$$

que é conhecido como esquema iterativo de Gauss-Seidel. Embora a implementação seja quase idêntica ao do método de Jacobi, incrivelmente a sua velocidade de convergência é cerca do dobro da convergência do método de Jacobi.

Uma das vantagens desses métodos iterativos é que podemos observar que a matriz correspondente ao sistema de equações não é armazenada, reduzindo o armazenamento de dados e assim o algoritmo se torna mais eficiente.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

O trabalho teve como objetivo o entender a formação e a dinâmica de paredes de domínio em superfluidos, utilizando-se a correspondência AdS/CFT. Construimos os propagadores que relacionam os campos clássicos dentro do *bulk* com seus valores assintóticos na fronteira, verificando que um campo escalar complexo atua na fronteira como um operador carregado, cuja dimensão conforme depende do número de dimensões do espaço e se o campo tem ou não massa.

A partir do modelo abeliano de Maxwell-Higgs, utilizamos um acoplamento fraco com a gravidade para escrevermos as equações de movimento dos campos sob um fundo fixo, de um buraco-negro no espaço AdS. Pela correspondência AdS/CFT, isso nos permitiu tratar o problema a uma temperatura finita, dada pela temperatura Hawking do buraco-negro.

Verificamos ainda que é possível obter soluções do tipo parede de domínio em superfluidos através desse tratamento. Dada a dificuldade em se resolver as equações diferenciais que o problema apresentou, optamos por fazer uma investigação numérica, onde resolvemos o sistema de equações diferenciais resultante para as equações de movimento através de um método iterativo.

As soluções encontradas se mostraram estáveis sob pequenas perturbações, e exibiram duas escalas características de comprimento, uma dada pelo campo escalar e outra pelo campo de calibre. Isso contrasta com o fato de só haver uma escala característica (a do parâmetro de ordem) na teoria de Ginzburg-Landau.

Por fim, investigamos a dinâmica das soluções encontradas, onde verificou-se que para

se utilizar as isometrias de Lorentz nas soluções estáticas afim de se obter dinâmica, é necessário modificar a métrica de tal forma que ela seja invariante sob esse tipo de transformação, tal como é a métrica de Minkowski.

As principais perspectivas deste trabalho são a resolução das equações de movimento para a métrica modificada, verificando se nesse caso ainda é possível obter as soluções de parede de domínio, e caso positivo, se elas são estáveis. Como a modificação feita na métrica é válida em primeira ordem na velocidade, pode-se também investigar o comportamento do sistema para o conjunto de equações derivadas da métrica completa, ou considerar a métrica utilizada no capítulo 4 com a dependência temporal para os campos.

Por fim, gostaríamos de explorar também a formação de outros tipos de defeitos topológicos, como os vórtices, que ocorrem com frequência em supercondutores tipo II, e cuja dinâmica é extensivamente estudada.

Referências Bibliográficas

- [1] RAJAGOPAL, K.; WILCZEK, F. The condensed matter physics of QCD. 2000.
- [2] MALDACENA, J. M. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 2, p. 231–252, 1998.
- [3] GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R.; POLYAKOV, A. M. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett.*, B428, p. 105–114, 1998.
- [4] PETERSEN, J. L. Introduction to the Maldacena conjecture on AdS/CFT. *Int. J. Mod. Phys.*, A14, p. 3597–3672, 1999.
- [5] D’HOKER, E.; FREEDMAN, D. Z. Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence. *arXiv:hep-th/0201253*, 2002.
- [6] GUBSER, S. S. Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon. *Phys. Rev.*, D78, p. 065034, 2008.
- [7] HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P.; HOROWITZ, G. T. Building a holographic superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 101, n. 3, p. 031601, Jul 2008.
- [8] HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P.; HOROWITZ, G. T. Holographic Superconductors. *JHEP*, v. 12, p. 015, 2008.
- [9] HERZOG, C. P.; KOVTUN, P. K.; SON, D. T. Holographic model of superfluidity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, n. 6, p. 066002, Mar 2009.

- [10] KESKI-VAKKURI, E.; KRAUS, P. Effective theory of the quantum hall effect in ads/cft. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, n. 09, p. 130, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1126-6708/2008/i=09/a=130>>.
- [11] AMADO, I.; KAMINSKI, M.; LANDSTEINER, K. Hydrodynamics of holographic superconductors. *Journal of High Energy Physics*, v. 2009, n. 05, p. 021, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1126-6708/2009/i=05/a=021>>.
- [12] HERZOG, C. P.; YAROM, A. Sound modes in holographic superfluids. *Phys. Rev.*, D80, p. 106002, 2009.
- [13] MAEDA, K.; NATSUUME, M.; OKAMURA, T. Universality class of holographic superconductors. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, n. 12, p. 126004, Jun 2009.
- [14] ANTEZZA, M. et al. Dark solitons in a superfluid fermi gas. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 76, n. 4, p. 043610, Oct 2007.
- [15] KERÄNEN, V. et al. Dark Solitons in Holographic Superfluids. *arxiv:0906.5217v2*, 2009.
- [16] TINKHAM, M. *Introduction to superconductivity*. [S.l.]: McGraw-Hill, New York :, 1975. xiv, 296 p. : p. ISBN 0070648778.
- [17] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972.
- [18] ANNETT, J. F. *Superconductivity, superfluids and condensates*. [S.l.]: Oxford University Press, 2004.
- [19] WITTEN, E. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 2, p. 253–291, 1998.
- [20] BAYONA, C. A. B. *Um estudo da correspondência AdS/CFT*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

-
- [21] HERTOOG, T.; HOROWITZ, G. T. Designer gravity and field theory effective potentials. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 94, n. 22, p. 221301, Jun 2005.
- [22] BREITENLOHNER, P.; FREEDMAN, D. Z. Stability in Gauged Extended Supergravity. *Ann. Phys.*, v. 144, p. 249, 1982.
- [23] BEZERRA, V. H. F. *Estudo de Colisões de Paredes de Bloch e Localização de Modos Fermiônicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2005.